UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

PRÓ-REITORIA DE PÓS- GRADUAÇÃO E PESQUISA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

REDE NACIONAL - PROFMAT

Carlos Eduardo dos Santos

Séries e Equações Diferenciais

São Cristóvão - SE
2020

Carlos Eduardo dos Santos

Séries e Equações Diferenciais

Dissertação apresentada ao Programa de Pós - Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Naldisson dos Santos

São Cristóvão - SE
2020

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

Santos, Carlos Eduardo dos

S237s Séries e equações diferenciais / Carlos Eduardo dos Santos ; orientador Naldisson dos Santos. – São Cristóvão, 2020.
81 f.

Dissertação (mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Sergipe, 2020.

1. Matemática. 2. Equações diferenciais ordinárias. 3. Séries de potência. I. Santos, Naldisson dos orient. II. Título.

CDU 5

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Séries e Equações Diferenciais

por

Carlos Eduardo dos Santos

Aprovada pela banca examinadora:

Naldisson dos Santos
Prof. Dr. Naldisson dos Santos - UFS
Orientador

Fábio dos Santos
Prof. Dr. Fábio dos Santos - UFS
Primeiro Examinador

Gleidson
Prof. Dr. Gleidson Gomes Da Silva - UFPE
Segundo Examinador

São Cristóvão, 28 de Agosto de 2020

Cidade Universitária "Prof. José Aloísio de Campos" – Av. Marechal Rondon, s/no - Jardim Rosa Elze – Campus de São Cristóvão. Tel. (00 55 79) 3194-6887
CEP: 49100-000 - São Cristóvão – Sergipe - Brasil – E-mail: promat.ufs@gmail.com

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por mais uma conquista, por ter me dado força, coragem e determinação para poder alcançar todos os meus objetivos.

Aos meus pais, Antonio e Miralda, por tudo que me ensinaram, pela dedicação à família e pelo amor, carinho, afeto e atenção.

Aos meus irmãos, Evandro e Tamara, e ao meu sobrinho, Evandro Jr, pela amizade e companherismo que sempre demontraram. Deixo aqui registrado também meu reconhecimento à família, pois acredito que sem o apoio de vocês seria muito mais difícil vencer esse desafio.

Aos professores do departamento de matemática da UFS, agradeço a todos que foram meus professores durante o curso, e muitos foram também colegas no tempo de graduação: Prof. Dr. Almir, Prof. Dr. Anderson, Prof. Dr. Alysson, Prof. Dr. Evilson, Prof. Dr. Fábio e, especialmente, ao meu orientador Prof. Dr. Naldisson, por toda dedicação, ensinamento, paciência e sabedoria durante esse período árduo. Muito obrigado a todos vocês.

Aos colegas do PROFMAT: Tony, Vinícius e Lucas, pela amizade, companheirismo, e troca de experiência em toda essa jornada.

À CAPES, pois o presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001

Enfim, agradeço a todos que de uma forma ou de outra contribuíram para a realização desse sonho.

Resumo

A presente dissertação tem como objetivo central discorrer sobre resolução de equações diferenciais ordinárias lineares através de uma série de potências, de modo que as soluções procuradas sejam analíticas pelo menos em alguma vizinhança onde são dadas as condições de contorno. Se a equação diferencial possuir um ponto ordinário, então irá existir duas soluções linearmente independentes centrada nesse ponto. Todavia, sendo esse ponto singular, estabeleceremos uma metodologia e aplicamos o Método de Frobenius.

Palavras-chave: Equações diferenciais ordinárias; Série de potências; Ponto ordinário; Ponto singular.

Abstract

The main objective of this dissertation is to discuss the resolution of ordinary linear differential equations through a series of powers, so that the solutions sought are analytical at least in some neighborhood, where the boundary conditions are given. If the differential equation has an ordinary point, then there will be two linearly independent solutions centered on that point. However, being this unique point, we will establish a methodology and apply the Frobenius Method.

Keywords: Ordinary differential equations; Power series; Ordinary point; Unique point.

Sumário

Introdução **8**

1 Sequências **12**

1.1 Convergência de uma Sequência 14

1.2 Sequência de Cauchy 18

1.3 Sequências de Funções 19

2 Séries **22**

2.1 Testes de Convergência 25

2.2 Séries de Funções 31

2.3 Séries de potências 35

2.4 Séries de Taylor 41

2.4.1 Polinômios e séries de Taylor 41

3 Equações Diferenciais **46**

3.1 Equações Diferenciais Ordinárias 47

3.2 Equações Diferenciais Ordinárias Lineares de Primeira Ordem 49

3.3 Equações Diferenciais Ordinárias Lineares de Segunda Ordem 52

3.3.1 Equações Lineares Homogêneas com Coeficientes Constantes 54

3.3.2 Equações Lineares Não-Homogêneas com Coeficientes Constantes . . 56

3.3.3 Equações Diferencias com Coeficientes Variáveis 58

4 Resolução de EDO's por Séries de Potências **63**

4.1 Resolução de EDO's em Torno de um Ponto Ordinário 67

4.2 Resolução de EDO em Torno de um Ponto Singular 72

Referências 80

Introdução

Diante do crescente desenvolvimento que o mundo vem passando nos últimos anos, sobretudo no setor de ciência e tecnologia, a matemática representa a engrenagem que impulsiona o desenvolvimento de qualquer país, sendo, portanto, responsável pelo impacto direto no aumento do PIB. O conhecimento matemático se expandiu e acumulou ao longo dos anos, proporcionando, nesse sentido, uma relação íntima e antiga entre matemáticos e tecnologia, culminando, dessa forma, para atingir o atual estágio tecnológico. Nessa perspectiva, convém destacar a importância dos povos antigos, sobretudo do Antigo Egito, onde merecem destaques especiais os papiros de Rhind, Kahun e Moscou, representando uma valiosa fonte de conhecimento matemático; E o Império Babilônico, também conhecido como Mesopotâmia, hoje Iraque, possuía conhecimento de álgebra, geometria e sua escrita era cuneiforme com sistema de numeração posicional.

Dessa forma, vimos que o pensamento matemático começou a se desenvolver na Antiguidade. Porém, os cálculos efetuados por esses povos eram meramente restritos às necessidades práticas do cotidiano. Portanto, foi na Grécia Antiga que a matemática ganhou contorno de ciência, onde foi introduzido o considerável e eficiente método axiomático. Assim, a matemática passou a ser utilizada não apenas para necessidade diária, como medir e contar, mas também como um instrumento poderoso do pensamento abstrato, científico e filosófico. Ou seja, o rigor nas provas dedutivas e o encadeamento sistemático dos teoremas demonstrativos a tornaram, sobretudo, uma peça central e, consequentemente, fundamental em relação as demais ciências.

Dessa época fértil e próspera, do ponto de vista de desenvolvimento matemático, surgiram inúmeros pensadores e protagonistas, tais como: Tales de Mileto, Pitágoras, Euclides, Aristóteles, Apolônio, Diofanto e Arquimedes. Esses ilustres matemáticos representaram uma verdadeira fonte do conhecimento, com seus estudos sistemáticos e organizados, onde criaram o chamado método dedutivo, que consiste basicamente em aceitar verdades bem conhecidas, os axiomas, e, a partir daí, por meio do correto uso lógico garantir a verdade dos novos resultados, isto é, das conclusões, os chamados teoremas.

Assim, esse período da história grega, bastante rico e inovador, marcou uma era e ditou tendência que seguiria até os dias atuais. Ficou marcado, também, como a era de ouro da matemática, onde a expansão do conhecimento ficou mais evidente, tamanha a quantidade de artigos produzidos e publicados.

Neste contexto histórico, convém ressaltar, de forma cronológica, a contribuição de diversos matemáticos, dos quais podemos destacar: Galileu Galilei, físico e matemático italiano, precursor do método científico; Johannes Kepler, astrônomo alemão, descreve as Leis da Gravitação; Bonaventura Cavalieri, precursor dos Cálculos diferencial e Integral; René Descartes, filósofo racionalista francês, dá uma interpretação algébrica às construções geométricas, criando a geometria analítica; Pierre de Fermat, outro da escola francesa, teve grande destaque em teoria dos números; Blaise Pascal, mais outro francês, formula as bases das leis da probabilidade moderna.

Seguindo para o final do século XVII e início do XVIII, temos os importantes trabalhos dos brilhantes: Isaac Newton, matemático e físico inglês, e Gottifried Wilhelm Leibniz, filósofo e matemático alemão, ambos desenvolveram e criaram, de forma praticamente simultânea e independente, o cálculo infinitesimal e integral, travando uma das mais famosas disputas do século 18 pela primazia do desenvolvimento do cálculo. Merecem destaque especial também os irmãos suíços Jakob Bernoulli e Johann Bernoulli, pelas contribuições importantes em cálculo e em estatística.

Os séculos XVIII e XIX ficaram marcados pelo alto rigor que se buscava na matemática, sendo a ênfase e importância dada os cientistas: Leonhard Euler, matemático suíço extremamente talentoso, Jean Le Rond D'Alembert, Joseph- Louis Lagrange e Pierre Simon de Laplace, ambos contribuíram no desenvolvimento da álgebra dos complexos e análise matemática. Carl Friedrich Gauss, prodígio matemático alemão, dono de um talento sem precedentes dentro da ciência, traz incontáveis contribuições a teoria os números, análise, álgebra, e de tantas outras áreas .Os franceses August Louis Cauchy, Niels Henrik e Evariste Galois trouxeram contribuições em teoria dos conjuntos, física teórica e teoria de grupos, respectivamente. Também nesse período é criado as geometrias não euclidianas, pelo matemático russo Lobachevsky

A partir do século XX até os dias atuais, a matemática tinha como principal desafio a comprovação de teoremas e conjecturas até então sem solução. Coube ao jovem proeminente matemático alemão, David Hilbert, que proferiu e anunciou, em um congresso de matemática em Paris, no ano de 1900, uma lista contendo 23 desafios. Vários outros matemáticos merecem notoriedade nesse período, a saber: George Cantor- criou a noção de números transfinitos e teve relevantes trabalhos em teoria dos números; Bertrand Russel- lógica, teoria dos conjuntos e diversos paradoxos apresentado e propostos; Henri Poicaré- matemático e físico francês, fez importantes pesquisas em equações diferencias, topologia e mecânica quântica; Alan Turig- computação, criptografia e inteligência artificial; e Andrew Wiles-demonstração do último teorema de Fermat.

Vimos, através dessa contextualização, como a matemática evoluiu e se transformou nessa ferramenta valiosa e imprescindível, servindo de alicerce a várias outras ciências.

Este trabalho tem como objetivo elucidar sobre resolução de Equações Diferenciais Ordinárias por meio de Séries de Potências, mostrando, dessa maneira, uma variante da aplicabilidade desse fascinante campo da matemática aplicada. Assim, essa obra foi dividida em quatro capítulos. No primeiro capítulo, traremos alguns resultados importantes sobre Sequências de Números Reais, iniciando com uma breve nota histórica como motivação, em seguida apresentamos alguns casos de convergências, onde destacamos o teorema de Bolzano-Weierstrass e as Sequências de Cauchy.

No segundo capítulo, iniciamos com uma breve motivação, onde foi apresentado um problema bastante intuitivo para o estudo das Séries e, em seguida, foram exibidos diversos critérios, os chamados testes de convergência. Após discutir alguns fatos básicos sobre séries de números reais, examinamos e desenvolvemos a noção adequada de convergência para série de funções, com ênfase, sobretudo, no estudo da série de potências, naturalmente, é claro, associada a uma função infinitamente derivável, ou seja, a famosa série de Taylor da função.

Já no terceiro capítulo, foram apresentados dados históricos a título de motivação, destacando alguns dos matemáticos e suas respectivas contribuições às Equações Diferenciais. Em seguida foi exibido algumas definições de equações diferenciais ordinárias de primeira e segunda ordens, assim como suas formas de resolução, divididas e organizadas de acordo com cada caso em questão. Por fim, analisamos o teorema que trata do princípio da superposição.

No quarto e último capítulo, investigamos um método alternativo para resolução de equações diferenciais ordinárias por meio de uma série de potências, exemplificando, dessa forma, soluções em torno de pontos ordinários e singulares - Método de Frobenius através de alguns exercícios.

CAPÍTULO 1

Sequências

Entende-se por sequência toda sucessão onde há um encadeamento de fatos que sucedem. Historicamente, as sequências foram estudadas pelos egípcios e babilônicos há cerca de 5 mil anos. Na civilização do Egito Antigo, era comum a observção do período de cheia do Rio Nilo, essa prática era a certeza do momento exato para o plantio, colheita e o momento em que haveria inundação. Já na Mesopotânia, que corresponde hoje ao atual Iraque, surgiu a famosa tábua de Plimton 322 (1900 a 1600 a.c), nesse documento está presente sequências de valores representando os lados de um triângulo retângulo.

Ainda na Antiguidade, há relatos na utilização de sequências na resolução de problemas, como, por exemplo, o papiro de Rhind, datado de aproximadamente 1650 ac, onde aparecem as conhecidas progressões, mais precisamente as aritméticas e geométricas.

Outra sequência muito famosa é a Sequência de **Fibonacci**. Há uma quantidade surpreendente de fatos ligados a sequência de Fibonacci, tanto em matemática(a razão áurea, o triângulo de Pascal), como fora dela(em botânica, música, arquitetura).

De uma forma bastante intuitiva, utilizamos as sequências no dia a dia. Basta observarmos, por exemplo, os dias da semana, dos meses dos anos, das estações, dos números pares e impares e de vários outros fenômenos oriundos e corriqueiros, que acontecem a todo momento em nosso cotidiano.

O presente capítulo irá estudar as sequências numéricas, onde veremos o conceito de limite de sequência e suas respectivas propriedades.

Definição 1.0.1. *Uma sequência de números reais é uma função* $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *que associa cada número natural n a um número real x(n). O valor x(n), para todo* $n \in \mathbb{N}$*, será denotado por* x_n *e denominado de n-ésimo termo da sequência. Adotaremos simplesmente a palavra sequência para indicar sequência de números reais. Existem, basicamente, três formas de se representar uma sequência, que são:* $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ *ou* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *ou* (x_n).

Definição 1.0.2. *Dizemos que a sequência* (x_n) *é:*

1. **constante** *se todos os seus termos são iguais;*
2. **crescente** *se* $x_{n+1} > x_n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*;*
3. **decrescente** *se* $x_{n+1} < x_n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*;*
4. **não-decrescente** *se* $x_{n+1} \geqslant x_n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*;*
5. **não-crescente** *se* $x_{n+1} \leqslant x_n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*;*
6. **limitada inferiormente** *se existir* $A \in \mathbb{R}$ *tal que* $x_n \geqslant A$*, para todo* $n \in \mathbb{N}$*;*
7. **limitada superiormente** *se existir* $B \in \mathbb{R}$ *tal que* $x_n \leqslant B$*;*
8. **monótona** *se é não-decrescente ou não-crescente;*
9. **limitada** *Se for limitada inferior ou superiormente. Caso contrário,* (x_n) *será dita* **ilimitada**.

Exemplo 1.0.1. Seja a sequência cujo n-ésimo termo é $x_n = \dfrac{1}{n}$. Como $n \in \mathbb{N}$, então podemos escrevê-la como $\left(1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \ldots\right)$. Os termos desta sequência estão decrescendo. De fato, Como $n+1 > n$, então $\dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{n}$ e, consequentemente, $x_{n+1} < x_n$. Como $0 < x_n \leq 1$, para todo $n \geq 1$, então a sequência $\left(\dfrac{1}{n}\right)$ é limitada e decrescente.

■

Exemplo 1.0.2. A sequência cujo n-enésimo termo é $x_n = n^2$ é ilimitada e crescente. De fato, temos que $(1, 4, 9, 16, ...)$ e tomando $x_{n+1} = (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 \geqslant n^2 = x_n$, donde (x_n) não possui limitante e é crescente, como queríamos demonstrar.

■

1.1 Convergência de uma Sequência

Definição 1.1.1. *Dizemos que uma sequência (a_n)* **converge** *para um número real L quando, fixado arbitrariamente um número real $\epsilon > 0$, existir um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\mid a_n - L \mid < \epsilon$, para todo $n > n_0$.*

O número L é chamado de **limite** *da sequência (a_n) e denotamos*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = L, \quad \lim a_n = L \quad ou \quad a_n \longrightarrow L.$$

Se uma sequência não converge para real algum, dizemos então que ela diverge ou que é **divergente**.

Proposição 1.1.1. *Se a sequência (a_n) convergir, então seu limite é único.*

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, que a sequência converge simultaneamente para L e M, reais distintos. Digamos, sem perda de geralidade que $L < M$. Dado $\epsilon > 0$, existem $n_1,\ n_2 \in \mathbb{N}$ tais que

$$n > n_1 \Rightarrow \mid a_n - L \mid < \epsilon,$$

$$n > n_2 \Rightarrow \mid a_n - M \mid < \epsilon.$$

Tomando $n_0 = max\{n_1, n_2\}$ e $\epsilon = \frac{M-L}{2}$, temos que

$$n > n_0 \Rightarrow -\epsilon + M < a_n < \epsilon + L \Rightarrow \frac{M+L}{2} < a_n < \frac{M+L}{2},$$

o que é um absurdo.

