UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

Iris Grasiele Cardoso Pinto

Frações contínuas: uma ferramenta para entender os números reais

SÃO CRISTÓVÃO - SE
2020

Iris Grasiele Cardoso Pinto

Frações contínuas: uma ferramenta para entender os números reais

Dissertação apresentada ao
Programa de Pós-Graduação em
Matemática, da Universidade
Federal de Sergipe, como
requisito parcial para obtenção do
título de Mestre em Matemática.

Orientador: Evilson da Silva Vieira

SÃO CRISTÓVÃO - SE
FEVEREIRO, 2020

Agradecimentos

A figura feminina carrega uma série de atribuições que dificultam sua inserção de modo igualitário em qualquer ambiente, seja de trabalho, de entretenimento ou até mesmo estudantil. Sou filha, esposa, mãe de três filhos (os dois mais novos gerados durante o curso) e também duma sobrinha, professora com dois vínculos, catequista e estudante. Amo tudo o que faço!

Concluir este trabalho só me foi possível porque tive o apoio de muitos amigos/ anjos prestativos e cuidadosos sempre presentes. Alguns destes mesmo a quilômetros de distância me acompanharam até o final. Todos eles sabem como foi difícil chegar até aqui!

Por isso, inicio agradecendo ao meu melhor amigo, Deus. Ele é minha força e aconchego. Ter a certeza de Seu amor e do Seu zelo faz com que eu não queira desistir nunca. Sua companhia tornou meus muitos momentos difíceis durante esse período em momentos suportáveis.

Agradeço a minha mãe, D. Ana Maria, guerreira, que mesmo aos seus 63 anos, cuidou da minha casa e de meus filhos, com muito amor e dedicação. Sou grata porque sempre me aconselhou e suportou meus picos de ansiedade com paciência. A ela devo todo meu respeito.

Em especial, devo agradecer de pé ao meu orientador, o professor Evilson Vieira. Sua paciência, compreensão, preocupação, dedicação e acompanhamento fizeram-me amadurecer intelectualmente. Transformou a minha postura como professora e, consequentemente, o resultado de meu trabalho profissional.

Ao meu esposo, Bruno, agradeço pela parceria, pela compreensão, pelas noites mal dormidas, cuidando de filho doente, pela paciência, por ouvir e por aconselhar, sempre me impulsionando e acreditando na vitória. Amo você.

Agradecer também àquelas pessoas que aceitaram cuidar de quatro crianças, para que eu pudesse estudar. Conheço meu gado e sei que não foi fácil. Vocês muitas vezes abriram mão de suas vidas, em função de minha necessidade. Obrigada a minha irmã Isa, ao meu irmão Igor, a minha sogra D. Luciene, a minha tia e comadre Celina, às amigas Liliane, Larissia, Luci e Edna. Serei eternamente grata.

Não posso deixar de mencionar a minha equipe de trabalho, a família Jonas Amaral – Centro de Excelência Dep. Jonas Amaral, nas pessoas do meu coordenador Silvio César, do meu parceiro Jack Miler e da minha equipe pedagógica, Adclaysson e Patrícia. Obrigada por todo apoio e por todo carinho.

Fiz parte de três turmas do PROFMAT (2016, 2017, 2018). Em virtude da quantidade, não mencionarei os nomes de todos com quem estudei. Dessas, trago amizades saudáveis, com as quais mantenho contato até hoje. Cada uma com sua história de lutas e dificuldades, para concluir o curso. Partilhamos muitas horas de estudos e diversão. Sou fã de cada um. Agradeço a todos pela torcida.

A esses amigos, só tenho a dizer que sinto falta das aulas, das risadas, do lanche no intervalo, dos medos das provas. Mas tenho certeza de que nos encontraremos muitas

vezes.
Deixo a todos minha admiração e minha gratidão.

E ainda se vier noite traiçoeira se a
cruz pesada for, Cristo estará contigo.
O mundo pode até fazer você chorar.
Mas Deus te quer sorrindo (...)

-José Carlos Papae

Resumo

Dentre as inúmeras formas de representar os números reais, tratamos neste trabalho de uma das mais utilizadas, as frações contínuas. Inicialmente, trazemos alguns conceitos básicos e classificamo-as em frações contínuas finitas ou infinitas. Definimos e indicamos como calcular o n-ésimo convergente, demonstrando algumas de suas propriedades. Dentre elas, mostramos que a sequência dos convergentes de índice par é decrescente e a, dos índices ímpares é crescente, o que garante que a aproximação entre convergentes consecutivos tenda a zero. Fato que faz com que a sequência dos convergentes configure uma sequência de Cauchy. Em seguida demonstramos que a sequência de denominadores dos convergentes é estritamente crescente. Apresentamos as relações entre números racionais e números irracionais com frações contínuas finitas e infinitas, respectivamente. Fazemos uso, ainda, das propriedades de seus convergentes para trazer significado aos números reais, em especial aos números irracionais. Definimos frações contínuas infinitas periódicas. Demonstramos que todo número irracional associado a uma fração contínua infinita periódica é raiz de uma equação de segundo grau com coeficientes inteiros. Além disso, analisamos as raízes de tais equações e verificamos que uma é o inverso da outra.
Palavras-chave: Teoria dos números; Sequências de números racionais; frações contínuas; Representação de Números Reais;

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Introdução

Existem registros sobre a utilização de frações contínuas de modo não sistemático desde tempos remotos. Os matemáticos Euclides ($325a.C. - 265a.C.$) e Aryabhata ($476 - 550$) são exemplos de precursores para a organização do assunto. O termo "fração contínua" foi criado pelo matemático britânico John Wallis ($1616 - 1703$), em seu livro *Opera Mathematica*(1695). Nesta obra também foi explicado como calcular o n-ésimo convergente e algumas de suas propriedades foram demonstradas.
Depois disso, Euler ($1707 - 1783$) demonstrou, fazendo uso das frações contínuas, que e e e^2 são irracionais. Também outros matemáticos como Bombelli ($1526 - 1572$), Cataldi ($1548 - 1626$) e o francês Joseph Louis Lagrange ($1736 - 1813$) trouxeram novidades que impulsionaram as pesquisas sobre o assunto.
Atualmente, ao questionarmos um aluno do 9º ano do ensino fundamental sobre como pode definir um número irracional, possivelmente este responderia que tratasse de um número com a parte decimal infinita e não-periódica; ou ainda poderia referir-se como sendo números que não tem raiz quadrada exata.
Esse assunto, a ampliação do conjunto dos números racionais para o conjunto dos números reais, é tratado somente no 8º ou no 9º ano do ensino fundamental ou ainda na 1ª série do ensino médio. Com isso, o aluno acaba formalizando um conceito falho sobre os números irracionais.
De fato, aos números naturais já é evidente a existência da necessidade de contar, aos números inteiros a ideia de creditar/debitar auxilia no manuseio com os sinais $+$ ou $-$; ao dividirmos um número inteiro por outro não nulo trazemos significado aos números racionais. Mas, quanto aos números irracionais, como representa-los?
Considere a equação

$$x^2 - bx - 1 = 0,$$

sendo b um número inteiro.
Se $x \neq 0$, podemos isolá-lo da seguinte forma

$$x = b + \frac{1}{x} \tag{1}$$

De modo que a equação (1), depois de finitas substituições de repetição em x, apresenta a seguinte configuração:

$$
\begin{aligned}
x = b + \frac{1}{x} &= b + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{\ddots}}}}}} \\
&= [b; b, b, b, b, \cdots] \\
&= [\bar{b}].
\end{aligned}
$$

Esta equação retrata uma das formas mais utilizadas para representar números irracionais: as frações contínuas; para este caso, frações contínuas simples infinitas periódicas. As pesquisas sobre esse tema ganharam forças a partir do século $XVII$, porém, atualmente, em livros de matemática de Educação básica, a utilização das frações contínuas para representar números reais ainda não é utilizada.

O objetivo do nosso trabalho é apresentar os números reais sob a forma de frações contínuas. Mostraremos que a partir de seus convergentes, que são números racionais, podemos obter aproximações que nos permite significar um número irracional. Também queremos trazer para o leitor outra forma de encontrar as raízes de equações de segundo grau com coeficientes inteiros, quando estas forem irracionais.

Para tal, escrevemos este trabalho em quatro capítulos distribuidos da seguinte forma:

No capítulo 1, construimos o corpo dos números racionais e concluimos que este é um corpo de frações do domínio dos números inteiros.

No capítulo 2 definimos sequências de números racionais e convergência dessas sequências, demonstrando algumas propriedades de limites envolvendo-as; logo após, conceituamos sequências de Cauchy.

Esses dois primeiros capítulos servem de fundamentação teórica para que alcancemos o objetivo de nosso trabalho.

No capítulo 3, definimos o conjunto das sequências de Cauchy de números racionais, junto às suas operações de soma e produto e respectivas propriedades, com o objetivo de construir o conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$-simbologia criada pelo matemático alemão Georg Cantor).

Finalizamos com o capítulo 4x, foco do nosso texto, em que fazemos o estudo sobre uma das formas de representar números reais, as frações Contínuas. Conceituamos e demonstramos algumas das propriedades dos convergentes das frações contínuas; apresentamos as relações existentes entre números racionais e números irracionais com as frações contínuas finitas e infinitas, nessa ordem. Também explicamos como encontrar as raízes irracionais de uma equação de 2º grau com uma incógnita por meio das frações contínuas.

Capítulo 1

Corpo de frações de um domínio

1.1 Introdução

A ideia para este capítulo é construir um corpo K que contenha um subanel A' isomorfo a um outro anel A de modo que este seja identificado como "cópia" de A'. Assim, concluiremos que o corpo dos números racionais é um corpo de frações do domínio dos números inteiros.

1.2 Corpo de frações de um domínio

1.2.1 Quociente em um corpo

Seja K um corpo. Seja $x \in K$ a solução da equação $bx = a$, em que $b \neq 0$. A solução para essa equação é um elemento $x = ab^{-1} = b^{-1}a$, pois K é um corpo. Desse modo, temos que x é o quociente de a por b e o denotamos por $x = \dfrac{a}{b}$. Logo, todo elemento de $a \in K$ é um quociente, sendo $b \neq 0$:

$$a = a(bb^{-1}) = (ab)b^{-1} = \frac{ab}{b}.$$

Nesta seção responderemos aos questionamentos feitos na introdução deste capítulo. Considere o domínio A e o domínio de integridade A^*, sem o elemento 0.
Considere a relação interna $B = A \times A^*$, denotada também por $B = A \times (A - \{0\})$. Seja B um conjunto não vazio. Primeiramente, vamos definir a relação de equivalência no conjunto $B = A \times A^*$ assim:

Definição 1.2.1. Dados $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in B$, então

$$(a_1, b_1) \sim (a_2, b_2) \text{ se, e somente se, } a_1 \cdot b_2 = b_1 \cdot a_2.$$

Teorema 1.2.1. A relação $\sim$ definida acima é uma relação de equivalência.

Demonstração. De fato,

i) vale a reflexiva: pois $(a_1, b_1) = (a_1, b_1)$ para todo $(a_1, b_1) \in B$.

ii) vale a simetria: Como $(a_1, b_1) \sim (a_2, b_2)$, então $a_1 \cdot b_2 = b_1 \cdot a_2$. Assim, $b_2 \cdot a_1 = a_2 \cdot b_1$. Logo, $(a_2, b_2) \sim (a_1, b_1)$.

iii) vale a transitiva: se $(a_1, b_1) \sim (a_2, b_2)$ e $(a_2, b_2) \sim (a_3, b_3)$, então, da definição,

$$a_1 \cdot b_2 = b_1 \cdot a_2 \text{ e } a_2 \cdot b_3 = b_2 \cdot a_3.$$

Multiplicando a primeira igualdade por b_3 e a segunda por b_1, obtemos

$$a_1 \cdot b_2 \cdot b_3 = b_1 \cdot a_2 \cdot b_3 \text{ e } a_2 \cdot b_3 \cdot b_1 = b_2 \cdot a_3 \cdot b_1,$$

donde temos

$$a_1 \cdot b_2 \cdot b_3 = b_2 \cdot a_3 \cdot b_1.$$

Logo $a_1 \cdot b_3 = a_3 \cdot b_1$ e, portanto $(a_1, b_1) \sim (a_3, b_3)$.

□

Definição 1.2.2. Definimos então a classe de equivalência de um elemento $(a, b) \in B$ como o conjunto

$$\left[\frac{a}{b}\right] = \{(x, y) \in B \mid (x, y) \sim (a, b)\},$$

em que o par (a, b) é chamado de representante da classe $\left[\frac{a}{b}\right]$.

Definição 1.2.3. Dada uma relação de equivalência $\sim$ em um conjunto A, definimos o conjunto de todas as classes de equivalência como conjunto quociente de A em relação a classe de equivalência $\sim$, denotado por $A/\sim$.

Exemplo 1.2.1. Do exemplo **??**, considerando o conjuto A de todas as pessoas e a relação "nascer no mesmo mês", concluimos que o conjunto quociente é dado por

$$A/\sim = \{\{janeiro\}, \{fevereiro\}, \cdots, \{novembro\}, \{dezembro\}\},$$

sendo que, por exemplo, pessoas nascidas em março pertencem a mesma classe de equivalência em $A/\sim$.

Seja K o conjunto de todas as classes de equivalência de B definido por:

$$K = \left\{ \left[\frac{a}{b}\right] \mid a, b \in A, b \neq 0 \right\}$$

Vamos definir a seguir a soma e o produto em K.

Definição 1.2.4. Sejam $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ elementos de K. Definimos em K as seguintes operações:

O1) $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$

O2) $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$

Como estas operações são bem definidas, os seus resultados não dependem dos representantes das classes $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$. Para isso, considere que A é um domínio e que $b\neq 0$ e $d\neq 0$, consequentemente o produto $bd\neq 0$ e daí a soma e o produto pertencem ao conjunto K. Sejam $\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}$ e $\frac{c}{d}=\frac{c'}{d'}$ temos

i) $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$ e $\frac{a'}{b'}+\frac{c'}{d'}=\frac{a'd'+b'c'}{b'd'}$

Agora, note que

$$\frac{ad+bc}{bd}=\frac{a'd'+b'c'}{b'd'} \text{ implica em } (ad+bc)b'd'=(a'd'+b'c')bd$$

que ainda é equivalente a

$$adb'd'+bcb'd'=a'd'bd+b'c'bd$$

Aplicando a comutatividade e a associatividade do produto, válidas para o domínio, temos que

$$ab'dd'+bb'cd'=a'bdd'+bb'c'd.$$

Como, por hipótese, $ab'=a'b$ e $cd'=c'd$, segue que a igualdade anterior é válida independente dos representantes das classes.

Para a verificação do produto temos

ii) $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$ e $\frac{a'}{b'}\cdot\frac{c'}{d'}=\frac{a'c'}{b'd'}$

Note que

$$\frac{ac}{bd}=\frac{a'c'}{b'd'} \text{ equivale a } acb'd'=a'c'bd$$

Aplicando a comutatividade e a associatividade do produto, válidas para o domínio, temos que

$$ab'cd'=a'bc'd.$$

Essa igualdade é obtida diretamente da hipótese.

Axioma 1.2.1. O conjunto dos números inteiros ($\mathbb{Z}$) é um domínio.

Definição 1.2.5. Definimos o conjunto quociente de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ pela relação $\sim$ como o conjunto dos números racionais, denotado por $\mathbb{Q}$.

Teorema 1.2.2. O conjunto dos números racionais, munido das operações de soma e produto, pela Definição 1.2.4, assume as propriedades dessas operações em $\mathbb{Z}$ e possui elementos neutros aditivo e multiplicativo $\frac{0}{1}$ e $\frac{1}{1}$, nessa ordem.

