

CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS
PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional



BRUNO GOMES DE FREITAS

**EMPRÉSTIMOS & FINANCIAMENTOS: UMA ABORDAGEM
SOBRE O ENSINO DE SISTEMAS DE AMORTIZAÇÃO À LUZ DA
EDUCAÇÃO FINANCEIRA**

Belo Horizonte
2021

BRUNO GOMES DE FREITAS

**EMPRÉSTIMOS & FINANCIAMENTOS: UMA ABORDAGEM
SOBRE O ENSINO DE SISTEMAS DE AMORTIZAÇÃO À LUZ DA
EDUCAÇÃO FINANCEIRA**

Dissertação apresentada ao Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT para obter o título de Mestre.

Orientadora:

Valéria Guimarães Moreira

Banca examinadora:

Marco Aurélio Kistemann Júnior

Cristiane Azevêdo dos Santos Pessoa

Fernanda Aparecida Ferreira

Belo Horizonte
2021

F866e Freitas, Bruno Gomes de
Empréstimos e financiamentos: uma abordagem sobre o ensino de sistemas de amortização à luz da educação financeira / Bruno Gomes de Freitas. – 2021.
102 f. : il.

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT.

Orientadora: Valéria Guimarães Moreira.

Dissertação (mestrado) – Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais.

1. Ensino – Técnica. 2. Educação financeira. 3. Ensino médio. I. Moreira, Valéria Guimarães. II. Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais. III. Título.

CDD: 371.33

BRUNO GOMES DE FREITAS

**EMPRÉSTIMOS & FINANCIAMENTOS: UMA ABORDAGEM
SOBRE O ENSINO DE SISTEMAS DE AMORTIZAÇÃO À LUZ DA
EDUCAÇÃO FINANCEIRA**

Dissertação apresentada ao Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, para obter o título de Mestre.

APROVADA: 17 de setembro de 2021.



BRUNO GOMES DE FREITAS

Bruno Gomes de Freitas
(Autor)



Valéria Guimarães Moreira
(Orientadora)

Belo Horizonte
2021

*À minha esposa, companheira e amiga
Grazielle, por todo carinho, incentivo e
paciência durante mais essa etapa de
estudos na minha vida.
Às minhas filhas Eliza e Giovana. Sim,
crianças, eu escrevi um livro!*

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus, pelo dom de ensinar, pela saúde, força e determinação.

À Grazielle Freitas, esposa preciosa, amor da minha vida, pela parceria e apoio de tantos anos, e às minhas filhas, Eliza e Giovana, que se admiram com minhas conquistas. A minha mãe, Dona Elma, pelo cuidado, orgulho e proteção.

Aos colegas Ângelo Cardoso e Israel Pereira, pelo incentivo ao mestrado.

Ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, pela oportunidade de realizar o curso, e ao Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais – CEFET MG, por acolher o programa e conduzi-lo atentado às necessidades dos mestrandos.

Aos professores do programa, por contribuírem com minha formação e me tornar um docente melhor, e aos colegas de curso, por tantas oportunidades de aprendizado.

A Valéria Moreira, minha estimada orientadora, que me cativou com sua docência e orientação e me incentivou em cada etapa desse trabalho, desde minhas primeiras inquietações na disciplina Matemática Discreta até minha formação como mestre/pesquisador, em plena pandemia.

Às professoras Érika Pagani e Fernanda Ferreira, pelas brilhantes orientações e docências inspiradoras e também pelo incentivo à escolha desse tema. A minha parceira de pesquisa, Laís Macedo, pela troca de ideias, reuniões e desabafos.

Aos avaliadores externos Marco Aurélio Kistemann Júnior (UFJF) e Cristiane Azevêdo dos Santos Pessoa (UFPE), pela prontidão em aceitar o convite à banca e por suas preciosas contribuições a essa pesquisa.

A meu amigo Rafael Avelino (Física – PUC MG), pelos ouvidos, leituras, discussões e sugestões durante todo o projeto.

Ao Colégio Noeme Campos e ao Colégio ICJ, especialmente aos respectivos coordenadores, Anderson Oliveira e Maria Leonete, pelo incentivo, colaboração e autonomia. Também aos meus alunos nessas instituições, pela colaboração, participação e respeito durante a execução do projeto.

Aos meus queridos ex-alunos Thulio Vilela (Matemática - UFMG), Gabriel Mamede (Ciências Sociais - UFMG) e Marcelo Macedo (Marketing – UNIP), estimados

parceiros que contribuíram, respectivamente, com a revisão matemática dos textos/gabaritos, a ilustração e a escolha do título do produto educacional.

A Amanda Fonseca e Isaque Vermelho, pela consultoria sobre financiamentos imobiliários.

Ao Luiz Henrique Oliveira (Letras - CEFET-MG) pela primeira revisão técnica. A equipe da SBM, pela publicação do produto educacional, especialmente ao professor Hilário Alencar, pela avaliação, e à Larissa Cândida, pela transcrição.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

*Não fui eu que ordenei a você? **Seja forte e corajoso!**
Não se apavore nem desanime, pois o Senhor, o seu Deus,
estará com você por onde você andar.
Josué 1:9*

RESUMO

Muitos jovens, após se formarem no Ensino Médio, lidarão com empréstimos e financiamentos para pagar bens e serviços, tais como veículos e imóveis, cartão de crédito, graduação e cursos diversos. Nessas circunstâncias, esse público carece de estratégias que os auxiliem na decisão sobre a aquisição desses, e de outros itens, de forma consciente e responsável. Tal cenário justifica a apresentação dessa pesquisa cujo objetivo é promover aprendizagens sobre Sistemas de Amortização para alunos do Ensino Médio, aplicadas a situações de empréstimos e/ou financiamentos, no âmbito da Educação Financeira, tema transversal obrigatório pela BNCC (2018). Tais aprendizagens perpassam por conhecimentos matemáticos próprios desse segmento, a saber, “Juros” e “Progressões”. Nessa dissertação, apresentamos o desenvolvimento da pesquisa, conduzida à luz da Engenharia Didática, e a construção de um produto educacional (livro) desenvolvido ao longo dos trabalhos, cuja proposta é auxiliar professores no ensino dos Sistemas de Amortização mais usuais: a Tabela PRICE e o Sistema SAC. Apresentamos a organização do livro e o relato das aplicações desse em duas escolas privadas de Belo Horizonte – MG, feitas em turmas de primeiro e terceiro anos do Ensino Médio, na intenção de adequar as situações didáticas propostas. A validação do material se deu a partir de análises respaldadas na evolução dos objetivos de aprendizagem da Taxonomia de Bloom e também no desenvolvimento das competências matemáticas da BNCC. Por fim, a dissertação se encerra na expectativa de apresentar aos professores e pesquisadores de Matemática, e áreas afins, um produto educacional de grande valor na promoção da Educação Financeira de docentes e alunos, proporcionando conhecimentos e aprendizagens que influenciem o comportamento de uma nova geração de consumidores.

Palavras-chave: Educação financeira. Empréstimos & Financiamentos. Sistemas de amortização. Ensino médio. Taxonomia de Bloom & BNCC.

ABSTRACT

Many young people, after graduating from high school, will deal with loans and financing to pay for goods and services, such as vehicles and houses, credit cards, graduation and various courses. In these circumstances, this public lacks strategies that help them to decide on the acquisition of these, and other items, in a conscious and responsible manner. This scenario justifies the presentation of this research whose objective is to promote learning about Amortization Systems for High School students, applied to situations of loans and/or financing, in the context of Financial Education, a mandatory transversal theme by the BNCC (2018). Such learning permeates through mathematical knowledge of this segment, namely, “Interest” and “Progressions”. In this dissertation, we present the development of the research, conducted in the light of Didactic Engineering, and the construction of an educational product (book) developed throughout the work, whose proposal is to assist teachers in teaching the most usual Amortization Systems: the PRICE Table and the SAC System. We present the organization of the book and the report of its applications in two private schools in Belo Horizonte – MG, carried out in classes of first and third years of High School, with the intention of adapting the proposed didactic situations. The validation of the material was based on analyzes supported by the evolution of the learning objectives of Bloom's Taxonomy and also in the development of mathematical competences at BNCC. Finally, the dissertation ends with the expectation of presenting to teachers and researchers in Mathematics, and related areas, an educational product of great value in promoting Financial Education for teachers and students, providing knowledge and learning that influence the behavior of a new generation of consumers.

Keywords: Financial education. Loans and financing. Amortization systems. High School. Bloom's Taxonomy & BNCC.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Conexões entre as Competências PCN+	26
Figura 2 - Séries Uniformes	47
Figura 3 – Sistemas de Amortização e seus Montantes	52
Figura 4 - Sistemas de Amortização e suas Prestações	53
Figura 5 – Proposta de Ensino 1ºEM	71
Figura 6 - Competências Matemáticas na BNCC	76
Figura 7 - A pirâmide de Bloom	77

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Habilidades contextualizadas à Educação Financeira.....	33
Quadro 2 - Habilidades contextualizadas à Matemática Financeira	34
Quadro 3 - Evolução das grandezas SAC	43
Quadro 4 - Generalizações para Tabela Price	48
Quadro 5 - Fichamento de pesquisas no PROFMAT.....	56
Quadro 6 - Capítulos & Objetivos.....	63
Quadro 7 - Capítulos & Estruturas	65
Quadro 8 - Progressões & Juros	72
Quadro 9 - Competências BNCC & Produto Educacional	85
Quadro 10 - Taxonomia de Bloom & Produto Educacional	87

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Controle do saldo devedor	39
Tabela 2 - Sistema Americano de Amortização	41
Tabela 3 - Sistema de Amortização Constante.....	42
Tabela 4 - Tabela Price.....	45

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	15
2 REFLEXÕES SOBRE EDUCAÇÃO FINANCEIRA	19
2.1 O que é Educação Financeira?	19
2.2 A implantação da Educação Financeira na Educação Básica	23
2.3 A Educação Financeira apresentada pela BNCC	28
3 SISTEMAS DE AMORTIZAÇÃO NO ENSINO MÉDIO	37
3.1 Empréstimos & Financiamentos na perspectiva da BNCC.....	37
3.2 Uma discussão sobre sistemas de amortização	38
3.2.1 Sistema americano de amortização	40
3.2.2 Sistema de amortização constante.....	42
3.2.3 Sistema francês de amortização	45
3.2.4 Comparações entre sistemas de amortização	49
3.3 Abordagens para sistema SAC e Tabela Price no Ensino Médio	54
3.3.1 Empréstimos & Financiamentos nas dissertações do PROFMAT.....	55
3.3.2 Empréstimos & Financiamentos na coleção ENEF	58
4 EMPRÉSTIMOS & FINANCIAMENTOS: O PRODUTO EDUCACIONAL.....	61
4.1 Apresentando a pesquisa	61
4.2 O produto educacional	62
4.3 Estruturação do material.....	63
4.4 Sobre a publicação	65
5 ASPECTOS METODOLÓGICOS DA PESQUISA	69
5.1 A Engenharia Didática	69
5.2 Sobre a primeira aplicação	70
5.2.1 Proposta de ensino.....	70
5.2.2 Adequações à pandemia do covid-19.....	72
5.3 Sobre a segunda aplicação.....	74
5.4 Metodologia de análise.....	75
6 AVALIAÇÃO DO PRODUTO EDUCACIONAL	79
6.1 Observações sobre as aplicações.....	79
6.2 Análise à luz das competências da BNCC	82
6.3 Análise a partir da Taxonomia de Bloom.....	85
6.4 Sobre o produto educacional	88
7 CONSIDERAÇÕES FINAIS	91
REFERÊNCIAS	95

BIBLIOGRAFIA.....	102
-------------------	-----

1 INTRODUÇÃO

Quando um jovem cidadão financiou seu primeiro automóvel, sua principal preocupação era fazer com que os valores das prestações se adequassem ao seu orçamento. Empolgado com a compra, ele assinou o contrato e levou o carro para casa. Que felicidade!

Dias depois, o banco lhe envia um carnê com 48 boletos, com vencimentos e valores já definidos. Ao analisá-los, o rapaz percebe que a diferença entre a soma das prestações e o valor financiado era impressionante.

Por se tratar de uma compra a prazo, ele sabia que as cifras desses papéis tiveram a interferência das taxas de juros citadas no contrato. Foi então que ele releu o documento, atentando às taxas e às cobranças adicionais que, devido à empolgação no momento da compra, passaram despercebidas.

O rapaz lembrou-se dos tempos de escola e pesquisou sobre as fórmulas de juros que aprendera nas aulas de Matemática: $j = C \cdot t \cdot i$ e $M = C \cdot (1 + i)^t$. Entretanto, tais expressões não eram suficientes para justificar os valores impressos nos boletos.

Daí, o jovem concluiu que havia mais a aprender sobre o assunto.

Semelhante ao personagem dessa história, criada por Freitas e Moreira (2020), a partir de uma experiência real do mestrando, muitos jovens, após se formarem no Ensino Médio, lidarão com empréstimos e financiamentos para pagar bens e serviços, tais como veículos e imóveis. Alguns se depararão com situações de financiamentos de cursos de graduação e outros cursos de formação profissional, ou ainda, empréstimos para a quitação de faturas/boletos. Diante disso, esse público carece de estratégias que o auxiliem na decisão sobre os pagamentos desses, e de outros itens, de forma consciente e responsável. Tais estratégias podem ser traçadas a partir de conhecimentos ligadas à Matemática Financeira e também à Educação Financeira.

Enquanto professor de Matemática, atuante em escolas privadas de Belo Horizonte desde 2007, o mestrando reconheceu que, à época da experiência relatada na história acima, em 2013, conhecimentos comumente abordados no Ensino Médio, tais como porcentagens e juros, funções e progressões, não eram suficientes para explicar o funcionamento de um contrato de empréstimo e/ou financiamento nem o cálculo das prestações em compras parceladas. No que tange à Matemática Financeira, a explicação para o funcionamento de tais contratos e compras se dá a partir dos Sistemas de Amortização, conteúdo presente nas ementas de cursos técnicos e de graduação nas áreas financeiras e administrativas e também

nos objetivos da disciplina Matemática Discreta, do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT.

É nesse cenário que a história inicial prossegue, quando, ao cursar a referida disciplina em 2018, o mestrando aprende que as grandezas componentes de um financiamento (saldo devedor, juros, amortizações e prestações) evoluem em regimes de juros simples ou de juros compostos, obedecendo a padrões passíveis de serem analisados sob a ótica das Equações Diferenciais e/ou à luz das Recorrências. Ademais, sob o domínio dos números naturais, o estudo das recorrências usadas nos sistemas de amortização pode ser desenvolvido a partir das progressões aritméticas ou das progressões geométricas.

Uma vez que conhecimentos sobre juros (simples ou compostos) e progressões (aritméticas ou geométricas) são comuns nos livros didáticos de Matemática destinados aos alunos do Ensino Médio e que esses conteúdos são úteis à compreensão de um contrato de financiamento, propomos que as abordagens sobre sistemas de amortização ocorram também nas salas de aula da Educação Básica. Dessa proposta, emerge a pergunta que caracteriza nosso problema de pesquisa: *Como abordar sistemas de amortização no Ensino Médio?*

A fim de buscar respostas ao referido questionamento, iniciamos uma pesquisa de mestrado sobre o ensino de *Empréstimos & Financiamentos* na Educação Básica, com objetivo de PROMOVER APRENDIZAGENS SOBRE SISTEMAS DE AMORTIZAÇÃO PARA ALUNOS DO ENSINO MÉDIO, APLICADAS A SITUAÇÕES DE EMPRÉSTIMOS E/OU FINANCIAMENTOS. Para isso, elaboramos uma proposta de trabalho para docentes que atuam nesse segmento, com abordagens que perpassam por conhecimentos de Educação Financeira, tema transversal obrigatório pela Base Nacional Comum Curricular - BNCC a partir de 2020, e também por conteúdos matemáticos próprios dessa etapa, tais como juros e progressões. Ademais, esperamos contribuir com a Educação Financeira de alunos e professores, conscientizando-os acerca das vantagens e desvantagens em compras parceladas.

A referida pesquisa foi conduzida à luz da Engenharia Didática, metodologia que visa desenvolver, efetivar, ponderar e examinar situações didáticas, sendo útil tanto na produção para o ensino quanto como metodologia de pesquisa qualitativa. As quatro etapas que compõem essa metodologia serão descritas no decorrer dessa dissertação.

A princípio, no capítulo 2, apresentamos nossas considerações sobre Educação Financeira, em especial a Educação Financeira Escolar, cuja implantação na sala de aula do Ensino Médio é compreendida à luz dos documentos normativos do segmento, a saber, os

Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN e a BNCC. Já no capítulo 3, o leitor encontra uma discussão sobre o tópico *Empréstimos & Financiamentos*, abordado a partir do ensino dos principais sistemas de amortização. Esses dois capítulos compõem nosso referencial teórico, assumido nessa dissertação como Estudo Preliminar, a primeira etapa metodológica da Engenharia Didática.

Um dos apontamentos da pesquisa, nessa primeira etapa, foi para a pouca oferta de materiais didáticos que contemplem o assunto *Empréstimos & Financiamentos*. Diante disso, nos propusemos a criar um material de apoio ao professor que o auxilie no ensino do tema em pauta. Tal proposta resultou em um produto educacional composto por uma sequência de aulas sobre os principais sistemas de amortização: o Sistema de Amortização Constante - SAC e a Tabela Price.

Sob o título *A Matemática dos Empréstimos & Financiamentos no Ensino Médio*, o produto supracitado é apresentado no formato de livro digital (e-book), em processo de publicação pela Sociedade Brasileira de Matemática – SBM, e contém situações didáticas a serem reproduzidas com os alunos do Ensino Médio, em sala de aula, de forma paralela, ou não, ao material didático adotado pela escola.

O processo de construção do título supracitado, bem como toda a sua concepção de elaboração, desenvolvimento e possibilidades analíticas, é descrito no capítulo 4, destacando a estruturação detalhada do material e as habilidades a serem desenvolvidas. Esse processo constitui a segunda etapa da Engenharia Didática, a saber, *Concepção e Análise a priori*.

Já no capítulo 5, discorremos acerca das duas aplicações do produto educacional, com turmas de primeiro e terceiro anos do Ensino Médio, em escolas privadas de Belo Horizonte – MG, bem como sobre as adequações necessárias, visto que ambas ocorreram em ambientes de ensino remoto, à época do isolamento social imposto pela disseminação do COVID-19. Nesse caso, referenciamos a fase de Execução, a terceira etapa da Engenharia Didática. Encerrando esse capítulo, elencamos as competências da BNCC e os objetivos de aprendizagem da Taxonomia de Bloom, usados nessa dissertação como critérios balizadores à análise do material. Essa análise, descrita no capítulo 6, objetiva a validação do livro, cumprindo a última fase da Engenharia Didática, a saber, *Análise a posteriori e Validação*.

Em sequência, o capítulo 7 apresenta as considerações finais sobre a pesquisa, bem como as expectativas quanto aos potenciais desdobramentos da mesma.

Mediante tal exposição, seguem no capítulo 2 nossas considerações sobre Educação Financeira e a implantação desta na Educação Básica, em especial na sala de aula do Ensino Médio.

2 REFLEXÕES SOBRE EDUCAÇÃO FINANCEIRA

2.1 O que é Educação Financeira?

Em estudos publicados em 2005, a Organização para Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE) postula a **Educação Financeira** como

(...) o processo pelo qual consumidores e investidores melhoram seu entendimento acerca de produtos financeiros, conceitos e riscos, e, através da informação, instrução e/ou consultoria direta, desenvolvem habilidades e confiança que os torna mais conscientes das oportunidades e riscos financeiros, para fazer escolhas informadas, saberem onde buscar ajuda e de assumirem outras ações efetivas a fim de melhorar a sua proteção e o seu bem-estar financeiro. (OCDE, 2005b, p. 5, tradução nossa).

Por meio desses estudos, os 34 países membros da organização e também os países convidados, como o Brasil, foram alertados a dedicar uma atenção especial a três tipos de consumidores, considerados como vulneráveis: os consumidores excluídos do sistema financeiro, os endividados e os trabalhadores que contam com as pensões do governo para se manterem em sua aposentadoria.

Conforme análise de Silva e Powell (2015) sobre esses estudos, os consumidores vulneráveis são aqueles que, por desconhecerem os trágicos efeitos das condições adversas no uso do dinheiro, são incapazes de gerir as próprias finanças. Tais comportamentos são próprios do **analfabetismo financeiro**, um termo usado por diversos autores a fim de denotar a ignorância de um indivíduo quanto a assuntos básicos relacionados às finanças: controle de orçamento doméstico e/ou pessoal; pesquisa de preços; cálculo de juros; avaliação de formas de pagamento em compras a prazo ou parceladas; planos de poupança.

Segundo Benedetti (2019), o analfabetismo financeiro se assemelha ao analfabetismo funcional. Nas palavras da autora, “o analfabeto funcional é aquele que lê e não compreende o que está lendo, já o analfabeto financeiro é aquele que não sabe o que faz com o dinheiro. Não tem controle das suas finanças e não compreende”. Para ampliar essa citação, destacamos as considerações de Maria (2018), que associa esse tipo de analfabetismo não apenas a dificuldades matemáticas, mas também a questões comportamentais. Ela ainda aponta que os endividamentos consequentes desse comportamento deixam os consumidores à “mercê de instituições financeiras que se

aproveitam dessa falta de conhecimento para oferecer produtos que não se enquadram ao perfil do cliente” (MARIA, 2018, n.p.).

Segundo a OCDE, o analfabetismo financeiro

(...) pode ter grande impacto sobre indivíduos e famílias na gestão diária de seus recursos, minando, por exemplo, sua capacidade de investir em questões chave de longo prazo (como educação superior, financiamento habitacional, aposentadoria), ou, ainda pior, expondo-os a graves problemas econômicos. (OCDE, 2005a, p. 76 *apud* SILVA e POWELL, 2015, p. 4)

Como contraponto, é importante mencionar que o desequilíbrio financeiro não é uma característica exclusiva do analfabetismo financeiro. Cabe aqui relativizar esse fato, uma vez que, tal desequilíbrio nem sempre é consequência de uma má administração ou de falta de conhecimento por parte do cidadão, mas de recursos insuficientes para sua própria subsistência. Nesse caso, nos referimos a indivíduos e famílias de baixa renda, mencionados pela OCDE como consumidores excluídos do sistema financeiro, que ao vivenciar sucessivas crises sociais, políticas e econômicas, têm seu emprego e renda comprometidos ao patamar da incapacidade financeira de arcar com suas necessidades mais básicas.

Por outro lado, quando citamos indivíduos alfabetizados financeiramente, referenciamos aqueles que possuem, pelo menos, o conhecimento básico de conceitos financeiros fundamentais e são conscientes quanto ao uso correto do dinheiro. A essa alfabetização associamos a ideia da literacia financeira que “é uma combinação de consciência, conhecimento, habilidade, atitude e comportamento necessários para tomar decisões financeiras consistentes e alcançar almejado bem-estar financeiro individual” (EIOPA, 2011, p.10, tradução nossa).

Sendo assim, ao mensurar os níveis de compreensão financeira de um indivíduo e/ou população, temos o **analfabetismo financeiro** como o antônimo da **literacia financeira**. Nesse sentido, Silva e Powell (2015) mencionam que, de acordo com a OCDE, ambas as classificações independem da renda e da escolaridade do indivíduo e/ou da população, uma vez que consumidores com alta escolaridade e renda acima da média podem ser tão incapazes de lidar com questões financeiras quanto àqueles com instrução educacional e renda inferiores.

Desse modo, enunciamos a Educação Financeira como o processo capaz de levar um analfabeto financeiro ao estado da literacia financeira. Tal definição norteia os textos de divulgação dessa pesquisa em Freitas e Moreira (2020; 2021a; 2021b).

As etapas dessa transição são oficialmente mensuradas, desde 2012, por meio do Programa Internacional de Avaliação de Estudantes – Pisa, promovidos trienalmente pela OCDE. Análises da organização sobre a edição do referido ano apontam que o bom desempenho em literacia financeira está relacionado a bons índices nas avaliações em Leitura e em Matemática, áreas tradicionais avaliadas em edições anteriores do programa. Essas conclusões, citadas por Somavilla e Bassoi (2016), contrastam com os resultados mencionados nas análises de Silva e Powell (2015), quando esses mencionam que consumidores com alta escolaridade também podem apresentar dificuldades em lidar com questões financeiras.

O processo associado à Educação Financeira promove uma série de oportunidades aos diferentes tipos de consumidores vulneráveis, citados anteriormente.

- As pessoas de baixa renda passam a participar do sistema financeiro uma vez que, alfabetizadas financeiramente, evitam gastos com altos custos em transações financeiras e também aprendem a poupar.
- Em estado de literacia financeira, os jovens recém-inseridos no mercado de trabalho, bem como suas famílias, não veem problemas em utilizar as ferramentas básicas necessárias ao controle de seus orçamentos. Isso lhes permite manter as economias sob controle e lhes proporciona disciplina à aquisição de bens maiores tais como veículos, imóveis e educação.
- A Educação Financeira fornece aos trabalhadores as informações e as habilidades necessárias para fazer escolhas seguras sobre planos de pensão e/ou poupança individuais para uma aposentadoria digna.

Segundo Silva e Powell (2015), a Educação Financeira proporciona também um melhor entendimento sobre informações financeiras básicas, permitindo que os consumidores com capital para investir, classificados pela OCDE como não vulneráveis, façam boas transações e investimentos.

Uma vez que grande parte do que se consome é produto do trabalho, destacamos a conscientização dos indivíduos sobre a relação *trabalho e consumo* como mais uma meta na alfabetização financeira de uma população. Nessa conscientização, levantam-se questionamentos sobre como consumir em tempos em que o trabalho não é uma opção, tais como desemprego, aposentadoria e doença. Por se tratar de situações nas quais grande parte dos trabalhadores recorre às reservas públicas destinadas aos programas de assistência social e/ou previdenciária, urge a necessidade de “estimular a conscientização dos futuros aposentados sobre a necessidade de avaliar a adequação financeira dos seus regimes atuais

de previdência pública e privada e de tomar as medidas apropriadas quando necessário” (OCDE, 2005b, p. 5).

A conscientização supracitada é um dos objetivos da Educação Previdenciária, ramo da Educação Financeira que tem ganhado destaque no Brasil, dadas as recentes mudanças demográficas e sociais, em especial as elevações da longevidade e as oscilações dos níveis de renda da população.

Segundo a Superintendência Nacional de Previdência Complementar – PREVIC (BRASIL, 2010), a importância da Educação Previdenciária, em especial a previdência privada, repousa em fatores como o desábito dos trabalhadores em poupar; o aumento da expectativa de vida dos mesmos; e a complexidade dos termos e conceitos relacionados ao setor. Diante disso, desde 2008, programas de Educação Financeira e Previdenciária vêm sendo desenvolvidos na intenção de que seus participantes entendam melhor seus planos de pensão e tomem decisões mais conscientes durante a vida.

