



UNIVERSIDADE DO ESTADO DE MATO GROSSO
FACULDADE DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE SINOP
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM
REDE NACIONAL – PROFMAT



LUCIANA DE OLIVEIRA TEODORO

**PROPOSTAS DE ATIVIDADES PRÁTICAS PARA A APLICAÇÃO DE
FUNÇÕES POR MEIO DO AJUSTE DE CURVAS**

Sinop – MT

2021

UNIVERSIDADE DO ESTADO DE MATO GROSSO – UNEMAT

LUCIANA DE OLIVEIRA TEODORO

**PROPOSTAS DE ATIVIDADES PRÁTICAS PARA A APLICAÇÃO DE
FUNÇÕES POR MEIO DO AJUSTE DE CURVAS**

Projeto de Pesquisa apresentado à Banca Examinadora do Curso Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT) – UNEMAT, Campus Universitário de Sinop-MT, como pré-requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Prof. Orientador: Dr. Rogério dos Reis Gonçalves.

Prof. Coorientador: Me. Odacir Elias Vieira Marques.

Sinop – MT

2021

CIP – CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

T314p Teodoro, Luciana de Oliveira.

Propostas de atividades práticas para a aplicação de funções por meio do ajuste de curvas / Luciana de Oliveira Teodoro. – Sinop, 2021.

118 f. ; 30 cm. (ilustrações) Il. color. (sim).

Trabalho de Conclusão de Curso (Dissertação/Mestrado) – Curso de Pós-graduação *Stricto Sensu* (Mestrado Profissional) Profmat, Faculdade de Ciências Exatas e Tecnológicas, Câmpus de Sinop, Universidade do Estado de Mato Grosso, 2021.

Orientador: Dr. Rogério dos Reis Gonçalves.

Coorientador: Me. Odacir Elias Vieira Marques.

1. Funções. 2. Ajuste de Curvas. 3. Método dos Mínimos Quadrados. 4. Atividades Práticas. I. Gonçalves, R. dos R., Dr. II. Marques, O. E. V., Me. III. Título.

CDU 517.2

Ficha catalográfica elaborada pelo bibliotecário Luiz Kenji Umeno Alencar - CRB1 2037.

FOLHA DE APROVAÇÃO



ESTADO DE MATO GROSSO
SECRETARIA DE ESTADO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE DO ESTADO DE MATO GROSSO
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE SINOP
FACET – FACULDADE DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
PROFMAT UNEMAT - SINOP



LUCIANA DE OLIVEIRA TEODORO

PROPOSTAS DE ATIVIDADES PRÁTICAS PARA A APLICAÇÃO DE FUNÇÕES POR MEIO DO AJUSTE DE CURVAS

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – Profmat da Universidade do Estado de Mato Grosso/UNEMAT – Campus Universitário de Sinop, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Rogério dos Reis Gonçalves

Coorientador: Prof. Me. Odacir Elias Vieira Marques

Aprovado em 30/07/2021

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Rogério dos Reis Gonçalves
UNEMAT – SINOP - MT

Prof. Dra. Luciana Mafalda Elias de Assis
UNEMAT – SINOP - MT

Prof. Dr. Otávio José Neto Tinoco Neves dos Santos
UEMS – PONTA PORÃ - MS

Sinop/MT
2021



Programa de Mestrado Profissional em Matemática em
Rede Nacional – PROFMATA/UNEMAT/Sinop/MT
Av. dos Ingás, 3001, CEP: 78.550-000, Sinop, MT
Tel/PABX: (66) 3511 2100. www.unemat.br – Email:
profmat@unemat.br

UNEMAT
Universidade do Estado de Mato Grosso
Carlos Alberto Reyes Maldonado

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho à Deus, minha família e a todos que contribuíram nesta jornada.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus por me proporcionar momentos como este.

Agradeço imensamente aos meus colegas da turma Profmat 2019, pelo companheirismo nos momentos de estudo e pela nossa amizade. Agradeço em especial ao Jonas Oliveira da Silva e Itamara Dal Bello, vocês foram e são maravilhosos.

Agradeço ao meu pai José Sebastião Teodoro e à minha mãe Doralice de Oliveira Teodoro pelo incansável incentivo e na crença que somente a educação faz acontecer mudanças. Ao meu esposo, Antônio do Vale Araújo, por todo apoio, incentivo, compreensão e confiança, meus filhos, José Ricardo Teodoro do Vale Araújo e Arthur Teodoro do Vale Araújo, assim como, meus familiares e amigos.

Agradeço também aos professores desse curso, Emivan Ferreira da Silva Giovane Maia do Vale, Miguel Todayuki Koga, Oscar Antônio Gonzalez Chong e Silvio César Garcia Granja, por todo conhecimento prestado, e em especial aos meus orientadores, Prof. Rogério dos Reis Gonçalves e Prof. Odacir Elias Vieira Marques, pelo empenho, dedicação e paciência para a construção desse trabalho.

Agradeço à CAPES pelo apoio financeiro e encerro esse curso com um sentimento único, o de agradecimento

EPÍGRAFE

“Feliz aquele que transfere o que sabe e aprende o que ensina.”

Cora Coralina

RESUMO

TEODORO, L. O. **PROPOSTAS DE ATIVIDADES PRÁTICAS PARA A APLICAÇÃO DE FUNÇÕES POR MEIO DO AJUSTE DE CURVAS**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional), Universidade do Estado de Mato Grosso, Faculdade de Ciências Exatas e Tecnológicas, MT, f., 2021.

O ensino de funções é essencial no processo de ensino e aprendizagem, por ser um objeto matemático de caráter integrador, que possibilita relacionar atividades do cotidiano com conteúdos matemáticos, permitindo estudar o comportamento de fenômenos tanto do cotidiano, como de outras áreas do conhecimento. Este ensino pode se tornar mais instigador quando os estudantes são provocados às reflexões, para que sintam necessidade e vontade de aprender. Refletindo sobre isso, decidiu-se, neste trabalho, apresentar algumas atividades práticas que o professor poderá inserir na sua docência, a fim de contribuir para que os estudantes se reconheçam como sujeitos ativos no processo de ensino e aprendizagem. As atividades sugeridas são: (i) apresentar algumas possibilidades de modelos matemáticos aplicados na construção civil; (ii) aproximar a função seno no intervalo $[0, 2\pi]$ por meio de uma função polinomial de grau cinco; (iii) encontrar uma função quadrática que represente a interdependência entre as variáveis espaço e tempo a partir de uma atividade experimental denominada “Queda Livre”; (iv) estimar o valor da aceleração gravitacional no local de aplicação da atividade “Queda Livre” e (v) fazer uma estimativa da altura máxima atingida por uma bola, e a distância percorrida pela bola em relação ao eixo horizontal (solo) por meio do experimento “chutando uma bola de futebol”. Cada atividade (situação-problema) será modelada por meio do ajuste de curvas e, neste trabalho, foi utilizado o *software* GeoGebra como recurso didático e facilitador na aprendizagem. Ainda, foi tratado, sucintamente, o método dos mínimos quadrados para encontrar, dado o tipo de curva, aquela que melhor se ajusta aos dados e, dependendo do nível de escolaridade da turma, o professor decidirá sobre o seu uso.

Palavras-Chave: Funções; Ajuste de Curvas; Método dos Mínimos Quadrados; Atividades práticas.

ABSTRACT

TEODORO, L. O. PROPOSALS OF PRACTICAL ACTIVITIES FOR THE APPLICATION OF FUNCTIONS THROUGH CURVE ADJUSTMENT. Dissertation (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional), Universidade do Estado de Mato Grosso, Faculdade de Ciências Exatas e Tecnológicas, MT, f., 2021.

The teaching of functions is essential in the teaching and learning process, as it is a mathematical object with an integrative character, which makes it possible to relate daily activities with mathematical contents, allowing the study of the behavior of phenomena both in daily life and in other areas of knowledge. This teaching can become more instigating when students are provoked to reflect, so that they feel the need and desire to learn. Reflecting on this, it was decided, in this work, to present some practical activities that the teacher can include in their teaching, in order to help students recognize themselves as active subjects in the teaching and learning process. The suggested activities are: (i) to present some possibilities of mathematical models applied in civil construction; (ii) approximate the sine function on the interval through a polynomial function of degree five; (iii) find a quadratic function that represents the interdependence between space and time variables from an experimental activity called "Free Fall"; (iv) estimate the value of the gravitational acceleration at the place of application of the "Free Fall" activity and (v) estimate the maximum height reached by a ball, and the distance traveled by the ball in relation to the horizontal axis (ground) through of the "kicking a soccer ball" experiment. Each activity (problem-situation) will be modeled through curve fitting and, in this work, the GeoGebra software was used as a didactic resource and facilitator in learning. Furthermore, the method of least squares was briefly discussed to find, given the type of curve, the one that best fits the data and, depending on the level of schooling of the class, the teacher will decide on its use.

Key words: Functions; Curve Adjustment; Minimum squares method; practical activities

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Barra de menus/ Arquivo.....	33
Figura 2: Barra de menus/Editar.	33
Figura 3: barra de menus/Exibir	34
Figura 4: Barra de menus/Opções	35
Figura 5: Barra de menus/Ferramentas	35
Figura 6: Barra de menus/Janela	36
Figura 7: Barra de menus/Ajuda.....	36
Figura 8: Representação dos dados obtidos em um experimento de queda livre.	38
Figura 9: Usando desvios para dar significado ao MMQ	40
Figura 10: Gráfico de uma função do tipo modular	43
Figura 11: Gráfico de uma função “suave”	44
Figura 12: Diagrama de dispersão – regressão linear.....	45
Figura 13: Diagrama de dispersão – ajuste quadrático	49
Figura 14: Fachada da Igreja Matriz em Sorriso-MT	53
Figura 15: Inserindo uma imagem no GeoGebra	54
Figura 16: Documentos/Imagem	55
Figura 17: Imagem da Catedral inserida na janela de visualização do GeoGebra	56
Figura 18: Configurando a transparência da imagem no GeoGebra.....	57
Figura 19: Criando uma lista de pontos no GeoGebra	58
Figura 20: Polinômio de regressão de grau dois.	59
Figura 21: Visualizando o nome do polinômio na “Janela de Visualização”	60
Figura 22: Ajuste polinomial de grau dois no intervalo $[0.0, 1.0]$	61
Figura 23: Ajuste polinomial de grau dois no intervalo $[7.5, 8.5]$	61
Figura 24: Gráfico da função seno	67
Figura 25: Pontos demarcados no gráfico da função seno no intervalo $[0, 2\pi]$	68
Figura 26: Lista de pontos no Geogebra	69
Figura 27: Polinômio de aproximação de grau 5 – Visualizando a Janela de Álgebra.	70
Figura 28: Polinômio de aproximação de grau 5 – Janela de Visualização	71
Figura 29: Polinômio de aproximação de grau 5 e valores do seno do ângulo de 0,72 radianos por meio das funções seno e da polinomial de grau 5– Janela de Visualização	72
Figura 30: Gráfico da função erro absoluto	73
Figura 31: Gráfico da função erro relativo	74
Figura 32: Função de aproximação definida por duas funções quadráticas	75

Figura 33: Gráfico de dispersão entre o tempo (em s) e a altura (em m) de um objeto em queda livre.....	78
Figura 34: Ajuste polinomial de grau 2 relacionando o tempo (s) e a altura (m) de um objeto em queda livre.	79
Figura 35: Coeficiente de determinação - R^2	80
Figura 36: Regressão polinomial de grau dois do tipo, $y(x) = y_0 + \frac{1}{2}gt^2$	86
Figura 37: Variação da altura em cada intervalo de tempo.	90
Figura 38: Ilustração de como encontrar o instante e a posição da bola por meio da reprodução do vídeo e da tecla “Print Screen” do teclado.	94
Figura 39: Conjunto de imagens sobrepostas.	95
Figura 40: Diagrama de dispersão ($h \times t$) associado à atividade	96
Figura 41: Polinômio de aproximação de grau 2 – Atividade	97
Figura 42: Obtendo as coordenadas do vértice da parábola – Atividade	99
Figura 43: Função que modela a trajetória da bola – Atividade	103
Figura 44: Estimativa da altura máxima alcançada pela bola.....	106
Figura 45: Gráfico de dispersão	116
Figura 46: Reta de ajuste.	117

LISTA DE QUADROS

Quadro 1: Habilidades relacionadas ao tema funções extraídas da BNCC	28
Quadro 2: Dados para resolver o problema modelo.....	47
Quadro 3: Escolha dos pontos para aplicação do ajuste quadrático na Atividade 1.	64
Quadro 4: Dados obtidos para aplicação do MMQ na Atividade 01.	65
Quadro 5: Pontos coletados do experimento	77
Quadro 6: Somatórios para resolução da atividade 03.	81
Quadro 7: Somatório para resolver o caso $y(x) = y_0 + \frac{1}{2}gt^2$	85
Quadro 8: Variação da altura em intervalos de tempo de 0.1 s.....	91
Quadro 9: Pontos de uma curva.....	116

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	14
1.1	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	16
1.2	ESTRUTURA DO TRABALHO.....	24
2	BNCC COMO SUPORTE TEÓRICO PARA ESTA DISSERTAÇÃO	26
3	REVISITANDO ALGUMAS FERRAMENTAS DO GEOGEBRA	32
4	AJUSTE DE CURVAS	37
4.1	UMA PROPOSTA PARA A APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS EM SALA DE AULA	40
5	ATIVIDADES PROPOSTAS	52
5.1	ATIVIDADE 1: MODELANDO UMA ESTRUTURA ARQUITETÔNICA POR MEIO DE UMA FUNÇÃO QUADRÁTICA.....	52
5.2	ATIVIDADE 2: APROXIMAÇÃO DA FUNÇÃO SENO POR UMA FUNÇÃO POLINOMIAL DE GRAU 5	67
5.3	ATIVIDADE 3: QUEDA LIVRE	77
5.4	ATIVIDADE 4: ACELERAÇÃO GRAVITACIONAL.....	87
5.5	CHUTANDO UMA BOLA DE FUTEBOL.....	93
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	108
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	110
	APÊNDICE	113

1 INTRODUÇÃO

A experiência em sala de aula mostra que ensinar Matemática não é uma tarefa fácil, pois o professor se depara com inúmeros desafios de aprendizagem no dia a dia de uma sala de aula, o que nos leva a buscar técnicas alternativas e diferenciadas de transposição de conhecimento, cabendo a nós a responsabilidade de superar tais adversidades, pois os alunos aprendem de formas e em tempos distintos.

Desafios estes, que enquanto professores presenciamos em sala de aula, e que nos levaram a buscar novos meios para tornar o processo de ensino mais significativo, menos abstrato; trabalhar os conteúdos de uma forma em que os alunos consigam ver alguma aplicação do conceito numa situação real; pois é recorrente ver alunos perguntando “onde vou utilizar isso?”, “para que isso vai me servir na vida?”. A matemática em certos momentos é muito abstrata para a maioria dos alunos, surgindo muitas dúvidas sobre a aplicabilidade dos temas estudados, e com isso, distanciando-os de sua realidade.

Trata-se de um problema a ser resolvido, pois quando o aluno não consegue ver essa relação ele fica desmotivado, por não ter sentido para ele aquele conteúdo ali isolado, e nesse contexto, apresentamos uma proposta de ensino para trabalhar os conceitos matemáticos relacionados e mais próximos da realidade do aluno. Dessa forma, escolheu-se o conteúdo de funções para o trabalho, devido ao caráter integrador que ele possui, e considerando a importância do mesmo na formação do aluno. Além disso, usamos o MMQ (Método dos Mínimos Quadrados) como ferramenta por ser muito utilizado para modelar problemas em diversas áreas como, saúde, economia, educação entre outras. Como auxílio também recorreremos a uma ferramenta muito utilizada que é o software GeoGebra.

Este trabalho tem como objetivo deixar em evidência para o professor que com a utilização do MMQ como ferramenta de ensino ocorre a possibilidade de inserir no ensino da matemática elementos do cotidiano e com isso construir algo novo com os alunos, pois acreditamos que a utilização do MMQ, na qual o aluno irá se deparar com conteúdos e habilidades por ele adquiridos, poderá levá-lo à construção de novos saberes e a uma visão mais prática da matemática.

A proposta de trabalho se justifica ao tentarmos desenvolver um ensino que prioriza experiências práticas; que transforma a matemática em algo prático e aplicável; que faça realmente sentido para o aluno ao ensinarmos para ele os conceitos e objetos de ensino; que esteja de acordo com o que é de vivência do dia a dia; e que considere o seu conhecimento prévio. Dessa maneira, a utilização do Ajuste de Curvas pelo MMQ, aplicado por meio de atividades práticas, pode contribuir no ensino de funções para que haja uma aprendizagem significativa dos alunos.

A escolha das atividades aqui propostas se deu pelo fato de poderem ser exploradas de várias formas, em casa ou na escola, e sem a obrigatoriedade do uso de um laboratório de física e/ou matemática e sendo atividades experimentais simples, divertidas e que valorizam, além dos conceitos matemáticos e de outras ciências, a empatia e a socialização entre os alunos, alinhando-se à BNCC (Base Nacional Comum Curricular). Em conversa com colegas professores e colegas do curso de mestrado ouvimos boas afirmações em relação às atividades práticas, o que deu um incentivo maior para essa escolha. O parecer de colegas de profissão é considerado importante pois nos faz acreditar ser viável a aplicação da proposta em sala de aula com os alunos, num breve retorno presencial.

A princípio esse trabalho foi pensado para ser aplicado com os alunos, mas devido a pandemia da COVID-19 não foi possível a sua aplicação pelo fato do não retorno às aulas presenciais.

A elaboração deste trabalho baseia-se nos seguintes procedimentos metodológicos: a) realização de uma pesquisa bibliográfica; b) apresentação das atividades propostas c) o passo a passo em cada uma delas com sugestões de como explorar ao máximo essas atividades.

1.1 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Neste capítulo, faremos uma revisão bibliográfica sobre aplicações do Método dos Mínimos Quadrados (MMQ). O ajuste de curvas pelo Método dos Mínimos Quadrados é utilizado em várias áreas, pois permite-nos fazer previsões ao encontrar uma função que melhor descreve um conjunto de dados experimentais. A seguir, apresentaremos alguns trabalhos que fundamentam a proposta desta dissertação.

Souza (2021) propõe para o ensino de funções, em uma turma do primeiro ano do ensino médio, o Método dos Mínimos Quadrados utilizando os dados obtidos em um lançamento de foguete de garrafa pet e ar comprimido, feito pelos alunos. A ideia é encontrar a função que melhor se ajusta a esses dados e melhor representa a trajetória do foguete. É uma proposta com a possibilidade de parceria com um professor de Física. Esta proposta valoriza a interdisciplinaridade entre a matemática e a física. O trabalho mostra também como um conteúdo de nível superior pode ser aplicado no Ensino Médio de forma simples e acessível, por meio de alguns experimentos, tendo bons resultados e sendo viável sua aplicação na Educação Básica, etapa do Ensino Médio.

Silva (2020) apresenta um trabalho envolvendo Modelagem Matemática e Estatística com o objetivo de desenvolver um pensamento científico nos estudantes. Nos problemas propostos são utilizados o método dos mínimos quadrados a fim de encontrar a curva que melhor se ajusta aos dados. Ele trabalha a forma básica, o conceito de regressão linear, exponencial e quadrático. São apresentadas três aplicações em conjuntos de dados reais utilizando como ferramenta o Microsoft Excel. As aplicações referem-se à dilatação linear (em mm) e a temperatura (em $^{\circ}C$) de um material, as quais foram modeladas por meio de um ajuste linear e ao crescimento de células, por meio de um ajuste exponencial e, por fim, usou o ajuste quadrático para modelar um problema relacionado ao lançamento de um objeto. Para o autor, a aplicação da proposta com os alunos através do método dos mínimos quadrados, aliado ao Microsoft Excel, pode despertar o interesse dos alunos para a importância da Modelagem Matemática na tomada de decisões. Ainda conforme Silva (2020), a escolha do método deve-se ao fato dele oferecer a possibilidade de trabalhar com

conteúdos já consolidados em anos anteriores, levando assim o aluno a uma aprendizagem mais significativa.

Brito (2019) em seu trabalho apresenta a Modelagem Matemática e suas potencialidades no processo de aprendizagem e as diferentes formas de praticá-la e concebê-la. Brito também trabalha o tema de Ajuste de curvas pelo Método dos Mínimos Quadrados somente para o caso das funções polinomiais com abordagem em turmas do Ensino Médio, e apresenta um exemplo de atividade de Modelagem Matemática do ponto de vista interdisciplinar utilizando-se do ajuste de curvas para o reconhecimento da importância da Matemática como uma ferramenta de raciocínio, representação, comunicação e argumentação. A atividade apresentada denominada Gestão da velocidade e possíveis implicações na segurança do pedestre onde mostra a relação da mudança de velocidade e mudança no número de feridos de acidentes de trânsito, onde a mudança na velocidade reflete no número de feridos. Para Brito, por ser a Modelagem Matemática de caráter naturalmente interdisciplinar, contribui, portanto, de forma relevante para a melhoria da educação brasileira, propiciando ao aluno um grau de elevação no nível de aprendizado partindo do concreto, de uma situação real para uma concepção de mais reflexão, de mais abstração. Enfatiza também algumas dificuldades para a aplicação da modelagem que oriunda exclusivamente da realidade de cada escola, tais como: a limitação do tempo, cultura da escola e a rigidez de algumas estruturas curriculares. Mesmo diante dessas dificuldades a importância dos problemas reais, sucinta a aplicação da modelagem, e através do Método dos Mínimos Quadrados possibilitam ao aluno a resolução de problemas advindos da realidade.

Gonçalves (2018) apresenta um trabalho onde mostra a possibilidade de aplicação do método dos mínimos quadrados em situações do cotidiano. O objetivo foi mostrar as possibilidades de aplicações práticas do método. Nesse sentido, a autora busca encontrar uma curva de ajuste de modo a obter um modelo matemático para estimar a população brasileira para 2020 com base de dados entre 1950 e 2000. São apresentados, pela autora, um ajuste linear e um ajuste quadrático para a escolha da função que melhor representa a curva, ou seja, da função que contém o menor erro. A autora conclui que com a aplicação do ajuste de curvas foi possível aplicar conhecimentos adquiridos em sala de aula em situações práticas, tornando assim, segundo a autora, “mais bem aproveitado o conteúdo”. Foi possível obter um bom

resultado com menor erro possível e que este trabalho “contribui para o cálculo da previsão da quantidade de habitantes de certa região, como cidade, país, entre outras, além de oferecer ao discente uma melhor compreensão dessa atividade.

Souza (2018) propõe o método dos mínimos quadrados para a resolução de sistemas sobredeterminados, ou seja, aqueles em que o número de equações é maior que os número de incógnitas. Estes tipos de sistemas de equações lineares foram utilizados para modelar um problema de geoposicionamento, tendo como objetivo, determinar a posição de um receptor em um sistema de coordenadas cartesianas que recebe o sinal de vários satélites. Souza também recorreu aos *softwares* Geogebra e Wolfram Mathematica.

Maluf (2018) apresenta em seu trabalho, detalhes da teoria da aproximação de funções e uma aplicação em práticas esportivas com objetivo específico de encontrar limitantes e estimativas futuras para certos recordes esportivos e, dentre os conceitos matemáticos, necessários, destacados por ele para este fim, está o método dos mínimos quadrados. Associando assim, conceitos matemáticos, práticas esportivas e trabalhando a interdisciplinaridade.

Gavarone (2017) apresenta um estudo sobre aproximação de funções pelo método de ajuste de curvas e interpolação polinomial, caracterizando cada método. Este trabalho tem como objetivo fazer um prognóstico da produção do leite e o crescimento populacional no município de Terra Nova do Norte-MT. Gavarone salienta a importância da Modelagem Matemática na motivação do professor e a facilitação da aprendizagem por transformar um problema real em um problema matemático e dá igual importância aos métodos de aproximação utilizados por ele.

Santana (2017) apresenta em seu trabalho o processo de ajuste de curva para dados experimentais pelo método dos mínimos quadrados, de modo a aproximar esses dados por meio de uma função e, para isso, apresenta uma proposta didática de ajuste de curvas através de um estudo de caso da tensão \times deformação no aço carbono SAE1020. Santana também relata a importância do método na iniciação à pesquisa, pois argumenta o processo de construção de funções consideradas como descritoras de fenômenos da física, biologia, engenharia, estatística e outras áreas. Santana considera que obteve bons resultados em relação ao modelo encontrado.

Segundo Santana (2017), além do método dos mínimos quadrados ser adequado para esse tipo de estudo, ele pode ser discutido na Educação Básica, especificamente no Ensino Médio, e o problema de tensãoxdeformação ser um dos pontos de partida dessa discussão. Afirma ainda que estudar o método dos mínimos quadrados foi enriquecedor e que tudo que foi apresentado pode ser explorado e debatido em contextos científicos e de aprendizagem matemática.

Silva Júnior (2017) apresenta um relato de um experimento realizado com uma turma do Ensino Fundamental, de um ajuste de curvas de dados observados pelo método dos mínimos quadrados. Esse experimento consiste em um lançamento de foguete a ar comprimido. Silva esclarece aos alunos que é necessário conhecimentos avançados para entender a parte inicial do processo de cálculo do método dos mínimos quadrados, apresentando então aos alunos, somente o sistema resultante dos cálculos. Silva propõe aos alunos o processo de determinação dos parâmetros da função de ajuste através da resolução do sistema. Para Silva, o objetivo era que os alunos observassem as aplicações dos conceitos matemáticos estudados em sala de aula em situações vivenciadas na prática. Portanto, uma discussão mais aprofundada com os alunos, sobre o método usado e as condições gerais de ajuste, não faziam parte do contexto pedagógico, no qual foi construída a prática de ensino, inclusive pelo fato do nível educacional dos alunos (9º ano do Ensino Fundamental) e conclui a viabilidade de aplicação para alunos do Ensino Médio, “de modo a explorar a aplicabilidade de conceitos tais como: funções, operações com matrizes, resolução de sistemas lineares, entre outros que possam ser enquadrados em situações-problema que atendam às restrições do experimento e do processo de cálculo do método”.

Cestaro (2016) apresenta uma aplicação do método dos mínimos quadrados para encontrar a curva de ajuste que representa a produção de soja nos anos de 2006/07 e 2007/08 no Estado de Rondônia e, a partir desses dados, fazer um prognóstico para a safra de 2015/2016. O autor faz uma comparação com os dados previstos pela CONAB (Companhia Nacional de Abastecimento) para a produção de soja para a safra de 2015/16. Cestaro afirma que os resultados foram muito satisfatórios, obtendo um modelo com uma diferença de 1,39% da estimativa feita pela Conab, concluindo assim, a validade do método aplicado.

Almeida (2015) busca uma apresentação do método dos mínimos quadrados aos alunos do Ensino Médio, ciente que os recursos necessários para essa implementação estejam disponíveis somente no terceiro ano dessa etapa de ensino. Almeida busca dar uma abordagem acessível, dada a versatilidade e potencialidade do método como ferramenta de Modelagem Matemática, sem perder o viés científico que norteia o método. O autor vai em busca de uma abordagem diferente do que ele considera a tradicional, onde há a preocupação quase que exclusiva com a execução do método. Ele ainda faz um breve estudo sobre o método dos mínimos quadrados e se utiliza de uma estratégia que segundo ele “é exposta, aproveitando conteúdos familiares ao aluno e introduzindo conceitos novos de forma diferenciada e suficiente para entendimento do desenvolvimento matemático em questão”. Almeida insere os conteúdos necessários para a obtenção do método, mesmo que esses conteúdos não façam parte da grade curricular do aluno. O autor finaliza o trabalho com algumas atividades de aplicação do método e sugestões para o uso de recursos computacionais, tais como, EqlinPlus e Geogebra como ferramenta de auxílio para a agilização de cálculos e como incentivo aos alunos o acesso às tecnologias.

Santos (2015) propõe um trabalho sobre ajuste de curvas através de polinômios, por acreditar que essa família de funções polinomiais constitui uma “poderosa” ferramenta matemática. Para o estudo da Interpolação polinomial, são apresentados os polinômios de Lagrange, iniciando com a interpolação linear e, posteriormente, para ordens superiores. Para o método dos mínimos quadrados, para o ajuste polinomial, o autor propôs uma apresentação utilizando somente de conceitos desenvolvidos no Ensino Médio, sobretudo, a função quadrática, sem usar derivadas. Para o caso de ajustes não polinomiais, Santos explora as funções logarítmicas e exponenciais. Santos apresenta também uma coletânea de atividades para serem trabalhadas em sala de aula. Segundo o autor, "o tema é abordado de forma a ser aplicado na formação de professores, em escolas técnicas profissionalizantes, assim como em turmas de ensino regular”.

Silva (2015) propõe um trabalho de aplicação do método dos mínimos quadrados para ajustes lineares sob uma ótica do cálculo diferencial e da álgebra linear, evidenciando a solução de sistemas lineares que não possuem soluções, a fim de obter êxito na escolha dos parâmetros a e b da função afim que mais se aproxima a um conjunto de dados. Silva também apresenta uma proposta de aula para o

professor, para que ele consiga trabalhar o método sem ter a necessidade de se recorrer a cálculos que exigem do aluno uma maior abstração. Nessa proposta, utiliza-se do *software* Excel como um recurso didático de motivação e verificação dos cálculos efetuados. Silva sugere também uma continuidade de um estudo mais aprofundado do tema e uma avaliação referente à motivação dos alunos em relação ao uso do *software* Excel como ferramenta de aprendizagem matemática.

Cunha (2014) apresenta uma proposta de resgate de um ensino significativo no Ensino Médio por meio da Modelagem Matemática. O método dos mínimos quadrados, sob a óptica da Álgebra Linear, é a estratégia escolhida para a complementação da situação-problema a ser modelada. Cunha sugere uma proposta em que o aluno conheça, aprenda e aplique este método em situações consideradas mais simples, inclusive em atividades interdisciplinares envolvendo a Biologia, Física e Geografia. Cunha conclui que obteve um bom resultado com a aplicação da Modelagem Matemática e do método dos mínimos quadrados, sendo, portanto, possível a sua aplicação no Ensino Médio e, ainda ressalta que este método proporciona a interdisciplinaridade, fazendo com que o aluno se interesse mais pelo método e, conseqüentemente, à matemática, ao perceber a sua contribuição em problemas do contexto cotidiano. O autor enfatiza a importância de se trabalhar com aproximações de funções para se prever resultados futuros; e o método dos mínimos quadrados nos proporciona fazer essa análise, prognósticos e estimativas, com resultados mais confiáveis, pois, minimiza o erro dessas previsões.

Espindola (2014) propõe uma abordagem introdutória e acessível do método dos mínimos quadrados, aos alunos do Ensino Médio, sem deixar de lado o rigor dos conceitos matemáticos. De início, é feita uma abordagem da importância de se trabalhar temas relacionados ao dia a dia dos alunos para a significação de conceitos matemáticos. Nesse contexto, o método dos mínimos quadrados é apresentado aos alunos utilizando situações do cotidiano. A escolha do tema, segundo Espíndola, é porque “os alunos do Ensino Médio não adquirem, no decorrer do colegiado, nenhum conhecimento para trabalhar com problemas superdeterminados, estes que são importantíssimos, pois recaem em diversos problemas encontrados no dia a dia do aluno.” Espíndola conclui que a maneira mais prática de inserir o método dos mínimos quadrados é através dos somatórios, pois, facilita as contas e o entendimento dos

alunos e que “o método facilita a resolução de diversos problemas do cotidiano, o que pode contribuir para que os alunos se sintam motivados a aprender”.

Ferri (2014) nos apresenta um trabalho de ensino de funções exponencial e logarítmica, antecedido do conteúdo de sequências (progressões). A proposta se dá através de atividades de Modelagem Matemática que, segundo Ferri, “desenvolvidas a partir do uso de tabelas construídas em planilhas eletrônicas e em um ambiente de geometria dinâmica (GeoGebra), explorando as ideias intuitivas de variação e caracterização dessas funções reais, a partir das progressões no domínio discreto “. Para o tema “ajuste de curvas”, Ferri sugere algumas atividades interdisciplinares com os professores das disciplinas de Química e Física, envolvendo estimativas. A atividade proposta e intitulada “A lei dos gases e o ajuste de curvas: um experimento interdisciplinar” teve como objetivo determinar a massa molar de um gás liberado na reação de um comprimido efervescente com água. Ferri considera que obteve um resultado satisfatório, onde a Modelagem Matemática se mostrou uma ferramenta muito importante para o processo de ensino e aprendizagem, possibilitando extrair de situações concretas, conceitos importantes e úteis.

Ribeiro (2014) apresenta um trabalho de aplicação da Modelagem Matemática, ajuste de curvas e interpolação polinomial, com o objetivo de fazer uma análise temporal de algumas circunstâncias reais do município de Iporá-GO. Tais aplicações foram feitas em situações presentes do dia a dia da cidade de Iporá. Foram elas: óbitos provocados por câncer, número de alunos no Ensino Básico, crescimento da frota de veículos, Produto Interno Bruto (PIB), consumo de água e dinâmica populacional iporaense. Ribeiro conclui que os métodos utilizados são muito úteis em casos em que se busca uma função de aproximação, pelas possibilidades de se fazer estimativas e discutir as possibilidades e perspectivas sobre cada situação estudada, permitindo assim, avaliar criticamente cada episódio estudado. Ribeiro afirma ainda que “desse modo, a matemática e, em especial, os métodos abordados, podem ser artifícios para alertar e conscientizar, auxiliando no despertar de atitudes e políticas de intervenções”, e ainda que “o trabalho mostra ainda que existe aplicabilidade da interpolação e do ajuste de curvas pelo método dos quadrados mínimos no Ensino Médio, que pode ser enriquecida pela modelagem de problemas cotidianos.”

Silva (2014) apresenta uma proposta de resgate de um ensino significativo no Ensino Médio, através da Modelagem Matemática. O método dos mínimos quadrados sob a óptica da álgebra linear é a estratégia escolhida para a complementação da situação-problema a ser modelada. Silva sugere uma proposta em que o aluno conheça, aprenda e aplique este método em situações consideradas mais simples, inclusive em atividades interdisciplinares envolvendo a Biologia, Física e Geografia. Silva conclui que obteve um bom resultado com a aplicação da Modelagem Matemática e do método dos mínimos quadrados, sendo, portanto, possível a sua aplicação no Ensino Médio e, ainda ressalta que este método proporciona a interdisciplinaridade, fazendo com que o aluno se interesse mais pelo método e, conseqüentemente, à matemática, ao perceber a sua contribuição em problemas do contexto cotidiano. O autor enfatiza a importância de se trabalhar com aproximações de funções para se prever resultados futuros; e o método dos mínimos quadrados nos proporciona fazer essa análise, prognósticos e estimativas, com resultados mais confiáveis, pois, minimiza o erro dessas previsões.

Souza (2014) apresenta uma proposta de trabalho para o estudo do produto matricial através do método dos mínimos quadrados para obtenção de um prognóstico da produção de soja na região em anos subsequentes. Segundo ele, há uma preocupação dos professores em se trabalhar aplicações práticas dos conteúdos trabalhados em sala de aula. Mesmo não sendo uma tarefa fácil motivar alunos nos dias de hoje, com acesso tão fácil a novas tecnologias. E como parte desta proposta, ele propõe o uso do *software* Geogebra como ferramenta de implementação do Método. Souza conclui que mesmo havendo obstáculos, obteve um bom resultado, sendo possível e viável a aplicação do método dos mínimos quadrados ao conteúdo de matrizes no Ensino Médio pelo fato do trabalho ter proporcionado uma aplicação prática permitindo aos alunos a observação dos resultados. E esses obstáculos citados no decorrer do processo, dos quais, um deles, foi a falta de tempo suficiente, servem de aprendizado para no futuro não se repetirem. Com um intervalo de tempo maior, Souza acredita que teria tido um melhor resultado. De acordo com Souza, a prática e a metodologia utilizada no trabalho facilitam a compreensão de conceitos matemáticos, contribuindo para o crescimento e melhor rendimento dos alunos, que, segundo Souza (2014) "É certo que, a partir do momento que há preocupação do professor em trazer a realidade do aluno para a sala de aula e em relacionar conteúdo

com as situações cotidianas dos alunos, se reduz substancialmente as barreiras para o ensino de matemática.”