Demonstração. Sejam $r = \frac{a}{b}$, $s = \frac{c}{d}$ e $t = \frac{x}{y}$ números racionais.

1. Associatividade da soma:

$$\begin{aligned}
(r+s)+t &= \left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)+\frac{x}{y} \\
&= \frac{ad+bc}{bd}+\frac{x}{y} \\
&= \frac{ady+bcy+bdx}{bdy} \\
&= \frac{a}{b}+\left(\frac{c}{d}+\frac{x}{y}\right) \\
&= r+(s+t).
\end{aligned}$$

2. Comutatividade da soma:

$$\begin{aligned}
r+s &= \frac{a}{b}+\frac{c}{d} \\
&= \frac{ad+bc}{bd} \\
&= \frac{bc+ad}{db} \\
&= s+r.
\end{aligned}$$

3. Elemento neutro para a soma: Sendo $0, 1 \in \mathbb{Z}$, segue que o elemento neutro da soma é a fração $\frac{0}{1}$.

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b}+\frac{0}{1} &= \frac{a \cdot 1 + b \cdot 0}{b \cdot 1} \\
&= \frac{a}{b}.
\end{aligned}$$

4. Elemento simétrico: Para todo $r \in \mathbb{Q}$ existe r' tal que $r + r' = \frac{0}{1}$. Seja $r' = \frac{-a}{b}$. Logo,

$$\begin{aligned} r + r' &= \frac{a}{b} + \frac{-a}{b} \\ &= \frac{ab + (-ab)}{bb} \\ &= \frac{0}{bb} \\ &= \frac{0}{1}. \end{aligned}$$

5. Associatividade do produto:

$$\begin{aligned} (r \cdot s) \cdot t &= \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) \cdot \frac{x}{y} \\ &= \frac{ac}{bd} \cdot \frac{x}{y} \\ &= \frac{acx}{bdy} \\ &= \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{cx}{dy}\right) \\ &= r \cdot (s \cdot t). \end{aligned}$$

6. Comutatividade do produto:

$$\begin{aligned} rs &= \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \\ &= \frac{ac}{bd} \\ &= \frac{ca}{db} \\ &= \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b} \\ &= sr. \end{aligned}$$

7. Elemento neutro do produto: Existe $\frac{1}{1} \in A$, com $\frac{0}{1} \neq \frac{1}{1}$, tal que $r\frac{1}{1} = r$, para todo $r \in \mathbb{Q}$.

$$\begin{aligned} r \cdot \frac{1}{1} &= \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{1} \\ &= \frac{a \cdot 1}{b \cdot 1} \\ &= \frac{a}{b} \\ &= r, \text{ uma vez que } (ab) \cdot 1 = 1 \cdot (ab). \end{aligned}$$

8. Distributividade do produto em relação a soma:

$$\begin{aligned}
r(s+t) &= \frac{a}{b}\left(\frac{c}{d}+\frac{x}{y}\right)\\
&= \frac{a}{b}\left(\frac{cy+xd}{dy}\right)\\
&= \frac{a(cy+xd)}{bdy}\\
&= \frac{acy+axd}{bdy}\\
&= \frac{b(acy+axd)}{b(bdy)}\\
&= \frac{acby+axbd}{bdby}\\
&= \frac{ac}{bd}+\frac{ax}{by}\\
&= \frac{a}{b}\frac{c}{d}+\frac{a}{b}\frac{x}{y}\\
&= rs+rt.
\end{aligned}$$

□

Teorema 1.2.3. Todo elemento não-nulo de $\mathbb{Q}$ possui inverso multiplicativo.

Demonstração. Seja $r \in \mathbb{Q}$. Com $r = \frac{a}{b} \neq \frac{0}{1}$.
Logo, sendo $b \neq 0$ e a não nulo temos que $\frac{a}{b}$ é não nulo e admite inverso $\frac{b}{a}$. Logo,

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a} = \frac{ab}{ba} = \frac{ab}{ab} = \frac{1}{1}.$$

Portanto, $\frac{a}{b}$ é invertível e seu inverso é representado por $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}$. □

Com todas essas verificações, provamos que $\mathbb{Q}$ é um corpo, chamado de corpo de frações de um domínio $\mathbb{Z}$. Em $\mathbb{Q}$, os elementos neutros da soma e do produto são únicos. A demonstração disso é análoga ao que trazemos no apêndice.

1.3 Corpo de frações de um domínio ordenado

Vimos na seção anterior que $\mathbb{Q}$ é um corpo. Precisamos agora provar que esse conjunto também é um corpo ordenado. Para isso, precisamos definir um conjunto de positivos em $\mathbb{Q}$ cujas operações de soma e de produto sejam fechadas e que os axiomas de ordem sejam satisfeitos.

Proposição 1.3.1. Seja $P = \left\{\dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q} \mid ab \in \mathbb{N}\right\}$. O conjunto P faz de $\mathbb{Q}$ um corpo ordenado.

Demonstração. Considere o conjunto $P = \left\{\dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q} \mid ab \in \mathbb{N}\right\}$.
Sejam $x = \dfrac{a}{b}$ e $y = \dfrac{c}{d}$ elementos de P, temos

$$x + y = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

Como $(ad + bc) \cdot (bd) = abd^2 + cdb^2$ e $ab, cd \in \mathbb{N}$. Uma vez que, b^2 e d^2 são positivos, confira na Proposição 4.6.1, seque que $(ad + bc) \cdot (bd) \in \mathbb{N}$.
Analogamente, como

$$x \cdot y = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

em que $(ac)(bd) = (ab)(cd)$ e $ab, cd \in \mathbb{N}$. Segue que $x \cdot y \in \mathbb{N}$.
Portanto a soma e o produto são operações fechadas em P. Falta-nos verificar a tricotomia.
Seja $\dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}$. Da Tricotomia,

$$\text{ou } ab \in \mathbb{N} \text{ ou } ab = 0 \text{ ou } ab \neq \mathbb{N}.$$

Como $b \neq 0$ então

$$\text{ou } ab > 0 \text{ ou } ab = 0 \text{ ou } (-a)b = -ab > 0.$$

Assim,

$$\text{ou } ab \in \mathbb{N} \text{ ou } ab = 0 \text{ ou } (-a)b = -ab \in \mathbb{N}.$$

Ou seja,

$$\text{ou } ab \in P \text{ ou } ab = 0 \text{ ou } (-a)b = -ab \in P.$$

Portanto, $\mathbb{Q}$ é corpo ordenado. □

Definição 1.3.1. Sejam $\dfrac{a}{b}, \dfrac{c}{d} \in \mathbb{Q}$, com $b, d > 0$. Dizemos que $\dfrac{a}{b}$ é menor ou igual a $\dfrac{c}{d}$, denotamos por $\dfrac{a}{b} \leqslant \dfrac{c}{d}$, quando $ad \leqslant bc$.

Os símbolos $\geqslant, <$ e $>$ definem-se de modo análogo ao tratado na relação de ordem no conjunto dos números inteiros.

Teorema 1.3.1. A relação $\leqslant$ é bem definida e é uma relação de ordem em $\mathbb{Q}$.

Demonstração. Inicialmente, vamos mostrar que a relação é bem definida.
Seja $\dfrac{a}{b} = \dfrac{a'}{b'}$, assim, $ab' = a'b$. Da Definção 1.3.1, temos que

$$\frac{a}{b} \leqslant \frac{c}{d} \Rightarrow ad \leqslant bc.$$

Como $b^{'} > 0$, obtemos $adb^{'} \leqslant bcb^{'}$, donde concluímos que $a^{'}d \leqslant cb^{'}$ e, então, $\dfrac{a^{'}}{b^{'}} \leqslant \dfrac{c}{d}$.
Analogamente, como $\dfrac{c}{d} = \dfrac{c^{'}}{d^{'}}$, de

$$\frac{a^{'}}{b^{'}} \leqslant \frac{c}{d} \Rightarrow a^{'}d \leqslant cb^{'},$$

chegamos a conclusão que $\dfrac{a^{'}}{b^{'}} \leqslant \dfrac{c^{'}}{d^{'}}$.
Logo, temos que $\dfrac{a}{b} \leqslant \dfrac{c}{d} \Rightarrow \dfrac{a^{'}}{b^{'}} \leqslant \dfrac{c}{d}$ e $\dfrac{a^{'}}{b^{'}} \leqslant \dfrac{c}{d} \Rightarrow \dfrac{a^{'}}{b^{'}}\dfrac{c^{'}}{d^{'}}$, então concluímos que $\dfrac{a}{b} \leqslant \dfrac{c}{d} \Rightarrow \dfrac{a^{'}}{b^{'}} \leqslant \dfrac{c^{'}}{d^{'}}$. □

Vamos verificar, agora, se a relação é um arelação de equivalência.

1. Reflexiva: se $\dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, então $\dfrac{a}{b} \leqslant \dfrac{a}{b}$ pois $ab \leqslant ab$.

2. Simétrica: se $\dfrac{a}{b}, \dfrac{c}{d} \in \mathbb{Q}$, então $\dfrac{a}{b} \leqslant \dfrac{c}{d}$ e $\dfrac{c}{d} \leqslant \dfrac{a}{b}$. Daí, $ad \leqslant cb$ e $cb \leqslant ad$. Logo, obtemos $ad = bc$, isto é, $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$.

3. Transitiva: se $\dfrac{a}{b}, \dfrac{c}{d}, \dfrac{e}{f} \in \mathbb{Q}$, então

$$\frac{a}{b} \leqslant \frac{c}{d} \text{ e } \frac{c}{d} \leqslant \frac{e}{f}.$$

   Como $b, d, f > 0$, vamos multiplicar a primeira desigualdade por f e a segunda por b, para obtermos

$$adf \leqslant bcf \text{ e } bcf \leqslant bed,$$

   pela trasitividade, chegamos a $af \leqslant be$, isto é, $\dfrac{a}{b} \leqslant \dfrac{e}{f}$.

Como o conjunto dos números racionais é um corpo ordenado, automaticamente são váldas todas as propriedades da relação de ordem $\leqslant$ em $\mathbb{Z}$. Estas propriedades depedem somente da existência do conjunto dos positivos P no corpo, já definido neste capítulo.

Capítulo 2

Sequências de números racionais

2.1 Introdução

Neste capítulo, vamos definir sequências de números racionais, convergência dessas sequências e demonstrar alugumas das propriedades de limites das mesmas, além de conceituar sequências de Cauchy para explicar, no capítulo seguinte, o método de Cantor para construir o conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$) a partir do conjunto de sequências de Cauchy de números racionais.

2.2 Conceito

Definição 2.2.1. Uma sequência de números racionais (ou sequência racional) é uma função $x : \mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{Q}$, em que cada número natural, em alguns casos iinclui-se o zero na lista, está associado a um número racional. Denotaremos por $x_n = x(n)$, o n-ésimo termo da sequência, com $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, de modo que:

$$\begin{gathered} x_1 \text{ é o primeiro elemento} \\ x_2 \text{ é o segundo elemento} \\ x_3 \text{ é o terceiro elemento} \\ \dots \\ x_n \text{ é o } n\text{-ésimo elemento} \\ \cdots \text{ e assim por diante} \end{gathered}$$

Frequentemente, usamos dois tipos de sequências: aquelas em que os termos podem ser definidos por regras, dependendo somente de n; e aquelas em que encontramos os termos de modo recorrente, dependendo de termos anteriores. Desse modo, x_n é uma expressão matemática em função de n chamada de "termo geral" que designa cada elemento da sequência denotada por (x_n).

Exemplo 2.2.1. **1.** $(x_n) = \left(\dfrac{n-1}{n}\right)$ é a sequência $\left(0, \dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \cdots\right)$. O termo geral desta sequência é definido pela regra $x_n = \dfrac{n-1}{n}$;

2. $(x_n) = (n^2)$ é a sequência $(1, 4, 9, 16, \cdots)$. O termo geral desta sequência é $x_n = n^2$;

3. A sequência (S) é definida pela recorrência $S_n = 2 \cdot S_{n-1}$ para $n \geqslant 2$. Com $S_1 = 2$. Daí, temos que o segundo elemento de (S) é: $S_2 = 2 \cdot S_{2-1} = 2 \cdot S_1 = 2 \cdot 2 = 4$. Novamente, temos $S_3 = 2 \cdot S_2 = 2 \cdot 4 = 8$.

Continuando desse modo vemos que a sequência é $(2, 4, 8, 16, 32, \cdots)$

4. A "Sequência de Fibonacci", é a sequência em que definimos $F_1 = 1$ e $F_2 = 1$ e os outros termos são obtidos, recursivamente, somando-se os dois termos anteriores, ou seja, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Portanto a Sequência de Fibonacci é $(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...)$

Note que do exemplo 2 podemos escrever outra sequência cujo termo geral é dado por $x_n = 4^n$, com $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Daí, teremos a seguinte sequência:

$$(x_n) = (1, 4, 16, 64, \cdots)$$

.

E essa seria apenas uma restinção de inúmeras outras possíveis de separar a partir desse exemplo.
Cada nova sequência gerada, a partir de uma outra como fizemos acima, recebe o nome de subsequência definida tecnicamente logo abaixo.

Definição 2.2.2. Dada uma sequência (x_n). Uma subsequência é uma função $x' : \mathbb{N}' \to \mathbb{N}$, onde $\mathbb{N}'$ é um subconjunto de $\mathbb{N}$ com índices estritamente crescentes, isto é, $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots < n_k < \cdots$. Dizemos, então, que (x_{n_k}) é uma subsequência de (x_n), com $k \in \mathbb{N}$.

Isto quer dizer que a partir dos termos de uma sequência (x_n) podem ser formadas outras sequências, termo mencionado anteriormente como "restrinções" aos termos de uma sequência, para as quais são validados todos os teoremas válidos para (x_n).

Exemplo 2.2.2. Considere a sequência (x_n) cujo termo geral é dado por $x_n = (-1)^n$, com $n \in \mathbb{N}$. Note que, para todo $i \in \mathbb{N}$, quando $n = 2i$ teremos $x_{2i} = 1$ e para $n = 2i + 1$ teremos $x_{2i+1} = -1$, ou seja, em (x_n) todos os elementos de índice par e os de índice ímpar são iguais a 1 e -1, nessa ordem.

Logo, de (x_n) obtemos duas subsequências $(x_{2i}) = (1, 1, 1, \cdots)$ e $(x_{2i+1}) = (-1, -1, -1, \cdots)$. Note que estas novas sequências possuem todos os termos iguais. Existe uma classificação própria destinada a sequências com essa característica. Veja a seguir.

2.3 Sequências monótonas de números racionais

Em relação a disposição de seus termos as sequências podem ser classificadas como:

Definição 2.3.1. Considere uma sequência de números racionais (x_n).

a) Dizemos que (x_n) é *constante* se todos os seus termos são iguais.

b) Dizemos que (x_n) é *estritamente crescente* se, $x_{n+1} > x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, ou seja, todo termo é maior que o termo anterior.

c) Dizemos que (x_n) é *estritamente decrescente* se, $x_{n+1} < x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, ou seja, todo termo é menor que o termo anterior.

d) Dizemos que (x_n) é *não-decrescente* se, $x_{n+1} \leqslant x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, ou seja, nenhum termo é menor que o termo anterior.

e) Dizemos que (x_n) é *não-crescente* se, $x_{n+1} \geqslant x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, ou seja, nenhum termo é maior que o termo anterior.

Definição 2.3.2. Uma sequência não-crescente ou não-decrescente se diz monótona.