Por outro lado, é importante ressaltar que, no que tange à previdência pública, a responsabilidade sobre a captação e a gestão de recursos investidos repousa não apenas sobre o trabalhador/contribuinte, mas também sobre a entidade governamental que administra os fundos previdenciários, a saber, o Instituto Nacional de Seguridade Social – INSS. Nesse cenário, trabalhadores celetistas e funcionários públicos não têm autonomia sobre a gestão dos recursos compulsoriamente recolhidos para a instituição. Educados financeiramente, ou não, esses contribuintes ficam passivos às regras estabelecidas pelo governo quanto às questões ligadas a aposentadoria.

Nesse contexto, a Educação Financeira torna-se útil tanto ao trabalhador quanto ao governo, uma vez que, ao desenvolver autonomia na tomada de decisões que contribuem para uma aposentadoria digna, o trabalhador se torna menos dependente das reservas públicas destinadas à previdência, sejam elas bem ou má administradas pelos órgãos responsáveis.

Silva e Powell (2015) apontam ainda que alfabetizar financeiramente toda uma população traz benefícios para seus cidadãos e também para toda a sociedade, à medida que, ao tomar decisões fundamentadas e ao exigir serviços de qualidade, os indivíduos estimulam a concorrência e a inovação do mercado.

Listadas as necessidades e as vantagens de se educar financeiramente os indivíduos de uma sociedade, é preciso versar sobre como a Educação Financeira pode ser implantada. Esse processo pode ocorrer de formas distintas ao considerarmos qual parcela da população se deseja educar. Dado que, nessa dissertação, o foco está sobre os estudantes da Educação

Básica, apresentaremos a seguir uma discussão sobre os documentos que nortearam esse processo no Ensino Fundamental e no Ensino Médio.

2.2 A implantação da Educação Financeira na Educação Básica

Retomando as análises de Silva e Powell (2015), algumas organizações importantes no mundo financeiro interessadas em formar consumidores e investidores conscientes, tais como o Banco Mundial e o Fundo Monetário Internacional - FMI, apoiaram as recomendações feitas pela OCDE sobre a relevância da Educação Financeira. No Brasil, empresas privadas também atuaram nesse processo. A BM&Bovespa, por exemplo, em parceria com uma rede de televisão, produziu, em 2014, o programa TV Educação Financeira¹, cujos episódios tratam de temas relevantes à Educação Financeira, desde a história do dinheiro/bancos à questões sobre investimentos e previdência.

Acerca da Educação Financeira promovida por entidades privadas, cabe um questionamento acerca das finalidades dessas ações. Endossando as primeiras linhas da definição de Educação Financeira proposta pela OCDE, na seção anterior, é possível traçar estratégias com características comerciais, nas quais as empresas promotoras, tais como bancos e instituições financeiras diversas, promovem ações visando não apenas educar sua clientela, mas também formar consumidores responsáveis para seus produtos financeiros. Por outro lado, outros programas podem apresentar um caráter preventivo, contra a inadimplência e a favor da organização e controle financeiro, à semelhança do exemplo supracitado, TV Educação Financeira.

Acerca do caráter preventivo da Educação Financeira, os relatórios da organização versam sobre a necessidade da inclusão desta nas escolas, ora como componente eletivo, ora como componente obrigatório do currículo escolar oficial. Embora a OCDE não seja um órgão educador, a proposta de tratar a Educação Financeira como componente obrigatório é feita de forma incisiva aos países membros e convidados. A justificativa para isso, ainda de acordo com Silva e Powell (2015), repousa no fato de o ambiente escolar ser capaz de atender, em quase sua totalidade, o público alvo: crianças e jovens. Esses, uma vez formados, podem se tornar excelentes propagadores de comportamentos que moldarão uma cultura financeira mais sólida no restante da população.

Dada essa inclusão, enunciaremos a definição sobre a Educação Financeira Escolar.

A Educação Financeira Escolar constitui-se de um conjunto de informações através do qual os estudantes são introduzidos no universo do

¹ TV Educação Financeira: <https://youtu.be/3qtDUjHSyOw>. Acesso em 12 de julho de 2021.

dinheiro e estimulados a produzir uma compreensão sobre finanças e economia, através de um processo de ensino que os torne aptos a analisar, fazer julgamentos fundamentados, tomar decisões e ter posições críticas sobre questões financeiras que envolvam sua vida pessoal, familiar e da sociedade em que vivem. (SILVA; POWELL, 2013, p. 12)

Em um processo que capacita os estudantes às ações destacadas na definição supracitada, tais como fazer julgamentos fundamentados, tomada de decisões e posicionamento crítico sobre questões financeiras, a escola está conduzindo seu público, antes analfabetos financeiros, ao estado da literacia financeira. Nessa perspectiva, ratificamos nossa definição para a Educação Financeira, citada na seção anterior, tendo a escola como uma das entidades responsáveis por sua promoção.

No Brasil, o ponto de partida para a implantação da Educação Financeira nas escolas se deu em 2006, a partir da criação do Comitê de Regulação e Fiscalização dos Mercados Financeiros, de Capitais, de Seguros, de Previdência e Capitalização – Coremec. Instituído por meio decreto nº 5685 (BRASIL, 2006), esse comitê foi incumbido de promover e articular a implantação de uma estratégia para a Educação Financeira em todo o país, definindo itens como público alvo, objetivos e área de atuação.

Através de discussões e publicações de diversos decretos, o Coremec definiu ações voltadas a crianças e adolescentes, estudantes da Educação Básica, para o incentivo ao hábito de poupar. Essas ações germinam as diretrizes para a Estratégia Nacional de Educação Financeira - ENEF², promulgada em 2010 por meio do decreto presidencial nº 7397 (BRASIL, 2010). O mesmo decreto instituiu também o Comitê Nacional de Educação Financeira - CONEF e o Grupo de Apoio Pedagógico – GAP como entidades de apoio à implantação da Educação Financeira e Previdenciária em todo o território nacional.

Até então, não se falava em Educação Financeira no ambiente escolar, explicitamente. Entre o final dos anos 90 e o início dos anos 2000, tempos de economia crescente e com inflação contralada, o tema pautado nas escolas brasileiras era a *Educação para o Consumo*, norteado pelos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (BRASIL, 1997). Tratava-se de um tema que serviria de contexto às aulas de Matemática, conforme descrito no trecho a seguir:

(A Matemática) faz parte da vida de todas as pessoas nas experiências mais simples como contar, comparar e operar sobre quantidades. Nos **cálculos relativos a salários, pagamentos e consumo**, na organização de atividades como agricultura e pesca, a Matemática se apresenta como um conhecimento de muita aplicabilidade. (BRASIL, 1997, p. 24-25, grifo nosso)

² Site ENEF: <https://www.vidaedinheiro.gov.br>. Acesso em 12 de julho de 2021.

Em sua primeira versão, publicada em 1997 para os primeiros ciclos do Ensino Fundamental³, os PCN já sugeriam a abordagem da Matemática associada a temas transversais tais como ética, orientação sexual, meio ambiente, saúde e pluralidade cultural. Além desses, mencionava-se a Educação do Consumidor.

Os PCN tratavam a Educação do Consumidor como um tema timidamente transversal que contextualizava situações envolvendo sistema monetário, proporcionalidade, variação de grandezas e resolução de problemas. Tudo isso, logo nos primeiros ciclos, alcançando crianças a partir de 7 anos de idade.

Uma segunda versão do documento foi publicada em 1998, contemplando os últimos ciclos do Ensino Fundamental, equivalentes aos atuais 6º, 7º, 8º e 9º anos. Nessa edição, a Educação do Consumidor foi enfatizada sob o título “Trabalho e Consumo”. O novo título era claramente justificado pelos objetivos descritos a seguir.

É fundamental que nossos alunos aprendam a se posicionar criticamente diante dessas questões e compreendam que grande parte do que se consome é produto do trabalho, embora nem sempre se pense nessa relação no momento em que se adquire uma mercadoria. (...) Aspectos ligados aos direitos do consumidor também necessitam da Matemática para serem mais bem compreendidos. Por exemplo, para analisar a composição e a qualidade dos produtos e avaliar seu impacto sobre a saúde e o meio ambiente, ou para analisar a razão entre menor preço/menor quantidade. (BRASIL, 1998, p. 35).

“Trabalho e Consumo” foi tratado como um tema transversal muito útil na contextualização de assuntos como juros, divisão proporcional, conversão de moedas, fatores de atualização, álgebra e tratamento da informação. Tais abordagens ambicionavam que os alunos fossem capazes de compreender, avaliar e decidir sobre formas de pagamento em uma compra e sobre estratégias de financiamento.

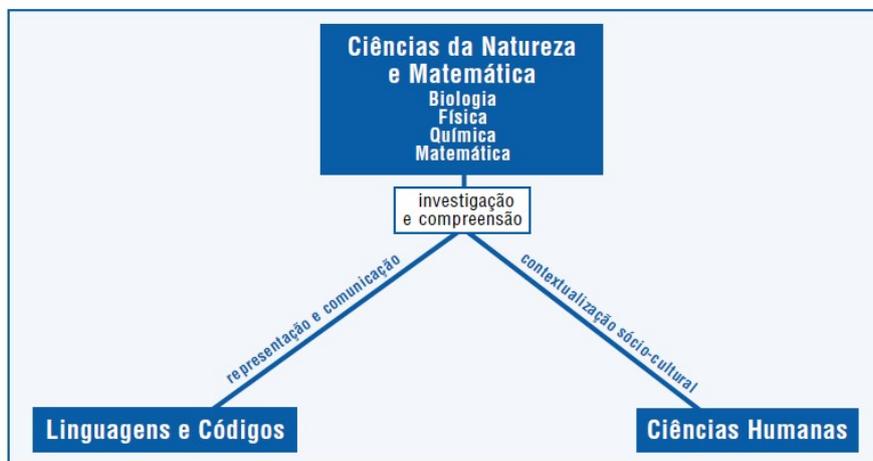
Estabelecido os PCN para todo o Ensino Fundamental, publica-se, em 2002, a versão destinada ao próximo segmento da Educação Básica, os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio – PCN+ (BRASIL, 2002). Nessa versão, as disciplinas Matemática, Física, Química e Biologia são tratadas em um único bloco, Matemática e Ciências da Natureza, cujos componentes são organizados por meio de competências e habilidades.

As competências explicitadas são *Comunicação e Representação*, *Investigação e Compreensão* e *Contextualização sociocultural dos conhecimentos*. Tratam-se de

³ Os primeiros ciclos contemplam o 1º ao 5º ano, correspondentes aos “Anos iniciais”, denotados na BNCC.

competências comuns às demais áreas do conhecimento, Linguagens e Códigos e Ciências Humanas, e se interligam conforme o diagrama apresentado na Figura 1.

Figura 1 - Conexões entre as Competências PCN+



Fonte: BRASIL, 2002, p. 25.

Na Figura 1, vemos que Matemática e Ciências da Natureza se articulam com Linguagens e Códigos através do desenvolvimento das competências de *Comunicação e Representação*, e com as Ciências Humanas, mediante o desenvolvimento das competências de *Contextualização sociocultural*. Temos também que as várias disciplinas da área se interligam pela *Investigação e Compreensão*.

Nas análises de Freitas (2009), os PCN+ apresentam a Matemática não apenas como um instrumento, mas como uma ciência investigativa, com linguagem própria e um papel de integração junto às outras ciências naturais. Sendo assim, dentro da área Matemática e Ciências da Natureza, os conceitos e procedimentos matemáticos, bem como suas apresentações e abordagens, têm destaque na representação, sistematização, generalização e previsão de fenômenos científicos e tecnológicos.

Entretanto, em detrimento da ênfase dada à Matemática como uma ciência auxiliar para as outras disciplinas de sua área, a versão dos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (BRASIL, 2000), que precede os PCN+, institui a compreensão de conceitos e procedimentos matemáticos como pré-requisito para o cidadão agir como **consumidor prudente** ou tomar decisões em sua vida pessoal e profissional. Isso ratifica as propostas feitas nas versões anteriores dos PCN, quando os títulos “Educação do Consumidor” e “Trabalho e Consumo” eram lançados como temas transversais aos estudantes do Ensino Fundamental.

Endossando essa transversalidade, os PCN+ listam habilidades semelhantes às que foram propostas nos PCN do Ensino Fundamental. Por exemplo,

(o aluno deve) ser capaz de analisar e julgar **cálculos efetuados sobre dados econômicos ou sociais, propagandas de vendas a prazo**, probabilidades de receber determinado prêmio em sorteios ou loterias, ou ainda apresentadas em um dado problema ou diferentes sínteses e conclusões extraídas a partir de um mesmo texto ou conjunto de informações. (BRASIL, 2002, p. 115, grifo nosso)

Com o intuito de complementar os PCN+, o Ministério da Educação publica em 2006 as Orientações Curriculares para o Ensino Médio – OCEM (BRASIL, 2006). Dividido em três volumes, a edição dedicada à área Matemática e Ciências da Natureza apresenta a Matemática organizada em quatro blocos: *Números e Operações; Funções; Geometria; Análise de dados e Probabilidade*. Os objetivos de cada bloco reforçam o desenvolvimento de competências e habilidades já mencionadas nos PCN e nos PCN+.

Entre essas habilidades, destacamos aquelas que podem ser trabalhadas à luz da Educação Financeira. São elas:

- decidir sobre as vantagens/desvantagens de uma compra à vista ou a prazo;
- avaliar o custo de um produto em função da quantidade;
- conferir se estão corretas informações em embalagens de produtos quanto ao volume;
- calcular impostos e contribuições previdenciárias;
- avaliar modalidades de juros bancários.

As OCEM também fazem referência à modelagem matemática, trabalhada através de projetos. Essa abordagem favorece a criação de estratégias de organização dos conhecimentos escolares, integrando saberes de diversas disciplinas. Tópicos de Matemática Financeira podem ser ótimos detonadores para esses projetos⁴, desenvolvendo habilidades que alicerçarão uma significativa Educação Financeira aos estudantes.

A proposta de organização dos conhecimentos por meio de competências e habilidades também é considerada nas edições do Exame Nacional do Ensino Médio - ENEM (BRASIL, 2009) e do Exame Nacional Para Certificação de Competências de Jovens e Adultos – ENCEJA (BRASIL, 2012), promovidos pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira – Inep, do Ministério da Educação. De forma semelhante aos PCN+, esses exames agora apontam cinco competências gerais: *dominar linguagens; compreender fenômenos; diagnosticar e enfrentar problemas; construir argumentações; elaborar propostas de intervenção*.

⁴ Sob essa perspectiva, o autor dessa dissertação desenvolveu, no triênio 2017-19, projetos de Educação Financeira com seus alunos do Ensino Médio que antecederam essa pesquisa de mestrado.

Tanto no ENEM quanto no ENCEJA, a área Matemática e Ciências da Natureza é desmembrada em duas áreas distintas: *Matemática e suas Tecnologias* e *Ciências da Natureza e suas Tecnologias*. Nesses exames, cada área tem sua própria matriz de referência, composta por um conjunto de 30 habilidades específicas.

Desde 2009, as provas do ENEM são compostas por uma prova dissertativa e por quatro provas objetivas, sendo uma para cada área do conhecimento: Linguagens; Ciências Humanas; Ciências da Natureza; e Matemática e suas Tecnologias. Cada prova objetiva traz 45 questões que aferem o desenvolvimento das habilidades listadas na respectiva matriz de referência.

Conforme a análise de Rodrigues *et al* (2018), metade das habilidades listadas na matriz de referência de Matemática e suas Tecnologias podem ser desenvolvidas a partir de contextos relacionados à Educação Financeira. Essa mesma análise constata que, nas últimas edições do ENEM, de 2009 a 2017, 60 das 405 questões de Matemática do ENEM abordaram temáticas relacionadas à Educação Financeira. Se considerarmos também as edições de 2018, 2019 e 2020, temos respectivos acréscimos de 6, 9 e 7 questões, elevando o então percentual 14,8% para 15,2%.

Temos então um panorama sobre como a Educação Financeira, e seus componentes, vem sendo trabalhada ao longo dos anos, antes de 2010, quando foi estabelecida a Estratégia Nacional de Educação Financeira - ENEF. Segundo Quintanilha *et al* (2019), desde então, diversas ações já foram desenvolvidas no âmbito escolar a fim de consolidar a Educação Financeira Escolar. O ápice dessas ações foi a implementação da Base Nacional Comum Curricular - BNCC, em 2017, apresentada na próxima seção.

2.3 A Educação Financeira apresentada pela BNCC

A Base Nacional Comum Curricular - BNCC (BRASIL, 2018) é o documento que estabelece o conjunto de aprendizagens essenciais e indispensáveis aos estudantes das redes públicas e privadas de ensino de todo o país. Respalhada pelo artigo 205 da Constituição Federal (1988), que garante o direito à educação, e pelo artigo 9 da Lei de Diretrizes e Bases – LDB (1996), que incumbe à União estabelecer competências para a formação básica, a promulgação da BNCC⁵ é o cumprimento da sétima meta do Plano Nacional da Educação - PNE (2014).

Deste modo, ao normatizar os conhecimentos escolares necessários à formação básica do indivíduo, a BNCC torna-se referência para a elaboração de currículos e projetos

⁵ Os documentos mencionados no parágrafo são citados nos textos da BNCC. Ver Brasil (2018, p. 10-12).

políticos pedagógicos das redes de ensino que, conforme as Diretrizes Curriculares Nacionais – DCN, devem evocar a inclusão, a pluralidade cultural e a valorização das diferenças. Sendo assim, referenciando valores como igualdade, diversidade e equidade, os textos da BNCC priorizam a formação humana dos indivíduos para uma sociedade justa, democrática e inclusiva. Esse é objetivo principal do documento!

A formação básica que a BNCC apresenta é um processo que visa o desenvolvimento de dez competências gerais, entre as quais se destacam a *valorização do conhecimento (C1)*, em aspectos históricos, para que o indivíduo compreenda a evolução da sociedade na qual ele está inserido, e o entendimento das diversas *linguagens* utilizadas na *comunicação (C2)* desse conhecimento, incluindo a linguagem das *artes (C3)* e das *tecnologias digitais (C4)*.

O documento acrescenta a essas competências a formação humana dos alunos enquanto pensadores, para que sejam capazes de fazer *reflexões* sobre o conhecimento adquirido (*C5*), bem como *análises* críticas e *argumentações* consistentes (*C6*). A atuação desses pensadores não deve ser apenas sobre o mundo, mas sobre si mesmos, promovendo o *autoconhecimento (C7)*, e sobre o próximo, visando à *empatia e à cooperação (C8)*.

Quanto à construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva, aliam-se aos itens supracitados competências ligadas à *responsabilidade e cidadania (C9)* e ao *mundo do trabalho e projeto de vida (C10)*, a fim de que cada indivíduo tenha autonomia, consciência crítica e responsabilidade na tomada de decisões, sempre pautadas na ética, na solidariedade e na sustentabilidade.

Em todo o documento da base, os saberes escolares são organizados por áreas do conhecimento, cujas competências específicas, desenvolvidas através de um conjunto de habilidades, ratificam as competências gerais. Para cada uma dessas áreas, a aferição das habilidades e competências desenvolvidas ocorre por meio de exames internacionais como o Programa Internacional de Avaliação de Estudantes – Pisa, promovidos pela OCDE. Em nível nacional, a aferição fica a cargo do Ministério da Educação, por meio de exames como o ENEM, o ENCCEJA e o Saeb⁶.

Na área da Matemática, a BNCC organiza os conteúdos em unidades temáticas (números, álgebra, geometria, grandezas/medidas e probabilidade/estatística) que devem ser trabalhadas a partir das ideias fundamentais da disciplina (equivalência, ordem,

⁶ Realizado desde 1990, o Sistema de Avaliação da Educação Básica (Saeb) é um conjunto de avaliações externas em larga escala que permite ao Inep realizar um diagnóstico da Educação Básica brasileira e de fatores que podem interferir no desempenho do estudante.

proporcionalidade, interdependência, representação, variação e aproximação). Esse trabalho ocorre através de processos matemáticos como resolução de problemas, investigação, desenvolvimento de projetos e modelagem, os quais constituem o conjunto de competências específicas dessa área.

Entre essas competências específicas, o documento aponta

- a valorização da Matemática como ciência que impacta o mundo do trabalho;
- a compreensão das relações intra e interdisciplinar a fim de promover a autoestima e a perseverança na busca de soluções;
- o desenvolvimento de pesquisas e projetos de cunho social de modo cooperativo e embasado em princípios éticos, solidários e sustentáveis;
- o uso de tecnologias e ferramentas digitais na resolução de problemas;
- o desenvolvimento da observação e da investigação, ratificados pelo raciocínio lógico;
- o uso de registros e linguagens diversas na apresentação de argumentos e conclusões.

Os três últimos tópicos listados acima compõem o que a BNCC denota como letramento matemático, tomado como uma obrigação do Ensino Fundamental e ampliado no Ensino Médio. Segundo o texto original,

(...) é o letramento matemático que assegura aos alunos reconhecer que os conhecimentos matemáticos são fundamentais para a compreensão e a atuação no mundo e perceber o caráter de jogo intelectual da Matemática, como aspecto que favorece o desenvolvimento do raciocínio lógico e crítico, estimula a investigação e pode ser prazeroso (BRASIL, 2018, p. 266).

A versão da BNCC destinada ao Ensino Médio, publicada em 2018, em retificação à versão anterior, segue os mesmos objetivos da LDB para esse segmento, a saber, consolidação e aprofundamento do conhecimento; foco no mundo do trabalho e na cidadania; formação ética, desenvolvimento intelectual e pensamento crítico; e compreensão dos fundamentos científico-tecnológicos. Essa versão também vem com a ambição de corrigir erros como o desempenho insuficiente no Ensino Fundamental, o excesso de componentes curriculares e as abordagens pedagógicas inadequadas às realidades dos alunos.

Na última etapa da Educação Básica, a área, agora sob o título *Matemática e suas tecnologias*, tem o foco na construção de uma visão integrada da Matemática, aplicada à realidade e à vivência dos estudantes. Nesse contexto, destacam-se as seguintes competências: Matemática para interpretação; articulação e investigação com cunho social;

resolução de problemas, modelagem e argumentação; compreensão de linguagens diversas e comunicação; investigação, observação e experimentação.

O documento também regula todas as séries de conhecimentos e práticas interdisciplinares que devem ser ministradas na última etapa da Educação Básica, incluindo a abordagem de temas contemporâneos que afetam a vida humana em escala local, regional e global. Esses temas, entre os quais destacamos a Educação Financeira, devem ser abordados de forma transversal e integradora.

Segundo Campos e Kistemann Jr. (2016), os temas transversais trazem compreensão e significado social a respeito de conceitos que antes eram dados como abstratos dentro de suas respectivas disciplinas. A abordagem interdisciplinar desses temas, geralmente através de projetos, permite que os alunos se apropriem desses conceitos como ferramentas úteis para reflexão e mudança de suas próprias histórias.

No caso da Matemática, os conhecimentos são organizados em cinco eixos temáticos: Números; Álgebra; Geometria; Grandezas e medidas; Probabilidade e Estatística. Referências à Educação Financeira aparecem logo no primeiro eixo.

Outro aspecto a ser considerado nessa unidade temática é o estudo de conceitos básicos de economia e finanças, visando à **educação financeira** dos alunos. Assim, podem ser discutidos assuntos como taxas de juros, inflação, aplicações financeiras (rentabilidade e liquidez de um investimento) e impostos. Essa unidade temática favorece um estudo interdisciplinar envolvendo as dimensões culturais, sociais, políticas e psicológicas, além da econômica, sobre as questões do consumo, trabalho e dinheiro. É possível, por exemplo, desenvolver um projeto com a História, visando ao estudo do dinheiro e sua função na sociedade, da relação entre dinheiro e tempo, dos impostos em sociedades diversas, do consumo em diferentes momentos históricos, incluindo estratégias atuais de marketing. Essas questões, além de promover o desenvolvimento de competências pessoais e sociais dos alunos, podem se constituir em excelentes contextos para as aplicações dos conceitos da Matemática Financeira e também proporcionar contextos para ampliar e aprofundar esses conceitos. (BRASIL, 2018, p. 269, grifo nosso)

De acordo com as linhas acima, extraídas da BNCC, a abordagem interdisciplinar sobre questões de consumo, trabalho e dinheiro caracteriza a Educação Financeira como um tema transversal, que pode ser abordado contextualizando outras áreas do conhecimento e/ou outros eixos temáticos da própria Matemática. Por outro lado, conforme Zocolotti *et al* (2019), o documento não especifica quais temas e conteúdos devem ser abordados dentro desse tópico, deixando a critério das redes de ensino e das escolas tal seleção, seja abordando a Educação Financeira como tema transversal ou como uma disciplina isolada.

Nesse sentido, é na sala de aula de Matemática que a Educação Financeira ganhará maior espaço, uma vez que alguns objetos matemáticos, como porcentagens e juros, podem ser usados como germinadores de discussões sobre lucro/prejuízo, índices inflacionários, taxas de juros e compras parceladas. A condução dessas discussões podem permear outras áreas do conhecimento a fim de capacitar os estudantes à análise e à reflexão, auxiliando-os na tomada de decisões conscientes sobre o mundo do trabalho e sobre o consumo responsável.

Diante disso, fazemos uso das ideias defendidas por Muniz Jr. e Jurkiewicz (2016) para ampliar o conceito de Educação Financeira Escolar, citado na seção anterior.

A Educação Financeira Escolar (EFE) que concebemos, em especial nas aulas de matemática, deve ser um convite à reflexão sobre as atitudes das pessoas diante de situações financeiras envolvendo o consumo, poupança, financiamentos, investimentos, seguros e previdência, bem como as suas possíveis consequências no curto, médio e longo prazos, olhando tanto para oportunidades quanto para as armadilhas do mercado. (MUNIZ JR.; JURKIEWICZ, 2016, p. 120)

Nessa nova concepção, os autores defendem que a leitura de situações financeiras que contemplem aspectos matemáticos e não matemáticos devem oportunizar aos alunos a reflexão e a análise, auxiliando-os na tomada de decisões. Trata-se de uma Educação Financeira distinta daquela promovida pelos bancos e outras instituições, conforme discussões apresentadas em seções anteriores. No ambiente escolar, as questões de ensino e aprendizagem de Matemática formam uma via de mão dupla com a abordagem de situações financeiras. Além disso, tal abordagem pode ocorrer além da sala de aula de Matemática, priorizando aspectos comportamentais, culturais, biológicos, políticos e ecológicos, conferindo à Educação Financeira Escolar um foco multidisciplinar.

Dentro dessa proposta, analisamos a seguir uma lista de habilidades que a BNCC traz para os estudantes do Ensino Médio, voltadas ao desenvolvimento da Educação Financeira nas aulas de Matemática. O Quadro 1 apresenta cinco dessas habilidades.