■

Proposição 1.1.2. *Se (a_n) for uma sequência convergente, então (a_n) é limitada.*

Demonstração. Seja $\lim a_n = L$ e tomemos $\epsilon = 1$. Então, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \Rightarrow \mid a_n - L \mid < 1,$$

ou seja,

$$n > n_0 \Rightarrow L - 1 < a_n < L + 1.$$

Defina o sequinte conjunto $X = \{a_1, a_2, \ldots, a_{n_0}, L - 1, L + 1\}$. Ora, como este conjunto é finito, segue que existem $M = maxX$ e $m = minX$ e, portanto, concluímos que (a_n) é limitada.

■

A recíproca dessa proposição é falsa, pois a sequência $\{0,\ 1,\ 0,\ 1, ...\}$ é limitada mas não é convergente. Observamos, porém, que o fato de uma sequência ser limitada não implica que ela seja convergente. A garantia da convergência de uma sequência limitada é adicionar à hipótese o fato dela ser além de limitada, ser também monótona como veremos a seguir. A seguir, enunciaremos o resultado mais importante sobre limites de sequências, conhecido na literatura matemática como o **Teorema de Bolzano-Weierstrass**.

Teorema 1.1.1 (Bolzano-Weierstrass)**.** *Toda sequência monótona e limitada é convergente.*

Demonstração. Suponhamos, sem perda de generalidade, que (a_n) seja uma sequência não-decrescente e limitada, isto é, que

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant ... < M,$$

para algum $M > 0$. O mesmo também poderia se estender, de forma análoga, aos demais casos. Então, M é uma cota superior para o conjunto $A = \{a_1,\ a_2,\ a_3,\ ...\}$, sendo que tal conjunto possui supremo, digamos $supA = L$. Afirmo que $\lim a_n = L$. Para tanto, seja $\epsilon = 0$ dado; como $L - \epsilon$ não é mais cota superior de A, algum elemento de A é maior que $L - \epsilon$, digamos $a_{n_0} > L - \epsilon$. Mas, como $a_{n_0} \leqslant a_{n_0+1} \leqslant a_{n_0+2} \leqslant ...$, concluímos que $a_n > L - \epsilon$, para todo $n > n_0$. Assim, temos $L - \epsilon < a_n \leqslant L < L + \epsilon$, donde $L - \epsilon < a_n < L + \epsilon$ e, consequentemente, $-\epsilon < a_n - L < \epsilon$ ou, que é o mesmo, $\mid a_n - L \mid < \epsilon$, como queríamos demonstrar.

■

Exemplo 1.1.1. Considere a sequência (a_n) dada por

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}.$$

Vamos mostrar que essa sequência é monótona e limitada.

a) a_n é monótona (estritamente crescente). basta observar que

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{(n+1)!} \\ &= a_n + \frac{1}{(n+1)!} \\ &> a_n \end{aligned}$$

e, portanto, monótona.

b) a_n é limitada. De fato, basta mostrar que

i) a_n é limitada superiormente por 3, para $\forall n \in \mathbb{N}$, isto é

$$a_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{n!} < 1 + 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^{n-1}}\right) \tag{1.1.1}$$

A expressão entre parênteses representa a soma de uma progressão geométrica finita de razão $\frac{1}{2}$. Assim, calculando a soma dessa progressão, temos

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{n!} \\ &< 2 + \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) \\ &= 3 - \frac{1}{2^{n-1}} \\ &< 3. \end{aligned}$$

ii) a_n é limitada inferiormente por 2. De fato, basta observar que

$$a_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + ... + \frac{1}{n!} > 1 + 1 = 2 \tag{1.1.2}$$

Portanto, concluímos que a sequência (a_n) é monótona e limitada, isto é, $2 < a_n < 3$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Logo, pelo teorema de **Bolzano-Weierstrass** a sequência é **convergente**.

■

Teorema 1.1.2 (Teorema do Confronto)**.** *Sejam (a_n) e (b_n) sequências convergentes que possuem o mesmo limite, digamos $\lim a_n = \lim b_n = r$. Se (c_n) é uma sequência que satisfaz à* *seguinte propriedade*

$$a_n \leqslant c_n \leqslant b_n$$

para todo $n \in \mathbb{N}$*, então* c_n *converge e* $\lim c_n = r$.

Demonstração. Seja $\epsilon > 0$. Sabemos que existem $N_1,\ N_2 \in \mathbb{N}$, tais que $\mid a_n - r \mid < \frac{\epsilon}{3}$ se $n > N_1$ e $\mid b_n - r \mid < \frac{\epsilon}{3}$ se $n > N_2$. Tomemos $N = max\{N_1,\ N_2\}$, então, se $n > N$ temos

$$\begin{aligned} \mid c_n - r \mid &= \mid c_n - a_n + a_n - r \mid \\ &\leq \mid c_n - a_n \mid + \mid a_n - r \mid \\ &\leq \mid b_n - a_n \mid + \mid a_n - r \mid \\ &= \mid b_n - r + r - a_n \mid + \mid a_n - r \mid \\ &\leq \mid b_n - r \mid + \mid r - a_n \mid + \mid a_n - r \mid \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

Portanto, $\lim c_n = r$.

■

Proposição 1.1.3. *Se* $\lim a_n = a$ *e* $\lim b_n = b$*, então:*

1. $\lim(a_n + b_n) = a + b$
2. $\lim(a_n - b_n) = a - b$
3. $\lim(a_n . b_n) = a.b$
4. $\lim\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right) = \dfrac{a}{b}$*, se* $b \neq 0$.

Demonstração. Demonstraremos apenas o ítem 1.

Dado $\epsilon > 0$, existem $n_1,\ n_2 \in \mathbb{N}$ tais que $n > n_1 \Rightarrow \mid a_n - a \mid < \frac{\epsilon}{2}$ e $n > n_2 \Rightarrow \mid b_n - b \mid < \frac{\epsilon}{2}$. Seja $n_0 = max\{n_1,\ n_2\}$. Então $n > n_0 \Rightarrow n > n_1$ e $n > n_2$. Logo, para $n > n_0$

$$\mid (a_n + b_n) - (a + b) \mid = \mid (a_n - a) + (b_n - b) \mid \leqslant \mid a_n - a \mid + \mid b_n - b \mid < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

■

Teorema 1.1.3 (Weierstrass)**.** *Toda sequência limitada admite uma subsequência convergente.*

Esse teorema dá uma condição suficiente para a existência de tal subsequência. Um resultado auxiliar extremamente importante, também conhecido como o **Lema dos intervalos encaixantes**, que pode ser anunciado da seguinte forma: Sejam dados os intervalos $I_n = [a_n, b_n], n \in \mathbb{N}$, tais que $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset ....$ Se $\lim \mid I_n \mid = 0$, então existe um único $l \in \mathbb{R}$ tal que $\bigcap\limits_{n \geqslant 1} I_n = l$. Através desse lema se demostra esse importante teorema.

1.2 Sequência de Cauchy

Até o presente momento, vimos que para provar que uma sequência é convergente, precisávamos conhecer o candidato a limite. Porém, nem sempre isso é possível, tamanha a complexidade de algumas sequências. Assim, graças ao famoso matemático frances, Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), iremos apresentar um outro critério, bastante interessante, para mostrar se uma sequência é convergente sem precisar necessariamente saber para quanto ela converge.

Vale destacar, segundo Neto (2015), que o conceito de sequência convergente possui um grande apelo geométrico, uma vez que utiliza a ideia de que os termos da sequência aproximam-se cada vez mais de um certo número real, à medida que seus índices aumentam. Além disso, é de se esperar que, se os termos de uma sequência ficarem cada vez mais próximos uns dos outros à medida que seus índices aumentem, então a sequência deva convergir.

Nesse presente tópico será apresentado o critério de Cauchy, um importante resultado que nos dará uma condição, não somente suficiente mas também necessária, para a convergência de uma sequência de números reais.

Definição 1.2.1. *Uma sequência (a_n) é dita uma* **Sequência de Cauchy** *se, para todo $\epsilon > 0$ dado, existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que*

$$m,\, n > n_0 \Rightarrow \mid a_m - a_n \mid < \epsilon.$$

Teorema 1.2.1. *Uma sequência (a_n) é convergente se, e somente se, é uma sequência de Cauchy.*

Demonstração. Suponhamos, por hipórtese, que a sequência (a_n) seja convergente, com limite

r. Daí, dado um $\epsilon > 0$, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \Rightarrow \mid a_n - r \mid < \frac{\epsilon}{2}.$$

Portanto, para $m,\, n > n_0$, segue da desigualdade triangular, que

$$\mid a_m - a_n \mid = \mid a_m - r + r - a_n \mid \leqslant \mid a_m - r \mid + \mid r - a_n \mid < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

mostrando, dessa forma, que a sequência (a_n) é de Cauchy.

Reciprocamente, seja (a_n) uma sequência de Cauchy e tome $\epsilon = 1$. Então, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\mid a_m - a_n \mid < 1$, para todos $m,\, n > n_0$. Em particular, $\mid a_m - a_{n_{0+1}} \mid < 1$ para todo $m > n_0$. Então, o conjunto $\{a_n \mid n > n_0\}$ está contido no intervalo $(a_{n0} - 1,\, a_{n0} + 1)$, ou seja, a sequência é limitada, pois é limitada a partir do termo de índice $n_0 + 1$. Portanto, o teorema de Bolzano-Weierstrass garante que a sequência possui uma subsequência convergente. Seja r o limite dessa sequência e seja $\epsilon > 0$. como a_n é uma sequência de Cauchy então existe n_0 tal que $\mid a_m - a_n \mid < \frac{\epsilon}{2}$ sempre que $m,\, n > n_0$. Visto que a_n possui uma subsequência que converge para r, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$, com $n_0 > \mathbb{N}$ tal que $\mid n_{n0} - r \mid < \frac{\epsilon}{2}$. Logo se $n > n_0$, temos

$$\mid a_n - r \mid = \mid a_n - a_{n0} + a_{n0} - r \mid \leqslant \mid a_n - a_{n0} \mid + \mid n_{no} - r \mid < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Logo, a sequência converge.

■

1.3 Sequências de Funções

Seja $A \subset \mathbb{R}$ e $\mathcal{F}(A, \mathbb{R}) = \{f / f : A \to \mathbb{R}\}$ o conjunto das funções reais definidas sobre A.

Definição 1.3.1. *Uma sequência de funções é uma correspondência que associa a cada número natural uma única função:*

$$f : \mathbb{N} \to \mathcal{F}(A, \mathbb{R}),$$

que denotamos por $f(n) = f_n : A \to \mathbb{R}$.

A sequência de funções é denotada por $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Para todo $x \in A$, a sequência $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência numérica.

Definição 1.3.2. *Uma sequência de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $f_n : A \to \mathbb{R}$, converge pontualmente ou, simplesmente para a função $f : A \to \mathbb{R}$ se para todo $x \in A$ e todo $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ para todo $n \geq n_0$.*

O número $n_0 = n(\epsilon, x_0)$, depende tanto de ϵ como do ponto x_0. Uma sequência de funções é dita divergente se não converge. Se a sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge pontualmente para f, para todo $x \in A$ fixado, tem-se:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x);$$

$f(x)$ é dito o limite pontual da sequência.

Exemplo 1.3.1. Seja $A = [0, 1]$. A sequência de funções $(x^n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, x, x^2, x^3, \ldots)$ converge pontualmente para a função $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0 \text{ se } x \in [0,1) \\ 1 \text{ se } x = 1. \end{cases}$$

Observação 1.3.1. Dada uma sequência de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, em que cada f_n seja contínua em A e $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge pontualmente a uma função f, nada nos garante que f seja contínua. De fato, basta notar, pelo exemplo anterior, que as funções $f_n(x) = x^n$ são contínuas em $[0, 1]$ mas convergem pontualmente para uma função descontínua.

O exemplo anterior indica que a convergência pontual de uma sequência de funções não é suficiente para preservar as propriedades das funções que formam a sequência, daí a necessidade da seguinte definição.

Definição 1.3.3. *Uma sequência de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente para a função f se para todo $\epsilon > 0$ existe $n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ para todo $n \geq n_0$ seja qual for $x \in A$.*

Claramente, se uma sequência de funções converge uniformemente para f, converge pontualmente para f. A recíproca é falsa, como mostra o próximo exemplo $(1.3.1)$.

A seguinte proposição é útil para verificar se uma sequência converge uniformemente.

Proposição 1.3.1. *Seja a sequência de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definidas sobre $A \subset \mathbb{R}$. Se existe uma sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge para zero e $|f_n(x) - f(x)| < a_n$ para todo $x \in A$, então a sequência de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente para f.*

Exemplo 1.3.2. A sequência $\left(\frac{\cos(nx)}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente para zero, pois

$$\left|\frac{\cos(nx)}{n} - 0\right| \leq \frac{1}{n}$$

e $a_n = \frac{1}{n}$ converge para zero.

Teorema 1.3.1. *Seja a sequência de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge uniformemente para f.*

1. *Se as f_n são contínuas em A, então f é contínua em A e:*

$$\lim_{n\to\infty}\left[\lim_{x\to x_0} f_n(x)\right] = \lim_{x\to x_0}\left[\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right] = \lim_{x\to x_0} f(x).$$

2. *Se as f_n são integráveis em A, então f é integrável em A e:*

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x) = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

CAPÍTULO 2

Séries

Talvez o mais antigo relato envolvendo um somatório infinito seja o famoso paradoxo dicotomia, proposto pelo filósofo Zenão de Eléia (c.450a.c), que diz "Um corredor nunca pode chegar ao fim de uma corrida, pois antes de chegar ao fim, ele precisa chegar ao meio. Depois, ao meio do que falta e assim sucessivamente ad infinitum". (Oliveira, 2016).

A ideia de integração, quase um século após Zenão, teve origem em processo somatórios ligados ao cálculo de certas áreas, volumes e comprimentos; processo este conhecido como Método da Exaustão, que teve como precursor o matemático grego Eudoxo (408-355 a.c.).

Neste capítulo apresentaremos a noção de soma infinita, também denominada de série numérica, sua definição, assim como suas propriedades.

Definição 2.0.1. *Uma série de números reais é uma sequência* (s_n) *obtida a partir de uma sequência* (a_n)*, da seguinte forma*

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n,\ n \geqslant 1,$$

ou seja,

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Se a sequência (s_n) converge dizemos que a série **converge**, caso contrário, dizemos simplesmente que a série **diverge**. Em geral, denotamos a série (s_n) por

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ \ ou \ \ simplesmente \ \ \sum a_n.$$

A proposição a seguir nos dá uma condição necessária para a convergência de uma série em função do seu termo geral.

Proposição 2.0.1 (Critério do Termo Geral)**.** *Se* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *for convergente, então* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Demonstração. Seja S a soma da série e $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, onde a_n representa a n-ésima soma parcial. Se tomarmos n suficientemente grande, tanto s_n como s_{n-1} estão perto de S, assim a diferença $s_n - s_{n-1} = a_n$ está próximo de zero. De uma maneira mais formal, temos

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = S - S = 0.$$

■

Observação 2.0.1. Veremos adiante que a série harmônica, $\sum \frac{1}{n}$, é divergente. Dessa forma, a recíproca dessa proposição é falsa. Assim, notamos então que esse critério, do termo geral, só poderá ser utilizado para provar divergências, pois se $\lim a_n = 0$, a série $\sum a_n$ poderá divergir ou convergir.

Exemplo 2.0.1 (Série Geométrica)**.** Dado $q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, a série geométrica $\sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1}$ converge se, e somente se, $\mid q \mid < 1$. Nesse caso, sua soma é igual a $\dfrac{1}{1-q}$.

Demonstração. $(\Leftarrow)$ Fazendo $s_n = 1 + q + q^2 + ... + q^{n-1}$ e, de acordo com a fórmula da soma dos termos de uma progressão geométrica, temos

$$s_n = \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1}{1-q} - \frac{q^n}{1-q}.$$

Daí, vem

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1-q} - \frac{q^n}{1-q}\right) = \frac{1}{1-q},$$

uma vez que se $0 <\mid q \mid < 1$, então $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$.

$(\Rightarrow)$ Por outro lado, se $|q| \geqslant 1$, então $\lim_{n\to\infty} \mid q^n \mid = +\infty$ se $|q| > 1$ e $\lim_{n\to\infty} \mid q^n \mid = 1$ se $|q| = 1$. Dessa forma, pelo critério do termo geral, a série $\sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1}$ é divergente.

■

Proposição 2.0.2. *Se $\sum a_n$ e $\sum b_n$ são séries convergentes e k é um número real qualquer, então:*

(a) a série $\sum ka_n$ converge e $\sum ka_n = k \sum a_n$.

(b) a série $\sum(a_n + b_n)$ converge e $\sum(a_n + b_n) = \sum a_n + \sum b_n$.

Demonstração.

(a) Seja s_n a n-ésima soma parcial da série $\sum a_n$, então a n-ésima soma parcial sa série $\sum ka_n$ é ks_n. Portanto, temos

$$\sum ka_n = \lim_{n\to\infty} ks_n = k \lim_{n\to\infty} s_n = k \sum a_n$$

(b) Se s_n e t_n são, respectivamente, as n-ésimas somas parciais das séries $\sum a_n$ e $\sum b_n$, então a n-ésima soma parcial da série $\sum(a_n + b_n)$ é $s_n + t_n$. Portanto, aplicando propriedades de limites, vem

$$\sum(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty}(s_n + t_n) = \lim_{n\to\infty} s_n + \lim_{n\to\infty} t_n = \sum a_n + \sum b_n.$$

■

Proposição 2.0.3 (Série Telescópica)**.** *Seja (a_n) uma sequência. Então, a série*

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n - a_{n+1})$$

converge se, e somente se, a sequência (a_n) converge e, neste caso, temos:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n - a_{n+1}) = a_0 - \lim a_{n+1}$$

Demonstração. Trivial, pois a série $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n - a_{n+1})$ converge se, e somente se, a sequência das somas parciais

$$s_n = (a_0 - a_1) + (a_1 - a_2) + ...(a_n - a_{n+1}) = a_0 - a_{n+1}$$

onde $n \in \mathbb{N}$, converge e, sendo este o caso, o limite da série será

$$\lim_{n\to\infty} s_n = a_0 - \lim a_{n+1}.$$

■

2.1 Testes de Convergência

A presente sessão irá apresentar alguns critérios de convergência mais usuais, utilizados na literatura matemática. Dessa forma, antes de tentar calcular o limite de uma série, primeiro será necessário saber se ela converge.