Exemplo 2.3.1. a) A sequência $(1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 6, 6, \cdots)$ é não-decrescente.

b) A sequência $(1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \cdots)$ é não-crescente.

Além dessa, ainda podemos ter outras situações como:

Exemplo 2.3.2. Da sequência (x_n) definida pelo termo geral $x_n = \dfrac{n-1}{n}$ sabemos que seus 4 primeiros termos são $\left(0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots\right)$. O que nos leva a pensar que esta pode ser crescente.
Daí, então, temos

$$x_{n+1} - x_n = \frac{(n+1)-1}{n+1} - \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n(n+1)} > 0$$

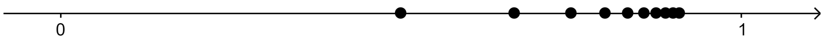
.

Logo, da diferença entre dois termos consecutivos da sequência, podemos concluir que (x_n) é uma sequência estritamente crescente.
Da definição 2.3.1, podemos nomear como sequência monótona a sequência classificada como estritamente crescente ou decrescente, ou ainda, não-crescente ou não-decrescente.
Perceba que a sequência constante também é monótona, pois tanto se pode dizer que $x_n \leqslant x_{n+1}$ ou ainda que $x_n \geqslant x_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

2.4 Convergência de sequências racionais

Considere a sequência $(x_n) = \left(\dfrac{n}{n+1}\right) = \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \cdots\right)$, com $n \in \mathbb{N}$. Veja abaixo o comportamento de seus 10 primeiros termos marcados na reta real.

Figura 2.1: Os 10 primeiros termos de $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)$ sobre a reta real.



Agora, fazendo a diferença entre dois termos consecutivos quaisquer, note que

$$x_{n+1} - x_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0,$$

logo (x_n) é estritamente positiva. Portanto, se tomassemos os seus cem primeiros elementos, por exemplo, estes estariam se aproximando cada vez mais do 1, uma vez que

$$\frac{n}{n+1} < 1,$$

mas isso não nos esclarece se em um dado momento estariam acumulados sem ultrapassar ou se ainda ultrapassariam o 1. Então, podemos dizer que o 1 é um candidato a "ponto de acumulação". Mas o que justifica isso?

Definição 2.4.1. Seja uma sequência de números racionais (x_n). Dizemos que (x_n) converge para um número racional L quando, para todo $\varepsilon > 0$, existe um $N \in \mathbb{N}$ de modo que

$$|x_n - L| < \varepsilon, \text{ para todo } n > N.$$

Teorema 2.4.1. Se uma sequência converge seu limite é único.

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência convergente. Suponha que essa sequência possua mais de um limite. Tome a e b limites de (x_n).
Seja um número racional $\varepsilon > 0$, da definição de limites de sequências, existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ para } n > n_1 \text{ e}$$

$$|x_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ para } n > n_2.$$

Seja n_3 o maior valor entre n_1 e n_2, isto é, $n_3 = \max\{n_1, n_2\}$. Quando $n > n_3$ temos que

$$\begin{aligned}|a-b| &= |a - x_n + x_n - b| \\ &= |(x_n - a) + (x_n - b)| \\ &\leq |x_n - a| + |x_n - b| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\end{aligned}$$

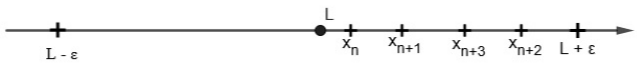
Note que ε assume qualquer valor arbitrário não-negativo e como a desigualdade acima é menor que ε, concluimos então que

$$|a-b| = 0,$$

que implica em dizer que $a = b$.
Isso conclui nossa demonstração. □

Neste caso, dizemos que o número L é o limite da sequência e é denotado por

$$\lim x_n = L \text{ ou } x_n \to L.$$



Fonte: Figura adaptada do Livro Introdução à Análise Real

Em outras palavras, temos que $|x_n - L|$ pode ser tão menor quanto $\varepsilon > 0$ tomado aleatoriamente, contanto que a posição n seja suficientemente grande. Por isso, podemos dizer intuitivamente que L é o limite da sequência.
Usamos a conotação "ponto de acumulação" no exemplo do início da seção para expressar o limite de sequência numa linguagem informal. Porém, da definição anterior podemos afirmar que se a sequência tiver um limite ela é dita convergente. Senão, é dita divergente.

Exemplo 2.4.1. Usando a definição de limite de uma sequência de números racionais vamos provar que a sequência $x_n = \dfrac{n}{n+1}$ converge e tem limite igual a 1.
Dado um $\varepsilon > 0$, precisamos achar $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > N$ se tenha

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon$$

Como temos que

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \frac{1}{n+1}$$

e queremos encontrar um $n > N$, podemos escrever daí então que

$$n+1 > N+1, \text{ donde concluimos que } \frac{1}{n+1} < \frac{1}{N+1} < \frac{1}{N}.$$

Assim, como da condição inicial temos que $\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon$, se considerarmos que $\frac{1}{N} < \varepsilon$, obteremos que $N > \frac{1}{\varepsilon}$.

Com isso, temos que para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$, nesse caso $N > \frac{1}{\varepsilon}$, tal que para todo $n > N$ implique em

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon,$$

ou seja,

$$\lim x_n = 1.$$

Detalhando o que foi dito logo acima, vamos tomar $\varepsilon = 0,01$, assim teremos

$$N > \frac{1}{0,01} = 100.$$

Assumiremos $N = 101$ e segue que depois centuagésimo primeiro termo a distância entre x_n e o valor 1 é menor que $0,01$.

Testando com $n = 102$:

$$\left|\frac{102}{102+1} - 1\right| = \left|-\frac{1}{103}\right| = \frac{1}{103} < \frac{1}{100} = \varepsilon.$$

Logo, a sequência dada converge e tem limite igual a 1. Resposta para o questionamento feito antes da definição 2.4.1.

Exemplo 2.4.2. Considere a sequência $(x_n) = (-1)^n$, para todo n natural.

Observe que na sequência $(x_n) = (-1, 1, -1, 1, -1, 1, \cdots)$ os elementos alternam-se em dois valores, -1 e 1. Nesse caso, não há um cadidato a "ponto de acumulação" como na situação expressa no início da seção.

Sendo assim, dizemos que (x_n) é uma sequência divergente, pois não há um "ponto de acumulação" tendo em vista que para todo $\varepsilon > 0$, não existe uma posição a partir da qual os termos de (x_n) convirjam para um único ponto.

Exemplo 2.4.3. Usando a definição de limite de uma sequência de números racionais vamos provar que a sequência $x_n = \frac{n}{3n-1}$ converge e tem limite $\frac{1}{3}$.

Dado um $\varepsilon > 0$, precisamos achar $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > N$ se tenha

$$\left|\frac{n}{3n-1} - \frac{1}{3}\right| < \varepsilon$$

De fato, temos que
$$\left|\frac{n}{3n-1}-\frac{1}{3}\right|=\frac{1}{3(3n-1)}.$$
Como queremos encontrar um $n>N$, podemos escrever daí então que
$$3n-1>3N-1, \text{ donde } 3n-1\geqslant 3N.$$
Logo
$$3(3n-1)\geqslant 9N=3\cdot 3N.$$
Da desigualdade acima concluimos que
$$\frac{1}{3(3n-1)}<\frac{1}{9N}$$
Assim, como da condição inicial temos que $\left|\frac{n}{3n-1}-\frac{1}{3}\right|<\varepsilon$, se considerarmos que $\frac{1}{9N}<\varepsilon$, obteremos que $N>\frac{1}{9\varepsilon}$.

Com isso, provamos que para todo $\varepsilon>0$, existe $n\in\mathbb{N}$, nesse caso $N>\frac{1}{9\varepsilon}$, tal que para todo $n>N$ implique em
$$\left|\frac{n}{3n-1}-\frac{1}{3}\right|<\varepsilon,$$
ou seja,
$$\lim x_n=\frac{1}{3}.$$
Detalhando o que foi dito logo acima, vamos tomar $\varepsilon=0,1$, assim teremos
$$N>\frac{1}{9\cdot 0,1}=\frac{10}{9}.$$
Assumiremos $N=2$ e segue que depois do segundo termo a distância entre x_n e o valor $\frac{1}{3}$ é menor que $0,1$.

Testando com $n=3$:
$$\left|\frac{3}{3\cdot 3-1}-\frac{1}{3}\right|=\left|\frac{3}{8}-\frac{1}{3}\right|=\frac{1}{24}<\frac{1}{10}=\varepsilon.$$
Logo, a sequência dada converge e tem limite igual a $\frac{1}{3}$.

Além disso, vamos explorar um pouco mais a sequência em questão. Escrita termo a termo ela é dada por
$$(x_n)=\left(\frac{1}{2},\frac{2}{5},\frac{3}{8},\frac{4}{11},\frac{5}{14},\cdots\right)$$
.

Note, também, que os valores de seus termos são positivos, isto é, $x_n = \dfrac{n}{3n-1} > 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Da diferença entre dois termos consecutivos, percebemos ainda que

$$x_{n+1} - x_n = \frac{n+1}{3(n+1)-1} - \frac{n}{3n-1} = -\frac{1}{(3n+2)(3n-1)} < 0$$

.

Fato que nos mostra que a sequência (x_n) é estritamente decrescente, com maior termo $x_1 = \dfrac{1}{2}$ e com um limite igual a $\dfrac{1}{3}$. Desse modo, podemos escrever que $\dfrac{1}{2} \leqslant x_n \leqslant \dfrac{1}{3}$. Toda essa observação foi feita para que as definições seguintes sejam melhor compreendidas.

Definição 2.4.2. Dizemos que $A \in \mathbb{Q}$ é uma cota inferior de (x_n) se $x_n \geqslant A$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Neste caso, dizemos que a sequência é limitada inferiormente.

Definição 2.4.3. Dizemos que $B \in \mathbb{Q}$ é uma cota superior de (x_n) se $x_n \leqslant B$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Neste caso, dizemos que a sequência é limitada superiormente.

Definição 2.4.4. Se (x_n) for limitada inferior e superiormente, diremos apenas que (x_n) é limitada. Se (x_n) não for limitada diremos que ela é ilimitada.

Exemplo 2.4.4. Ainda para a sequência $(x_n) = \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \cdots\right)$, perceba que qualquer valor que anteceda $\dfrac{1}{2}$ é cota inferior, inclusive o próprio, e que a cota superior provem do fato de que todos o seus termos são menores do que 1.
Por isso, os termos da sequência apresentada pertencem ao intervalo $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}\right)$, ou seja, $\dfrac{1}{2} \leqslant x_n \leqslant \dfrac{1}{3}$. Isto quer dizer que existem cotas inferior e superior, simultaneamente. O que nos permite dizer que é uma sequência limitada inferior e superiormente.

Exemplo 2.4.5. a) Considere a sequência $(x_n) = (-2, -4, -6, -8, \cdots, -2n, \cdots)$. É fácil ver que $-0,8$; 1; $1,952$ ou até mesmo o 0 são opções de cotas superiores de (x_n), porém não existe cota inferior.

b) Seja a sequência $(n^2) = (1, 4, 9, 16, 25, \cdots)$. Note que o número 1 pode ser considerado cota inferior de (n^2), mas não há cota superior.

Teorema 2.4.2. Em $\mathbb{Q}$, toda sequência convergente é limitada.

Demonstração. Seja a sequência convergente (x_n).
Considere $\lim x_n = a$, com $a \in \mathbb{Q}$.
Fixando $\varepsilon = 1$, existe $N \in \mathbb{N}$, tal que para $n > N$ temos que:

$$|x_n - a| < 1.$$

Consideremos o conjunto $X = \{x_1, x_2, x_3, \cdots, x_N\} \cup (a-1, a+1)$.

Note que todos os elementos da sequência (x_n) pertencem ao conjunto limitado X. Logo (x_n) é limitada. $\square$

Exemplo 2.4.6. **1.** $(a_n) = n$ é limitada inferiormente ($a_n > 0$) mas não superiormente.

2. $(a_n) = \dfrac{n}{n+1}$ é limitada, pois $0 < a_n < 1$, para todo n.

3. $(a_n) = (-1)^n$ é limitada inferiormente e superiormente ($-1 \leqslant a_n \leqslant 1$), mas não é convergente.

O terceiro exemplo nos remete a noção de que a recíproca do Teorema 2.4.2 não é válida, isto é, nem toda sequência limitada é convergente.

Teorema 2.4.3. Seja (x_n) uma sequência racional convergente, com $\lim x_n = a$, para $a \in \mathbb{Q}$. Então, toda subsequência de (x_n) é convergente e converge para a.

Demonstração. Seja (x_{n_k}) uma subsequência de (x_n). Vamos provar que $\lim(x_{n_k}) = a$.
Da definição de limite, temos que, dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > N$, tem-se $x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.
Da definição de subsequência, existe $K \in \mathbb{N}$ tal que $n_K > N$. Logo, para todo $k > K$, tem-se que $x_{n_k} \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, ou seja, $\lim x_{n_k} = a$. $\square$

Desse teorema, podemos provar que uma sequência é divergente a partir da análise de suas subsequências.

Exemplo 2.4.7. A sequência $(0, 2, 0, 2, 0, 2, \cdots)$ é divergente porque possui duas subsequências $(0, 0, 0, 0, \cdots)$ e $(2, 2, 2, 2, \cdots)$ constantes que convergem para valores diferentes, 0 e 2, respectivamente. Logo pelo Teorema 2.4.3 a sequência $(0, 2, 0, 2, 0, 2, \cdots)$ é divergente.

2.5 Propriedades de limites de sequências convergentes

Nesta seção trataremos de algumas propriedades de limites de sequências convergentes.

Teorema 2.5.1. Sejam (x_n) e (y_n) sequências convergentes. Então $(x_n + y_n)$ é convergente e

$$\lim(x_n + y_n) = \lim x_n + \lim y_n$$

Demonstração. Sejam (x_n) e (y_n) sequências convergentes e seja $\lim x_n = a$ e $\lim y_n = b$.
Queremos mostrar que $\lim(x_n + y_n) = \lim x_n + \lim y_n = a + b$.
Seja $\varepsilon > 0$. Da definição de limites de sequência temos que existem $n_x, n_y \in \mathbb{N}$ tais que

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ se } n > n_x, \text{ e}$$

$$|y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ se } n > n_y.$$

Tome $N = max\{n_x, n_y\}$ então, quando $n > N$, usando a desigualdade triangular, teremos

$$|(x_n + y_n) - (a + b)| = |(x_n - a) + (y_n - b)| \leq |x_n - a| + |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

O que conclui nossa prova. □

Teorema 2.5.2. Se (x_n) e (y_n) são sequências convergentes, então $(x_n y_n)$ é convergente e

$$\lim(x_n y_n) = (\lim x_n)(\lim y_n)$$

Demonstração. Seja $\lim x_n = a$ e $\lim y_n = b$.
Queremos mostrar que o limite do produto de duas sequências convergentes é igual ao produto dos limites dessas sequências.
Observe que

$$\begin{aligned}
|(x_n y_n) - (ab)| &= |x_n y_n - a y_n + a y_n - ab| \\
&= |(x_n y_n - a y_n) + (a y_n - ab)| \\
&= |y_n(x_n - a) + a(y_n - b)| \\
&\leq |y_n||x_n - a| + |a||y_n - b|
\end{aligned}$$

A sequência y_n é convergente. Em consequência disso, é limitada. Pelo Teorema 2.4.2. Logo, existe um número racional $q > 0$ tal que $|y_n| \leq q$, para todo $n \in \mathbb{N}$.
Assim, fixando $\varepsilon > 0$, da definição de limite de sequência temos que, existe $n_x, n_y \in \mathbb{N}$ tais que

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2q}, \text{ se } n > n_x \quad \text{e} \quad |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2|a|}, \text{ se } n > n_y.$$

Seja $N = max\{n_x, n_y\}$ então se $n > N$ segue que

$$\begin{aligned}
|(x_n y_n) - (ab)| &\leq |y_n||x_n - a| + |a||y_n - b| \\
&< q \cdot \frac{\varepsilon}{2q} + |a| \cdot \frac{\varepsilon}{2|a|} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Isso conclui nossa prova. □

Considerando a propriedade acima, caso uma das sequências possua todos os elemento iguais, ou seja, uma das sequências seja constante, teremos o seguinte

Corolário 2.5.1. Seja (x_n) uma sequência convergente e seja c um número racional qualquer. Então (cx_n) é convergente e

$$\lim(cx_n) = c \lim x_n$$

Demonstração. Seja (y_n) uma sequência convergente constate,isto é, $y_n = \{c : c \in \mathbb{Q}\}$. Do $Teorema$2.5.5 segue que

$$\begin{aligned}\lim(x_n y_n) = \lim(x_n c) &= (\lim x_n)(\lim c)\\ &= (\lim c)(\lim x_n)\\ &= c \lim x_n.\end{aligned}$$

Como queríamos demonstrar. □

Em particular, quando $c = -1$, temos que $\lim(-x_n) = -\lim x_n$, pois a sequência $(-x_n)$ converge e, ainda, se $c = 0$, temos que $\lim(0 \cdot x_n) = 0 \cdot \lim x_n = 0$ também converge.