Quadro 1 - Habilidades contextualizadas à Educação Financeira

Habilidade	Descrição
EM13MAT101	Interpretar criticamente situações econômicas , sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
EM13MAT104	Interpretar taxas e índices de natureza socioeconômica (índice de desenvolvimento humano, taxas de inflação, entre outros), investigando os processos de cálculo desses números, para analisar criticamente a realidade e produzir argumentos.
EM13MAT106	Identificar situações da vida cotidiana nas quais seja necessário fazer escolhas levando-se em conta os riscos probabilísticos (usar este ou aquele método contraceptivo, optar por um tratamento médico em detrimento de outro etc.).
EM13MAT203	Aplicar conceitos matemáticos no planejamento, na execução e na análise de ações envolvendo a utilização de aplicativos e a criação de planilhas (para o controle de orçamento familiar , simuladores de cálculos de juros simples e compostos, entre outros), para tomar decisões.
EM13MAT303	Interpretar e comparar situações que envolvam juros simples com as que envolvem juros compostos , por meio de representações gráficas ou análise de planilhas, destacando o crescimento linear ou exponencial de cada caso.

Fonte: (BRASIL, 2018, p.533,534,536)

O desenvolvimento das habilidades mostradas no Quadro 1 vai ao encontro das necessidades dos consumidores vulneráveis mencionados na seção 2.1 dessa dissertação. A partir de EM13MAT303, as pessoas de baixa renda aprenderiam a evitar gastos com altos custos em transações financeiras, enquanto EM13MAT203 permitira aos jovens recém-inseridos no mercado de trabalho, e às suas famílias, utilizar adequadamente as ferramentas digitais necessárias ao controle de seus orçamentos. Além disso, a habilidade EM13MAT104 auxiliaria estudantes e trabalhadores a fazer escolhas seguras sobre financiamentos, planos de pensão e/ou poupança individuais, uma vez que o elemento principal nessas modalidades é a taxa de juros aplicada.

Quanto às habilidades EM13MAT101 e EM13MAT106, o desenvolvimento dessas conduz ao entendimento de informações acerca do mercado financeiro e a uma melhor análise sobre cenários de investimentos, contemplando os consumidores não vulneráveis citados pela OCDE. Ao propiciar a análise e a interpretação de gráficos, a primeira habilidade capacita o estudante a tirar conclusões acerca das informações apresentadas, especialmente em contextos financeiros, auxiliando-o na tomada de decisões e melhor gestão de seus recursos. Quanto à segunda, o entendimento dos riscos probabilísticos constitui um poderoso instrumento àqueles que desejam aplicar seus recursos, uma vez que o grau de tolerância aos riscos define o perfil do investidor e determina conjunto de aplicações financeiras adequadas a esse perfil.

Além dos itens mostrados no quadro anterior, o documento apresenta outras três habilidades que podem ser desenvolvidas sob o holofote da Educação Financeira. Essas, apresentadas no Quadro 2, versam sobre as funções exponenciais, logarítmicas e quadráticas em diversos contextos, entre os quais destacamos a Matemática Financeira.

Quadro 2 - Habilidades contextualizadas à Matemática Financeira

Habilidade	Descrição
EM13MAT304	Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira , entre outros.
EM13MAT305	Resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como os de abalos sísmicos, pH, radioatividade, Matemática Financeira , entre outros.
EM13MAT503	Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos envolvendo superfícies, Matemática Financeira ou Cinemática, entre outros, com apoio de tecnologias digitais.

Fonte: (BRASIL, 2018, p.536, 541, grifo nosso)

A Matemática Financeira aparece no Quadro 2 não apenas para contextualizar a aplicação de conteúdos de funções, mas também para promover discussões que podem contribuir com a literacia financeira dos estudantes. Em virtude disso, entendemos os conteúdos de porcentagens e juros, bem como outros tópicos trabalhados na Matemática Financeira, como ferramentas eficazes para alfabetizar financeiramente o público em questão.

As habilidades registradas nos quadros apresentados fazem parte de um conjunto com 45 habilidades para a área *Matemática e suas tecnologias*. Segundo Rodrigues (2019), esse pacote de habilidades e competências proposto no documento deve ser usado como ponto de partida para abordar questões atreladas às realidades e às necessidades dos alunos, não sendo conveniente que docentes fiquem limitados aos objetos matemáticos presentes nessa lista.

Além disso, nessa perspectiva, ressaltamos que, no âmbito da Educação Financeira, o domínio de conhecimentos matemáticos não é a única variável que interfere ou ajuda na tomada de decisão. Há aspectos não matemáticos, tangentes às esferas comportamentais, culturais, sociais e políticas, que devem ser ponderados no processo de tomada de decisão, haja vista as distintas realidades implícitas em cada situação. Ao levantarmos questionamentos acerca de necessidade e vontade, urgências e imprevistos, planejamentos e metas, sonhos e patrimônios, configuramos o tratamento de aspectos não matemáticos dentro da sala de aula de Matemática.

Nesse contexto, usaremos algumas habilidades listadas para a área, incluindo as mostradas nessa seção, para versar sobre o ensino de *Empréstimos & Financiamentos*.

Dada a importância do assunto dentro das discussões que os textos da base propõem sobre Educação Financeira, esse novo tópico torna-se o objeto de conhecimento sobre o qual se desenvolveu essa pesquisa de mestrado. Assim, apresentaremos no próximo capítulo como esse objeto está ligado às discussões da BNCC e também os apontamentos de diversos autores sobre o tema, acrescidos de uma discussão matemática sobre o assunto.

3 SISTEMAS DE AMORTIZAÇÃO NO ENSINO MÉDIO

3.1 Empréstimos & Financiamentos na perspectiva da BNCC

Uma das metas da Educação Financeira Escolar, conceituada por Silva e Powell (2013, p. 12), é formar indivíduos “aptos a analisar, fazer julgamentos fundamentados, tomar decisões e ter posições críticas sobre questões financeiras”. Nesse contexto, o foco desse capítulo incide sobre as decisões ligadas às compras a prazo, citadas tanto nos PCN+ quanto nas OCEM. A essas compras a prazo associamos o tópico *Empréstimos & Financiamentos*.

Ao listar as habilidades “decidir sobre as vantagens/desvantagens de uma compra à vista ou a prazo” e “avaliar modalidades de juros bancários” (BRASIL, 2006, p. 71), esses documentos abrem caminho para o ensino do tópico supracitado, na intenção de transformar o estudante em um adulto mais crítico na hora de fazer de um financiamento. Nesse cenário, Pereira e Couto (2017) apontam às possibilidades de promover tal transformação a partir do ensino de conteúdos simples do Ensino Médio.

Ademais, é na BNCC que esse caminho é pavimentado. O ensino de *Empréstimos & Financiamentos* cumpre bem as quatro metas principais que o documento estipula para o último segmento da Educação Básica, a saber,

- i. consolidação e aprofundamento do conhecimento;
- ii. foco no mundo do trabalho e na cidadania;
- iii. formação ética, desenvolvimento intelectual e pensamento crítico e;
- iv. compreensão dos fundamentos científico-tecnológicos.

Segundo Pereira e Couto (2017), o tópico em questão se constitui como um aprofundamento dos conceitos de porcentagens e juros que são abordados no ensino fundamental (i), e ainda direciona os estudantes que desejam trabalhar na área bancária/financeira (ii). Trata-se de um conteúdo que, ao relacionar teoria e prática no ensino da Matemática, com o auxílio de softwares e planilhas eletrônicas (iv), conduz o aluno à autonomia e à criticidade necessárias para não se deixar enganar por falsas propagandas, tanto no comércio quanto em instituições financeiras diversas (iii).

Nesse contexto, o trabalho com *Empréstimos & Financiamentos* visa também o desenvolvimento das habilidades da BNCC ligadas à Educação Financeira, mostradas no Quadro 1, na seção 2.3 dessa dissertação. Afinal, as taxas de juros desempenham um papel importante na análise de um contrato de financiamento (EM13MAT104), bem como os valores das prestações, sejam elas fixas ou não. Em ambos os casos, os valores das prestações e do saldo devedor ao longo do período devem ser observados, o que pode ser feito a partir da construção de planilhas eletrônicas (EM13MAT203). As simulações em planilhas e os gráficos gerados por elas permitem analisar o comportamento das grandezas envolvidas em cada processo, incluindo os juros embutidos, facilitando comparações entre as modalidades de financiamentos disponíveis (EM13MAT303).

Além disso, evocamos a questão da contextualização que, de acordo com os textos de Pereira e Couto (2017, p. 2), só devem “aparecer em sala de aula quando realmente for possível. E a matemática financeira é o maior exemplo disso. Talvez seja a parte da matemática que mais tem aplicação no cotidiano”. Nesse contexto, ao falar de *Empréstimos & Financiamentos*, não nos referimos apenas à aquisição de imóveis e veículos, mas de qualquer bem/serviço cujo pagamento seja feito em prestações. Esse leque de produtos torna relativamente fácil contextualizar o conteúdo às vivências e necessidades do estudante, seja na compra de um *smartphone*, ou outra tecnologia, parcelado no cartão de crédito ou nos pagamentos das mensalidades de um curso profissionalizante, ou de uma graduação, por exemplo.

Paralelamente, as decisões sobre as melhores estratégias de financiamento respaldam-se na análise dos diversos elementos já citados nesse capítulo, tais como taxa de juros e quantidade de prestações, e também na modalidade de financiamento adotada. A esse conjunto de elementos damos o nome de sistemas de amortização, assunto da próxima seção. Nela apresentaremos os sistemas mais comuns, bem como discussões matemáticas inerentes aos mesmos.

3.2 Uma discussão sobre Sistemas de amortização

Entende-se por amortização o processo de redução de uma dívida, até seu esgotamento, por meio de pagamentos parcelados e mensais, de acordo com o sistema definido em contrato, aos quais são acrescidos juros sobre o saldo devedor. As partes envolvidas na negociação do débito devem acordar sobre prazos e taxas de juros e também sobre a forma como se dará a quitação do valor principal. Nesses termos, cada pagamento

efetuado durante o processo tem uma dupla finalidade: saldar parte da dívida inicial e pagar juros sobre o saldo devedor, o qual diminui progressivamente até o esgotamento.

A liquidação da dívida e o pagamento de juros, bem como a forma como esses itens evoluem ao longo do processo, definem os sistemas de amortização. Nesses, calculamos a prestação a partir da soma entre o valor amortizado e os juros sobre o saldo devedor. A diversidade entre os sistemas básicos de amortização existentes se dá pela constância dos juros pagos, das amortizações ou das prestações. Respectivamente, estamos tratando dos sistemas AMERICANO, SAC e PRICE.

As subseções seguintes destinam-se a definir, exemplificar e discutir cada uma dessas modalidades. Para isso, os sistemas serão analisados a partir do preenchimento de tabelas, referenciando a seguinte situação.

“Um empréstimo de R\$12000,00 deve ser quitado em 12 prestações mensais, sob a taxa mensal de 1%, sendo a primeira prestação paga um mês após a liberação do mesmo.”

As tabelas supracitadas serão construídas à semelhança da Tabela 1, na qual o valor da dívida no início e no final do mês n serão registrados em “Dívida anterior (D_{n-1})” e “Dívida atual (D_n)”, respectivamente. À medida que, em cada linha, o valor dos juros sobre D_{n-1} será registrado em “Juros (J_n)”, os valores amortizados constarão na coluna “Amortização (A_n)”. A cada mês, a soma dos campos (J_n) e (A_n) gerará o valor para a coluna “Prestação (P_n)” enquanto a subtração entre (D_{n-1}) e (A_n), o registro para a coluna (D_n).

Tabela 1 - Controle do saldo devedor

Mês (n)	Dívida anterior (D_{n-1})	Juros (J_n)	Amortização (A_n)	Prestação (P_n)	Dívida atual (D_n)
1					
2					
3					
4					
...					
12					

Fonte: Elaborado pelo autor (2021)

Nesses termos, considerando a situação referencial, teremos, para $n = 1$, $D_{n-1} = D_0 = R\$12000,00$ em todos os exemplos, na expectativa de obter $D_{12} = R\$0,00$ ao fim de cada simulação. Exibido em cada uma das subseções a seguir, o preenchimento dessas tabelas tem as intenções de exemplificar como ocorre a quitação do empréstimo em cada sistema

de amortização, de generalizar expressões que descrevam a evolução das grandezas envolvidas no processo e de discutir sobre vantagens e desvantagens de cada modalidade.

3.2.1 Sistema Americano de Amortização

O Sistema Americano de Amortização, mencionado nessa pesquisa apenas como Sistema Americano, constitui um processo no qual a amortização da dívida ocorre em uma única parcela, no final do período. Antes desse pagamento, os agentes envolvidos (credor e cliente) devem decidir sobre o pagamento dos juros, que podem ocorrer periodicamente ou capitalizados e pagos no fim do contrato.

Segundo Mosmann (2020, s/p), o Sistema Americano “favorece investimentos cujo retorno financeiro é superior aos juros pagos, mas não o suficiente para pagar o valor principal parceladamente”. Clientes que optam por essa modalidade de empréstimo precisam gerar renda para liquidar a dívida ao final do período, o que, diante de tal incerteza, faz dessa uma modalidade pouco usada pelos brasileiros.

A fim de exemplificar o funcionamento desse sistema, retomemos a situação referencial, mostrada na página anterior. De acordo com as especificações para essa modalidade, o valor do empréstimo (R\$12000,00) será quitado ao fim do 12º mês. Conforme já citado, os juros embutidos na negociação, a taxa mensal de 1%, podem ser capitalizados durante todo o prazo ou pagos periodicamente.

Na primeira opção, os juros capitalizados serão pagos juntos ao valor original, gerando um montante que pode ser calculado pela conhecida fórmula de juros compostos, $M = C \cdot (1 + i)^t$. Sendo assim, temos :

$$M = 12000 \cdot (1 + 0,01)^{12} = R\$13521,90.$$

Nesse caso, não haverá pagamento algum durante todo o período do contrato, nem de juros nem da dívida principal. O saldo será amortizado em uma única parcela de R\$12000,00, no final do contrato, acrescida dos juros acumulados no período, no valor de R\$1521,90.

Já na segunda opção, a amortização ainda ocorre apenas no final da negociação, mas com prestações mensais equivalentes aos juros sobre o valor do empréstimo. A evolução dos pagamentos para essa modalidade é mostrada na Tabela 2.

Tabela 2 - Sistema Americano de Amortização

Sistema Americano de Amortização					
Mês	Dívida anterior	Juros	Amortização	Prestação	Dívida atual
1	R\$ 12.000,00	R\$ 120,00	R\$ -	R\$ 120,00	R\$ 12.000,00
2	R\$ 12.000,00	R\$ 120,00	R\$ -	R\$ 120,00	R\$ 12.000,00
3	R\$ 12.000,00	R\$ 120,00	R\$ -	R\$ 120,00	R\$ 12.000,00
4	R\$ 12.000,00	R\$ 120,00	R\$ -	R\$ 120,00	R\$ 12.000,00
5	R\$ 12.000,00	R\$ 120,00	R\$ -	R\$ 120,00	R\$ 12.000,00
6	R\$ 12.000,00	R\$ 120,00	R\$ -	R\$ 120,00	R\$ 12.000,00
7	R\$ 12.000,00	R\$ 120,00	R\$ -	R\$ 120,00	R\$ 12.000,00
8	R\$ 12.000,00	R\$ 120,00	R\$ -	R\$ 120,00	R\$ 12.000,00
9	R\$ 12.000,00	R\$ 120,00	R\$ -	R\$ 120,00	R\$ 12.000,00
10	R\$ 12.000,00	R\$ 120,00	R\$ -	R\$ 120,00	R\$ 12.000,00
11	R\$ 12.000,00	R\$ 120,00	R\$ -	R\$ 120,00	R\$ 12.000,00
12	R\$ 12.000,00	R\$ 120,00	R\$ 12.000,00	R\$ 12.120,00	R\$ -

Fonte: Elaborado pelo autor (2021)

Na Tabela 2, é possível perceber que o pagamento de juros mensais, aliado às amortizações nulas, mantêm a dívida inalterada até o início do 12º mês, ao fim do qual paga-se uma prestação de R\$12120,00, equivalente aos juros do referido mês somados à amortização da dívida. Nessa opção, com juros fixos, o montante pago, R\$13440,00 (soma da coluna “Prestação”), nos leva à conclusão de que essa é a alternativa mais vantajosa, uma vez que se trata de um valor inferior àquele calculado na primeira opção.

Em termos genéricos, o Sistema Americano de Amortização estipula que um valor V , financiado em n meses, sob uma taxa mensal i , terá seu montante M definido por $M = V \cdot (1 + i)^n$, caso os juros sejam capitalizados, ou por $M = V \cdot (1 + n \cdot i)$, na ocasião do pagamento de juros mensais. Essas fórmulas figuram nos livros didáticos do Ensino Médio, em capítulos destinados à Matemática Financeira, quando referenciam sistemas de juros compostos e de juros simples, respectivamente; no entanto, em contextos diversos à modalidade em pauta.

Nas análises de Bagatini (2010), o Sistema Americano é uma boa sugestão àqueles que desejam montar seu próprio negócio, na expectativa de, em curto prazo, angariar recursos para quitar o empréstimo. Contudo, em razão dos montantes pagos, esse sistema de amortização convém apenas aos investidores que não dispõem de renda certa para quitação parcelada da dívida.

Em contrapartida, para aqueles que têm condições de arcar com pagamentos mensais, além dos juros, existem sistemas mais interessantes cujos montantes a pagar são mais baixos que o do Sistema Americano. Estamos falando do Sistema SAC e da Tabela Price, cujos pagamentos mensais têm, entre outras finalidades, a de amortizar o saldo devedor, seja através de amortizações constantes ou de prestações fixas, respectivamente.

3.2.2 Sistema de Amortização Constante

O Sistema de Amortização Constante, registrado nessa dissertação apenas como Sistema SAC, é um processo no qual o saldo devedor diminui linearmente mediante o pagamento de amortizações fixas, cujos valores equivalem à razão entre o valor financiado e a quantidade de parcelas. A cada um desses pagamentos são acrescidos os juros sobre a dívida restante, resultando prestações decrescentes e lineares ao longo do período.

Diferente do Sistema Americano, essa nova modalidade constitui um dos sistemas de amortização mais comuns no Brasil, aplicada especialmente em financiamentos imobiliários. As pesquisas de Santos (2015) e Marques (2016) mencionam a utilização desse sistema nas negociações do Sistema Financeiro de Habitação – SFH e também nos financiamentos imobiliários promovidos por bancos comerciais, além de repasses a empresas privadas através de entidades governamentais. Entre essas, Silvestre (2015) e Bagatinni (2010) citam o Banco Nacional de Desenvolvimento Econômico e Social - BNDES e o Banco Regional de Desenvolvimento do Extremo Sul - BRDE.

Para ilustrar a evolução da dívida em um Sistema SAC, evocamos mais uma vez a situação referencial, na qual a dívida original (R\$12000,00) será amortizada em 12 parcelas de R\$1000,00. A cada pagamento são acrescentados os juros de 1% sobre o saldo devedor. As etapas para essa negociação seguem registradas na Tabela 3.

Tabela 3 - Sistema de Amortização Constante

Sistema de Amortização Constante (SAC)					
Mês	Dívida anterior	Juros	Amortização	Prestação	Dívida atual
1	R\$ 12.000,00	R\$ 120,00	R\$ 1.000,00	R\$ 1.120,00	R\$ 11.000,00
2	R\$ 11.000,00	R\$ 110,00	R\$ 1.000,00	R\$ 1.110,00	R\$ 10.000,00
3	R\$ 10.000,00	R\$ 100,00	R\$ 1.000,00	R\$ 1.100,00	R\$ 9.000,00
4	R\$ 9.000,00	R\$ 90,00	R\$ 1.000,00	R\$ 1.090,00	R\$ 8.000,00
5	R\$ 8.000,00	R\$ 80,00	R\$ 1.000,00	R\$ 1.080,00	R\$ 7.000,00
6	R\$ 7.000,00	R\$ 70,00	R\$ 1.000,00	R\$ 1.070,00	R\$ 6.000,00
7	R\$ 6.000,00	R\$ 60,00	R\$ 1.000,00	R\$ 1.060,00	R\$ 5.000,00
8	R\$ 5.000,00	R\$ 50,00	R\$ 1.000,00	R\$ 1.050,00	R\$ 4.000,00
9	R\$ 4.000,00	R\$ 40,00	R\$ 1.000,00	R\$ 1.040,00	R\$ 3.000,00
10	R\$ 3.000,00	R\$ 30,00	R\$ 1.000,00	R\$ 1.030,00	R\$ 2.000,00
11	R\$ 2.000,00	R\$ 20,00	R\$ 1.000,00	R\$ 1.020,00	R\$ 1.000,00
12	R\$ 1.000,00	R\$ 10,00	R\$ 1.000,00	R\$ 1.010,00	-

Fonte: Freitas *et al* (2021)

Na Tabela 3, vemos que as amortizações, fixadas em R\$1000,00 durante todo o período do financiamento, reduzem linearmente o saldo devedor e, conseqüentemente, os juros calculados a cada mês. Em todas as colunas, exceto “Mês” e “Amortização”,

identificamos os valores em progressões aritméticas decrescentes, confirmando a variação mencionada no primeiro parágrafo dessa subseção.

Uma vez identificados os primeiros termos (a_1) as razões (r) dessas progressões, usamos a conhecida fórmula de termo geral de uma progressão aritmética (PA), $a_n = a_1 + r \cdot (n - 1)$, para descrever a evolução das grandezas “Juros”, “Prestação” e “Dívida atual”. Os resultados constam no Quadro 3.

Quadro 3 - Evolução das grandezas SAC

Coluna	Notação Sugerida	Primeiro termo	Razão	Termo geral
Juros	j_n	R\$120,00	-R\$10,00	$j_n = 120 - 10 \cdot (n - 1)$
Prestação	p_n	R\$1120,00	-R\$10,00	$p_n = 1120 - 10 \cdot (n - 1)$
Dívida atual	D_n	R\$11000,00	-R\$1000,00	$D_n = 11000 - 1000 \cdot (n - 1)$

Fonte: Elaborado pelo autor (2021)

A partir dos termos gerais registrado no Quadro 3, é possível calcular o valor dos juros, da prestação e da dívida atual em qualquer mês n , o que facilita o controle em negociações de longo prazo. Também é possível, a partir da igualdade obtida para p_n , escrever expressões que permitam calcular o montante pago até o referido mês. Para isso, usamos a expressão $S_n = (p_1 + p_n) \cdot \frac{n}{2}$, adaptação da conhecida fórmula usada para calcular a soma dos n primeiros termos de uma PA, $S_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$, para todo $n \geq 1$.

Sendo assim, o montante pago durante todo o financiamento descrito na situação referencial, R\$12780,00, pode ser calculado a partir da soma dos valores na coluna “Prestação”, na Tabela 3, ou pelas fórmulas mencionadas no parágrafo anterior. Nesse caso, para $n = 12$, temos:

$$p_{12} = 1120 - 10 \cdot (12 - 1) = \text{R}\$1010,00$$

e, conseqüentemente,

$$S_{12} = (p_1 + p_{12}) \cdot \frac{12}{2} = (1120 + 1010) \cdot 6 = \text{R}\$12780,00.$$

Em ambas as formas, vê-se que o montante pago no Sistema SAC é inferior ao que foi calculado no Sistema Americano.

Generalizando o financiamento de uma dívida V , em k meses, em um Sistema de Amortização Constante, as amortizações no mês n são calculadas pela razão entre o valor financiado e o número total de prestações, ou seja, $A_n = \frac{V}{k}$. Além disso, sendo i a taxa mensal de juros, escrevemos:

- para os juros, $j_n = j_1 + r \cdot (n - 1)$, com $j_1 = i \cdot V$ e $r = -i \cdot A_n = -\frac{Vi}{k}$;

- para as prestações, $p_n = A_n + j_n$, ou ainda $p_n = p_1 + r \cdot (n - 1)$, com $p_1 = Vi + \frac{V}{k}$ e $r = -\frac{Vi}{k}$;
- para a “Dívida atual”, $D_n = D_1 + r' \cdot (n - 1)$, tal que $D_1 = V - \frac{V}{k}$ e $r' = -\frac{V}{k}$.

Nesses termos, podemos enunciar que, para o conjunto de incógnitas $\{V, k, i\}$, o valor da n ésima prestação de um Sistema SAC (p_n) e o saldo da dívida após o pagamento dessa parcela (D_n) podem ser calculados pelas expressões $p_n = \left(Vi + \frac{V}{k}\right) - \frac{Vi}{k} \cdot (n - 1)$ e $D_n = \left(V - \frac{V}{k}\right) - \frac{V}{k} \cdot (n - 1)$.

Quanto ao montante pago ao fim dos k meses, as incógnitas acima nos permitem escrever, com $n = k$,

- para a última prestação, $p_k = \left(Vi + \frac{V}{k}\right) - \frac{Vi}{k} \cdot (k - 1) = \frac{V}{k} \cdot (1 + i)$, e
- para o montante, $S_k = (p_1 + p_k) \cdot \frac{k}{2} = \left(Vi + \frac{V}{k} + \frac{V}{k} \cdot (1 + i)\right) \cdot \frac{k}{2} = V \cdot \left(1 + \frac{ik}{2} + \frac{i}{2}\right)$.

Comparando essa última expressão àquela obtida no montante do Sistema Americano, $M = V \cdot (1 + n \cdot i)$, obtemos, para $n = k$, $V \cdot \left(1 + \frac{ik}{2} + \frac{i}{2}\right) < V \cdot (1 + k \cdot i)$, uma vez que $\frac{ki}{2} + \frac{i}{2} < \frac{ki}{2} + \frac{ki}{2}$, para todo $k \geq 1$. Tal desigualdade prova a vantagem do Sistema SAC sobre o Sistema Americano, no tocante aos montantes e juros pagos no financiamento, dados os mesmos prazos, taxas e dívidas iniciais.

Uma recomendação ao lidar com o Sistema SAC se refere à sua aplicação nos financiamentos imobiliários. Segundo apontamentos de Filgueiras (2019), algumas instituições financeiras liberam empréstimos cujas parcelas correspondam a, no máximo, 30% da renda familiar. E, para várias famílias, as prestações iniciais do Sistema SAC ultrapassam esse percentual. Além disso, Almeida (2019) alerta para a importância de se atentar não apenas para as menores taxas de juros, mas também para os acréscimos de taxas de seguros e outras despesas do financiamento, valores que encarecem o crédito.

Por mais que o Sistema SAC apresente vantagens sobre o Sistema Americano, ainda há quem não possa arcar com parcelas iniciais tão altas. Uma alternativa a essa desvantagem é optar pelo Sistema Francês de Amortização, caracterizado por prestações constantes durante todo o período do financiamento. Com o valor da prestação fixado abaixo dos valores iniciais do Sistema SAC, essa modalidade é uma sugestão viável em financiamentos de curto e de médio prazo. Fato que será discutido no próximo item.

3.2.3 Sistema Francês de Amortização

O Sistema Francês de Amortização é conhecido como Sistema de Prestação Constante. Referenciado também como Tabela Price, em homenagem ao economista inglês Richard Price (1723 – 1791), essa modalidade de financiamento se popularizou na França, durante a 2ª revolução industrial (OLIVEIRA, 2013). Baseado em um regime de juros compostos, o sistema consiste no pagamento de prestações fixas e periódicas. À semelhança do Sistema SAC, as prestações tem a finalidade de amortizar a dívida e pagar juros sobre o saldo devedor. Contudo, os valores referentes às amortizações aumentam a cada período enquanto os juros diminuem ao longo do processo.