Medeiros (2013) procura encontrar um modelo matemático para representar o crescimento populacional da cidade de Petrópolis (RJ) no período de 1982 a 1990. O autor se utilizou de três modelos, o linear, o exponencial e o logístico para a comparação e escolha do melhor modelo, sendo o modelo logístico o escolhido por apresentar o menor erro e mais, se aproximar dos dados reais. O autor justifica a escolha do método por ser, segundo ele, um dos mais disseminados pelo meio acadêmico.

Duarte (2010) aborda em seu estudo a estimativa de crescimento da cana-de-açúcar em função do número de dias pós-plantio por meio do método dos mínimos quadrados para obter um prognóstico desse crescimento e posteriormente compará-lo com o resultado real do crescimento para a verificação da precisão do método dos mínimos quadrados. Duarte conclui em seu estudo que o resultado foi satisfatório pois, o erro no modelo de ajuste encontrado foi relativamente baixo, quando comparado aos dados reais, sendo considerado excelente para este tipo de experimento.

1.2 ESTRUTURA DO TRABALHO

Este trabalho foi estruturado em seis capítulos. Neste capítulo tratamos de dissertações correlatas ao tema, extraídas do PROFMAT (Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) e outras, onde se encontra trabalhos com aplicações do MMQ em diversas situações tais como, lançamento de foguete, crescimento populacional, crescimento de células, entre outros, que mostram a aplicação do método em diversas áreas.

No Capítulo 2 apresentamos a BNCC como suporte teórico também para a dissertação. Tratamos sobre a importância de se trabalhar o conteúdo de funções, as habilidades e competências do ensino de funções no ensino fundamental e médio, e as competências que tratam das TDICs (Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação).

No Capítulo 3 apresentamos o software GeoGebra, suas funcionalidades e o passo a passo no software para resolver os problemas aqui apresentados.

No Capítulo 4 que trata sobre o ajuste de curvas apresentamos ao professor uma forma de abordar o MMQ com seus alunos em sala. É somente uma sugestão de trabalho, deixando claro ao professor que ele tem a liberdade de aplicar o método da forma que achar mais conveniente, pois para tal, depende de certos conceitos que pode o aluno não ter tido o contato ainda devido ao ano escolar que estiver cursando, como sistemas lineares, matrizes e somatórios.

No Capítulo 5 apresentamos quatro atividades práticas propostas para aplicação do MMQ para o ajuste de funções que representam essas situações. São elas: modelando uma estrutura arquitetônica por meio de uma função quadrática, aproximação da função seno por uma função polinomial de grau três, queda livre, aceleração gravitacional e chutando uma bola de futebol. No capítulo 6 apresentamos algumas reflexões acerca do trabalho realizado e do potencial do MMQ como recurso para o ensino. Apresentamos na sequência as referências bibliográficas e no apêndice o desenvolvimento do MMQ.

2 BNCC COMO SUPORTE TEÓRICO PARA ESTA DISSERTAÇÃO

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento normativo que estabelece o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica e foi criada com o objetivo de oferecer um ensino justo, inclusivo e democrático para todos os estudantes e também conforme definido na Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB, Lei nº 9.394/1996) deve nortear os currículos dos sistemas e redes de ensino das Unidades Federativas e as propostas pedagógicas de todas as escolas públicas e privadas de Educação Básica em todo o Brasil, mas considerando as particularidades de cada escola nos aspectos regionais, sociais e a metodologia de ensino.

A Base estabelece conhecimentos, competências e habilidades que se espera desenvolver nos estudantes no decorrer da educação básica e é orientada por princípios éticos, políticos e estéticos traçados pelas Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica, e somando-se aos propósitos que direcionam a educação brasileira para a formação humana integral e para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.

Essa proposta de trabalho se ampara nas competências e habilidades da BNCC relacionadas ao tema da proposta e com o objetivo de proporcionar ao aluno um ensino onde ele seja participativo, que envolva a sua realidade e que, o que os conceitos matemáticos, tenham de fato significados, e contribua na sua formação humana.

Sobre a aprendizagem matemática a BNCC ressalta que:

A aprendizagem em Matemática está intrinsecamente relacionada à apreensão de significados dos objetos matemáticos. Esses significados resultam das conexões que os alunos estabelecem entre os objetos e seu cotidiano, entre eles e os diferentes temas matemáticos e, por fim, entre eles e os demais componentes curriculares. Nessa fase, precisa ser destacada a importância da comunicação em linguagem matemática com o uso da linguagem simbólica, da representação e da argumentação. (BRASIL, 2017, p.274)

Nota-se nesta citação que há uma ênfase na aprendizagem significativa, a qual também é fundamentada nos estudos de Ausubel sobre a Teoria da Aprendizagem Significativa.

A Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel, cognitiva, considera o conhecimento prévio dos alunos como o fator que mais influencia na aprendizagem. Moreira e Ostermann (1999, p. 45) explicam que, para Ausubel, o fator isolado mais importante que influencia a aprendizagem é aquilo que o aprendiz já sabe. “Averigue isso e ensine-o de acordo”. Para Ausubel, existem estruturas de conhecimentos específicos chamadas de subsunçores, onde essa nova informação interage com os subsunçores, ocorrendo assim, a assimilação do conhecimento.

Como explica Darroz (2010, p. 28):

Os subsunçores são adquiridos por um processo de formação de conceitos que se inicia no nascimento. Esse processo, inicialmente, se dá por descoberta e, ao atingir a idade escolar, a maioria das crianças já possui um enorme leque de subsunçores em sua estrutura cognitiva e pode, então, aprender por recepção.

A proposta desta dissertação de mestrado contempla o conhecimento prévio dos estudantes. Segundo Moreira (2006), a Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel “preocupa-se com o processo da compreensão, transformação, armazenamento e uso da informação envolvida na cognição e tem como objetivo identificar os padrões estruturados dessa transformação”.

A aprendizagem significativa implicará sempre tentar assimilar explicitamente os materiais de aprendizagem [...] a conhecimentos prévios que em muitos casos consistem em teoria implícitas ou representações sociais adquiridas por processos igualmente implícitos. Nesse processo de tentar assimilar ou compreender novas situações, ocorre não só um crescimento ou expansão desses conhecimentos prévios, como também, como consequência desses desequilíbrios ou conflitos entre os conhecimentos prévios e a nova informação, um processo de reflexão sobre os próprios conhecimentos, que, conforme sua profundidade [...] pode dar lugar a processos de ajuste, por generalização e discriminação, ou reestruturação, ou mudança conceitual [...] dos conhecimentos prévios.” (POZO, 2002).

Mas, para que a Aprendizagem Significativa ocorra, Ausubel evidencia duas condições: A primeira é que o aluno queira aprender, tenha interesse, e se sinta motivado e a segunda é que o conteúdo tenha significado para o aluno, caso contrário, a aprendizagem se tornará mecânica e logo será esquecida pelo fato do uso de decoreba e repetição. Estas duas condições podem ser contempladas com a proposta deste trabalho e, para a concretude destes objetivos, foi pensado de forma cuidadosa a maneira que se pode propor algumas atividades aos professores atuantes na Educação Básica, de modo que realmente eles se sintam à vontade e confiantes em aplicá-las.

De acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), o estudo e aplicação de funções matemáticas que é tema dessa proposta de trabalho tem seu início nos anos iniciais do Ensino Fundamental com o desenvolvimento do pensamento algébrico e se desenvolvendo nos anos finais. No Ensino Médio o tema é trabalhado visando o seu aprofundamento e o desenvolvimento das Competências e Habilidades.

As competências “ Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente” e “Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas” vem ao encontro da proposta, pois trata de todo o processo de construção do conhecimento proporcionado pelas atividades práticas aqui propostas e também pela Modelagem Matemática.

O quadro abaixo apresenta algumas habilidades para o ensino de funções contempladas pela BNCC.

Quadro 1: Habilidades extraídas da BNCC, relacionadas ao tema funções

Compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica e utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis.
Resolver e elaborar problemas cujos modelos são as funções polinomiais de 1º e 2º graus, em contextos diversos, incluindo ou não tecnologias digitais.
Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau para representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a <i>softwares</i> ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica.

Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau para representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a *softwares* ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica.

Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau.

Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 2º grau do tipo $y = ax^2$.

Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos da Matemática Financeira ou da Cinemática, entre outros.

Identificar e associar sequências numéricas (PA) a funções afins de domínios discretos para análise de propriedades, incluindo dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.

Fonte: Extraído da BNCC

Podemos observar que elas são bem específicas e com isso exploram ao máximo o potencial de desenvolvimento que se espera dos estudantes.

Algumas das atividades propostas também podem ser trabalhadas em parceria com o professor de física, como a atividade “Queda livre”, “Aceleração gravitacional” e “Chutando uma bola de futebol”, pois exploramos também conceitos que se alinham com o que é previsto para o ensino de Física, como “Elaborar explicações, previsões e cálculos a respeito dos movimentos de objetos na Terra, no Sistema Solar e no Universo com base na análise das interações gravitacionais, com ou sem o uso de

dispositivos e aplicativos digitais (como softwares de simulação e de realidade virtual, entre outros)” e “Interpretar resultados e realizar previsões sobre atividades experimentais, fenômenos naturais e processos tecnológicos, com base nas noções de probabilidade e incerteza, reconhecendo os limites explicativos das ciências”.

A BNCC também contempla a elaboração e aplicação de modelos explicativos para os fenômenos naturais que são fundamentais no fazer científico, e que são contempladas na proposta de atividades práticas,

Na área de Ciências da Natureza, os conhecimentos conceituais são sistematizados em leis, teorias e modelos. A elaboração, a interpretação e a aplicação de modelos explicativos para fenômenos naturais e sistemas tecnológicos são aspectos fundamentais do fazer científico, bem como a identificação de regularidades, invariantes e transformações. Portanto, no Ensino Médio, o desenvolvimento do pensamento científico envolve aprendizagens específicas, com vistas a sua aplicação em contextos diversos. (Brasil, p.548)

Os PCN's (Parâmetros Curriculares Nacionais) também contemplam situações do cotidiano como a trajetória de uma bola, para a aplicabilidade de conceitos matemáticos,

Reconhecer a existência de invariantes que impõe condições sobre o que pode e o que não pode acontecer, em processos naturais, para fazer uso desses invariantes na análise de situações cotidianas. Assim, a conservação da quantidade de movimento pode ser utilizada para prever possíveis resultados do choque entre dois carros, a trajetória de uma bola após ter batido na parede, o movimento dos planetas e suas velocidades ao redor do Sol ou o equilíbrio de motos e bicicletas. (Brasil, p.11)

Sobre as funções, os PCNs para o Ensino Médio nos dizem que:

“O ensino isolado desse tema não permite a exploração do caráter integrador que ele possui. Devemos observar que uma parte importante da Trigonometria diz respeito às funções trigonométricas e seus gráficos. As sequências, em especial progressões aritméticas e progressões geométricas, nada mais são que particulares funções. As propriedades de retas e parábolas estudadas em Geometria Analítica são propriedades dos gráficos das funções correspondentes. Aspectos do estudo de polinômios e equações algébricas podem ser incluídos no estudo de funções polinomiais, enriquecendo o enfoque algébrico que é feito tradicionalmente. Além das conexões internas à própria Matemática, o conceito de função desempenha também papel importante para descrever e estudar através da leitura, interpretação e construção de gráficos, o comportamento de certos fenômenos tanto do cotidiano, como de outras áreas do conhecimento, como a Física, Geografia ou Economia. Cabe, portanto, ao ensino de Matemática garantir que o aluno adquira certa flexibilidade para lidar com o conceito de função em situações diversas e, nesse sentido, através de uma variedade de situações problema de Matemática e de outras áreas, o aluno pode ser incentivado a buscar a solução, ajustando seus conhecimentos sobre funções

para construir um modelo para interpretação e investigação em Matemática”. (PCNS, 1997, P.43-44)

De acordo com os PCNs de Matemática para o Ensino Médio, o tema estudado é um tema de caráter integrador o que identifica naturalmente com a Modelagem Matemática, sendo ela uma ferramenta integradora entre teoria e prática.

TDIC'S e BNCC

As tecnologias digitais de informação e comunicação (TDIC), são também contempladas na BNCC. Nas últimas décadas com o grande avanço das tecnologias houve também grandes mudanças nos meios de produção e disseminação do conhecimento, vindo essas tecnologias auxiliar no processo de ensino e aprendizagem. Nesse contexto a BNCC estabelece algumas habilidades e competências relacionadas às TDIC.

Habilidades e competências da BNCC que tratam dos recursos tecnológicos,

- usar diversas ferramentas de *software* e aplicativos para compreender e produzir conteúdos em diversas mídias, simular fenômenos e processos das diferentes áreas do conhecimento, e elaborar e explorar diversos registros de representação matemática; e
- utilizar, propor e/ou implementar soluções (processos e produtos) envolvendo diferentes tecnologias, para identificar, analisar, modelar e solucionar problemas complexos em diversas áreas da vida cotidiana, explorando de forma efetiva o raciocínio lógico, o pensamento computacional, o espírito de investigação e a criatividade (BRASIL, 2018, p.475).

Assim, conforme a BNCC, que incentiva o uso de recursos tecnológicos, escolhemos o *software* GeoGebra como uma ferramenta para contribuir no processo de ensino e aprendizagem.

3 REVISITANDO ALGUMAS FERRAMENTAS DO GEOGEBRA

O GeoGebra é um *software* gratuito de matemática que combina conceitos de geometria e álgebra em uma única GNU. É escrito em linguagem Java, o que lhe permite estar disponível em várias plataformas. O *software* pode ser baixado pelo site <http://www.geogebra.org> nos termos da GNU General Public License.

O GeoGebra foi criado em 2001 por Markus Hohenwarter e já recebeu diversos prêmios de *software* educacional na Europa e nos EUA. Ele é um *software* de matemática dinâmica para todos os níveis de ensino que reúne Geometria, Álgebra, Planilha de Cálculo, Gráficos, Probabilidade, Estatística e Cálculos Simbólicos em um único pacote fácil de se usar.

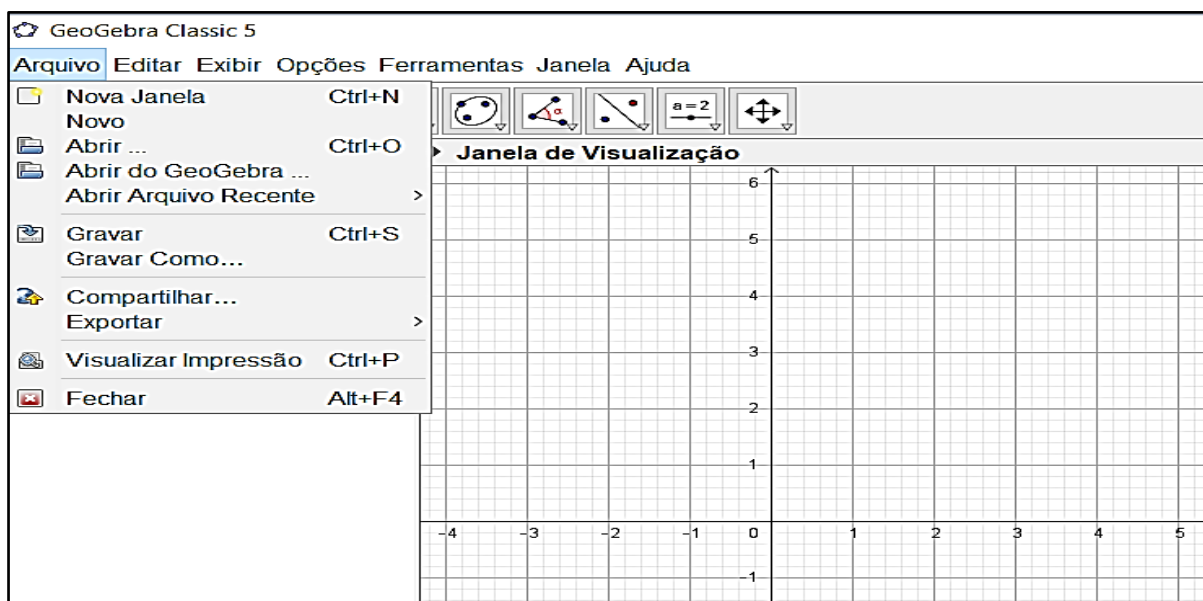
O site disponibiliza gratuitamente milhares de atividades, simulações, exercícios, aulas e jogos para matemática e ciência, materiais didáticos, aulas, tutoriais, entre outros. Em particular, para o Ensino Médio o GeoGebra é muito útil para trabalhar gráficos, funções, geometria plana e espacial, o que o torna, de acordo com o site, um líder na área de *softwares* de matemática dinâmica, apoiando o ensino e a aprendizagem em Ciência, Tecnologia, Engenharia e Matemática.

Apresentação da Barra de menus do software.

Optamos por apresentar, dentre as funcionalidades e a gama de recursos disponibilizados pelo *software* GeoGebra, somente o necessário para que sejam trabalhadas as atividades aqui propostas. Se o leitor se interessar em conhecer um pouco mais sobre o *software*, poderá acessá-lo no site disponibilizado no início deste capítulo.

A Figura 1 ilustra a barra de menu “Arquivo” do Geogebra. Ao clicarmos em arquivo, temos as opções: Nova Janela, Novo, Abrir, Abrir do GeoGebra, Abrir Arquivo Recente, Gravar, Gravar Como, Compartilhar, Exportar, Visualização da Impressão e Fechar.

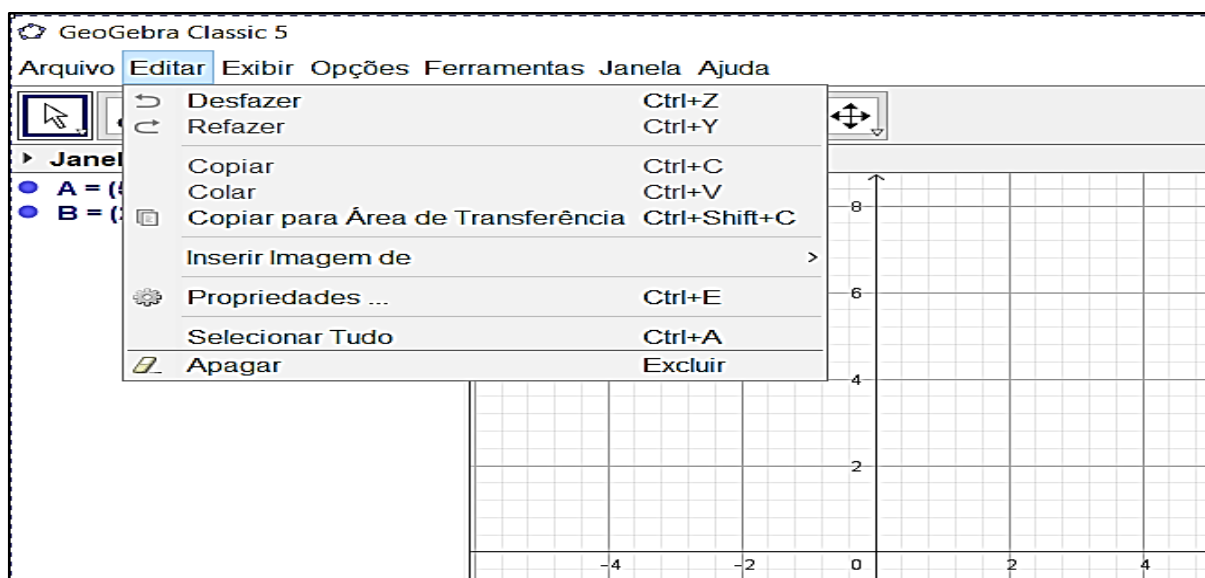
Figura 1: Barra de menus/ Arquivo.



Elaborado pela autora no *software* GeoGebra.

A Figura 2 apresenta a barra de menu “Editar” do Geogebra, contendo as opções: Desfazer, Refazer, Inserir imagem, Propriedades, Selecionar tudo e Apagar.

Figura 2: Barra de menus/Editar.

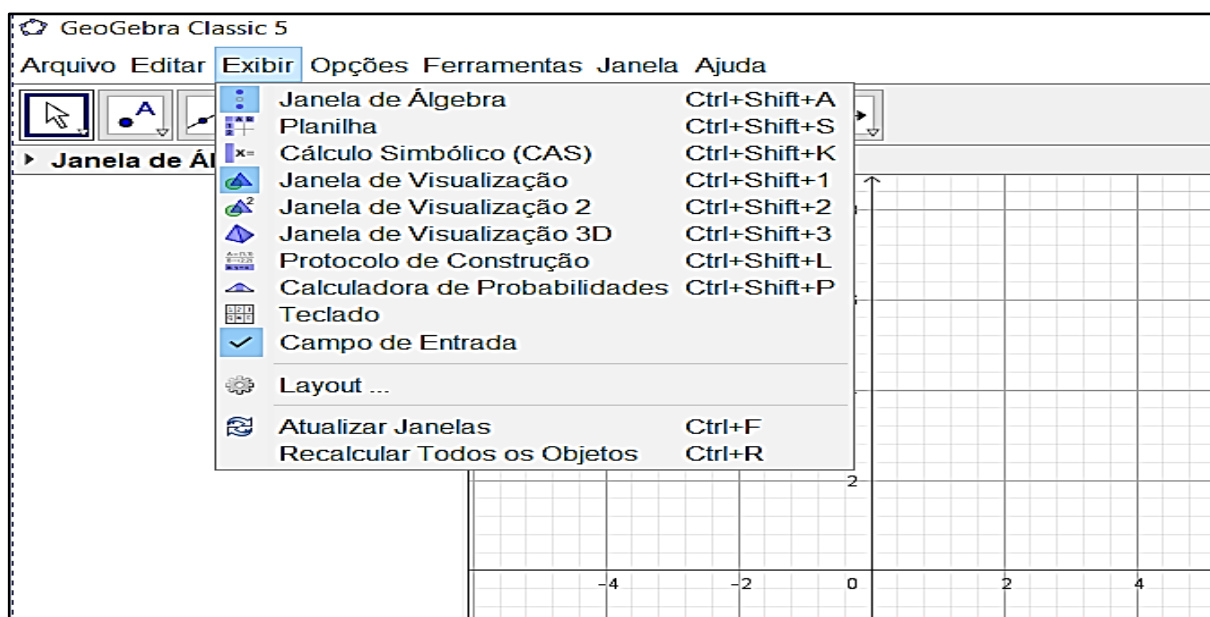


Elaborado pela autora no *software* GeoGebra

As Figuras 3, 4, 5, 6 e 7 seguem o mesmo padrão ao apresentado nas Figuras 1 e 2.

Exibir: Contém: Janela de Álgebra, Planilha, Cálculo Simbólico (Cas), Janela de Visualização, Janela de Visualização 2D, Janela de Visualização 3D, Protocolo de Construção, Calculadora de Probabilidades, Teclado, Campo de Entrada, Layout, Atualizar Janelas e Recalcular todos os Objetos.

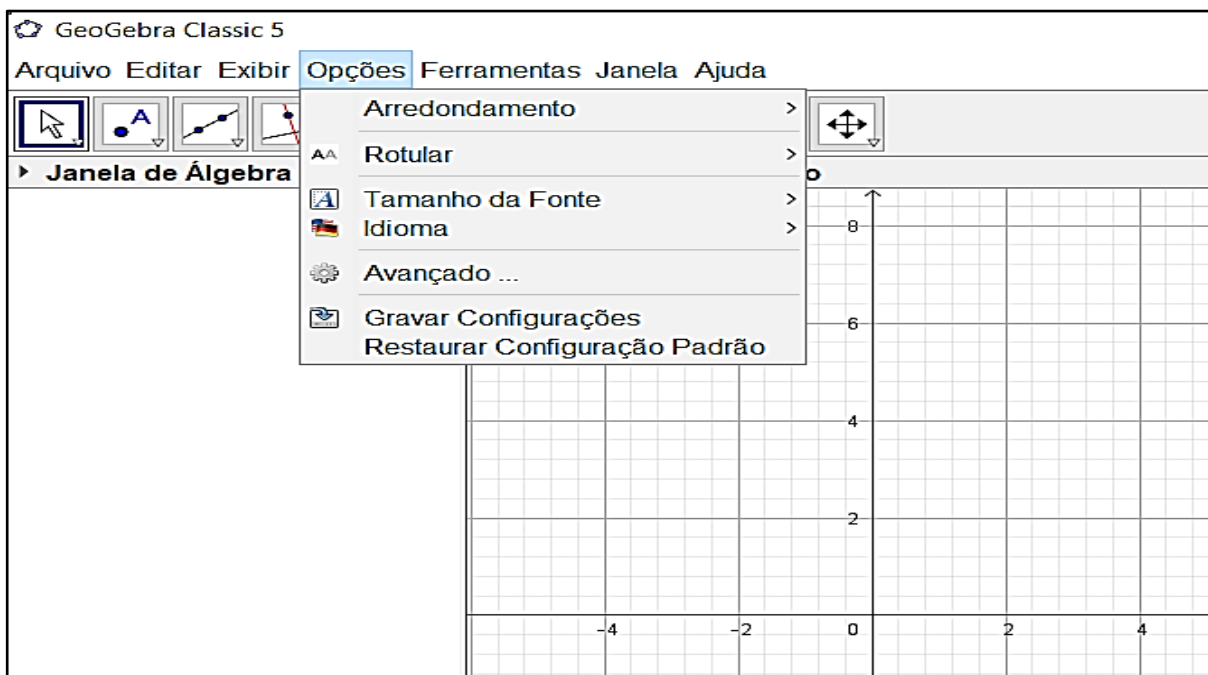
Figura 3: barra de menus/Exibir



Elaborado pela autora no *software* GeoGebra

Opções: Contém: Arredondamento, Rotular, Tamanho da Fonte, Idioma, Avançado, Gravar Configurações e Restaurar Configurações Padrão.

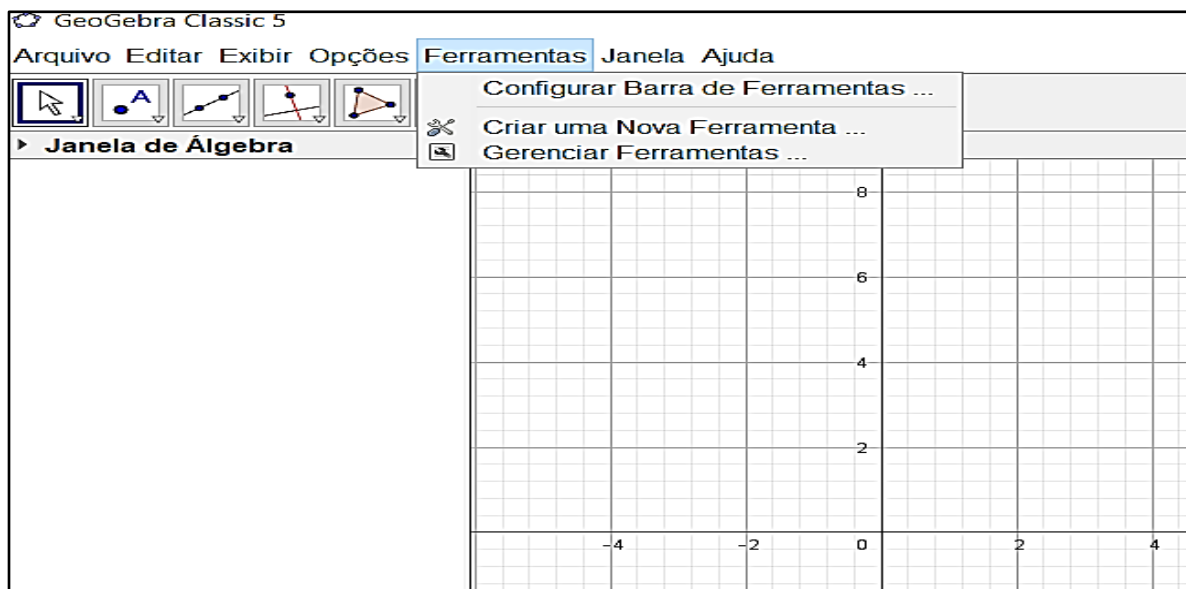
Figura 4: Barra de menus/Opções



Elaborado pela autora no *software* GeoGebra

Ferramentas: Contém: Configurar Barra de Ferramentas, Criar uma nova Ferramenta e Gerenciar Ferramentas.

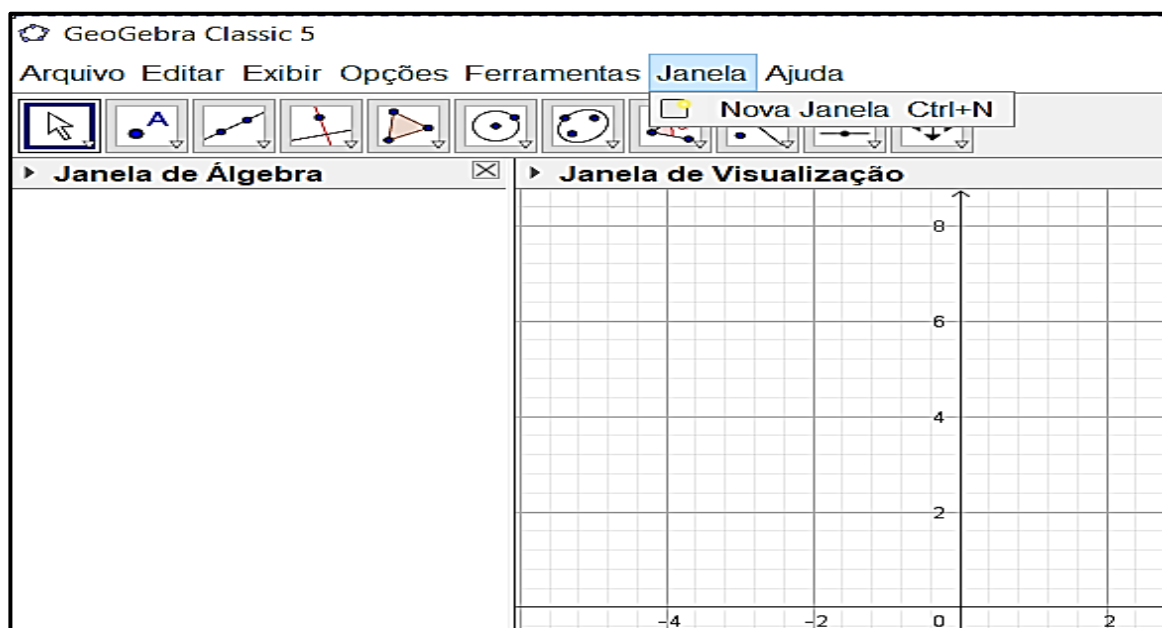
Figura 5: Barra de menus/Ferramentas



Elaborado pela autora no *software* GeoGebra

Janela: Contém: Nova Janela

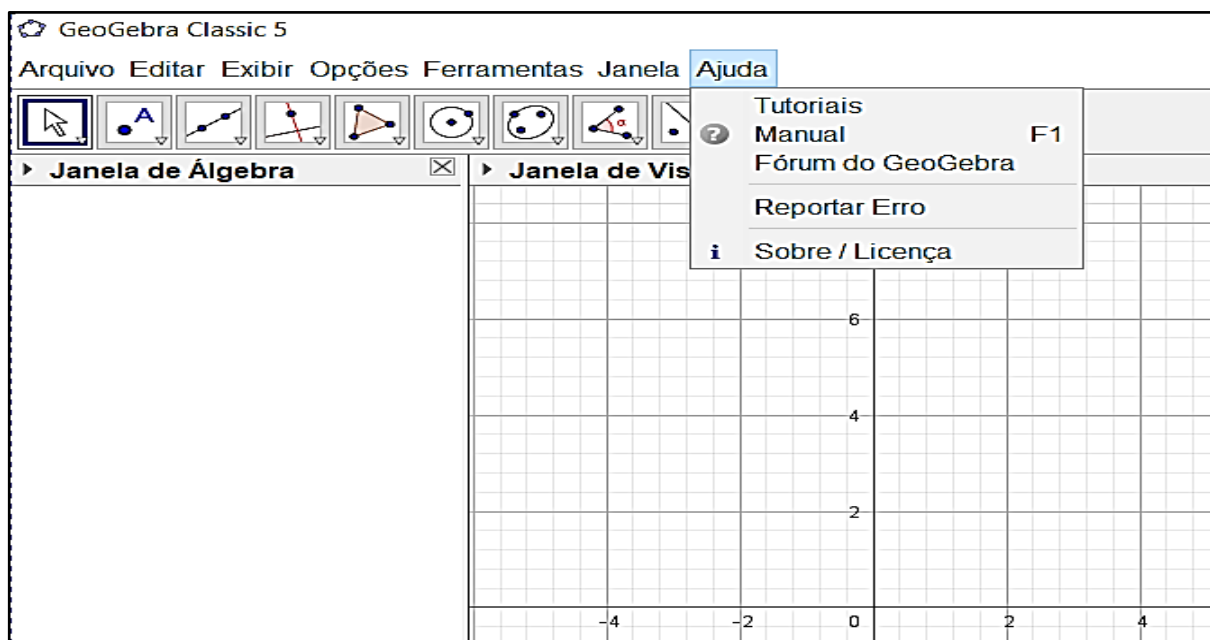
Figura 6: Barra de menus/Janela



. Elaborado pela autora no *software* GeoGebra

Ajuda: Contém: Tutoriais, Manual, Fórum do GeoGebra, e Informações sobre/licença.

Figura 7: Barra de menus/Ajuda



Elaborado pela autora no *software* GeoGebra

4 AJUSTE DE CURVAS

Quando lidamos com situações do cotidiano, situações reais ou certos experimentos científicos, temos a curiosidade ou o objetivo de descobrir as possíveis relações entre as variáveis envolvidas nessas situações. Pense em uma situação, por exemplo, de um experimento de queda livre onde pretende-se encontrar uma função que associa espaço em função do tempo, ou encontrar a função que representa a curva de uma estrutura arquitetônica. Podemos construir modelos que representem da melhor maneira possível os dados de um experimento e, dessa forma, também fazer prognósticos de situações e, a ferramenta utilizada neste trabalho para essa finalidade é o ajuste de curvas.

Segundo Bassanezi (2015, p.85):

Uma regressão ou ajuste de curvas é sempre um recurso formal para expressar alguma tendência ou relação entre a variável dependente x_n e a independente n , ou seja, é um mecanismo que fornece uma relação funcional $x_n = f(n)$ quando se tem alguma relação estatística. Fazer um ajuste de curvas significa simplesmente determinar os coeficientes de uma função, dada genericamente a priori, de modo que, no intervalo de valores considerado, esta função e os dados estatísticos sejam “próximos”. Dependendo do que entendemos por proximidade entre função ajustada e dados experimentais, teremos diferentes soluções para $f(n)$. De qualquer forma, só podemos garantir a proximidade entre a curva de regressão e os pontos dados no intervalo limitado onde tais pontos foram tomados. Fazer previsões de valores futuros é o objetivo principal de uma modelagem, e um ajuste dos valores conhecidos nem sempre pode servir para tal. Entretanto, como modelos parciais os ajustes são fundamentais no processo de modelagem global.