Teorema 2.5.3. Sejam (x_n) e (y_n) sequências convergentes. Então $(x_n - y_n)$ é convergente e

$$\lim(x_n - y_n) = \lim x_n - \lim y_n$$

Demonstração. Basta considerar que $x_n - y_n = x_n + (-y_n)$ e aplicando o Teorema 2.5.1 junto com o Corolário 2.5.1 teremos:

$$\begin{aligned}\lim(x_n - y_n) &= \lim(x_n + (-y_n))\\ &= \lim(x_n) + \lim(-y_n)\\ &= \lim x_n - \lim y_n.\end{aligned}$$

Isso conclui nossa prova. □

Teorema 2.5.4. Seja (x_n) uma sequência convergente e seja $m \in \mathbb{N}$ então a sequência (x_n^m) converge e

$$\lim x_n^m = (\lim x_n)^m$$

Demonstração. Vamos usar o Teorema 2.5.2 e o Princípio de Indução sobre m para demonstrar essa propriedade.
Observe que quando $m = 1$ e $m = 2$ temos

i) $\lim x_n^1 = \lim x_n = (\lim x_n)^1$

ii) $\lim x_n^2 = \lim(x_n \cdot x_n) = (\lim x_n) \cdot (\lim x_n) = (\lim x_n)^2$. (*Veja o Teorema 2.5.2*)

Logo, a proposição é válida em sua etapa básica.
Supondo que o teorema seja válido para $m = k$, para algum $k \in \mathbb{N}$, com $k \geqslant 2$. Considere $m = k + 1$.
Então, pelo Teorema 2.5.2 a sequência x_n^{k+1} converge, pois $x_n^{k+1} = x_n^k \cdot x_n$ e

$$\lim x_n^{k+1} = \lim(x_n^k \cdot x_n) = (\lim x_n)^k \cdot (\lim x_n) = (\lim x_n)^{k+1}.$$

Isso conclui nossa prova. □

Teorema 2.5.5. Seja (x_n) uma sequência convergente, tal que $\lim x_n \neq 0$ então a sequência $\left(\frac{1}{x_n}\right)$ converge e

$$\lim\left(\frac{1}{x_n}\right) = \frac{1}{\lim x_n}$$

Demonstração. Seja $a = \lim x_n$, com $a \neq 0$. Observe que $|a| > 0$.
Como a sequência (x_n) converge, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_n - a| < \frac{|a|}{2}, \quad \textit{sempre que} \quad n > n_1. \tag{2.1}$$

Da desigualdade 2.1, segue que quando $n > n_1$ teremos

$$\begin{aligned} -\frac{|a|}{2} &< x_n - a < \frac{|a|}{2} \\ a - \frac{|a|}{2} &< x_n < a + \frac{|a|}{2} \end{aligned}$$

Nas duas situações, $a > 0$ ou $a < 0$, temos que para $n > n_1$,

$$|x_n| > \frac{|a|}{2}.$$

Donde segue que

$$\frac{1}{|x_n|} < \frac{2}{|a|}, \text{ para todo } n > n_1.$$

Dado um número racional $\varepsilon > 0$. Precisamos mostrar que

$$|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{a}| < \varepsilon.$$

Da definição de limite de sequência existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|a - x_n| < \varepsilon \cdot \frac{|a|^2}{2}, \quad \textit{para todo} \quad n > n_2. \tag{2.2}$$

Tome $n_3 = max\,\{n_1, n_2\}$.
Logo, usando as equações 2.1 e 2.2, sempre que $n_3 > N$ teremos

$$\left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{a}\right| = \frac{|a - x_n|}{|a||x_n|} = \frac{|x_n - a|}{|a||x_n|} \leq |x_n - a| \cdot \frac{1}{|a||x_n|} < \varepsilon \cdot \frac{|a|^2}{2} \cdot \frac{2}{|a|} \cdot \frac{1}{|a|} = \varepsilon$$

O que conclui nossa demonstração. □

O Teorema 2.5.5 será usado na demonstração do teorema que segue.

Teorema 2.5.6. Sejam (x_n) e (y_n) sequências convergentes, tal que $\lim y_n \neq 0$, então a sequência $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$ converge e

$$\lim \left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{\lim x_n}{\lim y_n}$$

Demonstração. Reescreva $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$ como $\left(x_n \cdot \frac{1}{y_n}\right)$ e use os Teoremas 2.5.2 e o 2.5.5. □

2.6 Sequências de Cauchy

Definição 2.6.1. Uma sequência de numeros racionais é dita de Cauchy se para todo número racional $\varepsilon > 0$, existir um N natural tal que

$$|x_m - x_n| < \varepsilon, \text{ sempre que} n, m > N$$

Usamos as sequências de Cauchy quando não temos um candidato a limite e queremos verificar a convergência de uma sequência numérica.
A sequência de Cauchy também é chamada de sequência fundamental.

Teorema 2.6.1. Toda sequência racional convergente é de Cauchy.

Demonstração. Seja a sequência racional (x_n) convergente e seja $\lim x_n = r$.
Fixando $\varepsilon > 0$, da definição de convergência de sequência temos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n > N$

$$|x_n - r| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Considerando $m, n > N$ e da desigualdade triangular temos

$$\begin{aligned}
|x_m - x_n| &= |x_m - r + r - x_n| \\
&= |x_m - r| + |r - x_n| \\
&= |x_m - r| + |x_n - r| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

Isso conclui nossa demonstração. □

Note que a recíproca para o Teorema 2.6.1 não é verdadeira.
Um exemplo disso está no final dessa seção, na página 37, mais precisamente.
Temos aí uma sequência de Caucy que não converge em $\mathbb{Q}$.

Teorema 2.6.2. Toda sequência racional de Cauchy é limitada.

Demonstração. Seja a sequência racional de Cauchy (x_n). Seja $\varepsilon = 1 > 0$. Então, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que,

$$x_n \in (x_{N+1} - 1; x_{N+1} + 1), \text{ quando } n > N.$$

Seja k um número racional tal que $-k < x_N - 1$ e $x_N + 1 < k$.
Assim sendo, $x_n \in (-k; k)$, para todo $n > N$. Seja

$$M = max\left\{|x_1|, |x_2|, |x_3|, \cdots, |x_n|, |x_N - 1|, d\right\}.$$

Dessa forma, $|x_n| \leq k$, para todo $n > N$. Logo, (x_n) é limitada. □

Os Teoremas 2.6.1 e 2.6.2 caracterizam o que é chamado de Critério de convergência de Cauchy. Note que para o segundo desses Teoremas a recíproca também não é verdadeira. O Critério de convergência de Cauchy é importante, pois nos fornece a completeza do conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$), assunto abordado no próximo capítulo.

Teorema 2.6.3. Toda sequência racional monótona e limitada é de Cauchy.

Demonstração. Considere a sequência (x_n) não-decrescente e limitada. A demonstração para a sequência não-crescente é feita de modo análogo.
Os termos da sequência estão dispostos do seguinte modo

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant \cdots \leqslant x_n \leqslant \cdots$$

Dizer que (x_n) é limitada implica que há uma cota inferior $k \in \mathbb{Q}$.
Fixemos um número racional $\varepsilon > 0$, tomado arbitrariamente. A partir de k, tomamos intervalos consecutivos de tamanho ε, a saber, $k, k+\varepsilon, k+2\varepsilon, k+3\varepsilon, \cdots, k+(t-1)\varepsilon, k+t\varepsilon$, com $t \in \mathbb{N}$. Como a sequência (x_n) é limitada existe t em que $k + t\varepsilon$ é cota superior.
Seja t o menor valor natural para o qual $k + t\varepsilon$ é cota superior. Significa dizer que $k + (t-1)\varepsilon$ não é cota superior, senão t não seria o menor valor procurado.
Então existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$x_N > k + (t-1)\varepsilon.$$

Como (x_n) é não-decrescente, quando $n > N$ então

$$x_N \leqslant x_n.$$

Logo, $x_n > k + (t-1)\varepsilon$, para todo $n > N$.
Portanto,

$$k + (t-1)\varepsilon < x_n \leqslant k + t\varepsilon, \text{ para todo } n > N.$$

Daí, sempre que $m, n > N$ temos

$$|x_m - x_n| < (k + t\varepsilon) - (k + (t-1)\varepsilon) = \varepsilon.$$

Portanto, a sequência (x_n) é uma sequência de Cauchy. □

Exemplo 2.6.1. Considere a sequência (x_n) onde $x_1 = 2$ e os demais termos são definidos pela lei $x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{2}{x_n}\right)$, para todo $n \geqslant 1$.
Note que os termos de (x_n) são positivos para todo $n \in \mathbb{N}$. Vamos verificar a monoticidade dessa sequência.
Inicialmente, perceba que

$$\begin{aligned}
x_{n+1}^2 &= \left(\frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)\right)^2\\
x_{n+1}^2 &= \frac{1}{4}\left(x_n^2 + 4 + \frac{4}{x_n^2}\right)\\
x_{n+1}^2 - 2 &= \frac{1}{4}\left(x_n^2 + 4 + \frac{4}{x_n^2}\right) - 2\\
&= \frac{1}{4}\left(x_n^2 - 4 + \frac{4}{x_n^2}\right)\\
&= \left(\frac{1}{2}\left(x_n - \frac{2}{x_n}\right)\right)^2 > 0
\end{aligned}$$

Com isso concluímos que os termos da sequência são maiores que 2. Então, teremos

$$\begin{aligned}
x_n^2 &> 2\\
x_n &> \frac{2}{x_n}\\
2x_n &> \frac{2}{x_n} + x_n\\
x_n &> \frac{1}{2}\left(\frac{2}{x_n} + x_n\right)\\
x_n &> x_{n+1}
\end{aligned}$$

Logo, a sequência (x_n) é estritamente decrescente.
Donde concluimos que $x_1 = 2$ e 0 são cotas superior e inferior, nessa ordem, da sequência.
Logo a sequência (x_n) é limitada.
Portanto, a sequência (x_n) é uma Sequência de Cauchy, uma vez que é monótona e limitada (veja Teorema 2.6.3).

Capítulo 3

Uma construção dos números reais

3.1 Introdução

Do capítulo anterior, sabemos que as sequências racionais convergentes são de Cauchy, veja seção 2.6.1. A vatagem de manusear sequências de Cauchy é que o critério de convergência depende apenas dos termos da lista, não sendo necessário conhecer o seu limite.
Neste capítulo, inicialmente, definiremos o conjunto das sequências de Cauchy de números racionais, denotado por S_c, junto às suas operações de soma e produto e respectivas propriedades, com o objetivo de construir o conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$ - simbologia criada pelo matemático Georg Cantor).
Em 1872, o matemático Georg Cantor publicou um artigo em que demonstrava que um número real é associado a uma classe de equivalência de sequências de Cauchy de números racionais. Essa foi a estratégia utilizada por ele para construir $\mathbb{R}$.
Visto assim, partindo do pressuposto de que dominamos as operações soma e produto, a relação de ordem e as propriedades destas em ($\mathbb{Q}$), após a definição do conjunto S_c e de suas operações básicas, é necessário provar que S_c é um corpo que contém todas as sequências convergentes de números racionais.
Além disso, conceituaremos uma relação de ordem em S_c e demonstraremos algumas de suas propriedades, comprovando com isso que S_c é um corpo ordenado. Para, por fim, concluirmos que o conjunto dos números reais é um corpo ordenado completo.
Nascido em março de 1845, durante o Império Russo, Georg Cantor, matemático alemão, possui uma vasta literatura voltada para matemática que muito contribui para o avanço da Análise. Dentre essas contribuições, está uma técnica para demonstrar que o conjunto dos números racionais é apenas uma pequena parte de um outro conjunto, isto é, Cantor usou o conjunto dos números racionais para construir um outro conjunto chamado por ele de conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$).

3.2 Definições

Considere um conjunto formado por todas as seqências de Cauchy de números racionais. Vamos denotá-lo por S_c e definí-lo como

$$S_c = \{(x_n) : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q} \mid (x_n) \text{ é uma sequência de Cauchy de números racionais}\}.$$

Exemplo 3.2.1. As sequências $x_n = \dfrac{n}{3n-1}$ e $y_n = \dfrac{1}{3}$ convergem. Logo são sequências de Cauchy, veja Exemplo 2.4.3 da Definição 2.4.1.
Portanto (x_n) e (y_n) pertencem ao conjunto S_c.
Note que ao fazermos a diferença entre essas duas sequências teremos

$$\begin{aligned} x_n - y_n &= \frac{n}{3n-1} - \frac{1}{3} \\ &= \frac{3n-3n+1}{3(3n-1)} \\ &= \frac{1}{3(3n-1)}. \end{aligned}$$

Vamos analisar o limite da nova sequência gerada pela diferença acima a medida que tomamos n suficientemente grande.

$$\begin{aligned} \lim(x_n - y_n) &= \lim \frac{1}{3(3n-1)} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Fizemos essa observação para salientar a necessidade de definir uma classe de equivalência entre os elementos de S_c, isto é, agrupar todas as sequências convergentes de números racionais que possuem o mesmo limite.

Definição 3.2.1. Sejam (x_n) e (y_n) duas sequências convergentes de números racionais. Dizemos que a sequência (x_n) está relacionada com a sequência (y_n) se a sequência $(x_n - y_n)$ convergir para zero, isto é,

$$\lim(x_n - y_n) = 0.$$

Denotaremos esta relação por $(x_n) \sim (y_n)$.

Destacamos que a diferença entre duas sequências é calculada do seguinte modo:

$$(x_n - y_n) = (x_1 - y_1, x_2 - y_2, x_3 - y_3, x_4 - y_4, \cdots, x_n - y_n, x_{n+1} - y_{n+1}, \cdots).$$

Teorema 3.2.1. A relação acima é de equivalência.

Demonstração. A relação acima definida é goza das sequintes propriedades, dados $(x_n), (y_n), (z_n) \in S_c$.