No Brasil, a Tabela Price é amplamente utilizada em financiamentos de bens de consumo em geral, tais como aparelhos eletroeletrônicos, móveis e automóveis; além de parcelamentos de faturas de cartão de crédito e empréstimos de curto e médio prazo. Segundo Silvestre (2015), o uso desse sistema passa despercebido nas compras do cotidiano uma vez que vendedores e consumidores, em sua maioria, não conhecem as especificidades dessa tabela. Os cálculos ficam a cargo das instituições financeiras que subsidiam tais negociações: administradoras de cartões, bancos e cooperativas de crédito.

Os elementos de um financiamento regidos pela Tabela Price, bem como a evolução desses, serão mostrados na Tabela 4, construída a partir da situação referencial. Nele, a dívida inicial (R\$12000,00) será financiada em 12 prestações de R\$1066,19. A cada pagamento, cujo resultado será justificado ainda nessa subseção, o valor da amortização é obtido pela diferença entre os juros de 1% sobre o saldo devedor e valor da prestação.

Tabela 4 - Tabela Price

Sistema de Amortização Francês (Tabela PRICE)					
Mês	Saldo Devedor	Juros	Amortização	Prestação	Saldo Atual
1	R\$ 12.000,00	R\$ 120,00	R\$ 946,19	R\$ 1.066,19	R\$ 11.053,81
2	R\$ 11.053,81	R\$ 110,54	R\$ 955,65	R\$ 1.066,19	R\$ 10.098,17
3	R\$ 10.098,17	R\$ 100,98	R\$ 965,20	R\$ 1.066,19	R\$ 9.132,96
4	R\$ 9.132,96	R\$ 91,33	R\$ 974,86	R\$ 1.066,19	R\$ 8.158,11
5	R\$ 8.158,11	R\$ 81,58	R\$ 984,60	R\$ 1.066,19	R\$ 7.173,50
6	R\$ 7.173,50	R\$ 71,74	R\$ 994,45	R\$ 1.066,19	R\$ 6.179,05
7	R\$ 6.179,05	R\$ 61,79	R\$ 1.004,39	R\$ 1.066,19	R\$ 5.174,66
8	R\$ 5.174,66	R\$ 51,75	R\$ 1.014,44	R\$ 1.066,19	R\$ 4.160,22
9	R\$ 4.160,22	R\$ 41,60	R\$ 1.024,58	R\$ 1.066,19	R\$ 3.135,64
10	R\$ 3.135,64	R\$ 31,36	R\$ 1.034,83	R\$ 1.066,19	R\$ 2.100,81
11	R\$ 2.100,81	R\$ 21,01	R\$ 1.045,18	R\$ 1.066,19	R\$ 1.055,63
12	R\$ 1.055,63	R\$ 10,56	R\$ 1.055,63	R\$ 1.066,19	-R\$ 0,00

Fonte: Freitas *et al* (2021)

Diferente do que foi observado no Sistema SAC, na Tabela 4 mostra que as evoluções dos elementos na Tabela Price não se adequam a progressões aritméticas nem geométricas, salvo a coluna “Amortização”, que cresce em PG de razão 1,01, e a coluna “Prestação”, observada como uma PG, ou PA, constante. Conforme descrito no primeiro parágrafo dessa subseção, é perceptível o decréscimo dos juros em virtude da diminuição do saldo devedor. Ademais, mediante prestações constantes, juros decrescentes implicam amortizações crescentes.

Dado que os valores da coluna “Amortização” crescem em PG de razão $q = 1,01$, as expressões $A_n = 946,19 \cdot (1,01)^{n-1}$ e $S_n = 94619,00 \cdot [(1,01)^n - 1]$ permitem calcular o valor da amortização no mês n (A_n) e total liquidado até o referido mês (S_n). Tais expressões são obtidas a partir das conhecidas fórmulas de PG, $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ e $S_n = a_1 \cdot \left(\frac{q^n - 1}{q - 1}\right)$, com $q \neq 1$ e $n \geq 1$, usadas para definir o valor do n -ésimo termo e a soma dos n elementos da sequência, respectivamente. Nesses termos, também é possível usar a expressão $D_n = 12000 - 94619,00 \cdot [(1,01)^n - 1]$ para determinar o valor atual da dívida (D_n), equivalente à diferença entre a dívida inicial e o total amortizado.

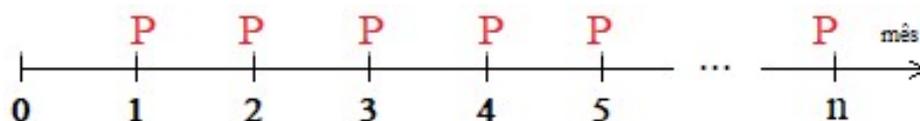
No tocante à constância das prestações, o resultado obtido para cada parcela (P) é feito a partir do valor do empréstimo (V), da taxa de juros (i) e da quantidade de prestações (n); incógnitas que, na Tabela Price, se relacionam segundo a expressão $P = \frac{V \cdot i}{1 - (1+i)^{-n}}$. Retornando à situação referencial, o terno $(V, i, n) = (12000, 1\%, 12)$ nos permite escrever $P = \frac{12000 \cdot 0,01}{1 - (1+0,01)^{-12}} = R\$1066,19$.

A dedução da relação $P = \frac{V \cdot i}{1 - (1+i)^{-n}}$ se dá a partir da seguinte generalização:

“Financiado sob uma taxa mensal i , um valor V será pago em n prestações mensais, fixadas em P reais, cada”.

Ao contrário do que muitos brasileiros calculam em compras parceladas, o valor financiado não equivale à soma das prestações ($V \neq n \cdot P$). É importante lembrar que, pela Matemática Financeira, não se deve somar valores em tempos distintos. Sendo assim, é necessário trazer todos os valores a um único tempo referencial. Para isso, ilustramos a representação temporal desses pagamentos na Figura 2.

Figura 2 - Séries Uniformes



Fonte: Elaborado pelo autor (2021)

Tomando como referência o último mês mostrado na Figura 2, o valor da dívida será atualizado para $V_{futuro} = V \cdot (1 + i)^n$. Para o mesmo tempo, a prestação paga em um mês j , com $1 \leq j \leq n$, deve ser atualizada para $P_j = P \cdot (1 + i)^{n-j}$. Nesses termos, temos a igualdade $V_{futuro} = \sum_{j=1}^n (P_j)$, que será desenvolvida a seguir.

$$V_{futuro} = \sum_{j=1}^n (P_j)$$

$$V_{futuro} = P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_n$$

$$V \cdot (1 + i)^n = P \cdot (1 + i)^{n-1} + P \cdot (1 + i)^{n-2} + P \cdot (1 + i)^{n-3} + \dots + P$$

Dividindo todos os termos da igualdade por $(1 + i)^n$.

$$V = P \cdot (1 + i)^{-1} + P \cdot (1 + i)^{-2} + P \cdot (1 + i)^{-3} + \dots + P \cdot (1 + i)^{-n}$$

Reescrevendo as parcelas com expoentes em ordem crescente.

$$V = P \cdot (1 + i)^{-n} + P \cdot (1 + i)^{-n+1} + \dots + P \cdot (1 + i)^{-2} + P \cdot (1 + i)^{-1}$$

Na equação acima, as n parcelas à direita da igualdade são termos de uma PG de razão $(1 + i)$. Diante disso, usando a fórmula para soma dos termos de uma PG, $S_n = a_1 \cdot \left(\frac{q^n - 1}{q - 1}\right)$, escrevemos:

$$V = P \cdot (1 + i)^{-n} \cdot \left[\frac{(1 + i)^n - 1}{(1 + i) - 1} \right]$$

Aplicando a propriedade distributiva.

$$V = P \cdot \left[\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} \right]$$

Multiplicando ambos os membros da equação por i .

$$V \cdot i = P \cdot [1 - (1 + i)^{-n}]$$

Dividindo ambos os membros da equação por $[1 - (1 + i)^{-n}]$.

$$P = \frac{V \cdot i}{1 - (1 + i)^{-n}}$$

A expressão em destaque é a fórmula utilizada para se calcular o valor da prestação num financiamento baseado na Tabela PRICE, sem entrada e sem carência. No entanto, é importante considerar as seguintes hipóteses.

- Se no ato da concessão do empréstimo for paga uma entrada de E reais, o valor financiando será $(V - E)$ e a fórmula a ser aplicada para o cálculo das prestações será alterada para $P = \frac{(V-E) \cdot i}{1 - (1+i)^{-n}}$.
- Caso o valor da entrada seja uma das prestações ($E = P$), escrevemos $P = \frac{(V-P) \cdot i}{1 - (1+i)^{1-n}}$. Manipulações algébricas dessa expressão nos permitem escrever $P = \frac{V \cdot i}{[1 - (1+i)^{-n}] \cdot (1+i)}$, que é equivalente a dividir o resultado da fórmula original por $(1 + i)$.
- Há também os financiamentos com carência, nos quais a primeira parcela é paga t meses após a concessão do empréstimo. Nesse caso, o resultado da fórmula original deve ser multiplicado pelo fator $(1 + i)^t$.

A partir da fórmula $P = \frac{V \cdot i}{1 - (1+i)^{-n}}$, podemos generalizar expressões para o cálculo das amortizações, que, tal como na Tabela 4, seguem uma PG com $a_1 = (P - Vi)$ e razão $q = (1 + i)$. Tais generalizações também são possíveis para o total amortizado, o saldo atualizado da dívida e o montante pago. Essas expressões constam no Quadro 4, referenciando um tempo genérico k .

Quadro 4 - Generalizações para Tabela Price

Item	Fórmula de referência	Generalização
Amortização (A_k)	$a_k = a_1 \cdot q^{k-1}$	$A_k = (P - Vi) \cdot (1 + i)^{k-1}$
Total amortizado (S_k)	$S_k = a_1 \cdot \left(\frac{q^k - 1}{q - 1} \right)$	$S_k = (P - Vi) \cdot \left[\frac{(1 + i)^k - 1}{i} \right]$
Dívida atual (D_k)	$D_k = V - S_k$	$D_k = V - (P - Vi) \cdot \left[\frac{(1 + i)^k - 1}{i} \right]$
Montante pago (M_k)	$M_k = k \cdot P$	$M_k = k \cdot P$

Fonte: Elaborado pelo autor (2021)

Tomando como exemplo o oitavo mês ($k = 8$) e os dados da situação referencial, as expressões do Quadro 4, nos fornecem

- $A_8 = (1066,19 - 12000 \cdot 0,01) \cdot (1 + 0,01)^{8-1} = (946,19) \cdot (1,01)^7 = R\$1014,45;$

- $S_8 = (1066,19 - 12000 \cdot 0,01) \cdot \left[\frac{(1,01)^8 - 1}{0,01} \right] = (946,19) \cdot [8,2857] = R\$7839,85;$
- $D_8 = V - S_8 = 12000 - 7939,82 = R\$4160,15 e$
- $M_8 = 8 \cdot 1066,19 = R\$8529,52.$

Os resultados A_8 e D_8 figuram na simulação mostrada na Tabela 4, divergindo por centavos.

E quanto ao montante, dado pela soma da coluna “Prestação” na Tabela 4, ou ainda pela fórmula $M_k = k \cdot P$ no Quadro 4, o resultado obtido ($12 \cdot R\$1066,19 = R\$12794,08$) é inferior ao valor calculado no Sistema Americano ($R\$13440,00$). Entretanto, o total pago na Tabela Price evidencia uma ligeira desvantagem dessa modalidade em relação ao Sistema SAC ($R\$12780,00$), calculado na subseção anterior. Essa vantagem do Sistema SAC sobre as outras modalidades se justifica pelos juros menores pagos logo nos primeiros meses da negociação, consequência de amortizações maiores no período. Generalizações dessa justificativa seguem na próxima subseção, destinada à comparação entre as modalidades citadas nesse capítulo.

3.2.4 Comparações entre sistemas de amortização

O primeiro objeto de comparação dessa seção se refere ao total pago em cada modalidade. Para isso, voltemos às expressões obtidas para os montantes de cada sistema: $M_{Americano} = V \cdot (1 + k \cdot i)$, $M_{SAC} = V \cdot \left(1 + \frac{ik}{2} + \frac{i}{2}\right)$ e $M_{Price} = k \cdot P = \frac{k \cdot V \cdot i}{1 - (1+i)^{-k}}$, todas escritas em função de um período de k meses.

Conforme já registrado na subseção 3.2.2, o Sistema SAC tem uma vantagem sobre o Sistema Americano, uma vez que $M_{SAC} < M_{Americano}$, para todo $k > 1$. Diante disso, prosseguimos à demonstração para $M_{SAC} < M_{Price}$, conforme raciocínio proposto por Santos (2013), a fim de confirmar que a vantagem do Sistema SAC também vale sobre a Tabela Price.

Tomemos então as expressões $M_{Price} = \frac{k \cdot V \cdot i}{1 - (1+i)^{-k}}$ e $M_{SAC} = V \cdot \left(1 + \frac{ik}{2} + \frac{i}{2}\right)$ como funções de um tempo real e positivo k . Nessas condições, de $M_{Price}(k)$ e $M_{SAC}(k)$, escrevemos a função $H(k) = M_{Price}(k) - M_{SAC}(k)$.

Inicialmente, temos $H(1) = 0$, uma vez que $M_{Price}(1) = M_{SAC}(1) = V \cdot (1 + i)$. Entretanto, a fim de validarmos a desigualdade $M_{Price} > M_{SAC}$, devemos provar que a função $H(k)$ é sempre positiva, para $k > 1$. Para isso, recorreremos ao teste da primeira derivada,

$H'(k) = \frac{dH}{dk}$, que nos garante que, se $H'(k) > 0$, a função $H(k)$ é crescente e, para $H'(k) < 0$, $H(k)$ é decrescente. Sendo assim, segue o cálculo de $\frac{dH}{dk}$.

- Pelas regras de derivação para soma e diferença de funções, $(u \pm v)' = u' \pm v'$, escrevemos:

$$\frac{dH}{dk} = H'(k) = [M_{Price}(k) - M_{SAC}(k)]' = [M_{Price}(k)]' - [M_{SAC}(k)]'.$$

- Derivando $M_{Price}(k) = \frac{k \cdot V \cdot i}{1 - (1+i)^{-k}}$:

Pela regra do quociente, $\left[\frac{f}{g}\right]' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$, com $f(k) = k \cdot V \cdot i$ e $g(k) = 1 - (1+i)^{-k}$, e também pela regra de derivação de funções exponenciais, $[a^x]' = a^x \cdot \ln(a)$, temos:

$$[M_{Price}(k)]' = \frac{V \cdot i \cdot [1 - (1+i)^{-k}] - [(1+i)^{-k} \cdot \ln(1+i)] \cdot k \cdot V \cdot i}{[1 - (1+i)^{-k}]^2},$$

ou ainda,

$$[M_{Price}(k)]' = V \cdot i \cdot \frac{[1 - (1+i)^{-k} + (1+i)^{-k} \cdot \ln(1+i)^{-k}]}{[1 - (1+i)^{-k}]^2}.$$

- Derivando $M_{SAC}(k) = V \cdot \left(1 + \frac{ik}{2} + \frac{i}{2}\right)$:

Pelas regras de derivação para soma de funções, temos:

$$[M_{SAC}(k)]' = V \cdot \left(0 + \frac{i}{2} + 0\right) = V \cdot i \cdot \frac{1}{2}.$$

- Logo, para $H'(k) = [M_{Price}(k)]' - [M_{SAC}(k)]'$, escrevemos:

$$H'(k) = V \cdot i \cdot \frac{[1 - (1+i)^{-k} + (1+i)^{-k} \cdot \ln(1+i)^{-k}]}{[1 - (1+i)^{-k}]^2} - V \cdot i \cdot \frac{1}{2},$$

ou ainda,

$$\frac{dH}{dk} = H'(k) = V \cdot i \cdot \left\{ \frac{1 - (1+i)^{-k} + (1+i)^{-k} \cdot \ln(1+i)^{-k}}{[1 - (1+i)^{-k}]^2} - \frac{1}{2} \right\}.$$

Conforme já mencionado, o teste da primeira derivada nos garante que, se $H'(k) > 0$, a função $H(k)$ é crescente e, para $H'(k) < 0$, $H(k)$ é decrescente. Nessas condições, prosseguimos ao estudo de sinal da derivada $H'(k)$.

Por meio da substituição $y = (1+i)^{-k}$, tal que $0 < y < 1$, registramos a derivada $H'(k)$ como $H'(y) = \frac{dH}{dy} = V \cdot i \cdot \left[\frac{1-y+y \cdot \ln(y)}{(1-y)^2} - \frac{1}{2} \right] = V \cdot i \cdot \left[\frac{1-y^2+2 \cdot y \cdot \ln(y)}{2 \cdot (1-y)^2} \right]$. Dado que o

denominador $2(1 - y)^2$ é sempre positivo, devemos analisar o sinal do numerador, na expectativa de obtermos $V \cdot i \cdot [1 - y^2 + 2y \ln(y)] > 0$ e, conseqüentemente, $H'(k) > 0$. Nesse caso, consideremos as seguintes implicações:

$$V \cdot i \cdot [1 - y^2 + 2y \ln(y)] > 0 \Rightarrow 1 - y^2 + 2y \ln(y) > 0 \Rightarrow \frac{y^2 - 1}{2y} < \ln(y).$$

Para validar a tal desigualdade, devemos provar que a função $p(y) = \frac{y^2 - 1}{2y} - \ln(y)$ é negativa no intervalo aberto $(0, 1)$. Para isso, usemos novamente o teste da primeira derivada para $p(y)$.

Aplicando a regra do quociente e a regra de derivação para logaritmos, $[\ln(y)]' = 1/y$, obtemos:

$$p'(y) = \frac{2y \cdot 2y - (y^2 - 1) \cdot 2}{(2y)^2} - \frac{1}{y} = \frac{y^2 - 1}{2y^2} - \frac{1}{y} = \frac{(y - 1)^2}{2y^2}.$$

Reescrevendo a igualdade acima como $p'(y) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{y - 1}{y}\right)^2$, temos $p'(y) > 0$. Logo, pelo teste da primeira derivada, concluímos $p(y)$ como uma função crescente no intervalo $(0, 1)$. Com isso, de $p(1) = 0$, concluímos $p(y) < 0$, para $0 < y < 1$, conforme queríamos.

Nessas circunstâncias, seguem novas implicações:

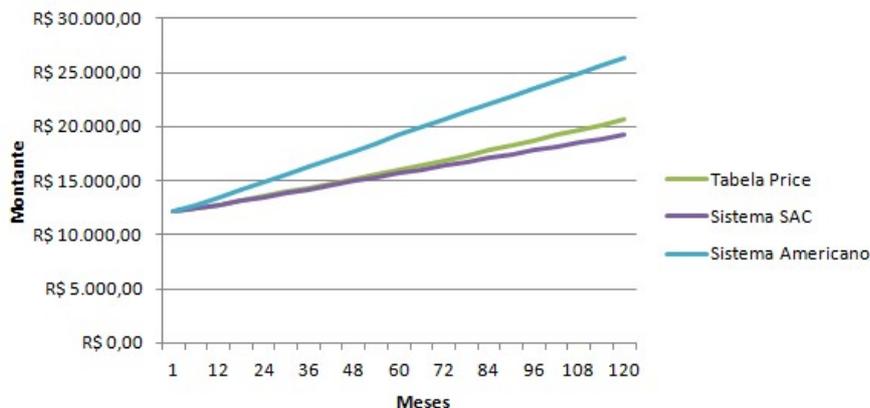
$$0 < y < 1 \Rightarrow \frac{y^2 - 1}{2y} < \ln(y) \Rightarrow V \cdot i \cdot [1 - y^2 + 2y \ln(y)] > 0 \Rightarrow H'(y) = \frac{dH}{dy} > 0.$$

Desfazendo a substituição $y = (1 + i)^{-k}$, voltamos à derivada $H'(k) = \frac{dH}{dk}$ e à função $H(k) = M_{Price}(k) - M_{SAC}(k)$. Dado que $H'(k) = \frac{dH}{dk} > 0$, para todo k positivo, e $H(1) = 0$, concluímos $H(k)$ sempre crescente e positiva, conforme esperado. Portanto, temos $M_{Price}(k) - M_{SAC}(k) > 0$, nos levando à conclusão desejada: $M_{Price} > M_{SAC}$.

Nesse contexto, as conclusões para valores não positivos de k não serão consideradas nos estudos dessa subseção, visto que tal variável representa o número de meses de duração de um financiamento, seja na Tabela Price ou no Sistema SAC.

Diante do exposto, enunciamos o Sistema SAC como o mais vantajoso, no tocante aos montantes, em relação tanto à Tabela Price quanto ao Sistema Americano. A Figura 3, construída a partir da situação referencial, salvo número de parcelas variável, nos mostra essa vantagem graficamente.

Figura 3 – Sistemas de Amortização e seus Montantes



Fonte: Elaborado pelo autor (2021)

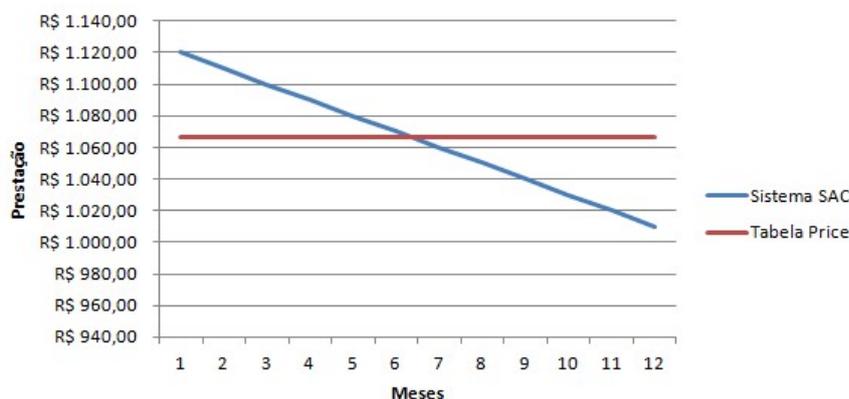
A partir dos gráficos da Figura 3, podemos observar que, para uma taxa fixa, os montantes SAC e Price tendem a ser bem próximos quando se trata de financiamentos de curto prazo. No entanto, o SAC se mantém, em todo tempo, com as menores somas entre os sistemas apresentados.

Se por um lado temos o montante como a principal vantagem do Sistema SAC ante as demais opções de financiamento, temos nos valores das prestações iniciais um contraponto. Nesse contexto, o Sistema SAC é o

mais indicado para quem consegue arcar com as primeiras prestações altas, o que para muitos é uma das desvantagens dessa tabela. Por causa disso, no decorrer do financiamento os valores das parcelas vão diminuindo, gerando satisfação em saber que a dívida vai retrocedendo todo mês. (SILVESTRE, 2015, p. 43)

No tocante às prestações, percebemos que o SAC tem parcelas iniciais mais caras do que as da Tabela Price. No entanto, por se tratar de valores decrescentes, em SAC, sempre haverá um momento em que essas serão mais baratas que a prestação do sistema francês. A Figura 4, construída a partir das colunas “Prestação” das Tabelas 3 e 4, mostra a evolução das parcelas ao longo do período.

Figura 4 - Sistemas de Amortização e suas Prestações



Fonte: Elaborado pelo autor (2021)

A partir do ponto de interseção dos gráficos na Figura 4, observado entre o 6º e o 7º mês, as prestações em SAC passam a ser menores que as do sistema francês. Fato semelhante ocorre para quaisquer valores V , k e i , incógnitas das fórmulas $P_{SAC} = \left(Vi + \frac{V}{k}\right) - \frac{Vi}{k} \cdot (n - 1)$ e $P_{Price} = \frac{V \cdot i}{1 - (1+i)^{-k}}$, já mencionadas em subseções anteriores.

A partir da inequação $P_{SAC} < P_{Price}$, é possível definir o mês n em que as parcelas SAC passarão a ser mais baratas que as prestações da Tabela Price. Sendo assim, procedemos à resolução da inequação $\left(Vi + \frac{V}{k}\right) - \frac{Vi}{k} \cdot (n - 1) < \frac{V \cdot i}{1 - (1+i)^{-k}}$, que nos fornece $n > k + 1 + \frac{1}{i} - \frac{k}{1 - (1+i)^{-k}}$. Para essa desigualdade, os dados da situação referencial, $(V, k, i) = (\text{R}\$12000,00; 12; 1\%)$, nos dá $n > 12 + 1 + \frac{1}{0,01} - \frac{12}{1 - (1,01)^{-12}} \approx 6,38$, nos levando a concluir que a partir do sétimo mês, as prestações SAC serão menores que o do sistema francês, conforme exibido na Figura 4.

Em oposição aos altos valores das prestações iniciais no Sistema SAC, a Tabela Price segue como a modalidade de financiamento mais utilizada no país. A justificativa para isso, conforme Filgueiras (2019), é a constância nas parcelas, que facilita o planejamento mensal em curto e médio prazo, por parte dos mutuários (tomadores do empréstimo). Por outro lado, a Tabela Price também favorece o credor (o que concede o empréstimo), que recebe um montante maior ao final da negociação. Esse último constitui outra razão à preferência pelo sistema francês.

Uma estratégia alternativa aos valores das prestações iniciais do Sistema SAC e aos montantes da Tabela Price é o Sistema de Amortizações Crescentes – o sistema SACRE. Nessa modalidade, conhecida também como sistema misto, o valor das prestações equivale

à média aritmética entre P_{Price} e a P_{SAC} do referido mês e implica pagamentos mensais linearmente decrescentes. De forma semelhante ao sistema SAC, a prestação SACRE (P_{SACRE}) serve para pagar os juros sobre o saldo devedor, que diminuem durante o período, e para amortizar partes crescentes da dívida original. Estipulado $P_{SAC} = \frac{P_{Price} + P_{SAC}}{2}$, o cálculo para as demais grandezas envolvidas no financiamento - J_n , A_n e D_n - seguem análogos aos já apresentados nessa seção, motivo pelo qual não serão expostos nessa dissertação.

A modalidade SACRE é usada na liquidação de financiamentos imobiliários pelo Sistema de Financiamento Habitacional - SFH. Sobre essa utilização, Santos (2015) aponta como desvantagem o fato de as primeiras parcelas serem ligeiramente mais caras que a do sistema francês, porém mais acessíveis que as do sistema SAC. Por outro lado, os montantes do sistema SACRE são menores que os da Tabela Price, em consequência das maiores amortizações que ocorrem logo nos primeiros meses do contrato.

Dadas as modalidades de financiamentos apresentadas nessa seção, bem como os conteúdos matemáticos intrínsecos, ratificamos o foco dessa pesquisa sobre o ensino dessas aos estudantes do Ensino Médio, a fim de capacitá-los a tomar decisões financeiras de forma crítica e acertada, conforme recomendações de Pereira e Couto (2017). Trata-se de um processo de Educação Financeira no qual cabem discussões sobre as vantagens de uma compra à vista, sobre taxas nominal e efetiva, e sobre o sistema de amortização mais adequado em uma compra a prazo.