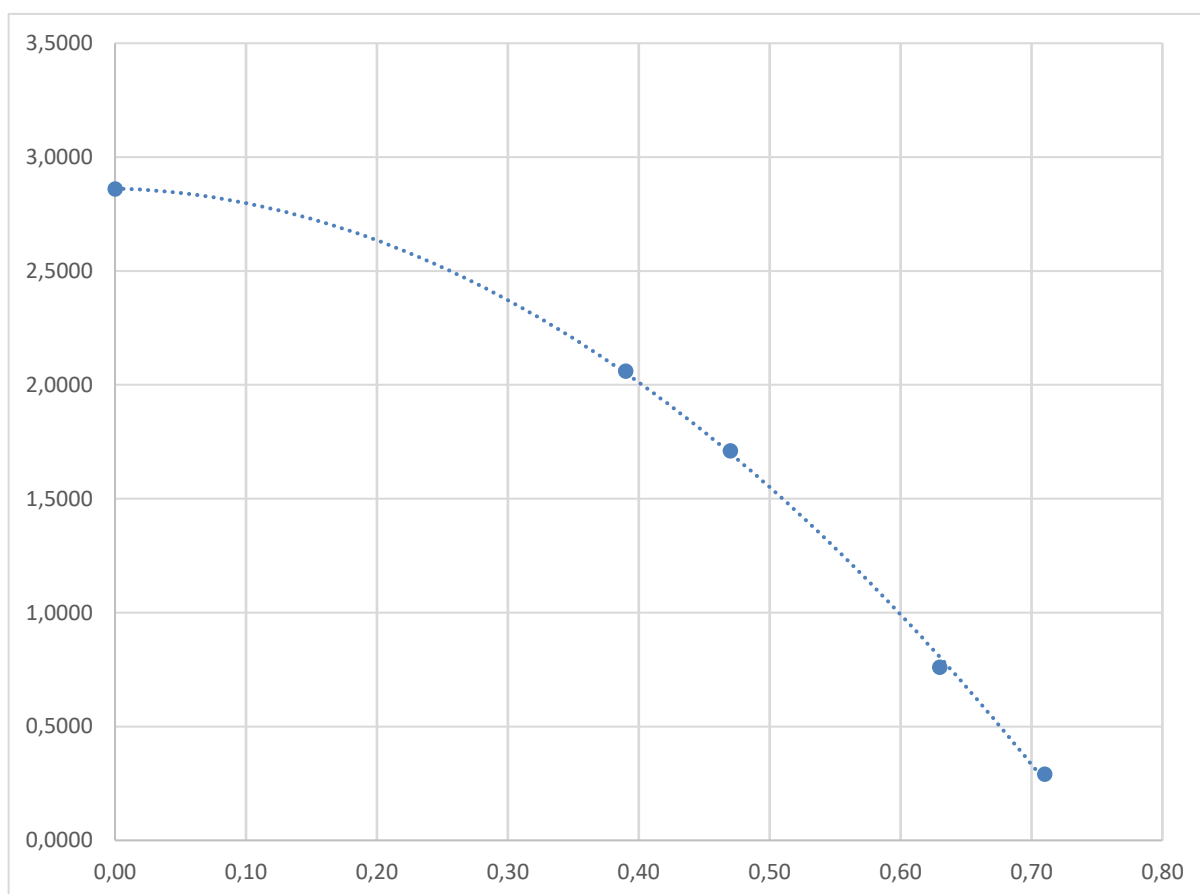
Segundo Almeida (2015, p.21) o ajuste de curvas “É o procedimento matemático que consiste em se determinar, a partir de uma série de pontos representativos das variáveis que compõem um determinado fenômeno, uma curva que o expresse matematicamente”.

Esses pontos podem ser obtidos por meio de uma coleta experimental. O professor pode propor aos alunos algum experimento de alguma pesquisa e pedir para que eles anotem os dados obtidos e os representem em um sistema de eixos ortogonais (plano cartesiano). Os alunos deverão verificar o comportamento desses pontos e prever o tipo de função que se ajusta a eles. É claro que, geralmente, essa previsão exige certo grau de conhecimento e, com isso, o professor deve tomar

cuidado ao escolher um experimento cujo modelo matemático possa ser representado por uma função que está de acordo com a proposta da matriz curricular.

Para simplificar, neste trabalho, uma das atividades propostas para a inserção na prática docente do professor é: convidar seus alunos a encontrar um modelo matemático que represente a altura (m) em função do tempo (s) de um objeto abandonado de uma determinada altura. Após a realização deste experimento, os alunos vão representar, em um plano cartesiano, os pares ordenados (tempo, altura) obtidos e perceber que estes pontos seguem uma tendência de pertencimento a uma parábola, conforme mostrado na Figura 8. Essa percepção exige certo nível de escolaridade.

Figura 8: Representação dos dados obtidos em um experimento de queda livre.



Fonte: Elaborado pela autora no *software* GeoGebra

Espera-se que, após a inserção dos dados obtidos no plano cartesiano e a percepção do tipo de função escolhido, os alunos indaguem qual é exatamente a função que deve ser escolhida. Se os alunos não indagarem, o professor deve realizar

a intervenção pedagógica a fim de instiga-los ao seguinte questionamento: “Como encontrar a função, existe algum método?”

Após essa discussão, o professor pode propor aos alunos que pesquisem sobre o assunto, que pesquisem sobre aproximação de funções, ajuste de curvas, etc. Dependendo da necessidade (geralmente da escassez de tempo), o professor pode conversar com eles sobre esses conceitos e que existem métodos numéricos para obter essa função e, um dos métodos mais conhecidos é o Método dos Mínimos Quadrados (MMQ).

Neste momento, cabe ao professor decidir o quanto vai explorar o MMQ, visto que ele utiliza o conceito de matrizes ou mesmo se não usar este conceito, será exigido o conhecimento do estudo de sistema de equações lineares. Dependendo do tipo de função a ser escolhida, o sistema linear conterá mais do que duas variáveis. Este objeto de conhecimento exige que o método seja trabalhado em turmas do Ensino Médio e, geralmente, a partir do segundo ano. Por outro lado, é possível explorar problemas que são modelados por funções polinomiais do primeiro grau e inserir esses modelos a partir dos anos finais desta etapa.

O parágrafo anterior nos chama atenção para a autonomia do professor, ele conhece suas turmas, ele decide como explorar o tipo de atividade. O professor poderá decidir, inclusive, usar um *software* (sugerimos o GeoGebra) e, em vez de se preocupar com o MMQ, apenas discutir sobre a existência e importância de usar aproximação de curvas para representar modelos reais que fazem parte do contexto cotidiano, ou até modelos mais simples, como os modelos lineares, para representar os não lineares.

A Seção 4.1 será dedicada ao estudo do MMQ e com o intuito de apresentar de forma didática para que o professor se sinta à vontade de inserir em sua prática docente, se considerar necessário em determinada turma.

4.1 UMA PROPOSTA PARA A APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS EM SALA DE AULA

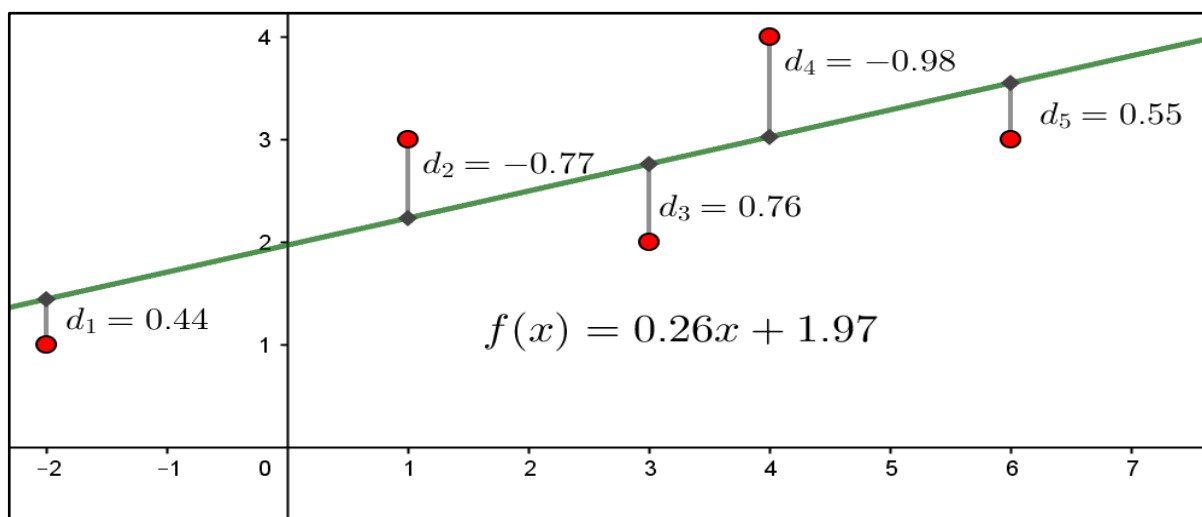
Nesta seção usaremos o *software* GeoGebra como recurso computacional para dar maior clareza ao estudo do MMQ. Sugerimos ao professor e aos alunos a fazer uso de algum *software* com fins educacionais.

De acordo com Sanches (2007):

O Método dos Quadrados Mínimos é provavelmente a técnica de aproximação mais usada na análise numérica e em problemas práticos. Isto se deve tanto à sua simplicidade quanto ao fato de que em geral, buscamos aproximações para dados que são medidas obtidas experimentalmente com um certo grau de incerteza. Veremos que o método dos quadrados mínimos contempla a possível existência de erros nos dados a serem aproximados. O critério de aproximação consiste em minimizar os resíduos. (SANCHES; JONILDO, 2007)

Vamos começar este estudo considerando a Figura 9. Nela são apresentados cinco pontos, a saber, $(-2,1)$, $(1,3)$, $(3,2)$, $(4,4)$ e $(6,3)$.

Figura 9: Usando desvios para dar significado ao MMQ



Fonte: Elaborado pela autora no *software* GeoGebra.

O objetivo é encontrar uma função polinomial do primeiro grau que melhor se ajusta aos dados. Para isso, os alunos precisam entender, primeiramente, o significado de desvio. Considere, por exemplo, que f é a função que melhor se

ajusta aos pontos dados e seja $P=(x_2, y_2)$ de coordenadas $(1,3)$ um ponto pertencente ao conjunto de dados.

Note que $y_2=3$ e $f(x_2)=2,23$ e, portanto, o desvio d_2 é dado por $d_2 = f(x_2) - y_2 = -0,77$. Em geral, o desvio d_n é dado por $d_n = f(x_n) - y_n$. Note que o desvio pode ser negativo e, quando temos a função que melhor se ajusta (aproxima) aos pontos, a soma dos desvios é igual a zero. É exatamente isso que estamos procurando, uma função cuja soma dos desvios seja igual a zero.

No entanto, tentar obter a função f que satisfaça essa condição não é interessante e, por isso, o que se faz é encontrar uma tal função para que a soma dos módulos dos desvios seja a menor possível e essa soma só é igual a zero quando o gráfico desta função contém todos esses pontos. Sendo assim, queremos encontrar a função f cuja soma dos módulos dos desvios seja mínima, ou seja, precisamos minimizar a soma

$$|f(x_1) - y_1| + |f(x_2) - y_2| + \dots + |f(x_n) - y_n|.$$

Não podemos esquecer que já temos o tipo de função já pré-definida. O que precisamos é encontrar os coeficientes desta função. Por exemplo, considerando os dados apresentados na Figura 9, estamos procurando uma função polinomial f de grau 1 cuja soma

$$(01) \quad |f(x_1) - y_1| + |f(x_2) - y_2| + |f(x_3) - y_3| + |f(x_4) - y_4| + |f(x_5) - y_5|$$

seja mínima.

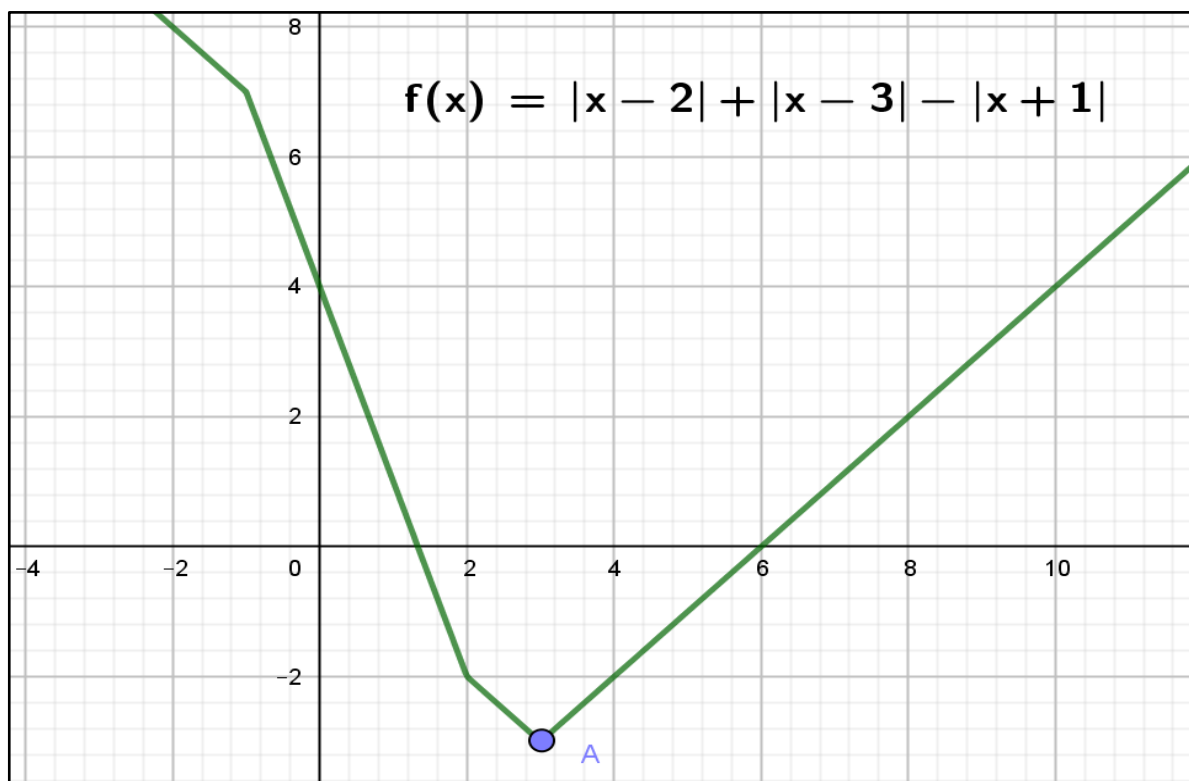
Como f foi escolhida do tipo $f(x) = a + bx$, a expressão (01) será reescrita conforme expressão (02).

$$(02) \quad |a + bx_1 - y_1| + |a + bx_2 - y_2| + |a + bx_3 - y_3| + |a + bx_4 - y_4| + |a + bx_5 - y_5|$$

em que, a e b são os coeficientes a serem determinados. Ainda continuamos com um sério problema, que é minimizar a soma em (02), sabendo-se que ela depende de duas variáveis, a saber, a e b . O que está por trás deste problema é minimizar uma função de duas variáveis reais e isso foge do contexto da Educação Básica. E o que fazer? Como insistir nesta discussão se ela apresenta um nível de conhecimento que os seus alunos ainda não adquiriram?

O professor pode insistir e continuar o debate com seus alunos. Diga a eles que mesmo em um curso de nível superior, lidar com esses módulos não é nada fácil. Funções modulares possuem “bicos” em seus gráficos e isso geralmente não é interessante quando o objetivo é encontrar pontos de mínimos ou máximos de uma função. O professor pode aproveitar este momento e, junto com os alunos, plotar gráficos de funções modulares com o uso do GeoGebra. Pode ainda discutir sobre funções suaves (para evitar a terminologia “funções diferenciáveis”). Estas são mais interessantes para encontrar máximos e mínimos. Suponha que seus alunos não compreenderam o que você quis dizer. Peça-os para plotarem o gráfico de uma função do tipo modular, como mostrado na Figura 10.

Figura 10: Gráfico de uma função do tipo modular

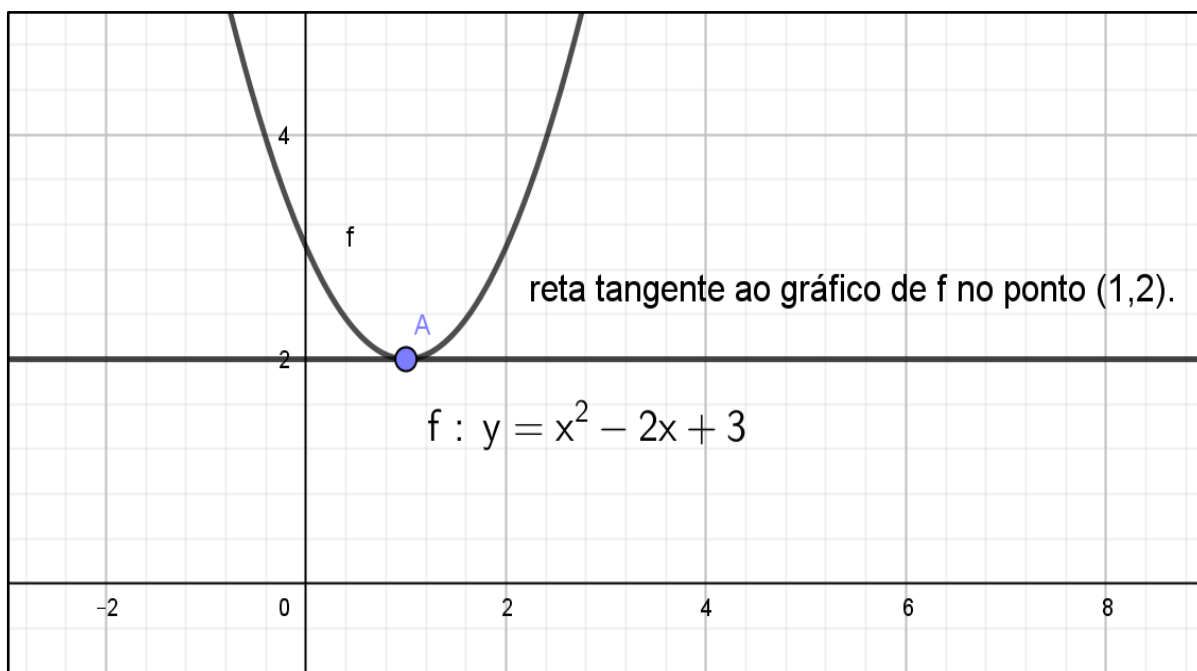


Fonte: Elaborado pela autora no *software* GeoGebra

Podemos observar que o mínimo desta função ocorre entre 2 e 4, mas sem o uso de uma ferramenta computacional teríamos dificuldades de encontrar este ponto de mínimo. Isso deve-se ao fato de que não existe uma reta tangente ao gráfico desta função neste ponto, pois neste ponto o gráfico apresenta “bico”, logo, ele não representa uma curva suave. Ainda assim, provavelmente, a maioria dos alunos não compreenderia a relação entre a reta tangente com o ponto de mínimo, e o que essa reta poderia contribuir na obtenção do ponto de mínimo.

Neste momento o professor poderá mostrar um exemplo de curva suave e a respectiva reta tangente em seu ponto de mínimo. Vejamos o exemplo apresentado na Figura 11.

Figura 11: Gráfico de uma função “suave”



Fonte: Elaborado pela autora no *software* GeoGebra

Agora os alunos estão mais aptos a perceber que no ponto A, ponto associado ao mínimo da função, existe a reta tangente e o mais interessante é que ela possui inclinação, em relação ao eixo das abscissas, igual a zero. E, sempre que uma função é suave, nos pontos de máximos ou mínimos locais, em especial, no mínimo global (é o que estamos interessados), quando existem, a reta tangente nesses pontos está bem definida e possui inclinação nula. A recíproca também é válida.

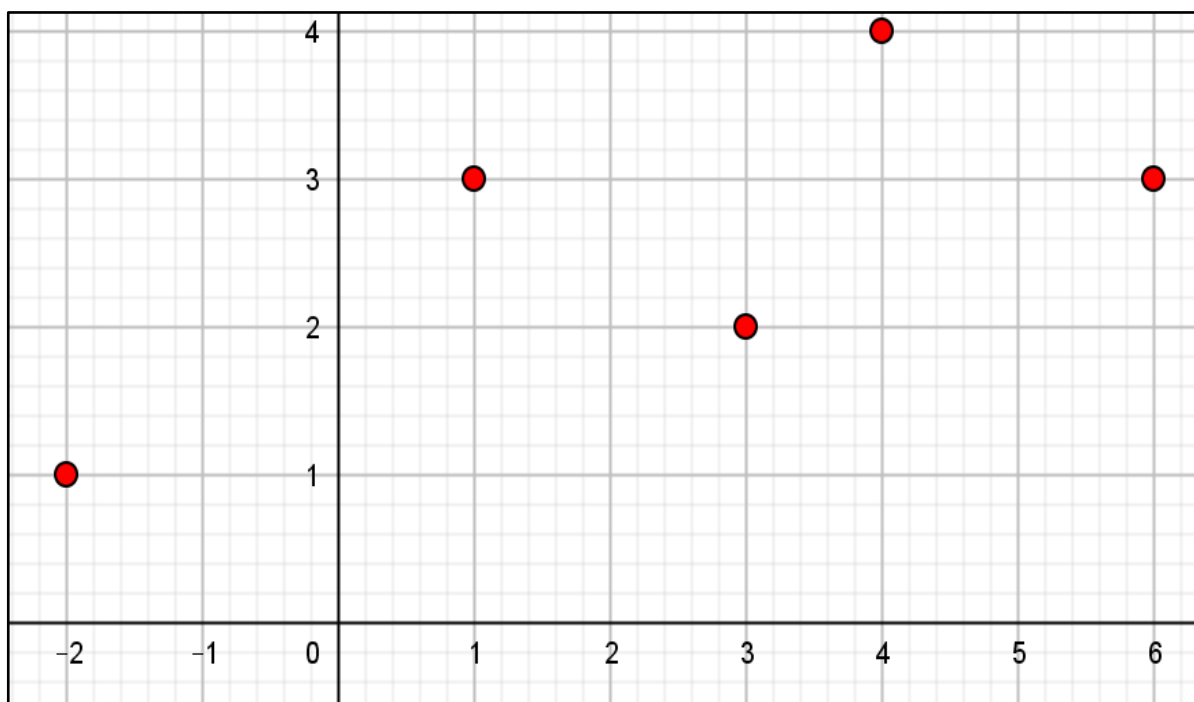
Pensando na existência de reta tangente com inclinação igual a zero que se baseia o MMQ. Em vez de minimizar a soma dos módulos dos desvios, que tal minimizar a soma dos quadrados dos desvios. Com isso, eliminam-se os módulos (que são complicados de trabalhar devido à existência dos possíveis “bicos”) e ainda garante que a função seja suave, podendo simplesmente pensar em técnicas baseadas na inclinação de retas tangentes. Esta “sacada” faz com que o MMQ seja relativamente fácil de ser aplicado ou pelo menos de fácil compreensão, o que contribuiu para que seja um método muito conhecido e utilizado no estudo de aproximação de funções.

Vamos ainda considerar os dados apresentados na Figura 9. Considerando apenas os pontos no gráfico cartesiano, o gráfico resultante recebe o nome de

diagrama de dispersão (não há necessidade de fazer o uso de alguns termos técnicos em turmas da Educação Básica), conforme mostrado na Figura 12. Analisando esse diagrama, pode-se visualizar o tipo de curva que melhor se ajusta aos dados.

Escolhida a reta, tem-se que a função de aproximação é do tipo $f(x) = a + bx$.

Figura 12: Diagrama de dispersão – regressão linear



Fonte: Elaborado pela autora no *software* GeoGebra

Neste momento, o questionamento é: Qual a reta de equação $y = a + bx$ se ajusta melhor ao diagrama de dispersão da Figura 12? Conforme vimos, devemos impor que os desvios sejam mínimos e, para isso, desenvolveremos nosso estudo utilizando como suporte o MMQ (caso discreto).

Nosso objetivo é encontrar os coeficientes a e b tais que a soma dos quadrados dos desvios

$$(f(x_1) - y_1)^2 + (f(x_2) - y_2)^2 + (f(x_3) - y_3)^2 + (f(x_4) - y_4)^2 + (f(x_5) - y_5)^2$$

seja mínima, isto é, precisamos minimizar a expressão (03).

$$(03) \quad (a + bx_1 - y_1)^2 + (a + bx_2 - y_2)^2 + (a + bx_3 - y_3)^2 + (a + bx_4 - y_4)^2 + (a + bx_5 - y_5)^2$$

A expressão (03) pode ser associada a uma função F de duas variáveis (a e b). Agora temos um complicador, que é associar o ponto de mínimo dessa função com o desejo de encontrar em qual ponto a inclinação da reta tangente em cada uma das direções associadas às variáveis a e b é igual a zero. A ideia do MMQ foi discutida e, agora, o professor pode apenas apresentar aos alunos o sistema 2×2 de equações lineares nas incógnitas (em sistemas também podem ser chamadas de variáveis) a e b).

Antes de apresentar o sistema, o professor deve mostrar que a função $f(x) = a + bx$ a ser encontrada como função de aproximação pode ser reescrita como combinação linear das funções g_1 e g_2 da seguinte maneira: $f(x) = ag_1(x) + bg_2(x)$, em que $g_1(x) = 1$ e $g_2(x) = x$. É interessante o professor explicar aos seus alunos que representar uma função, como soma de outras, ajuda a expressar o sistema linear que devemos resolver sempre que aplicamos o MMQ.

Após essa discussão com os alunos, o professor pode apresentar o sistema linear e conversar com eles que, neste momento, estamos interessados principalmente na importância de encontrar modelos matemáticos que expressem problemas reais e, para isso, a relevância do estudo de técnicas que possam ser utilizadas para esse fim.

Com isso, o problema que estamos discutindo pode ser resolvido por meio do sistema de equações lineares apresentado na Equação (04).

$$(04) \quad \begin{cases} \left[\sum_{k=1}^{k=5} g_1(x_k) \cdot g_1(x_k) \right] \cdot a + \left[\sum_{k=1}^{k=5} g_1(x_k) \cdot g_2(x_k) \right] \cdot b = \sum_{k=1}^{k=5} y_k \cdot g_1(x_k) \\ \left[\sum_{k=1}^{k=5} g_2(x_k) \cdot g_1(x_k) \right] \cdot a + \left[\sum_{k=1}^{k=5} g_2(x_k) \cdot g_2(x_k) \right] \cdot b = \sum_{k=1}^{k=5} y_k \cdot g_2(x_k) \end{cases}$$

Provavelmente essa notação causará estranhamento para a maioria dos alunos, principalmente se eles não têm familiaridade com o símbolo de somatório para representar somas. Por outro lado, com algumas aplicações, eles poderão “olhar” essas notações com mais naturalidade.

No sistema (04), precisamos encontrar os coeficientes das variáveis. Para isso, sendo $g_1(x) = 1$ e $g_2(x) = x$, o sistema (04) pode ser expresso pelo sistema (05).

$$(05) \quad \begin{cases} \left[\sum_{k=1}^{k=5} 1 \right] \cdot a + \left[\sum_{k=1}^{k=5} x_k \right] \cdot b = \sum_{k=1}^{k=5} y_k \cdot 1 \\ \left[\sum_{k=1}^{k=5} x_k \right] \cdot a + \left[\sum_{k=1}^{k=5} x_k^2 \right] \cdot b = \sum_{k=1}^{k=5} y_k \cdot x_k \end{cases}$$

Vamos usar a Quadro 1 para representar os somatórios apresentados na Equação (05).

Quadro 2: Dados para resolver o problema modelo

k	1	2	3	4	5	$\sum_{k=1}^5$
x_k	-2	1	3	4	6	12
y_k	1	3	2	4	3	13
x_k^2	4	1	9	16	36	66
$y_k \cdot x_k$	-2	3	6	16	18	41

Fonte: Elaborado pela autora.

Substituindo na Equação (05) os dados encontrados no Quadro 01, obtemos o seguinte sistema linear:

$$(06) \quad \begin{cases} 5a + 12b = 13 \\ 12a + 66b = 41 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema apresentado na Equação (06), obtemos $a = \frac{61}{31}$ e $b = \frac{49}{186}$. Assim, a reta (regressão linear) que melhor se ajusta ao diagrama de dispersão representado na Figura 12 pode ser representada por $y = \frac{61}{31} + \frac{49}{186}x$ ou, equivalentemente, pela equação geral da reta $49x - 186y + 366 = 0$.

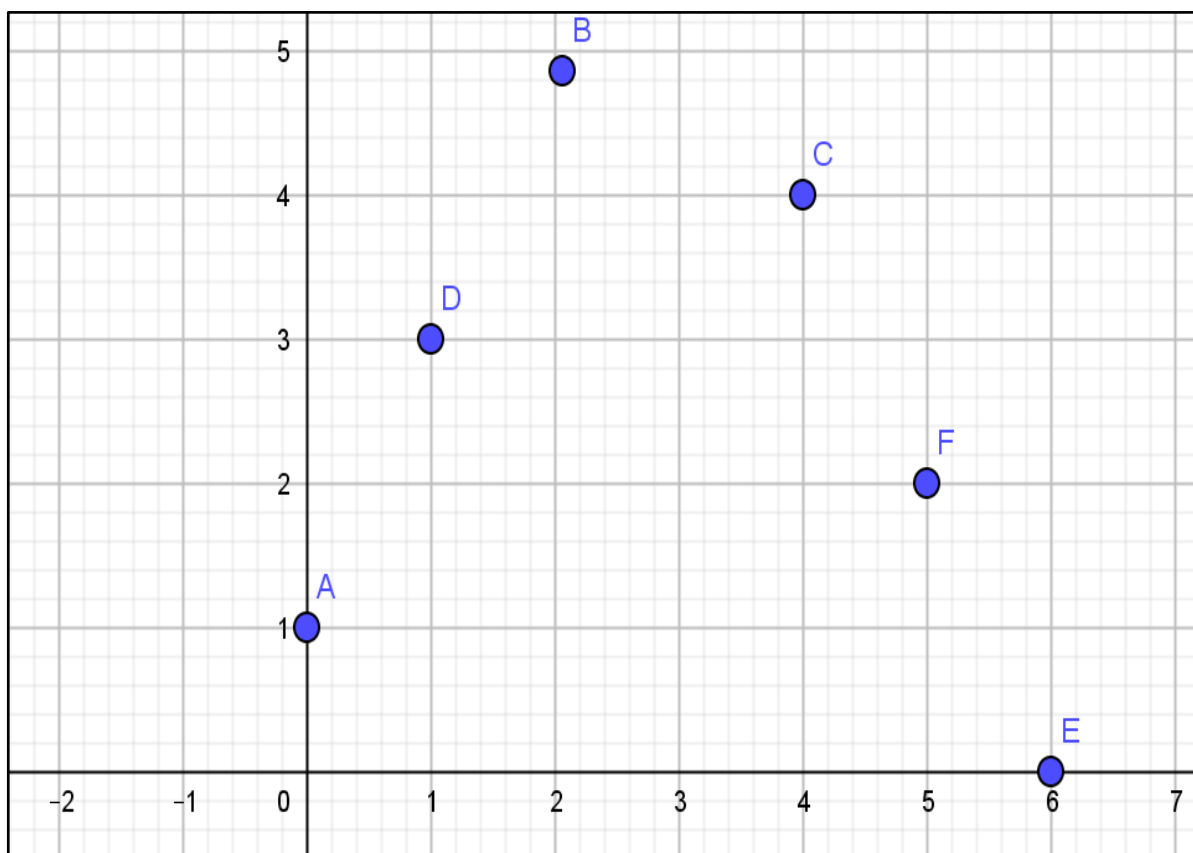
Considerando que, neste trabalho, estamos enfatizando o tema “aproximação de funções”, é mais conveniente expressar a função de aproximação f na forma

$$f(x) = \frac{61}{31} + \frac{49}{186}x.$$

Utilizando a aproximação por arredondamento de duas casas decimais, a função f fica expressa por $f(x) = 1,87 + 0,26x$.

Após a apresentação deste problema, o professor poderá solicitar aos alunos que decidam qual o tipo de função que eles escolheriam para melhor ajustar o diagrama de dispersão representado na Figura 13.

Figura 13: Diagrama de dispersão – ajuste quadrático



Fonte: Elaborado pela autora no *software* GeoGebra

Espera-se que os alunos decidam por uma parábola do segundo grau e, portanto, digam que é interessante aproximar por meio de uma função quadrática $f(x) = c + bx + ax^2$. É importante observar que este diagrama é formado por seis pontos.

Após discutir essa etapa, o professor pode dizer aos alunos que, neste caso, temos três incógnitas (a , b e c) e, portanto, para obter essa função quadrática, eles deverão resolver um sistema quadrado de equações lineares de ordem 3. Dependendo do ano de escolaridade, discutir sobre os métodos de resolução desse sistema pode não ser interessante, mas, para isso, os alunos poderão fazer o uso de um *software*, como, por exemplo, o *software* GeoGebra.

A próxima etapa consiste em mostrar aos alunos que agora a nossa função de aproximação será escrita na forma $f(x) = c \cdot g_1(x) + b \cdot g_2(x) + a \cdot g_3(x)$, isto é, como

combinação linear de três funções, a saber, as funções $g_1(x)=1$, $g_2(x)=x$ e $g_3(x)=x^2$.

E agora, qual é o sistema linear a ser resolvido?

Sugerimos que o professor instigue a turma a fim de que, por meio do raciocínio lógico, inspirado no sistema (04), encontre-o.

Espera-se que os alunos cheguem à seguinte conclusão: baseado no exemplo anterior ou no sistema (05), o desenvolvimento do MMQ para resolver o referente problema sugere que o sistema linear de ordem 3 utilizado para encontrar a função de aproximação $f(x)=c \cdot g_1(x)+b \cdot g_2(x)+a \cdot g_3(x)$ pode ser representado pelo seguinte sistema:

$$(07) \quad \begin{cases} \left[\sum_{k=1}^{k=6} g_1(x_k) \cdot g_1(x_k) \right] \cdot c + \left[\sum_{k=1}^{k=6} g_1(x_k) \cdot g_2(x_k) \right] \cdot b + \left[\sum_{k=1}^{k=6} g_1(x_k) \cdot g_3(x_k) \right] \cdot a = \sum_{k=1}^{k=6} y_k \cdot g_1(x_k) \\ \left[\sum_{k=1}^{k=6} g_2(x_k) \cdot g_1(x_k) \right] \cdot c + \left[\sum_{k=1}^{k=6} g_2(x_k) \cdot g_2(x_k) \right] \cdot b + \left[\sum_{k=1}^{k=6} g_2(x_k) \cdot g_3(x_k) \right] \cdot a = \sum_{k=1}^{k=6} y_k \cdot g_2(x_k) \\ \left[\sum_{k=1}^{k=6} g_3(x_k) \cdot g_1(x_k) \right] \cdot c + \left[\sum_{k=1}^{k=6} g_3(x_k) \cdot g_2(x_k) \right] \cdot b + \left[\sum_{k=1}^{k=6} g_3(x_k) \cdot g_3(x_k) \right] \cdot a = \sum_{k=1}^{k=6} y_k \cdot g_3(x_k) \end{cases}$$

Substituindo as funções $g_1(x)=1$, $g_2(x)=x$ e $g_3(x)=x^2$, tem-se:

$$(08) \quad \begin{cases} \left[\sum_{k=1}^{k=6} 1 \right] \cdot c + \left[\sum_{k=1}^{k=6} x_k \right] \cdot b + \left[\sum_{k=1}^{k=6} x_k^2 \right] \cdot a = \sum_{k=1}^{k=6} y_k \cdot 1 \\ \left[\sum_{k=1}^{k=6} x_k \right] \cdot c + \left[\sum_{k=1}^{k=6} x_k^2 \right] \cdot b + \left[\sum_{k=1}^{k=6} x_k^3 \right] \cdot a = \sum_{k=1}^{k=6} y_k \cdot x_k \\ \left[\sum_{k=1}^{k=6} x_k^2 \right] \cdot c + \left[\sum_{k=1}^{k=6} x_k^3 \right] \cdot b + \left[\sum_{k=1}^{k=6} x_k^4 \right] \cdot a = \sum_{k=1}^{k=6} y_k \cdot x_k^2 \end{cases}$$

Sugerimos que o professor apoie aos alunos a fazer uso de uma planilha de cálculo para encontrar os coeficientes das variáveis em cada equação e, posteriormente, resolver o sistema linear.