1. Reflexividade: Seja $(x_n) \in S_c$. Assim, para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$x_n - x_n = 0 \text{ o que implica em } \lim(x_n - x_n) = 0.$$

Logo $(x_n) \sim (x_n)$ para todo $(x_n) \in S_c$.

2. Simteria: Sejam $(x_n), (y_n) \in S_c$. Supondo que $\lim(x_n - y_n) = 0$ teremos da definição de limite que dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|(x_n - y_n) - 0| < \varepsilon, \text{ quando} n > N.$$

Em contra partida:

$$\begin{aligned} |(x_n - y_n) - 0| < \varepsilon &\Leftrightarrow |x_n - y_n| < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow |y_n - x_n| < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow |(y_n - x_n) - 0| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto também é válido que $\lim(y_n - x_n) = 0$ o que implica que $(x_n) \sim (y_n)$.

3. Transitividade: Sejam $(x_n), (y_n), (z_n) \in S_c$. Supondo que $\lim(x_n - y_n) = 0$ e $\lim(y_n - z_n) = 0$ teremos a definição de limite que dado $\varepsilon > 0$ existem $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tais que

$$|(x_n - y_n) - 0| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ quando } n > N_1.$$

e

$$|(y_n - z_n) - 0| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ quando } n > N_2.$$

Tome $N_3 = \max\{N_1, N_2\}$ e usando a desigualdade triangular temos que

$$\begin{aligned} |x_n - z_n| &= |x_n - y_n + y_n - z_n| \\ &= |(x_n - y_n) + (y_n - z_n)| \\ &\leqslant |x_n - y_n| + |y_n - z_n| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Portanto temos que $(x_n) \sim (z_n)$.

$\square$

Estabelecida então essa relação em S_c podemos definir agora a classe de equivalência que o divide em grupos de sequências racionais de Cauchy equivalentes, de acordo com os seus respectivos limites.

Exemplo 3.2.2. Considere as sequências definidas por $x_n = \dfrac{n}{3n-1}$ e $y_n = \dfrac{1}{3}$. No exemplo 3.2.1 provamos que $(x_n) \sim (y_n)$.

Sendo assim, essas sequências pertencem a mesma classe de equivalência.
Mas de qual classe de equivalência estamos falando?
Antes de responder a essa pergunta vamos rever o exemplo 2.6.1 do capítulo anterior. Neste, provamos que a sequência definida por $x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{2}{x_n}\right)$, onde $x_1 = 2$, é de Cauchy.
Cada termo dessa recorrência representa uma aproximação para a raiz quadrada de 2. Como seu limite não é racional, pois não há uma sequência constante y_n tal que $\lim(x_n - y_n) = 0$, essa sequência não converge em $\mathbb{Q}$, mas pertence ao conjunto S_c, que por sua vez contém todas as sequências racionais de Cauchy que convergem ou não no conjunto dos números racionais.
Por causa disso, é mais conveniente juntar em uma mesma classe todas as sequências que têm o mesmo limite, para depois construir uma estrutura algébrica, em nosso caso, um corpo.
É óbvio que cada número racional q está relacionado a uma sequência constante $x_n = q$ e, consequentemente, pertence à classe de equivalência que a contêm. Assim, como $\left(\dfrac{1}{3}\right) \sim \left(\dfrac{n}{3n-1}\right)$, dizemos que ambas são da classe de equivalência $\left[\dfrac{1}{3}\right]$.
Com as classes de equivalência fixadas, vamos definir o conjunto fundamental deste capítulo e, em seguida, conceituar também a soma e o produto verificando a existência do elemento neutro para cada uma dessas operações, assim também como suas inversas, subtração e divisão; e determinar quando uma classe de equivalencia é menor que outra, isto é, definir uma relação de ordem.

Definição 3.2.2. Seja uma sequência $[(x_n)]$ uma classe de equivalência. Definimos o conjunto

$$R = \{[(x_n)] : (x_n) \in S_c\}$$

de todas as classe de equivalência das sequências racionais de Cauchy, ou apenas conjunto de Cauchy.

Assim como o conjunto S_c é não vazio, perceba que R também o é. A seguir, trataremos das operações básicas que caracterizam uma estrutura algébrica: soma e produto.

3.3 Soma em R

Proposição 3.3.1. Se $(x_n), (y_n)$ são sequências de Cauchy então $(x_n + y_n)$ também é uma sequência de Cauchy.

Demonstração. O que queremos provar é que dadas duas sequencias de Cauchy (x_n) e (y_n), a sequência

$$(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, \cdots, x_n + y_n, x_{n+1} + y_{n+1}, \cdots)$$

também é de Cauchy.
Dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que sempre que $m, n > N$

$$\begin{aligned} |(x_m + y_m) - (x_n + y_n)| &= |(x_m - x_n) + (y_m - y_n)| \\ &\leqslant |x_m - x_n| + |y_m - y_n| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Portanto a sequência obtida para a soma termo a termo de duas sequências de Cauchy também é de Cauchy. □

Definição 3.3.1. Chamaremos de soma a aplicação

$$+ : R \times R \to R$$

tal que $a + b = [(x_n + y_n)],$ onde $a = [(x_n)]$ e $b = [(y_n)]$.

Precisamos verificar se a soma em R está bem definda, isto é, se ao somar representantes de classes de equivalência distintas esse total pertence ao conjunto S_c.
Considere duas classes de equivalência $a = [(x_n)], b = [(y_n)] \in R$, assim como também $a = [(x_n^{'})]$ e $b = [(y_n^{'})]$. Queremos provar que

$$[(x_n + y_n)] = [(x_n^{'} + y_n^{'})].$$

Temos que se $[(x_n)] = a = [(x_n^{'})]$ entâo $[(x_n)] = [(x_n^{'})]$. Da definição, segue que

$$\lim(x_n - x_n^{'}) = 0.$$

Analogamente, segue que

$$\lim(y_n - y_n^{'}) = 0.$$

Assim, dado um $\varepsilon > 0$, existem $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tais que

$$\text{quando } n > N_1, |x_n - y_n| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ e quando } n > N_2, |x_n^{'} - y_n^{'}| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tome $N_3 = \max\{N_1, N_2\}$. Logo, da desigualdade triangular,quando $m, n > N_3$, temos

$$\begin{aligned}
|(x_n + y_n) - (x_n' + y_n')| &= |(x_n - x_n') + (y_n - y_n')| \\
&\leqslant |x_n - x_n'| + |y_n - y_n'| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Logo $(x_n + y_n) \sim (x_n' + y_n')$.
Portanto provamos que a soma está bem definida e que esta não depende das sequências representante das classes de equivalência no conjunto de Cauchy, conjunto R.
Passemos agora a verificação das operações da soma.

Propriedades da soma em R

Teorema 3.3.1. Em R, a soma satisfaz as propriedades associativa, comutativa, elemento neutro e elemento simétrico.

Demonstração. Sejam $a = [(x_n)],\ b = [(y_n)], c = [(z_n)] \in R$.

S1) Comutativa: $a + b = b + a$ Sejam $a = [(x_n)],\ b = [(y_n)] \in R$. Como a soma de números racionais é comutativa, temos, da definição de soma em R, que

$$\begin{aligned}
a + b &= [(x_n)] + [(y_n)] \\
&= [(x_n + y_n)] \\
&= [(y_n + x_n)] \\
&= [(y_n)] + [(x_n)] \\
&= b + a.
\end{aligned}$$

S2) Associativa: $a + (b + c) = (a + b) + c$ Analogamente a demonstração anterior, note que

$$\begin{aligned}
a + (b + c) &= [(x_n)] + ([(y_n)] + [(z_n)]) \\
&= [(x_n)] + [(y_n + z_n)] \\
&= [x_n + (y_n + z_n)] \\
&= [(x_n + y_n) + z_n] \\
&= [(x_n + y_n)] + [(z_n)] \\
&= ([(x_n)] + [(y_n)]) + [(z_n)] \\
&= (a + b) + c.
\end{aligned}$$

S3) Elemento neutro: Existe um elemento 0 (zero) tal que $a+0=0+a=a$. Provaremos a demonstração de $a+0=a$. Para o caso em que $0+a=a$ o procedimento é análogo.

Sabemos que o conjunto S_c contêm a sequência constante $(0)=(0,0,0,0,0,\cdots,0,0,\cdots)$ e ainda que (0) é representante da classe $[(0)]\in R$.

Assim,

$$\begin{aligned} a+0 &= [(x_n)]+[(0)] \\ &= [(x_n+0)] \\ &= [(x_n)] \\ &= a. \end{aligned}$$

Como provado em nosso capítulo 2, o elemento neutro da soma é único e, em se tratando de R, será denotado por 0 como no conjunto dos números racionais.

S4) Elemento simétrico: Existe um elemento $-a$ tal que $a+(-a)=0$. Uma vez que $x_n\in\mathbb{Q}$ temos que $-x_n\in\mathbb{Q}$. Considere $(x_n)\in S_c$.

Assim, usando a definição de sequências de Cauchy, dado um racional $\varepsilon>0$, existe $N\in\mathbb{N}$ tal que quando $m,n>N$ temos

$$\begin{aligned} |x_m-x_n| &= |-(-x_m+x_n)| \\ &= |-x_m+x_n| \\ &= |-x_m-(-x_n)|<\varepsilon. \end{aligned}$$

Donde concluimos que $(-x_n)\in S_c$ e, consequentemente, $(-x_n)\in R$.

Assim,

$$\begin{aligned} a+(-a) &= [(x_n)]+[(-x_n)] \\ &= [(x_n+(-x_n))] \\ &= [(x_n-x_n)] \\ &= [(0)]=0. \end{aligned}$$

Isso mostra que $(-a)=[(-x_n)]$ é o simétrico de $a=[(x_n)]$.

$\square$

3.4 Produto em R

Do mesmo modo como foi feito na seção anterior, com a soma em R, vamos agora definir o produto como operação em R e verificar suas propriedades. Porém, antes é necessário a seguinte proposição:

Proposição 3.4.1. Se $(x_n), (y_n)$ são sequências de Cauchy então $(x_n \cdot y_n)$ também é uma sequência de Cauchy.

Demonstração. Similarmente ao que foi feito na seção anterior, queremos provar que dadas duas sequencias de Cauchy (x_n) e (y_n), a sequência

$$(x_1 \cdot y_1, x_2 \cdot y_2, x_3 \cdot y_3, \cdots, x_n \cdot y_n, x_{n+1} \cdot y_{n+1}, \cdots)$$

também é de Cauchy.
Temos que se (x_n) e (y_n) são sequências de Cauchy então, pelo Teorema 2.6.2, as sequências são limitadas.
Logo, existe um número racional k tal que

$$|x_n| \leqslant k \text{ e } |y_n| \leqslant k.$$

Temos também que $x_n, y_n \in \mathbb{Q}$ e daí $(x_n \cdot y_n) \in \mathbb{Q}$.
Além disso, dado um racional $\varepsilon > 0$, existem $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tais que

$$\text{quando } m, n > N_1, |x_m - x_n| < \frac{\varepsilon}{2k} \text{ e quando } m, n > N_2, |y_m - y_n| < \frac{\varepsilon}{2k}.$$

Tome $N_3 = \max\{N_1, N_2\}$ e escreva, quando $m, n > N_3$

$$\begin{aligned}
|x_m y_m - x_n y_n| &= |x_m y_m - x_n y_m + x_n y_m - x_n y_n| \\
&= |y_m(x_m - x_n) + x_n(y_m - y_n)| \\
&\leqslant |y_m||x_m - x_n| + |x_n||y_m - y_n| \\
&< k \cdot \frac{\varepsilon}{2k} + k \cdot \frac{\varepsilon}{2k} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Portanto a sequência obtida para o produto termo a termo de duas sequências de Cauchy também é de Cauchy. □

Definição 3.4.1. Chamaremos de produto a aplicação

$$\cdot : R \times R \to R$$

tal que $a \cdot b = [(x_n \cdot y_n)],$ onde $a = [(x_n)]$ e $b = [(y_n)]$.

Precisamos verificar se o produto em R está bem defindo, isto é, se ao multiplicar representantes de classes de equivalência distintas esse produto pertence ao conjunto S_c.
Considere duas classes de equivalência $a = [(x_n)], b = [(y_n)] \in R$, assim como também

$a = [(x_n')]$ e $b = [(y_n')]$. Queremos provar que

$$[(x_n \cdot y_n)] = [(x_n' \cdot y_n')].$$

Temos que se (x_n), (x_n'), (y_n) e (y_n') são sequências de Cauchy então, pelo Teorema 2.6.2, as sequências são limitadas.
Logo, existe um número racional k tal que

$$|x_n'| \leqslant k \text{ e } |y_n| \leqslant k.$$

Ainda temos que se $[(x_n)] = a = [(x_n')]$ então $[(x_n)] = [(x_n')]$. Da definição, segue que

$$\lim(x_n - x_n') = 0.$$

Analogamente, segue que

$$\lim(y_n - y_n') = 0.$$

Assim, dado um $\varepsilon > 0$, existem $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tais que

$$\text{quando } n > N_1, |x_n - x_n'| < \frac{\varepsilon}{2k} \text{ e quando } n > N_2, |y_n - y_n'| < \frac{\varepsilon}{2k}.$$

Tome $N_3 = \max\{N_1, N_2\}$. Logo, da desigualdade triangular,quando $n > N_3$, temos

$$\begin{aligned} |x_n y_n - x_n' y_n'| &= |x_n y_n - x_n' y_n + x_n' y_n - x_n' y_n'| \\ &= |y_n(x_n - x_n') + x_n'(y_n - y_n')| \\ &\leqslant |y_n||x_n - x_n'| + |x_n||y_n - y_n'| \\ &< k \cdot \frac{\varepsilon}{2k} + k \cdot \frac{\varepsilon}{2k} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Logo $(x_n \cdot y_n) \sim (x_n' \cdot y_n')$.
Portanto provamos que o produto está bem definido e que independe das sequências representante das classes de equivalência no conjunto de Cauchy, conjunto R.
Passemos agora a verificação das operações do produto.

Propriedades do produto em R

Teorema 3.4.1. Em R, o produto, definido acima, satisfaz as propriedades associativa, comutativa, elemento neutro e elemento inverso.

Demonstração. Sejam $a = [(x_n)],\ b = [(y_n)], c = [(z_n)] \in R$.

P1) Comutativa: $a \cdot b = b \cdot a$. Sejam $a = [(x_n)],\ b = [(y_n)] \in R$. Como o conjunto dos números racionais é um corpo comutativo, temos, da definição de produto em R, que

$$\begin{aligned} a \cdot b &= [(x_n)] \cdot [(y_n)] \\ &= [(x_n \cdot y_n)] \\ &= [(y_n \cdot x_n)] \\ &= [(y_n)] \cdot [(x_n)] \\ &= b \cdot a. \end{aligned}$$

P2) Associativa: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$. Pelas mesmas condições da alínea anterior, note que

$$\begin{aligned} a \cdot (b \cdot c) &= [(x_n)] \cdot ([(y_n)] \cdot [(z_n)]) \\ &= [(x_n)] \cdot [(y_n \cdot z_n)] \\ &= [x_n \cdot (y_n \cdot z_n)] \\ &= [(x_n \cdot y_n) \cdot z_n] \\ &= [(x_n \cdot y_n)] \cdot [(z_n)] \\ &= ([(x_n)] \cdot [(y_n)]) \cdot [(z_n)] \\ &= (a \cdot b) \cdot c. \end{aligned}$$

P3) Elemento neutro: Existe um elemento 1 (unidade) tal que $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$. Provaremos a demonstração de $a \cdot 1 = a$. Para o caso em que $1 \cdot a = a$ o procedimento é análogo. Sabemos que o conjunto S_c contêm a sequência constante $(1) = (1, 1, 1, 1, 1, \cdots, 1, 1, \cdots)$, pois toda sequência convergente é de cauchy (veja Teorema 2.6.1), e ainda que (1) é representante da classe $[(1)] \in R$. Seja $1 = [(1)]$.