Nesse contexto, a próxima seção apresentará possibilidades para tratar o assunto na sala de aula do Ensino Médio.

3.3 Abordagens para Sistema SAC e Tabela Price no Ensino Médio

Nas discussões apresentadas na seção anterior, não foram poucas as menções às fórmulas de juros simples e de juros compostos, $M = V \cdot (1 + n \cdot i)$ e $M = V \cdot (1 + i)^n$, às generalizações para termo geral de progressões aritméticas e geométricas, $a_n = a_1 + r \cdot (n - 1)$ e $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, e às expressões para soma dos termos dessas progressões, $S_n = (a_1 + a_n) \cdot \frac{n}{2}$ e $S_n = a_1 \cdot \left(\frac{q^n - 1}{q - 1}\right)$. Nos livros didáticos para o Ensino médio, tais igualdades figuram nos capítulos de Matemática Financeira, ou Matemática Comercial, e de Progressões, que podem ser trabalhados em séries distintas, de acordo com a perspectiva de cada autor.

Segundo análises publicadas por Pereira (2013) e por Couto (2013) sobre os conteúdos de Matemática Financeira presentes nas principais coleções didáticas destinadas aos estudantes do Ensino Médio, são comuns as abordagens sobre juros simples e juros compostos, incluindo comparações entre esses, e também atividades envolvendo progressões aritméticas e geométricas em contextos financeiros. Em algumas dessas coleções, as fórmulas de juros simples e de juros compostos são associadas às progressões aritmética e geométrica, respectivamente, ou ainda, a funções afins e exponenciais, nessa ordem. No entanto, esses materiais não fazem menção alguma sobre os sistemas de amortização, seja nos capítulos de Matemática Financeira ou de Progressões.

Em contrapartida, nossa pesquisa aponta para uma possibilidade de se trabalhar Sistemas de Amortização como um novo tópico dentro da sala de aula do Ensino Médio. Mediante o exposto na seção 3.2, a compreensão do tema em pauta perpassa por conhecimentos sobre “Juros” e “Progressões”, assuntos próprios da última etapa da Educação Básica. Ainda conforme os autores supracitados, esses dois conteúdos, presentes em todas as coleções por eles analisadas, se constituem como pré-requisitos ao assunto em questão.

Nesse cenário, em que o tópico Sistemas de Amortização não é pautado nos livros didáticos do Ensino Médio, abordagens sobre o tema adequadas a esse segmento são objetos de diversas pesquisas. Entre essas, destacamos as dissertações do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, no qual encontramos vários trabalhos abordando distintas possibilidades à aplicação e/ou ao ensino do assunto em questão.

3.3.1 Empréstimos & Financiamentos nas dissertações do PROFMAT

Sobre o ensino do tópico Empréstimos & Financiamentos, encontramos no repositório⁷ do PROFMAT 19 trabalhos, publicados no período de 2013 e 2020. Essas publicações, mostradas no Quadro 5, foram submetidas a um processo de fichamento, a partir do qual foi possível identificar focos e perspectivas a respeito do ensino do tema em pauta na sala de aula da Educação Básica.

⁷ Repositório disponível em <https://www.profmatsbm.org.br/dissertacoes/>. Acesso em 13 de março de 2021.

Quadro 5 - Fichamento de pesquisas no PROFMAT

Autor	Título	Ano	Instituição
Pereira	Sistemas de amortização: uma abordagem para o ensino médio regular	2013	UNIRIO
Couto	Sistemas de amortização: uma abordagem para o ensino médio regular	2013	UNIRIO
Oliveira	Matemática financeira e cidadania: uma proposta de trabalho sobre capitalização e amortização no ensino médio com o uso do Excel.	2013	UFRRJ
Santos	Um estudo dos sistemas de amortização SAC e francês no Ensino Médio apoiado na construção de planilhas eletrônicas	2013	UFRN
Araújo	Construção de calculadoras de financiamentos usando o Microsoft Excel: uma proposta de ensino para a matemática financeira	2013	UNIVASF
Batista Jr.	Matemática financeira contextualizada em sistemas de amortização e imposto de renda	2014	UNESP
Paula Neto	Matemática financeira: o estudo de empréstimos consignados e consórcios voltados para o ensino médio	2014	UFC
Fernandes	Matemática financeira: uma abordagem sobre financiamentos	2014	UFC
Santos	A matemática financeira nos financiamentos habitacionais	2014	UFAL
Andrade	Matemática financeira: trabalhando sistema de amortização no Ensino Médio	2015	UFT
Santos	Sistemas de amortização na Educação Básica	2015	UFAL
Sousa	Juros compostos, financiamentos e sistemas de amortização utilizando o Excel.	2015	UNIR
Marques	Matemática financeira no ensino médio: capitalização e amortização com o uso de planilha eletrônica.	2016	UFMA
Lima	A educação financeira no ensino médio através de proposta aplicada a financiamentos imobiliários pelos sistemas SAC e Price	2017	UERJ
Gomes	Matemática financeira: imposto de renda, sistemas de amortização e outras aplicações - análise quantitativa e qualitativa.	2018	UFBA
Pitzer	Financiamentos e investimentos: uma proposta para o Ensino Médio	2018	UDESC
Araújo Filho	Um estudo sobre o uso de planilhas eletrônicas no ensino de matemática financeira com ênfase nos sistemas de amortização Price e SAC	2019	UNIVASF
Lima	Financiamentos imobiliários e modelagem matemática: uma proposta para o ensino-aprendizagem de sistemas de amortização	2019	UFERSA
Biaobock	Financiamentos e empréstimos: uma abordagem para o ensino médio	2020	UDESC

Fonte: Freitas e Moreira (2021a)

No processo de fichamento, publicado por Freitas *et al* (2021), as dissertações listadas no Quadro 5 foram categorizadas a partir dos conteúdos matemáticos abordados (A), dos recursos utilizados no ensino de Sistemas de Amortização (B) e dos materiais/produtos desenvolvidos nas pesquisas (C).

Na primeira categoria, os tópicos “Juros” e “Séries Uniformes” se destacam como precedentes ao estudo do SAC e da Tabela Price, entre outras modalidades de financiamento. Trata-se de conteúdos cuja relevância se dá por sua utilização nas deduções

da fórmula para os cálculos das prestações na Tabela Price, $P = \frac{V \cdot i}{1 - (1+i)^{-n}}$. Enquanto Biaobock (2020), Santos (2014) e Marques (2016) dedicam tópicos específicos a “Séries Uniformes” em suas pesquisas, os demais autores incorporam esse conteúdo aos estudos sobre Tabela Price. Isso só não ocorre nas obras de Lima (2017) e Batista Jr. (2014) que apresentam a referida fórmula sem se alongar em deduções.

Quanto à categoria (B), recursos utilizados no ensino de Sistemas de Amortização, o preenchimento de tabelas e a construção de gráficos são amplamente utilizados para explicar as especificidades de cada sistema. Embora as planilhas eletrônicas sejam utilizadas no preenchimento automático das tabelas de amortização, semelhantes às que foram apresentadas na seção 3.2 dessa dissertação, a relevância desse recurso está na utilização da função PGTO, usada no cálculo de prestações na Tabela Price, em substituição à fórmula $P = \frac{V \cdot i}{1 - (1+i)^{-n}}$. A referida função é apresentada nas pesquisas de Marques (2016), Santos (2013), Santos (2015) e Sousa (2015).

No que tange à construção de gráficos, os estudos de Pitzer (2018) e Gomes (2018) constroem imagens que mostram a evolução das prestações em ambos os sistemas, sendo o último feito a partir da utilização do software *GeoGebra*. Essa mesma ferramenta é utilizada nos textos de Pereira (2013) e Lima (2019) para analisar graficamente a evolução dos juros e das amortizações, sendo que a última autora alia a linguagem visual à modelagem matemática em problemas de financiamentos imobiliários.

Ademais, esses mesmos recursos figuram nos produtos/materiais analisados na categoria (C), desde a elaboração de sequências didáticas e listas de atividades, propostas para a sala de aula do Ensino Médio, à construção de simuladores de financiamentos, criados a partir dos softwares mencionados. Das listas de atividades, destacamos as propostas por Santos (2014), Santos (2015) e Biaobock (2020) por aliarem conhecimentos matemáticos sobre Sistemas de Amortização à tomada de decisões ante situações de *Empréstimos & Financiamentos*. Quanto aos simuladores, convém citar os recursos disponibilizados por Araújo (2013) e Sousa (2015): ao passo que o primeiro orienta a construção de calculadoras eletrônicas, cujo funcionamento se assemelha aos simuladores bancários, o segundo entrega um relevante tutorial sobre o uso do *Excel*, em complemento a todas suas explicações, executadas por meio do referido software.

Nas publicações listadas no Quadro 5, os autores versam sobre a relevância do tópico *Empréstimos & Financiamentos*, ou Sistemas de Amortização, e sobre a necessidade de esse ser abordado nas salas de aula do Ensino Médio. Para cada sistema, os trabalhos

apresentam considerações quanto à utilização, às características e aos cálculos. Embora o Sistema SAC e a Tabela Price figurem em todas essas dissertações, nem todos os autores comparam ambas as modalidades, explicitando as vantagens e desvantagens de cada uma.

Quanto às prestações de cada sistema, todas as pesquisas supracitadas apresentam os procedimentos para o cálculo. Contudo, apesar de tais apresentações serem necessárias a fim de permitir que o aluno verifique se os valores das prestações se adequam ao orçamento dele e/ou da família, isso não é o bastante! Ainda há outros fatores a serem discutidos, tangentes às esferas social e comportamental: discussões sobre necessidade e vontade; planejamentos e metas; sonhos e patrimônios. Tratar desses fatores configura o trabalho com *Empréstimos & Financiamentos* como uma abordagem própria à Educação Financeira.

Diante da necessidade de tais discussões, o Governo Federal publica em 2013, por meio da Estratégia Nacional de Educação Financeira – ENEF, a coleção “Educação Financeira nas Escolas” (BRASIL, 2013), voltada aos estudantes da Educação Básica. A coleção surge como um catalisador no processo de alfabetização financeira dos estudantes, paralelo às propostas dos PCN e PCN+ então vigentes nos livros didáticos.

3.3.2 Empréstimos & Financiamentos na coleção ENEF

A coleção “Educação Financeira nas Escolas” é oferecida gratuitamente aos estudantes do Ensino Fundamental e do Ensino Médio. Com *download* gratuito no link <https://www.vidaedinheiro.gov.br/livros-ensino-medio/>, os três volumes destinados aos alunos do último segmento da Educação Básica, tem o objetivo de promover debates e reflexões sobre o mundo do dinheiro. Tais discussões ocorrem a partir de situações didáticas contextualizadas à vida familiar e social, a bens públicos e pessoais, ao trabalho e empreendedorismo, e ainda, à economia do país e do mundo.

A ideia de *Empréstimos* é abordada logo no primeiro volume da coleção, referenciando situações como orçamentos deficitários, imprevistos e dívidas mal planejadas. Trata-se de contextos que promovem discussões acerca da necessidade de se pesquisar as diferentes modalidades de empréstimo, especialmente no que tange às taxas de juros. A fim de ilustrar o funcionamento dessas taxas, os textos conduzem os alunos ao preenchimento de tabelas, tanto em juros simples como em juros compostos, mas sem referências às fórmulas matemáticas mencionadas nessa dissertação.

No tocante à questão dos *Financiamentos*, tratada nessa coleção como empréstimos associados à compra de bens, o segundo volume traz referências aos Sistemas de Amortização. Contextualizados em situações de aquisições imobiliárias, o Sistema SAC e a

Tabela Price são citados como modalidades que influenciam o cálculo das prestações, mas sem tratamento matemático. Nesse caso, o holofote incide nas estratégias para adequar a prestação ao orçamento e nas possibilidades para juntar o valor da entrada.

No mesmo volume, há menções sobre consórcios de automóveis e comparação de empréstimos. Nesse último, temos o preenchimento de várias tabelas a fim de comparar empréstimos com taxas de juros distintas, e com prestações constantes. Apesar de essas tabelas serem preenchidas à semelhança da Tabela 4, na subseção 3.2.3 dessa dissertação, tais contextos não associam esses preenchimentos à Tabela Price nem fazem generalizações.

Conforme análises Silva (2017), uma justificativa à ausência de um formalismo matemático nessa coleção reside no fato de a Educação Financeira ser tratada como um tema transversal pelos autores da mesma. Nesse contexto, professores de diversas áreas do conhecimento podem utilizar do material em sala de aula para detonar discussões que não se limitam a aspectos puramente matemáticos, mas abarcam conhecimentos que tangem as esferas sociais, políticas, culturais e comportamentais.

Enfim, as exposições feitas nesse capítulo sobre Sistemas de Amortização, aliadas às considerações acerca da Educação Financeira Escolar, apresentadas no capítulo 2, concluem a etapa de Estudos Preliminares, a primeira etapa da Engenharia Didática. Desses estudos, concluímos a necessidade de propor um material que aborde o tópico *Empréstimos & Financiamentos*, tanto no âmbito das discussões próprias à Educação Financeira quanto em aspectos matemáticos adequados aos estudantes do Ensino Médio. Nessa perspectiva, apresentaremos no próximo capítulo a construção do produto educacional dessa pesquisa de mestrado.

4 EMPRÉSTIMOS & FINANCIAMENTOS: O PRODUTO EDUCACIONAL

4.1 Apresentando a pesquisa

Os jovens que passam pelo Ensino Médio, a última etapa da Educação Básica, devem ser capazes de desenvolver seus projetos de vida com criticidade, autonomia e responsabilidade. Esse é um dos objetivos estabelecidos na Base Nacional Comum Curricular – BNCC, publicada em 2018.

(...) As juventudes, em constante diálogo com outras categorias sociais, encontram-se imersas nas questões de seu tempo e têm importante função na definição dos rumos da sociedade. Considerar que há juventudes implica (...) assegurar aos estudantes uma formação que, em sintonia com seus percursos e histórias, faculte-lhes definir seus projetos de vida, tanto no que diz respeito ao estudo e ao trabalho como também no que concerne às escolhas de estilos de vida saudáveis, sustentáveis e éticos. Nesse sentido, cabe às escolas de Ensino Médio contribuir para a formação de jovens críticos e autônomos, entendendo a crítica como a compreensão informada dos fenômenos naturais e culturais, e a autonomia como a capacidade de tomar decisões fundamentadas e responsáveis. (BRASIL, 2018, p. 463)

Os cumprimentos desses projetos de vida se relacionam, em parte, com os comportamentos de consumo dos estudantes. Nessa perspectiva, após se formarem no Ensino Médio, não poucos discentes lidarão com a aquisição de bens e serviços, tais como veículos e imóveis. Alguns se depararão com situações de financiamentos de cursos de graduação e outros cursos de formação profissional, ou ainda, empréstimos para a quitação de faturas/boletos.

Diante disso, esse público carece de estratégias que o auxiliem na decisão sobre a aquisição desses e outros itens, de forma consciente. Essas estratégias podem ser aprendidas através de conhecimentos matemáticos próprios do Ensino Médio, por meio de abordagens que evidenciam a Educação Financeira, tema transversal obrigatório pela BNCC a partir de 2020.

Diante desse cenário, desenvolvemos uma pesquisa de mestrado sobre o ensino de *Empréstimos & Financiamentos* na Educação Básica, com objetivo de PROMOVER APRENDIZAGENS SOBRE SISTEMAS DE AMORTIZAÇÃO PARA ALUNOS DO

ENSINO MÉDIO, APLICADAS A SITUAÇÕES DE EMPRÉSTIMOS E/OU FINANCIAMENTOS e, a partir dessas, elaborar uma proposta de trabalho para os docentes que atuam nesse segmento. Dessa forma, a referida pesquisa intenciona contribuir com a Educação Financeira dos alunos, conscientizando-os acerca das vantagens e desvantagens em compras parceladas, e com a formação continuada de professores.

4.2 O produto educacional

A pesquisa de mestrado relatada nessa dissertação tem como objetivo promover aprendizagens sobre Sistemas de Amortização para alunos do Ensino Médio, aplicados a situações de *Empréstimos & Financiamentos*, no âmbito da Educação Financeira. Contudo, conforme exposto no capítulo anterior, o referido tópico não consta em boa parte dos livros didáticos de Matemática adotados para esse segmento.

Sendo assim, para alcançarmos nosso objetivo, construímos um produto educacional (e-book) que auxilie os professores no ensino do tema, através dos sistemas de amortização mais usuais, o SAC e a Tabela Price, promovendo discussões pertinentes desse tópico na área de Educação Financeira Escolar.

O produto educacional, que é uma das possibilidades para o trabalho de conclusão do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, é definido como

um objeto de aprendizagem (por ex. pequeno livro, manual de atividades, sequência didática, software, jogo educativo, etc.) desenvolvido com base em trabalho de pesquisa científica que visa disponibilizar contribuições para a prática profissional de professores da Educação Básica, futuros professores, professores do Ensino Superior e Formadores de professores. Geralmente, o produto apresenta uma proposta de ensino ou de formação de professores que foi desenvolvida pelo(a) mestrando(a) e seu (sua) orientador(a). (PROFCIAMB, 2018, n. p.)

Nessa dissertação, o produto citado é intitulado *A Matemática dos Empréstimos & Financiamentos no Ensino Médio*. Trata-se de um livro digital, direcionado ao professor da Educação Básica, com sequências didáticas a serem reproduzidas com os alunos do Ensino Médio, em sala de aula, de forma paralela, ou não, ao material didático adotado pela escola.

Por meio das sequências didáticas propostas, os alunos serão capazes de

- fazer associações entre juros e progressões;
- identificar e generalizar padrões de PA/PG em compras parceladas;
- comparar os sistemas de amortização, analisando suas vantagens e desvantagens;
- calcular o valor de prestações, sejam elas fixas, decrescentes ou antecipadas e;

- calcular o saldo devedor ao longo do período de duração do financiamento.

Os itens acima constituem um conjunto de habilidades adequado às abordagens propostas pela BNCC concernentes à Educação Financeira. Conforme já mencionado na seção 3.1 dessa dissertação, o referido conjunto dialoga com aquelas apresentadas no Quadro 1, na seção 2.3. Ademais, tais itens têm sido pautados em questões do ENEM, em edições recentes do exame, a saber, 2015, 2017, 2018 e 2019.

O desenvolvimento dessas habilidades é respaldado na análise do professor Márcio Rodrigues, quando ele afirma que

todo sistema educacional precisa definir qual foco deve ser dado ao ensino médio: a formação cidadã, a preparação para o mercado de trabalho e/ou o ingresso na universidade. Através do desenvolvimento de competência e habilidades, a BNCC prioriza a construção da cidadania, mas também aborda, com discrição, a preparação para o ENEM e demais vestibulares (RODRIGUES, 2019).

Conforme exposições já feitas nessa dissertação, as possibilidades descritas acima por Rodrigues (2019) permitem, independentemente de qual seja o foco que a escola der ao Ensino Médio, múltiplas abordagens para Educação Financeira e, entre elas, para o tópico *Empréstimos & Financiamentos*. Nessa perspectiva, seguimos com uma descrição detalhada do nosso produto educacional.

4.3 Estruturação do material

A fim de apresentar os sistemas de amortização mais comuns, o livro traz as sequências didáticas organizadas em cinco capítulos. O Quadro 6 expõe os referidos capítulos e seus respectivos objetivos de trabalho.

Quadro 6 - Capítulos & Objetivos

Capítulo	Título	Objetivo
1	Juros & Progressões	Associar as expressões de montantes em sistemas de juros simples (ou compostos) às fórmulas de termo geral de progressões aritméticas (ou geométricas).
2	Tipos de financiamentos	Apresentar o conceito de amortização e verificar a existência de padrões por meio de progressões e recorrências em diversos processos de financiamentos.
3	Tabela Price	Identificar as progressões geométricas formadas pelos valores atualizados das parcelas pagas em atraso e calcular o valor fixo das prestações.
4	Sistema SAC	Identificar a evolução das grandezas SAC como progressões aritméticas e comparar a quitação da dívida em sistemas SAC e PRICE.
5	Recorrências	Explorar os processos de construção das funções que verificam as relações de recorrência citadas nos capítulos anteriores.

Fonte: Freitas e Moreira (2020 Adaptado)

A proposta é que todo o conteúdo seja ministrado em cinco encontros, sendo cada um deles com a duração de duas horas/aula, equivalente a um período de 90 a 120 minutos. Não obstante, o último encontro, referente ao capítulo *Recorrências*, é opcional, uma vez

que esse não se dedica exclusivamente ao contexto de Educação Financeira, mas ao estudo das funções apresentadas em capítulos anteriores. A aplicação desse capítulo é aconselhável para turmas e/ou docentes que dispõem de aulas extras para aprofundamento no tema.

Organizados em seções, cada capítulo é precedido de orientações ao professor sobre os objetivos da aula, a condução do encontro, a organização dos alunos e o tempo de duração de cada atividade.

A seguir, as descrições de cada seção.

I. *É hora de explorar!*

Seção composta por duas situações-problemas, conduzidas como um estudo dirigido, que serão usadas como detonadores da aula. Os alunos, organizados em duplas e/ou trios, terão de 20 a 30 minutos para resolverem as situações sugeridas. Nessa seção, cabem a utilização de calculadoras e o auxílio docente.

II. *Problema de pesquisa*

Essa seção traz aos alunos uma pergunta chave que interliga os problemas propostos na seção anterior. A fim de respondê-la, o professor fará a explanação do conteúdo, usando como referência as situações mencionadas. Cabe ao docente enunciar propriedades, fazer generalizações, apresentar novos exemplos e conduzir discussões próprias ao assunto tratado. Essa explanação pode ser feita num período de 20 a 30 minutos.

III. *Vamos praticar!*

Aqui são propostas quatro questões objetivas para serem feitas em sala. Trata-se de itens de autoria própria, construídos de modo semelhante aos do ENEM e de outros vestibulares, além de questões adaptadas do PROFMAT. Para a resolução dessas atividades, deve-se reservar um período de 30 minutos da aula, sendo um terço desse tempo destinado à divulgação do gabarito e devidas correções, que, por sua vez, podem detonar discussões preciosas à Educação Financeira dos participantes. As resoluções das questões constam nas últimas páginas do livro.

IV. *Ninguém me contou isso antes!*

Apresentamos nessa seção textos complementares com temáticas relevantes à Educação Financeira dos envolvidos: antecipação de parcelas, cartões de crédito, investimentos e inflação. A cada aula, o texto pode ser lido e comentado em sala, levando professor e alunos à exploração de problemas semelhantes ao tópico em pauta.

V. *“Professor(a), e se ...?”*

Essa seção é exclusiva para o docente! Ela propõe possíveis dúvidas dos estudantes sobre os assuntos abordados em cada capítulo. As perguntas registradas nessa seção foram feitas pelos alunos durante a aplicação experimental desse material e/ou propostas pelos autores.

Todas essas seções seguem detalhadas no Quadro 7.

Quadro 7 - Capítulos & Estruturas

Capítulo	E hora de explorar!	Problema de pesquisa	Vamos praticar!	Ninguém me contou isso antes!
1 - Juros & Progressões	Situações 1 e 2	<i>Dá pra associar juros e progressões?</i>	Questões 1 a 4	<i>Você sabia que temos direito a descontos ao antecipar parcelas de um financiamento?</i>
2 - Tipos de financiamentos	Situações 3 e 4	<i>Prestações fixas ou decrescentes: por que a diferença?</i>	Questões 5 a 8	<i>Crédito rotativo: um grande vilão do cartão de crédito</i>
3 - Tabela Price	Situações 5 e 6	<i>Como posso calcular o valor das prestações?</i>	Questões 9 a 12	<i>E se, ao invés de financiar um bem, escolhermos guardar o dinheiro?</i>
4 - Sistema SAC	Situações 7 e 8	<i>Quais são as vantagens do sistema SAC?</i>	Questões 13 a 16	<i>Como a inflação pode afetar um financiamento imobiliário?</i>
5 - Recorrências	Situações 9 e 10	<i>Como obter funções a partir de recorrências?</i>	Questões 16 a 20	<i>Recorrências de segunda ordem e a sequência de Fibonacci.</i>

Fonte: Freitas e Moreira (2020 Adaptado)

Conforme citado na seção 3.3 dessa dissertação, o estudo sobre Sistemas de Amortização requer saberes prévios acerca de “Juros” e “Progressões”. Os objetivos apresentados no Quadro 6, bem como o problema de pesquisa no capítulo 1 – Juros & Progressões, evidenciado no Quadro 7, ratificam esse fato. Sendo assim, à aplicação desse material, é conveniente que os estudantes detenham conhecimentos sobre

- sequências numéricas: identificação de padrões, classificação e fórmulas;
- progressões aritméticas e geométricas: razão, termo geral e soma;
- porcentagens: representações, aumentos/reduções sucessivas e inflação;
- juros simples e juros compostos: montantes, taxas equivalentes e valor futuro.

Uma vez que as escolas e redes de ensino têm a autonomia de gerir seus próprios programas, é provável que os assuntos supracitados não sejam abordados em uma mesma série do Ensino Médio, e se ainda o for, as ordens em que esses temas são trabalhados podem ser alteradas. Independente desses fatos, a utilização do nosso produto educacional permanece viável, já que ele não se destina a uma etapa específica. A aplicação do livro pode ocorrer em qualquer série, ou etapa, do Ensino Médio, contanto que os alunos já tenham tido contato com os conteúdos descritos acima.

Ao narrarmos nessa seção o processo de construção do referido produto educacional, bem como sua estruturação e as habilidades a serem desenvolvidas, cumprimos a segunda fase da Engenharia Didática: Concepção e Análise *a priori*.

4.4 Sobre a publicação

A primeira versão do produto educacional descrito nesse capítulo passou pela revisão matemática de Thulio Vilela (Matemática – Universidade Federal de Minas Gerais) e pela revisão técnica de Luiz Henrique Oliveira (Letras – CEFET-MG). Enquanto a primeira revisão aconteceu à medida que o livro era produzido, a segunda ocorreu entre as duas aplicações do produto educacional.

Na data de edição dessa dissertação de mestrado, o referido produto se encontrava em processo de publicação pela Sociedade Brasileira de Matemática – SBM. Algumas alterações foram necessárias a esse processo, ora para adequar o texto às especificações do *layout* da editora ora a fim de se atender demandas outrora não contempladas na versão preliminar.

Uma vez que o produto será apresentado em forma de livro, e não apostila, as sequências didáticas, antes propostas em módulos, passam a ser tratadas como capítulos, mantendo os objetivos e as estruturas já apresentados nos Quadros 6 e 7, na seção anterior. Quanto aos títulos das seções *Ninguém me contou isso antes!* e *“Professor(a), e se ...?”*, esses resultam de modificações necessárias a fim de se evitar regionalismos e de adequar os textos às questões de gênero, conforme recomendações da referida editora. Antes disso, tais seções eram nomeadas como *Por que ninguém me contou isso antes?* e *“Fessô, e se ...?”*, respectivamente. Esses títulos figuram nos textos de Freitas e Moreira (2020; 2021a; 2021b), anteriores ao processo de publicação.