Neste capítulo elaboramos uma proposta de estudo do MMQ no estudo de aproximação de funções, não apenas para que o professor faça uma revisão, se necessário, dos conceitos inerentes deste tema, mas também para nortear este estudo e/ou sugerir uma sequência de aplicação em sala de aula.

No Capítulo 5 apresentamos cinco propostas de atividades para aplicação do MMQ no ajuste de curvas, lembrando que o foco principal é o uso da aplicação de ajuste de curvas no contexto cotidiano, sendo o MMQ uma técnica para encontrar a função de aproximação, a qual pode ser aplicada usando alguma ferramenta computacional. Contudo, escolhemos por apresentar o MMQ de forma mais detalhada no apêndice.

5 ATIVIDADES PROPOSTAS

Este capítulo é dedicado à apresentação e discussão de cinco atividades que nortearão a proposta deste trabalho.

5.1 ATIVIDADE 1: MODELANDO UMA ESTRUTURA ARQUITETÔNICA POR MEIO DE UMA FUNÇÃO QUADRÁTICA

De uma maneira simples a Modelagem Matemática é uma forma de representar matematicamente uma situação problema real.

A Modelagem Matemática de acordo com Kaiser, Schwarz, Tiedemann (2010), parte de uma situação problema real, onde essa situação é estruturada a fim de criar um modelo problema real, sendo este transformado em uma situação matemática que é resolvida com um modelo matemático e sua solução posteriormente comparada com a situação real.

Nessa situação do mundo real, o problema passa a ser modelado por um processo através de um ciclo. Essa concepção é corroborada por Borromeo, Ferri e Blum (2010), onde a Modelagem Matemática é vista como um processo, um ciclo que parte de uma situação-problema real.

Por meio da Modelagem Matemática, Biembengut (2014) afirma que os alunos são promovidos para que sejam sujeitos dos processos de ensino e de aprendizagem, proporcionando-lhes atividades instigadoras.

E pensando em algum problema instigador, escolhemos a nossa primeira atividade, que trata de modelar uma curva de uma construção civil. Pesquisar sobre a matemática por trás de construções civis ou, em outras palavras, em obras arquitetônicas era a proposta inicial dessa dissertação. Em muitas construções civis vemos curvas sinuosas, superfícies de sustentação da obra que, aparentemente, parece apresentar grande risco de deformação, como em certos tipos de pontes, em edifícios e em muitas outras situações dentro da construção civil. Muitas dessas curvas não são projetadas aleatoriamente, isto é, existe um modelo matemático cujo gráfico infere em conclusões sobre as características da construção, a partir das características matemáticas do modelo.

Pesquisar sobre essa matemática, muitas vezes “escondida” por trás de certas construções civis pode ser uma atividade instigadora que a escola pode oferecer aos estudantes. Pensando em oferecer uma pequena contribuição nessa perspectiva, decidimos apresentar uma atividade e sugerimos alguns pontos que o professor poderá considera-los ao propor esta atividade a seus alunos.

A estrutura arquitetônica escolhida para auxiliar os professores na aplicação deste tipo de atividade é a fachada da Igreja Católica Matriz na cidade de Sorriso – MT. Esta estrutura serve apenas para auxiliar nesta atividade e o professor poderá escolher a arquitetura que achar mais plausível para trabalhar com os alunos ou deixar essa escolha livre, conforme o que cada aluno ou grupo de alunos levarem para sala de aula.

Figura 14: Fachada da Igreja Matriz em Sorriso-MT



Fonte: Elaborado pela autora no *software* GeoGebra

Para a aplicação desta atividade, vamos sugerir uma sequência de intervenções que o professor poderá realizar durante a sua aplicação, mas sempre deixando claro que não é um algoritmo a ser seguido, pois nesse processo de ensino

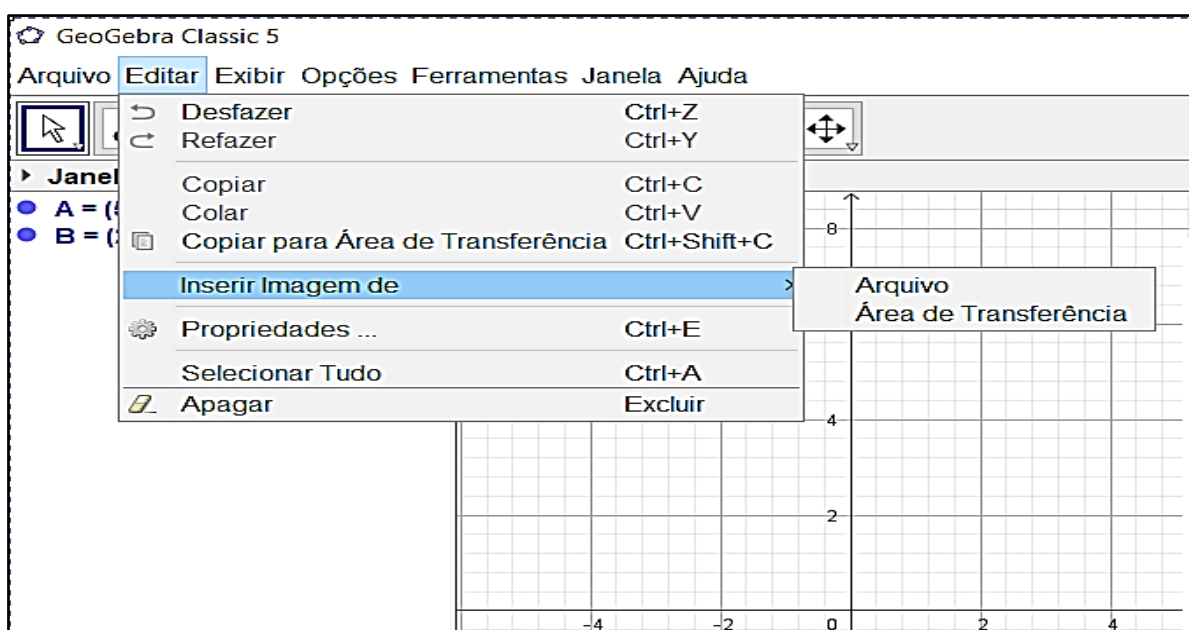
e aprendizagem, várias discussões poderão surgir e, assim, o professor deve estar preparado para conduzir da melhor maneira possível.

Supondo determinada arquitetura a ser modelada, sugerimos que seja apresentada uma foto ou uma imagem qualquer extraída de alguma fonte, como apresentado na Figura 14.

Ressaltamos mais uma vez que a(s) estrutura(s) escolhida(s) para aplicação desta atividade pode(m) ser sugerida(s) pelos alunos. Mas é importante chamar a atenção para os cuidados que devem ser tomados durante a fotografia da referida estrutura, como, por exemplo, verificar se a fotografia foi tirada frontalmente, a fim de minimizar os erros obtidos na extração das informações acarretadas por ela.

Vamos considerar que o professor e os alunos façam uso do *software* GeoGebra para aplicação da nossa proposta. Caso não seja possível, ainda assim esta proposta poderá ser aplicada, no entanto, será necessário o uso de papel quadriculado e também exigirá maior aprofundamento na aplicação de um método para encontrar um modelo matemático que represente, de forma aceitável, a estrutura arquitetônica.

Figura 15: Inserindo uma imagem no GeoGebra



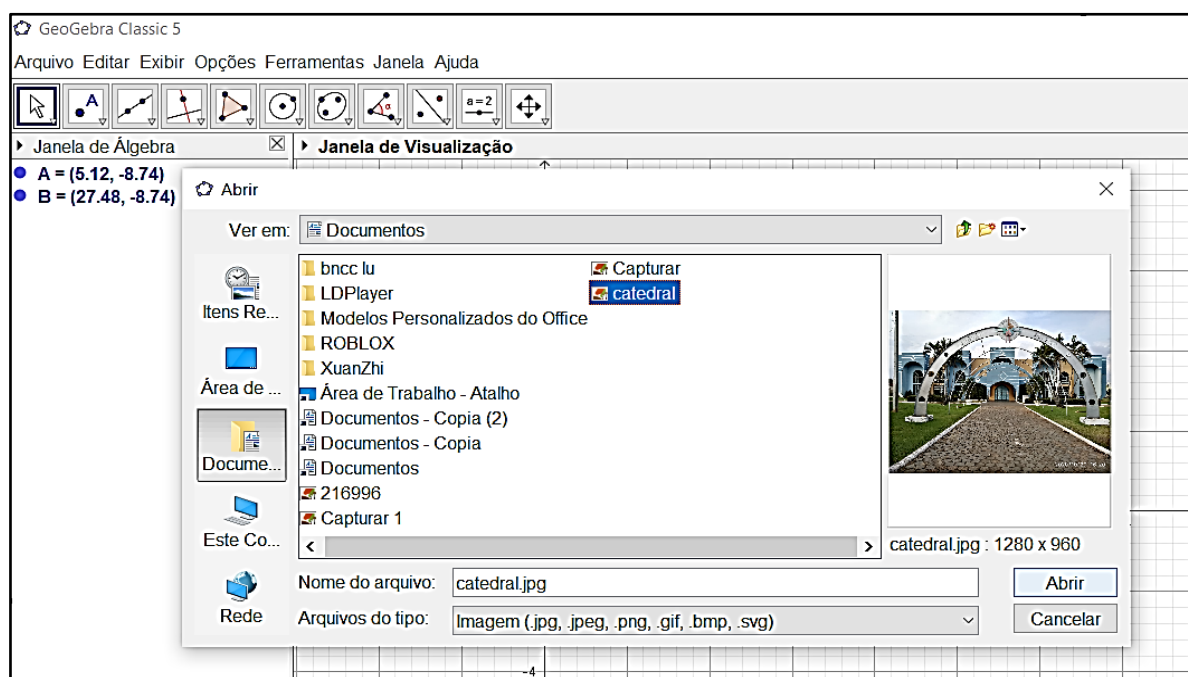
Fonte: Elaborado pela autora no *software* GeoGebra

O professor deve usar de sua experiência para decidir quais recursos didáticos poderão ser utilizados e, inclusive, os tipos de estruturas a serem modeladas, visto que sem o uso de uma ferramenta computacional, a função de aproximação deve ser restringida apenas aos tipos de função pertinentes ao nível de escolarização da turma.

Com as considerações feitas anteriormente, podemos definir o próximo passo a ser aplicado nesta atividade: com o arquivo da fotografia da arquitetura, o professor pedirá aos alunos que importem este arquivo para a área de trabalho do GeoGebra. A Figura 15 mostra como podemos inserir uma imagem no *software* GeoGebra.

Selecione “arquivo” e, em seguida, vá ao diretório onde o arquivo se encontra. Selecione-o e clique em abrir, conforme mostrado na Figura 16.

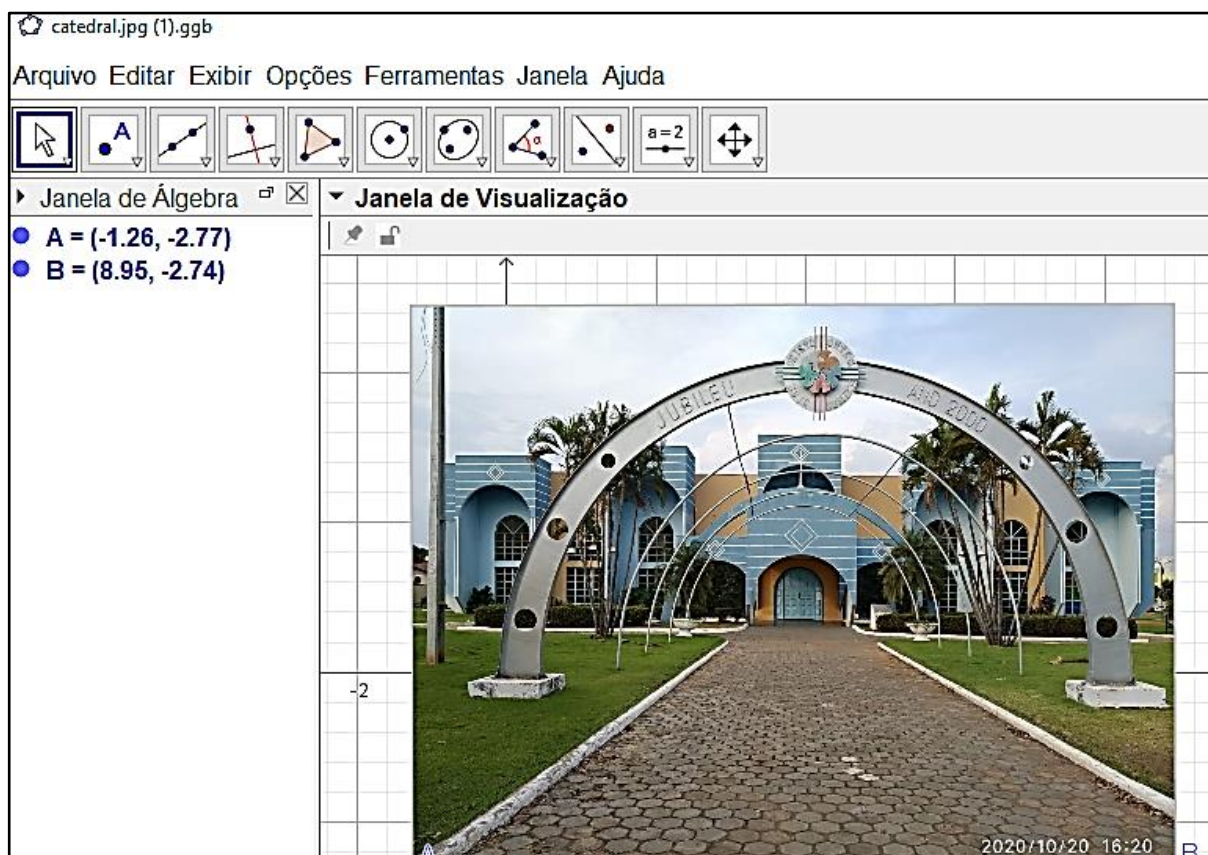
Figura 16: Documentos/Imagem



Fonte: Elaborado pela autora no *software* GeoGebra

A imagem selecionada vai aparecer na tela do GeoGebra, conforme mostrado na Figura 17.

Figura 17: Imagem da Catedral inserida na janela de visualização do GeoGebra

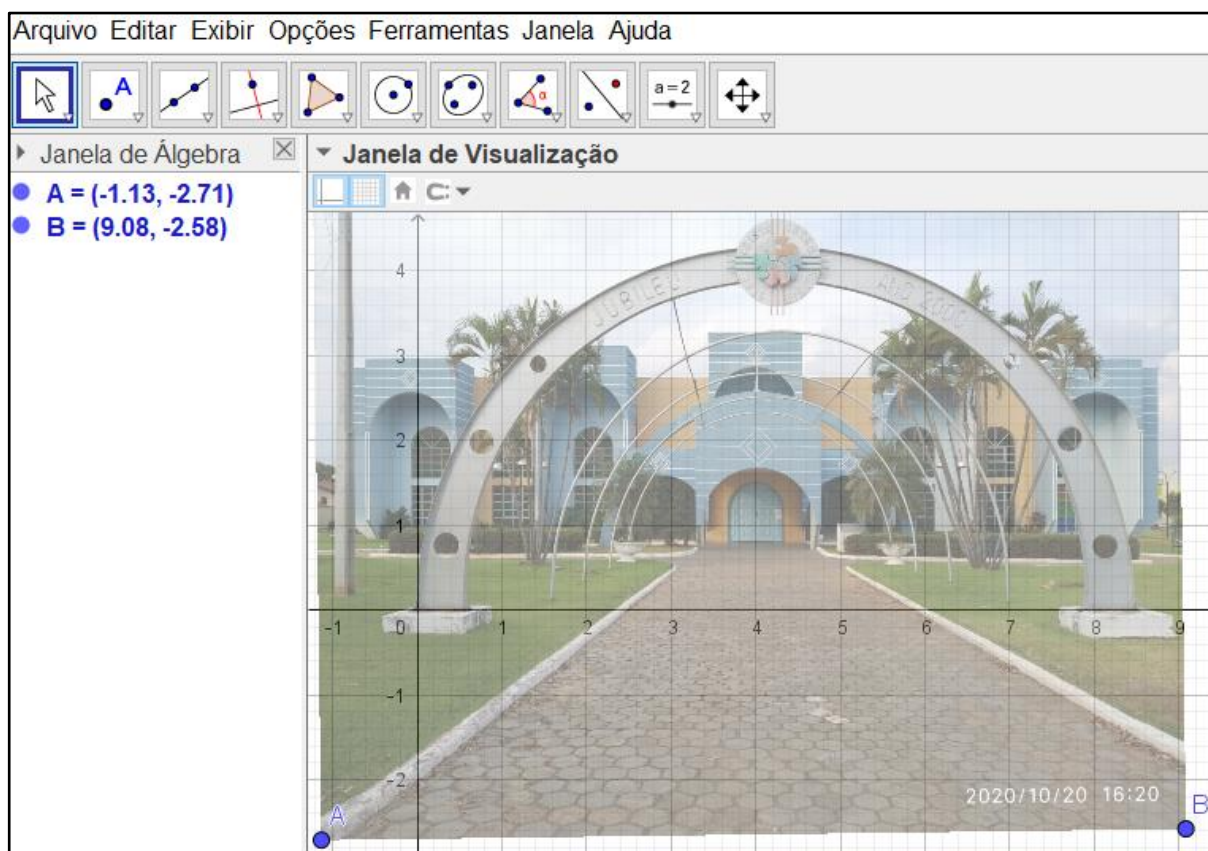


Fonte: Elaborado pela autora no *software* GeoGebra

Note que ao inserir a imagem, dois pontos (A e B) aparecerão. Ao selecionar estes pontos, você poderá movimentá-los de tal forma a mudar a posição da imagem e, inclusive, aumentar ou diminuir. Normalmente é interessante arrastar o ponto A para a origem do sistema cartesiano. Outra forma é clicar na imagem com o botão direito do mouse e selecionar propriedades/posição/canto 1-A e canto-2-B. Com esses dois pontos associados poderemos aumentar e diminuir o tamanho da imagem, além de rotacioná-la, se necessário.

Podemos observar que a posição da imagem fica à frente da grade do GeoGebra, o que dificulta na escolha de alguns pontos para obter o diagrama de dispersão. Sendo assim, o próximo passo é aumentar a transparência desta imagem, conforme mostrado na Figura 18. Para isso, clique na imagem com o botão direito do mouse e vá em propriedades/cor/transparência e diminua a transparência até que consiga ver os eixos e demarcar os pontos de interesse.

Figura 18: Configurando a transparência da imagem no GeoGebra

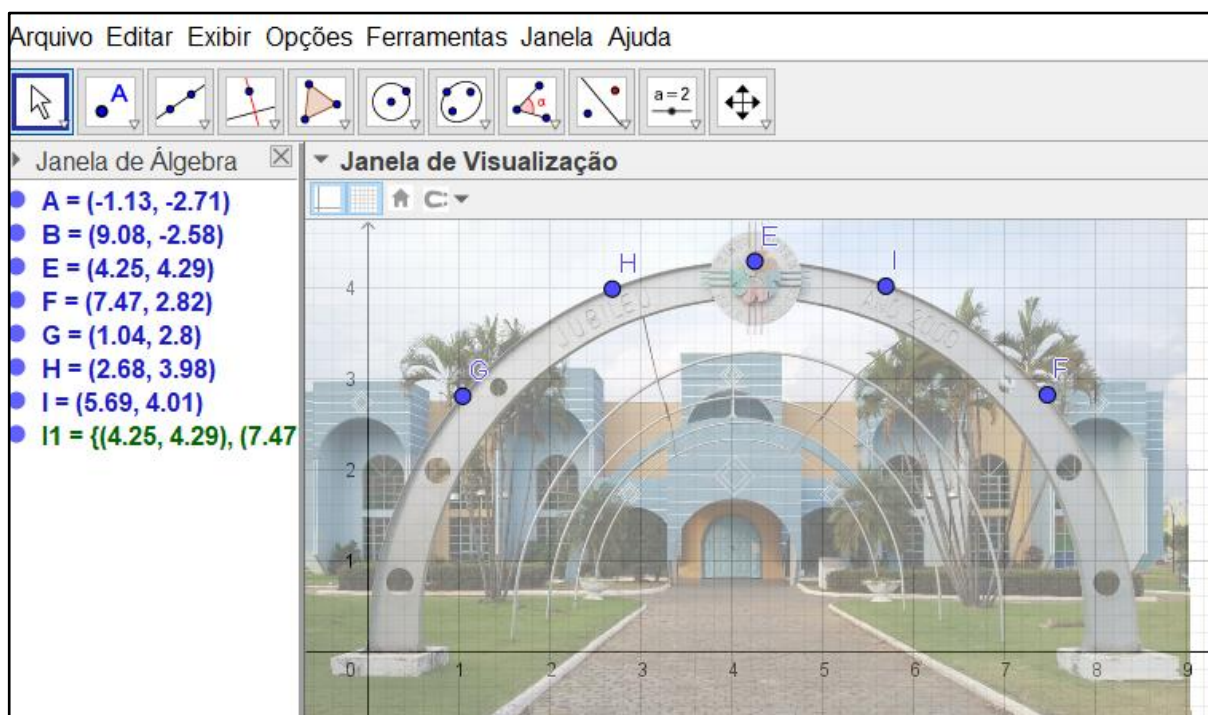


Fonte: Elaborado pela autora no *software* GeoGebra

Fica evidente que é mais fácil decidir a posição da imagem (ajustar a imagem) no plano cartesiano do GeoGebra, após aumentar o grau de transparência.

Para descobrir qual a função que melhor se ajusta a esses pontos, criamos alguns pontos sobre essa curva e depois criamos uma lista de pontos indo em ângulo/lista e selecionando os pontos criados. Assim, temos uma lista com os pontos selecionados, como pode ser visto na Figura 19.

Figura 19: Criando uma lista de pontos no GeoGebra



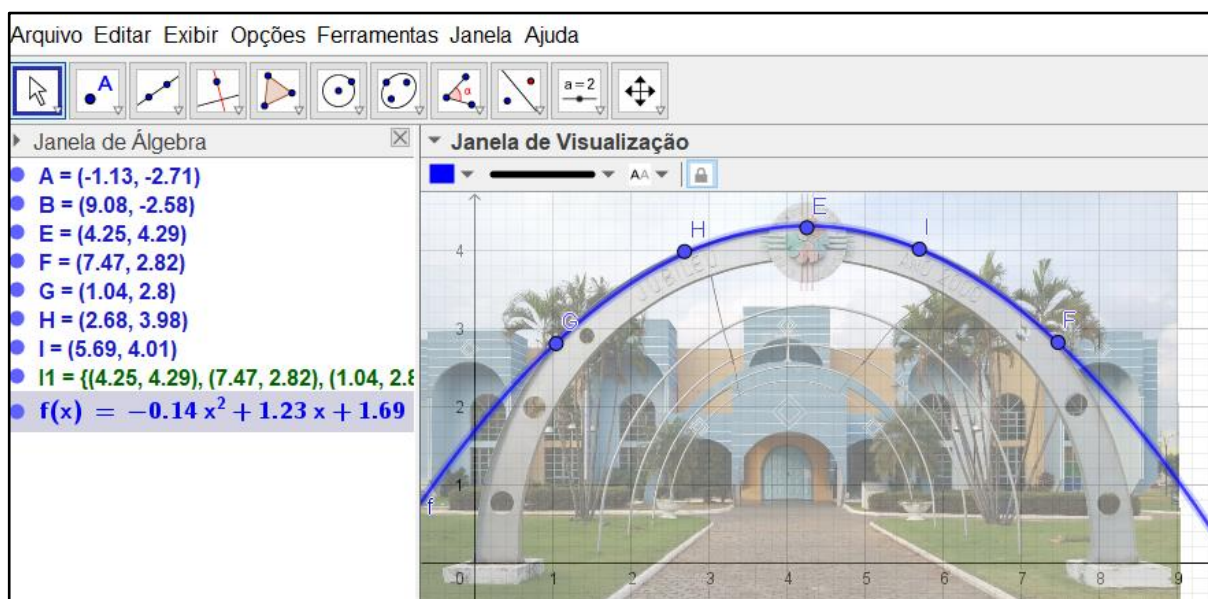
Fonte: Elaborado pela autora no *software* GeoGebra

Após a marcação dos pontos na imagem da estrutura, observamos que o conjunto de pontos sugere um ajuste polinomial de grau 2. Fazemos o ajuste polinomial para descobrir qual é o polinômio de grau 2 que melhor se ajusta a esses pontos.

Para isso, vamos na caixa de entrada e digitamos “regressão polinomial/lista de pontos/grau do polinômio”. Digitamos “l1” (lista criada), no espaço para a lista de pontos e “2” no espaço para o grau do polinômio, pois como observado anteriormente o conjunto de pontos nos sugeria uma parábola, e, portanto, optamos por ajuste quadrático.

Após a realização desta etapa, aparecerá na janela de visualização do GeoGebra o polinômio que melhor se ajusta a esses pontos, como mostrado na Figura 20.

Figura 20: Polinômio de regressão de grau dois.



Fonte: Elaborado pela autora no *software* GeoGebra.

Após o polinômio ser criado, deverá ser analisado se foi encontrado um “bom ajuste”, bom no sentido de representação da estrutura. O passo seguinte é ir movendo os pontos na tentativa de conseguir um melhor ajuste.

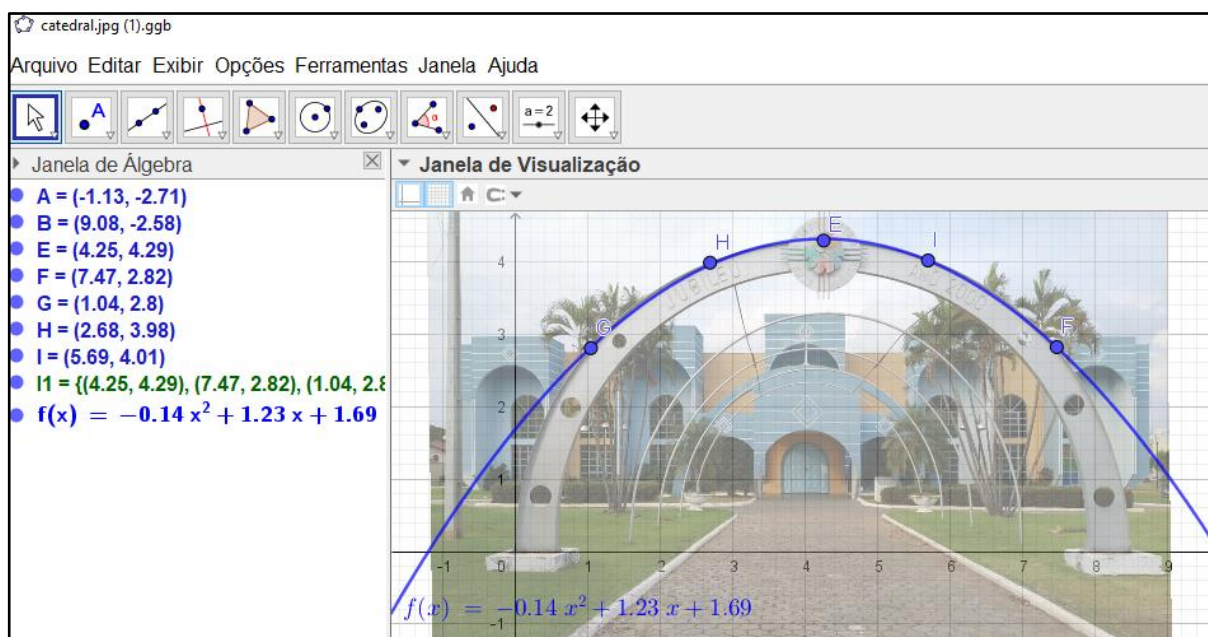
Podemos perceber que este arco não tem o formato de uma parábola. Dessa maneira, devemos delimitar um intervalo para o ajuste e extrair informações sobre o modelo matemático e, conseqüentemente, sobre a estrutura modelada. Essa dificuldade ou até mesmo essa impossibilidade de encontrar uma função quadrática para representar toda a borda deste arco nos traz algumas reflexões. Uma delas é, esta estrutura é parabólica? O que é uma curva parabólica ou, simplesmente, neste contexto, o que é uma parábola? São bons questionamentos, pois durante o meu período escolar, sempre associei estes tipos de arcos às parábolas, sem a compreender este conceito.

Por enquanto, estamos mostrando alguns passos envolvendo o GeoGebra para a aplicação desta proposta, mas, durante esses passos, aproveitaremos por apresentar sugestões, reflexões e fazer questionamentos no que dizem respeito à exploração de conceitos matemáticos envolvidos nesta atividade.

Se o professor e/ou os alunos acharem conveniente, pode-se inserir a regra que representa o polinômio na “Janela de Visualização” do GeoGebra. Para isso,

basta clicar com o botão esquerdo do mouse sobre a função polinomial que aparece na “Janela de Álgebra”, segurar e arrastar o polinômio até à “Janela de Visualização”. Note que sua regra aparecerá, conforme mostrado na Figura 21.

Figura 21: Visualizando o nome do polinômio na “Janela de Visualização” do GeoGebra

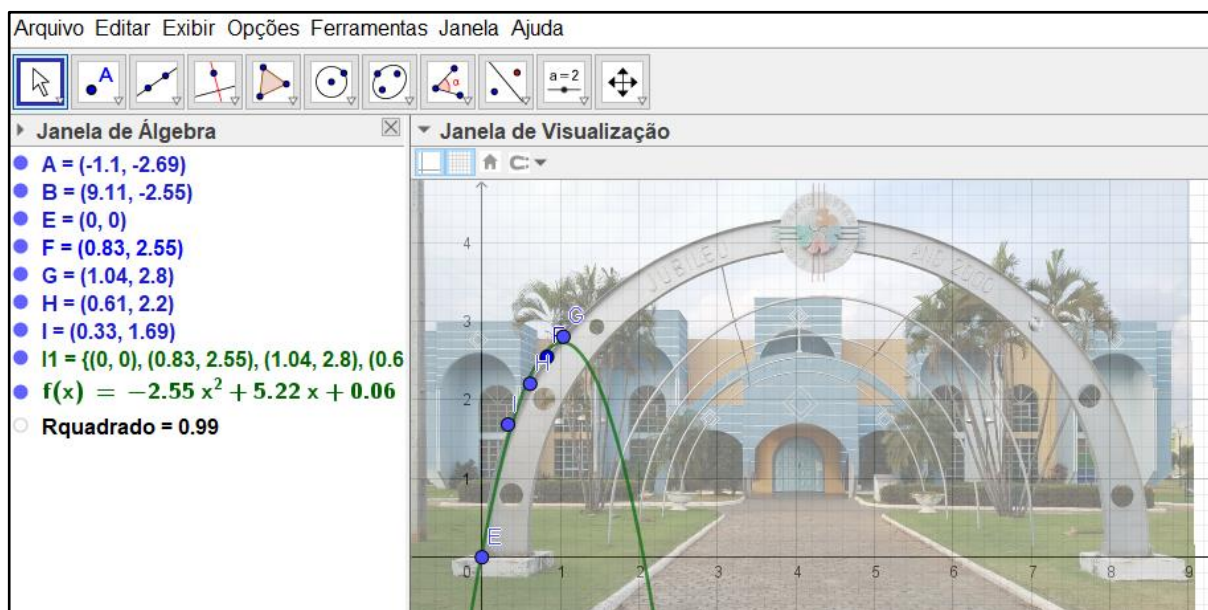


Fonte: Elaborado pela autora no *software* GeoGebra

Podemos também ir em opções/arredondamento, para arredondarmos as casas decimais para quantas casas acharmos mais conveniente. Nesta atividade, o *software* está configurado com “2 Casas Decimais”.

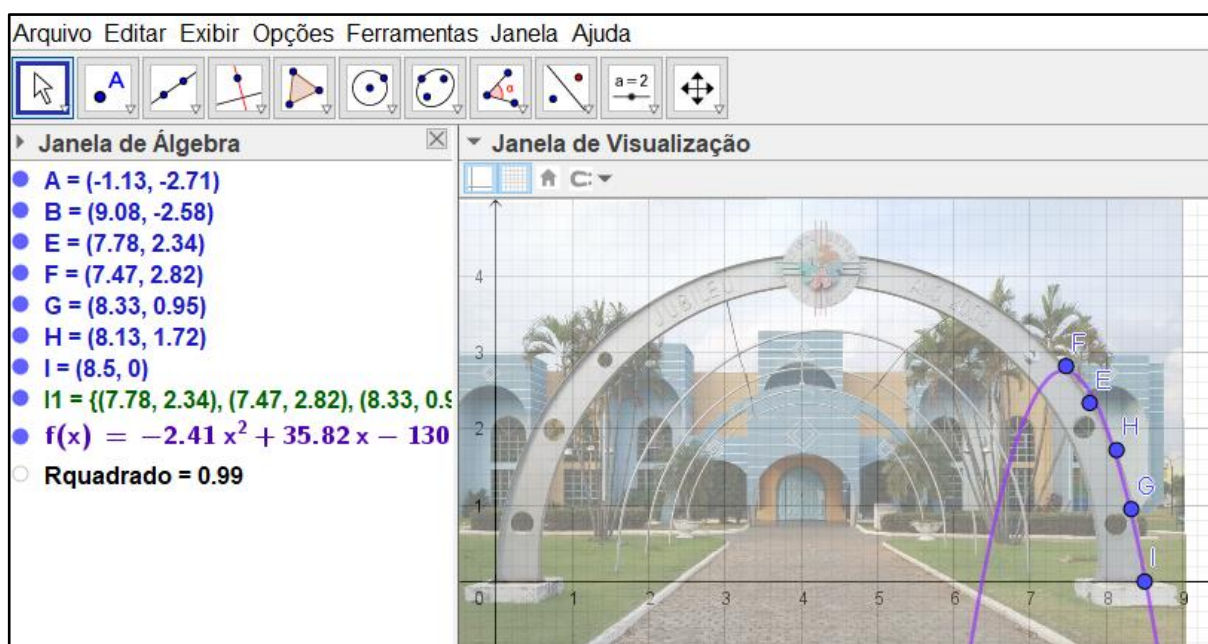
Quando falamos em encontrar um bom ajuste, ou até “melhor ajuste”, é com intuito de ilustrar de uma forma mais realista os dados que estão sendo representados. Na função de aproximação obtida na Figura 21, podemos notar que essa aproximação pode ser trabalhada no intervalo $[1.0, 7.5]$. Por outro lado, nos intervalos $[0.0, 1.0]$ e $[7.5, 8.5]$, essa função não representa de forma satisfatória um modelo matemático para esta estrutura. Nessa situação de não encontrar uma única curva que pode representa-la satisfatoriamente, o professor poderá, se achar conveniente, particionar o intervalo $[0.0, 8.5]$ e modelar esta estrutura por meio de uma função definida por três sentenças. As funções de aproximação que encontramos a partir das escolhas de certos pontos estão representadas nas Figuras 22 e 23.

Figura 22: Ajuste polinomial de grau dois no intervalo $[0.0, 1.0]$



Fonte: Elaborado pela autora no *software* GeoGebra

Figura 23: Ajuste polinomial de grau dois no intervalo $[7.5, 8.5]$.