Assim,

$$\begin{aligned} a \cdot 1 &= [(x_n)] \cdot [(1)] \\ &= [(x_n \cdot 1)] \\ &= [(x_n)] \\ &= a. \end{aligned}$$

P4) Elemento inverso: Para cada $a \in R - \{0\}$, existe um elemento a^{-1} tal que $a \cdot a^{-1} = 1$. Seja $(x_n) \in S_c$. Suponha que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \neq 0$ sempre que $n > N$.

Seja agora a sequência racional (y_n) definida assim

$$\text{se } n \leqslant N, y_n = 0 \text{ e se } n > N, y_n = \frac{1}{x_n}.$$

Donde temos que

$$(y_n) = \left(0, 0, 0, \cdots, 0, \frac{1}{x_{n+1}}, \frac{1}{x_{n+2}}, \cdots\right).$$

Note que para $n > N$, dado que o número racional $x_n \neq 0$, temos que existe $\dfrac{1}{x_n}$.

Assim, o produto $x_n \cdot y_n$ será $x_n \cdot 0 = 0$ quando $n \leqslant N$ e será $x_n \cdot \dfrac{1}{x_n} = 1$ quando $n > N$.

Tome agora a proposição anterior e considere a sequência constante $1 = (1, 1, 1, \cdots, 1, \cdots)$. Então, fazendo $1 - (x_n y_n)$ encontraremos como resultado $1 - 0 = 1$, para $n \leqslant N$, e $1 - 1 = 0$, para $n > N$. Uma vez que, quando $n > N$, a sequência $(1, 1, 1, \cdots, 1, \cdots) - (x_n y_n) = (0, 0, 0, \cdots, 0, \cdots)$, isto é, queremos dizer que a sequência resultante converge para zero, concluimos que $(1) \sim (x_n y_n)$.

Portanto provamos que (y_n) é o inverso multiplicativo de (x_n).

P5) Distributividade da multiplicação em relação a soma: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ Para esta prova vamos considerar que o corpo dos números racionais possui a propriedade distributiva. Logo, como estamos usando sequências racionais, temos

$$\begin{aligned} a \cdot (b + c) &= [(x_n)] \cdot [(y_n + z_n)] \\ &= [x_n \cdot (y_n + z_n)] \\ &= [(x_n \cdot y_n) + (x_n \cdot z_n)] \\ &= [(x_n \cdot y_n)] + [(x_n \cdot z_n)] \\ &= [(x_n)] \cdot [(y_n)] + [(x_n)] \cdot [(z_n)] \\ &= a \cdot b + a \cdot c. \end{aligned}$$

□

Vamos entender o que isso quer dizer $a = [(x_n)] \neq 0$? Pois bem, quer dizer que a sequência (x_n) não converge para 0, em outras palavras, (x_n) não pertence a classe $[(0)]$. Com isso, temos que deduzir a existêntia em R de um elemento a^{-1} tal que $a \cdot a^{-1}$ pertença a classe $[(1)]$. O que é de fácil demonstração, partindo do princípio de que todo número racional diferente de zero possui inverso.
Porém, o fato de termos uma sequência que não converge para zero não nos garante que todos os termos da mesma sejam diferentes de zero. E, ainda assim, $(x_n) \neq 0$.
Desse modo, se faz necessário que usemos a proposição que segue.

Proposição 3.4.2. Se uma sequência de Cauchy possui infinitos termos nulos então ela converge para zero.

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência de Cauchy.
Então, dado um racional $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_m - x_k| < \varepsilon, \text{ sempre que } n, k > N.$$

Como a sequência possui infinitos termos nulos então existe $n > N$ tal que $x_n = 0$, ou seja, independente da posição escolhida sempre haverá um termo zero.
Suponha que quando $n > N$, temos $x_n = 0$.
Se $m > N$ então $|x_m - x_n| < \varepsilon$.
Logo

$$|x_m - 0| < \varepsilon, \text{ se } n > N.$$

Portanto $\lim x_n = 0$. □

Dessa proposição podemos concluir que se uma dada sequência tiver um número finito de termos nulos ela não pertence a $[(0)]$ e estes podem ser desconsiderados uma vez que o limite dessa sequência não converge para zero.
Se assim não fosse, então pelo Teorema 2.4.3, teríamos uma subsequência convergindo para zero e, consequentemente, a sequência também convergiria para o mesmo ponto e chegariamos a um absurdo.
Podemos, aliás, substituir os termos nulos existentes numa sequência convergente por qualquer valor constante.
Munido das operações da soma e do produto, ambas bem definidas e constatando a validades das propriedades dessas operações concluimos que o conjunto R é um corpo.
Em continuidade, verificaremos se este corpo é ou não ordenado.

3.5 A relação de ordem em R

A ideia para esta seção é similar ao que foi feito no capítlo 2, seção 2.4. Porém, inicialmente, precisamos definir sequências positivas; em seguida, o conjunto das classes de equivalência para essas sequências, verificando que as operações de soma e produto são fechadas em tal conjunto; e, por fim, analisar se este goza das propriedades que definem a relação de ordem.

Definição 3.5.1. Seja (x_n) uma sequência de Cauchy de números racionais. Dizemos que (x_n) é positiva se existirem $a \in \mathbb{Q}$, com $a > 0$, e $N \in \mathbb{N}$ tais que

$$x_n > a \text{ para todo } n > N.$$

Definição 3.5.2. Seja $s \in R$. Dizemos que s é positivo se existir uma sequência positiva $(x_n) \in S_c$ tal que $s = [(x_n)]$.

Definição 3.5.3. Sejam s e t elementos do conjunto R. Dizemos que $s > t$ se $s - t > 0$, isto é, se $s - t$ é positiva.

Exemplo 3.5.1. Considere a sequência definida por $x_n = \dfrac{n+1}{n}$. Perceba que $n+1 > n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Em virtude disso, temos que $x_n = \dfrac{n+1}{n} > 1$. Donde, seguindo a notação da definção acima, podemos tomar $M = N = 1$ e podemos concluir que a classe de equivalência $[(x_n)] = [\left(\dfrac{n+1}{n}\right)]$ é positiva.

Perante as definições anteriores, precisamos provar que a relação de ordem está bem definida. assim o fazemos no teorema que segue.

Teorema 3.5.1. Sejam (x_n) uma sequência de Cauchy de números racionais positiva e um elemento $t \in S_c$ positivo. Se $t = [(x_n)] = [(x_n^{'})]$ então $[(x_n^{'})]$ também é positiva.

Demonstração. Como (x_n) é positiva, existem $M, N \in \mathbb{N}$ tais que

$$x_n > \frac{1}{M} \text{ para todo } n > N.$$

Como, por hipótese, $[(x_n)] = [(x_n^{'})]$ temos que

$$\lim(x_n - x_n^{'}) = 0.$$

Logo dado $\varepsilon = \dfrac{1}{2M}$ existe $n_c \in \mathbb{N}$ tal que quando $n > n_c$

$$|x_n - x_n^{'}| = |x_n^{'} - x_n| < \varepsilon$$

Tome $n_1 = \max\{N, n_c\}$. Assim, para todo $n > n_1$,

$$-\varepsilon < x_n^{'} - x_n < \varepsilon \;\text{ e ainda }\; x_n - \varepsilon < x_n^{'} < x_n + \varepsilon$$

Como $x_n > \dfrac{1}{M}$ e $\varepsilon = \dfrac{1}{2M}$, considerando apenas o lado esquerdo do intervalo, segue que

$$\frac{1}{M} - \frac{1}{2M} = \frac{1}{2M} < x_n^{'}, \text{ para todo } n > n_1.$$

Portanto a sequência $(x_n^{'})$ também é positiva. □

Desse modo, podemos concluir que se qualquer sequência de Cauchy duma determinada classe de equivalência t tiver apenas termos positivos, então qualquer outra sequência de Cauchy da mesma classe também terá somente termos positivos.

Proposição 3.5.1. Seja o conjunto $P \subset R$ definido por

$$P = \{[(x_n)] \in R; (x_n) \;\text{ é positiva }\}.$$

Dizemos que P é o conjunto das classes de equivalência das sequências racionais de Cauchy positivas em R.

Para que o conjunto P caracterize uma relação de ordem em R é necessário demonstrar as seguintes propriedades:

P1) Se $s = [x_n], t = [y_n] \in P$, então $[(x_n + y_n)]$ é positiva.

P2) Se $s = [x_n], t = [y_n] \in P$, então $[(x_n \cdot y_n)]$ é positiva.

Demonstração. P1) Considere o conjunto $P = \{[(x_n)] \in R; (x_n) \text{ é positiva } \}$.

Sejam $s = [(x_n)]$ e $t = [(y_n)]$ elementos de P, então existem $M, N, n_x, n_y \in \mathbb{N}$ tais que

$$x_n > \frac{1}{M}, textsen > n_x$$

e também

$$y_n > \frac{1}{N}, textsen > n_y.$$

Tome $n_j = \max\{n_x, n_y\}$. Assim, para todo $n > n_j$,

$$\begin{aligned} x_n + y_n &> \frac{1}{M} + \frac{1}{N} = \frac{N+M}{MN} \\ &> \frac{1}{MN} = \frac{1}{K}. \end{aligned}$$

Logo existem $n_j, K \in \mathbb{N}$, com $n_j = \max\{n_x, n_y\}$ e $K = MN$, tais que

$$(x_n + y_n) > \frac{1}{K}, \text{ quando } n > n_j.$$

Portanto $[(x_n + y_n)]$ é positiva, donde segue que $t + s \in P$.

De modo análogo, para o produto segue que para $s = [(x_n)]$ e $t = [(y_n)]$ elementos de P, então existem $M, N, n_x, n_y \in \mathbb{N}$ tais que

$$x_n > \frac{1}{M}, \text{ se } n > n_x$$

e também

$$y_n > \frac{1}{N}, \text{ se } n > n_y.$$

Tome $n_j' = \max\{n_x, n_y\}$. Assim, para todo $n > n_j'$,

$$x_n \cdot y_n > \frac{1}{M} \cdot \frac{1}{N} = \frac{1}{MN} = \frac{1}{K'}.$$

Logo existem $n_j^{'}, K^{'} \in \mathbb{N}$, com $n_j^{'} = \max\{n_x, n_y\}$ e $K = MN$, tais que

$$(x_n \cdot y_n) > \frac{1}{K^{'}}, \text{ quando } n > n_j^{'}.$$

Portanto $[(x_n \cdot y_n)]$ é positiva, donde segue que $t \cdot s \in P$.
Vamos finalizar a análise da relação de ordem em R com a verificação da tricotomia. Em que sendo $s = [(x_n)]$ e $t = [(y_n)]$ elementos de R, teremos ou $t = s$, ou $t > s$, ou $t < s$. Considere o elemento $t - s \in R$. Analisaremos os três casos:

i) Observe que se $t - s \in [(0)]$ então $\lim(t - s) = 0$. Logo $t = s$.

ii) Agora, se $t - s \in P$ então $t - s > 0$. Da relação de ordem em $\mathbb{Q}$, temos

$$t = (t - s) + s > 0 + s = s.$$

Logo, $t > s$.

iii) Por fim, se $-(t - s) \in P$ então $-(t - s) > 0$. E daí temos,

$$\begin{aligned} -(t-s) + (t-s) &> 0 + (t-s) \\ 0 &> (t-s) \\ t &> s. \end{aligned}$$

□

Concluímos então que o conjunto R munido das operações de soma e de produto, gozando das propriedades destas e ainda de relação de ordem é um corpo ordenado.
E ainda mais, cada classe de sequências de Cauchy, tida como elemento do conjunto R, é, na verdade,um número real, visto nessa construção por sequências de Cauchy, em que a sequência constante definida por $r_n = p$, com $p \in \mathbb{Q}$, representa a classe que a contém.
Já as classes que não configuram essa caracterização, a exemplo das que contém a sequência mencionada no capítulo anterior, mais precisamente no exemplo 2.6.1, que define $\sqrt{2}$, tratam-se de novos elementos chamados de não-racionais ou irracionais.
Por isso, de agora em diante, em nosso trabalho, quando mencionarmos números reais estaremos nos referindo a elementos do conjunto R que foi construido neste capítulo. Cuja notação criada por Cantor é $\mathbb{R}$.
A seguir, como proposição, trazemos outras propriedades importantes a relação de ordem em $\mathbb{R}$.

Proposição 3.5.2. *(Monotonicidade da soma)* Considere $r, s, t \in \mathbb{R}$. Se $s > t$ então $s + r > t + r$.

Demonstração. Sejam $r = [(z_n)], s = [(x_n)]$ e $t = [(y_n)]$, Classes de equivalência.
Como $s > t$, temos que $s - t > 0$. Então existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para $n > N$,

$$x_n - y_n > 0.$$

Assim, $x_n > y_n$, para $n > N$.
Note que quando $n > N$,

$$\begin{aligned} x_n - y_n &= x_n + z_n - z_n - y_n \\ &= (x_n + z_n) - (z_n + y_n) \\ &= (x_n + z_n) - (y_n + z_n) \\ &> 0. \end{aligned}$$

Logo, da definição, segue que, para $n > N$,

$$x_n + z_n > y_n + z_n.$$

Portanto, pela definição de número real positivo,

$$s + r = x_n + z_n > y_n + z_n = t + r, \text{ para } n > N.$$

□

Proposição 3.5.3. *(Monotonicidade do produto)* Considere $r, s, t \in \mathbb{R}$, com $r > 0$. Se $s > t$ então $s \cdot r > t \cdot r$.

Demonstração. Sejam $r = [(z_n)], s = [(x_n)]$ e $t = [(y_n)]$.
Como $s > t$, temos que $s - t > 0$ e $r > 0$.
Então existe $n_1, n_2, M, N \in \mathbb{N}$ tal que, para $n_1 > N$,

$$s - t = x_n - y_n > \frac{1}{M}$$

e para $n_2 > N$,

$$r = z_n > \frac{1}{N}.$$

Assim, do produto entre as desigualdades acima, temos

$$(x_n - y_n) \cdot z_n > \frac{1}{M} \cdot \frac{1}{N}$$

Donde segue

$$x_n z_n - y_n z_n > \frac{1}{MN}$$

Tome $n_3 = \max\{n_1, n_2\}$ e $K = MN \in \mathbb{N}$. Logo, quando $n > n_3$,

$$x_n z_n - y_n z_n > \frac{1}{K}.$$

Logo, da definição, segue que, para $n > n_3$,

$$x_n z_n - y_n z_n > 0.$$

Portanto, pela definição de número real positivo,

$$s \cdot r = x_n z_n > y_n z_n = t \cdot r, \text{ para } n > n_3.$$

□

As demais propriedades da relação de ordem válidas em $\mathbb{Q}$ também são válidas para o conjunto dos números reais.

3.5.1 O conjunto dos números reais como corpo ordenado completo

Nesta seção, introduziremos os conceitos de supremo e infímo para que possamos demonstrar a completeza do conjunto dos números reais e assim concluir a caracterização desse conjunto. Fato que o diferencia do conjunto $\mathbb{Q}$, já que este é um corpo ordenado não completo.

Definição 3.5.4. Seja o conjunto X não vazio tal que $X \subset \mathbb{R}$. O elemento $b \in \mathbb{R}$ é dito cota superior de X se $x \leqslant b$, para todo $x \in X$.