Por outro lado, destacamos os acréscimos aos textos das seções *Problema de pesquisa*. Ao longo das explanações, adicionamos possibilidades de reforçar a aprendizagem por meio do uso de planilhas eletrônicas, aplicáveis na resolução das situações introdutórias de cada capítulo, nas seções *É hora de explorar!*, e nas questões de fixação, em *Vamos Praticar!*. Nesse caso, tais possibilidades são opções para docentes que atuam em escolas equipadas com recursos computacionais em sala de aula e/ou laboratórios de informática, ou ainda, para alunos que tenham fácil acesso aos softwares indicados (ou similares) em suas residências. Tais acréscimos se assemelham às propostas de Araújo (2013), Oliveira (2013) e Sousa (2015), apresentadas no processo fichamento de Freitas *et al* (2021), referenciado na seção 3.3.1 dessa dissertação.

O produto educacional passa a contar também com um apêndice, no qual apresentamos um breve relato sobre as aplicações experimentais do material e a validação desse, respaldada nas competências da BNCC e nos objetivos de aprendizagem da Taxonomia de Bloom. Tais relatos, já publicados por Freitas e Moreira (2021a; 2021b),

figuram nos próximos capítulos dessa dissertação, cumprindo as próximas etapas da Engenharia Didática.

Sob o título *A Matemática dos Empréstimos & Financiamentos no Ensino Médio*, o livro, em versão digital, está disponível no site da Sociedade Brasileira de Matemática – SBM, com download gratuito a todos os interessados por meio do link https://sbm.org.br/wp-content/uploads/2021/11/A_Matematica_dos_Emprestimos_e_Financiamentos.pdf.

5 ASPECTOS METODOLÓGICOS DA PESQUISA

O presente capítulo se destina primeiramente à apresentação da Engenharia Didática, metodologia que alicerçou a construção dessa dissertação. Introduzida por Artigue (1996, *apud* PAIS, 2019), tal metodologia norteia a construção e a validação de situações didáticas.

As fases que compõem a Engenharia Didática, já enunciadas na introdução e mencionadas em capítulos anteriores dessa dissertação, serão especificadas na próxima seção. Além disso, nos itens seguintes, o capítulo traz a descrição dos cenários de aplicação do produto educacional e dos critérios adotados na metodologia construída para análise e validação do mesmo.

5.1 A Engenharia Didática

Nas palavras de Pais (2019, p. 97), a nomenclatura Engenharia Didática é “uma analogia entre o trabalho do pesquisador em didática e o trabalho do engenheiro, no que diz respeito à concepção, planejamento e execução de um projeto”. Assim como o engenheiro, o educador precisa se valer do conhecimento científico na elaboração e na execução de projetos, ou situações didáticas, tendo como validador a comparação entre as expectativas e os resultados obtidos. Tal analogia é proposta por Artigue (1996, *apud* PAIS, 2019), no contexto dos estudos da Didática da Matemática na tradição francesa.

Trata-se de uma metodologia que visa desenvolver, efetivar, ponderar e examinar situações didáticas, sendo útil tanto na produção para o ensino quanto como metodologia de pesquisa qualitativa. A Engenharia Didática compreende quatro etapas: Estudo preliminar (i); Concepção e Análise *a priori* (ii); Execução (iii); e Análise *a posteriori* e Validação (iv). Para descrever cada uma dessas etapas, recorreremos aos estudos de Pais (2019), Guimaraes *et al* (2015), Almouloud e Coutinho (2008) e Machado (2007).

Em (i), o pesquisador deve considerar os saberes prévios e as dificuldades dos estudantes sobre o objeto de pesquisa, além do contexto científico e dos materiais didáticos disponíveis. Já em (ii), temos a descrição das situações didáticas, concebidas em perspectivas microdidáticas, e das predições de possíveis ocorrências durante sua execução, em ambientes macrodidáticos.

Quanto à fase (iii), essa se destina à realização da engenharia, alterando a rotina da sala de aula. Nessa fase, os registros das observações devem ser cuidadosos, uma vez que servirão para testar as hipóteses formuladas e para fazer mudanças de percursos, se necessárias. Já em (iv), ocorre o tratamento das informações obtidas em (iii), que devem ser confrontadas com as hipóteses levantadas em (ii). Essas comparações visam à validação da sequência didática, permitindo estimar sua reprodutibilidade e a regularidade dos fenômenos didáticos identificados.

Conforme anunciado na introdução dessa dissertação, a fase (i), de Estudo Preliminar, consiste nos estudos sobre Educação Financeira e Sistemas de Amortização, apresentados nos capítulos 2 e 3. Nesses, destacaram-se a necessidade de trabalhar o tópico *Empréstimos & Financiamentos* à luz da Educação Financeira e a possibilidade do mesmo ser abordado a partir de conteúdos matemáticos próprios da sala de aula do Ensino Médio. A fase (ii), de Concepção e Análise *a priori*, foi tratada no capítulo 4, no qual descrevemos o processo de construção do nosso produto educacional, destacando as habilidades a serem desenvolvidas em sala de aula e a estrutura detalhada do material.

Já no presente capítulo, referenciaremos a fase (iii), a etapa de Execução, discorrendo, nas seções a seguir, sobre as duas aplicações do produto educacional, bem como sobre as adequações necessárias, visto que ambas ocorreram em ambientes de ensino remoto, à época do isolamento social imposto pela disseminação da COVID-19. Encerrando o capítulo, elencamos as competências da BNCC e os objetivos de aprendizagem da Taxonomia de Bloom que foram usados como critérios balizadores à análise do material. Descrita no capítulo 6, tal análise objetiva a validação do livro, cumprindo a fase (iv) da Engenharia Didática, a saber, Análise *a posteriori* e Validação.

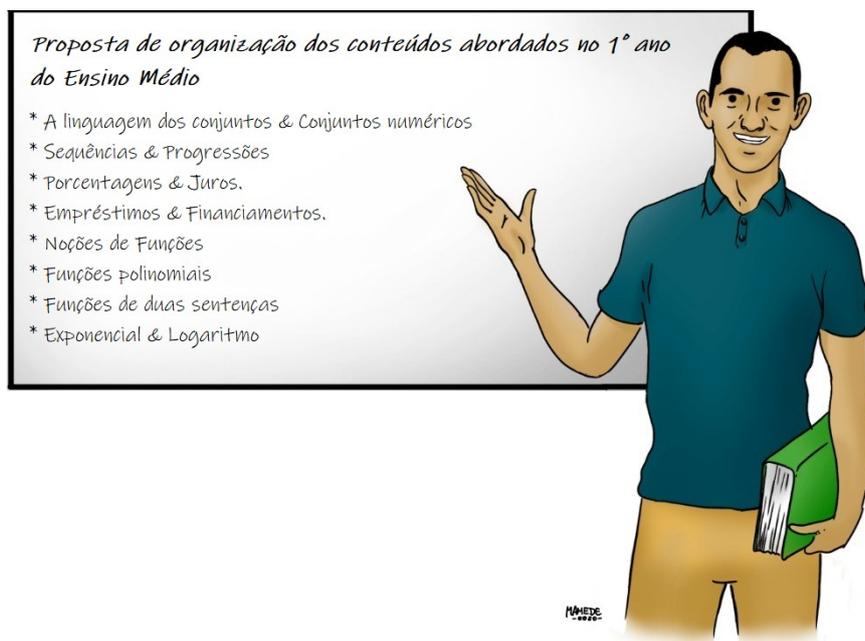
De acordo com o que foi exposto, são descritos nos dois próximos itens os cenários de aplicação para o produto educacional.

5.2 Sobre a primeira aplicação

5.2.1 Proposta de ensino

A primeira aplicação do produto educacional aconteceu em julho de 2020, em uma turma de primeiro ano do Ensino Médio, na qual o mestrando era o professor de Matemática. Apesar do foco dessa pesquisa não incidir sobre a ordenação dos conteúdos ministrados no Ensino Médio, é válido mencionar que a organização dos tópicos ministrados para esse grupo, no referido ano letivo, seguia uma proposta de ensino elaborada pelo docente, mostrada na Figura 5.

Figura 5 – Proposta de Ensino 1ºEM



Fonte: Elaborado pelo autor (2021)

Conforme observado na Figura 5, os tópicos *Sequências & Progressões* e *Porcentagens & Juros* precedem à apresentação de um conteúdo inédito nesse segmento, *Empréstimos & Financiamentos*, que é o objeto da nossa pesquisa. Além disso, esses tópicos serviriam como pré-requisitos ao ensino dos assuntos seguintes, relacionados às *Funções*.

No ensino de *Sequências & Progressões*, os alunos desenvolvem a habilidade de identificar padrões numéricos (H2) e de generalizá-los através de equações (H19)⁸. Uma vez que, entre as variáveis dessas equações, existem relações de dependência, temos então a introdução ao conceito de função. Essa associação entre as ideias de progressões e funções figura também em habilidades da BNCC, a saber, EM13MAT507/508⁹.

Fato semelhante ocorre no ensino de *Porcentagens & Juros*, quando, na análise dos montantes gerados por juros simples e por juros compostos, são identificadas progressões

⁸ Habilidades presentes na matriz de referência do ENEM (BRASIL, 2009, p. 5-6).

(H2) Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem.

(H19) Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.

⁹ Habilidades presentes na BNCC (BRASIL, 2018, p. 541).

(EM13MAT507/508) Identificar e associar progressões aritméticas/geométricas (PA/PG) a funções afins/exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.

aritméticas e geométricas, respectivamente. As fórmulas de termo geral para progressões, bem como as fórmulas de montante para juros, estão listadas no Quadro 8.

Quadro 8 - Progressões & Juros

Fórmulas para progressões e juros	
Termo geral de uma PA	$a_n = a_1 + r \cdot (n - 1)$
Termo geral de uma PG	$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$
Montante em Juros Simples	$M = C \cdot (1 + it)$
Montante em Juros compostos	$M = C \cdot (1 + i)^t$

Fonte: Elaborado pelo autor (2021)

A partir dessas percepções, os estudantes passam a interpretar as fórmulas exibidas no Quadro 8 como relações em que as variáveis a_n e M são dadas em função de um natural n ou de um racional t , respectivamente. Daí é só expandir essas relações para variáveis reais, em contextos diversos.

O fato de abordar *Funções* após *Sequências & Progressões e Porcentagens & Juros* caracteriza uma proposta que abre possibilidades para discussões mais amplas, bem como a produção de material didático, para o primeiro ano do Ensino Médio, que contemple essa nova ordenação. A produção do referido material didático, bem como as discussões intrínsecas, são temas para pesquisas futuras.

5.2.2 Adequações à Pandemia do COVID-19

A aplicação mencionada na subseção anterior ocorreu em uma escola privada que atende alunos de todos os segmentos da Educação Básica na região norte de Belo Horizonte – MG. A escolha dessa escola deveu-se ao vínculo empregatício¹⁰ do autor com a instituição e também à autonomia concedida ao mesmo pela coordenação e direção pedagógica para a execução do projeto nas turmas do Ensino Médio.

Objetivando usar o produto educacional em 2020, o plano de curso para o primeiro ano do Ensino Médio foi concebido conforme a proposta de ensino mencionada na subseção anterior. Esse plano seria cumprido numa carga horária de 4 aulas semanais, com 50 minutos de duração, sendo duas delas geminadas na tardes de segunda feira.

Nesses termos, os 29 alunos matriculados nessa turma tiveram aula, de fevereiro a junho de 2020, sobre os seguintes assuntos.

- representações e operações em conjuntos numéricos, dos naturais aos reais;

¹⁰ Nessa escola, o autor lecionou para os alunos do Ensino Médio de 2014 a 2020.

- classificações de conjuntos, relações de pertinência e inclusão, representações, operações e problemas entre conjuntos, intervalos;
- identificação de padrões numéricos, classificações de sequências numéricas, construção e interpretação de fórmulas de termo geral, soma finita e infinita;
- definição de recorrências, bem como interpretação e construção;
- representações de porcentagens, lucro e prejuízo, aumentos e reduções sucessivas, inflação e câmbio financeiro;
- fórmulas de juros simples e juros compostos, taxas equivalentes e valor futuro.

Diante disso, a previsão era de que a aplicação do objeto de aprendizagem ocorresse nas aulas geminadas de segunda-feira, em junho do referido ano, sendo um capítulo abordado em cada semana. As aulas seriam conduzidas conforme a estrutura mostrada no Quadro 7, na seção 4.3 dessa dissertação.

No entanto, o formato das aulas foi alterado devido à suspensão das aulas imposta pela disseminação do COVID-19. Na ocasião, em março de 2020, para conter a disseminação do coronavírus por todo o país, autoridades municipais, estaduais e federais decretaram o fechamento de escolas, igrejas, comércios e outros serviços, então considerados não essenciais. À população foi recomendado o isolamento social e, em casos de necessidade, os indivíduos deveriam sair de suas casas devidamente protegidos, com máscaras faciais e higienizados constantemente com álcool em gel, além de considerarem o distanciamento de dois metros uns dos outros.

Em Belo Horizonte – MG, a reabertura de comércios e serviços ocorreu de forma gradativa ao longo do segundo semestre de 2020. Em contrapartida, os alunos só retornaram às salas de aula em 2021. Durante esse período, a fim de que o ano letivo não fosse comprometido, escolas privadas adaptaram forçosamente as aulas ao ambiente remoto a partir de abril de 2020. No Ensino Médio, tal modalidade perdurou até agosto do ano subsequente, quando as escolas foram autorizadas a reabrir, respeitando inúmeros protocolos sanitários.

Nesse cenário, a utilização do produto educacional ocorreu de forma distinta à proposta inicial. No período de março até o fim do ano letivo, as aulas presenciais passaram a ser ministradas em ambientes virtuais: ora aulas gravadas (*offline*) e disponibilizadas nas redes sociais oficiais da instituição (Youtube/Instagram), ora aulas *online* por meio de videoconferências (*Google Meet*).

Apesar dessa suspensão não alterar o cumprimento do plano de curso, foi necessário adequar o referido produto a um novo modelo de aplicação, a ser executado no período de 25/06 a 13/07. A seguir, as principais adaptações.

- Seriam necessários 6 encontros virtuais de 60 minutos.
- No primeiro encontro, em 25/06, haveria a apresentação do projeto aos alunos, bem como das estruturas de cada capítulo, do método de condução das aulas e também do processo de avaliação, tais como presença/participação e postagem de atividades na plataforma *Google Classroom*.
- Os encontros seguintes seriam destinados à exposição dos capítulos 1, 2, 3 e 4. Para cada aula, os alunos deveriam resolver previamente as atividades introdutórias de cada capítulo, na seção *É hora de explorar!*. As dúvidas na resolução dessas atividades seriam os detonadores da apresentação dos problemas de pesquisa.
- Ao fim de cada encontro, os alunos receberiam, como tarefa extra-classe, as atividades da seção *Vamos Praticar!* e a leitura dos textos complementares da seção *Ninguém me contou isso antes!*. O último encontro, em 13/07, teria como objetivo a correção dessas tarefas.
- Uma vez que o assunto *Recorrências* já havia sido trabalhado junto ao tópico *Progressões*, o capítulo 5 - *Recorrências* não foi utilizado nessa aplicação.

Comentários sobre essa aplicação e suas contribuições para a finalização do produto educacional serão apresentados no capítulo 6 dessa dissertação.

5.3 Sobre a segunda aplicação

Uma segunda aplicação ocorreu em outubro e novembro de 2020, com 22 alunos de terceiro ano do Ensino Médio. Desta vez, tratava-se de uma escola privada da região Oeste de Belo Horizonte – MG, na qual o mestrando atuava como professor do Ensino Médio desde 2012. A escolha desses estudantes se justifica pela curiosidade que os mesmos mostraram pelo assunto após testemunharem um diálogo entre o mestrando e outro docente da turma sobre o desenvolvimento dessa pesquisa. Desse diálogo, se seguiu uma breve apresentação da pesquisa aos alunos e também do material produzido que, a pedido dos mesmos, lhes foi aplicado.

É importante ressaltar a autorização e o incentivo da coordenação pedagógica da instituição para a utilização do material, visto a relevância do tema proposto para jovens que estão às portas do mercado de trabalho e/ou da vida universitária. A expectativa para

essa segunda aplicação era de que, dado o perfil do público em questão, teríamos uma participação mais intensa dos alunos e perguntas mais consistentes, em relação aos primeiros participantes. Nesse contexto, o objetivo foi testar a versão atualizada do livro, cujas adequações foram feitas a partir das críticas e sugestões dos discentes que participaram da primeira aplicação.

Devido à extensão do período de isolamento social imposto pela pandemia do coronavírus, as aulas nessa turma também ocorreram em ambientes virtuais, através de plataformas de videoconferências (*Zoom*) e de gerenciamento de atividades (*Google Classroom*). Os encontros virtuais pelo *Zoom* ocorreram as terças e quartas-feiras, com duração de 100 e 50 minutos, respectivamente. Nessas condições, os capítulos foram trabalhados nas aulas de terça-feira, no período de 27/10 a 24/11, precedidos por uma aula para a apresentação do projeto, em 21/10.

De forma semelhante à primeira aplicação, o primeiro encontro destinou-se à apresentação do projeto aos alunos, bem como da estruturação do material, da condução das aulas e do processo de avaliação. As demais datas seriam reservadas ao desenvolvimento dos quatro primeiros capítulos. Devido à indisponibilidade de horários para novos encontros, o capítulo opcional *Recorrências* não seria abordado.

Com aulas de 100 minutos de duração, os trabalhos com cada capítulo seguiriam os moldes da proposta original, citada na seção 4.3 dessa dissertação. A única adequação necessária a essa aplicação foi à seção *É hora de explorar!*, cujas atividades foram executadas pelos alunos de forma individual durante o encontro, mas com o auxílio do professor.

Os relatos e as observações quanto à segunda aplicação também serão apresentados no capítulo 6.

Ainda no presente capítulo, a seção seguinte descreve os critérios que foram utilizados para análise do produto educacional, após sua aplicação.

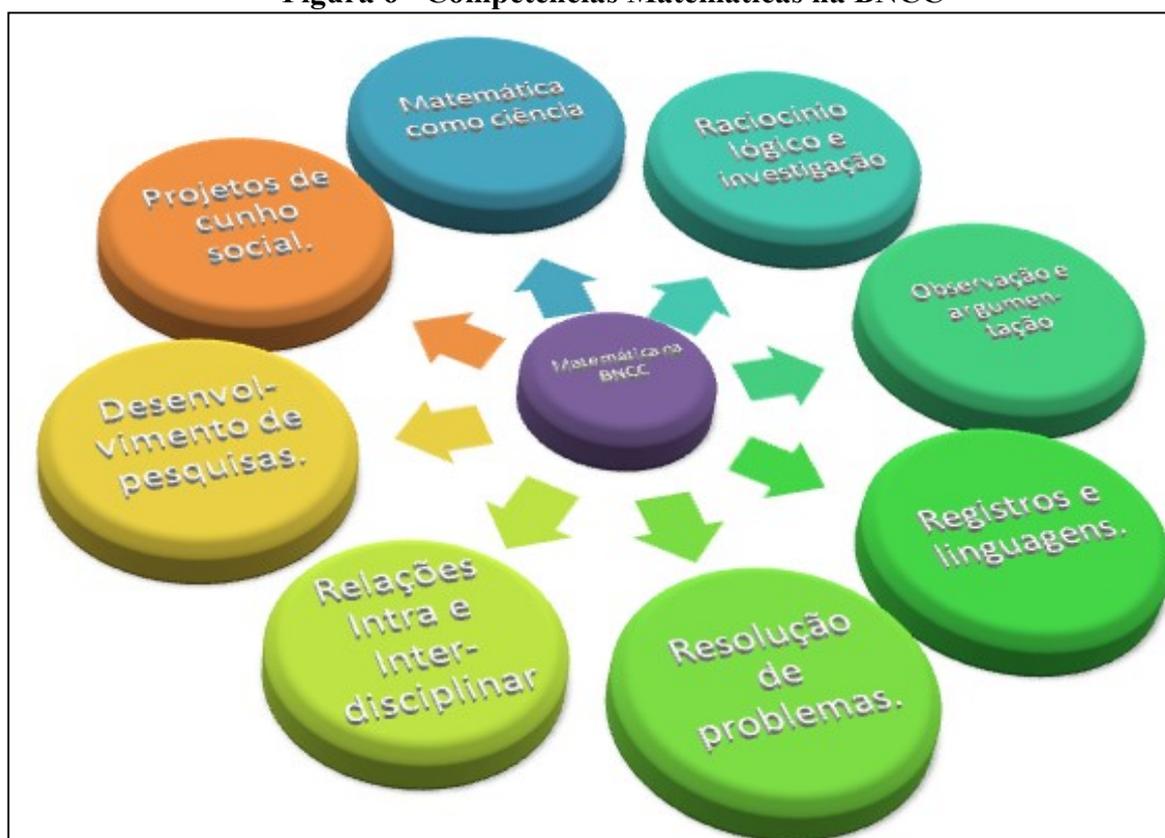
5.4 Metodologia de Análise

Para avaliar o produto educacional, evocamos novamente as etapas da Engenharia Didática (ED), descritas no início desse capítulo: Estudo preliminar (i); Concepção e Análise *a priori* (ii); Execução (iii); e Análise *a posteriori* e Validação (iv).

Os estudos sobre Educação Financeira e sobre Sistemas de Amortização, nos capítulos 2 e 3 dessa dissertação, compuseram a etapa (i) da ED. Quanto à fase seguinte, o capítulo 4 versou sobre a criação do produto educacional e os objetivos delineados para alcançar o objetivo do trabalho. Enquanto a aplicação do material, narrada no presente capítulo, caracteriza a etapa (iii), a avaliação do livro, correspondente à última fase da ED, se dará no capítulo 6, a partir de análises das competências da BNCC e dos objetivos educacionais da Taxonomia de Bloom. Sendo assim, seguem as descrições dos critérios adotados para as referidas análises.

Quanto às competências da BNCC, referenciamos as competências específicas para a área *Matemática e suas Tecnologias*, já citadas na seção 2.3 dessa dissertação. Nessa pesquisa, o desenvolvimento e a consolidação dessas competências, listadas resumidamente na Figura 6, constituem critérios de avaliação do produto educacional.

Figura 6 - Competências Matemáticas na BNCC

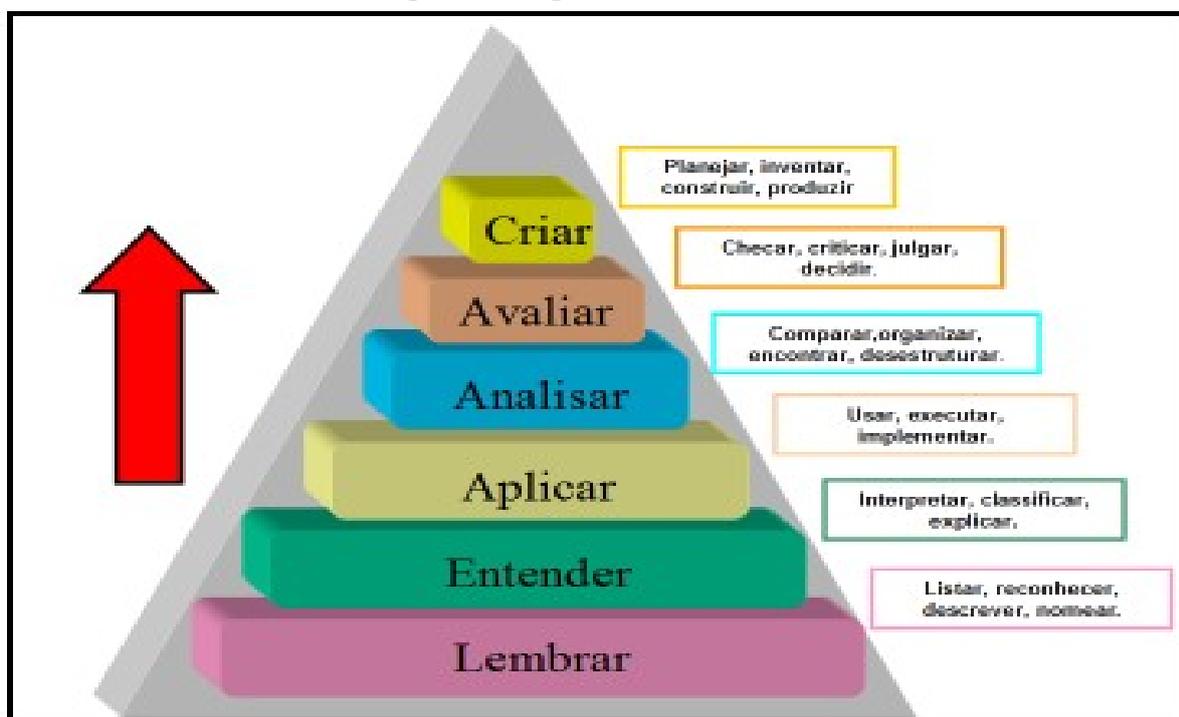


Fonte: Freitas e Moreira (2021a)

No capítulo dedicado à *Análise a posteriori* e Validação, quarta e última fase da Engenharia Didática, a consolidação, total ou parcial, das competências listadas na Figura 6 serão tabuladas na intenção de analisar se o produto contempla tais competências.

No tocante à Taxonomia de Bloom, trata-se de um sistema de classificação de objetivos de aprendizagens formulado por um grupo de pesquisa coordenado por Benjamin Bloom, em 1956, e revisado em 2002 por seu colaborador David R. Krathwohl. Segundo estudos de Bezerra Júnior (2016), tal classificação compreende três eixos: cognitivo, afetivo e psicomotor, dentre os quais destacamos o primeiro. Dentro do eixo cognitivo são abordados os objetivos referentes à memorização e à evolução das habilidades intelectuais. Tais objetivos são apresentados na Figura 7.

Figura 7 - A pirâmide de Bloom



Fonte: Gouveia (2018. n.p.)

Dentro do eixo cognitivo da Taxonomia de Bloom, os objetivos de aprendizagem são classificados a partir dos mais simples, registrados na base da pirâmide, na Figura 7. Segundo Mello *et al* (2019), os primeiros níveis, “Lembrar” e “Entender”, constituem a fase de aquisição de conhecimento, referenciando a capacidade de memorização e de compreensão do que está sendo ensinado. Os próximos níveis exigirão do aprendiz o desenvolvimento do pensamento crítico em duas fases distintas: a aplicação e a criação de conhecimento. Enquanto a fase de aplicação compreende as etapas “Aplicar” e “Analisar”, a fase de criação de conhecimento contempla os níveis superiores da construção, a saber, “Avaliar” e “Criar”.

Temos então, na Figura 7, um sistema que descreve a evolução do conhecimento em etapas, às quais se associam um conjunto de verbos cognitivos. Esses verbos, que também aparecem como comandos nas habilidades descritas na BNCC, denotam o grau de dificuldade atribuído ao conhecimento que está sendo avaliado.

Nesses termos, a Taxonomia de Bloom é uma ferramenta eficaz como suporte à organização e à análise dos objetivos educacionais dos currículos e das avaliações. Lembrando que, conforme Muniz (2020), avaliar é um processo que vai além da prova escrita, podendo compreender itens como participação do aluno em sala de aula, arguições, exercícios de fixação, trabalhos feitos em sala de aula e em casa. Nesse sentido, a evolução dos objetivos de aprendizagem será usada como critério para análise das sequências didáticas propostas em nosso produto educacional.