Proposição 2.1.1 (Critério de termos positivos)**.** *Se (a_n) é uma sequência de termos não negativos, então $\sum a_k$ converge se, e só se, a sequência (s_n) de suas somas parciais é limitada.*

Demonstração. $(\Rightarrow)$ Sabemos que, por definição, $\sum a_k$ converge se, e somente se, (s_n) converge. Como toda sequência convergente é limitada, concluímos que, se $\sum a_k$ converge, então (s_n) é limitada.
$(\Leftarrow)$ Suponhamos, agora, que (s_n) seja limitada. Ora, como $a_k \geqslant 0$ para todo $k \geqslant 1$, temos que $s_1 \leqslant s_2 \leqslant s_3 \leqslant$ ..... Portanto, (s_n) é uma sequência monótona e limitada, logo convergente, pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass.

■

Como vimos, a recíproca da Proposicão $(2.0.1)$ é falsa. Um contra-exemplo clássico, como já foi mencionado anteriormente, é a série harmônica $\sum \frac{1}{n}$. Essa série, assim como a série geométrica, é bastante importante na matemática, servindo, sobretudo, como referência para alguns testes de convergência. No próximo exemplo, mostraremos a divergência da série harmônica.

Exemplo 2.1.1. A série harmônica $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$ é divergente. Com efeito, temos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} + \cdots .$$

Separando, adequadamente, os termos da soma parcial, vem

$$s_{2^n} = 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^{n-1}+1}+\cdots\frac{1}{2^n}\right) > 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}.$$

Assim, temos que $s_{2^n} = 1 + n \cdot \frac{1}{2}$. Segue-se que $\lim s_{2^n} = +\infty$ e, por conseguinte, $\lim s_n = +\infty$. Logo, a série harmônica diverge.

$\blacksquare$

Proposição 2.1.2 (Teste de Comparação)**.** *Sejam* $(a_n) \geqslant 0$ *e* $(b_n) \geqslant 0$ *sequências numéricas com* $a_n \leqslant b_n$*. Então:*

(i) Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *for divergente, então* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *diverge.*

(ii) Se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *for convergente, então* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge.*

Demonstração. Sejam $s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$ e $t_n = b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n$ somas parciais das séries $\sum a_n$ e $\sum b_n$, respectivamente. Ambas as somas crescentes. Daí, temos

$$0 \leqslant a_1 + a_2 + \cdots + a_n = s_n \leqslant t_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n.$$

(i) Suponha que $\sum a_n$ seja divergente, então $s_n \to \infty$. Mas como $s_n \leqslant t_n$, então $t \to \infty$. logo, a série $\sum b_n$ é divergente.

(ii) Suponha, agora, que $\sum b_n$ seja convergente, então $0 \leqslant s_n \leqslant t_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n \leqslant \sum b_n$. Como s_n é crescente e limitada superiormente, logo a série $\sum a_n$ é convergente.

$\blacksquare$

Definição 2.1.1. *Uma série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é* **absolutamente convergente** *se a série* $\sum_{n=1}^{\infty} \mid a_n \mid$ *é convergente.*

A definção acima representa uma classe de séries cuja convergência, em princípio, é mais fácil de ser estabelecida.

Proposição 2.1.3 (Teste da convergência absoluta)**.** *Toda série absolutamente convergente é convergente.*

Demonstração. Consideremos que a série $\sum \mid a_n \mid$ seja convergente, e seja:

$$\mid a_n \mid = \begin{cases} a_n, & \text{se} \quad a_n \geq 0 \\ -a_n, & \text{se} \quad a_n < 0 \end{cases}$$

Logo, temos que $0 \leqslant \mid a_n \mid + a_n \leqslant 2 \mid a_n \mid$ é limitada superiormente e, como $\sum 2 \mid a_n \mid = 2 \sum \mid a_n \mid$ é convergente, então $\sum (\mid a_n \mid + a_n)$ é convergente, pela preposição 2.6. Assim, $\sum (\mid a_n \mid + a_n) = \sum \mid a_n \mid + \sum a_n$ donde, por hipótese, $\sum \mid a_n \mid$ converge e, consequentemente, $\sum a_n$ também converge.

■

A reciproca dessa proposição não é válida, isso quer dizer que, há séries convergentes que não são absolutamente convergentes. Um resultado bastante conhecido na matemática é o **critério de Leibniz** para convergência de séries, ao qual faz referência a séries alternadas.

Proposição 2.1.4 (Critério de Leibniz). *Seja (a_n) é uma sequência não crescente de números reais positivos tal que*

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0.$$

Então a série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ *é convergente.*

Demonstração. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. A condição $a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant \ldots > 0$ garante facilmente que

$$s_1 \geqslant s_3 \geqslant s_5 \geqslant \ldots \geqslant s_6 \geqslant s_4 \geqslant s_2.$$

Ora, por outro lado, temos $m \in \mathbb{N}$, daí

$$\mid s_{2m-1} - s_{2m} \mid = a_{2m} \to \infty$$

por sua vez, a desigualdade das somas parciais garante claramente que a sequência (s_n) é de Cauchy e, consequentemente, é convergente, conforme o desejado.

■

Proposição 2.1.5 (Teste da razão). *Seja (a_n) uma sequência de termos não nulos, tal que* $\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L$. *Então:*

(i) Se $L < 1$, então a série $\sum a_n$ converge absolutamente;

(ii) Se $L = 1$, então esse teste não dá informações sobre sua convergência;

(iii) Se $L > 1$, então a série $\sum a_n$ será divergente.

Demonstração. Faremos a demonstração do item (i). Suponhamos que

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L < 1.$$

Tome $\epsilon > 0$ tal que $L + \epsilon < 1$. Então, pelo limite acima segue que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - L\right| < \epsilon, \ \ \forall n > n_0,$$

ou seja

$$0 < \frac{a_{n+1}}{a_n} < L + \epsilon, \ \ \forall n > n_0$$

Logo, fixando $n \geqslant n_0$ podemos escrever

$$\begin{array}{c}
0 < \dfrac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} < L + \epsilon \\
0 < \dfrac{a_{n_0+2}}{a_{n_0+1}} < L + \epsilon \\
0 < \dfrac{a_{n_0+3}}{a_{n_0+2}} < L + \epsilon \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
0 < \dfrac{a_n}{a_{n-1}} < L + \epsilon.
\end{array}$$

Multiplicando todos os termos da desigualdade acima, obtemos

$$\frac{a_n}{a_{n_0}} < L + \epsilon,$$

ou seja,

$$0 < a_n < \frac{a_{n_0}}{(L+\epsilon)^{n_0}}.(L+\epsilon)^n$$

para todo $n > n_0$. Como a série

$$\frac{a_{n_0}}{(L+\epsilon)^{n_0}}\sum (L+\epsilon)^n$$

é uma série geométrica de razão $L + \epsilon < 1$, então é convergente e, portanto, pelo critério da comparação segue que a série $\sum a_n$ é convergente.

$\blacksquare$

Proposição 2.1.6 (Teste da raiz). *Se existe L tal que* $\sqrt[n]{| a_n |} \leqslant L < 1$ *para todo* $n > n_0$ *então* $\sum a_n$ *é absolutamente convergente. Em outras palavras, se* $\lim \sqrt[n]{| a_n |} < 1$ *então a série* $\sum a_n$ *converge (absolutamente).*

Demonstração. Seja $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{| a_n |} = L < 1$. Assim, dado $\epsilon > 0$ tal que $L + \epsilon < 1$, $\exists n_0 > 0$ tal que para todo $n \geqslant n_0$, temos $| \sqrt[n]{| a_n |} - L | < \epsilon$, ou seja,

$$0 < \sqrt[n]{| a_n |} < L + \epsilon,$$

que por sua vez implica em

$$0 < a_n < (L + \epsilon)^n.$$

Como $L + \epsilon < 1$, temos que a série geométrica $\sum (L + \epsilon)^n$ é convergente e, pelo teste de comparação, Proposição $(2.1.2)$, concluímos que a série $\sum a_n$ também é convergente, sendo absolutamente convergente.

$\blacksquare$

Teorema 2.1.1 (Teste da integral). *Seja* $f : [1, +\infty] \to \mathbb{R}$ *uma função contínua, positiva e decrescente, para todo* $x \geq 1$. *Ponha* $a_n = f(n)$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$. *Então, a série* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge se, e somente se, a integral imprópria* $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)dx$ *for convergente.*

Demonstração. Como a função f é decrescente, então temos que, para todo $x \in [k, k+1]$, com $k \in \mathbb{N}$,

$$f(k + 1) \leq f(x) \leq f(k)$$

donde, integrando em $[k, k + 1]$, temos

$$\int_k^{k+1} f(k + 1)dx \leq \int_k^{k+1} f(x)dx \leq \int_k^{k+1} f(k)dx,$$

o que implica em

$$f(k + 1) \leq \int_k^{k+1} f(x)dx \leq f(k).$$

Somando $k = 1$ até um n fixado, obtemos

$$\sum_{k=1}^{n} f(k+1) \leq \sum_{k=1}^{n} \int_{k}^{k+1} f(x)dx \leq \sum_{k=1}^{n} f(x),$$

e como $a_n = f(n)$, obtemos

$$\sum_{k=1}^{n} a_{k+1} \leq \int_{1}^{n} f(x)dx \leq \sum_{k=1}^{n} a_n. \tag{2.1.1}$$

Analisaremos, agora, os dois casos do teorema.

$(\Rightarrow)$ Suponhamos que a série $\sum a_n$ converge. Ora, então isso implica que a sequência (s_n), das somas parcias, é limitada superiormente, isto é, $\exists n_0 > 0$ tal que

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \leq n_0$$

então, da expressão $(2.1.1)$, vem

$$\int_{1}^{n} f(x)dx \leq \sum_{k=1}^{n} a_k \leq n_0,$$

donde se conclui que $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} f(x)dx$ converge.

$(\Leftarrow)$ Suponhamos, reciprocamente, que a integral $\displaystyle\int_{1}^{\infty} f(x)dx$ seja convergente. Logo, para todo $n > 1$ fixado, segue que $\exists L > 0$ tal que

$$\int_{1}^{\infty} f(x)dx \leq L$$

da expressão $(2.1.1)$, obtemos

$$\sum_{k=1}^{n} a_{k+1} \leq \int_{1}^{\infty} f(x)dx \leq L.$$

Assim, podemos escrever

$$\sum_{k=1}^{n} a_{k+1} \leqslant L,$$

ou seja,

$$a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_n \leqslant L$$

como $a_1 > 0$, então

$$\mathbf{a_1} + a_2 + a_3 + ... + a_n \leq L + \mathbf{a_1}$$

donde conclímos que

$$\sum_{k=1}^{n} a_n \leq L + a_1.$$

Assim, a sequência (s_n), cuja soma parciais é limitada superiormente, e também crescente e, portanto, a série $\sum a_n$ é convergente, como queríamos demonstrar.

$\blacksquare$

Exemplo 2.1.2. Utilizando, mais uma vez, como exemplo, a série harmônica, isto é, $\sum \frac{1}{n}$, e a série hiper-harmônica, representada por $\sum \frac{1}{n^r}$, para todo real $r > 1$, então o teste da integral possibilita facilmente estabelecer a divergência da série harmônica, bem como a convergência da série hiper-hormônica. De fato, nos dois casos a função f é contínua, positiva e decrescente e, portanto, satisfaz as hipóteses do teorema do teste da integral. Assim, calculando a integral imprópria nas duas situações, temos:

(a) No caso da série harmônica, tomando $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \dfrac{1}{x}$, tem-se

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{t} dt = \lim_{x\to\infty} \int_1^{x} \frac{1}{t} dt = \lim_{x\to\infty} \ln x = +\infty$$

(b) Analogamente, tomando $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \dfrac{1}{x^r}$, com $r > 1$, obtemos

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{t^r} dt = \lim_{x\to\infty} \int_1^{x} \frac{1}{t^r} dt = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1-r} \left(\frac{1}{x^{r-1}} - 1 \right)$$

$\blacksquare$

2.2 Séries de Funções

Até a metade do século XVII, os matemáticos analisaram e desenvolveram vários métodos de convergência de séries de números. A partir daí, houve uma ampla investigação em relação as sequências e séries de funções. Dois brilhantes matemáticos, Newton (1642-1727) e Leibniz (1646-1716), estudaram séries de funções usando métodos algébricos e geométricos.

Newton calculou as séries para funções trigonométricas e para a função exponencial, desenvolvendo muitos resultados de cálculo, tais como área, comprimento de arco e volume. Já Leibniz, somou sequências de recíprocas de números poligonais e, seguindo o trabalho de St. Vicent, somou e analisou várias sequências geométricas.

O conhecimento de séries de funções produziu importantes e significativos avanços em teoria dos números, bem como em diversas áreas da matemática, tamanho sua aplicabilidade e importância.

Dada uma sequência (f_n) de funções $f_n : I \to \mathbb{R}$, definimos a **série de funções**

$$s_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k$$

como a sequência (s_n) de funções $s_n : I \to \mathbb{R}$, tal que $s_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Dizemos que $\sum f_k$ converge pontualmente (respectivamente uniformemente) em I para uma função $f : I \to \mathbb{R}$ se a sequência (s_n) converge pontualmente (respectivamente uniformemente) para f. Nesse caso, escrevemos

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k = f.$$

Proposição 2.2.1. *Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Se a série $\sum f_k$ converge uniformemente em $[a,b]$ para uma função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, então:*

(a) f é contínua;

(b) $\displaystyle\int_a^b \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b f_k(x)dx.$

Demonstração.

(a) Como, por hipótese, cada função f_n é contínua, então $s_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$ é contínua, pois é uma soma finita de funções contínuas. Mas, como $s_n \to f$ uniformemente, segue, pelo Teorema $(1.3.1)$, que f é uma função contínua.

(b) Por hipótese, $s_n \to f$ uniformemente, então, pelo Teorema $(1.3.1)$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b f_k(x)dx &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_a^b f_k(x)dx \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_a^b \sum_{k=1}^{n} f_k(x)dx \\ &= \int_a^b \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f_k(x)dx \\ &= \int_a^b \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)dx. \end{aligned}$$

■

O próximo teorema apresenta um importante critério para verificar se a convergência de uma série de funções é uniforme, representando uma condição suficiente.

Teorema 2.2.1 (M-teste de Weierstrass)**.** *Seja $\sum f_k$ uma série de funções definidas em um intervalo I satisfazendo as seguintes condições:*

(a) Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $M_n > 0$ tal que $| f_n(x) | \leq M_n$, para todo $x \in I$.

(b) A série $\sum M_k$ converge.

Então, a série de funções $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ converge uniformemente em I.

Demonstração. Como, por hipótese, a série numérica $\sum M_k$ converge, então, o teste de comparação para séries de números reais (proposição $(2.1.2)$, garante a convergência absoluta da série $\sum f_k(x)$. Portanto, a função $f : I \to \mathbb{R}$ fica bem definida, bastando, agora, estabelecer a convergência uniforme de $\sum f_k$ para f.

Pelo teste da raiz (proposição $(2.1.6)$), dado $\epsilon > 0$, segue que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > n_0$, implica

$$| f(x) - s_n(x) | = | \sum_{k>n}^{\infty} f_k(x) | \leq \sum_{k>n}^{\infty} | f_k(x) | \leq \sum_{k>n}^{\infty} M_k. \tag{2.2.1}$$

Assim, a convergência da sequência $\sum_{k=1}^{n} M_k$ para $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$, garante que

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) - \sum_{k=1}^{n} M_k\right| < \epsilon$$

para todo $n > n_0$. Portanto, $\left|\sum_{k>n}^{\infty} M_k\right| < \epsilon$. Então, por $(2.2.1)$, concluímos que, para $n \geq n_0$, tem-se

$$\mid f(x) - s_n(x) \mid \leq \sum_{k>n}^{\infty} M_k < \epsilon$$

para todo $x \in I$. Portanto, (s_n) converge uniformemente para f e, consequentemente, $\sum_{k\geq 1}^{\infty} f_k(x)$ converge uniformemente para f, como queríamos mostrar.

■

Exemplo 2.2.1. A série de funções $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\text{sen}\,(kx)$ converge uniformemente em $\mathbb{R}$. De fato, definindo $f_n = \frac{\text{sen}\,(nk)}{n^2}$ e tomando $M_n = \frac{1}{n^2}$, temos:

(i) $\mid f_n(x) \mid = \left|\frac{\text{sen}(nx)}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$, para todo $x \in \mathbb{R}$;

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ é convergente, pois é a série hiper-harmônica com $r = 2$.

Portanto, pelo M-teste de Weierstrass, segue que a série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\text{sen}\,(kx)$ converge uniformemente.