Caso exista cota superior de X, dizemos que X é limitado superiormente.
De modo análogo temos,

Definição 3.5.5. Seja o conjunto X não vazio tal que $X \subset \mathbb{R}$. O elemento $a \in \mathbb{R}$ é dito cota inferior de X se $a \leqslant x$, para todo $x \in X$.

Caso exista cota inferior de X, dizemos que X é limitado inferiormente.
E ainda, note que a cota, independente de se inferior ou superior, quando existir, pode pertencer ou não ao conjunto X.

Definição 3.5.6. Seja o conjunto $X \subset \mathbb{R}$ não-vazio e limitado superiormente. Dizemos que $b \in \mathbb{R}$ é o supremo de X, denotado por $b = \sup X$, se ele satisfizer as seguintes condições:

(i) b é uma cota superior de X, isto é, $x \leqslant b$, para todo $x \in X$;

(ii) Se $c \in \mathbb{R}$ for uma cota superior de X, quer dizer que $b \leqslant c$, então $x \leqslant c$, para todo $x \in X$. Daí, entende-se que nenhum número real menor que b pode ser cota superior de X.

Outra forma de expressar o item *(ii)* é assim:

$$\text{Para todo } c < b \text{ existe } x \in X \text{ tal que } c < x.$$

Resumindo, o supremo de X é a menor de suas cotas superiores.

Definição 3.5.7. Seja o conjunto $X \subset \mathbb{R}$ não-vazio e limitado inferiormente. Dizemos que $a \in \mathbb{R}$ é o ínfimo de X, denotado por $a = \inf X$, se ele satisfizer as condições a seguir:

(i) a é uma cota inferior de X, isto é, $a \leqslant x$, para todo $x \in X$;

(ii) Se $c \in \mathbb{R}$ for uma cota inferior de X, quer dizer que $c \leqslant a$, então $x \geqslant c$, para todo $x \in X$. Donde, entende-se que nenhum número real maior que a pode ser cota inferior de X.

Outra forma de expressar o item *(ii)* é assim:

$$\text{Para todo } a < c \text{ existe } x \in X \text{ tal que } x < a.$$

Em resumo, o ínfimo de X é a maior das cotas inferiores.

Exemplo 3.5.2. O conjunto dos números não-positivos é limitado superiormente, o 0 é um cota superior assim como o $0,5$ e o 100 também.

Quando temos um elemeto b como uma cota superior dum conjunto X, dizemos que esta é o maior ou máximo elemento do conjunto. E então, claramente, se um conjunto X possui um máximo elemento, este será o supremo do conjunto. A ideia é análoga em relação ao ínfimo.

Definição 3.5.8. Um corpo ordenado K é dito completo se todo subconjunto $X \subset K$ não-vazio, limitado superiormente, possui supremo.

Proposição 3.5.4. O subconjunto $X \subset \mathbb{R}$ possui supremo.

Demonstração. Considere os números reais em forma de classes de equivalências de sequências de Cauchy. Escolha um representante de cada uma dessas classes.
Considere o conjunto $X \subset K$ não-vazio limitado superiormente por b.
Defina o conjunto $Y = -X = \{-x; x \in X\}$. Com efeito Y é não vazio e limitado inferiormente por $-b$, Logo possui um ínfimo a.
Assim,

$$a = \inf Y \quad \text{donde temos} \quad -a = \sup X.$$

Portanto, o conjunto $X \subset K$ é um corpo ordenado completo, isto é, possui supremo. $\square$

Exemplo 3.5.3. O conjunto $\mathbb{Q}$ não é um corpo ordenado completo.

Axioma 3.5.1. Existe um corpo ordenado completo, denotado por $\mathbb{R}$, chamado de conjunto do números reais.

Teorema 3.5.2. No conjunto dos números reais, toda sequência monótona e limitada converge.

Demonstração. Provaremos para uma sequência não- decrescente.
Para o caso de uma sequência não-crescente a demonstração é feita de maneira análoga.
Considere (x_n) não-decrescente e limitada, isto é, os termos da sequência estão assim dispostos

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant ... \leqslant x_n \leqslant ...$$

.
Considere, ainda, que (x_n) seja limitada superiormente. Isso quer dizer que seu conjunto de valoes possui um maior valor $M \in \mathbb{R}$.
Com efeito, dado qualquer $\varepsilon > 0$, como $M - \varepsilon < M$, o número $M - \varepsilon$ não é a maior cota superior da sequência.
Logo, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $M - \varepsilon < x_N$.
Como (x_n) é monótona,

$$\text{quando} \quad n > N, \quad \text{teremos } x_N \leqslant x_n$$

e, portanto,

$$M - \varepsilon < x_n.$$

Como M é cota superior, então $x_n \leqslant M$ para todo n.
Da definição de supremo, vemos que

$$\text{quando} \quad n > N, \quad \text{teremos que } M - \varepsilon < x_n < M < M + \varepsilon.$$

Donde concluimos que $\lim(x_n) = M$. O que encerra nossa prova. □

Exemplo 3.5.4. No final do capítulo anterior, provamos que a sequência (x_n) onde $x_1 = 2$ e os demais termos são definidos pela lei $x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{2}{x_n}\right)$, para todo $n \geqslant 1$, é uma sequência de Cauchy.
Como tal, é representante de uma classe de equivalência de sequências de Cauchy. Logo está associada a um número real.
Vamos provar que essa sequência converge e que seu limite não é um número racional.
Suponha que $\lim(x_n) = r$, com $r \in \mathbb{Q}$.

Usando as propriedades de limites de sequências, ja demonstradas no capítulo anterior, temos

$$\lim(x_n) = \lim \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right) = \frac{1}{2}\lim(x_n) + \frac{1}{\lim(x_n)}.$$

Daí, segue então que

$$r = \frac{1}{2} \cdot r + \frac{1}{r}.$$

Resolvendo equação temos

$$r^2 = 2$$

Como não se tem um número racional cujo quadrado seja 2, concluinos então que $r \notin \mathbb{Q}$. Porém, sabemos do Teorema 3.5.2 que (x_n) converge e acabamos de provar que seu limite não é racional. Isso demonstra o que queríamos.

Agora, uma vez que todos os termos de x_n são positivos, temos

$$r = \sqrt{2}.$$

Capítulo 4

Frações Contínuas

4.1 Introdução

Existem várias formas de representarmos um número, por exemplo, o número três e meio pode ser expresso como 3,5 ou ainda como $3\frac{1}{2}$. O que define a representação adequada é o contexto no qual o valor está inserido.

Dentre as inúmeras formas de representar os números reais, tratamos neste capítulo de uma das mais utilizadas, as frações contínuas. Existem registros sobre a utilização dessa ferramenta de modo não sistemático desde tempos remotos. Euclides ($325a.C. - 265a.C.$), em sua obra *Os Elementos*, apresentou o algoritmo para cálculo do Máximo Divisor Comum (MDC) entre dois números naturais, como um sub-produto, embrionando o conceito de frações contínuas. O matemático o indiano Aryabhata ($476 - 550$) resolveu equações diofantinas usando frações contínuas.

Daí a ganhar mais força no século XVII, com o trabalho do matemático britânico John Wallis ($1616 - 1703$). Em seu livro *Opera Mathematica* (1695), ele usou pela primeira vez o termo "fração contínua", explicou como calcular o n-ésimo convergente e demonstrou algumas de suas propriedades.

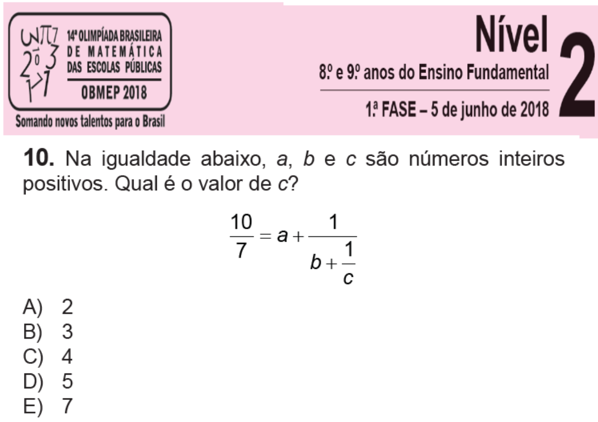
Depois disso, mais precisamente no século XVII, Euler ($1707 - 1783$) demonstrou, fazendo uso das frações contínuas, que e e e^2 são irracionais. Temos também outros matemáticos como Bombelli ($1526 - 1572$) e Cataldi ($1548 - 1626$) que trouxeram novidades que impulsionaram as pesquisas sobre o assunto.

Porém, vale destacar a contribuição do francês Joseph Louis Lagrange ($1736 - 1813$). Em 1770, ele demonstrou que todo número irracional associado a uma fração contínua periódica é raiz de uma equação de segundo grau com coeficientes inteiros e vice-versa. Conceituando então números irracionais quadráticos.

Posteriormente, Evariste Galois ($1811 - 1832$) acrescentou outra informação ao trabalho de Lagrange. Provou que representando as raízes irracionais duma equação de segundo grau com uma incógnita e coefiicientes inteiros em forma de frações contínuas, encontramos

periódos formados pelos mesmos números em ordem inversa.
Iniciamos, pois, o capítulo com um exemplo de avaliação aplicada no ensino fundamental maior, como parte de uma importante competição para a educação básica, a Olimpíada Brasileira de Matemática nas Escolas Públicas e Particulares (OBMEP).
Situação:
No ano de 2018, a OBMEP, trouxe uma questão do nível 2, 1ª fase, que perguntava o valor de uma constante c numa igualdade (Figura 4.1) onde o número racional $\dfrac{10}{7}$ é igualado a uma expressão.

Figura 4.1: Questão OBMEP-2018



14ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS
OBMEP 2018
Somando novos talentos para o Brasil

Nível 2
8.º e 9.º anos do Ensino Fundamental
1.ª FASE – 5 de junho de 2018

10. Na igualdade abaixo, *a*, *b* e *c* são números inteiros positivos. Qual é o valor de *c*?

$$\frac{10}{7} = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c}}$$

A) 2
B) 3
C) 4
D) 5
E) 7

Fonte: `http://www.obmep.org.br/provas.htm`, acesso em 03 de abril de 2020.

Basicamente, para a resolução desse problema recorre-se às operações básicas envolvendo números racionais fracionários. Logo adiante iremos definir tecnicamente expressões desse tipo, mostrar como calcular e discorrer sobre algumas de suas propriedades.
A solução da questão ilustrada na figura 4.1 está disponível em `http://www.obmep.org.br/provas.htm`.

4.2 Conceitos básicos

Inicialmente, vamos definir a expressão em sua forma generalizada. Veja:

Definição 4.2.1. Uma expressão da forma

$$a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \ddots}}}$$

em que a_n e b_n podem ser números reais ou complexos, com $n \in \mathbb{N}$, é chamada de fração contínua.

Exemplo 4.2.1. A expressão

$$4 + \cfrac{5}{2 + \cfrac{2}{11 + \cfrac{5}{9 + \ddots}}}$$

é um exemplo de fração contínua.

Nesta dissertação, iremos escrever restritamente sobre frações contínuas simples, quando $b_n = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$, que serão mencionadas apenas como frações contínuas. Assim, segue

Definição 4.2.2. Uma expressão da forma

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots}}}$$

em que a_0 é um número inteiro, incluindo o zero, e os demais a_n, para todo $n \in \mathbb{N}$, são números inteiros positivos não nulos.

Uma fração contínua pode ser representada também pela expressão $[a_0; a_1, a_2, a_3, a_4, \cdots]$, denominada neste trabalho como forma expansiva da fração contínua, em que os termos $a_0, a_1, a_2, a_3, \cdots$ são chamados de quocientes parciais. Note que o primeiro quociente é separado dos demais por ponto e vírgula.
Em relação aos quocientes parciais, as frações contínuas podem ser infinitas ou finitas. De modo que, podemos representá-las, nessa ordem, como:

$$[a_0; a_1, a_2, a_3, a_4, \cdots] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots}}}$$

Ou,

$$[a_0; a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_{n-1}, a_n] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots} + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}}$$

Exemplos:

As expressões

$$-3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{12+\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{\ddots}}}} \text{ e } 5+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{7+\ddots+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}}}$$

São exemplos de frações contínuas simples infinita e finita, nesta ordem.
O matemático Leonhard Euler $(1707-1783)$ demonstrou propriedades importantes relacionando os números racionais e irracionais às suas representações em fração contínua. Veremos esse tema mais detalhado logo adiante.
Euler também fez uso das frações contínuas para demonstrar que e e e^2 são irracionais. Vejamos a expansão do número e:

$$\begin{aligned} e &= 2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{\ddots}}}}}}}}} \\ &= [2;1,2,1,1,4,1,1,6,\cdots]. \end{aligned}$$

Vejamos também a representação do número π em fração contínua:

$$\begin{aligned} \pi &= 3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{292+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\ddots}}}}}}}}} \\ &= [3;7,15,1,292,1,1,1,2,\cdots]. \end{aligned}$$

Outra cottribuição importante à história do número π é atribuida ao matemático inglês

William Brouncker (1620–1684). Ele escreveu a seguinte expressão:

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{9}{2 + \cfrac{25}{2 + \cfrac{49}{2 + \cfrac{81}{2 + \cfrac{(2n+1)^2}{\ddots}}}}}}$$
$$= [1; 2, 2, 2, 2, 2, \cdots].$$

4.3 Convergentes

Para facilitar o entendimento, começamos esta seção com dois exemplos que mostram como encontrar a fração contínua a partir de um número racional dado e vice-versa.

Exemplo 4.3.1. Considere o número racional $\frac{17}{11}$. O processo para encontrar a fração contínua que o represente pode ser descrito do seguinte modo, utilizando o algoritmo da divisão:
Dividimos 17 por 11.

$$17 = 1 \cdot 11 + 6$$

Dividimos 11 por 6.

$$11 = 1 \cdot 6 + 5$$

Dividimos 6 por 5.

$$6 = 1 \cdot 5 + 1$$

Dividimos 5 por 1.

$$5 = 5 \cdot 1 + 0$$

Finalizamos quando encontramos o resto zero.
Daí podemos concluir que,

$$\frac{17}{11} = 1 + \frac{6}{11}$$
$$\frac{11}{6} = 1 + \frac{5}{6}$$
$$\frac{6}{5} = 1 + \frac{1}{5} \text{e}$$
$$\frac{5}{1} = 5$$

Logo, considerando a definição de número racional inverso, temos que

$$\begin{aligned}
\frac{17}{11} &= 1 + \cfrac{1}{\cfrac{11}{6}} \\
&= 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{6}{5}}} \\
&= 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5}}} \\
&= [1; 1, 1, 5].
\end{aligned}$$

Portanto, $\frac{17}{11} = [1; 1, 1, 5]$.

Em seguida, vejamos agora um exemplo que encontre o número racional negativo a partir de uma fração contínua dada.