Dadas essas exposições, os textos do próximo capítulo visam à avaliação do nosso produto educacional, à luz dos critérios citados nessa seção.

6 AVALIAÇÃO DO PRODUTO EDUCACIONAL

6.1 Observações sobre as aplicações

O produto educacional em pauta nessa pesquisa foi aplicado em duas escolas privadas de Belo Horizonte – MG, nas quais o mestrando, atuando como professor vinculado a essas, tinha autonomia para o desenvolvimento da pesquisa. Nas ocasiões, esperava-se testar as atividades propostas nas seções *É hora de explorar!* e *Vamos Praticar!*; verificar se eram suficientes os tempos indicados na seção de orientações ao docente, no início de cada capítulo; registrar novas perguntas para as seções “*Professor(a), e se...?*”; e acrescentar dicas e/ou sugestões aos docentes a respeito das conduções dessas atividades.

Seguindo as adequações listadas no capítulo anterior, a primeira aplicação do nosso produto educacional ocorreu em 2020, numa turma de primeiro ano (1ºEM – Região Norte), entre os dias 25/06 e 13/07, com público médio de 10 alunos. Quanto à segunda aplicação, as datas compreendem o período 21/10 a 24/11, com uma média de 20 alunos do terceiro ano (3ºEM – Região Oeste). Em ambas as turmas, os participantes interagiram em ambientes virtuais, através de áudios e mensagens de texto.

Na aula de apresentação do projeto, em ambas as turmas, os presentes foram incitados a comparar o preço à vista de um automóvel com o valor total a ser pago por esse mesmo veículo em um financiamento, tal como na história apresentada na introdução dessa dissertação. Os alunos se surpreenderam com os montantes calculados e perceberam que, mesmo mediante taxas de juros aparentemente baixas, o total das prestações pode alcançar cifras exorbitantes, próximas ao valor duplicado do bem. Na ocasião, alguns estudantes comentaram ser melhor poupar para comprar à vista, enquanto outros sugeriram que se pesquisassem melhores opções de financiamento. Tais sugestões foram usadas como referências para as aulas seguintes. Outro fator que impressionou alunos de ambas as escolas foi a ausência de tópicos que abordassem o assunto no material didático que eles utilizavam.

Quanto às atividades da seção *É hora de explorar!*, foi perceptível a dificuldade dos estudantes do 1ºEM ao desenvolvê-las individualmente, em casa, e sem o auxílio do professor. Vale lembrar que os itens dessa seção foram concebidos visando o desenvolvimento na sala de aula, em duplas/trios e com o auxílio docente. Contudo, as dúvidas que os alunos manifestaram no ambiente virtual foram semelhantes às esperadas para as aulas presenciais. Dificuldades menores ocorreram no 3ºEM, porém contornadas com facilidade, visto que as situações didáticas propostas eram conduzidas durante o encontro virtual. Ademais, fatores como idade, autonomia, tempo de escolarização e familiaridade com mais conteúdos de Matemática podem ser apontados como possíveis justificativas para o fato de as dificuldades apresentadas pelos estudantes do 3ºEM serem menores, em relação aos estudantes do 1ºEM.

Em ambas as turmas, fez-se necessária a correção das situações propostas em *É hora de explorar!*. Tal correção foi conduzida com objetivos de sanar as dúvidas expostas pelos discentes e de apresentar o *Problema de Pesquisa*, detonando a explanação do conteúdo de cada capítulo. No 1ºEM, essa explanação ocorreu conforme a proposta descrita na seção 4.3 dessa dissertação. Já no 3ºEM, as correções demandaram um período maior que o estipulado. Nesse caso, na intenção de adequar esse tempo à proposta inicial, os capítulos 3 - Tabela Price e 4 - Sistema SAC foram explanados sucintamente, usando apenas as correções das referidas atividades.

Quanto à seção *Vamos Praticar!*, os itens foram deixados como tarefas de casa aos estudantes do 1ºEM, que usaram o último encontro, em 13/07, para correção das atividades. Na ocasião, atendendo aos pedidos dos alunos presentes, foram corrigidas apenas duas questões: uma sobre prestações decrescentes em PA e outra sobre o uso da fórmula de Tabela Price em financiamentos com entrada. Já no 3ºEM, apenas os exercícios do capítulo 1 - Juros & Progressões fluíram conforme as orientações contidas no material. Nos demais capítulos, em virtude do tempo gasto na seção *É hora de explorar!*, foram feitas apenas dois itens de cada sequência didática.

Embora a redução do tempo possa se configurar como um fator comprometedor no desenvolvimento dos capítulos 3 - Tabela Price e 4 - Sistema SAC, no 3ºEM, as discussões promovidas ao longo das seções *É hora de explorar!*, *Problema de Pesquisa* e *Vamos Praticar!* evidenciaram o interesse e o envolvimento dos estudantes em relação aos

assuntos tratados. De tais evidências, bem como da perspectiva do professor da turma, consideramos atingidos os objetivos traçados para esses capítulos.

A leitura dos textos da seção *Ninguém me contou isso antes!* foi recomendada como tarefa de casa a todos os participantes. No 1ºEM, boa parte do último encontro foi dedicada a comentar esses textos, levando professor e alunos a uma rica discussão sobre a situação econômica do brasileiro em tempos de pandemia. Quanto ao 3ºEM, uma má administração do tempo, já mencionada anteriormente, nos privou de comentários semelhantes. Em contrapartida, discussões intrínsecas aos itens das seções anteriores contribuíram à Educação Financeira desses estudantes.

Entre as discussões apontadas no parágrafo anterior, salientamos o debate sobre os juros abusivos cobrados no cartão de crédito, a partir de itens da seção *É hora de explorar!*, no capítulo 3 – Tabela Price. Na ocasião, vários alunos não sabiam sobre as diferenças entre os pagamentos integral, rotativo e parcelado. Ainda sobre cartões e compras parceladas, em um item específico da seção *Vamos Praticar!*, no capítulo 4 – Sistema SAC, os participantes perceberam vantagens e desvantagens no uso do cartão da loja, em relação aos demais cartões, além de identificar equívocos nos anúncios de compras virtuais, quanto ao preço à vista.

Os alunos encerraram sua participação nesse projeto fazendo críticas e sugestões à utilização do produto educacional, especialmente em aulas virtuais. Entre as sugestões, destacamos a necessidade de um aumento no tempo de aula destinada a cada capítulo, caso a aplicação ocorra em ambientes remotos. As referidas aplicações também foram úteis para adequações no material, tais como inserir novas instruções para o professor e novas perguntas na seção *“Professor(a), e se ...?”*.

Ainda sobre as contribuições decorrentes das aplicações, destacamos a reformulação de um item da seção *Vamos Praticar!*, no capítulo 1 - Juros e Progressões. Tratava-se de uma questão objetiva sobre o tempo necessário para se atingir determinado montante em um regime de juros simples, contextualizada ao universo dos fundos de investimentos de renda fixa. Uma aluna, familiarizada com tal contexto, questionou sobre a incidência de juros simples (ou de juros compostos) nessa modalidade, uma vez que ela entendia que a principal característica em investimentos de renda fixa era a constância na taxa de juros e não nos valores absolutos dos rendimentos mensais, conforme proposições do texto

original. Diante desse questionamento, e de pesquisas posteriores com profissionais da área, o item foi reformulado e já se apresenta com textos e números adequados à realidade vigente.

Dados esses relatos, seguem nas próximas seções a análise do produto educacional, após sua aplicação, tendo como critérios as competências da BNCC e os objetivos educacionais da Taxonomia de Bloom, ambos descritos na seção 5.4 dessa dissertação.

6.2 Análise à luz das competências da BNCC

Citadas na seção 2.3, as competências apontadas pela BNCC para a área *Matemática e suas tecnologias* compõem um conjunto de processos matemáticos, por meio dos quais as unidades temáticas (números, álgebra, geometria, grandezas/medidas, probabilidade/estatística) e as ideias fundamentais (equivalência, ordem, proporcionalidade, interdependência, representação, variação e aproximação) se articulam entre si.

Nesse sentido, a proposta da presente seção é apontar como tais competências figuram em nosso produto educacional. Para isso, retomemos a lista de competências apresentada no capítulo anterior (Figura 6), codificadas sob a forma C.E.Mat. - Competência Específica de Matemática:

- C.E.Mat.1 - Raciocínio lógico e Investigação;
- C.E.Mat.2 - Observação e Argumentação;
- C.E.Mat.3 - Registros e Linguagens;
- C.E.Mat.4 - Resolução de Problemas;
- C.E.Mat.5 - Relações Intra/Interdisciplinar;
- C.E.Mat.6 - Desenvolvimento de Pesquisas;
- C.E.Mat.7 - Projetos de Cunho Social e
- C.E.Mat.8 - Matemática como Ciência.

Conforme as descrições contidas capítulo 4 dessa dissertação, cada sequência didática apresentada no material se inicia com duas situações introdutórias, conduzidas como um estudo dirigido na seção *É hora de explorar!*. A partir da leitura dos enunciados propostos, os estudantes devem usar conhecimentos numéricos para completar tabelas e identificar possíveis padrões nessas. Para tanto, exige-se do participante a competência C.E.Mat.1 - Raciocínio lógico e Investigação, uma vez que o preenchimento da tabela

segue uma ordenação lógica de operações e a identificação de padrões é baseada na análise de seqüências numéricas. Daí, os padrões devem ser descritos em linguagem textual e algébrica, evocando a competência C.E.Mat.3 - Registros e Linguagens.

Os conhecimentos necessários ao preenchimento das tabelas, à identificação e ao registro de padrões permeiam os conteúdos *Porcentagens & Juros, Sequências & Progressões e Equações & Funções*. Uma vez que esses tópicos podem ser trabalhados a partir de unidades temáticas distintas (*Números, Álgebra e Grandezas/Medidas*), temos o caráter intradisciplinar da Matemática, endossando o desenvolvimento parcial da competência C.E.Mat.5 - Relações Intra/Interdisciplinar. A parcialidade se justifica pela ausência de trabalhos em perspectivas interdisciplinares no material analisado.

A linguagem algébrica usada para registrar os padrões identificados nas tabelas dá origem a funções que descrevem a dependência entre grandezas financeiras e temporais. Os estudantes são orientados a testar a validade dessas relações a partir dos números já registrados e aplicá-las na obtenção de novos valores, passíveis de análises e comparações. Os atos de analisar as cifras obtidas e de registrar as conclusões sobre essas ao final de cada situação consolidam a capacidade de observação e argumentação dos alunos, referenciando a competência C.E.Mat.2 - Observação e Argumentação.

Ainda sobre a validade das funções obtidas, as verificações, com o devido rigor matemático, ficam sob a responsabilidade do professor, na explanação do *Problema de pesquisa*. Tais averiguações, aliadas à investigação e à generalização, ajudam o estudante a enxergar o caráter científico da Matemática, ratificando a competência C.E.Mat.8 - Matemática como Ciência. Para isso, é válido resgatar o que os alunos compreendem por conhecimento científico, evocando também os textos de Fonseca (2002), que define a Ciência como

(...) uma forma particular de conhecer mundo. É o saber produzido através do raciocínio lógico associado à experimentação prática. Caracteriza-se por um conjunto de modelos de observação, identificação, descrição, investigação experimental e explanação teórica de fenômenos. O método científico envolve técnicas exatas, objetivas e sistemáticas. Regras fixas para a formação de conceitos, para a condução de observações, para a realização de experimentos e para a validação de hipóteses explicativas. O objetivo básico da ciência não é o de descobrir verdades ou de se constituir como uma compreensão plena da realidade. **Deseja fornecer um conhecimento provisório, que facilite a interação com o mundo, possibilitando previsões confiáveis sobre acontecimentos futuros e**

indicar mecanismos de controle que possibilitem uma intervenção sobre eles. (FONSECA, 2002, p. 11, grifo nosso)

Na citação acima, associamos ao grifo destacado as competências C.E.Mat.4 - Resolução de Problemas, C.E.Mat.6 - Desenvolvimento de Pesquisas e C.E.Mat.7 - Projetos de cunho social.

Contribuindo para o desenvolvimento da competência C.E.Mat.4 - Resolução de Problemas, as atividades que compõem a seção *Vamos praticar!* são problemas contextualizados a situações corriqueiras no cotidiano financeiro - compras parceladas, pagamento de prestações, prazos, rendimentos, juros e inflação – cujas soluções se respaldam no conhecimento adquirido nas seções anteriores. Ademais, tais assuntos são ampliados nos textos da seção *Ninguém me contou isso antes!*, que relacionam o conhecimento adquirido a informações/instruções úteis à Educação Financeira dos participantes.

Nesse sentido, vale lembrar que, ao abordar temas como antecipação de parcelas, cartões de crédito, investimentos e inflação, os textos da seção supracitada contribuem com a inserção dos estudantes no universo do dinheiro e com a compreensão desses sobre finanças e economia. Trata-se de uma abordagem em acordo com a Educação Financeira Escolar, mencionada na seção 2.2 dessa dissertação, que visa tornar o indivíduo apto “a analisar, fazer julgamentos fundamentados, tomar decisões e ter posições críticas sobre questões financeiras que envolvam sua vida pessoal, familiar e da sociedade em que vivem” (SILVA; POWELL, 2013, p. 12). Nessas condições, caracterizamos o produto educacional como parte de um projeto de cunho social, ratificando a competência C.E.Mat.7 - Projetos de cunho social.

Além disso, por se tratar de uma sugestão sobre como abordar os sistemas de amortização na sala de aula do Ensino Médio, nosso material não esgota o tópico *Empréstimos & Financiamentos*. Nesse sentido, questionamentos diversos surgirão ao longo de sua utilização, ora por parte de docentes, buscando formação profissional acerca do assunto, ora por parte dos estudantes, durante as aulas sobre o tema. Algumas dúvidas, já registradas na seção “*Professor(a), e se ...?*”, apontam para a necessidade de novas pesquisas, configurando o referido produto como detonador da competência C.E.Mat.6 - Desenvolvimento de Pesquisas.

A análise descrita nos parágrafos dessa subseção é apresentada resumidamente no Quadro 9, construído a partir das seções que compõem cada sequência didática (capítulo) proposta em nosso material e das competências da BNCC que podem ser desenvolvidas, total ou parcialmente, nessas seções.

Quadro 9 - Competências BNCC & Produto Educacional

Seção	Competência BNCC	Código
<i>É hora de explorar!</i> (Situações Introdutórias)	<i>Raciocínio lógico e Investigação</i>	C.E.Mat.1
	<i>Registros e Linguagens</i>	C.E.Mat.3
	<i>Relações Intra/Interdisciplinar</i>	C.E.Mat.5
	<i>Observação e Argumentação</i>	C.E.Mat.2
<i>Problema de pesquisa</i> (Apresentação de conteúdo)	<i>Matemática como Ciência</i>	C.E.Mat.8
<i>Vamos praticar!</i> (Questões de fixação)	<i>Resolução de Problemas</i>	C.E.Mat.4
<i>Ninguém me contou isso antes!</i> (Texto complementar)	<i>Projetos de cunho social</i>	C.E.Mat.7
<i>Professor(a), e se ...?</i> (Dúvidas dos alunos)	<i>Desenvolvimento de Pesquisas</i>	C.E.Mat.6

Fonte: Elaborado pelo autor (2021)

Uma vez que as seções descritas no Quadro 9 estruturam igualmente os cinco capítulos que compõem nosso produto educacional, temos concluída a análise desse sob a ótica das competências apontadas pela BNCC para a área *Matemática e suas tecnologias*. Sendo assim, a próxima seção se destina a validar o mesmo à luz dos objetivos educacionais da Taxonomia de Bloom.

6.3 Análise a partir da Taxonomia de Bloom

Apresentada na seção 5.4, a Taxonomia de Bloom é um sistema que descreve a evolução do conhecimento em etapas, às quais se associam um conjunto de verbos cognitivos que denotam o grau de dificuldade atribuído ao conhecimento que está sendo avaliado. Tal sistema se constitui como uma ferramenta eficaz como suporte à organização e à análise dos objetivos educacionais de sequências didáticas, avaliações e currículos. As etapas da Taxonomia de Bloom, já explicitadas na Figura 7, no capítulo anterior, são E1 – Lembrar; E2 – Entender; E3 – Aplicar; E4 – Analisar; E5 – Avaliar e E6 - Criar.

As etapas supracitadas, bem como o conjunto de ações associado a cada uma delas, serão, nessa seção, o norte para análise das sequências didáticas que compõem nosso produto educacional. Nesse sentido, retomamos os tópicos que são trabalhados em cada

capítulo, além de seus objetivos e estruturas. São eles: 1 - Juros e Progressões; 2 – Tipos de Financiamentos; 3 – Tabela Price; 4 – Sistema SAC e 5 – Recorrências.

A etapa E1 – Lembrar requer que o aluno “lembre com exatidão informações e conteúdos previamente abordados como datas, relatos, procedimentos, fórmulas, teorias e regras.” (COLÉGIO ICJ, 2019, p. 17). Já na etapa E2 – Entender, verifica-se se o aprendiz é capaz de modificar informações originais, ampliando-as (ou reduzindo-as) e representando-as em outros formatos. Nesse contexto, tais etapas se constituem como ponto de partida para 1 - Juros e Progressões, uma vez que o referido capítulo evoca os conhecimentos que os alunos têm sobre progressões aritméticas (PAs) e geométricas (PGs), contextualizando-as a situações financeiras e associando-os às fórmulas de juros.

A etapa E3 – Aplicar exige do estudante a habilidade de usar, em situações novas, as informações aprendidas em etapas passadas, selecionando, transferindo e aplicando dados e princípios para resolver um problema ou completar uma tarefa com um mínimo de coordenação. Isso é o que ocorre no capítulo 2 – Tipos de Financiamentos, uma vez que, mediante os conceitos recém adquiridos sobre amortização, a verificação de padrões em processos diversos permite caracterizar os modelos de financiamentos apresentados.

As especificidades dos sistemas de amortização são tratadas nos capítulos 3 – Tabela Price e 4 – Sistema SAC. Esse tratamento consiste na distinção, na classificação e na relação entre as estruturas de cada sistema, apresentadas logo no início das sequências didáticas, nas seções *É hora de explorar!*. Tais atitudes configuram a etapa E4 – Analisar da Taxonomia de Bloom. Nesses capítulos, os discentes recebem as tarefas de avaliar, comparar, discutir e explicar sobre vantagens e desvantagens dos sistemas estudados. Essas ações fazem parte do conjunto de verbos cognitivos associados à etapa E5 – Avaliar.

Quanto à etapa E6 - Criar, o aluno deve “combinar elementos e partes especificadas pela análise para formar um todo que constitua um padrão ou estrutura que antes não estava evidente” (COLÉGIO ICJ, 2019, p. 20). Isso ocorre no capítulo 5 – Recorrências, cujo objetivo é explorar os processos de construção das funções que verificam as relações de recorrência citadas nos capítulos anteriores. Vale lembrar que uma recorrência descreve o comportamento de uma sequência numérica através de uma relação entre elementos consecutivos dessa sequência. Embora, muitas dessas relações não sejam classificadas como progressões aritméticas (nem geométricas), conceitos atrelados à soma dos termos de

uma PA (ou PG) são úteis à obtenção das funções que solucionam as recorrências. Logo, temos, em 5 - Recorrências, a criação de um conhecimento (Recorrências) a partir de outro (PA/PG).

Além da análise descrita nos parágrafos acima, apresentamos, no Quadro 10, um detalhamento das etapas que são trabalhadas em cada seção das sequências didáticas do produto educacional.

Quadro 10 - Taxonomia de Bloom & Produto Educacional

Seção/Capítulo	Capítulo 1 Juros & Progressões	Capítulo 2 Financiamentos	Capítulo 3 Tabela Price	Capítulo 4 Sistema SAC	Capítulo 5 Recorrências
É hora de explorar! (Situações Introdutórias)	<ul style="list-style-type: none"> E2 – Entender E3 – Aplicar E4 – Analisar 	<ul style="list-style-type: none"> E2 – Entender E3 – Aplicar E4 – Analisar 	<ul style="list-style-type: none"> E1 – Lembrar E2 – Entender E3 – Aplicar E4 – Analisar E5 – Avaliar 	<ul style="list-style-type: none"> E2 – Entender E3 – Aplicar E4 – Analisar E5 – Avaliar 	<ul style="list-style-type: none"> E2 – Entender E3 – Aplicar E4 – Analisar
Problema de pesquisa (Apresentação de conteúdo)	<ul style="list-style-type: none"> E1 – Lembrar E4 – Analisar 	<ul style="list-style-type: none"> E2 – Entender E4 – Analisar 	<ul style="list-style-type: none"> E3 – Aplicar E6 – Criar 	<ul style="list-style-type: none"> E4 – Analisar E5 – Avaliar 	<ul style="list-style-type: none"> E6 – Criar
Vamos praticar! (Questões de fixação)	<ul style="list-style-type: none"> E2 – Entender E3 – Aplicar E4 – Analisar E5 – Avaliar 	<ul style="list-style-type: none"> E1 – Lembrar E2 – Entender E3 – Aplicar 	<ul style="list-style-type: none"> E1 – Lembrar E3 – Aplicar E4 – Analisar E5 – Avaliar 	<ul style="list-style-type: none"> E1 – Lembrar E2 – Entender E4 – Analisar E5 – Avaliar 	<ul style="list-style-type: none"> E2 – Entender E3 – Aplicar E4 – Analisar
Ninguém me contou isso antes! (Texto complementar)	<ul style="list-style-type: none"> E3 – Aplicar 	<ul style="list-style-type: none"> E4 – Analisar E5 – Avaliar 	<ul style="list-style-type: none"> E6 – Criar 	<ul style="list-style-type: none"> E4 – Analisar 	<ul style="list-style-type: none"> E6 – Criar
Professor(a), e se ...? (Dúvidas dos alunos)	<ul style="list-style-type: none"> E4 – Analisar E6 – Criar 	<ul style="list-style-type: none"> E5 – Avaliar 	<ul style="list-style-type: none"> E3 – Aplicar E4 – Analisar E5 – Avaliar E6 – Criar 	<ul style="list-style-type: none"> E5 – Avaliar 	<ul style="list-style-type: none"> E3 – Aplicar

Fonte: Elaborado pelo autor (2021)

Na seção *É hora de explorar!*, cada situação tem seus itens enunciados conforme nível crescente de dificuldade, que variam de E1 – Lembrar a E5 – Avaliar, conforme observado no Quadro 10. Variação semelhante pode ser observada nos itens da seção *Vamos praticar!*; porém, com questões objetivas que, isoladamente, se adequam a uma única etapa da Taxonomia de Bloom.

Ainda no Quadro 10, observamos um número menor de etapas trabalhadas nas seções *Ninguém me contou isso antes!*. Justificando esse fato, lembramos que a referida seção é composta por textos de caráter informativo, relevantes à Educação Financeira dos leitores. Nesse sentido, a intenção desses é mostrar análises (E4 – Analisar) e avaliações (E5 – Avaliar) em contextos ligados aos conteúdos estudados, podendo também apresentar algumas aplicações, inéditas (E6 - Criar) ou adaptadas (E3 – Aplicar).

As etapas observadas para as seções *Problema de pesquisa* devem ser consideradas a partir da intervenção docente, visto que essas se destinam ao professor. Na intenção de orientá-lo sobre a apresentação dos conteúdos de cada capítulo, todas as etapas da Taxonomia de Bloom são oportunamente referenciadas nessas seções. Fato semelhante

ocorre em “*Professor(a), e se ...?*”; porém, com destaque para as etapas E4 – Analisar, E5 – Avaliar e E6 - Criar, visto o ineditismo das perguntas que compõem essas finalizações.

Mediante as análises expostas nesse capítulo, temos então a conclusão da última fase da Engenharia Didática, a saber, Análise *a posteriori* e Validação. Sendo assim, seguem no próximo tópico nossas considerações sobre o referido material e o papel do professor que se propõe a utilizá-lo em sala de aula.

6.4 Sobre o produto educacional

As análises apresentadas nas seções anteriores nos leva à validação do produto educacional, tanto à luz das competências da BNCC quanto para os objetivos educacionais da Taxonomia de Bloom.

No tocante às competências da BNCC, conforme já citado nesse capítulo, o material contempla diretamente as competências C.E.Mat.1 - Raciocínio lógico e Investigação; C.E.Mat.2 - Observação e Argumentação; C.E.Mat.3 - Registros e Linguagens; C.E.Mat.4 - Resolução de Problemas e C.E.Mat.7 - Projetos de Cunho Social, além da consolidação parcial de C.E.Mat.5 - Relações Intra/Interdisciplinar. Ademais, vinculamos o pleno desenvolvimento de C.E.Mat.8 - Matemática como Ciência à ação do professor de Matemática, que, por sua vez, é um agente imprescindível na utilização do material como detonador da competência C.E.Mat.6 - Desenvolvimento de Pesquisas.

Quanto aos objetivos de aprendizagem da Taxonomia de Bloom, a seção anterior expôs a evolução do conhecimento em toda a estrutura do produto educacional, especialmente no que tange às quatro primeiras etapas: E1 – Lembrar; E2 – Entender; E3 – Aplicar e E4 – Analisar. Quanto às demais, atrelamos essas à intervenção docente.

Mediante experiências vivenciadas durante as aplicações do material, percebemos que as habilidades próprias a E5 – Avaliar podem ser reforçadas por meio de orientações subjetivas, adequadas aos questionamentos de cada aluno. Nesse contexto, tais orientações podem (e devem) partir do professor, sejam elas sugestões já contidas em nosso livro ou de livre iniciativa do docente. E, quanto à evolução dos objetivos da etapa E6 – Criar, essas também são condicionadas à ação do professor. Isso porque, conforme descrições já citadas na seção 6.3, a referida etapa é fortemente caracterizada no capítulo 5 – Recorrências, cuja

aplicação é opcional, e também nas seções “*Professor(a), e se ...?*”, exclusiva para docentes.

Além de endossar a validade do nosso produto educacional, Freitas e Moreira (2021b) apontam que as análises aqui apresentadas nos permitem caracterizá-lo como uma fonte de aquisição dos conhecimentos específicos sobre *Empréstimos e Financiamentos*, em especial sobre os sistemas de amortização abordados, e também enxergá-lo como uma ferramenta eficaz para detonar discussões que contribuam para a Educação Financeira dos participantes. Nesse sentido, corroboramos as ideias de Santos e Pessoa (2016), que ressaltam a Educação Financeira não como um pretexto para se resolver um conjunto de exercícios, mas sim como um detonador de discussões e investigações. Sob essa perspectiva, cabe ao professor provocar e mediar essa discussão em sala de aula, a partir das atividades, explanações e leituras presentes em cada uma das sequências didáticas propostas em nosso livro.