■

Exemplo 2.2.2. A série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ converge uniformemente para todo intervalo da forma $(-a, +a)$. De fato, basta definir $f_n : (-a, a) \to \mathbb{R}$, dado por $f_n(x) = \frac{x^n}{n!}$. Assim, tomando $M_n = \frac{a^n}{n!}$, temos

$$\mid f_n(x) \mid = \left|\frac{x^n}{n!}\right| \leq \frac{a^n}{n!}.$$

Pelo teste da razão, a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$ é convergente, isto é, denotando o termo geral por

$b_n = \dfrac{a^n}{n!}$, segue que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{a^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{n} = 0 < 1.$$

Logo, as condições (a) e (b) do M-teste de Weierstrass são satisfeitas, donde segue, portanto, a convergência uniforme da série $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$.

■

2.3 Séries de potências

Nesta seção estudaremos o importante conceito de séries de potências. O primeiro a utilizar as séries de potências para resolver problemas foi Isaac Newton, em 1665. Newton provou o famoso teorema binomial.

Uma série de potências é uma série de funções do tipo

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$$

com $k \geq 0$, onde a_0, a_1, a_2, ... são números reais dados. E assim como as séries numéricas, $a_n(x - x_0)^n$ representa o n-ésimo termo da série de potências, onde a_n é o n-ésimo coeficiente da série. Segue, abaixo, o teorema central dessa importante teoria.

Teorema 2.3.1. *Dada a série de potências* $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$*, existe* $0 \leq R \leq +\infty$ *tal que a série:*

(a) Converge absolutamente no intervalo $(x_0 - R, x_0 + R)$ *e diverge em* $\mathbb{R} \setminus [x_0 - R, x_0 + R]$.

(b) Converge uniformemente no intervalo $[x_0 - r, x_0 + r]$*, para todo* $0 < r < R$.

Assim, de acordo com o teorema acima, existem três possibilidades de convergência de uma série de potências:

(i) A série converge apenas em $x = x_0$;

(ii) A série converge em todo $x \in \mathbb{R}$;

(iii) Existe $R > 0$ tal que a série converge absolutamente se $\mid x - x_0 \mid < R$ e diverge se $\mid x - x_0 \mid > R$.

Convém destacar que o teorema nada diz em relação a $\mid x - x_0 \mid = R$, isto é, nos pontos $x = x_0 \pm R$, a série pode ser absolutamente convergente, condicionamente convergente ou divergente.

Demonstração. Destacamos, primeiramente, que a série $\sum_{k\geq 0} a_k(x - x_0)^k$ converge absolutamente no intervalo (x_0-R, x_0+R) se, e somente se, a série $\sum_{k\geq 0} a_k x^x$ converge absolutamente no intervalo $(-R, R)$. Da mesma forma, a série $\sum_{k\geq 0} a_k(x - x_0)^k$ converge uniformemente no intervalo $[x_0 - r, x_0 + r]$ se, e somente se, a série $\sum_{k\geq 0}$ converge uniformemente no intervalo $[-r, r]$. Portanto, podemos supor, sem perda de generalidade, que $x_0 = 0$.

Vamos, agora, analisar os dois itens do teorema. assim, temos:

(a) Separando em duas partes, isto, é, em duas afirmações, vem:

1. Se a série $\sum_{k\geq 0} a_k x^k$ é convergente quando $x = \alpha \neq 0$, então ela é absolutamente convergente, qualquer que seja $x \in (-\alpha, \alpha)$.

   De fato, para um certo x, temos:

$$\sum_{k\geq 0}^{\infty} \mid a_k x^k \mid = \sum_{k\geq 0}^{\infty} \mid a_k \alpha^k \mid\mid \frac{x}{\alpha} \mid^k \tag{2.3.1}$$

   assim, como $\sum_{k\geq 0} a_k \alpha^k$ converge, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0 \Rightarrow \mid a_n \alpha^n \mid < 1$. Portanto, segue de (2.9) que, $\mid a_k x^k \mid\mid \frac{x}{\alpha} \mid^k \leq \mid \frac{x}{\alpha} \mid^k$, para $k \geq n_0$. Então, a série geométrica $\sum_{k\geq n_0} \mid \frac{x}{\alpha} \mid^k$ é convergente, onde $\mid \frac{x}{\alpha} \mid < 1$, logo, o teste da comparação garante o mesmo para $\sum_{k\geq 0} \mid a_k x^k \mid$ e, portanto, o mesmo para $\sum_{k\geq 0} \mid a_k x^k \mid$.

2. Se a série $\sum_{k\geq 0} a_k x^k$ é divergente quando $x = \beta \neq 0$, então ela é divergente, qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$ tal que $\mid x \mid > \mid \beta \mid$. De fato, para um certo x, se $\sum_{k\geq 0} a_k x^k$ convergisse, então, pela afirmação do item anterior, tal convergência acarretaria a convergência absoluta e, consequentemente, a convergência da série $\sum_{k\geq 0} a_k \beta^k$. O que seria, evidentemente, um absurdo.

   Diante das afirmações (1) e (2), a série $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ garante que uma das três possibilidades ocorra:

(i) A série converge quando $x = 0$;

(ii) A série converge absolutamente, isso para todo $x \in \mathbb{R}$;

(iii) Existem α, $\beta \neq 0$ tais que $\mid \alpha \mid<\mid \beta \mid$ e a série em questão converge absolutamente quando $\mid x \mid< \alpha$ e diverge, consequentemente, quando $\mid x \mid>\mid \beta \mid$.

Daí, se um dos casos (i) ou (ii) ocorrer, nada mais a fazer. Seja, agora, a analise e demonstração do caso (iii).

Ocorrendo o caso (iii), o real abaixo positivo fica bem definido:

$$R = \{r > 0; \sum_{k=0} a_k u^k \, converge \, absolutamente \, quando \, |u| < r\}$$

Afirmamos que $\sum_{k=0} a_k x^k$ converge absolutamente quando $|x| < R$ e diverge quando $|x| > R$. Estudando os dois casos de forma separada, temos:

• Se $\mid x \mid< R$, tome r tal que $\mid x \mid< r < R$ e $\sum_{k=0} a_k u^k$ converge absolutamente quando $\mid u \mid< r$. Então, é imediato, que $\sum_{k=0} a_k x^k$ converge absolutamente.

• Se $\mid x \mid> R$ e $\sum_{k=0} a_k x^k$ convergisse, então, tomando S tal $R < S <\mid x \mid$, seguiria da afirmação anterior e que $\sum_{k=0} a_k u^k$ converge absolutamente quando $\mid u \mid< S$. Ora, mas isso contradiz a definição de R, logo, segue que $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ diverge.

(b) Seja dado $0 < r < R$, segue, como visto foi visto anteriormente, que $\sum_{k=0} \mid a_k r^k \mid$ converge. Então, fazendo $M_k =\mid a_k r^k \mid$, temos, para $\mid x \mid\leq r$, que $\mid a_k x^k \mid\leq\mid a_k r^k \mid= M_k$. Portanto, pelo teorema 2.2 (M-teste de Weierstrass), a série $\sum a_k x^k$ converge uniformemente no intervalo $[-r, +r]$, como queríamos mostrar.

■

Convém destacar, em termos de notação, que o R, citado no teorema anterior, é chamado de **raio de convergência**. O próximo teorema explícita, de uma forma bastante clara e objetiva, em certas circunstâncias, uma forma de calcular esse R.

Corolário 2.3.1. *Seja dada uma sequência* $(a_n)_{\geq 0}$ *de números reais não nulos. Se existe* $0 \leq R \leq +\infty$ *tal que* $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = R$*, então a série de potências* $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$ *tem raio de convergência R.*

Demonstração. Representando por a_n o termo geral da série e aplicando o teste da razão, temos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mid a_{n+1} \mid}{\mid a_n \mid} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}}{a_n(x-x_0)^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\mid x-x_0 \mid}{\mid \frac{a_n}{a_{n+1}} \mid} = \frac{\mid x-x_0 \mid}{R}.$$

O teste da razão garante que a série $\sum_{k\geq 0} a_k(x-x_0)^k$ converge absolutamente se $\dfrac{\mid x-x_0 \mid}{R} < 1$ e diverge se $\dfrac{\mid x-x_0 \mid}{R} > 1$. Assim, a série em questão converge absolutamente se $\mid x-x_0 \mid < R$ e diverge se $\mid x-x_0 \mid > R$. Portanto, o Teorema $(2.3.1)$ garante que o raio de convergência da série é igual a R.

■

Exemplo 2.3.1. (a) Considere a série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-3)^{k+1}}{k}.$$

Aplicando o teste da razão, temos

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(x-3)^{n+2}}{n+1} . \frac{n}{(x-3)^{n+1}} \right| = \mid x-3 \mid \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}$$

e, portanto, a série converge absolutamente quando $\mid x-3 \mid < 1$, o que equivale a $2 < x < 4$, e consequentemente, diverge quando $\mid x-3 \mid > 1$. Bom, em relação ao que acontece nas extremidades desse intervalo, o Teorema $(2.3.1)$ não pode ser previsto antecipadamente, isto é, $\mid x-3 \mid = 1$. Nesse caso, se faz necessário uma análise caso a caso, daí a equação $\mid x-3 \mid = 1$ possui soluões $x_1 = 2$ e $x_2 = 4$ e, levando esses valores à série original, obtemos as seguintes séries:

• Para $x_1 = 2$ a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ é condicionalmente convergente;

• Para $x_2 = 4$ a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ é divergente (série harmônica).

Portanto, o conjunto dos valores de x que tornam a série convergente é o intervalo $2 \leq x < 4$.

(b) Já na série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} x^{2^k}$$

não podemos aplicar o corolário $(2.3.1)$, pois apresenta uma infinidade de termos com coeficientes iguais a zero, isto é,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} x^{2^k} = \mathbf{0}x + x^2 + \mathbf{0}x^3 + \frac{1}{2}x^4 + \cdots .$$

(c) Na série $\sum_{k=0}^{\infty} (\alpha x)^k$, com $\alpha \neq 0$, o corolário $(2.3.1)$ pode ser aplicado. Temos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\mid (\alpha x)^{n+1} \mid}{\mid (\alpha x)^n \mid} =\mid \alpha x \mid,$$

donde

$$\mid \alpha x \mid < 1 \Rightarrow \mid \alpha \mid\mid x \mid < 1 \Rightarrow \mid x \mid < \frac{1}{\mid \alpha \mid},$$

que é uma progressão geométrica, logo

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\alpha x)^k = \frac{1}{1 - \alpha x}.$$

■

Teorema 2.3.2. *Se a série de potências* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ *tem raio de convergência* $R > 0$, *então:*

(a) A função $f : (x_0 - R, x_0 + R) \longrightarrow \mathbb{R}$, *dada por* $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$, *é infinitamente derivável.*

(b) Para todo $n \in \mathbb{N}$, *temos* $f^{(n)} = \sum_{k \geq n} \frac{k!}{(k-n)!} \cdot a_k (x - x_0)^{k-n}$, *para todo* $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$, *e a função que define* $f^{(n)}$ *também tem raio de convergência R.*

Cabe destacar aqui, que os processos de derivação e integração termo a termo para séries de potências são motivados pelas funções polinomias, para as quais essas operações são óbvias.

Demonstração. Seja $f_k : (x_0 - R, x_0 + R) \to \mathbb{R}$ a função definida por $f_k = a_k (x - x_0)^k$. Então, f_k é contínua e possui convergência uniforme em $[x_o - r, x_0 + r]$, para todo $0 < r < R$. Sem perda de generalidade, podemos supor $x_0 = 0$. Seja S o raio de convergência da série $\sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$, temos $S = R$ e $f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$, $\forall x \in (-R, R)$. Observe, agora, que $\mid a_k x^k \mid \leq \mid k a_k x^k \mid$, para todo $k \geqslant 1$, onde k é inteiro e $x \in \mathbb{R}$. Portanto, se a série $\sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$

converge absolutamente, então o mesmo se passa com a série $\sum_{k=1}^{\infty} ka_k x^k$ e, consequentemente, com $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$. Assim, $S \leq R$. Considerando $0 < x < R$ e $0 < h < R - x$, temos

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{1}{h}\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k (x+h)^k - \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \left(\frac{(x+h)^k - x^k}{h}\right).$$

Pelo teorema do valor médio, também conhecido como teorema de Lagrange, para cada $k \geq 1$ existe $c_k \in (x, x+h)$ tal que $\dfrac{(x+h)^k - x^k}{h} = kc_k^{k-1}$. Portanto, vem

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \sum_{k=1}^{\infty} ka_k c_k^{k-1},$$

de forma que a série $\sum_{k\geq 1} ka_k c_k^{k-1}$ converge absolutamente e, como

$$\mid ka_k x^{k-1} \mid \leqslant \mid ka_k c_k^{k-1} \mid,$$

o teste da comparação garante que $\sum_{k\geq 0} ka_k x^{k-1}$ também converge absolutamente. Da mesma forma, bastante análoga, tal série converge absolutamente se $-R < x < 0$, onde $S \geq R$.

Definindo a função $g : (-R, R) \to \mathbb{R}$, dada por $g(x) = \sum_{k\geq 0} ka_k x^{k-1}$, temos

$$\int_0^x g(t)dt = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{ka_k}{k} x^k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k = f(x) - a_0.$$

Assim, pelo teorema fundamental do cálculo, para $\mid x \mid < R$, temos

$$f'(x)dx = g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} ka_k x^{k-1}.$$

Como f' já foi calculada, então, pela hipótese do princípio de indução finita, temos

$$f^{(m)}(x) = \sum_{k\geq m}^{\infty} \frac{k!}{(k-m)!} \cdot a_k (x - x_0)^{k-m},$$

essa série também tem raio de convergência R. Daí $(f^{(m)})' = f^{m+1}$ tem raio de convergência R e é tal que

$$f^{(m+1)}(x) = \sum_{k \geq m+1}^{\infty} \frac{k!}{(k-m)!} \cdot (k-m)a_k(x-x_0)^{k-m-1}$$

$$f^{(m+1)}(x) = \sum_{k \geq m+1}^{\infty} \frac{k!}{(k-(m+1))!} \cdot a_k(x-x_0)^{k-(m+1)}.$$

■

Exemplo 2.3.2. Se a série de potências $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ tem raio de convergência $R > 0$, então a série $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1}(x-x_0)^{k+1}$ também tem raio de convergência R. De fato, como

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k = \frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1}(x-x_0)^{k+1},$$

o teorema (2.3.2) garante que ambas as séries têm o mesmo raio de convergência.

■

2.4 Séries de Taylor

Da seção anterior, vimos que as séries de potências eram absolutamente convergentes em intervalos simétricos em torno do ponto no qual foram desenvolvidas, eram deriváveis e, consequentemente, integráveis, isso termo a termo. As séries de Taylor representam um aprofundamento das séries de potências. O desenvolvimento de funções em séries de Taylor constitui uma ferramenta utilizada em áreas como cálculo e análise numérica. Sendo, portanto, bastante útil, do ponto de vista matemático, expressar funções como soma de termos infinitos, aproximar funções ao redor de um ponto, encontrar seus pontos de máximo e mínimo, estudar convergências de métodos interativo e, ainda, buscar soluções de equações diferenciais ordinárias.

2.4.1 Polinômios e séries de Taylor

Seja f uma função de classe C^{∞}. Então, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$\int_{x_0}^{x} f'(t)dt = f(x) - f(x_0).$$

Aplicando o método da integração por partes, com $u = f'(t)$, $v' = 1$ e, sem perda de gerenalidade, escolhendo convenientemente $v(t) = t - x$, obtemos

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x} f'(t)dt &= [(t-x)f'(t)]_{t=x_0}^{t=x} - \int_{x_0}^{x}(t-x)f''(t)dt \\ &= f'(x_0)(x-x_0) - \int_{x_0}^{x}(t-x)f''(t)dt.\end{aligned}$$

Como $f(x) = f(x_0) + \displaystyle\int_{x_0}^{x} f'(t)dt$, então

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) - \int_{x_0}^{x}(t-x)f''(t)dt.$$

Fazendo esse processo, integração por partes, várias vezes, percebemos um padrão formado, isto é,

$$f(x) = p_n(x) + (-1)^n \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(t-x)^n dt$$

onde

$$p_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}}{n!}(x-x_0). \tag{2.4.1}$$

De acordo com o Princípio da Indução Finita, essa última expressão é válida para $n = 0$ e, pela hipótese de indução, a mesma é válida para qualquer n. Basta, agora, mostrar que se valer para algum $n \geq 0$ então também valerá para o passo seguinte, isto é, $n + 1$. Mas isso decorre, evidentemente, da aplicação do método da integração por partes.

Definição 2.4.1. *O polinômio p_n em* $(2.4.1)$ *é o* **polinômio de Taylor** *de grau n da função f e, se f for de classe C^∞ em torno do ponto x_0, então a sequência $n \mapsto p_n$ é a* **série de Taylor** *da função f centrada em x_0, denotada resumidamente por*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

No caso particular, para $x_0 = 0$, a série tem a forma

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

e recebe o nome de **série de Maclaurin**.

A função f será denominada **analítica** em $x = a$ quando ela puder ser representada por uma série de Taylor em algum intervalo aberto centrada em a:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Exemplo 2.4.1 (Fórmula de Euler)**.** Considere a função exponecial $f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$, definida por $f(x) = e^x$. Como f é contínua para todo $\mathbb{R}$ e infinitamente derivável, então para $x = 0$ e aplicando a série de Taylor, vem

$$f(x) = e^x = 1 + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

Como $\dfrac{d^n}{dx^n}(e^x) = e^x$, temos

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = ... = f^{(n)}(0) = ... = e^0 = 1,$$

e com isto, concluímos que

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

■

A fórmula de Taylor com resto de lagrange estabelece uma condição necessária e suficiente para que uma função infinitamente derivável possa ser aproximada pelo seu polinômio de Taylor. O teorema a seguir fornece uma fórmula para o resto da aproximação de f pelo seu polinômio.