Fonte: Elaborado pela autora no *software* GeoGebra

Com base nas Figuras 22 e 23, a função quadrática de aproximação que encontramos que representa o modelo matemático da borda externa desta arquitetura pode é dada por:

$$h(x) = \begin{cases} -2.55x^2 + 5.22x + 0.06, & \text{se } 0.0 \leq x < 1.0 \\ -0.14x^2 + 1.23x + 1.69, & \text{se } 1.0 \leq x \leq 7.5 \\ -2.41x^2 + 35.82x - 130, & \text{se } 7.5 < x \leq 8.5 \end{cases}$$

Após encontrar a função de aproximação e tendo em mãos os dados desta arquitetura, como a distância entre as duas bases e a sua altura, o professor vai orientar aos alunos que encontrem a altura desta estrutura. Neste momento, antes de encontrar o valor da ordenada do vértice (representa o valor estimado da altura do arco), isto é, antes de usar a função de aproximação para estimar a altura do arco, sugerimos ao professor que peça aos alunos que “chutem” valores. Espera-se que eles tenham a compreensão que deverão “chutar” valores próximos ao valor da altura do arco. Se isso não ocorrer, é necessário que seja discutido junto com eles o que é modelar um problema.

Vamos considerar $f(x) = -0.14x^2 + 1.23x + 1.69$ para o cálculo da altura.

Provavelmente alguns alunos comentarão sobre a fórmula $y_v = -\frac{\Delta}{4a}$. Esta relação geralmente está enraizada, mesmo no sentido de tentar lembra-la, sendo comumente apresentada nos livros didáticos para o Ensino Básico. Assim, usando $y_v = -\frac{\Delta}{4a}$, encontramos $y_v \cong 4.39$.

E agora, o que esse valor encontrado representa no problema real? Se aumentarmos a imagem apresentada na Figura 21, as coordenadas dos pontos escolhidos se alteram e, portanto, a função de aproximação também se alterará e assim, obteremos outro valor para a ordenada do vértice da parábola. Espera-se que os alunos façam essa reflexão. Caso isso não ocorra, o professor deverá conduzir um bate papo para que pensem sobre isso.

O professor tem a clareza que o que está por trás da resposta relacionada à reflexão anterior é o conceito de proporção, que acarreta no conceito de escala. Ao realizarmos o experimento, calculamos a distância entre as partes externas das duas bases que se apoiam no chão. Essa distância foi aproximadamente igual a 8,5 metros e, a partir desse dado, escolhemos representar a imagem (arquivo extraído da

fotografia) no GeoGebra considerando que 1,0 unidade no *software* equivale a 1,0 metro de distância no problema real. Se configurarmos a figura para que 1,0 unidade no *software* seja igual a 1,0 centímetro, podemos concluir que a escala é 1:100. Isso pode ser explorada em sala, mas também não há necessidade em conhecer essa escala geométrica, pois usando a geometria das coordenadas, basta fazer a transposição dos resultados obtidos por meio da função para os seus significados na realidade.

A partir dessas considerações, podemos inferir que a altura estimada por meio da função de aproximação $f(x) = -0.14x^2 + 1.23x + 1.69$ é de aproximadamente igual a 4 metros e 39 centímetros.

Na última atividade proposta discutiremos mais detalhadamente os conceitos inerentes de uma função quadrática. Além disso, também exploraremos outras formas de estimar a altura máxima usando o GeoGebra e um pouco sobre a importância de utilizar o conceito de escala e nessas atividades.

Outra atividade que pode ser executada durante a aplicação desta proposta, é aproveitar o momento para mudar o tamanho da imagem e, visto que imediatamente o GeoGebra mostrará a nova função de aproximação, os alunos encontrarão a nova ordenada do vértice com o valor estimado anteriormente e poderão pensar em qual é esta nova escala, ou seja, como fazer a transposição dos valores encontrados para o problema real. Outra sugestão consiste em, a partir das informações sobre o que unidade de medida no problema real significa na geometria das coordenadas (uma unidade no *software*), espera-se que os alunos possam dar “chutar” um valor aproximado para o valor da ordenada do vértice antes mesmo de calculá-lo por meio da função. Sugerimos que o professor peça para a turma considerar, por exemplo, que a cada unidade no *software* represente 2,0 metros no problema real.

O que discutimos no parágrafo anterior está relacionado com a proposta de explorar conceitos de funções por meio da imagem da estrutura e auxílio do *software* GeoGebra.

Nas atividades subsequentes exploraremos mais conceitos matemáticos sobre o estudo de funções, ajuste de curvas e técnicas que o professor e os alunos poderão

aplicar para trabalhar as atividades. O que será apresentado em cada seção (categorizada por proposta de atividades) poderá ser aproveitado nas demais. O restante desta seção será destinado à aplicação do método dos mínimos quadrados. A aplicação deste método ficará à escolha do professor, pois dependerá também do grau de escolaridade dos alunos, pois para tal, necessitará de certos conceitos que pode o aluno não ter tido o contato ainda devido ao ano escolar que estiver cursando, como sistemas lineares, matrizes e somatórios.

Para a aplicação do MMQ, vamos considerar a Figura 21 e encontrar a função de ajuste usando uma função quadrática, isto é, precisamos encontrar os parâmetros a , b e c da função do tipo $f(x) = c + bx + ax^2$.

A escolha da função do tipo $f(x) = c + bx + ax^2$ se deu, pois, observando os pontos marcados na Figura 21 tivemos uma indicação de uma boa aproximação por uma função quadrática.

Os pontos escolhidos na Figura 21 foram organizados no Quadro 2.

Quadro 3: Escolha dos pontos para aplicação do ajuste quadrático na Atividade 1.

x	1,04	2,68	4,25	5,69	7,47
y	2,80	3,98	4,29	4,01	2,82

Fonte: Elaborado pela autora.

Fazendo o somatório da equação a seguir

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\sum_{k=1}^{k=5} 1 \right] \cdot c + \left[\sum_{k=1}^{k=5} x_k \right] \cdot b + \left[\sum_{k=1}^{k=5} x_k^2 \right] \cdot a = \sum_{k=1}^{k=5} y_k \cdot 1 \\ \left[\sum_{k=1}^{k=5} x_k \right] \cdot c + \left[\sum_{k=1}^{k=5} x_k^2 \right] \cdot b + \left[\sum_{k=1}^{k=5} x_k^3 \right] \cdot a = \sum_{k=1}^{k=5} y_k \cdot x_k \\ \left[\sum_{k=1}^{k=5} x_k^2 \right] \cdot c + \left[\sum_{k=1}^{k=5} x_k^3 \right] \cdot b + \left[\sum_{k=1}^{k=5} x_k^4 \right] \cdot a = \sum_{k=1}^{k=5} y_k \cdot x_k^2 \end{array} \right.$$

obtemos os dados no Quadro 3.

Quadro 4: Dados obtidos para aplicação do MMQ na Atividade 01.

k	1	2	3	4	5	$\sum_{K=1}^5$
x_k	1,04	2,68	4,25	5,69	7,47	21,130
y_k	2,80	3,98	4,29	4,01	2,82	17,900
x_k^2	1,082	7,182	18,063	32,376	55,801	446,477
xk^3	1,125	19,249	76,766	184,220	416,833	9434,057
xk^4	1,170	51,587	326,254	1048,212	3113,740	4540,963
$y_k * xk$	2,912	10,666	18,233	22,817	21,065	378,227
$y_k x_k^2$	3,028	28,586	77,488	129,828	157,359	7991,937

Fonte: Elaborado pela autora.

Substituindo os valores na equação

$$\begin{cases} \left[\sum_{k=1}^{k=5} 1 \right] \cdot c + \left[\sum_{k=1}^{k=5} x_k \right] \cdot b + \left[\sum_{k=1}^{k=5} x_k^2 \right] \cdot a = \sum_{k=1}^{k=5} y_k \cdot 1 \\ \left[\sum_{k=1}^{k=5} x_k \right] \cdot c + \left[\sum_{k=1}^{k=5} x_k^2 \right] \cdot b + \left[\sum_{k=1}^{k=5} x_k^3 \right] \cdot a = \sum_{k=1}^{k=5} y_k \cdot x_k \\ \left[\sum_{k=1}^{k=5} x_k^2 \right] \cdot c + \left[\sum_{k=1}^{k=5} x_k^3 \right] \cdot b + \left[\sum_{k=1}^{k=5} x_k^4 \right] \cdot a = \sum_{k=1}^{k=5} y_k \cdot x_k^2 \end{cases}$$

obtemos o seguinte sistema de equações lineares.

$$\begin{cases} 5c + 21,130 + 446,477a = 17,900 \\ 21,130c + 446,477b + 9434,057a = 378,227 \\ 446,477c + 9434,057b + 4540,963a = 7991,937 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtém-se

$$a = -0,14 \quad b = 1,23 \quad e \quad c = 1,68$$

Portanto, a função quadrática que estamos procurando é dada por:

$$f(x) = 1,68 + 1,23x - 0,14x^2$$

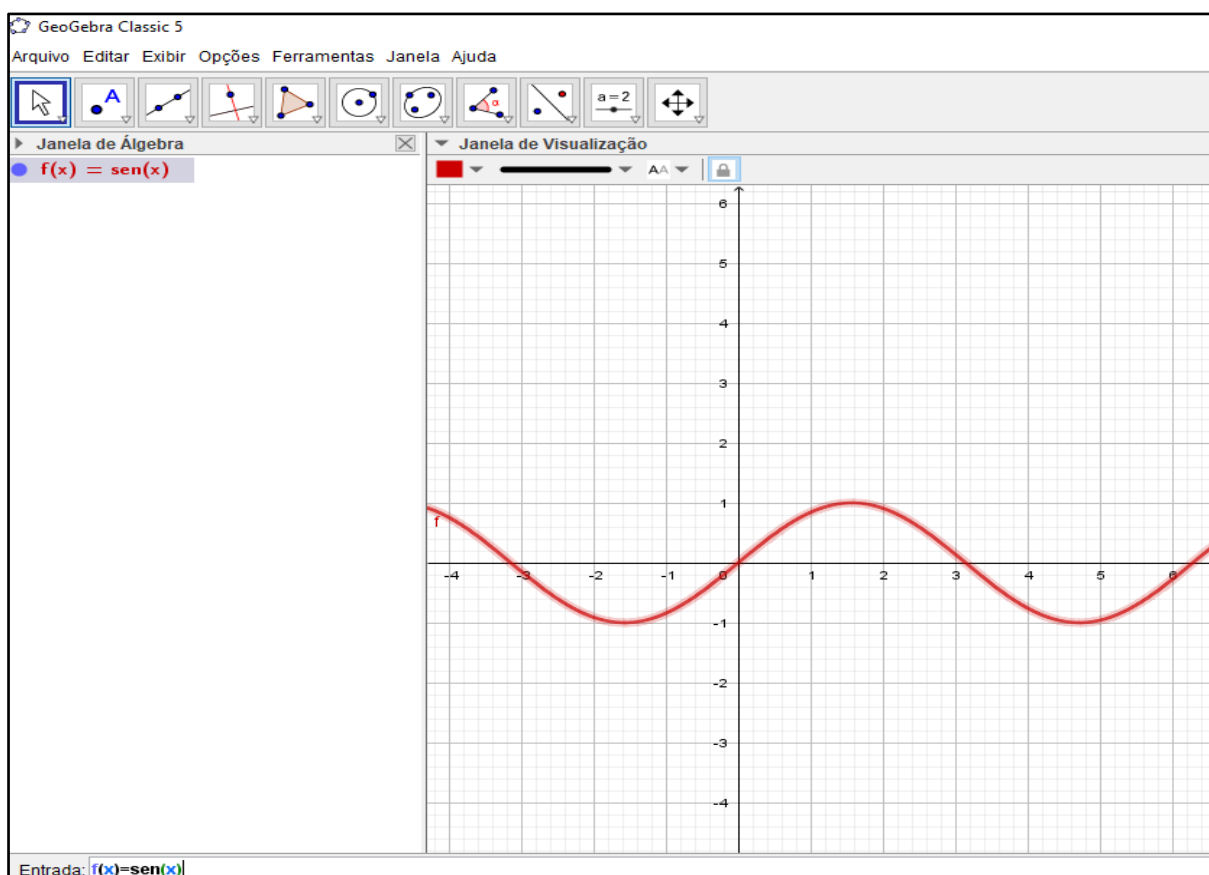
Essa função de aproximação encontrada aplicando o MMQ é igual à encontrada usando as ferramentas do GeoGebra. Esse resultado já era esperado.

O desenvolvimento desta atividade foi muito enriquecedor, pois pudemos perceber as potencialidades da Modelagem Matemática no aprendizado de funções. Mesmo não tendo sido aplicada em sala de aula, ao fazermos a transposição assumindo a posição do aluno aprendiz, percebemos que o uso da metodologia por meio da Modelagem Matemática torna os alunos sujeitos ativos no processo de ensino e aprendizagem e não meros espectadores.

5.2 ATIVIDADE 2: APROXIMAÇÃO DA FUNÇÃO SENO POR UMA FUNÇÃO POLINOMIAL DE GRAU 5

Esta atividade consiste em aproximar a função seno no intervalo $[0, 2\pi]$ por meio de uma função polinomial de grau cinco. Isso é bastante relevante, pois o professor pode dialogar com seus alunos sobre essa prática, visto que, representar certo tipo de função por uma função polinomial é bastante natural no funcionamento das calculadoras. Entretanto, deve ficar evidente que uma função polinomial de grau 5 não é uma boa aproximação para a função seno quando ampliamos o intervalo. Nesta atividade, essa aproximação ocorrerá no intervalo $[0, 2\pi]$ e, conseqüentemente, poderemos estimar o valor da função seno em qualquer número real, visto que ela é periódica e de período 2π (equivalente ao tamanho do intervalo). O primeiro passo é digitar a função seno do campo de entrada do GeoGebra, conforme mostrado na Figura 22.

Figura 24: Gráfico da função seno



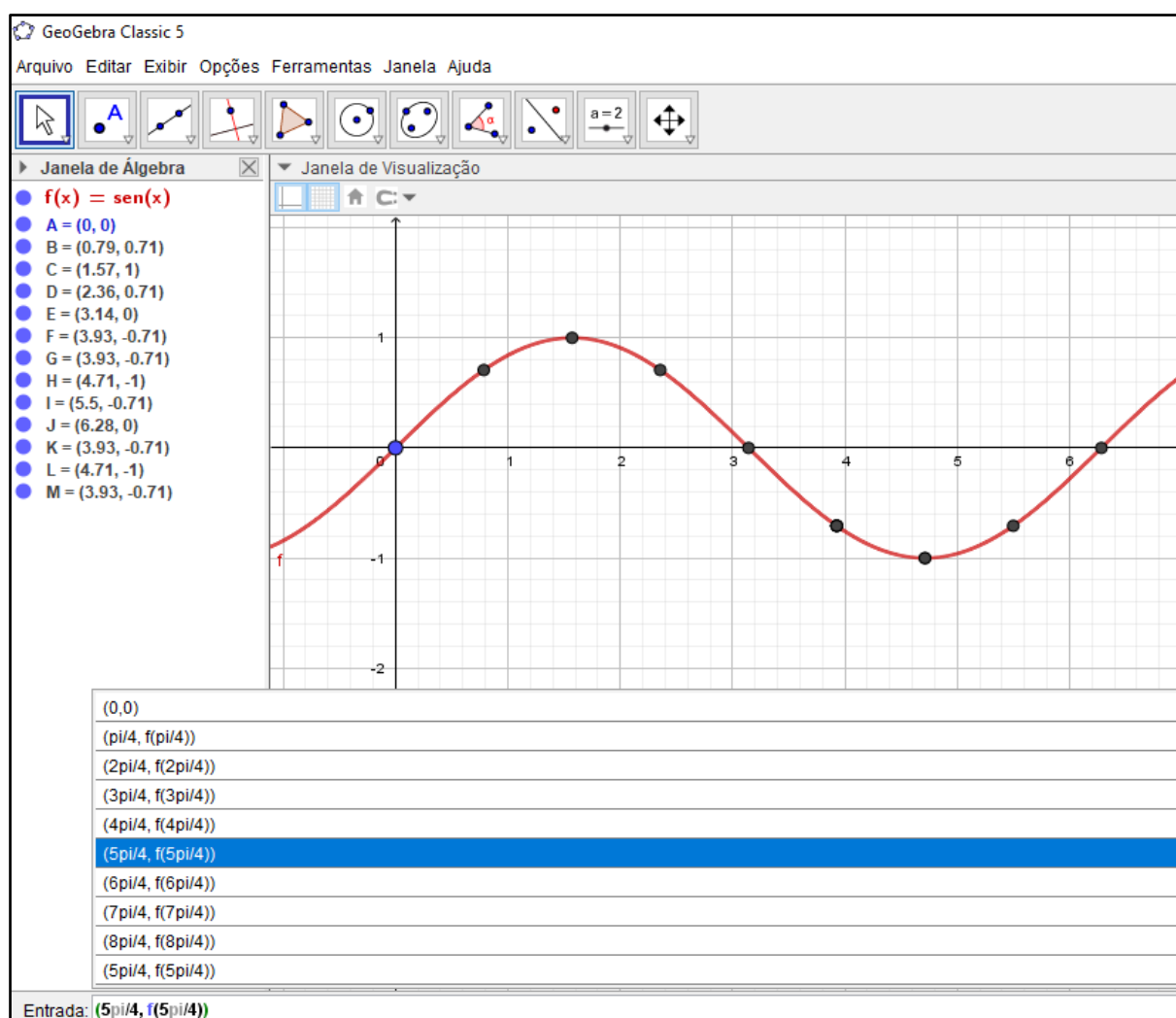
Fonte: Elaborado pela autora no software GeoGebra

Em seguida, marque alguns pontos delimitando o intervalo $[0, 2\pi]$. Neste exemplo demarcamos nove pontos, a saber,

$$(0, 0), \left(\frac{\pi}{4}, f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right), \left(\frac{\pi}{2}, f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right), \left(\frac{3\pi}{4}, f\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right), (\pi, f(\pi)), \left(\frac{5\pi}{4}, f\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right), \left(\frac{3\pi}{2}, f\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right), \left(\frac{7\pi}{4}, f\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right) \text{ e } (2\pi, f(2\pi)), \text{ em que } f(x) = \text{sen}(x).$$

Observe que esses pontos pertencem ao gráfico da função seno podendo ser inseridos por meio do campo “Entrada” do GeoGebra, conforme mostrado na Figura 25.

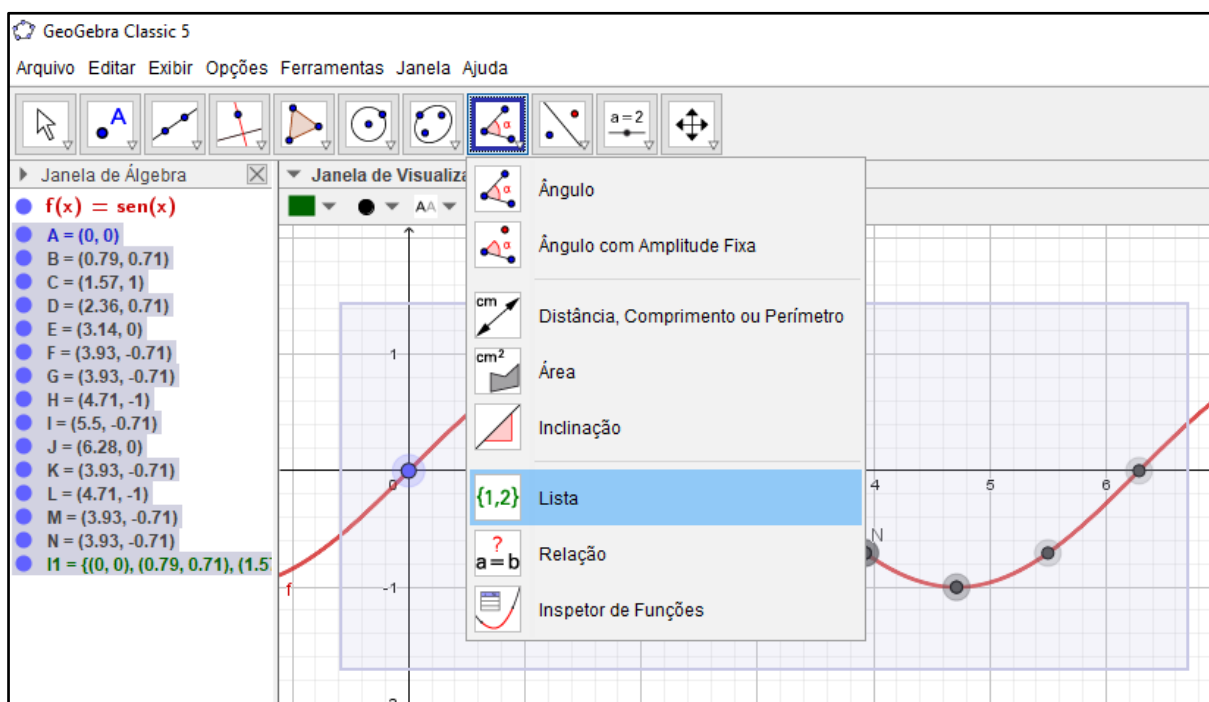
Figura 25: Pontos demarcados no gráfico da função seno no intervalo $[0, 2\pi]$.



Fonte: Elaborado pela autora no software GeoGebra

O próximo passo é criar uma lista de pontos. Na Janela de Visualização, com o lado direito do mouse pressionado, selecione os pontos que pertencerão à lista de pontos. Solte o cursor do mouse e vá na ferramenta “Ângulo” e, em seguida, selecione “Lista” para criar uma lista de pontos. A Figura 26 ilustra como usar essa ferramenta.

Figura 26: Lista de pontos no Geogebra



Fonte: Elaborado pela autora no software GeoGebra

Na sequência, vá no campo de entrada e digite “RegressãoPolinomial”. Aparecerá “RegressãoPolinomial(<Lista de Pontos>, <Grau do Polinômio>)”.

Digite o nome da lista de pontos criada (neste caso “l1”) e o grau do polinômio que deseja. Em seguida aparecerá o gráfico do polinômio de aproximação e sua lei de formação na Janela de Álgebra, conforme mostrado nas Figuras 27 e 28.

Figura 27: Polinômio de aproximação de grau 5 – Visualizando a Janela de Álgebra.

GeoGebra Classic 5

Arquivo Editar Exibir Opções Ferramentas Janela Ajuda

Janela de Álgebra

- $f(x) = \text{sen}(x)$
- $A = (0, 0)$
- $B = (0.7854, 0.70711)$
- $C = (1.5708, 1)$
- $D = (2.35619, 0.70711)$
- $E = (3.14159, 0)$
- $F = (3.92699, -0.70711)$
- $G = (3.92699, -0.70711)$
- $H = (4.71239, -1)$
- $I = (5.49779, -0.70711)$
- $J = (6.28319, 0)$
- $K = (3.92699, -0.70711)$
- $L = (4.71239, -1)$
- $M = (3.92699, -0.70711)$
- $N = (3.92699, -0.70711)$
- $I1 = \{(0, 0), (0.7854, 0.70711), (1.5708, 1), (2.35619, 0.70711), (3.14159, 0), (3.92699, -0.70711), (3.92699, -0.70711), (4.71239, -1), (5.49779, -0.70711), (6.28319, 0)\}$
- $g(x) = -0.0056x^5 + 0.08792x^4 - 0.39626x^3 + 0.26675x^2 + 0.89183x + 0.00029$
- texto1 = "g(x) = -0.0056x⁵ + 0.08792x⁴ - 0.39626x³ + 0.26675x² + 0.89183x + 0.00029"
- texto2 = "f(x) = sen(x)"

Janela de Visualização

g(x) = -0.0056x⁵ + 0.08792x⁴ - 0.39626x³ + 0.26675x² + 0.89183x + 0.00029

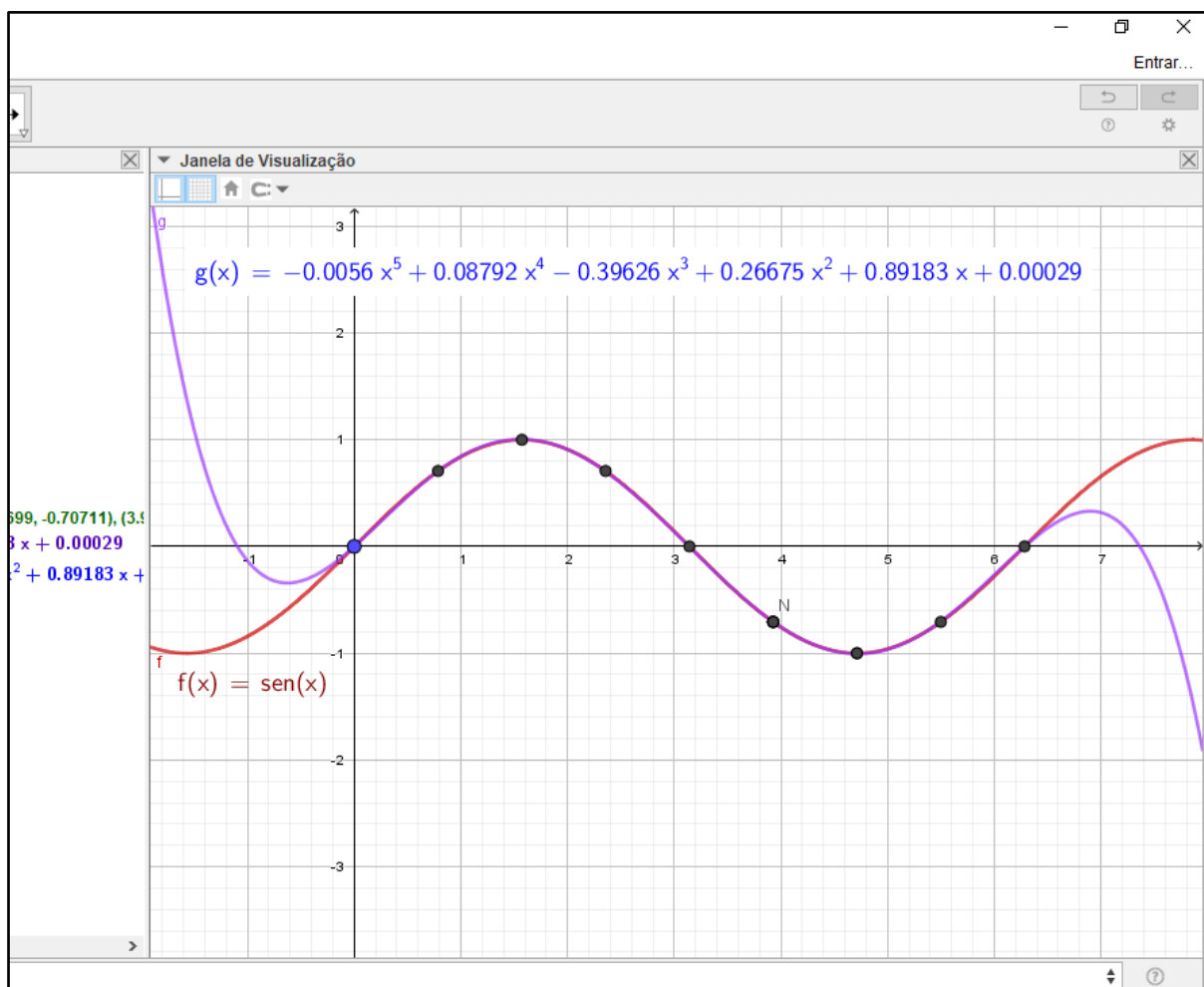
f(x) = sen(x)

(3pi/4, f(3pi/4))
(4pi/4, f(4pi/4))
(5pi/4, f(5pi/4))
(6pi/4, f(6pi/4))
(7pi/4, f(7pi/4))
(8pi/4, f(8pi/4))
(5pi/4, f(5pi/4))
(6pi/4, f(6pi/4))
(5pi/4, f(5pi/4))
RegressãoPolinomial(I1, 5)

Entrada: RegressãoPolinomial(I1, 5)

Fonte: Elaborado pela autora no *software* GeoGebra

Figura 28: Polinômio de aproximação de grau 5 – Janela de Visualização



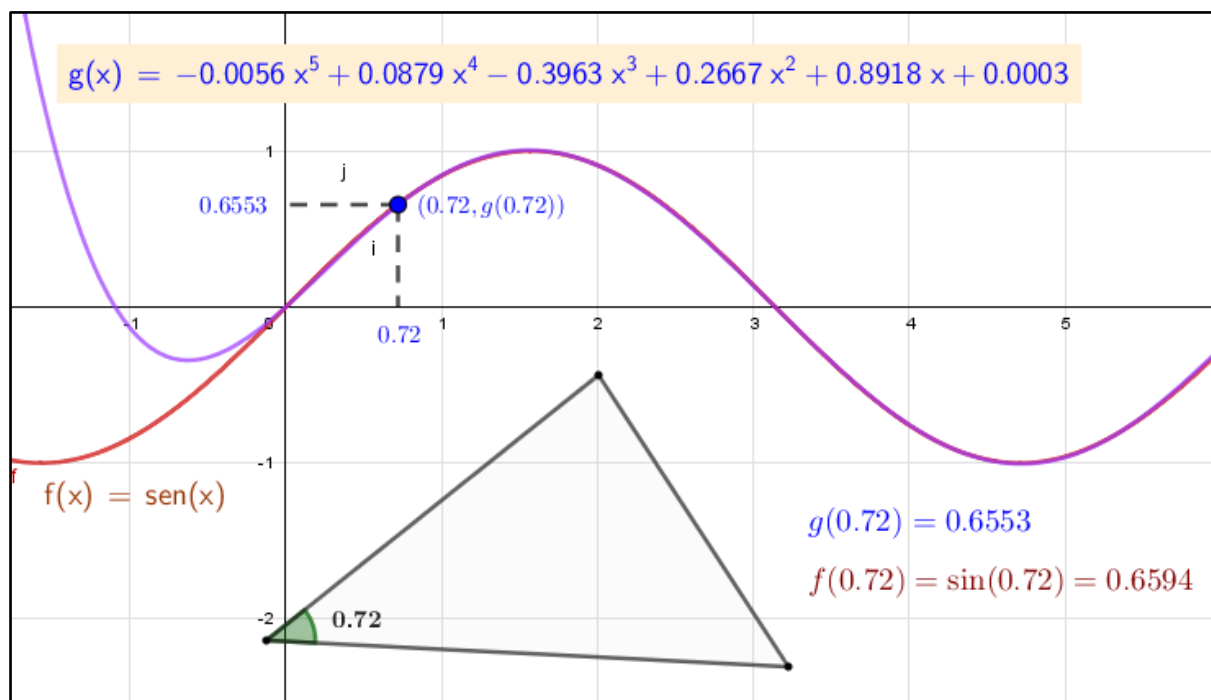
Fonte: Elaborado pela autora no *software* GeoGebra

Com base na Figura 28, nota-se que o polinômio de aproximação de grau 5 apresenta boa aproximação para a função seno no intervalo $[0, 2\pi]$. Sugerimos ao professor discutir com seus alunos sobre encontrar valores aproximados do seno usando somente a função polinomial de grau 5. É como se o aluno tivesse em mãos apenas a função polinomial para encontrar valores do seno. Veja o seguinte exemplo.

Um triângulo possui um ângulo cuja medida é igual a 0.72 radianos. Por algum motivo, será necessário encontrar o seno deste ângulo. Mas, para isso, o professor pede aos alunos utilizarem a função polinomial de aproximação de grau 5. Considerando uma aproximação de 4 casas decimais, qual o valor estimado para o seno de 0.72?

De preferência, é interessante que os alunos utilizem o software GeoGebra para fazer essa estimativa, conforme mostrado na Figura 27.

Figura 29: Polinômio de aproximação de grau 5 e valores do seno do ângulo de 0,72 radianos por meio das funções seno e da polinomial de grau 5– Janela de Visualização



Fonte: Elaborado pela autora no *software* GeoGebra

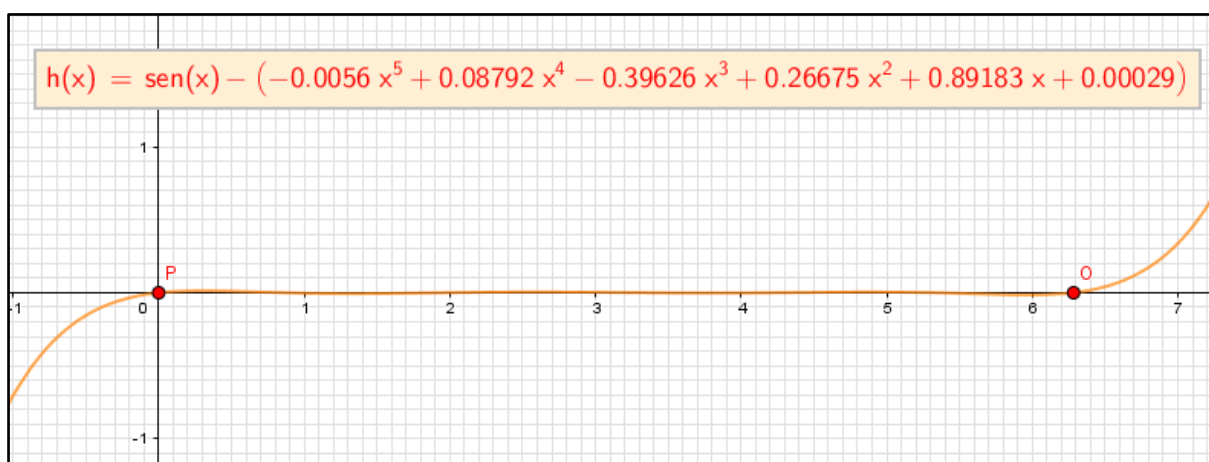
Notem que $g(0.72) = 0.6553$ e $\text{sen}(0.72) = 0.6594$. Se considerarmos duas casas decimais, o valor estimado é igual ao valor encontrado por meio do seno. O erro relativo é $\left| \frac{f(0.72) - g(0.72)}{f(0.72)} \right| \cong 0,0062 < 0.01$. Este erro relativo é aceitável em grande parte das aplicações da matemática.

No exemplo anterior consideramos o ângulo com medida em radianos. É preciso verificar nas configurações do GeoGebra para que a medida de ângulos seja dada em radianos.

Uma atividade interessante em sala de aula é pedir para que os alunos considerem alguns números reais no intervalo de aproximação e encontrem os valores correspondentes por meio da função seno e da função polinomial e, por fim, compará-los.

A percepção de que a função de aproximação que encontramos neste exemplo pode ser considerada como um “bom” ajuste pode ser inferida analisando a Figura 27, em que a função polinomial de grau 5 apresenta possuir boa afinidade com a função seno no intervalo $[0, 2\pi]$. Essa percepção pode induzida também por meio da função $h: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$, onde $h(x) = f(x) - g(x)$. A Figura 30 mostra o gráfico dessa função diferença (função erro absoluto).