Ainda citando Freitas e Moreira (2021b), tais ações fazem parte de um projeto de cunho social, conforme já citado nesse capítulo sob a competência C.E.Mat.7 - Projetos de cunho social, capaz de promover uma série de oportunidades aos envolvidos, sejam eles professores ou estudantes. Esses, uma vez educados financeiramente, não mais receberiam o rótulo de analfabetos financeiros, ou de consumidores vulneráveis, citados nos estudos da OCDE, mas passariam a atuar de forma consciente e positiva no universo do dinheiro.

Enfim, conforme anunciado na seção 5.1, as análises contidas no presente capítulo cumprem a fase de Análise *a posteriori* e Validação, a última etapa da Engenharia Didática, a partir da qual concluímos a validade e a reprodutibilidade do nosso produto educacional, com os devidos ajustes para os contextos em que serão aplicados.

Nesses termos, encerramos esse texto anunciando o próximo capítulo da dissertação, contendo as considerações finais acerca dessa pesquisa de mestrado.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A Educação Financeira, entendida nessa dissertação como um processo de transição entre o analfabetismo financeiro e a literacia financeira, promove uma série de oportunidades a todos os tipos de consumidores, sejam eles vulneráveis ou não-vulneráveis, e também ao Estado. Trata-se de um conjunto de saberes que auxiliam cidadãos no controle de orçamentos e em planos para o futuro, bem como na preservação de uma economia saudável para o indivíduo que os detém, seus familiares e a sociedade na qual se inserem, assim contribuindo também para a redução de desigualdades sociais.

O efeito preventivo desse processo se dá na Educação Financeira Escolar, uma vez que, ao educar financeiramente crianças e jovens, esses podem se tornar excelentes propagadores de comportamentos que moldarão uma cultura financeira mais sólida no restante da população. Nesse sentido, o objetivo não é formar apenas uma nova geração de consumidores/trabalhadores, tal como previsto nos PCN/PCN+, mas de cidadãos completos, formados integralmente, conforme os objetivos estabelecidos na BNCC. Ademais, é importante pensar a Educação Financeira em cenários pós-pandemia, de modo a englobar as novas realidades sociais, cujas configurações contam com pessoas, famílias e empresas sequeladas economicamente.

Apresentadas nossas considerações sobre a importância da Educação Financeira para toda uma sociedade e a necessidade dessa ser implantada nas escolas, ora como uma nova disciplina do currículo escolar ora como tema transversal, temos no tópico *Empréstimos & Financiamentos* um item de extrema relevância, cujos conhecimentos influenciam na tomada de decisões acerca de compras parceladas. Ademais, é importante que o consumidor, diante da impossibilidade de uma compra à vista, saiba avaliar qual é a melhor estratégia de parcelamento, especialmente em longo prazo, e ainda, quando não houver opções, esse seja capaz de verificar se a alternativa oferecida é coerente.

A fim de formar uma geração de consumidores que saiba usar as linhas de crédito com consciência e responsabilidade, abordagens acerca do referido tema não devem ser pauta apenas em cursos na área de finanças, sejam eles de nível técnico, graduação ou pós-

graduação, mas serem disponibilizados a todos os cidadãos. Para isso, defendemos a inserção do tópico *Empréstimos & Financiamentos* como componente na grade curricular no Ensino Médio, dentro dos temas listados para a Educação Financeira. Nesse cenário, os conhecimentos abordados nessa dissertação, bem como o produto educacional apresentado, se constituem como ferramentas eficazes, de acordo com as análises apresentadas na pesquisa.

A partir de conteúdos matemáticos próprios do Ensino Médio, a saber, “Juros” e “Progressões”, o produto educacional traz reflexões acerca dos principais sistemas de amortização, evidenciando suas especificidades e aplicações. Com conduções que destacam o protagonismo discente e o papel mediador do professor de Matemática, o material promove discussões relevantes à Educação Financeira dos participantes, além de desenvolver as competências estabelecidas pela BNCC e amadurecer o conhecimento matemático dos estudantes, de acordo com a evolução apresentada na Taxonomia de Bloom.

Além disso, as análises apresentadas nessa dissertação, embora feitas separadamente, permitem traçar possíveis vínculos entre os objetivos de aprendizagem da Taxonomia de Bloom e o desenvolvimento das habilidades da BNCC, seja no material aqui apresentado quanto em outros projetos dentro da Educação Financeira, ou da própria Matemática. Diante disso, essa pesquisa abre caminho para novos estudos, pautados no diálogo entre a BNCC e Taxonomia de Bloom.

Esperamos que os conhecimentos e aprendizagens desenvolvidas no produto educacional, bem como em toda essa pesquisa de mestrado, possam contribuir na formação de uma nova geração de consumidores que, com base nos saberes adquiridos acerca dos principais sistemas de amortização, serão capazes de argumentar com consciência, negociar com criticidade e tomar decisões de forma responsável diante da necessidade de compras parceladas.

Em cada uma das ações supracitadas, releva-se o fato de que aspectos matemáticos não são os únicos critérios considerados na contratação de um empréstimo e/ou financiamento. Do contrário, estaríamos rotulando negativamente tais contratos. Por outro lado, aspectos não matemáticos, tangentes às esferas comportamentais, culturais, sociais e políticas, também devem ser ponderados no processo de tomada de decisão, haja vista as

distintas realidades implícitas em cada situação. Ao levantarmos questionamentos acerca de necessidade e vontade, urgências e imprevistos, planejamentos e metas, sonhos e patrimônios, configuramos o tratamento de aspectos não matemáticos dentro da sala de aula de Matemática, por meio de discussões próprias à Educação Financeira.

Além disso, cabem dentro de tais discussões, seja em aspectos matemáticos ou não matemáticos, questionamentos e/ou reflexões acerca dos impostos e das taxas embutidos nas negociações: Imposto sobre Operações Financeiras – IOF, Imposto sobre Transferências de Bens Imóveis – ITBI, taxas de vistoria e/ou de avaliação de bens, seguros prestamistas, taxas de abertura de crédito, despesas de cartório e comissões. Para discorrer sobre a natureza, o cálculo e a legalidade dessas e de outras taxas implícitas em contratos de empréstimos e financiamentos, é necessário adentrar a Educação Fiscal, ramo da Educação Financeira não contemplado nessa pesquisa. Nesse contexto, tal ramificação surge como um novo cenário para trabalhos futuros, haja vista a necessidade de ampliar discussões ainda dentro do tópico *Empréstimos & Financiamentos*.

Mediante tais exposições, sugerimos que os saberes compartilhados nessa dissertação sejam utilizados na elaboração de programas de Educação Financeira nas escolas da Rede Básica de Ensino. Um exemplo dessa implantação ocorreu na instituição que sediou a segunda aplicação do produto educacional. Nela, a Educação Financeira foi instituída como disciplina eletiva a partir de 2021, com ementas, objetivos e cronogramas norteados pela presente pesquisa. Ademais, dadas as boas repercussões da aplicação do produto educacional, esse foi incluído na bibliografia oficial da disciplina, junto à coleção “Educação Financeira nas Escolas”, da ENEF, também analisada nessa dissertação.

Ainda sobre a disciplina eletiva Educação Financeira, a condução das aulas tem ocorrido de forma a promover discussões que contemplem os aspectos matemáticos e não matemáticos intrínsecos ao controle de orçamentos, planejamentos financeiros e tomada de decisão. Trata-se de uma troca de experiências entre os participantes, que, enquanto consumidores, compartilham suas histórias e/ou de suas famílias, evidenciando as diversas realidades e possibilidades de ação ante aos temas apresentados em cada encontro. Nesse ambiente, colocamos em prática os conhecimentos adquiridos ao longo dessa pesquisa, evidenciando o grande apelo social desta no cenário educacional. Afinal, à medida que novos comportamentos são suscitados por meio do letramento financeiro, tanto no

professor quanto no aluno, vislumbramos mudanças em todo o cenário social, econômico, político e cultural da sociedade na qual esses indivíduos se inserem.

Por fim, concluímos essa dissertação na expectativa de apresentar aos professores e pesquisadores de Matemática, e áreas afins, uma pesquisa e um produto educacional úteis à construção da Educação Financeira de docentes e alunos. Sendo assim, convidamos os leitores dessa dissertação a fazerem o download gratuito do livro, no link https://sbm.org.br/wp-content/uploads/2021/11/A_Matematica_dos_Emprestimos_e_Financiamentos.pdf, e, por meio deste, aprofundarem seus conhecimentos acerca do tópico *Empréstimos & Financiamentos*.

Esperamos que o referido material seja o detonador de novos trabalhos, a serem desenvolvidos no recém criado Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Financeira – GEFEFin, no CEFET-MG, entre eles a análise de materiais didáticos produzidos após a BNCC e a confecção de novos produtos educacionais para a sala de aula de Matemática, focados em investimentos e planejamentos financeiros.

8 REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Marília. **Compare o financiamento de imóveis nos bancos após corte de juros da Caixa**. Exame Invest. 2019. Disponível em <https://invest.exame.com/minhas-financas/compare-o-financiamento-de-imoveis-nos-bancos-apos-corte-de-juros-da-caixa/>. Acesso em 19 de julho de 2021.

ALMOULOUD; Saddo A. e COUTINHO, Cileda de Q. S. Engenharia Didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no GT-19/ANPED. **REVEMAT-Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Florianópolis, v. 3, n. 1, p. 62-77, jan. 2008.

ANDRADE, Paulo Roberto S. **Matemática financeira: trabalhando sistema de amortização no ensino médio**. 2015. 56 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade Federal do Tocantins. Palmas. 2015.

ARAÚJO, Magnum M. **Construção de calculadoras de financiamentos usando o Microsoft Excel: uma proposta de ensino para a matemática financeira**. 2013. 73 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade Federal do Vale do São Francisco. Juazeiro. 2013.

ARAÚJO FILHO, Antonio S. **Um estudo sobre o uso de planilhas eletrônicas no ensino de matemática financeira com ênfase nos sistemas de amortização Price e SAC**. 2019. 93 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade Federal do Vale do São Francisco. Juazeiro. 2019.

BAGATINI, Anderson F. **Sistemas de amortização de empréstimos**. 2010. 27 f. Monografia (Graduação em Matemática). Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões Campus de Erechim. Erechim. 2010.

BATISTA Jr., Ricardo I. **Matemática Financeira contextualizada em Sistemas de Amortização e Imposto de Renda**. 2014. 63 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade Estadual Paulista. Rio Claro. 2014.

BIAOBOCK, Bruna Z. **Financiamentos e empréstimos: uma abordagem para o ensino médio**. 2020. 144 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade do Estado de Santa Catarina. Joinville. 2020.

BENEDETTI, Yasmim V. **Você é um analfabeto financeiro?** Moinhos Educação Financeira. 2019. Disponível em <http://moinhosedu.com.br/voce-e-umanalfabeto-financeiro/>. Acesso em 12 de julho de 2021.

BEZERRA JÚNIOR, Antônio V. **Análise das Provas do Exame da OAB e do ENADE dos cursos de Direito do ano de 2012 à luz da taxonomia dos objetivos educacionais de Benjamin Bloom**. 2016. 79 f. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade Federal do Ceará. Fortaleza. 2016.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: matemática** /Secretaria de Educação Fundamental. Brasília : MEC/SEF, 1997. 142p.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática** /Secretaria de Educação Fundamental. Brasília : MEC /SEF, 1998.148p.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais (Ensino Médio)** – Parte III - Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília. MEC /SEF, 2000. 58p.

BRASIL. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. **PCN+: Ensino Médio**– orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília: MEC, 2002. 141p.

BRASIL. Diário Oficial da União. **Decreto nº 5685**. Institui o Comitê de Regulação e Fiscalização dos Mercados Financeiro, de Capitais, de Seguros, de Previdência e Capitalização - Coremec. Brasília. Seção 1, 26/01/2006, p. 1. Disponível em <https://www2.camara.leg.br/legin/fed/decret/2006/decreto-5685-25-janeiro-2006-540598-publicacaooriginal-41102-pe.html>. Acesso em 12 de julho de 2021.

BRASIL. Secretaria de Educação Básica. **Orientações curriculares para o ensino médio**, volume 2; Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias . Brasília. MEC. 2006. 135p.

BRASIL. **Matriz de referência ENEM**. Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira – INEP. 2009. Disponível em https://download.inep.gov.br/download/enem/matriz_referencia.pdf. Acesso em 23 de julho de 2021.

BRASIL. **Educação Financeira e Previdenciária**. Superintendência Nacional de Previdência Complementar – PREVIC. 2010. Disponível em <http://www.previc.gov.br/regulacao/educacao-previdenciaria/educacao-financeira-e-previdenciaria>. Acesso em 31 de agosto de 2020.

BRASIL. Diário Oficial da União. **Decreto nº 7397**. Institui a Estratégia Nacional de Educação Financeira - ENEF, dispõe sobre a sua gestão e dá outras providências. Brasília. Seção 1, 23/12/2010, p. 7. Disponível em <https://www2.camara.leg.br/legin/fed/decret/2010/decreto-7397-22-dezembro-2010-609805-normaAtualizada-pe.html>. Acesso em 12 de julho de 2021.

BRASIL. **Matrizes de referência, tópicos e descritores – Enceja**. Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira – INEP. 2012. Disponível em http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enceja/matriz_competencia/Mat_Mat_Tec_EM.pdf. Acesso em 11 de agosto de 2021.

BRASIL. **Educação financeira nas escolas: ensino médio: livro do professor**. Brasília: CONEF, 2013. Disponível em www.vidaedinheiro.gov.br/livros-ensino-medio/. Acesso em 19 de julho de 2021.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular – Ensino Médio**. Brasília: MEC, 2018, 595p. Disponível em

http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_-versaofinal_site.pdf. Acesso em 6 de julho de 2021.

CAMPOS, André B. e KISTEMANN JR, Marco A. Uma proposta de Educação Financeira com Jovens-Indivíduos-Consumidores (JIC'S). **Revista BoEM**. Joinville, v. 4, n. 7, p. 211-233, ago/dez. 2016.

COLÉGIO ICJ. **Manual do professor: Ensino Fundamental & Ensino Médio**. Belo Horizonte: Gráfica ICJ, 2019.

COUTO, Eduardo V. **Sistemas de Amortização: uma abordagem para o ensino médio regular**. 2013. 40 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade Federal do estado do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro. 2013.

EIOPA. **Report on financial literacy and education initiatives by competent authorities**. EIOPA. 2011. Disponível em https://www.eiopa.europa.eu/sites/default/files/publications/pdfs/report_on_financial_literacy_and_education_eiopa-ccpfi-11-018_.pdf. Acesso em 12 de julho de 2021.

FERNANDES, Nilo César Costa. **Matemática financeira: uma abordagem sobre financiamentos**. 2014. 69 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade Federal do Ceará. Fortaleza. 2014.

FILGUEIRAS, Isabel. **SAC x tabela PRICE: qual é o melhor pra você? Valor Investe Imóveis**. 2019. Disponível em <https://valorinveste.globo.com/produtos/imoveis/noticia/2019/07/26/sac-x-tabela-price-qual-e-melhor-para-voce.ghml>. Acesso em 19 de julho de 2021.

FONSECA, João José S. **Metodologia da pesquisa científica**. Fortaleza: UEC, 2002. Apostila

FREITAS, Bruno G. **A utilidade da Matemática do ensino médio sob uma perspectiva discente**. 2009. 53 f. Monografia (Graduação em Matemática). Universidade Federal de Minas Gerais. Belo Horizonte. 2009.

FREITAS, Bruno G. e MOREIRA, Valéria G. Empréstimos & Financiamentos: uma discussão no âmbito da Educação Financeira no Ensino Médio. *In: ENOPEM - Encontro Nacional Online de Professores que Ensinam Matemática. Anais...* UNEMAT, Barra do Bugres - MT, 2020, p. 1-12. Disponível em <http://matematicanaescola.com/eventos/index.php/ienopem/ienopem/paper/viewFile/45/12>. Acesso em 12 de julho de 2021.

FREITAS, Bruno G. e MOREIRA, Valéria G. Empréstimos & Financiamentos: uma proposta para o ensino de Sistemas de Amortização no Ensino Médio. **Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana - EM TEIA**. Recife, v. 12, n. 2, p. 1 - 21, jul/ago. 2021a.

FREITAS, Bruno G. e MOREIRA, Valéria G. Empréstimos & Financiamentos: uma análise à luz das competências da BNCC e da Taxonomia de Bloom. *In: II ENOPEM - Encontro Nacional Online de Professores que Ensinam Matemática. Anais...* UNEMAT,

Barra do Bugres - MT, 2021b, p. 1-15. Disponível em <https://matematicanaescola.com/eventos/index.php/iienopem/iienopem/paper/viewFile/175/136>. Acesso em 30 de julho de 2021.

FREITAS, Bruno G., FERREIRA, Fernanda A. F. e MOREIRA, Valéria G. Empréstimos & Financiamentos: uma revisão sistemática sobre o ensino de Sistemas de Amortização. **Revista Internacional de Pesquisa em Educação Matemática – RIPEM**, v. 11, n. 3, p. 151 - 172, ago. 2021.

GOMES, Carlos Roberto B. **Matemática Financeira: imposto de renda, sistemas de amortização e outras aplicações - análise quantitativa e qualitativa**. 2018. 118 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade Federal da Bahia. Salvador. 2018.

GOUVEIA, Mayra. **Conhecendo a Pirâmide de Bloom**. Escola de Referência Gira Mundo. 2018. Disponível em <https://escolagiramundo.wordpress.com/2018/06/27/conhecendo-a-piramide-de-bloom/>. Acesso em 23 de julho de 2021.

GUIMARÃES, Reinaldo S.; BARLETTE, Vania E. e GUADAGNINI, Pedro Henrique. A engenharia didática da construção e validação de sequências de ensino: um panorama com foco no ensino de ciências. **Revista Polyphonia**, Goiânia, v. 26, n. 1, p. 211-226, out. 2015.

LIMA, Ravenia A. S. V. **Financiamentos imobiliários e modelagem matemática: uma proposta para o ensino-aprendizagem de sistemas de amortização**. 2019. 70 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade Federal do Semi Árido. Mossoró. 2019.

LIMA, Rodrigo A. **A educação financeira no ensino médio através de proposta aplicada a financiamentos imobiliários pelos sistemas SAC e Price**. 2017. 79 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade Do Estado do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro. 2017.

MACHADO, Cláudia R. **Teorias de Pesquisa em Educação Matemática: A Influência dos Franceses**. UFRGS. 2007. Disponível em http://www.mat.ufrgs.br/~vclotilde/disciplinas/pesquisa/CLAUDIA_FRANCESES.DOC.pdf. Acesso em 23 de julho de 2021.

MARIA, Bárbara. **Analfabetismo financeiro: realidade ou escolha?** Educa Mais Brasil. 2018. Disponível em <https://www.educamaisbrasil.com.br/educacao/noticias/analfabetismo-financeiro-realidade-ou-escolha>. Acesso em 12 de julho de 2021.

MARQUES, Ernandes. **Matemática financeira no ensino médio: capitalização e amortização com o uso de planilha eletrônica**. 2016. 68 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade Federal de Maranhão. São Luís. 2016.

MELLO, Cleyson M; ALMEIDA NETO, José Rogério M. e PRETILLO, Regina Célia. P. Taxonomia de Bloom. In: _____. **ENADE e a Taxonomia de Bloom: maximização dos**

resultados e indicadores de qualidade. 2ª ed. Rio de Janeiro: Editora Freitas Bastos, 2019. p. 28-53.

MOSMANN, Gabriela. **SAA: saiba como funciona o Sistema de Americano de Amortização**. Suno Research. 2020. Disponível em <https://www.sunoresearch.com.br/artigos/saa/#:~:text=SAA%2C%20sigla%20para%20Sistema%20Americano,paga%20ao%20final%20do%20contrato>. Acesso em 19 de julho de 2021.

MUNIZ, Carla. **Plano de aula** (como fazer, modelo e exemplos). Toda Matéria. 2020. Disponível em <https://www.todamateria.com.br/plano-de-aula/>. Acesso em 23 de julho de 2021.

MUNIZ JR., Ivail e JURKIEWICZ, Samuel. Representações temporais e o valor do dinheiro no tempo: conexões entre a Educação Financeira e o Ensino de Matemática. **Revista BoEM**. Joinville, v. 4, n. 7, p. 116-138, ago/dez. 2016.

OCDE. **Recommendation on Principles and Good Practices for Financial Education and Awareness**. Directorate for Financial and Enterprise Affairs. OCDE. 2005b. Disponível em <https://www.oecd.org/daf/fin/financial-education/35108560.pdf>. Acesso em 4 de outubro de 2021.

OLIVEIRA, Marcos V. S. **Matemática financeira e Cidadania: uma proposta de trabalho sobre Capitalização e Amortização no Ensino Médio com o uso do Excel**. 2013. 120 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro. Seropédica. 2013.

PAIS, Luiz Carlos. Questões metodológicas e a engenharia didática. *In*: _____. **Didática da Matemática: uma análise da influência francesa**. 4ª ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2019. p. 97-106.

PAULA NETO, Antônio S. de. **Matemática financeira: o estudo de empréstimos consignados e consórcios voltados para o ensino médio**. 2014. 54 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade Federal do Ceará. Fortaleza. 2014.

PEREIRA, Carolina B. C. e COUTO, Eduardo V. Sistemas de Amortização: Uma Abordagem para o Ensino Médio Regular. **Revista Científica Fundação Osório**. Rio de Janeiro, v. 2, n. 1, p. 1 - 27. jun. 2017.

PEREIRA, Carolina B. C. **Sistemas de Amortização: uma abordagem para o ensino médio regular**. 2013. 42 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade Federal do estado do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro. 2013.

PROFCIAMB – Programa de Pós-Graduação em rede nacional para Ensino de Ciências Ambientais. **Produto educacional**. UEM. 2018. Disponível em http://sites.uem.br/profciamb/orientacoes-e-procedimentos/produto-educacional/at_download/file. Acesso em 20 de julho de 2021.

PITZER, Luiz Carlos. **Financiamentos e investimentos: uma proposta para o ensino médio.** 2018. 108 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade do Estado de Santa Catarina. Joinville. 2018.

QUINTANILHA, Rosilaine M.; LOZANO, Abel R. G.; RODRIGUES, Chang K. e KISTEMANN JR., Marco A. A Educação Financeira no Ensino Médio em uma escola em São João de Meriti (RJ). **Revista Revemop.** Ouro Preto, v. 1, n. 6, p. 266-284, maio/ago. 2019.

RODRIGUES, Márcio U., ANTUNES, Maria Madalena S. e RODRIGUES, Rosiane S.S. Educação financeira no currículo escolar de matemática: Um olhar para o novo ENEM no período de 2009 a 2017. **Tangram – Revista de Educação Matemática.** Dourados, v.1, n. 4, p. 23–47, nov. 2018.

RODRIGUES, Márcio U. **Educação financeira na perspectiva da BNCC para o ensino médio.** UNEMAT. 2019. Disponível em <https://www.youtube.com/watch?v=cehr1mA9Qpk#action=share>. Acesso em 12 de julho de 2021.

SANTOS, Alessandro R. **A Matemática Financeira nos financiamentos habitacionais.** 2014. 18 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade Federal de São João del-Rei. São João del-Rei. 2014.

SANTOS, Eduardo S. **Um estudo dos sistemas de amortizações SAC e Francês no Ensino Médio apoiado na construção de planilhas eletrônicas.** 2013. 45 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Natal. 2013.

SANTOS, Laís T. B. e PESSOA, Cristiane A. S. Educação financeira na perspectiva da educação matemática crítica: uma reflexão teórica à luz dos ambientes de aprendizagem de Ole Skovsmose. **Revista BoEM.** Joinville, v. 4, n. 7, p. 23-45, ago/dez. 2016.

SANTOS, Marcelo J. F. **Sistemas de amortização na educação básica.** 2015. 64 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade Federal de Alagoas. Maceió. 2015.

SILVA, Amarildo M. e POWEL, Arthur B. Um programa de Educação Financeira para a Matemática Escolar da Educação Básica. *In:* XI Encontro Nacional de Educação Matemática: Retrospectiva e Perspectiva. **Anais...** SBEM, Curitiba - PR, 2013, p. 1-17.

SILVA, Amarildo M. e POWEL, Arthur B. Educação Financeira na Escola: A perspectiva da Organização para Cooperação e Desenvolvimento Econômico. **Boletim GEPEM.** Seropédica, n.66, p. 3-19, jan/jun. 2015.

SILVA, Ingrid T. **Programa de Educação Financeira nas escolas de Ensino Médio: uma análise dos materiais propostos e sua relação com a Matemática.** 2017. 184 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica). Universidade Federal de Pernambuco. Recife. 2017.

SILVESTRE, Roberto F. **A importância do ensino da matemática financeira no ensino médio**. 2015. 52 f. Monografia (Especialização em Matemática). Universidade Federal de Minas Gerais. Belo Horizonte. 2015.

SOMAVILLA, Adriana S. e BASSOI, Tania S. A Literacia financeira: cenário e perspectivas. **Revista BoEM**. Joinville, v. 4, n. 7, p. 7-22, ago/dez. 2016.

SOUSA, Aldo B. **Juros compostos, financiamentos e sistemas de amortização utilizando o Excel**. 2015. 90 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade Federal de Rondônia. Porto Velho. 2015.

ZOCOLOTTI, Alexandre K; CAMPOS, Eucilene e DENES, Eliane R. Educação Financeira no Ensino Médio: discutindo cesta básica. 5º Seminário de Pesquisa em Educação Financeira Escolar e Educação Matemática. **Anais ... UFJF**, Juiz de Fora - MG, 2019, p. 233-341.

9 BIBLIOGRAFIA

BM & FBOVESPA. **Programa TV educação financeira**. TV Cultura. 2009. Disponível em <https://www.youtube.com/watch?v=3qtDUjHSyOw&list=PL7C9724671D475DAC>. Acesso em 12 de julho de 2021.

BRASIL. **Plano diretor da ENEF**: Estratégia Nacional de Educação Financeira. ENEF. 2011. Disponível em: www.vidaedinheiro.gov.br. Acesso em 12 de julho de 2021.

MOREIRA, Valéria G; PAGANI, Érica M. L.; FREITAS, Bruno G. e NUNES, Laís M. A. A constituição de um grupo de estudos de Educação Financeira no CEFET-MG – Relato de experiência. *In*: II ENOPEM - Encontro Nacional Online de Professores que Ensinam Matemática. **Anais...** UNEMAT, Barra do Bugres - MT, 2021, p. 1-9. Disponível em <https://matematicanaescola.com/eventos/index.php/iienopem/iienopem/paper/viewFile/235/179>. Acesso em 30 de julho de 2021.

MOREIRA, Valéria G; FREITAS, Bruno G. **A Matemática dos Empréstimos & Financiamentos no Ensino Médio**. Rio de Janeiro, SBM, 2021. Disponível em https://sbm.org.br/wp-content/uploads/2021/11/A_Matematica_dos_Emprestimos_e_Financiamentos.pdf. Acesso em 17 de novembro de 2021.

PROFMAT. **Dissertações do PROFMAT**. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Disponível em <https://www.profmatsbm.org.br/dissertacoes/>. Acesso em 13 de março de 2021.