Teorema 2.4.1 (Fórmula de Taylor com Resto de Lagrange)**.** *Sejam I um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função n vezes derivável em I. Para x_0, $x \in I$ distintos, existe c entre x_0 e x tal que*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Demonstração. Suponha, sem perda de generalidade, que $x_0 < x$ (se $x < x_0$, o argumento é análogo). Seja $g : [x_0, x] \to \mathbb{R}$ uma função dada por:

$$g(t) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k - \frac{\alpha}{n!}(x-t)^n$$

onde $\alpha \in \mathbb{R}$ é escolhido de tal forma que $g(x_0) = 0$. assim, como, por hipótese, f é n vezes derivável em I e $[x_0, x] \subset I$, então é imediato que g seja derivável em $[x_0, x]$. Como $g(x_0) = g(x) = 0$, então o Teorema de Rolle garante a existência de $c \in (x_0,\, x)$ de tal forma que $g'(c) = 0$. Daí, temos a seguinte expressão

$$g'(t) = \frac{\alpha - f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1},$$

para $c \in (x_0,\, x)$, temos $g'(c) = 0$ se, e somente se, $\alpha = f^{(n)}(c)$. Portanto,

$$0 = g(x_0) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(n)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k - \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-x_0)^n$$

donde,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-x_0)^n,$$

como queríamos demostrar.

■

Corolário 2.4.1. *Sejam I um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função infinitamente derivável. Se existe uma constante $C \geq 0$ tal que $\mid f^{(n)}(x) \mid \leq C^n$, para todo $n \geq 1$ e $x \in I$, então, fixado $x_0 \in I$, temos*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k,$$

para todo $x \in I$.

Demonstração. Fixando $x \in I$ e $n \in \mathbb{N}$, segue , do teorema anterior (Fórmula de Taylor com Resto de Lagrange), que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Afirmo: $\dfrac{a^n}{n!} \to 0$ quando $n \to +\infty$, para $a \in \mathbb{R}$ tal que $\mid a \mid > 1$. Ora, mais isso é imediato, basta aplicar o teste da razão. Assim,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{a^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a}{n+1}\right|,$$

donde $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a}{n+1} = 0 < 1$, que converge absolutamente.

Seja c entre x_0 e x. Logo,

$$\left|\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-x_0)^n\right| \leq \frac{(C \mid x - x_0 \mid)^n}{n!} \to 0$$

para $n \to +\infty$.

■

Exemplo 2.4.2. Diante do resultado do corolário acima e da fórmula de Taylor com resto de Lagrange, podemos mostrar a validade que a série de Taylor da função exponencial converge para tal função em toda a reta, generalizando e legitimando o exemplo $(2.4.1)$, ou seja,

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}x^k,\ \forall \in \mathbb{R}.$$

Tomando $x \in \mathbb{R}$ e diante do Teorema da Fórmula de Taylor com Resto de Lagrange para $x_0 = 0$, vem

$$e^x = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{x^k}{k!} + e^c.\frac{x^n}{n!},$$

onde existe um c entre x_0 e x, ou seja, c entre 0 e x. Vamos mostrar que esse reto tende a zero. Temos

$$\left|\frac{e^c}{n!}x^n\right| = e^c\cdot\frac{\mid x\mid^n}{n!} \leq max\{e^0, e^x\}\cdot\frac{\mid x\mid^n}{n!} \xrightarrow{n} 0.$$

Portanto,

$$\lim_{n\to\infty}\left(e^c\cdot\frac{x^n}{n!}\right) = e^c\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!} = e^c\cdot 0 = 0.$$

■

CAPÍTULO 3

Equações Diferenciais

As equações diferenciais são objetos de intensas atividades que envolvem pesquisa, tanto na área científica quanto no setor tecnológico, tamanha a diversidade e aplicabilidade em suas aplicações. Elas descrevem situações do mundo real, tendo, portanto, desempenhado um papel relevante na ligação e interação com outras ciências.

O estudo das equações diferencias teve início com o advento do cálculo diferencial e integral, ao qual data do século XVII, idealizados, de forma independente, pelos brilhantes matemáticos Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). Diante das inúmeras contribuições desses dois cientistas as mais diversas áreas do conhecimento humano, convém destacar suas colaborações ao desenvolvimento da teoria das equações diferenciais. Newton formulou as três leis que levam o seu nome e a lei da gravitação universal que possibilitaram obter equações diferenciais ordinárias; assim como, visto no capítulo anterior, viabilizou o estudo para exprimir função em torno de uma série infinita. Já Leibniz desenvolveu o método da separação de variáveis e o método de resolução de equações de primeira ordem.

Merecem destaque especial, pela grande relevância e importância para a difusão, evolução e aperfeiçoamento dessa teoria, os matemáticos Euler, Bernoulli, Cauchy, Lagrange, Laplace, Gauss, Fourier e Poincaré. Leonhard Euler (1707-1783), certamente o maior matemático do século XVII, identificou a condição para que equações diferenciais de primeira ordem sejam exatas, encontrou solução geral para equações lineares com coeficientes constantes. Joseph-

Louis Lagrange (1736-1813) mostrou que a solução de uma equação diferencial homogênia de ordem n é uma combinação linear de n solução independentes. Carl Friedrich Gauss (1777-1855), considerado o príncipe dos matemáticos, e Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) contribuíram no desenvolvimento da teoria e conceitos de funções de variáveis complexas. Jean Le Round D'Alembert (1717-1783) mostrou a que as equações diferenciais parciais estão relacionadas com a física matemática e analisou, também, a solução para equação da onda. Joseph Fourier (1768-1830) estudou a propagação do calor em corpos sólidos, onde desenvolveu suas séries e explicitou seus coeficientes, surgindo, dessa forma, a equação do calor e as suas brilhantes ideias conduziram à criação de um novo ramo dentro da matemática.

Com o avanço e desenvolvimento pela qual a matemática passou ao longo dos anos, foi possível, sobretudo, a resolução de inúmeros problemas, os quais puderam, de certa forma, ser modelados em uma equação diferencial, dos quais podemos citar: cálculo das variações, mecânica celeste, teoria das oscilações, elasticidade, dinâmica dos fluidos, dentre outras.

O presente capítulo fará uma análise sistemática desse importante e fértil campo da matemática, impulsionado pelo progresso científico. Como mencionou, certa vez, o talentoso matemático russo Nikolai Lobachevsky (1792-1856), "não há ramo da matemática, por mais abstrato que seja, que não possa um dia vir a ser aplicado aos fenômenos do mundo real".

3.1 Equações Diferenciais Ordinárias

De uma maneira geral, podemos dizer que temos uma equação diferencial se na equação estão envolvidas funções incógnitas e suas derivadas.

Uma equação diferencial é dita ordinária (EDO) se a função incógnita depender apenas de uma variável. Se depender de mais de uma variável será denominada equação diferencial parcial.

A ordem de uma equação diferencial é indicada pela maior ordem de derivação que aparece na equação. Uma EDO de ordem n tem como expressão geral

$$F\Big(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \cdots, \frac{d^ny}{dx^n}\Big) = 0, \tag{3.1.1}$$

onde F é uma função de $n+2$ variáveis.

A equação (3.1.1) representa a relação entre a variável independente x e os valores da função incógnita y e suas n primeiras derivadas. Quando pudermos explicitar $\dfrac{d^ny}{dx^n}$ na equação

(3.1.1) teremos uma forma normal da EDO de ordem n, isto é,

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f\Big(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \cdots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\Big). \tag{3.1.2}$$

As equações na forma normal podem sempre ser escritas na forma da equação 3.1.1, basta considerar

$$F\Big(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \cdots, \frac{d^n y}{dx^n}\Big) = \frac{d^n y}{dx^n} - f\Big(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \cdots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\Big) = 0. \tag{3.1.3}$$

Entretanto, uma equação na forma geral (3.1.1) pode acarretar mais de uma equação na forma normal (3.1.2). Por exemplo,

$$\Big(\frac{dy}{dx}\Big)^2 - x = 0$$

leva às duas equações na forma normal:

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{x} \quad \text{e} \quad \frac{dy}{dx} = -\sqrt{x}.$$

A equação diferencial (3.1.2) é chamada linear se a função f for linear nas variáveis $y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \cdots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$. Sendo assim, a forma geral de uma EDO linear de ordem n é

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \tag{3.1.4}$$

onde a_n não é identicamente nula.

Qualquer função f, definida em algum intervalo I, que, quando substituída na equação diferencial reduz a equação a uma identidade, será chamada de solução para a equação no intervalo, ou seja, qualquer função suficientemente diferenciável que satisfaça a equação no intervalo I.

Ao resolver uma equação diferencial ordinária de n-ésima ordem, encontramos uma família de soluções a n-parâmetros. Chama-se de solução **trivial** em uma equação diferencial toda solução que é identicamente nula no intervalo I. Já a **solução particular** é quando qualquer solução não depende de parâmetros. Uma **solução singular** é qualquer solução que não pode ser obtida da família de solução a n-parâmetros. Por fim, a **solução geral** é quando a família de soluções n-parâmetros fornece todas as soluções para a equação diferencial no intervalo I.

Uma solução para a EDO $(3.1.1)$ que pode ser escrita na forma $y = f(x)$ é chamada de **solução explícita**. Dizemos que uma relação $G(x, y) = 0$ é uma **solução implícita** da EDO $(3.1.1)$ em um intervalo I, se ela define uma ou mais soluções explícitas em I.

Para uma equação diferencial de orem n, o problema

$$\begin{cases} \text{Resolver : } \dfrac{d^n y}{dx^n} = f\Big(x, y, \dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2 y}{dx^2}, \cdots, \dfrac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\Big) \\ \text{Sujeito a : } y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases} \tag{3.1.5}$$

em que $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ são constantes arbitrárias, é chamado de um problema de valor inicial (PVI) de ordem n. Os valores específicos $y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$ são chamados de condições iniciais. Em particular,

$$\begin{cases} a_n(x)\dfrac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\dfrac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\dfrac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \\ y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases} \tag{3.1.6}$$

é um PVI linear de ordem n.

A seguir enunciaremos o teorema de existência e unicidade para equações diferenciais ordinárias lineares de ordem $n \in \mathbb{N}$, que certamente é um dos mais importantes de toda teoria, garantindo, sob certas condições gerais e facilmente aplicáveis, a existência e unicidade de soluções para problemas de valor inicial de equações diferenciais ordinárias

Teorema 3.1.1 (Existência e Unicidade)**.** *Sejam $a_n(x), a_{n-1}(x), \ldots, a_1(x), a_0(x)$ e $g(x)$ funções contínuas em um intervalo I com $a_n(x) \neq 0$ para todo x neste intervalo. Se x_0 é algum ponto deste intervalo, então existe uma única solução $y(x)$ para o PVI* $(3.1.6)$ *neste intervalo.*

Para os nossos propósitos, estudaremos apenas as EDO's lineares de primeira e segunda ordens.

3.2 Equações Diferenciais Ordinárias Lineares de Primeira Ordem

Segue, por $(3.1.4)$, que uma EDO linear de primeira ordem tem a forma

$$a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x), \tag{3.2.1}$$

cuja forma normal é

$$y' = p(x)y + f(x), \tag{3.2.2}$$

onde $p(x) = -\dfrac{a_0(x)}{a_1(x)}$ e $f(x) = \dfrac{g(x)}{a_1(x)}$.

Proposição 3.2.1 (Método de Variação dos Parâmetros)**.** *Se f é uma função contínua em um intervalo I, então o conjunto de todas soluções da EDO linear de primeira ordem* (3.2.2) *é o conjunto*

$$\mathcal{W} = \left\{ y(x) = e^{\int p(x)dx} \int f(x)e^{-\int p(x)dx}dx + ce^{\int p(x)dx} : c \in \mathbb{R} \right\}$$

em I.

Demonstração. Em primeiro lugar, mostraremos que qualquer função de $\mathcal{W}$ é uma solução de (3.2.2). De fato, seja $y(x) = e^{\int p(x)dx} \int f(x)e^{-\int p(x)dx}dx + ce^{\int p(x)}dx$, $x \in I$ e $c \in \mathbb{R}$. Então,

$$\begin{aligned} y' &= p(x)e^{\int p(x)dx} \int f(x)e^{-\int p(x)dx}dx + f(x) + cp(x)e^{\int p(x)} \\ &= p(x)\left(e^{\int p(x)dx} \int f(x)e^{-\int p(x)dx}dx + ce^{\int p(x)}\right) + f(x) \\ &= p(x)y + f(x). \end{aligned}$$

Vamos mostrar agora que toda solução é desta forma. Seja $\phi(x)$ uma solução qualquer de (3.2.2) em I. Então

$$\frac{d\phi}{dx} = p(x)\phi + f(x), \;\; x \in I.$$

Multiplicando esta equação por $e^{-\int p(x)dx}$, obtemos

$$e^{-\int p(x)dx}\frac{d\phi}{dx} - p(x)e^{-\int p(x)dx}\phi = e^{-\int p(x)dx}f(x), \;\; x \in I,$$

ou

$$\frac{d}{dx}[e^{-\int p(x)dx}\phi] = e^{-\int p(x)dx}f(x), \;\; x \in I.$$

Integrando membro a membro, obtemos

$$e^{-\int p(x)dx}\phi = \int e^{-\int p(x)dx}f(x)dx + c, \;\; x \in I,$$

para alguma constante $c \in \mathbb{R}$. Finalmente, obtemos

$$\phi = e^{\int p(x)dx} \int e^{-\int p(x)dx}f(x)dx + ce^{\int p(x)dx}, \;\; x \in I,$$

para alguma constante $c \in \mathbb{R}$.

$\blacksquare$

Observação 3.2.1. Note que a solução geral da equação $(3.2.2)$ é dada por $y = y_c + y_p$, onde $y_c = ce^{\int p(x)dx}$ é a solução geral da equação homogênea $y' = p(x)y$ e $y_p = e^{\int p(x)dx} \displaystyle\int e^{-\int p(x)dx} f(x)dx$ é uma solução particular da equação não homogênea $(3.2.2)$.

Exemplo 3.2.1. Resolva o PVI

$$\begin{cases} y' = -2y + e^{2x} \\ y(0) = 1 \end{cases} \tag{3.2.3}$$

Solução. Sendo $p(x) = -2$ e $f(x) = e^{2x}$, segue, pela proposição anterior, que

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{\int -2dx} \int e^{2x} e^{\int 2dx} dx + ce^{\int -2dx} \\ &= e^{-2x} \int e^{2x} e^{2x} dx + ce^{-2x} \\ &= \frac{e^{2x}}{4} + ce^{-2x} \end{aligned}$$

é a solução geral da equação $y' = -2y + e^{2x}$.

Devemos agora encontrar a constante $c \in \mathbb{R}$ tal que $y(0) = 1$, isto é, $\dfrac{e^{2.0}}{4} + ce^{-2.0} = 1$, logo, $c = \frac{3}{4}$. Dessa forma,

$$y(x) = \frac{e^{2x}}{4} + \frac{3}{4}e^{-2x}, \ \ x \in \mathbb{R},$$

é a única solução do PVI dado.

$\blacksquare$

Exemplo 3.2.2. Resolva a EDO

$$y' = 2xy.$$

Solução. Sendo $p(x) = 2x$ e $f(x) = 0$, segue, da proposição anterior, que

$$y(x) = e^{\int 2xdx} \int 0.e^{\int -2xdx} dx + ce^{\int 2xdx} = ce^{x^2}$$

é a solução geral da EDO dada em $\mathbb{R}$.

$\blacksquare$

3.3 Equações Diferenciais Ordinárias Lineares de Segunda Ordem

Nessa sessão estudaremos as equações diferenciais ordinárias lineares de segunda ordem,

$$a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x), \tag{3.3.1}$$

onde a_2, a_1, a_0 e g são funções contínuas em um certo intervalo I.

Se $g(x) = 0$ para todo x, a equação será chamada de **homogênea**. Caso contrário, ela é dita **não-homogênea**.

Note que podemos escrever a equação $(3.3.1)$ na forma

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = f(x), \tag{3.3.2}$$

bastando dividir a equação por $a_2(x)$ e definir $p(x) = \dfrac{a_1(x)}{a_2(x)}$, $q(x) = \dfrac{a_0(x)}{a_2(x)}$ e $f(x) = \dfrac{g(x)}{a_2(x)}$.

Teorema 3.3.1 (Princípio da Superposição)**.** *Se y_1 e y_2 são soluções da EDO linear homogênea de segunda ordem, $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, então a combinação linear $c_1y_1 + c_2y_2$ também será solução dessa equação, para quaisquer constantes reais c_1 e c_2.*

Demonstração. Seja $\phi = c_1y_1 + c_2y_2$. Temos, usando a linearidade da derivação, que

$$\begin{aligned}
\phi'' + p\phi' + q\phi &= c_1y_1'' + c_2y_2'' + pc_1y_1' + pc_2y_2' + qc_1y_1 + qc_2y_2 \\
&= c_1(y_1'' + py_1' + qy_1) + c_2(y_2'' + py_2' + qy_2) \\
&= c_1.0 + c_2.0 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

■

Observação 3.3.1. Por indução, mostra-se facilmente que qualquer combinação linear finita de soluções da equação $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ também é uma solução.