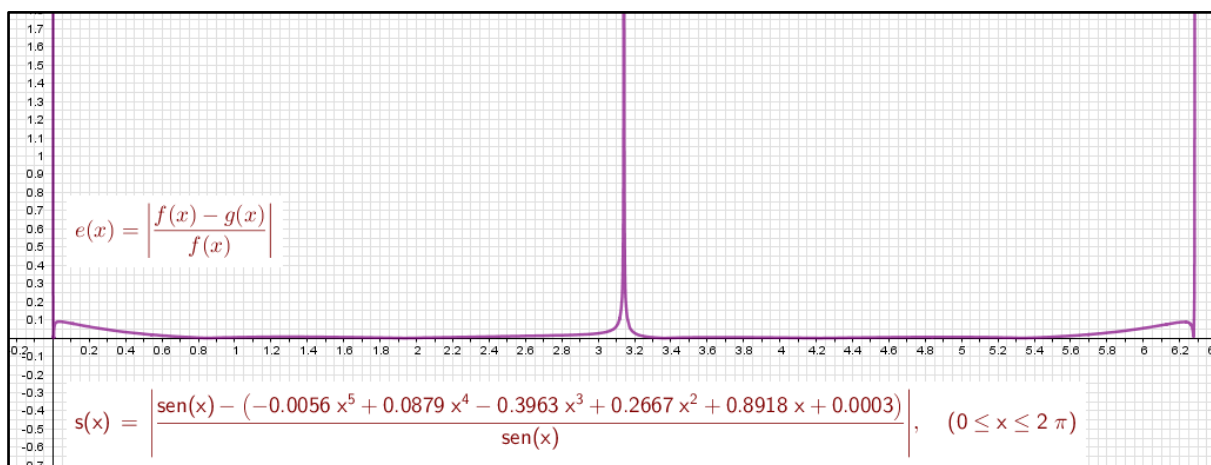
Figura 30: Gráfico da função erro absoluto



Fonte: Elaborado pela autora no *software* GeoGebra

Essa função erro absoluto é quase nula no intervalo $[0, 2\pi]$, o que já era esperado. Outra função interessante, e que pode ser discutida junto com os alunos, é a função erro relativo. Esta função pode ser utilizada nas demais atividades ou qualquer atividade cuja proposta é aproximar uma função por meio de um ajuste de curvas. Veja o gráfico da função erro relativo na Figura 31.

Figura 31: Gráfico da função erro relativo



Fonte: Elaborado pela autora no *software* GeoGebra

Podemos notar que a função $e(x)$ (erro relativo) se caracteriza por apresentar maiores erros relativos próximos aos extremos do intervalo $[0, 2\pi]$ e na vizinhança de 3.14. Esse comportamento é motivo de o professor provocar os alunos a pensarem sobre isso e, inclusive, o por que deste comportamento em $x=0$, $x=\pi$ e $x=2\pi$. Essa função erro relativo está definida nestes pontos?

Enfim, a atividade que propomos nesta seção, que aproxima a função seno por uma função polinomial de grau 5 gera muitas provocações, exploração de conceitos, transcende a aplicação direta de determinado conteúdo a fim de cumprir com o currículo escolar. O que discutimos e sugerimos em qualquer atividade proposta pode ser aproveitada nas demais atividades e, inclusive em outras que o professor e os alunos podem propor, no que diz respeito à aplicação de ajuste de curvas.

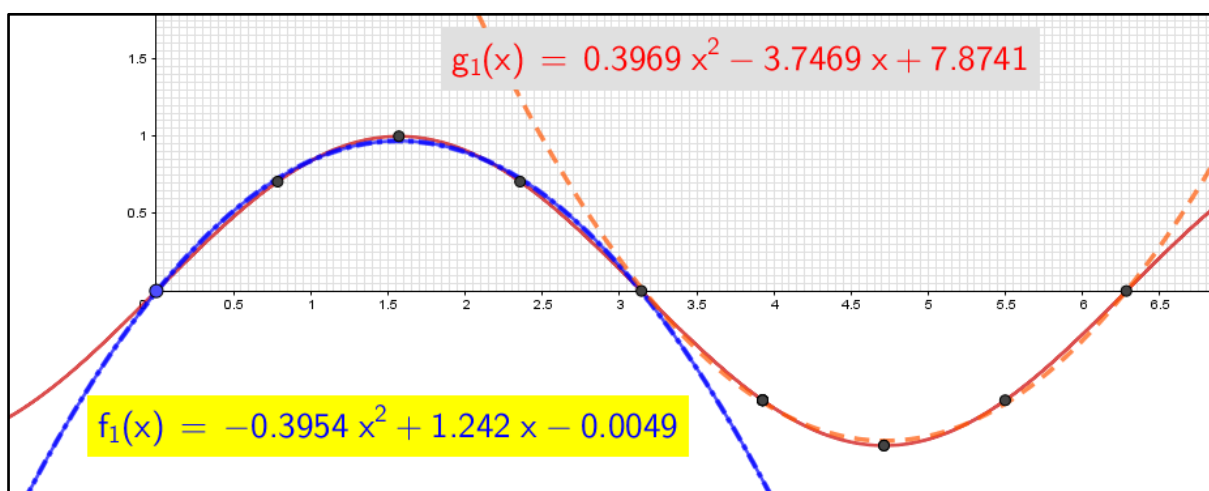
A exploração da proposta deste trabalho é riquíssima e contribui no desenvolvimento do pensamento matemático. O simples fato de o professor provocar seus alunos a pesquisar sobre algumas consequências relevantes que estão por trás da aplicação do ajuste de curvas, os levam a melhor compreensão de que o estudo de funções é relevante no contexto cotidiano, mesmo quando eles fazem uso de sua importância sem saber que elas estão por aí, em toda parte, inclusive nas calculadoras científicas, nos aparelhos de celulares, nos computadores em geral etc.

Esperamos que essa atividade faça com que os alunos indaguem sobre o fato de a função polinomial não possuir o mesmo comportamento da função seno fora do

intervalo de aproximação. Essa discussão deve ocorrer em algum momento, mas o que foi proposto até então, é a obtenção de uma aproximação polinomial em um intervalo pré-definido. Quando se tratar de toda a reta, ainda assim existe tal polinômio e isso é tratado em um curso superior no estudo de Séries de Taylor, exigindo-se assim a compreensão de somas infinitas. Por outro lado, as calculadoras não estão programadas para fazer somas infinitas, mas estão programadas a aproximar uma função por uma função polinomial de grau elevado.

Conforme dissemos, o professor e os alunos possuem muitos elementos a explorar nessas atividades. O que também pode ser feito, é aproximar a função seno no intervalo $[0, 2\pi]$ por meio de duas parábolas, isto é, aproximar por uma função definida por mais de uma sentença. Não seria difícil algum aluno sugerir que no intervalo $[0, \pi]$ o gráfico da função seno tem um comportamento que remete à uma parábola com concavidade voltada para baixo, isto é, ao gráfico de uma função quadrática. De forma análoga, a segunda metade do intervalo $[0, 2\pi]$, também lembra uma parábola, esta com concavidade voltada para cima, conforme mostrado na Figura 32.

Figura 32: Função de aproximação definida por duas funções quadráticas



Fonte: Elaborado pela autora no *software* GeoGebra

Poderíamos ter escolhido outros pontos para fazer o ajuste, no entanto, preservamos os mesmos pontos utilizados no ajuste polinomial de grau 5, pois eles mostraram-se, aparentemente, ser uma boa escolha.

Pensar na função quadrática parece ser bastante plausível, visto que elas já aparecem nos currículos nacionais desde os anos finais do Ensino Fundamental e

também são relativamente “amigáveis”, pelo menos quando comparadas às funções polinomiais de grau superior a 2 e às funções trigonométricas.

Entendemos que não há necessidade de fazer aqui uma discussão sobre este ajuste para que não fique repetitivo, mas, a fim de apresentar o modelo matemático, a função encontrada com os dados apresentados na Figura 32 é dada por

$$q(x) = \begin{cases} f_1(x) = -0.3954x^2 + 1.2420x - 0.0049, & \text{se } 0 \leq x \leq \pi \\ g_1(x) = 0.3969x^2 - 3.7469x + 7.8741, & \text{se } \pi < x \leq 2\pi \end{cases}$$

5.3 ATIVIDADE 3: QUEDA LIVRE

Nesta atividade pretende-se encontrar, por meio do ajuste de curvas, uma função que associa a altura (em metros) e o tempo (em segundos) de um objeto que foi abandonado de uma altura de 2,86 metros.

Denominamos esta atividade por 'QUEDA LIVRE', visto que na Educação Básica considera-se que a ação da gravidade é a única força que age sobre o objeto, desconsiderando-se, por exemplo, a resistência do ar, a variação da resistência do ar decorrente do clima, a rotação do próprio objeto etc e, portanto, o modelo matemático que associa o tempo à posição do objeto, seja ele abandonado de uma determinada altura ou quando o seu movimento é caracterizado por movimento oblíquo, é um modelo quadrático.

Na atividade a qual apresentaremos, uma pedra de aproximadamente 30g foi abandonada de uma altura relativamente pequena e, com isso, a ação da resistência do ar não foi suficiente para que não escolhamos o modelo quadrático para encontrar a função de aproximação.

No Quadro 4 são apresentados os dados que foram coletados para este estudo, sendo x o tempo em segundos e y a altura em metros.

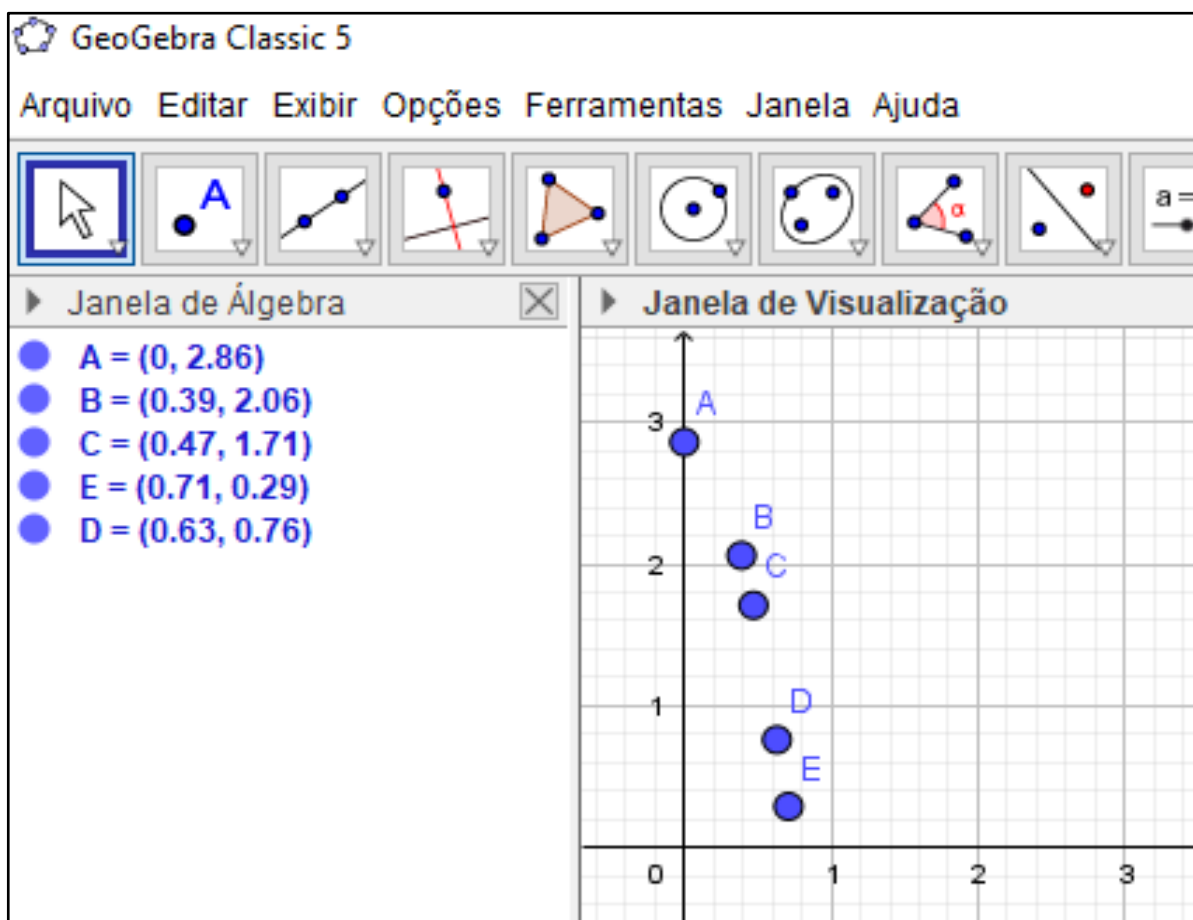
Quadro 5: Pontos coletados do experimento

x	0,00	0,39	0,47	0,71	0,63
y	2,86	2,06	1,71	0,29	0,76

Fonte: Elaborado pela autora.

A Figura 33 representa o gráfico de dispersão construído com os pontos dados na Quadro 04.

Figura 33: Gráfico de dispersão entre o tempo (em s) e a altura (em m) de um objeto em queda livre

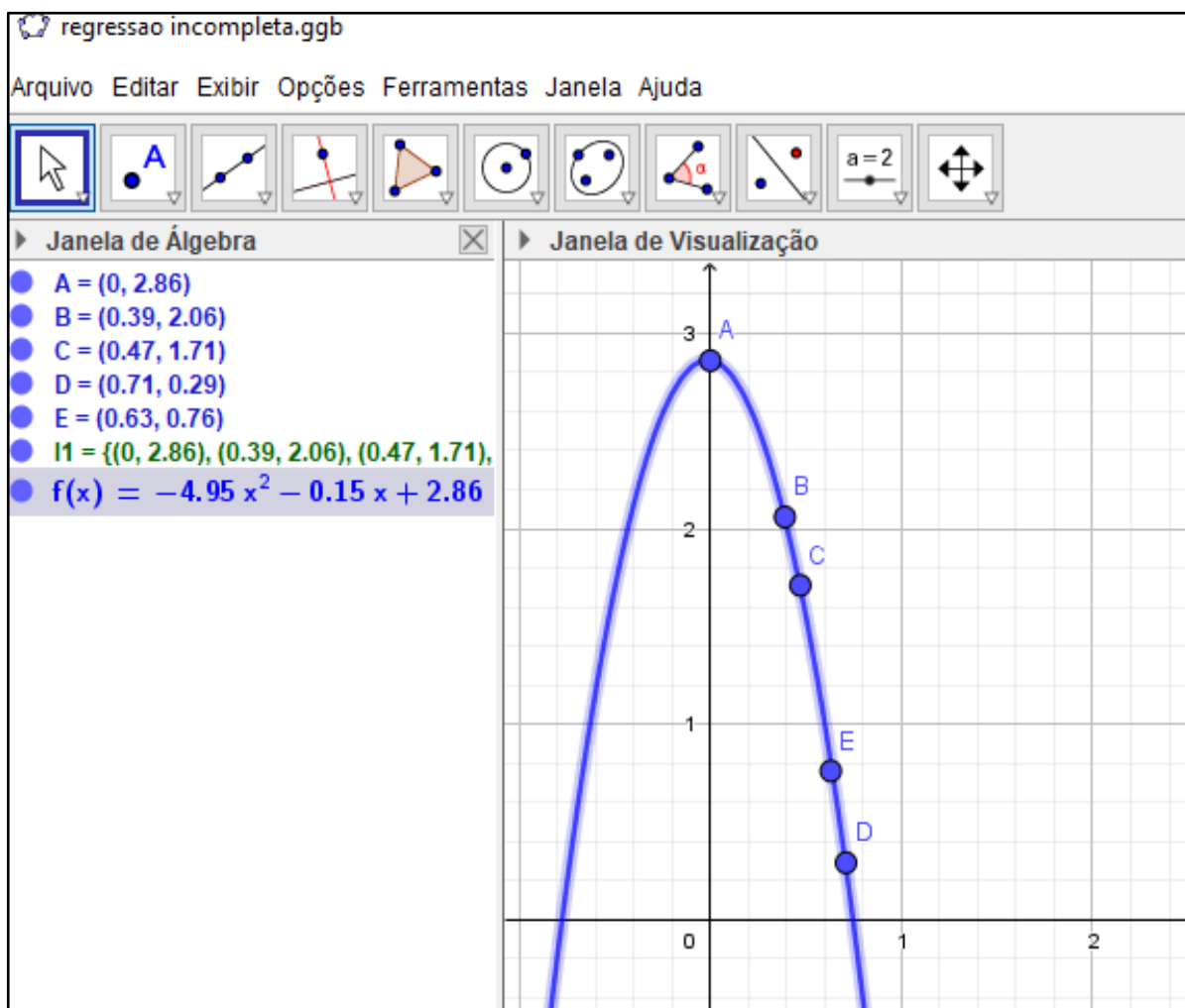


Fonte: Elaborado pela autora no *software* GeoGebra

Observe que os pontos estão apresentando um comportamento de uma parábola o que nos sugere utilizar o modelo de regressão polinomial de grau dois para modelar a relação entre as duas variáveis, nesse caso, tempo e altura.

Seguindo o mesmo passo a passo já orientado na Atividade 1, criamos uma lista de pontos e, posteriormente, cria-se o modelo de regressão polinomial de grau 2 para essa lista, conforme mostrado na Figura 34.

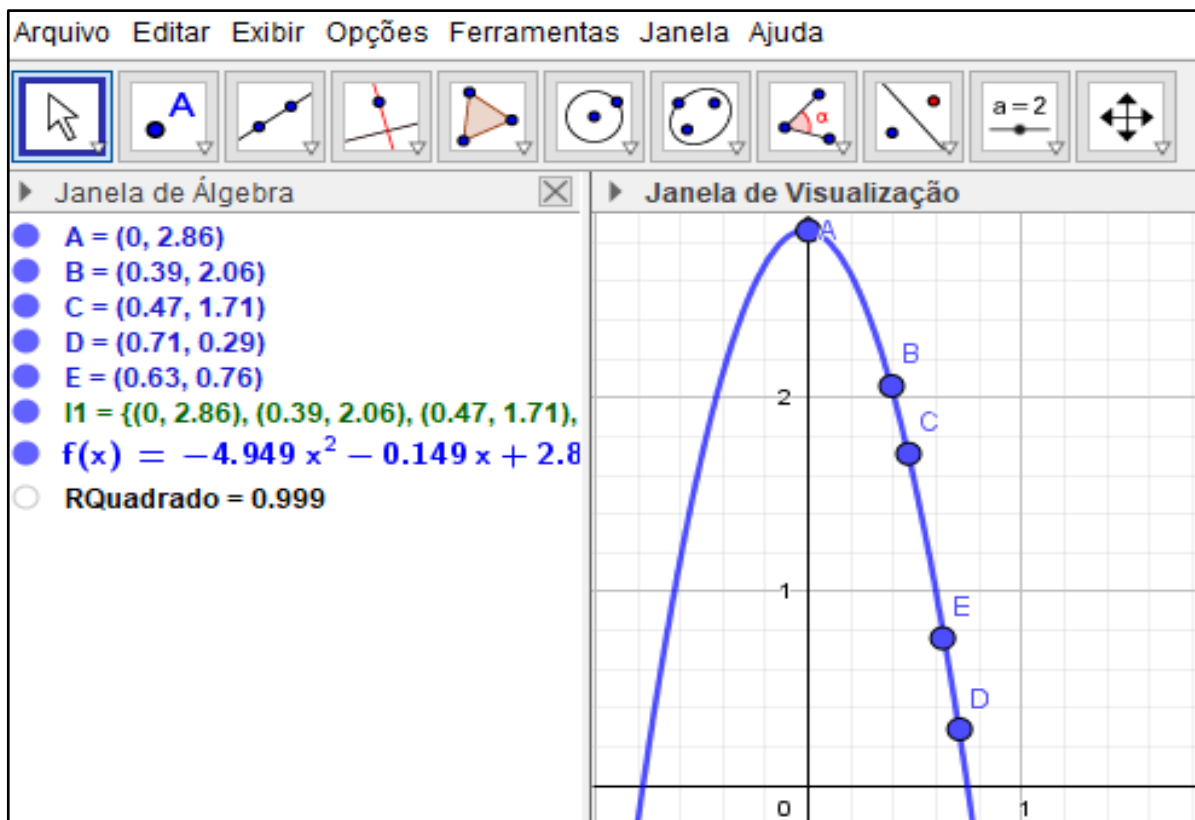
Figura 34: Ajuste polinomial de grau 2 relacionando o tempo (s) e a altura (m) de um objeto em queda livre.



Fonte: Elaborado pela autora no software GeoGebra

Observe que obtivemos um bom ajuste. Fazendo a verificação da precisão do ajuste, calculando o R^2 , obtivemos um valor próximo de 1. O R^2 é um indicador de quão preciso está o ajuste em relação aos dados da amostra, variando entre 0 e 1. Assim, quanto maior o R^2 mais preciso está o ajuste.

A Figura 35 representa o R^2 que avalia a precisão da função de ajuste do experimento.

Figura 35: Coeficiente de determinação - R^2 

Fonte: Elaborado pela autora no *software* GeoGebra

Encontrando a função de ajuste por meio do MMQ.

Observando os dados apresentados no Quadro 4, precisamos realizar alguns somatórios e seus valores podem ser observados no Quadro 5.

Quadro 6: Somatórios para resolução da atividade 03.

k	1	2	3	4	5	$\sum_{K=1}^5$
x_k	0,000	0,390	0,470	0,710	0,630	2,200
y_k	2,860	2,060	1,710	0,290	0,760	7,680
x_k^2	0,000	0,152	0,221	0,504	0,397	1,274
x_k^3	0,000	0,059	0,104	0,358	0,250	0,771
x_k^4	0,000	0,023	0,049	0,254	0,158	0,484
$y_k \cdot x_k$	0,000	0,803	0,804	0,206	0,479	2,292
$y_k \cdot x_k^2$	0,000	0,313	0,378	0,146	0,302	1,139

Fonte: Elaborado pela autora.

Fazendo as substituições dos somatórios na equação

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\sum_{k=1}^{k=6} 1 \right] \cdot c + \left[\sum_{k=1}^{k=6} x_k \right] \cdot b + \left[\sum_{k=1}^{k=6} x_k^2 \right] \cdot a = \sum_{k=1}^{k=6} y_k \cdot 1 \\ \left[\sum_{k=1}^{k=6} x_k \right] \cdot c + \left[\sum_{k=1}^{k=6} x_k^2 \right] \cdot b + \left[\sum_{k=1}^{k=6} x_k^3 \right] \cdot a = \sum_{k=1}^{k=6} y_k \cdot x_k \\ \left[\sum_{k=1}^{k=6} x_k^2 \right] \cdot c + \left[\sum_{k=1}^{k=6} x_k^3 \right] \cdot b + \left[\sum_{k=1}^{k=6} x_k^4 \right] \cdot a = \sum_{k=1}^{k=6} y_k \cdot x_k^2 \end{array} \right.$$

obtemos o seguinte sistema,

$$\begin{cases} 5,000c + 2,200b + 1,274a = 7,680 \\ 2,200c + 1,274b + 0,771a = 2,292 \\ 1,274c + 0,771b + 0,484a = 1,139 \end{cases}$$

Considerando aproximação de duas casas decimais, temos que a solução do sistema é dada por: $a = 2,86$, $b = -0,15$ e $c = -4,95$, que são valores muito próximos aos encontrados por meio do *software* GeoGebra.

Este experimento foi modelado por meio de uma função quadrática, a saber, a função

$$y(t) = 2,86 - 0,15t - 4,95t^2$$

Consideramos nesta atividade que a queda da referida pedra caracteriza um movimento uniformemente variado e que a equação do movimento é dada por

$$y(x) = y_0 + v_0t + \frac{1}{2}gt^2$$

em que y é a posição do objeto no tempo t e y_0 é a posição inicial do objeto, podemos fazer as seguintes estimativas:

- A altura inicial y_0 da pedra, em relação ao solo, foi de 2,86 metros.
- A velocidade inicial v_0 da pedra foi de -0,15 metros por segundo.
- A aceleração g da gravidade foi de -9,90 metros por segundo ao quadrado.

Primeiramente, ressaltamos que a velocidade inicial apresentada pelo modelo matemático não foi igual a zero. Espera-se que os alunos, a partir da informação que nas condições do movimento uniformemente variado o termo $-0,15t$ não deveria aparecer, discutam com seus colegas e com o professor o porquê deste termo ainda consta no modelo quadrático estimado no experimento. O professor deverá conduzi-los a concluir que este experimento não ocorreu segundo as características de um movimento uniformemente variado e, além disso, mesmo que assim o fosse, haveria erros no experimento, erros como, por exemplo, na precisão da medição da altura, do tempo etc.

Outra discussão relevante é encontrar um novo modelo quadrático, desconsiderando-se o termo linear, ou seja, aplicar o MMQ para encontrar a função de aproximação do tipo $y(x) = y_0 + \frac{1}{2}gt^2$. Esta sugestão deve ser considerada somente após o conhecimento de que utilizamos a função $y(x) = y_0 + v_0t + \frac{1}{2}gt^2$ no estudo de movimento uniformemente variado, pois o objetivo das nossas atividades não é considerar o conhecimento prévio do aluno sobre estes movimentos e sim, mesmo sem saber o seu comportamento, extrair do estudo de função de aproximação, elementos que dão suporte para que possamos fazer estimativas, encontrar modelos matemáticos em diversos problemas do contexto cotidiano.

O professor pode sentir-se à vontade para conversar um pouco com os alunos sobre o “papel” do sinal negativo que aparece na velocidade inicial estimada, que é de $-0,15$ metros por segundo. Os alunos provavelmente acharão estranho, mas, dependendo do grau de escolaridade, pode ser discutido sobre a velocidade ser uma grandeza vetorial e, portanto, $\vec{v} = (0, -0,15)$ representa o vetor $\vec{v} = (0, -0,15)$, um vetor que possui a direção do eixo OY e aponta para baixo (sentido da trajetória da pedra). Mas, como apenas encontramos a curva do segundo grau que melhor se ajusta aos dados no sentido do MMQ, não seria espantoso se o sinal da velocidade fosse positivo. O que esperamos é que, em módulo, o valor da velocidade inicial seja relativamente próximo de zero, visto que o objeto (pedra) foi abandonado.

Vamos encontrar a função de aproximação polinomial do tipo $y(x) = y_0 + \frac{1}{2}gt^2$.

Temos que:

$$\sum_{i=1}^n [d_k]^2 = \sum_{i=1}^n [(ax_i^2 + c) - y_i]^2 \Leftrightarrow$$

$$\sum_{i=1}^n [d_k]^2 = \sum_{i=1}^n [ax_i^2 + c - y_i]^2$$

A fim de minimizar a soma dos quadrados dos desvios, vamos encontrar as derivadas parciais em relação às variáveis a e c .

$$\begin{cases} \frac{\partial E}{\partial a} = \sum_{i=1}^n 2(ax_i^2 + c - y_i)x_i^2 \\ \frac{\partial E}{\partial c} = \sum_{i=1}^n 2(ax_i^2 + c - y_i) \end{cases} \Leftrightarrow$$

Igualando a zero essas derivadas parciais e realizando algumas operações algébricas, obtemos

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n (ax_i^4) + \sum_{i=1}^n (cx_i^2) + \sum_{i=1}^n (-x_i^2 y_i) = 0 \\ \sum_{i=1}^n (ax_i^2) + \sum_{i=1}^n (c) + \sum_{i=1}^n (-y_i) = 0 \end{cases}$$

ou, equivalentemente,

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n (ax_i^4) + \sum_{i=1}^n (cx_i^2) = \sum_{i=1}^n (x_i^2 y_i) \\ \sum_{i=1}^n (ax_i^2) + \sum_{i=1}^n (c) = \sum_{i=1}^n (y_i) \end{cases}$$

Para obtermos os coeficientes a e c , resolvemos o sistema linear encontrado.

Utilizando os dados do Quadro 4, calculamos os seguintes somatórios apresentados no Quadro 6, necessários para encontrar a função de aproximação desejada.

Quadro 7: Somatório para resolver o caso $y(x) = y_0 + \frac{1}{2}gt^2$.

k	1	2	3	4	5	$\sum_{K=1}^5$
y_k	2,860	2,060	1,710	0,290	0,760	7,680
x_k^2	0,000	0,152	0,221	0,504	0,397	1,274
x_k^4	0,000	0,023	0,049	0,254	0,158	0,484
$y_k * x_k^2$	0,000	0,313	0,378	0,146	0,302	1,139

Fonte: Elaborado pela autora.

Substituindo os valores dos somatórios na equação

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n (ax_i^4) + \sum_{i=1}^n (cx_i^2) = \sum_{i=1}^n (x_i^2 y_i) \\ \sum_{i=1}^n (ax_i^2) + \sum_{i=1}^n (c) = \sum_{i=1}^n (y_i) \end{cases}$$

Encontramos o seguinte sistema

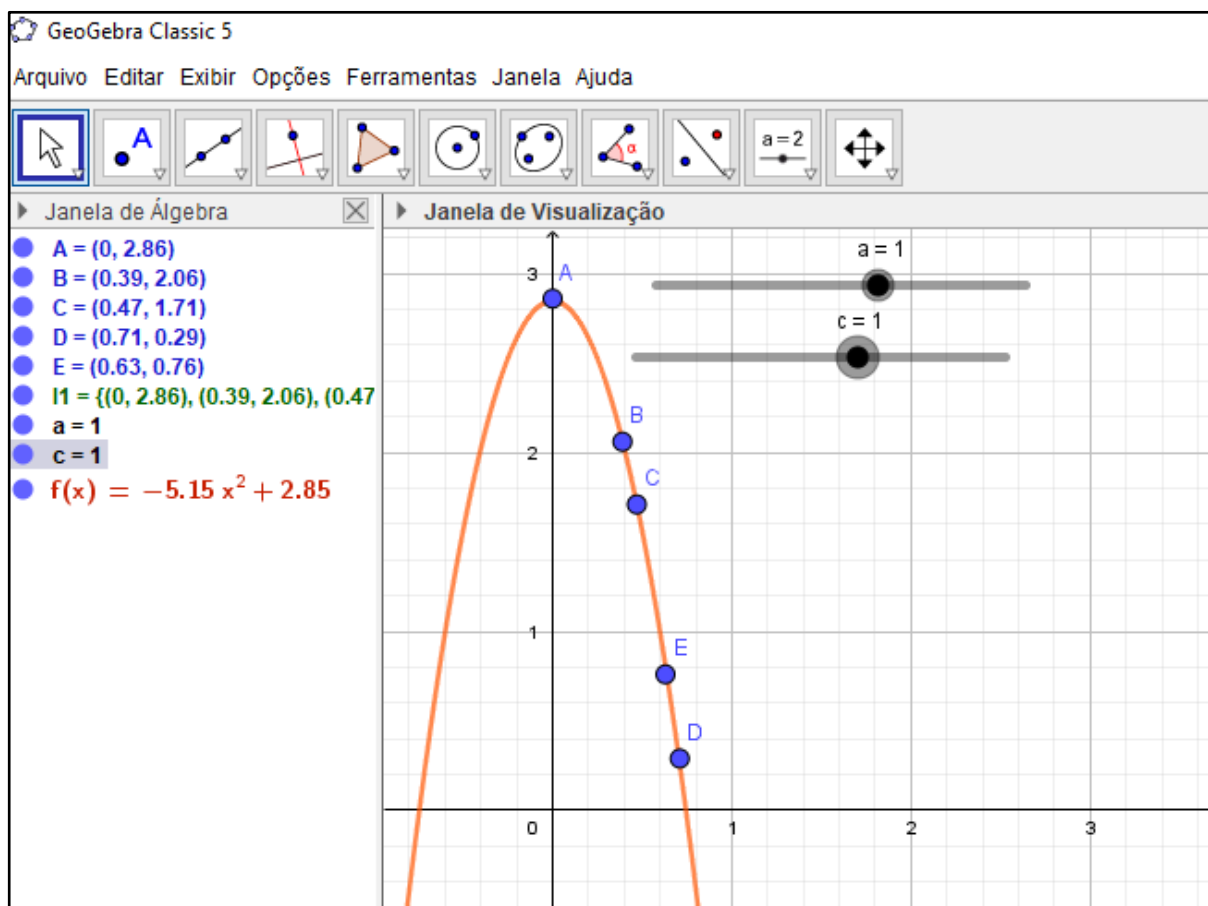
$$\begin{cases} 0,484a + 1,274c = 1,139 \\ 1,274a + 5,000c = 7,680 \end{cases}$$

onde $a = -5,13$ e $c = 2,84$.

A Figura 36 representa o polinômio de grau 2 ajustado por uma função do tipo

$$y(x) = y_0 + \frac{1}{2}gt^2.$$

Figura 36: Regressão polinomial de grau dois do tipo, $y(x) = y_0 + \frac{1}{2}gt^2$.



Fonte: Elaborado pela autora no *software* GeoGebra

Observando os valores encontrados, a sugestão é que o professor peça aos alunos para compararem os resultados encontrados. Se os valores não forem os mesmos, irá questioná-los o porquê de os resultados não coincidirem.

Outro questionamento é sobre a diferença nas situações em que se tem somente os coeficientes a e c , e na situação que se tem os coeficientes a , b , e c , o que mudou em relação ao caso em que temos os três coeficientes?

Observe que quando se utiliza a equação quadrática incompleta, na forma $y(x) = y_0 + \frac{1}{2}gt^2$, sem o termo linear desconsidera-se, para fins de cálculo do modelo, a velocidade inicial. Trata-se de uma simplificação matemática em qual é imposto ao modelo a desconsideração da velocidade inicial.

5.4 ATIVIDADE 4: ACELERAÇÃO GRAVITACIONAL

Nesta atividade, pretendemos estimar o valor da aceleração gravitacional e usaremos o experimento realizado na atividade anterior (Atividade 3).

Conforme já discutimos, se considerarmos conhecida a equação horária $y(x) = y_0 + v_0t + \frac{1}{2}gt^2$ do espaço em função do tempo, basta a compararmos com a função de aproximação $y(t) = 2,86 - 0,15t - 4,95t^2$ encontrada por meio do experimento. Por outro lado, desconsiderando a equação horária, ainda assim podemos fazer uma estimativa do valor da aceleração gravitacional no local do experimento.

A aceleração da gravidade mede a variação da velocidade do corpo em função do tempo. Há várias maneiras que o professor poderá conduzir a turma para que encontrem o valor dessa aceleração. Uma delas, que podemos considerar tradicional, é por meio da aplicação da fórmula

$$\text{aceleração escalar média} = \frac{\textit{Velocidade final} - \textit{velocidade inicial}}{\textit{tempo final} - \textit{tempo inicial}}$$

Espera-se que os alunos sugiram o uso desta fórmula. No entanto, surge naturalmente o seguinte questionamento: Como aplicar esta fórmula se não conhecemos as velocidades instantâneas nos extremos de algum intervalo de tempo?

Inicia-se aí uma boa discussão. Este tipo de questionamento é muito enriquecedor no processo de ensino e aprendizagem, pois ele pode levar à imaginação, a qual contribui para que ocorra o conhecimento matemático.

Sugerimos ao professor propor aos alunos a encontrar a aceleração escalar média em algum intervalo de tempo. Vamos exemplificar este problema considerando o intervalo $[0.3, 0.7]$.

Neste intervalo, precisamos conhecer a velocidade da pedra nos instantes 0.7 e 0.3 segundos. Para isso, os alunos precisam usar a imaginação e o professor pode

ajuda-los, discutindo o conceito de velocidade instantânea, sem extrapolar para a formalização do conceito de limite, mesmo que esta atividade seja aplicada em turmas de Ensino Superior. É uma boa hora de “enxergar”, na prática a ideia por trás do conceito de limite.

Após discussões entre professor/alunos e alunos/alunos, conclui-se que podemos obter uma aproximação para o valor das velocidades instantâneas nos instantes 0.7 e 0.3 segundos, da seguinte maneira:

Velocidade instantânea em $t = 0.7$ segundos:

$$v(0.7) = \frac{y(0.7) - y(0.699)}{0.7 - 0.699}$$

O quociente entre a variação da altura e a variação do tempo é uma maneira de fazer uma estimativa da velocidade instantânea. Usando o software ou uma calculadora, encontramos $y(0.7) = 0.3295$ e $y(0.699) = 0.3366$. Substituindo essas alturas na equação anterior, obtemos

$$v(0.7) = \frac{0.3295 - 0.3366}{0.7 - 0.699} = -7.1 \text{ m/s}$$

Velocidade instantânea em $t = 0.3$ segundos:

De forma análoga ao caso anterior, obtemos

$$v(0.3) = \frac{2.3695 - 2.3726}{0.3 - 0.299} = -3.1 \text{ m/s}$$

Logo,

$$\text{aceleração da gravidade} = \frac{v(0.7) - v(0.3)}{0.7 - 0.3} = 10 \text{ m/s}^2.$$

Portanto, considerando 4 casas decimais e a técnica utilizada para estimar a aceleração da gravidade no local no experimento, encontramos que esta aceleração

é igual a 10 m/s^2 . Este valor é normalmente utilizado como aproximação da aceleração da gravidade em muitos problemas e, obtê-lo por meio de um “simples” experimento é bastante instigador a todos os envolvidos nesta aplicação. Vale salientar que, se considerarmos mais casas decimais, diminuiremos os erros de aproximação e encontraremos que a aceleração da gravidade será igual a $9,9 \text{ m/s}^2$. É este valor que estimamos na Atividade 3 e também vamos estimar ao aplicar outra técnica mais adiante.