Definição 3.3.1. *Dizemos que as funções $f_1(x)$ e $f_2(x)$ são linearmente dependentes (LD) em um intervalo I se existem constantes reais c_1 e c_2, não todas nulas, tais que*

$$c_1f_1(x) + c_2f_2(x) = 0, \;\; \forall x \in I.$$

Caso contrário, as funções são ditas linearmente independentes (LI), isto é, se as únicas constantes para as quais

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) = 0, \ \ \forall x \in I$$

são $c_1 = 0$ *e* $c_2 = 0$.

Definição 3.3.2. *Sejam* $y_1 = \varphi_1(x)$ *e* $y_2 = \varphi_2(x)$ *funções diferenciáveis em um intervalo* $I \subset \mathbb{R}$. *O determinante*

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

é chamado **Wronskiano** *das funções* y_1 *e* y_2.

Teorema 3.3.2. *Sejam* $y_1 = \varphi_1(x)$ *e* $y_2 = \varphi_2(x)$ *funções diferenciáveis em um intervalo* $I \subset \mathbb{R}$. *Se o Wronskiano das funções* y_1 *e* y_2 *for diferente de zero em pelo menos um ponto do intervalo I, então as funções são linearmente independentes. Consequentemente, de forma equivalente, se as funções* y_1 *e* y_2 *são linearmente dependentes em I, então* $W(y_1, y_2) = 0$. *para todo* $x \in I$.

Demonstração. Se as funções y_1 e y_2 são LD, isto é, linearmente dependentes, então existe uma constante λ tal que

$$y_1 = y_1' = \lambda y_2', \ \ \forall x \in I,$$

logo, calculando o Wronskiano, temos

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda y_2 & y_2 \\ \lambda y_2' & y_2' \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} y_2 & y_2 \\ y_2' & y_2' \end{vmatrix} = 0.$$

■

Convém ressaltar, no entanto, que a recíproca desse teorema não é verdadeira.

Teorema 3.3.3. *Duas soluções* y_1 *e* y_2 *da equação*

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

são LI, ou seja, linearmente independentes em I se, e somente se, $W(y_1, y_2) \neq 0$, *para todo* $x \in I$.

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponhamos, por contradição, que $W(y_1, y_2) = 0$. Para um certo x_0 fixado no intervalo I e levando em consideração que y_1 e y_2 são linearmente independentes, então podemos escrever o Wronskiano de tal forma que $W(y_1, y_2) = 0$. Assim, existem constantes c_1 e c_2 não nulas, tais que: $c_1y_1(x_0) + c_2y_2(x_0) = 0$, que derivando ambas essas combinações, temos: $c_1y_1'(x_0) + c_2y_2'(x_0) = 0$. Como y_1 e y_2 são soluções da equação, então pelo princípio da superposição, teorema 3.3, segue que $\varphi(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ também é solução. Assim, $\varphi(x_0) = \dfrac{d\varphi}{dx}(x_0) = 0$. Pela unicidade do teorema segue que $\varphi(x) = 0$ e, consequentemente, $c_1y_1(x) + c_2y_2(x) = 0$, caracterizando dessa forma a linearidade, ou seja, y_1 e y_2 são linearmente dependentes, o que é um absurdo. Portanto, $W(y_1, y_2) \neq 0$.

($\Leftarrow$) Segue de forma imediata do teorema anterior.

■

3.3.1 Equações Lineares Homogêneas com Coeficientes Constantes

Dada a equação linear de primeira ordem $\dfrac{dy}{dx} - ay = 0$, onde a é uma constante, vimos na sessão anterior, que $y = e^{ax}$ é solução. Diante dessa premissa, é bastante salutar e natural procurar e analisar se soluções exponenciais existem para, no nosso caso, EDO's lineares de segunda ordem.

Suponhamos que $y = e^{\lambda x}$ seja uma solução da equação

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{3.3.3}$$

com a, b, c constantes. Então, $y = e^{\lambda x} \Rightarrow y' = \lambda e^{\lambda x} \Rightarrow y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$, que substituindo na equação (3.3.3), resulta

$$a(\lambda^2 e^{\lambda x}) + b(\lambda e^{\lambda x}) + c(e^{\lambda x}) = e^{\lambda x}(a\lambda^2 + b\lambda + c) = 0.$$

Como $e^{\lambda x} \neq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$, então

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0.$$

Esta expressão é chamada de **equação auxiliar** ou **equação característica** associada a equação (3.3.3).

Sendo a equação característica uma equação quadrática, então existem três casos a considerar, em relação as suas raízes:

(i) Raízes Reais Distintas

Sendo λ_1 e λ_2 raízes da equação auxiliar, então encontramos duas soluções: $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ e $y_2 = e^{\lambda_2 x}$, que formam funções linearmente independentes em $\mathbb{R}$. Portanto, a solução geral para a equação (3.3.3) será

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x},$$

com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(ii) Raízes Reais Iguais

Sendo $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = \dfrac{-b}{2a}$ as raízes da equação característica. Assim, obtivemso somente uma solução da equação (3.3.3). Para a outra solução y_2, linearmente independente de $y_1 = e^{-\frac{b}{2a}x}$, tome $y_2 = u(x)y_1$. Donde, substituindo na equação (3.3.3), temos

$$a(u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1'') + b(u'y_1 + uy_1') + cuy_1 = 0$$

ou

$$u(ay_1'' + by_1' + cy_1) + (au''y_1 + 2au'y_1' + bu'y_1) = 0.$$

Como y_1 é uma solução da equação (3.3.3), então $au''y_1 + 2au'y_1' + bu'y_1 = 0$.

Seja $g(x) = \dfrac{du}{dx} \Leftrightarrow u = \displaystyle\int g(x)dx$, substituindo u e y_1 na última equação acima, temos

$$a\frac{dg}{dx}e^{-\frac{b}{2a}x} + 2ag\left(\frac{b}{2a}\right)e^{-\frac{b}{2a}x} + bge^{-\frac{b}{2a}x} = 0.$$

Dessa forma, $a\dfrac{dg}{dx}e^{-\frac{b}{2a}x} = 0 \Rightarrow \dfrac{dg}{dx} = 0$, consequentemente, $g(x) = \dfrac{du}{dx} = k$, onde $k \in \mathbb{R}$.

Tomando $k = 1$, obtemos $u(x) = x$ e como $y_2 = u(x)y_1$, então: $y_2 = xy_1 = xe^{-\frac{b}{2a}}$, ou seja, y_1 e y_2 são linearmente independentes. Portanto, a solução geral da equação (3.3.3) será

$$y = c_1 e^{-\frac{b}{2a}x} + c_2 x e^{-\frac{b}{2a}x},$$

com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(iii) Raízes Complexas Conjugadas

Sendo $\lambda_1 = \alpha + \beta i$ e $\lambda_2 = \alpha - \beta i$ raízes da equação característica, linearmente independentes, então a solução geral da equação (3.3.3) será dada por

$$y = c_1 e^{(\alpha+\beta i)x} + c_2 e^{(\alpha-\beta i)x} = e^{\alpha x}\left(c_1 e^{\beta ix} + c_2 e^{-\beta ix}\right),$$

com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Usando a fórmula de Euler, $e^{\theta i} = cos\theta + isen\theta$, com $\theta \in \mathbb{R}$, podemos escrever

$$y = e^{\alpha x}[c_1(cos\beta x + isen\beta x) + c_2(cos\beta x - isen\beta x)].$$

Portanto,

$$y = e^{\alpha x}(k_1 cos\beta x + k_2 sen\beta x),$$

com $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$.

Exemplo 3.3.1. A solução geral da equação

$$y'' + y' + 3y = 0$$

é determinada através da equação característica $\lambda^2 + \lambda + 3 = 0$, onde suas raízes complexas são, $\lambda_1 = -\frac{1}{2} + i\sqrt{2}$ e $\lambda_2 = -\frac{1}{2} - i\sqrt{2}$. Assim, suas soluções são linearmente independentes em $\mathbb{R}$, e então podemos considerar a solução geral real dada por

$$y = e^{-\frac{1}{2}}(c_1 cos\sqrt{2}x + ic_2 sen\sqrt{2}x),$$

com c_1 e c_2 reais.

3.3.2 Equações Lineares Não-Homogêneas com Coeficientes Constantes

Toda equação linear de segunda ordem não-homogênea, com coeficientes constantes, é definida por

$$y'' + ay' + by = g(x), \tag{3.3.4}$$

onde a função g é contínua no intervalo $I \subset \mathbb{R}$.

Teorema 3.3.4. *Sejam $y_1(x)$ e $y_2(x)$ soluções, linearmente independentes, da equação homogênea*

$$y'' + ay' + by = 0$$

e seja $y_p(x)$ uma solução da equação não-homogênea, equação $(3.3.4)$. *Então, toda solução da equação* $(3.3.4)$ *será da forma*

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + y_p(x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Demonstração. Afirmação: A diferença de duas soluções quaisquer da equação não-homogênea $(3.3.4)$, é uma solução da equação homogênea. De fato, para fixar ideias, sejam $h_1(x)$ e $h_2(x)$ soluções da equação não-homogênea, e definimos a função $h(x)$, de tal forma que $h = h_1 - h_2$. Temos,

$$h'' + ah' + bh = h_1'' + h_2'' + ah_1' + ah_2' + bh_1 + bh_2 = (h_1'' + ah_1' + bh_1) + (h_2'' + ah_2' + bh_2) = 0 + 0 = 0,$$

logo, $h(x) = h_1(x) - h_2(x)$ é solução da equação homogênea.

Seja, agora, $y = \varphi(x)$ uma solução qualquer da equação não-homogênea. Então, pela afirmação acima, $h(x) = \varphi(x) - y_p(x)$ é uma solução da equação homogênea. Dessa forma, existem $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tais que $h(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$, donde concluímos que

$$\varphi(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + y_p(x).$$

■

Exemplo 3.3.2. Seja a EDO

$$y'' - 4y' + 4y = x^2 - 2x + 1.$$

De acordo com o teorema anterior, a solução geral dessa equação é da forma $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$, sendo $y_h(x)$ a solução geral da EDO homogênea associada e $y_p(x)$ uma solução particular da EDO não-homogênea. A equação característica associada à equação homogênea é $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$, cujas raízes reais e iguais são $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ e, portanto, a solução geral da EDO homogênea é $y_h(x) = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}$, com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. A função $g(x)$ é um polinômio do segundo grau $x^2 - 2x + 1$, de modo que a solução $y_p(x)$ é suposta do tipo $y_p(x) = ax^2 + bx + c$, onde $y_p'(x) = 2ax + b$ e $y_p''(x) = 2a$. Substituindo, dessa forma, na EDO encontramos

$$2a - 4(2ax + b) + 4(ax^2 + bx + c) = x^2 - 2x + 1,$$

que por sua vez será equivalente a

$$\begin{cases} 4a = 1 \\ -8a + 4b = -2 \\ 2a - 4b + 4c = 1 \end{cases}$$

logo, $a = \dfrac{1}{4}$, $b = 0$ e $c = \dfrac{1}{8}$. Portanto, $y_p(x) = \dfrac{1}{4}x^2 + \dfrac{1}{8}$ e, consequentemente, a solução geral da EDO será dada por

$$y(x) = c_1e^{2x} + c_2xe^{2x} + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8}, \;\; c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

■

3.3.3 Equações Diferencias com Coeficientes Variáveis

Equação de Cauchy-Euler

Qualquer equação diferencial linear da forma

$$a_nx^n\frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}x^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + ... + a_1x\frac{dy}{dx} + a_0y = g(x),$$

onde os coeficientes a_n, a_{n-1}, ..., a_0 são constantes, é chamada de equação de **Cauchy-Euler**, ou ainda de equação equidimensional. Uma característica desse tipo de equação é que o grau de cada coeficiente monomial coincide com a ordem de derivação.

Essas equações desempenham grande importância, sobretudo, nas resoluções das Equações Diferencias Parcias (EDP) de Laplace de segunda ordem sobre regiões circulares.

Um caso particular, que será objeto do nosso estudo, será a equação homogênea de segunda ordem, onde realizaremos uma análise mais detalhada. Então essa equação terá a forma

$$ax^2\frac{d^2y}{dx^2} + bx\frac{dy}{dx} + cy = 0.$$

Convém destacar que o coeficiente de $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ é zero para $x = 0$. Para garantir a validade do teorema da existência e unicidade, a equação de Cauchy-Euler deverá ter soluções no intervalo $(0, \infty)$. Cabe salientar, que soluções no intervalo $(-\infty, 0)$ podem ser obtidas mediante a substituição de $t = -x$ na EDO.

A seguir, apresentaremos um método para solucionar tais equações diferencias.

Seja a EDO

$$ax^2y'' + bxy' + cy = 0. \tag{3.3.5}$$

Tentando uma solução da forma $y = x^m$, onde m será determinado, e levando em consideração $y' = mx^{m-1}$ e $y'' = (m-1)mx^{m-2}$, sua primeira e segunda derivadas, respectivamente, temos

$$ax^2(m-1)mx^{m-2} + bxmx^{m-1} + cx^m = 0.$$

Arrumando e organizando os termos, obtemos

$$x^m[am^2 + (b-a)m + c] = 0.$$

Assim, x^m será uma solução para a EDO $(3.3.5)$ quando m for uma solução para a **equação auxiliar**

$$am^2 + (b-a)m + c = 0, \tag{3.3.6}$$

a qual desempenha o mesmo papel que a equação característica desempenhava para EDO lineares homogêneas de coeficientes constantes.

Diante dessa equação auxiliar, temos, fundamentalmente, três casos a analisar:

(i) Raízes Reais Distintas

Sejam m_1 e m_2 as raízes reais e distintas da equação $(3.3.5)$. Então $y_1 = x^{m_1}$ e $y_2 = x^{m_2}$ formam um conjunto fundamental de soluções. Portanto a solução geral será dada por

$$y = c_1x^{m_1} + c_2x^{m_2},$$

onde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(ii) Raízes Reais Iguais

Se as raízes da equação $(3.3.5)$ forem iguais, isto é, $m_1 = m_2$, então obtemos apenas uma solução, $y_1 = x^{m_1}$, da equação de Cauchy-Euler. Aplicamos, dessa forma, o método de D'Alambert para descobrir uma segunda solução y_2, que seja obviamente linearmente independente de y_1. Tomamos y_2 de tal forma que $y_2 = uy_1$, donde $y_2' = u'y_1 + uy_1'$ e

$y_2'' = u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1''$, e substituindo na equação $(3.3.5)$, temos

$$ax^2(u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1'') + bx(u'y_1 + uy_1') + cuy_1 = 0.$$

Agrupando e organizando os termos, obtemos

$$u\underbrace{(ax^2y_1'' + bxy_1' + cy_1)}_{=0} + ax^2y_1u'' + (2ax^2y_1' + bxy_1)u' = 0.$$

Assim, usando o fato de que $y_1 = x^{m_1}$, vem

$$ax^2x^{m_1}u'' + (2ax^2m_1x^{m_1-1} + bxx^{m_1})u' = 0,$$

que simplificando, encontramos

$$axu'' + (2am_1 + b)u' = 0. \tag{3.3.7}$$

Sendo $am^2 + (b-a)m + c = 0$ e levando em consideração que a equação possui raízes iguais, então

$$m_1 = m_2 = \frac{a-b}{2a} \Rightarrow 2m_1a + b = a,$$

que substituindo na equação $(3.3.7)$, resulta

$$axu'' + au' = 0, \ com \ a \neq 0,$$

ou seja,

$$xu'' + u' = 0.$$

pondo $z = u'$, obtemos $x\dfrac{dz}{dx} + z = 0$, que separando as variáveis, fica $\dfrac{dz}{z} = -\dfrac{dx}{x}$. Integrando e escolhendo a constante de integração igual a zero, obtemos $\ln z = -\ln x$ ou $z = x^{-1}$. Logo,

$$u' = z = x^{-1},$$

que integrando mais uma vez e levando em conta $y_2 = uy_1$, segue que $u = lnx$ e, portanto,

$$y_2 = x^{m_1} \ln x.$$

Com isso, concluímos, que as duas soluções, y_1 e y_2, são linearmente independentes e, consequentemente, a solução geral da equação Cauchy - Euler será

$$y = c_1 x^{m_1} + c_2 x^{m_1} \ln x,$$

para quaisquer $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(iii) Raízes Complexas Conjugadas

Neste caso, as raízes são complexas conjugadas $m_1 = \alpha + i\beta$ e $m_2 = \alpha - i\beta$, com $\beta \neq 0$. Assim,

$$y = c_1 x^{\alpha+i\beta} + c_2 x^{\alpha-i\beta},$$

com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Mas, existe, todavia, um inconveniente nesse expressão, pois, assim como no caso das EDO's com coeficientes constantes, quando as raízes da equação característica eram complexas, tivemos que escrever nesse caso a solução de funções reais. Para conseguirmos tal solução, vamos tomar combinações lineares convenientes. Nesse caso, as soluções linearmente independentes são dadas pelas combinações lineares. Seja, primeiramente, a identidade

$$x^{i\beta} = (e^{lnx})^{i\beta} = e^{i\beta \ln x},$$

ao qual, pela fórmula de Euler resulta

$$x^{i\beta} = cos(\beta lnx) + isen(\beta \ln x).$$

Assim, suas raízes são

$$\begin{cases} m_1 = x^{\alpha+i\beta} = e^{\alpha \ln x} \cdot e^{i\beta lnx} = x^{\alpha}[cos(\beta \ln x) + isen(\beta \ln x)] \\ m_2 = x^{\alpha-i\beta} = e^{\alpha \ln x} \cdot e^{-i\beta \ln x} = x^{\alpha}[cos(\beta \ln x) - isen(\beta \ln x)] \end{cases}$$

fazendo

$$y_1 = \frac{m_1 + m_2}{2} = x^{\alpha} cos(\beta \ln x)$$

e

$$y_2 = \frac{m_1 - m_2}{2} = x^{\alpha} sen(\beta \ln x),$$

podemos verificar que as partes real e imaginária são soluções linearmente independentes, constituindo, assim, um conjunto fundamental de soluções para a EDO. Portanto, uma solução geral para a equação diferencial é

$$y = x^{\alpha}[c_1 cos(\beta ln x) + c_2 sen(\beta ln x)],$$

com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Exemplo 3.3.3. Considere a equação de Cauchy - Euler $x^2y'' + 3xy' = 0$, com as condições iniciais dadas por $y(1) = 0$ e $y'(1) = 4$. Então, a sua solução geral é determinada através da equação auxiliar $am^2 + (b - a)m + c$, onde $a = 1$, $b = 3$ e $c = 0$. Assim $m^2 + 2m = 0$, cujas soluções são $m_1 = -2$ e $m_2 = 0$. Dessa forma, a solução geral será dada por

$$y = c_1 + c_2 x^{-2},$$

com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Mas como $y(1) = 0 \Rightarrow c_1 = -2_2$ e, por outro lado, $y'(x) = -2x^{-3}c_2$, donde $y'(1) = 4 \Rightarrow k_2 = -2 = -k_1$. Portanto,

$$y = 2 - \frac{2}{x^2}$$

é a solução do PVI dado.