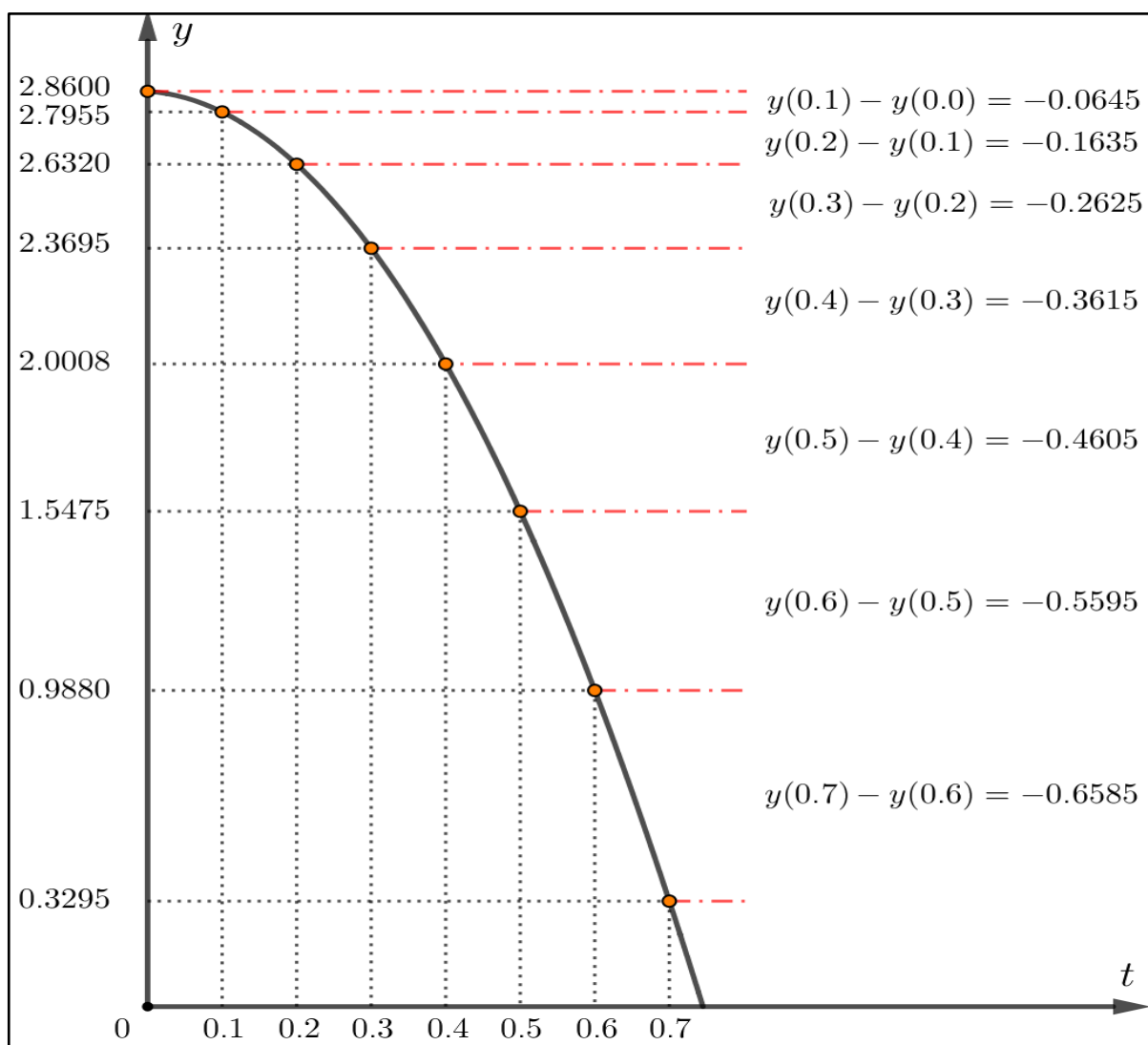
Não é desta forma que, geralmente, este experimento é realizado nas instituições de ensino (básico ou superior), quando se dispõe de um laboratório de física e/ou matemática. A metodologia que propomos não exige de laboratórios, ela valoriza a criatividade do professor e dos alunos em sua execução. A BNCC propõe que seja desenvolvida nos estudantes este tipo de competência. Isso corrobora ainda mais com a justificativa da proposta deste trabalho.

Agora iremos considerar a função $y(t) = 2,86 - 0,15t - 4,95t^2$ para encontrar, de outra forma, a aceleração gravitacional. Já é conhecido no estudo de funções afins que variações iguais no domínio acarretam variações iguais na imagem (essas imagens formam uma progressão aritmética de primeira ordem), isto caracteriza uma função afim. Por outro lado, em funções quadráticas, se tomarmos variações iguais no domínio, a sequência formada pelas suas imagens é uma progressão aritmética de segunda ordem, ou seja, $(y(t_1), y(t_1+h), y(t_1+2h), y(t_1+3h), \dots)$ é uma PA de segunda ordem.

As observações feitas no parágrafo anterior podem ser evitadas em sala de aula, mas é bom o professor ter noção do que se trata, para que não fique surpreso com os resultados que encontraremos a seguir.

Vamos particionar o intervalo $[0, 0.7]$ em 7 subintervalos de passo (tamanho) igual a 0.1 . Em cada subintervalo, encontraremos a distância percorrida pelo objeto (pedra) abandonado. Essas variações estão representadas na Figura 37.

Figura 37: Variação da altura em cada intervalo de tempo.



Fonte: Elaborado pela autora no *software* GeoGebra

No instante inicial a pedra encontrava-se a uma altura de 2,86 metros e 1 segundo após, sua altura era de 2,7955, o que dá uma variação de $-0,0645$ metros ou $-6,45$ centímetros. O sinal negativo indica que à medida que o tempo passa, a pedra encontra-se mais próxima do solo, implicando assim na diminuição da altura.

No próximo intervalo de tempo, a saber, no intervalo $[0.1, 0.2]$, houve uma variação de $-0,1635$. Essas variações foram calculadas até o sétimo intervalo considerado, conforme apresentado no Quadro 7.

Quadro 8: Variação da altura em intervalos de tempo de 0.1 s

Δt	[0.0, 0.1]	[0.1, 0.2]	[0.2, 0.3]	[0.3, 0.4]	[0.4, 0.5]	[0.5, 0.6]	[0.6, 0.7]
Δy	-0.0645	-0.1635	-0.2625	-0.3615	-0.4605	-0.5595	-0.6585

Fonte: Elaborado pela autora.

Analisando a segunda linha do Quadro 7, podemos perceber que a sequência formada pelas variações Δy das alturas também variam, e de modo uniforme. Consequentemente, a velocidade também está variando.

Note que a sequência formada pelas variações das alturas, em cada intervalo de tempo, aumenta, em módulo, de 0.0990 metros. Isto quer dizer que a velocidade aumenta, em módulo, 0.0990 metros a cada 0.1 segundo. Em outras palavras, a velocidade está aumentando, em módulo, 0.990 metros por segundo.

Essa variação da velocidade de 0.990 metros por segundo acarreta numa aceleração de 9.90 metros por segundo ao quadrado, ou seja, a aceleração da gravidade é de 9.90 metros por segundo ao quadrado.

Este valor encontrado fica explícito quando consideramos no gráfico 0.990 apresentado na Figura 35, os valores das oito alturas obtidas ao considera-las nos tempos 0.0, 0.1, 0.2, ..., 0.7. As imagens (alturas) formam a seguinte sequência:

$$(2.8600, 2.7955, 2.6320, 2.3695, 2.008, 1.5475, 0.9880, 0.3295)$$

Esta sequência é uma progressão aritmética de segunda ordem, em que a sequência formada pelas diferenças dos termos representa a sequência formada pelas variações das alturas (e está associada à velocidade), conforme mostrado a seguir:

$$(-0.0645, -0.1635, -0.2625, -0.3615, -0.4605, -0.5595, -0.6585)$$

Por fim, esta sequência é uma progressão aritmética de primeira ordem, em que a sequência formada pelas diferenças dos termos representa a sequência

formada pelas variações das velocidades (e está associada à aceleração), conforme mostrado a seguir:

$$(-0.0990, -0.0990, -0.0990, -0.0990, -0.0990, -0.0990)$$

Portanto, analisando as variações das alturas (associa-se à velocidade) e, em seguida, as variações desta variação (associa-se à aceleração), obtemos uma sequência constante, onde os termos são iguais a 0.0990. Como esta constante foi obtida em intervalos de tempo iguais a 0.1 segundo, então, segue que a aceleração da gravidade é igual a $0.0990\text{m}/(0.1\text{s})^2$, isto é, $9.90\text{m}/\text{s}^2$.

O professor pode pensar em outras formas de obter essa aceleração. Fica a critério da melhor forma que achar conveniente para explorar em sua turma. O mais importante é que os estudantes percebam que usamos de “artifícios” não convencionais, mas que podemos considera-los relativamente simples e “poderoso” para modelar problemas do contexto cotidiano, ou melhor, para fazer ciência e ampliar o campo de possibilidades e criatividade em nossos estudantes.

5.5 CHUTANDO UMA BOLA DE FUTEBOL

Essa proposta de atividade possibilita ao professor explorar alguns conceitos de funções para realizar a estimativa da altura máxima atingida pela bola e a distância percorrida pela bola em relação ao eixo horizontal (solo), sendo normalmente, denominada na Física de alcance horizontal. Assim como na atividade relacionada à estrutura arquitetônica, nesta atividade o professor poderá trabalhar os conceitos de escala e proporcionalidade. Essa é uma atividade que pode ser trabalhada em parceria com o professor de Física, tratando assim da interdisciplinaridade.

Consideraremos que esta atividade seja realizada na escola em uma quadra esportiva, campinho de futebol ou até mesmo no pátio. Após apresentá-la aos alunos, eles serão encaminhados a fazer o experimento. Os alunos vão chutar uma bola e essa ação será filmada.

Posteriormente, serão levados ao laboratório de informática para assistirem ao vídeo e extrair algumas informações (coordenadas de pontos) sobre tempo e posição da bola, a fim de construir um diagrama de dispersão e, conseqüentemente, verificar o comportamento desses pontos e decidir qual o tipo de função que possui um comportamento semelhante. O uso do vídeo contribui para que esses dados sejam extraídos com bom grau de precisão, pois podemos pausa-lo e extrair as informações que precisamos, além de printar a tela, obter uma imagem e fazer um tratamento desta imagem.

Após algumas discussões entre os pares e entre eles e o professor, espera-se que em cada experimento, eles percebam que a função a ser escolhida para fazer o ajuste de curva é uma função quadrática.

A atividade proposta nesta seção foi realizada pela autora deste trabalho e representa um experimento-modelo para nortear o trabalho do professor. Uma bola foi chutada de tal forma a ocorrer uma boa elevação em relação ao solo e que a distância percorrida em relação ao solo não seja “muito grande”. Este tipo de chute é conhecido como “cavadinha” e essa “cavada” na bola contribui para que o foco da parábola (curva de ajuste) não fique muito distante do seu vértice (ponto mais alto atingido pela bola).

Nesta atividade encontraremos uma função que modela a trajetória da bola, em que a variável independente x representa o tempo decorrido a partir do instante em que a bola foi chutada e a variável y representa sua altura em relação ao solo (escolhido para definir o eixo horizontal).

A Figura 38 apresenta a posição da bola no tempo 0:0,1:10 (1,1 segundo), mas no instante em que ocorreu o chute, o vídeo foi pausado e extraímos a informação de que o tempo percorrido era de (0,4 segundo). Portanto, após 0,7 segundo a bola se encontrava na posição apresentada na Figura 38. Esta imagem foi extraída do vídeo gravado pela autora deste trabalho.

Figura 38: Ilustração de como encontrar o instante e a posição da bola por meio da reprodução do vídeo e da tecla “Print Screen” do teclado.



Fonte: Elaborado pela autora no *software* GeoGebra

Lembramos que a obtenção das coordenadas de pontos para a construção de um diagrama de dispersão não é única, apenas estamos retratando os procedimentos que utilizamos nesta atividade, mas os alunos poderão obter tais coordenadas usando outros dispositivos, como, por exemplo, aparelhos de celular.

O professor pedirá aos alunos que encontrem as coordenadas de vários pontos. Neste experimento, vamos utilizar o centro da bola em algumas posições que

ela aparece na Figura 39. Não há necessidade de considerar todos estes pontos a fim de encontrar uma função que modela a altura em relação ao tempo desta bola entre os instantes que ela recebeu um chute o instante que ela voltou a tocar no solo.

Figura 39: Conjunto de imagens sobrepostas.



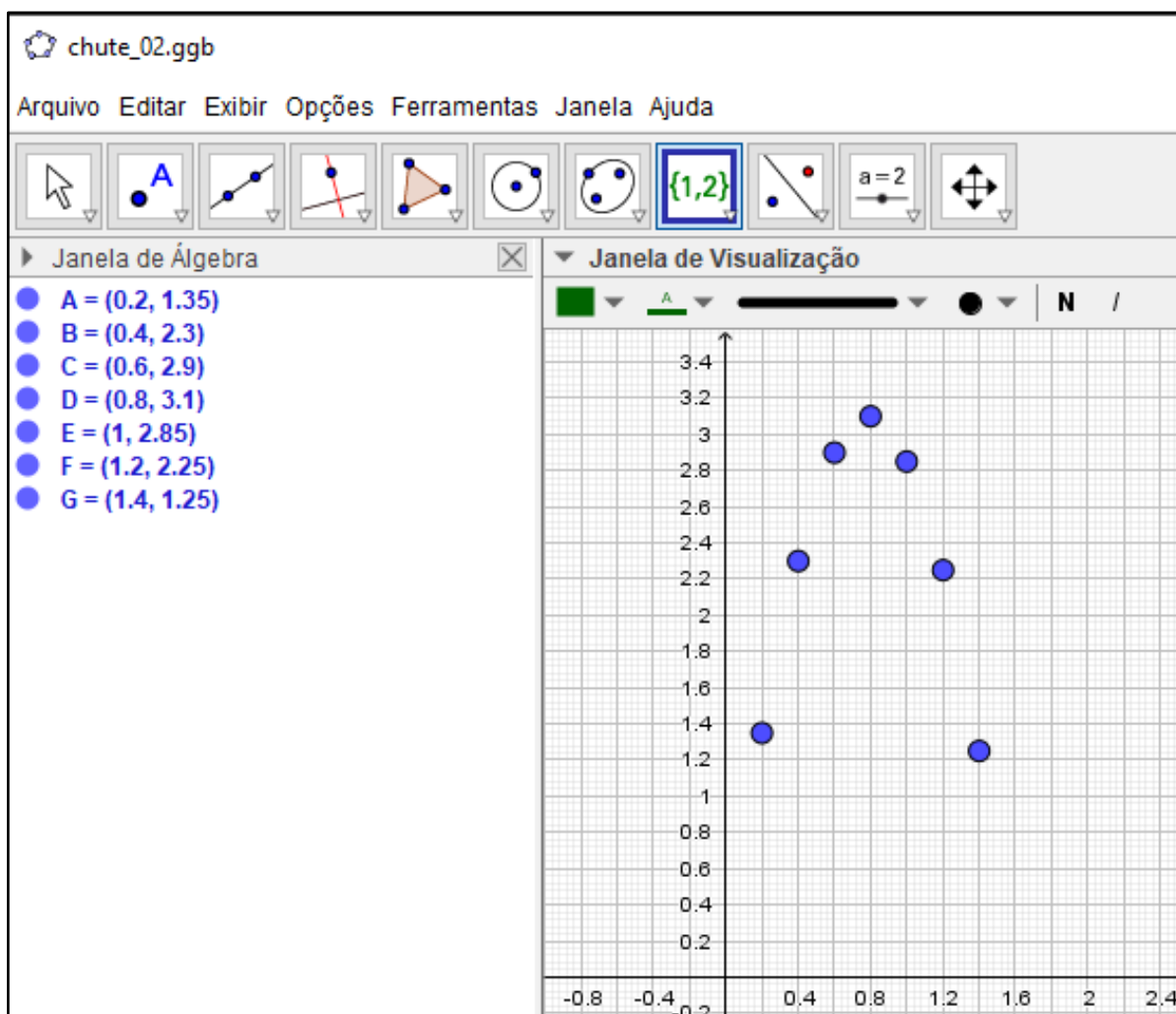
Fonte: Elaborado pela autora no *software* GeoGebra

Vale ressaltar que a criação da Figura 39 por meio de imagens sobrepostas não é necessária. Os alunos apenas precisam reproduzir o vídeo, pausar e verificar a posição da bola para obter as coordenadas (altura, tempo) do respectivo ponto. Após pausar o vídeo e imprimir a tela do dispositivo que está sendo usado, esta imagem é usada para determinar a altura da bola. A partir da importação desta imagem para o GeoGebra, a respectiva altura pode ser estimada com boa precisão à medida que ampliamos a referida imagem.

O professor solicitará aos alunos que representem por meio de uma tabela as coordenadas de alguns pontos e, posteriormente, representem essas coordenadas no GeoGebra. Mas é importante chamar atenção dos alunos a se preocupar com o tratamento da imagem, comentada no parágrafo anterior. Foi isso que fizemos nesta atividade e, por isso, utilizamos duas casas decimais ao fazer a estimativa da altura

em cada instante considerados, conforme mostrado na Figura 40 (ver “Janela de Álgebra”).

Figura 40: Diagrama de dispersão ($h \times t$) associado à atividade “Chutando uma Bola de Futebol”.



Fonte: Elaborado pela autora no software GeoGebra

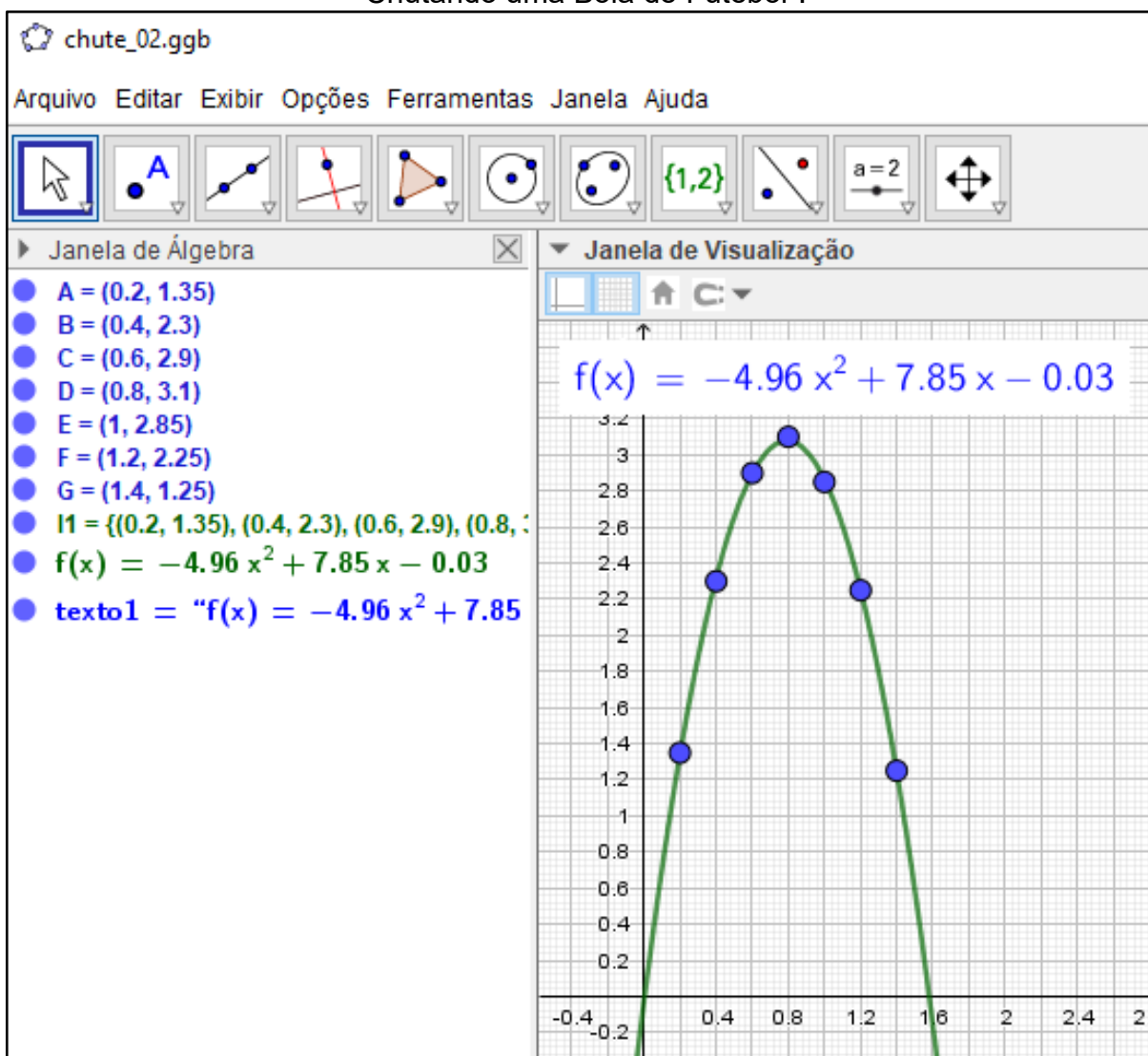
Se os alunos já têm conhecimento de que uma função quadrática possui como gráfico uma parábola, acreditamos que imediatamente eles concluirão que a função de aproximação que deverá ser escolhida para modelar este problema é uma função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$. Basta determinar os três coeficientes a , b e c .

O próximo passo é criar uma lista de pontos e, em seguida, usar a ferramenta “Regressão Polinomial(<Função à Mão Livre>, <Grau do Polinômio>)” para obtermos

a função de aproximação que melhor se ajusta a gráfico de dispersão mostrado na Figura 40.

A Figura 41 apresenta a função de aproximação $f(x) = -0.96x^2 + 7.85x - 0.03$. Os procedimentos utilizados para encontrar essa função são análogos aos utilizados nas atividades anteriores, por isso eles serão omitidos nesta seção. Note que o GeoGebra obteve esta função considerando arredondamento de duas casas decimais e isso não acarreta erros consideráveis, diferentemente da atividade que aproximamos a função seno por meio de uma função polinomial de grau 5, em que configuramos o *software* a representar os números utilizando cinco casas decimais.

Figura 41: Polinômio de aproximação de grau 2 – Atividade “Chutando uma Bola de Futebol”.



Fonte: Elaborado pela autora no *software* GeoGebra

No vídeo, percebemos que neste experimento a bola ficou em torno de 1,6 segundo no ar e ela atingiu uma altura um pouco superior a 3,0 metros. Isso foi verificado pela observação no momento do experimento (ao perceber que a bola atingiu uma altura um pouco superior a um determinado referencial no alambrado), mas principalmente a partir da análise do vídeo, ao reproduzi-lo e observar cada frame apresentado.

Estimar a altura máxima atingida pela bola, por meio de observações no momento do experimento ou pela análise do vídeo gravado, não deixa de ser interessante. Isso mostra que por meio de uma foto e conhecendo a medida de algum objeto representado nela e, de preferência, no mesmo plano, é um bom exercício para trabalhar o conceito de escala de um desenho. Se podemos estimar a altura máxima, então, usando o conceito de proporção, podemos estimar a distância percorrida em relação ao solo entre os instantes em que ela esteve no ar. No entanto, os alunos deverão verificar qual essa altura se usarmos a função de aproximação $f(x) = -4.96x^2 + 7.85x - 0.03$, que representa o modelo matemático desta atividade.

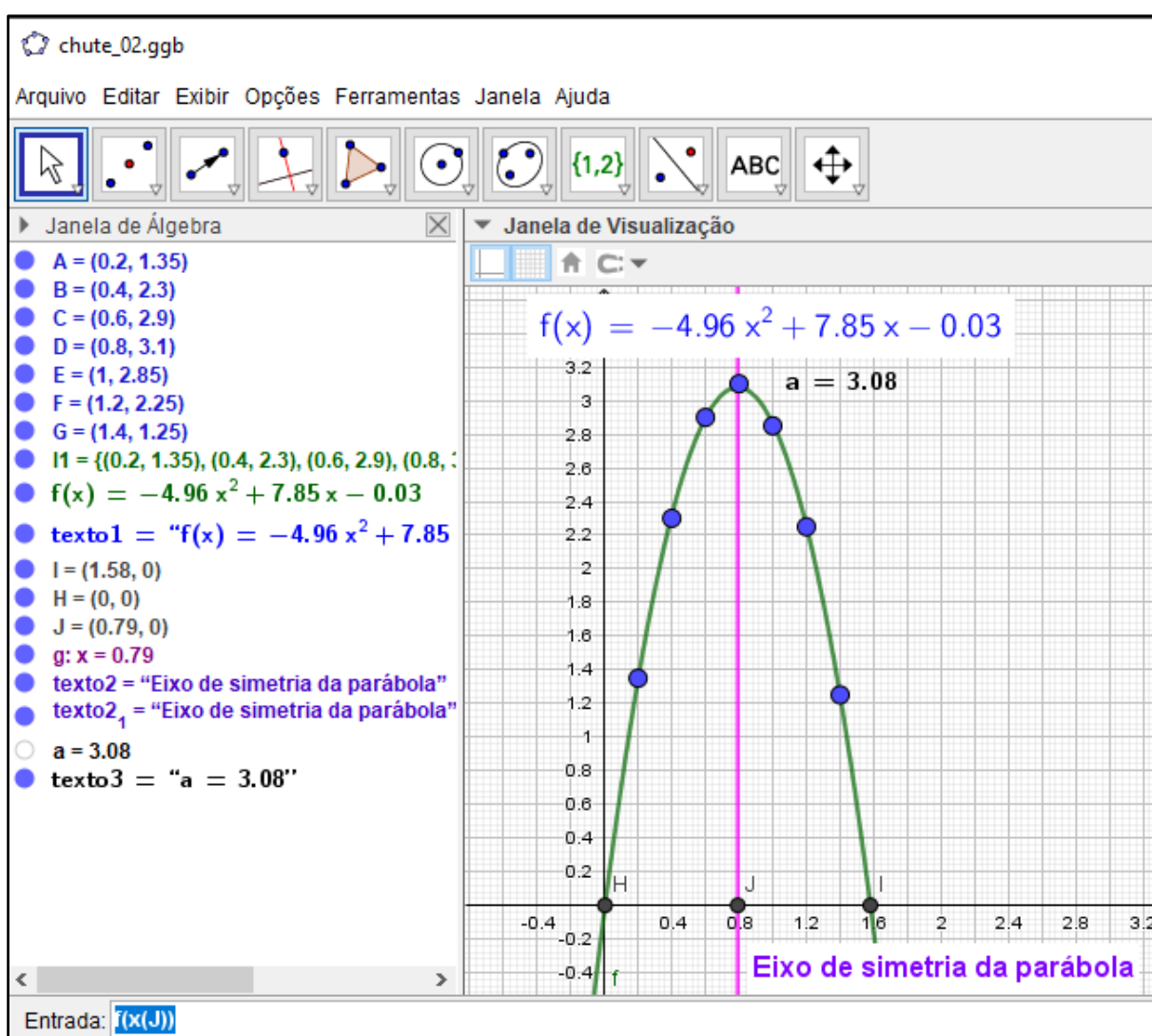
O professor conduzirá a turma a pensar no vértice da parábola, pois o vértice é um ponto notável que traz algumas informações sobre ela, como, por exemplo, o seu eixo de simetria, ele contém o vértice e é perpendicular ao eixo das abscissas (paralelo à reta diretriz da parábola quando estudamos funções no Ensino Básico). Outra propriedade do vértice é que sua abscissa é ponto médio das raízes da função (em particular, é ponto médio de x_1 e x_2 , sempre que $f(x_1) = f(x_2)$). Após encontrar a abscissa x_v do vértice, sua ordenada será igual a $f(x_v)$.

Uma das formas de encontrar a ordenada do vértice da parábola com o auxílio do GeoGebra é: selecione a ferramenta “Interseção de Dois Objetos” e, em seguida, selecione o gráfico de f e o eixo Ox . Assim, dois pontos serão criados e a abscissa do ponto médio destes pontos é igual a abscissa do vértice. O ponto médio pode ser obtido usando a ferramenta “Ponto Médio ou Centro”, ou calculando a média aritmética das abscissas das raízes da função quadrática.

Agora que os alunos conhecem a abscissa x_v do vértice, basta digitar $f(x_v)$ no campo “Entrada” do GeoGebra. Calcular $f(x_v)$ para obter a ordenada do vértice

está associado ao conceito de função quadrática e isso deve ser explorado, mas se o software está disponível no momento desta discussão, o professor pode mostrar aos alunos que para usar a abscissa ou ordenada de um ponto no GeoGebra, podemos fazer da seguinte forma: Dado um ponto $J=(0.79, 0)$, digitando $x(J)$ e $y(J)$, o software entende como a abscissa e a ordenada do ponto J , respectivamente. Logo, a ordenada do vértice pode ser obtida digitando $f(x(J))$, conforme mostrado na Figura 42.

Figura 42: Obtendo as coordenadas do vértice da parábola – Atividade “Chutando uma Bola de Futebol”.



Fonte: Elaborado pela autora no software GeoGebra

Vimos que a altura máxima atingida pela bola foi estimada em 3.08 metros. Sugerimos ao professor pedir aos alunos que encontrem manualmente esse valor e também verifiquem que o valor da abscissa do vértice que usualmente eles aplicam a

fórmula $x_v = -\frac{b}{2a}$ está em acordo com o valor encontrado no GeoGebra, a saber, aproximadamente igual a 0.79. Visto que o gráfico de f intersecta o eixo das abscissas muito próximo da origem do sistema cartesiano, esse valor igual a 0.79 nos diz que a bola esteve em seu ponto mais alto aproximadamente igual a 0.79 segundos após o chute. Como estimativa, neste problema, podemos afirmar que esse tempo é aproximadamente igual a 0,8 segundo.

O professor poderá aproveitar este momento para conversar com os alunos sobre o fato de que o tempo estimado da bola no ar é o dobro do tempo estimado para que ela atinja a altura máxima. Se considerarmos a função quadrática $f(x) = -4.96x^2 + 7.85x - 0.03$, veremos que isso acontece. Essa propriedade é bastante usada na Física, quando os alunos estudam movimento vertical ou oblíquo. Geralmente ela é enunciada da seguinte maneira: considerando a força gravitacional a única força que age sobre um corpo em um lançamento vertical ou oblíquo, o tempo de subida do corpo é igual ao tempo de descida. Isso ocorre, pois, neste caso, a equação horária (espaço em função do tempo) que representa este tipo de problema é uma função quadrática, geralmente denotada por $S(t) = S_o + v_o t - \frac{1}{2} g t^2$, em que S_o e v_o representam a posição inicial e a velocidade inicial da bola e g representa, em módulo, o valor da aceleração gravitacional no local do experimento.

Comparando a equação horária com a função $f(x) = -4.96x^2 + 7.85x - 0.03$, podemos inferir que a posição inicial estimada neste modelo é aproximadamente igual a 0, a bola recebeu um chute cuja velocidade é de 7.85 metros por segundo (velocidade é uma grandeza vetorial e, portanto, as velocidades em relação à horizontal e a vertical são menores do que 7.85) e o módulo da aceleração da gravidade foi estimado em 9.92 metros por segundo ao quadrado. Esta atividade também pode ser usada para estimar o valor da aceleração gravitacional, mas da forma que discutimos nesta seção, sugerimos que seja aplicada em turmas que já estudaram lançamento vertical ou lançamento oblíquo de projéteis.

Comentamos acima que os alunos geralmente encontram a abscissa do vértice aplicando a fórmula $x_v = -\frac{b}{2a}$. De forma análoga, em experiência como professora no Ensino Básico e em conversas com outros colegas professores de matemática, normalmente quando perguntamos aos alunos como determinar a ordenada do vértice, eles tentam lembra de um “tal de $y_v = -\frac{\Delta}{4a}$ ”, onde $\Delta = b^2 - 4ac$ é o discriminante da equação quadrática $ax^2 + bx + c = 0$. O que dificilmente ocorre é algum aluno responder que o valor desse “tal de y_v ” é a imagem de x_v por meio da função, isto é, $y_v = f(x_v)$.

Um questionamento relevante e que poderá ocorrer por parte dos alunos ou pelo menos ser provocado pelo professor é discutir sobre o “papel” do coeficiente c que aparece na representação algébrica da função f . Ele assume valor igual à -0.03 e sua eliminação faz com que o gráfico de f translate 0.03 unidades para cima. Isso provoca uma alteração na ordenada do vértice em 0.03 unidades ou, equivalentemente, a altura máxima estimada em nosso modelo é acrescida de 3 centímetros. Nesta atividade, esse acréscimo não é tão relevante, devida a natureza do problema que estamos modelando.

Neste contexto, podemos modelar nosso experimento pela função $f(x) = -4.96x^2 + 7.85x$. Essa translação vertical de 0.03 unidades simplesmente aumentou o valor de f em cada ponto em 0.03, e quanto ao vértice da parábola, sua abscissa foi preservada. Esta análise é interessante em sala de aula, por que uma translação vertical preserva a abscissa do vértice? Sua resposta explora uma das propriedades da parábola e que já utilizamos anteriormente. Em relação ao alcance horizontal da bola, há um aumento que podemos desprezar. Voltando àquela propriedade física sobre o tempo de subida ser igual ao tempo de descida, quando trabalhamos com uma função quadrática do tipo $S(t) = at^2 + bt$, a abscissa do vértice coincide com o tempo de subida.

Há várias formas de explorar essa atividade, o professor deve valorizar a criatividade dos alunos, o conhecimento prévio deles e também provocá-los com

questionamentos que os levem ao desenvolvimento do pensamento matemático e instiga-los ao gosto pela ciência.

Discutimos nessa primeira parte da seção a relação existente entre as grandezas altura e tempo e relembramos que esta relação é uma função quadrática quando é considerada apenas a ação da gravidade como força agindo sobre um corpo. Em nosso experimento não temos uma situação ideal, pois ele foi realizado em um local que não atende às hipóteses consideradas no estudo da física no Ensino Básico, mas, mesmo que a resistência do ar, a pressão do ar nesta bola, seu peso, seu formato, tipo de chute (cavadinha ou não), seu movimento de rotação etc fazem com que o modelo matemático que representa essa função não seja realmente um modelo quadrático, ele é considerado um bom modelo e isso chama a atenção de que podemos modelar problemas ignorando conceitos que só fazem parte do currículo em cursos de graduação, ou seja, por meio da simplificação de certas hipóteses, podemos fazer e levar ciência para sala de aula.

Não podemos deixar de observar que a “olho nu” temos a percepção de que a trajetória da bola é uma parábola. Mais uma vez, nas condições ideais, que são as condições consideradas no Ensino Básico, de fato sua trajetória é parabólica. Mas essa parábola não é igual à parábola que encontramos quando modelamos o problema por meio de uma função que relaciona a altura com o tempo.