■

CAPÍTULO 4

Resolução de EDO's por Séries de Potências

Neste capítulo resolveremos EDO's com o auxílio das séries de potências. O método que abordaremos se baseia na hipótese de que as soluções procuradas são analíticas, pelo menos em alguma vizinhança de um ponto x_0, onde são dadas as condições de contorno. Isso significa, no entanto, que estas funções, obviamente contínuas, possuem derivadas de todas as ordens neste ponto e, portanto, podem ser expressas como uma série de potências.

Para motivar o estudo de EDO's utilizando séries de potências, considere a EDO linear de segunda ordem

$$y''(x) = -y(x), \tag{4.0.1}$$

cuja solução geral é

$$y(x) = c_1 sen\ x + c_2 cos\ x = c_1 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + c_2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \tag{4.0.2}$$

onde $c_1, c_2 \in \mathbb{R},\ \ x \in \mathbb{R}$. Isso sugere que também possamos resolver a EDO em $(4.0.1)$ tentando uma série de potências

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \tag{4.0.3}$$

donde

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \tag{4.0.4}$$

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n. \tag{4.0.5}$$

Substituindo $(4.0.3)$ e $(4.0.5)$ em $(4.0.1)$, obtemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n \quad = \quad -\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

uma equação que só pode ser válida para todos o valores de x se os coeficientes das potências forem iguais, isto é,

$$a_{n+2} = -\frac{a_n}{(n+2)(n+1)}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{4.0.6}$$

Essa equação é chamada de **relação de recorrência**. Por meio dela determinamos os coeficientes a_n. Temos

$$\begin{cases} 2a_2 = -a_0 \\ 6a_3 = -a_1 \\ 12a_4 = -a_2 \\ 20a_5 = -a_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

e assim sucessivamente.

Todos os coeficientes de índices pares estão relacionados:

$$\begin{cases} a_0 = c_1 \ (pondo) \\ a_2 = -\frac{1}{2}a_0 = -\frac{1}{2}c_1 = -\frac{1}{2!}c_1 \\ a_4 = -\frac{1}{12}a_2 = \frac{1}{24}c_1 = \frac{1}{4!}c_1 \\ \ldots. \end{cases}$$

Continuando, obtemos

$$a_{2n} = (-1)^n \frac{1}{(2n)!} c_1.$$

Os coeficientes de índices ímpares também estão relacionados entre si:

$$\begin{cases} a_1 = c_2 \ (fazendo) \\ a_3 = -\frac{1}{6}a_1 = -\frac{1}{6}c_2 = -\frac{1}{3!}c_2 \\ a_5 = -\frac{1}{20}a_3 = \frac{1}{120}c_2 = \frac{1}{5!}c_2 \\ \ldots. \end{cases}$$

Continuando, obtemos

$$a_{2n+1} = (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} c_2.$$

Assim, concluímos que

$$y(x) = c_1 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1} + c_2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} x^{2n} = c_1 senx + c_2 cosx, \;\; c_1, \, c_2 \in \mathbb{R},$$

que é a solução dada em $(4.0.2)$.

Vejamos mais um exemplo.

Exemplo 4.0.1. Encontre uma solução para a equação

$$y' = 2xy \tag{4.0.7}$$

na forma de uma série de potências em x.

Solução. Tentamos uma solução na forma

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \tag{4.0.8}$$

Derivando a série termo a termo, obtemos

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}. \tag{4.0.9}$$

Substituindo $(4.0.8)$ e $(4.0.9)$ na equação $(4.0.7)$, encontramos

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = 2x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

e fazendo a mudança de índices $m = n - 1$ na primeira equação e $m = n + 1$ na segunda, chegamos em

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} 2a_{n-1} x^n \Rightarrow a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} 2a_{n-1} x^n. \tag{4.0.10}$$

Pela a igualdade de séries, os coeficientes devem satisfazer

$$a_1 = 0 \;\text{ e }\; a_{n+1} = \frac{2a_{n-1}}{n+1}, \;\; n = 1, 2, 3, \ldots,$$

que é uma **relação de recorrência** que determina a_n. Iterando essa última fórmula, temos

$$\begin{aligned}
n &= 1, & a_2 &= a_0 \\
n &= 2, & a_3 &= \frac{2}{3}a_1 = 0 \\
n &= 3, & a_4 &= \frac{1}{2}a_2 = \frac{a_0}{2} = \frac{a_0}{2!} \\
n &= 4, & a_5 &= \frac{2}{5}a_3 = 0 \\
n &= 5, & a_6 &= \frac{1}{3}a_4 = \frac{a_0}{3!} \\
n &= 6, & a_7 &= \frac{2}{7}a_5 = 0 \\
n &= 7, & a_8 &= \frac{1}{4}a_6 = \frac{a_0}{4!}
\end{aligned}$$

e assim por diante. Logo,

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$$

é solução da equação $(4.0.7)$ para qualquer escolha da constante a_0.

■

Observação 4.0.1. Vimos no exemplo $(3.2.2)$ que $y = ce^{x^2}$ é a solução geral da equação $(4.0.7)$ e procurando soluções em forma de séries de potências chegamos ao mesmo resultado, pois $e^{x^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$.

Considere a EDO linear homogênea de segunda ordem

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0, \tag{4.0.11}$$

que pode ser escrita na forma

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \tag{4.0.12}$$

fazendo $p(x) = \dfrac{a_1(x)}{a_2(x)}$ e $q(x) = \dfrac{a_0(x)}{a_2(x)}$.

Definição 4.0.1. *Dizemos que x_0 é um ponto ordinário, ou não singular, da EDO $(4.0.12)$ se, nesse ponto, $p(x)$ e $q(x)$ ou suas extensões contínuas são funções analíticas. Um ponto que não é ordinário é dito um ponto singular, ou uma singularidade, da EDO.*

Observação 4.0.2. No caso em que $a_2(x)$, $a_1(x)$ e $a_0(x)$ são polinômios sem fator comum, $x = x_0$ (real ou imaginário) é um ponto ordinário se $a_2(x_0) \neq 0$ e singular se $a_2(x_0) = 0$.

Exemplo 4.0.2. a) Os pontos singulares da equação $(x^2-4)y''+10xy'-5y=0$ são as raízes de x^2-4, ou seja, $x=\pm 2$. Todos os demais pontos são ordinários.

b) A equação $(x-1)y''+(x^2-1)y'+(x-1)y=0$ não possui ponto singular, sendo que todos os pontos de $\mathbb{R}$ são ordinários.

c) $y''+(\ln x)y=0$: $x=0$ é ponto singular, pois $f(x)=lnx$ não é analítica nesse ponto, não existe, por exemplo, $f(0)$. Sendo assim, $f(x)$ não pode ser desenvolvida numa série de Taylor em torno de $x=0$.

d) A equação de Cauchy-Euler, dada por $ax^2y''+bxy'+cy=0$, em que a, b e c são constantes, tem um ponto singular em $x=0$. Todos os outros pontos são ordinários.

e) $y''+(x-1)^{5/3}y'+y=0$: $x=1$ é ponto singular, pois $p(x)=(x-1)^{5/3}$ não pode ser expandida em potências de $(x-1)$ ($p''(x)=\frac{10}{9}(x-1)^{-1/3}$ é infinita em $x=1$).

f) $xy''+(senx)y'+(1-cosx)y=0 \Rightarrow y''+\dfrac{senx}{x}y'+\dfrac{1-cosx}{x}y=0$. Essa EDO não tem ponto singular, isto é, todos os pontos de $\mathbb{R}$ são ordinários, inclusive $x=0$. De fato, como

$$\frac{senx}{x}=\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n+1)!},$$

$$\frac{1-cosx}{x}=\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{(2n)!}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n)!},$$

são séries de Taylor relativas a $x=0$ das extensões contínuas de $p(x)$ e $q(x)$ nesse ponto, a analiticidade em $x=0$ está verificada.

g) $(x-1)y''+(x^2-1)y'+(x-1)^2y=0 \Rightarrow y''+(x+1)y'+(x-1)y=0$: Não tem ponto singular (todos os pontos de $\mathbb{R}$ são ordinários)

4.1 Resolução de EDO's em Torno de um Ponto Ordinário

Seja a equação diferencial linear de segunda ordem $a_2(x)y''+a_1(x)y'+a_0(x)y=0$, que pode ser escrita da seguinte forma

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0. \tag{4.1.1}$$

A seguir, será enunciado o teorema que garante a **existência de soluções em série de potências** em torno de pontos ordinários.

Teorema 4.1.1. *Se $x = x_0$ for um ponto ordinário da equação diferencial* $(4.1.1)$, *podemos sempre encontrar duas soluções linearmente independentes na forma de série de potências centradas em x_0,*

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n.$$

A série converge para uma solução em $\mid x - x_0 \mid < R$, em que R é a distância do ponto x_0 ao ponto singular mais próximo, podendo ser real ou complexo.

Demonstração. Por simplicidade, assumiremos que $x_0 = 0$ seja um ponto ordinário da equação $(4.1.1)$. Como $p(x)$ e $q(x)$ são analíticas, então tem raios de convergência $R_1 > 0$ e $R_2 > 0$, respectivamente. Seja $R = min\{R_1, R_2\}$ e

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n, \quad q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n, \quad |x| < R.$$

Procuramos soluções do tipo:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad |x| < R.$$

Derivando formalmente esta série, temos:

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n,$$

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} x^n,$$

onde na primeira série trocamos $n - 1$ por n e na segunda série trocamos $n - 2$ por n. Então

$$p(x)y'(x) = \left[\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n\right] \cdot \left[\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{n} (k+1) p_{n-k} a_{k+1}\right] x^n,$$

$$q(x)y(x) = \left[\sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n\right] \cdot \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{n} q_{n-k} a_k\right] x^n.$$

Então a edo $(4.1.1)$ pode ser reescrita como

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+1)(n+2)a_{n+2}+\sum_{k=0}^{n}[(k+1)p_{n-k}a_{k+1}+q_{n-k}a_k]\right]x^n=0.$$

Pela unicidade das série de potências, temos

$$(n+1)(n+2)a_{n+2}+\sum_{k=0}^{n}[(k+1)p_{n-k}a_{k+1}+q_{n-k}a_k]=0,\ \ n=0,1,2,\ldots. \tag{4.1.2}$$

A expressão $(4.1.2)$ é dita a **recorrência da série** e determina a_n em função das constantes arbitrárias a_0 e a_1.

Agora devemos mostrar que a solução $y=y(x)$ converge se $|x|<R$. Seja $0<r<R$, então as séries numéricas $p(r)$ e $q(r)$ convergem, em particular, os termos gerais destas séries tendem a zero, logo são limitados, isto é, existe $M>0$ tal que

$$|p_n|r^n\leq M \quad \text{e} \quad |q_n|r^n\leq M,$$

para todo $n\in\mathbb{N}$. Utilizando $(4.1.2)$, obtemos

$$\begin{aligned}(n+1)(n+2)|a_{n+2}| &\leq \frac{M}{r^n}\sum_{k=0}^{n}[(k+1)|a_{k+1}|+|a_k|]r^k\\ &\leq \sum_{k=0}^{n}[(k+1)|a_{k+1}|+|a_k|]r^k+M|a_{n+1}|r.\end{aligned}$$

Denotemos por $b_0=|a_0|$ e $b_1=|a_1|$ e:

$$(n+1)(n+2)b_n=\frac{M}{r^n}\sum_{k=0}^{n}[(k+1)b_{k+1}+b_k]r^k+Mb_{n+1}r. \tag{4.1.3}$$

Note que $0\leq|a_n|\leq b_n$, para todo $n\in\mathbb{N}$. Se trocamos n por $n-1$ e n por $n-2$ em $(4.1.3)$, obtemos

$$n(n+1)b_{n+1}=\frac{M}{r^{n-1}}\sum_{k=0}^{n}[(k+1)b_{k+1}+b_k]r^k+Mb_nr,$$

$$n(n-1)b_n=\frac{M}{r^{n-2}}\sum_{k=0}^{n}[(k+1)b_{k+1}+b_k]r^k+Mb_{n-1}r.$$

Multiplicando a primeira igualdade por n e utilizando a segunda igualdade, obtemos:

$$\begin{aligned} rn(n-1)b_{n+1} &= \frac{M}{r^{n-2}}\sum_{k=0}^{n}[(k+1)b_{k+1}+b_k]r^k + rM(nb_n - b_{n-1}) + Mb_nr^n \\ &= n(n-1)b_n - Mb_{n-1}r + rM(nb_n - b_{n-1}) + Mb_nr^n \\ &= [n(n-1) + rMn + Mr^n]b_n. \end{aligned}$$

Logo

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{rn(n+1)}{n(n-1)+Mnr+Mr^n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{b_{n+1}} = r.$$

Então, a série $\sum_{n=0}^{\infty} b_nx^n$ converge para $|x| < r$. Como $|a_n| < b_n$, temos que a solução $y = y(x)$ também converge. Não é difícil verificar que a solução obtida satisfaz a EDO $(4.1.1)$.

■

Observação 4.1.1. Aqui, por uma questão de simplicidade, suponhamos que a origem $x = 0$ seja sempre o ponto ordinário em torno do qual se deseja obter a solução da EDO na forma de série de potências. Isso, no entanto, não significa perda de generalidade, pois, caso contrário, a substituição da variável $t = x - x_0$ transforma uma EDO com ponto ordinário em $x = x_0$ noutra com ponto ordinário em $t = 0$.

Exemplo 4.1.1. A EDO

$$y'' - (1+x)y = 0$$

não possui pontos singulares, então o Teorema $(4.1.1)$ garante a existência de duas soluções na forma de série de potências, $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$, na qual converge para todo x real. Temos,

$$y'' - (1+x)y = 0 \Longrightarrow \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_nx^{n-2} - (1+x)\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n = 0.$$

Organizando e agrupando os índices, vem

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_nx^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^{n-2} - \sum_{n=3}^{\infty} a_{n-3}x^{n-2} = 0$$

ou

$$2a_2 - a_0 + \sum_{n=3}^{\infty}[n(n-1)a_n - a_{n-2} - a_{n-3}]x^{n-2} = 0.$$

Logo, segue que $2a_2 - a_0 = 0$ e $a_n = \dfrac{a_{n-3} + a_{n-2}}{n(n-1)}$, com $n \geq 3$. Como a segunda expressão representa uma relação de recorrência, e levando em conta que a_0 e a_1 permanecem arbitrários, em termos deles escrevemos todos os demais coeficientes, donde

$$\begin{cases} a_3 = \dfrac{a_0}{2} \\ a_3 = \dfrac{a_0 + a_1}{6} \\ a_4 = \dfrac{a_1 + a_2}{12} = \dfrac{1}{12}(a_1 + \dfrac{a_0}{2}) = \dfrac{a_0}{24} + \dfrac{a_1}{12} \\ a_5 = \dfrac{a_2 + a_3}{20} = \dfrac{1}{20}(a_2 + a_3) = \dfrac{1}{20}(\dfrac{a_0}{2} + \dfrac{a_0 + a_1}{6}) = \dfrac{a_0}{30} + \dfrac{a_1}{120} \\ \vdots \end{cases}$$

E finalmente, concluímos que

$$y(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \cdots$$

ou

$$y(x) = a_0\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \cdots\right) + a_1\left(x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^5}{120} + \cdots\right).$$

■

Exemplo 4.1.2. A equação diferencial $y'' + (\cos x)y = 0$, em que seus coeficientes não são polinômios, também pode ser resolvida através de série de potências em torno de um ponto ordinário. Temos que

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots,$$

em que $x = 0$ é um ponto ordinário, e $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Susbstituindo na EDO, resulta

$$\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)na_nx^{n-2} + \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots\right)\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n = 0,$$

donde,

$$\left(2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 + 20a_5x^3 + \cdots\right) + \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots\right)\left(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots\right) = 0.$$

Agrupando os termos semelhantes, obtemos

$$(2a_2 + a_0) + (6a_3 + a_1)x + (12a_4 - \frac{1}{2}a_0 + a_2)x^2 + (20a_5 + a_3 - \frac{1}{2}a_1)x^3 + \cdots = 0.$$

Agora deixamos tudo em função de a_0 e a_1:

$$\begin{cases} 2a_2 + a_0 = 0 \Rightarrow a_2 = -\dfrac{a_0}{2} \\ 6a_3 + a_1 = 0 \Rightarrow a_3 = -\dfrac{a_1}{6} \\ 12a_4 + a_2 - \frac{1}{2}a_1 = 0 \Rightarrow a_5 = \dfrac{a_1}{30} \\ \vdots \end{cases}$$

Logo,

$$y(x) = a_0 + a_1 x - \frac{a_0}{2}x^2 - \frac{a_1}{6}x^3 + \frac{a_0}{12}x^4 + \frac{a_1}{30}x^5 - \cdots$$

$$y(x) = a_0\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{12}x^4 - \cdots\right) + a_1\left(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{30}x^5 - \cdots\right).$$

■

4.2 Resolução de EDO em Torno de um Ponto Singular

Na seção anterior foi estabelecida uma metodologia para a resolução de uma EDO em torno de um ponto ordinário $x = x_0$. Porém, se esse ponto for singular, nem sempre será possível encontar uma solução na forma de série de potências. Todavia, podemos contornar esse problema, tentando encontrar uma solução na forma $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^{n+r}$, onde r é uma constante a ser determinada.

Definição 4.2.1. *Os pontos singulares são, por sua vez, classificados em regulares ou irregulares como segue:*

a) Dizemos que um ponto da EDO é um **ponto singular regular** *se, ao reescrevermos essa EDO na forma dada por* (4.1.1), *constatarmos que* $(x - x_0)p(x)$ *e* $(x - x_0)^2 q(x)$ *são analíticas em* x_0.

b) O ponto singular que não é regular será chamado de **ponto singular irregular**.

Assim, de acordo com essa definição, temos os seguintes exemplos.

Exemplo 4.2.1. A EDO $x^2(x+1)^2 y'' + (x^2 - 1)y' + 7y = 0$, na qual podemos reescrevê-la na forma

$$y'' + \frac{x-1}{x^2(x+1)}y' + \frac{7}{x^2(x+1)^2}y = 0,$$

tem, em $x = 0$, um ponto singular irregular e, em $x = -1$, um ponto singular regular.

■

Exemplo 4.2.2. Na equação de Cauchy-Euler,

$$x^2y'' + axy' + by = 0, \quad a, b \in \mathbb{R},$$

a única singularidade é $x_0 = 0$. Por outro lado:

1. $x \left[\dfrac{ax}{x^2}\right] = a$ é analítica em 0;
2. $x^2 \left[\dfrac{b}{x^2}\right] = b$ é analítica em 0.

Logo, $x_0 = 0$ é singularidade regular.

■

A seguir estudaremos o chamado método de Frobenius, usado para se obter solução em série de EDO's lineares em torno de uma singularidade regular. Os procedimentos que utilizaremos para achar soluções de EDO's, nesta sessão, são bastante similares aos estudados na sessão anterior.

Teorema 4.2.1 (Teorema de Frobenius)**.** *Seja a EDO*

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0.$$

Se $x = x_0$ for um ponto singular regular dessa equação, então existe pelo menos uma solução em série na forma

$$y = (x - x_0)^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^{n+r},$$

onde r é uma constante a ser determinada. A série convergirá pelo menos em algum ponto de $| x - x_0 |< R$, ou seja, a série de Taylor tem uma cota mínima para o raio de convergência.

Aqui, pela mesma razão do Teorema $(4.1.1)$, supomos, por simplicidade, mas, obviamente, sem perda de generalidade, que $x_0 = 0$. Assim,

$$y = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}. \tag{4.2.1}$$

Vale destacar algumas observações:

a) Se x_0 é ponto ordinário, então na série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ temos a_n a ser determinado;

b) Se x_0 é ponto singular regular, então aplicaremos o método de Frobenius com a_n e r a serem determinados na série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^{n+r}$;

c) Os valores de r, para os quais a EDO tenha solução na forma de série em $(4.2.1)$ surgem da resolução de uma equação algébrica quadrática, pois a EDO em questão é de segunda ordem, denominada **equação indicial**, cujas raízes r_1 e r_2 são chamadas raízes indiciais.

Conforme as raízes indiciais r_1 e r_2, existem três casos a ser analisados:

(i) **As raízes indiciais que não diferem por um inteiro**: $r_1 - r_2 \notin \mathbb{Z}$

Nesse caso, o método de Frobenius fornece duas soluções linearmente independentes. Analisaremos a seguinte EDO

$$3xy'' + y' - y = 0.$$

Fazendo $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$, e tomando sua primeira e segunda derivadas e substituindo-as na EDO, temos

$$3x\sum_{n=0}^{\infty}(n+r-1)(n+r)a_n x^{n+r-2} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0$$

ou

$$\sum_{n=0}^{\infty} 3(n+r-1)(n+r)a_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r-1} - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^{n+r-1} = 0.$$

Igualando os índices e agrupando, temos

$$(3r-2)ra_0x^{r-1} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{[3(n+r-1)(n+r) + (n+r)]a_n - a_{n-1}\right\} x^{n+r-1} = 0$$

ou

$$\underbrace{r(3r-2)}_{=0} a_0 x^{r-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{[(3n+3r-2)(n+r) - a_{n-1}]}_{=0} x^{n+r-1} = 0.$$

Assim,

$$\begin{cases} r(3r-2) = 0 \\ (3n+3r-2)(n+r)a_n - a_{n-1} = 0. \end{cases}$$

Da equação indicial, temos $r(3r-2)=0 \Rightarrow r=0 \ ou \ r=\dfrac{2}{3}$

A relação de recorrência depende das raízes indiciais, então para cada raíz:

$$\begin{cases} r=0 \Rightarrow a_n = \dfrac{a_{n-1}}{n(3n-2)} \\ r=\dfrac{2}{3} \Rightarrow a_n = \dfrac{a_{n-1}}{n(3n+2)} \\ \qquad n \geq 1 \end{cases}$$

Expandindo as duas expressões, que correspondem séries distintas, nas quais x_0 é arbitrário:

Para $r=0$:

$$\begin{cases} a_1 &= \dfrac{a_0}{1\cdot 1} &= a_0 \\ a_2 &= \dfrac{a_1}{2\cdot 4} &= \dfrac{a_0}{8} \\ a_3 &= \dfrac{a_2}{3\cdot 7} &= \dfrac{a_2}{21} &= \dfrac{a_0}{168} \\ \vdots \end{cases}$$

Portanto

$$y_1(x) = x^0(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots)$$

ou melhor

$$y_1(x) = a_0\left(1 + x + \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{168} + \cdots\right)$$

Para $r=\dfrac{2}{3}$

$$\begin{cases} a_1 &= \dfrac{a_0}{1\cdot 5} &= \dfrac{a_0}{5} \\ a_2 &= \dfrac{a_1}{2\cdot 8} &= \dfrac{a_1}{16} &= \dfrac{a_0}{80} \\ a_3 &= \dfrac{a_2}{3\cdot 11} &= \dfrac{a_2}{33} &= \dfrac{a_0}{2640} \\ \vdots \end{cases}$$

Portanto

$$y_2(x) = x^{\frac{2}{3}}\left(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + ...\right)$$

ou

$$y_2(x) = a_0x^{\frac{2}{3}}\left(1 + \frac{x}{5} + \frac{x^2}{80} + \frac{x^3}{2640} + ...\right)$$

Assim, concluímos que $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são duas soluções linearmente independentes da

EDO, cuja combinação linear será a solução geral, isto é,

$$y = a_0\left[c_1\left(1 + x + \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{168} + ...\right) + c_2 x^{\frac{2}{3}}\left(1 + \frac{x}{5} + \frac{x^2}{80} + \frac{x^3}{2640} + ...\right)\right],$$

onde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(ii) **As raízes indiciais são iguais**: $r_1 = r_2$

Nessa situação só se consegue uma solução da forma $(4.2.1)$. Daí, segue a equação abaixo para análise:

$$xy'' + y' - 4y = 0.$$

Asssim, sendo $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$ e tomando suas respectivas derivadas e depois substituindo-as na EDO em questão, temos

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r-1)(n+r)a_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r-1} - 4\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0.$$

Deixando todos os termos com o mesmo índice e agrupando-os, segue que

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r-1)(n+r)a_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r-1} - 4\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^{n+r-1} = 0,$$

donde

$$[(r-1)r + r]a_0 x^{r-1} + \sum_{n=1}^{\infty}\{[(n+r-1)(n+r) + (n+r)]a_n - 4a_{n-1}\}x^{n+r-1} = 0$$

Simplificando, obtemos

$$\underbrace{r^2}_{=0} a_0 x^{r-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{[(n+r)^2 a_n - 4a_{n-1}]}_{=0} x^{n+r-1} = 0.$$

Assim, como $r = 0$ resulta

$$a_n = \frac{4a_{n-1}}{n^2},\ n \geq 1.$$

Dessa relação de recorrência, vem

$$\begin{cases} a_1 = \dfrac{4a_0}{1!} \\ a_2 = \dfrac{4a_1}{2^2} = \dfrac{4^2 a_0}{(1\cdot 2)^2} \\ a_3 = \dfrac{4a_2}{3^2} = \dfrac{4^3 a_0}{(1\cdot 2\cdot 3)^2} \\ \vdots a_n = \dfrac{4^n a_0}{(n!)^2} \\ \vdots \end{cases}$$

Logo, a única solução da EDO será

$$y(x) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{(n!)^2} x^n = a_0 \left(1 + 4x + 4x^2 + \cdots\right).$$

(iii) **As raízes diferem por um inteiro positivo**: $r_1 - r_2 \in \mathbb{N}^*$

Suponhamos, sem perda de generalidade, que $r_1 > r_2$.

• Com r_1 sendo a maior raíz indicial, então sempre haverá uma única solução;

• Com r_2 sendo a menor raíz indicial, então existem duas possibilidades:

a) Ela não fornece nenhuma solução;

b) Ela fornece a solução geral, que inclui, portanto, a solução correspondente à maior raíz, isto é, r_1.

Dessa forma, é natural e, sobretudo, mais prático, tentarmos obter primeiramente a solução correspondente à menor raíz indicial, pois, casso ocorra o ítem b), a solução estará concluída. Assim, seja a análise da EDO abaixo:

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} = y.$$

Escrevendo y na forma de série de potências e suas respectivas derivadas, então substituindo na EDO, temos

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r-1)(n+r)a_n x^{n+r-1} + 3\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0.$$

Organizando os índices, segue que

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r-1)(n+r)a_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} 3(n+r)a_n x^{n+r-1} - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^{n+r-1} = 0.$$

Somando os somatórios e isolando o termos a_0, obtemos

$$[(r-1)r+3r]a_0x^{r-1} + \sum_{n=1}^{\infty}\{[(n+r-1)(n+r)+3(n+r)]a_n - a_{n-1}\}x^{n+r-1},$$

que simplificando, obtém-se

$$\underbrace{r(r+2)}_{=0}a_0x^{r-1} + \sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{[(n+r+2)(n+r)a_n - a_{n-1}]}_{=0}x^{n+r-1} = 0.$$

Dessa última expressão concluímos que $r_1 = -2$ e $r_2 = 0$ são as raízes indiciais. Além disso, a equação de recorrência depende de r, logo,

$$a_n = \frac{a_{n-1}}{(n+r+2)(n+r)}, \ n \geq 1.$$

Tomando como referêncial o ítem b), vamos inicialmente analisar a menor raíz indicial. Portanto,

- Se $r = -2$, então: $n(n-2)a_n = a_{n-1}$. Assim, $a_1 = -a_0$ e $a_1 = -a_0 = 0$. Ora, como a_0 contadiz à nossa hipótese, então não existe série associada a raíz indicial $r = -2$. Seja, agora, o estudo da única solução linearmente independente associada à maior raíz indicial, que conforme vimos, sempre existe.

- Se $r = 0$, então: $a_n = \dfrac{a_{n-1}}{n(n+2)}$.

De acordo com essa relação de recorrência, resulta $a_1 = \dfrac{a_0}{3}$, $a_2 = \dfrac{a_0}{24}$, $a_3 = \dfrac{a_0}{360}$, $\cdots$
Temos, portanto, a única solução linearmente independente associada à EDO,

$$y(x) = a_0\left(1 + \frac{x}{3} + \frac{x^2}{24} + \frac{x^3}{360} + \cdots\right).$$

Nota: Método de Frobenius - 2ª parte:

Vimos ao longo dessa seção que quando as raízes da equação indicial diferem por um inteiro, existem duas possibilidades capazes de encontrar ou não soluções na forma de séries de potências. Caso não seja possível encontrar tal solução, então a segunda parte do método de Frobenius garante uma solução correspondente à menor raíz indicial, que contém um termo logarítimo. Assim sendo, temos:

1. **Raízes que diferem de um inteiro positivo**

   Existem duas soluções linearmente independentes:

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r_1} \quad \text{e} \quad y_2 = c y_1(x) ln x + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+r_2}$$

   com $a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$ e $c \in \mathbb{R}$.

2. **Raízes indiciais iguais**

   Há, também para esse caso, duas soluções linearmente independentes:

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r_1} \quad \text{e} \quad y_2 = y_1(x) \ln x + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+r_1}$$

   com $a_0 \neq 0$ e $b_0 \neq 0$

Exemplo 4.2.3. Voltemos a estudar a equação $xy'' + y' - 4y = 0$ como exemplo, onde na ocasião foi determinada apenas uma solução, já que a equação indicial foi $r_1 = r_2 = 0$. Vamos agora determinar a segunda solução tomando como base a segunda parte do método de Frobenius.

Como já foi visto $y_1(x) = a_0 \left(1 + 4x + 4x^2 + \frac{16}{9}x^3 + ...\right)$ é uma solução e a partir da equação de recorrência buscaremos a segunda $y_2(x)$. Como

$$a_n(r) = \frac{4a_{n-1}(r)}{(n+r)^2},\ n \geq 1,$$

obtemos

$$\begin{cases} a_1 = \dfrac{4a_0}{(r+1)^2} \\ a_2 = \dfrac{4a_1}{(r+2)^2} = \dfrac{4^2 a_0}{(r+1)^2(r+2)^2} \\ \vdots \\ a_n = \dfrac{4^n a_0}{[(r+1)(r+2)\dots(r+n)]^2} \end{cases}$$

Da expressão

$$a_n = \frac{4^n a_0}{[(r+1)(r+2)...(r+n)]^2},$$

resulta

$$\ln a_n = ln(4^n a_0) - 2\left[ln(r+1) + ln(r+2) + ... + ln(r+n)\right],$$

donde, aplicando a derivação

$$\frac{a_n'(r)}{a_n(r)} = -2\left[\frac{1}{r+1} + \frac{1}{r+2} + ... + \frac{1}{r+n}\right].$$

Fazendo $r = 0$, pois $r_1 = r_2 = 0$, segue que

$$\frac{a_0'(0)}{a_n(0)} = -2\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right).$$

Mas, como $a_n(0) = \dfrac{4^n a_0}{(n!)^2}$, então

$$a_n'(0) = \frac{4^n a_0}{(n!)^2}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)(-2),$$

onde

$$\begin{cases} a_0' = 0\,(constante) \\ a_1'(0) = -2a_0 \cdot 4 \cdot 1 = -8a_0 \\ a_2'(0) = \dfrac{-2a_0 \cdot 4^2}{2^2}\left(1 + \dfrac{1}{2}\right) = -12a_0 \\ a_3'(0) = \dfrac{-2a_0 \cdot 4^3}{6^2}\left(1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3}\right) = -\dfrac{176}{27}a_0. \\ \vdots \end{cases}$$

E assim, finalmente, obtemos

$$y_2(x) = y_1(x)\ln x + \sum_{n=0}^{\infty} a_n'(0)x^{n+0}.$$

Como já calculamos $y_1(x)$, então concluímos que

$$y_2(x) = a_0\left(1 + 4x + 4x^2 + \cdots\right)\ln x + a_0\left(-8x - 12x^2 - \frac{176x^3}{27} + \cdots\right).$$

Logo, no intervalo $(0,\, \infty)$, a solução geral da equação $xy'' + y' - 4y = 0$ é

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x),$$

com $c_1\,, c_2 \in \mathbb{R}$.

■

Referências

[1] Boyce, William E. Diprima, Richard C. Equações Diferenciais Elementares e Problemas de valores de contorno. Rio de Janeiro, Editora LTC, 2010.

[2] Brauer, Fred. Nohel, John A. The Qualitative Theory of Ordinary Differential Equations An Introduction. New York, Dover Publications, 1969.

[3] Figueiredo, Djairo Guedes. Neves, Aloisio Freiria. Equações Diferenciais Aplicadas. Rio de Janeiro, IMPA, 2009.

[4] Hefez, Abramo. Fernandez, Cecília de Souza. Introdução à Álgebra Linear (Coleção PROFMAT). Rio de Janeiro: SBM, 2016.

[5] Hoffman, K. Kunze, R. Álgebra Linear. 2ª Edição. Editora LTC, Rio de Janeiro, 1979.

[6] Lang, Serge. Introduction to Linear Algebra. Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, 1986.

[7] Lima, Elon Lages. Álgebra Linear. Rio de Janeiro, IMPA, 2009.

[8] Steinbruch, Alfredo. Winterle, Paulo. Álgebra Linear. São Paulo, Editora Mc Grew-Hill, 1987.

[9] Zill, Dennis G. Equações Diferenciais com aplicações em modelagem. São Paulo, Editora Thomson Learning, 2003.