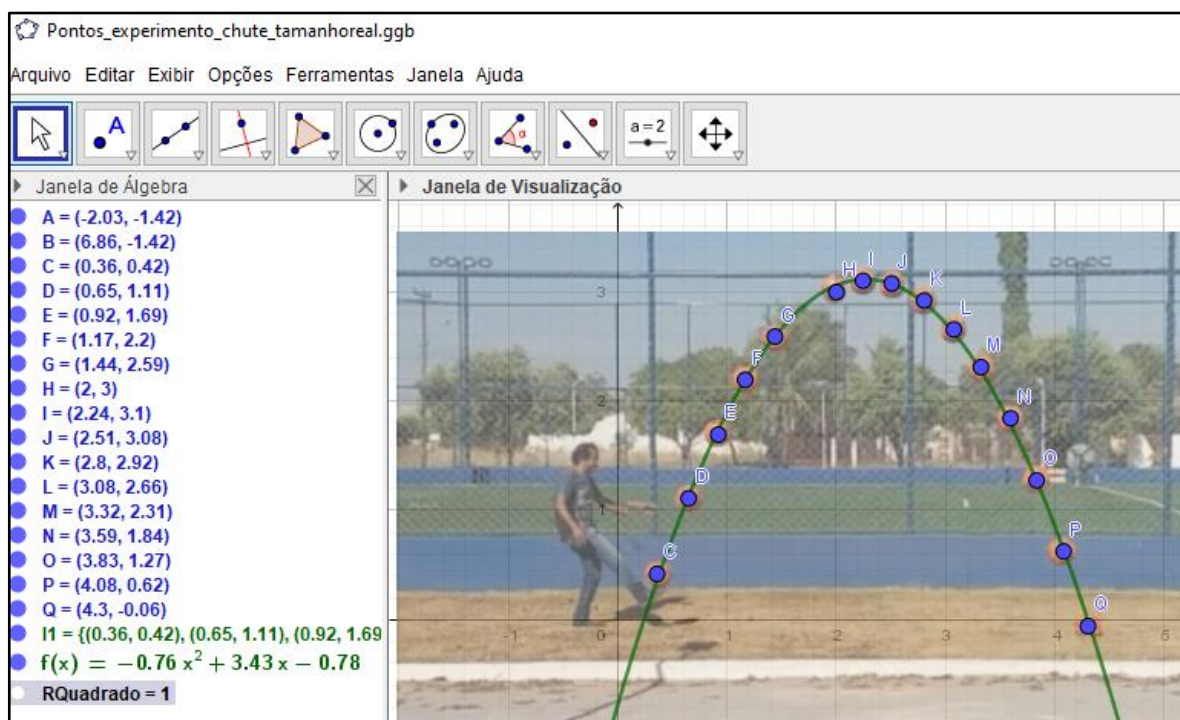
No Ensino Básico normalmente apenas aprendemos que o gráfico de uma função quadrática é uma parábola e os alunos aceitam isso sem sequer entender o que caracteriza uma parábola. Será que o gráfico de uma função quadrática é uma parábola? Não deixa de ser um bom questionamento e o professor pode pedir para que eles pesquisem sobre a parábola, suas propriedades etc. E quanto a trajetória do corpo, é mesmo uma parábola? Após compreender o primeiro questionamento, a resposta do segundo é imediata, desde que seja provado ou apresentado a função que modela a trajetória.

Essas reflexões nos levam a sugerir ao professor que, nesta atividade, também peça aos alunos a modelar por meio de uma função quadrática a trajetória da bola. Agora teremos uma função que associa a altura da bola em relação ao seu deslocamento horizontal.

Mostraremos alguns passos que nortearão o trabalho do professor. Lembramos que os dados utilizados nesta parte não necessariamente coincidem com os anteriores. Isso foi feito de propósito, usando equipamentos diferentes para a extração desses dados, mas, os resultados obtidos serão satisfatórios. É isso que deve ocorrer quando o professor aplicar essa atividade com seus alunos, mesmo que o experimento seja o mesmo para todos os alunos ou grupos de alunos, as informações extraídas do experimento são diferentes, pois estamos tratando de um experimento. Isso deve ficar claro aos alunos, mas o importante é fazer com responsabilidade, cuidando de obter as informações de forma mais confiável quanto puderem.

A fim de não ficar repetitivo, apresentaremos na Figura 43 a trajetória da bola, considerando as imagens sobrepostas, demarcação dos pontos, a lista de pontos e a função de aproximação $f(x) = -0.76x^2 + 3.43x - 0.78$.

Figura 43: Função que modela a trajetória da bola – Atividade “Chutando uma Bola de Futebol”.



Fonte: Elaborado pela autora no software GeoGebra

Ao inserir a imagem no geoGebra, o aluno precisa verificar qual é a relação entre 1,0 unidade de medida no problema real e 1,0 unidade quando é feita a transposição para a geometria das coordenadas. Isso é facilmente obtido ao medir o alcance horizontal e comparar com a distância entre os pontos que intersectam o eixo

horizontal. Em nosso experimento esse alcance foi de 4,03 metros e no software essa figura foi manuseada para que cada unidade do GeoGebra represente 1,0 metro.

Antes de iniciar explorar alguns conceitos inerentes desta atividade, sugerimos duas reflexões quanto à escolha do sistema de eixos ortogonais xOy , que deverão ser pensadas pelo professor e pelos alunos: (i) a origem do plano cartesiano não foi escolhida exatamente na posição em que a bola se encontrava antes da aplicação do chute; (ii) o eixo Ox escolhido é paralelo ao solo ou se alinha exatamente ao solo.

Em nosso experimento optamos por cumprir com a reflexão apresentada no item (i), isto é, não escolhemos a origem do plano cartesiano no local em que a bola se encontrava antes do chute, a fim de que a função a ser ajustada não seja da forma $f(x) = ax^2 + bx$.

Esperamos que os alunos tenham a percepção que a escolha da origem exatamente na posição da bola evita o aparecimento do coeficiente c como incógnita, pois, neste caso, ele será igual a zero. Consequentemente, $x=0$ e $x = -\frac{b}{a}$ são as raízes desta função. Isso diminuiria o número de operações algébricas na obtenção das duas raízes e acarretaria imediatamente que o alcance da bola seria estimado por $x = -\frac{b}{a}$ e, possivelmente, eles perceberiam que para estimar a altura máxima atingida por ela, basta tomar o ponto médio $x = -\frac{b}{2a}$ entre as raízes e encontrar o valor que f assume neste ponto.

Quanto à segunda reflexão, optamos por traçar o eixo Ox junto ao solo, mas poderíamos considera-lo abaixo ou acima do solo no sentido de representação cartesiana. Mas, o que aconteceria se o eixo Ox não fosse escolhido cumprindo a reflexão (ii)? É uma boa pergunta para a turma. Espera-se que eles percebam que se essa escolha não cumprir com o item (ii), não teremos o gráfico de uma função. Teríamos um mesmo valor da abscissa associado a mais de um valor da ordenada. No entanto, a parábola é preservada enquanto gráfico, mas a relação entre abscissas e ordenadas não cumpriria com a definição de função. Por outro lado, dependendo do nível de escolarização da turma, o professor poderá comentar sobre que no estudo

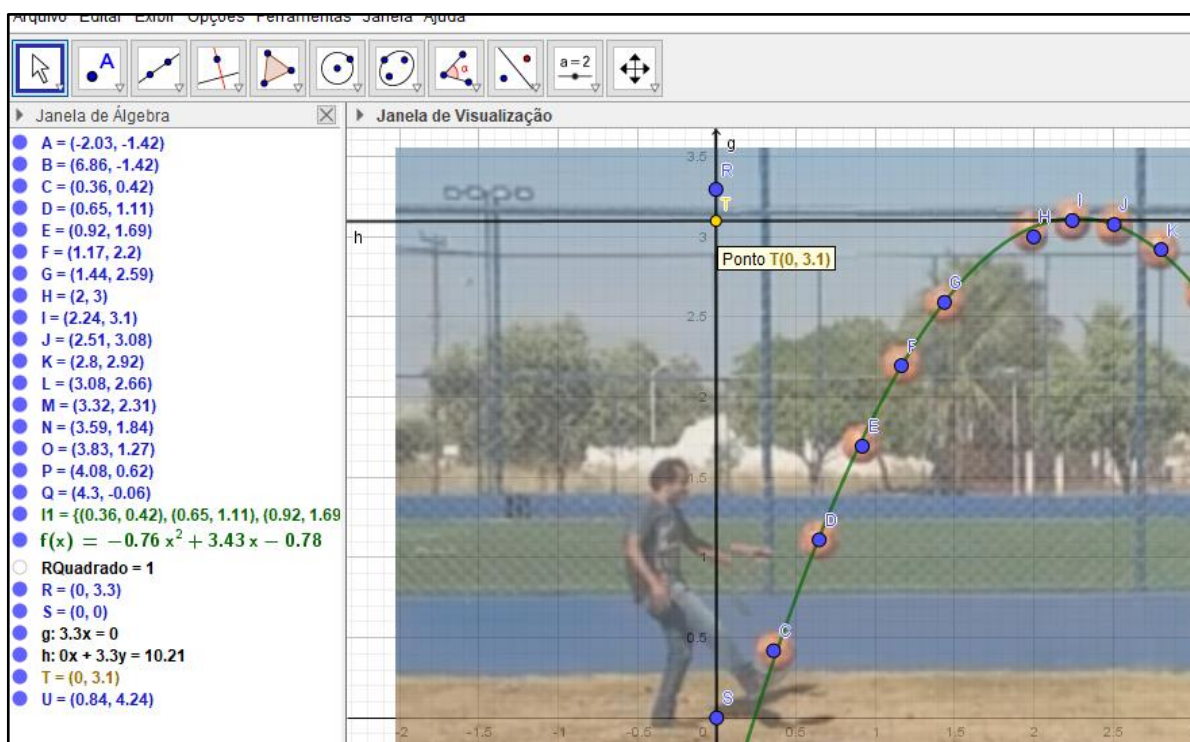
de geometria analítica vetorial (trabalhando com a geometria das coordenadas) é possível obter todas as informações que obteremos quando restringimos apenas ao uso de funções, visto que as propriedades de uma parábola são preservadas, independentemente da escolha de um sistema de eixos ortogonais.

Remetendo novamente à reflexão (i), se o professor apresentou o método dos mínimos quadrados à sua turma, o não aparecimento da variável c acarreta na resolução de um sistema de equações lineares de ordem 2 (nas variáveis a e b). Caso contrário, implicará na resolução de um sistema quadrado de ordem 3 (nas variáveis a , b e c), aumentando consideravelmente o número de operações e também um aumento na probabilidade da ocorrência de erros quando o método for resolvido manualmente (sem o uso de um *software*), inclusive erros de arredondamento ou truncamento. No entanto, já que fizemos uso do GeoGebra, optamos por modelar o nosso problema considerando a função na forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, tendo o conhecimento de que $c \neq 0$.

A partir desse momento o professor pode pôr em questão algumas perguntas, tais como a altura máxima que a bola alcançou, a distância horizontal percorrida por ela, o deslocamento horizontal quando ela atingiu a altura máxima, comparar o valor da diferença de suas raízes com o alcance máximo horizontal, comparar a distância horizontal percorrida pela bola com a abscissa do vértice, discutir o domínio de definição desta função, discutir sobre a localização dos eixos ortogonais (o que muda se considerarmos uma novo sistema de eixos), encontrar a imagem inversa em alguns pontos, trabalhar conceitos de escala etc.

Há uma grande quantidade de questionamentos e tanto os alunos quanto os professores deverão ser criativos e explorar bastante esta atividade. Na Figura 44 mostramos como podemos fazer uma estimativa do cálculo da altura máxima atingida pela bola. Apesar dessa técnica, qualquer resultado encontrado deverá ser também verificado (comprovado) usando a função de aproximação $f(x) = -0.76x^2 + 3.43x - 0.78$.

Figura 44: Estimativa da altura máxima alcançada pela bola.



Fonte: Elaborado pela autora no *software* GeoGebra

Um dos principais objetivos nesta atividade é comparar os dados obtidos no experimento com os dados estimados pela função de aproximação $f(x) = -0.76x^2 + 3.43x - 0.78$. Por exemplo, sabemos que o alcance horizontal foi de 4,03 metros e uma estimativa para esse alcance deve ser extraída da função. Basta encontrar suas raízes e calcular essa distância.

Para encontrar as raízes de f , precisamos resolver a equação quadrática $-0.76x^2 + 3.43x - 0.78 = 0$. Os valores encontrados, considerando arredondamento de duas casas decimais foram $x = 0.24$ e $x = 4.27$. Assim, a distância entre elas é igual a $|4.24 - 0.24| = 4.03$, o que equivale a 4.03 metros, pois nossa função foi modelada considerando cada unidade no software como sendo 1,0 metro no problema real. Diante disso, sugerimos que os alunos diminuam ou aumentem a imagem que foi importada para o GeoGebra, isso mudará a função de aproximação, alterará no valor da distância entre as raízes, mas com a nova escala, ainda assim eles deverão estimar que o alcance horizontal da bola não sofra alguma mudança considerável.

A partir dessas raízes, podemos encontrar a abscissa do vértice da parábola, que é igual à média aritmética das raízes e que também coincide com o valor encontrado ao aplicar a fórmula $x_v = -\frac{b}{2a}$. Portanto, a altura estimada pela função é dada por $y_v = f(x_v) \cong 3.09$, o que equivale a uma altura máxima estimada em 3.09 metros. Na Figura 44 o valor estimado foi igual a 3.10 metros.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A prática em sala de aula faz com que nós professores busquemos novas metodologias, novas formas de trabalho a serem aplicadas, pois lidamos com situações que se fazem necessária essa busca. Essa busca por aperfeiçoamento vai de encontro com um dos principais objetivos do programa de Mestrado PROFMAT, que é proporcionar aos professores uma possibilidade de aperfeiçoamento com a finalidade de melhorar o currículo do professor e, conseqüentemente, o ensino de matemática. E como alunos do programa, utilizamos esse objetivo como referência para a elaboração dessa proposta.

As situações acima citadas dizem respeito a questionamentos de alunos quanto à aplicabilidade dos temas no seu cotidiano. Portanto, este trabalho teve como objetivo apresentar ao professor uma proposta de ensino com atividades práticas, que aproximam os conceitos matemáticos com a realidade do aluno e foco no enriquecimento do currículo de matemática.

O método dos mínimos quadrados com o apoio do software GeoGebra se mostrou uma excelente ferramenta para realizar o ajuste de curvas e encontrar bons resultados em relação à aproximação dos dados, sejam eles de natureza experimental ou científica e sua escolha se justificou em considerar que este método proporciona de forma significativa a utilização de conteúdos matemáticos, tais como matrizes, determinantes e sistemas de equações lineares.

Em relação às atividades práticas aqui propostas, apesar de não terem sido aplicadas em sala de aula, foram enriquecedoras, em especial no ensino de funções. Poderia melhor dizer, em especial no aprendizado de funções, pois durante essa pesquisa, em alguns momentos eu me sentia no “papel” de docente e, em outros, me via no lugar de uma aluna, não uma aluna no “sentido tradicional” que muitas vezes nos referimos e compreendemos o seu significado quando ouvimos essa expressão, mas no lugar de uma aluna como sujeito ativo no processo de ensino e aprendizagem.

O professor tem a liberdade de trabalhar e abordar as questões da maneira que se sentir mais à vontade. As sugestões de atividades práticas, onde pode-se explorar os conceitos relacionados ao tema. São atividades enriquecedoras e instigadoras.

Inicialmente tínhamos como objetivo a aplicação da proposta com alunos, mas devido a suspensão das aulas presenciais relacionadas à pandemia da COVID-19, não foi possível a sua aplicação.

Finalmente, esperamos que essa proposta contribua com a prática do professor em sala de aula. Que incentive a busca por novas formas e métodos de ensino e, conseqüentemente, contribua com o ensino da Matemática.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMEIDA, Renato Neves. **O método dos Mínimos Quadrados: estudo e aplicações para o Ensino Médio**. 69 p. Dissertação (Mestrado em Matemática) Universidade Estadual do Norte Fluminense. Darcy Ribeiro - UENF. Campos dos Goytacazes – RJ. Maio, 2015.

AMORIM DE SOUZA, SANDRO. **ESTUDO DO PRODUTO MATRICIAL POR MEIO DO MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS: UMA ABORDAGEM DESTINADA AO ENSINO MÉDIO**. 87 P. Dissertação (mestrado)- Universidade Federal de Santa Maria, Centro de Ciências Naturais e Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática, RS, 2014.

BERGMANN, J.; SAMS, A. Sala de Aula Invertida – Uma metodologia Ativa de Aprendizagem. [S.l.]: Rio de Janeiro: LTC, 2018.

BIEMBENGUT, Maria Salett. Modelagem matemática & resolução de problemas, projetos e etnomatemática: pontos confluentes. **Alexandria: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, v. 7, n. 2, p. 197-219, 2014.

BRASIL, Ministério da Educação. Base nacional comum curricular. **Brasília-DF: MEC, Secretaria de Educação Básica**, 2017.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros curriculares nacionais: **Ciências naturais**. Brasília: MEC/SEF, 1997.

BRITO, Willian Henrique de. **A modelagem matemática como estratégia de ensino e uma proposta para a abordagem de problemas reais via ajuste de curvas**. 83 f. Dissertação - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2019.

CESTARO, Romeu. Ajuste de curvas pelo método dos quadrados mínimos na elaboração de modelo matemático para estimativa da produção de soja no Estado de Rondônia. **ForScience**, v. 4, n. 1, p. 114-124, 2016.

CUNHA, João Carlos. **O Método dos Mínimos Quadrados: uma proposta ao Ensino Médio para o ajuste por retas**. 73 p. Dissertação – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro, Centro de Ciências Exatas e Tecnologia, RJ, 2014.

DARROZ, Luiz Marcelo; ROSA, CW da; GHIGGI, Caroline Maria. Método tradicional x aprendizagem significativa: investigação na ação dos professores de física. *Aprendizagem Significativa em Revista*, Porto Alegre, v. 5, n. 1, p. 70-85, 2015.

DUARTE, Marco Aparecido Queiroz et al. AJUSTE DE CURVAS VIA MÍNIMOS QUADRADOS APLICADO AO PROBLEMA DO CRESCIMENTO DA CANA-DE-AÇÚCAR. **REFLEXOS DA CIENCIA**, p. 29.

ESPINDOLA, Mirian Oliveira. **MÉTODO DE MÍNIMOS QUADRADOS NO ENSINO MÉDIO**. 45 f. Dissertação – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em

Rede Nacional - Universidade Federal da Grande Dourados, Faculdade de Ciências Exatas e tecnologia. Dourados/MS, 2014.

FERRI, Orlando Eduardo da Silva. **Progressões e funções: da variação e caracterização das funções do tipo exponencial e logarítmica às técnicas de Ajuste de Curvas no uso de Modelagem Matemática**. 67 f. Dissertação – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2014.

FERRI, Rita Borromeo; BLUM, Werner. Modelagem matemática na formação de professores - experiências de um seminário de modelagem. In: **Proceedings of the VI Congress of the European Society for Research in Mathematics Education**. 2010. p. 2046-2055.

GAVARONE, Raul Ricardo da Fonte. **Interpolação versus ajuste de curvas: exemplos no município de Terra Nova do Norte - MT**. 71 p. Dissertação (Mestrado)- Universidade do Estado de Mato Grosso, Campus Universitário de Sinop. Faculdade de Ciências Exatas e Tecnológicas. Programa de Mestrado Profissional em Matemática. Sinop, 2017.

IGONÇALVES, Andressa Lima; MORO, Wandressa Machado; BLASS, Leandro. AJUSTE DA CURVA QUE MELHOR REPRESENTA E ESTIMATIVA OS DADOS DA POPULAÇÃO BRASILEIRA PARA 2020. **Anais do Salão Internacional de Ensino, Pesquisa e Extensão**, v. 10, n. 1, 2019.

JAQUES SILVA, ADY WALLACE. **O método dos Mínimos Quadrados como ferramenta na Modelagem Matemática no primeiro ano do Ensino Médio**. 58 f. Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Campus Universitário de Castanhal, Universidade Federal do Pará, Castanhal, 2020.

KAISER, Gabriele; SCHWARZ, Björn; TIEDEMANN, Silke. Future teachers' professional knowledge on modeling. In: **Modeling Students' Mathematical Modeling Competencies**. Springer, Boston, MA, 2010. p. 433-444.

MALUF, Henrique. **Modelagem matemática de recordes esportivos via Ajuste de Curvas**. 77 f. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas. Rio Claro, 2018.

MEDEIROS, Rodrigo de Vasconcellos Viana; DE SOUZA COUTINHO, Eliane dos Santos. AJUSTE DE CURVAS E MODELAGEM POPULACIONAL DE PETRÓPOLIS NO PERÍODO DE 1982 A 1990.

MOREIRA, M. A., & Masini, E. F. S. (2006). Aprendizagem significativa: a teoria de David Ausubel. 2. ed. São Paulo: Centauro.

MOREIRA, M. A., & Ostermann, F. (1999). A Física na formação de professores do Ensino Médio. Porto Alegre: Ed. Universidade/UFRGS.

POZO, J. I. **Aprendizes e mestres**. A nova cultura da aprendizagem. Trad. Ernani Rosa. Porto Alegre. Art Méd editora, 2002.

RIBEIRO, Renato de Assis. **Análise Temporal através da Interpolação e do Ajuste de Curvas pelo Método dos Quadrados Mínimos**. 108 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Goiás, Regional Jataí, Coordenação de Matemática, 2014.

RONQUI, Ludmila. A importância da aula prática para a construção significativa do conhecimento: a visão dos professores das ciências da natureza. *Revista eae*, ISSN 1678-0701, n. 47, ano XII. Março-Maio/2014. Disponível em: <<http://www.revista-eae.org/artigo.php?idartigo=1754>>. Acesso em 27 jun. 2021.

SANTANA, Thiago Pires. **Ajuste polinomial de dados pelo Método dos Mínimos Quadrados: um estudo sobre tensão x deformação**. 62 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Estadual de Feira de Santana. Departamento de Ciências Exatas. Feira de Santana, 2017.

SANTOS, Alessandro Silva. **Ajuste de curvas por polinômios com foco no currículo do ensino médio**. 81 p. Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. Campinas, SP, 2015.

SCHMITZ, L. L. **Paradigmas do conhecimento: os percursos e descaminhos da educação ao longo da história**. *Revista Divisa*. Revista da Faculdade de Itapiranga, v. 4, n. 3, p. 77-82, 2006.

SILVA, Antonio Everton Sousa da. **O ajuste de retas pelo Método dos Mínimos Quadrados e seções didáticas de solução LSQ para o ensino médio**. 65 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Juazeiro do Norte, 2015.

SILVA, Felipe. **O Método dos Mínimos Quadrados: uma proposta ao Ensino Médio para o ajuste por parábolas**. 74 p. Dissertação – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro, Centro de Ciências Exatas e Tecnologia, RJ, 2014.

SILVA JUNIOR, Gilberto Caetano da. **Método dos Mínimos Quadrados aplicado ao lançamento de foguetes propulsionados a ar comprimido**. 107 f. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas. Rio Claro, 2017.

SOUZA, Naiara Felix Tolentino De. **APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS NO ENSINO MÉDIO**. 94 p. Dissertação - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Federal da Grande Dourados, 2021

SOUZA, Willian Burgardt. **Método dos Mínimos Quadrados aplicado a um problema de geoposicionamento**. 47 f. Dissertação - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2018.

VECCHIA, R.D; MALTEMPI, M. M. **O Problema na Modelagem Matemática: determinação e transformação**. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, v. 33, n. 64, p. 748-767, 2019.

APÊNDICE

AJUSTE LINEAR

O ajuste da linear é da forma: $y(x) = f(x; a, b) = ax + b$,

Para o ajuste linear definimos uma função com duas variáveis, a e b .

$$E(b, a) = \sum_{i=1}^n (f(x_i) - y_i)^2 = \sum_{i=1}^n (b + ax_i - y_i)^2$$

Os parâmetros a e b que minimizam a função $E(b, a)$ devem, necessariamente, satisfazer as seguintes condições:

$$\frac{\partial E}{\partial b} = 0; \quad \frac{\partial E}{\partial a} = 0$$

Então:

$$\begin{cases} \frac{\partial E}{\partial b} = \sum_{i=1}^n 2(b + ax_i - y_i) = 0 \\ \frac{\partial E}{\partial a} = \sum_{i=1}^n 2(b + ax_i - y_i)(x_i) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2 \sum_{i=1}^n (b + ax_i - y_i) = 0 \\ 2 \sum_{i=1}^n (b + ax_i - y_i)(x_i) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n (b + ax_i - y_i) = 0 \\ \sum_{i=1}^n (b + ax_i - y_i)(x_i) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n b + \sum_{i=1}^n ax_i - \sum_{i=1}^n y_i = 0 \\ \sum_{i=1}^n bx_i + \sum_{i=1}^n ax_i^2 - \sum_{i=1}^n x_i y_i = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n b + \sum_{i=1}^n ax_i = \sum_{i=1}^n y_i \\ \sum_{i=1}^n bx_i + \sum_{i=1}^n ax_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} bn + a \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i \\ b \sum_{i=1}^n x_i + a \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{cases} \Leftrightarrow$$

No formato matricial temos:

$$\begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n y_i \\ \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{pmatrix}$$

AJUSTE POLINOMIAL:

O ajuste de curvas para o caso geral de um polinômio de grau k .

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{k-1}x_{k-1} + a_kx^k$$

Dado um conjunto de n dados, (x_i, y_i) ($i = 1, 2, \dots, n$), e minimizando a função temos:

$$E(a_0, a_1, \dots, a_{k-1}, a_k) = \sum_{i=1}^n (f(x_i) - y_i)^2 \Rightarrow \sum_{i=1}^n (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \dots + a_{k-1} x_i^{k-1} + a_k x_i^k - y_i)^2$$

Segue que,

$$\frac{\partial E}{\partial a_0} = \frac{\partial E}{\partial a_1} = \dots = \frac{\partial E}{\partial a_{k-1}} = \frac{\partial E}{\partial a_k} = 0$$

Procedendo de maneira análoga ao caso linear temos o sistema,

$$\begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^n x_i & \dots & \sum_{i=1}^n x_i^k \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 & \dots & \sum_{i=1}^n x_i^{k+1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^n x_i^k & \sum_{i=1}^n x_i^{k+1} & \dots & \sum_{i=1}^n x_i^{2k} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n y_i \\ \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n x_i^k y_i \end{pmatrix}$$

que nos permite encontrar os parâmetros (a_0, a_1, \dots, a_k) que minimizam a função $E(a_0, a_1, \dots, a_k)$.

Para melhor entendimento do método, usaremos exemplos de situações onde poderemos aplica-lo.

Exemplo1:

Sejam os pontos dados na Quadro 8 que representam os dados de uma coleta experimental e deseja-se encontrar a função que melhor representa esse fenômeno e percebê-lo: (que tipo de função? O método não encontra o tipo de função, é preciso o pesquisador usar sua experiência com os dados coletados e por meio do comportamento do gráfico de dispersão, escolher o tipo de função. Após isso, o MMQ encontrará os coeficientes)

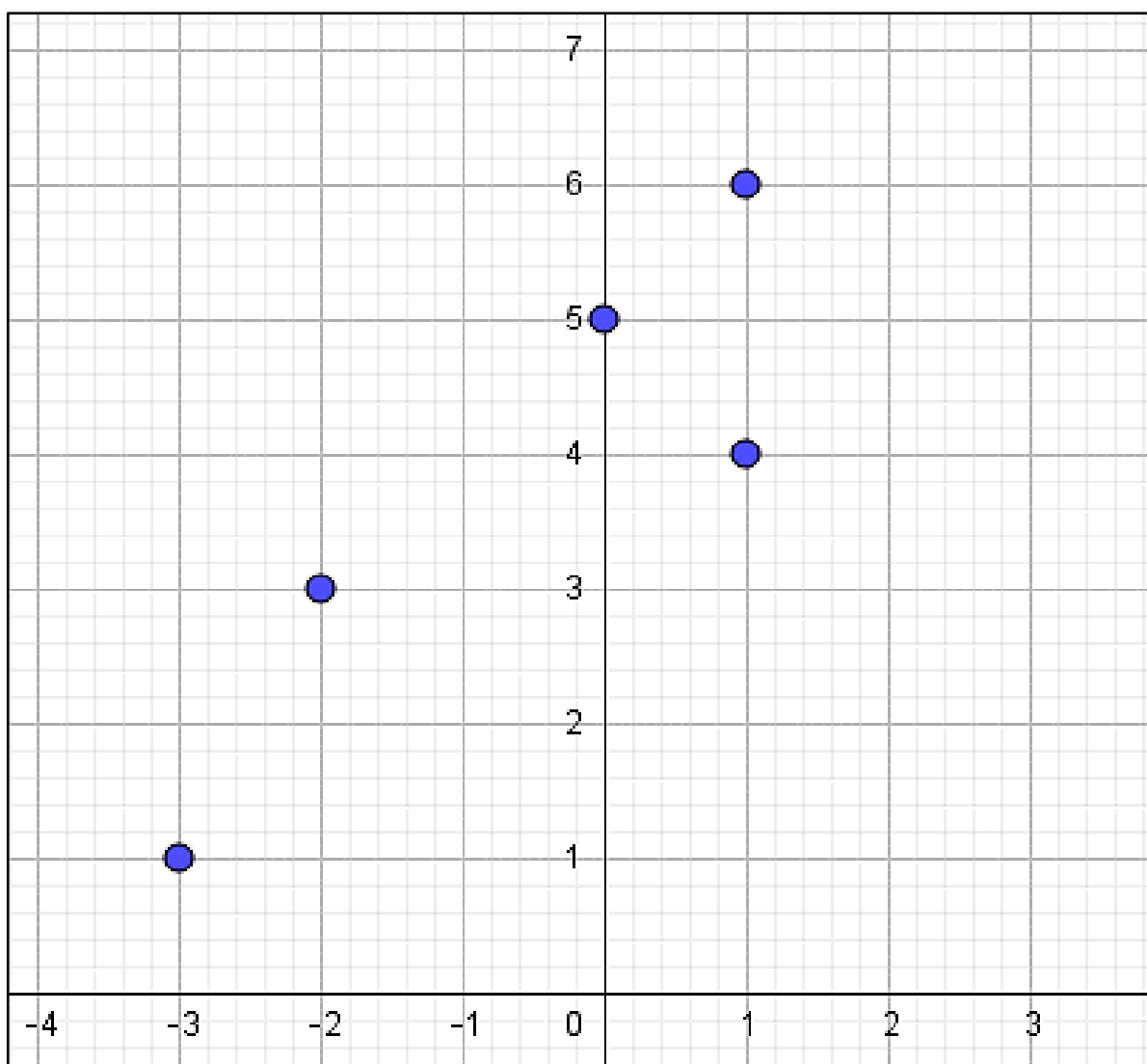
Quadro 9: Pontos de uma curva.

x	-3	-2	0	1	1
y	1	3	5	4	6

Fonte: Elaborado pela autora.

Diagrama de dispersão construído com os dados do Quadro 8.

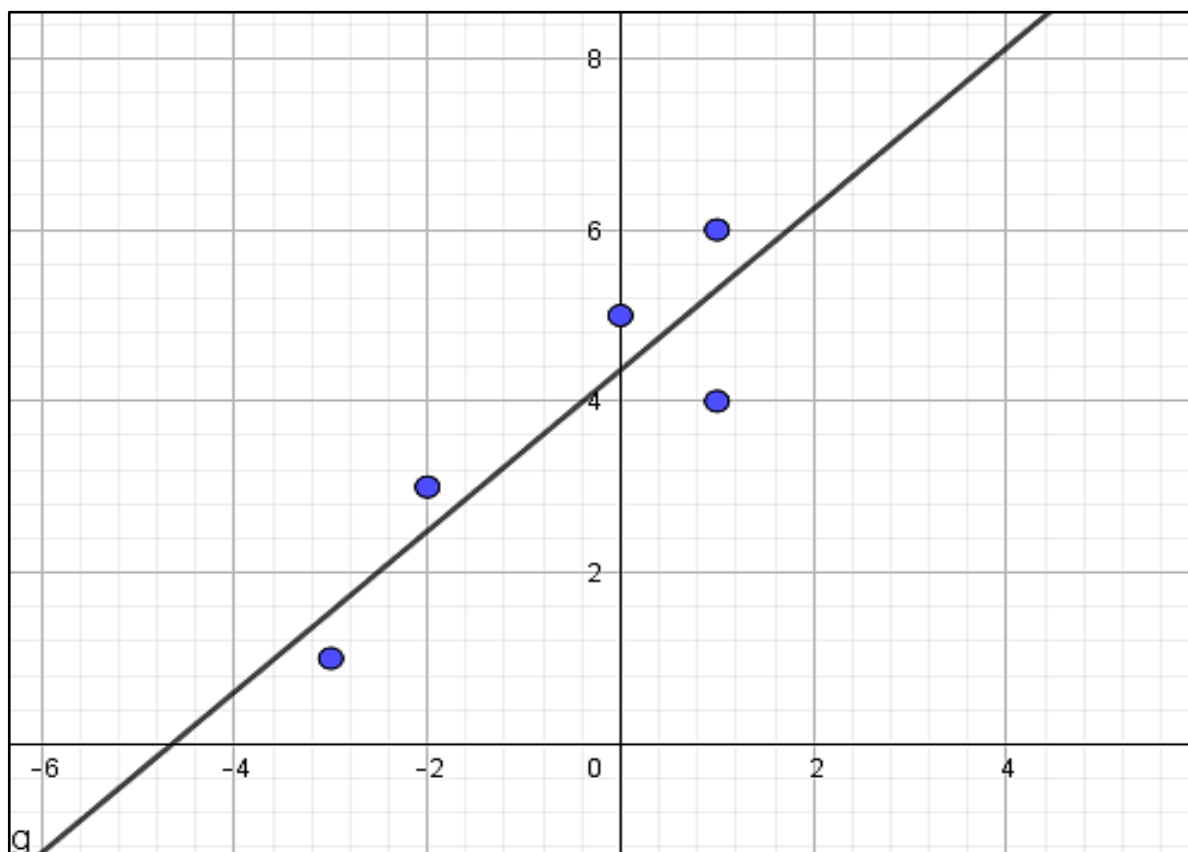
Figura 45: Gráfico de dispersão



Fonte: Elaborado pela autora no *software* GeoGebra

Aplicando o Método dos Mínimos Quadrados encontramos o seguinte gráfico:

Figura 46: Reta de ajuste.



Fonte: Elaborado pela autora no *software* GeoGebra

O gráfico representa o polinômio encontrado pelo MMQ que melhor representa os dados tabelados, sendo possível fazer estimativas a respeito do fenômeno estudado.

No Exemplo 2, para a aplicação do Método dos Mínimos Quadrados, foi preciso uma análise antecipada dos dados para se ter uma ideia do comportamento destes pontos e decidir qual o tipo de função a ser escolhida para o ajuste. Neste caso, foi feito um ajuste linear, pois os dados quando analisados na Quadro 1 e no diagrama de dispersão apresentado na Figura 4 nos dava a ideia de uma função polinomial de grau 1.

Mas como é feita essa análise? Quais são as regras para a análise de dados? Não existe uma regra, um passo a passo a seguir, mas segundo Guimarães (2001, p. 72):

"A escolha da função $f(x)$ a ser usada para ajustar o conjunto de pontos experimentais não é feita ao acaso. Ela envolve um processo de análise que passa, por exemplo, pela identificação das relações de causa e efeito que governam o sistema estudado. O fato dessas relações não serem conhecidas não é empecilho para que se intua a forma de $f(x)$. Uma análise qualitativa do fenômeno e das condições experimentais em que a observação é feita muitas vezes é suficiente para que se possa estabelecer a forma.

No entanto, para a escolha da função, existem várias opções que podem representar esses dados em um determinado intervalo, por exemplo. Procedese então no ajuste de curvas, por vários tipos de funções e escolhe-se a que representa a função com menor erro, ou seja, a função que melhor minimiza a soma do quadrado das distâncias.