Exemplo 4.3.2. Considere a fração contínua $[-2; 1, 3, 5]$. O processo para encontrar o número racional que a represente, consiste em efetuar as somas até que se forme um número racional fracionário. Veja:

$$\begin{aligned}
[-2; 1, 3, 5] &= -2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{5}}} \\
&= -2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{16}{5}}} \\
&= -2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{5}{16}} \\
&= -2 + \cfrac{1}{\cfrac{21}{16}} \\
&= -2 + \frac{16}{21} \\
&= -\frac{26}{21}.
\end{aligned}$$

Vamos retomar o exemplo 4.3.1 para facilitar o entendimento da definição que segue. Perceba que $\frac{17}{11} = [1; 1, 1, 5]$. Nesse exemplo, vamos destacar cada fração contínua após a n-ésima divisão. Veja o passo-a-passo:

Inicialmente para

$$n = 1 : [1] = 1.$$

Em seguida, para

$$n = 2 : [1; 1] = 1 + \frac{1}{1} = 2$$

Em continuidade

$$\begin{aligned} n = 3 : [1; 1, 1] &= 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}} \\ &= 1 + \frac{1}{3} \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

E por fim

$$\begin{aligned} n = 4 : [1; 1, 1, 5] &= 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5}}} \\ &= \frac{17}{4}. \end{aligned}$$

Note que a cada divisão tem-se uma nova fração que vai se aproximando gradativamente do número $\frac{17}{11}$, até que o encontramos após a terceira divisão consecutiva.
Vejamos mais um exemplo.

Exemplo 4.3.3. Considere o número racional $\frac{43}{19}$. Temos que $\frac{43}{19} = [2; 3, 1, 4]$. Assim, seus convergentes são:

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{2}{1} = 2; \\ c_1 &= 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}; \\ c_2 &= 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1}} = \frac{9}{4}; \\ c_3 &= 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4}}} \\ &= \frac{43}{19}. \end{aligned}$$

Considere as expansões das frações contínuas representadas da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
[a_0] &= \frac{a_0}{1},\\
[a_0; a_1] &= a_0 + \frac{1}{a_1},\\
[a_0; a_1, a_2] &= a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2}},\\
[a_0; a_1, a_2, a_3] &= a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3}}},\\
&\vdots\\
[a_0; a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{n-1}, a_n] &= a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots} + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}}\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Definição 4.3.1. Chamamos de n-ésimo convergente da fração contínua $[a_0; a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{n-1}, a_n, \cdots$ o número racional

$$c_n = \frac{p_n}{q_n}, \text{ com } n \geqslant 0$$

sendo os números $p_n \in \mathbb{Z}$ e $q_n \in \mathbb{N}$, respectivamente, chamados de numerador e denominador. Outras formas de representar o n-ésimo convergente também são

$$
\begin{aligned}
c_n &= [a_0; a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{n-1}, a_n, \cdots]\\
&= a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{\ddots}}}}}}\\
&= \frac{p_n}{q_n}.
\end{aligned}
$$

Vale ressaltar aqui que a_0 corresponde a parte inteira do número racional, isto é, o maior inteiro que é menor que o número real em questão. Caso esta não exista faremos $a_0 = 0$, enquanto os outros $a_n's$ são inteiros positivos.

A fração $[a_0]$ é chamada de primeiro convergente, isto é,

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{p_0}{q_0} \\ &= [a_0] \\ &= \frac{a_0}{1}. \end{aligned}$$

Logo

$$\frac{p_0}{q_0} = \frac{a_0}{1},$$

donde $p_0 = a_0$ e $q_0 = 1$.
Seguindo mesmo raciocínio, para o segundo convergente teremos

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{p_1}{q_1} \\ &= [a_0; a_1] \\ &= a_0 + \frac{1}{a_1} \\ &= \frac{a_0a_1 + 1}{a_1}. \end{aligned}$$

Logo

$$\frac{p_1}{q_1} = \frac{a_0a_1 + 1}{a_1},$$

onde $p_1 = a_0a_1 + 1$ e $q_1 = a_1$.
Calculando c_2, c_3, c_4, obtemos, nessa ordem:

$$\begin{aligned} c_2 &= \frac{p_2}{q_2} \\ &= [a_0; a_1, a_2] \\ &= a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2}} \\ &= \frac{a_2(a_1a_0 + 1)}{a_2a_1 + 1} \\ &= \frac{a_2p_1 + p_0}{a_2q_1 + q_0}. \end{aligned}$$

Logo

$$\frac{p_2}{q_2} = \frac{a_2p_1 + p_0}{a_2q_1 + 1},$$

com $p_2 = a_2p_1 + p_0$ e $q_2 = a_2q_1 + 1$;

$$\begin{aligned}
c_3 &= \frac{p_3}{q_3} \\
&= [a_0; a_1, a_2, a_3] \\
&= a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3}}} \\
&= \frac{a_3(a_2(a_1a_0 + 1)) + (a_1a_0 + 1)}{a_3(a_2a_1 + 1) + a_1} \\
&= \frac{a_3p_2 + p_1}{a_3q_2 + q_1},
\end{aligned}$$

Logo

$$\frac{p_3}{q_3} = \frac{a_3p_2 + p_1}{a_3q_2 + q_1},$$

com $p_3 = a_3p_2 + p_1$ e $q_3 = a_3q_2 + q_1$;

$$\begin{aligned}
c_4 &= \frac{p_4}{q_4} \\
&= a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4}}}} \\
&= \frac{a_4p_3 + p_2}{a_4q_3 + q_2},
\end{aligned}$$

Logo

$$\frac{p_4}{q_4} = \frac{a_4p_3 + p_2}{a_4q_3 + q_2},$$

com $p_4 = a_4p_3 + p_2$ e $q_4 = a_4q_3 + q_2$.

Diante do que foi observado, será possível conjecturar uma relação que nos forneça os próximos convergentes?

Em seu livro "Opera Mathemática", o matemático britânico Jonh Wallis $(1616 - 1703)$, utilizou pela primeira vez o termo Fração contínua e fundamentou alguns conceitos básicos para o assunto.

O teorema abaixo é um desses conceitos. Nele será demonstrado, por indução em n, que existe uma relação que nos permite calcular o n-ésimo numerador e/ou denominador do n-ésimo convergente de uma fração contínua.

Teorema 4.3.1. *(Relação de Wallis-Euler)* Seja $c_n = \dfrac{p_n}{q_n}$ o n-ésimo convergente da fração contínua $[a_0; a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-1}, a_n, \cdots]$. Então o numerador p_n e o denominador q_n de c_n

satisfazem as seguintes relações:

$$p_{n+1} = a_{n+1}p_n + p_{n-1}$$

$$q_{n+1} = a_{n+1}q_n + q_{n-1}$$

para $n \in \mathbb{N}$, com $n \geqslant 1$, em que as condições iniciais são definidas por

$$p_0 = a_0,\ \ p_1 = a_1a_0 + 1$$

$$q_0 = 1,\ \ q_1 = a_1.$$

Demonstração. Como já mencionado, vamos provar esse teorema usando a indução sobre n. Para a etapa básica, quando $n = 1$, vimos anteriormente que a igualdade é válida. Suponhamos a equação válida para um número natural $n = k$, vamos verificar sua validade para $n = k + 1$.
Note que

$$\begin{aligned}
[a_0; a_1, a_2, \cdots, a_{k-1}, a_k, a_{k+1}] &= \left[a_0; a_1, a_2, \cdots, a_{k-1}, a_k + \frac{1}{a_{k+1}}\right] \\
&= \frac{\left(a_k + \dfrac{1}{a_{k+1}}\right)p_{k-1} + p_{k-2}}{\left(a_k + \dfrac{1}{a_{k+1}}\right)q_{k-1} + q_{k-2}} \\
&= \frac{\dfrac{1}{a_{k+1}}[(a_{k+1}a_kp_{k-1} + p_{k-1}) + a_{k+1}p_{k-2}]}{\dfrac{1}{a_{k+1}}[(a_kq_{k-1} + q_{k-1}) + a_{k+1}q_{k-2}]} \\
&= \frac{a_{k+1}(a_kp_{k-1} + p_{k-2}) + p_{k-1}}{a_{k+1}(a_kq_{k-1} + q_{k-2}) + q_{k-1}} \\
&= \frac{a_{k+1}p_k + p_{k-1}}{a_{k+1}q_k + q_{k-1}} \\
&= \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}.
\end{aligned}$$

Logo, temos que

$$p_{n+1} = a_{n+1}p_n + p_{n-1} \text{ e}$$

$$q_{n+1} = a_{n+1}q_n + q_{n-1}.$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, com $n \geqslant 1$. □

Daí segue que o n-ésimo convergente também é expresso da forma:

$$c_n = \frac{a_np_{n-1} + p_{n-2}}{a_nq_{n-1} + q_{n-2}}.$$

Implementação aritmética para o cálculo dos convergentes

Caso tenhamos os concientes parciais, existe outra maneira de encontrarmos os convergentes de uma fração contínua usando uma ferramenta chamada implementação aritmética. A Implementação aritmética nada mais é que uma esquematização de "passos" para resolver um algoritmo. Estratégia que além de garantir a execução deste também evita cálculos e repetições desnecessários, facilita a detecção de erros e garante melhor aproveitamento do tempo dedicado a sua resolução.
Pelo teorema 4.3.1 temos que

$$c_n = \frac{p_n}{q_n} = \frac{a_n p_{n-1} + p_{n-2}}{a_n q_{n-1} + q_{n-2}}.$$

n	0	1	2	3	4	$\cdots$	n
a_n	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	$\cdots$	a_n
p_n	a_0	a_1a_0+1	$a_2p_1+p_0$	$a_3p_2+p_1$	$a_4p_3+p_2$	$\cdots$	$a_np_{n-1}+p_{n-2}$
q_n	1	a_1	$a_2q_1+q_0$	$a_3q_2+q_1$	$a_4q_3+q_2$	$\cdots$	$a_nq_{n-1}+q_{n-2}$

Tabela 4.1: Implementação aritmética

Observando a tabela, é fácil notar que o cálculo do n-ésimo numerador, p_n, basta multiplicar o quociente de mesma ordem pelo penúltimo numerador e somar esse produto com o antepenúltimo numerador. O cálculo do n-ésimo denominador é feito de modo análogo.

Exemplo 4.3.4. Vamos calcular os convergentes da fração contínua $[1; 1, 1, 1, 1, 1]$ por implentação aritmética.

n	0	1	2	3	4	5
a_n	1	1	1	1	1	1
p_n	1	$1\cdot1+1=2$	$1\cdot2+1=3$	$1\cdot3+2=5$	8	13
q_n	1	1	$1\cdot1+1=2$	$1\cdot2+1=3$	5	8

Tabela 4.2: Exemplo - Cálculo dos convergentes

Então temos

$$c_0 = 1 \qquad c_1 = 2 \qquad c_2 = \frac{3}{2}$$
$$c_3 = \frac{5}{3} \qquad c_4 = \frac{8}{5} \qquad c_5 = \frac{13}{8}$$

Teorema 4.3.2. Se p_n e q_n são o numerador e do denominador do n-ésimo convergente, c_n, da fração contínua $[a_0; a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, a_n, \cdots]$, para $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, então

(i) $\dfrac{p_n}{p_{n-1}} = [a_n; a_{n-1}, \cdots, a_1, a_0]$; e

(ii) $\dfrac{q_n}{q_{n-1}} = [a_n; a_{n-1}, \cdots, a_2, a_1]$.

Demonstração. Faremos somente a demonstração do caso (i). O caso seguinte é feitos de maneira análoga.

(i) Sejam p_n e q_n, o numerador e o denominador do n-ésimo convergente da fração contínua $[a_0; a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, a_n, \cdots]$, para $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Sabemos que $p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}$, então

$$\begin{aligned}\frac{p_n}{p_{n-1}} &= \frac{a_n p_{n-1} + p_{n-2}}{p_{n-1}} \\ &= a_n + \frac{p_{n-2}}{p_{n-1}} \\ &= a_n + \cfrac{1}{\cfrac{p_{n-1}}{p_{n-2}}}.\end{aligned}$$

Seguindo esse mesmo raciocínio, repetiremos esse processo até que obteremos

$$\frac{p_n}{p_{n-1}} = a_n + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_{n-2} + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_0}}}}}}.$$

O que conclui nossa demonstração.

Vale destacar que para os denominadores temos existe a seguinte condição

$$\frac{q_1}{q_0} = \frac{a_1}{1} = a_1.$$

□

Corolário 4.3.1. Seja q_n o denominador do n-ésimo convergente de uma fração contínua. Então (q_n) é uma sequência estritamente crescente de termos positivos.

Demonstração. De acordo com o Teorema 4.3.1, para $n \geqslant 2$ e $a_1 > 0$, com $n \in \mathbb{N}$, temos

$$q_0 = 1, \; q_1 = a_1 \text{ e } q_{n+1} = a_{n+1} q_n + q_{n-1}.$$

Note que

$$1 = q_0 \leqslant a_1 = q_1 < a_2 q_1 + q_0 = q_2 < \cdots < a_{n-1} q_{n-2} + q_{n-3} = q_{n-1} < q_n.$$

De modo que, $q_{n+1} = a_{n+1} q_n + q_{n-1} > q_n$, para todo número natural $n \geqslant 2$.

Isto quer dizer que nenhum termo da sequência (q_n) é menor que o termo anterior, já que os $a_n's$, com $n \in \mathbb{N}$, são inteiros positivos, por definição. $\square$

Além disso, o numerador e o denomindaor de qualquer convergente são primos entre si ou simplesmente irredutível, como chamamos na educação básica. Veja a demonstração disso no teorema que segue.

Teorema 4.3.3. Os números p_n e q_n satisfazem a igualdade

$$p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n-1}, \text{ para } n \geq 1.$$

Demonstração. Usaremos a Indução sobre n para esta prova. Quando $n = 1$ teremos, usando a condição inicial do teorema 4.3.1,

$$\begin{aligned} p_1 q_0 - p_0 q_1 &= (a_1 a_0 + 1) \cdot 1 - a_0 a_1 \\ &= 1 \\ &= (-1)^0 \\ &= (-1)^{1-1}. \end{aligned}$$

Supondo que a relação é valida para $n = k$, teremos para $n = k + 1$,

$$\begin{aligned} p_{k+1} q_k - p_k q_{k+1} &= (a_k p_k + p_{k-1}) q_k - p_k (a_k q_k + q_{k-1}) \\ &= p_{k-1} q_k - p_k q_{k-1} \\ &= -(p_k q_{k-1} - p_{k-1} q_k) \\ &= (-1)(-1)^{k-1} \\ &= (-1)^k \\ &= (-1)^{(k+1)-1} \end{aligned}$$

O que conclui nossa demonstração. $\square$

Isso é válido independente da fração contínua ser finita ou infinita.

Proposição 4.3.1. Se (q_n) é a sequência de denominadores dos convergentes c_n duma fração contínua, então $\dfrac{q_{n-1}}{q_{n-2}}$ é uma fração irredutível, ou seja, $(q_{n-1}, q_{n-2}) = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$, com $n \geqslant 2$.

Demonstração. Seja d o máximo divisor dos interios q_{n-1} e q_{n-2}, isto é, $d \mid q_{n-1}$ e $d \mid q_{n-2}$. Logo, existem inteiros k_1 e k_2 tais que $q_{n-1} = k_1 d$ e $q_{n-2} = k_2 d$. Em contra partida,

$$p_{n-1} q_{n-2} - p_{n-2} q_{n-1} = (-1)^{n-2},$$

donde segue que

$$\begin{aligned}(-1)^{n-2} &= p_{n-1}q_{n-2} - p_{n-2}q_{n-1} \\ &= p_{n-1}k_2d - p_{n-2}k_1d \\ &= d(p_{n-1}k_2 - p_{n-2}k_1).\end{aligned}$$

e portanto, $d \mid 1$ ou $d \mid -1$. Como d é positivo, concluimos que $d = 1$.
Isso conclui nossa demonstração. □

Exemplo 4.3.5. Use $\frac{53}{19} = [2; 1, 3, 1, 3]$ para verificar a validade do Teorema 4.3.3.
Por implementação aritmética, temos

n	0	1	2	3	4
a_n	2	1	3	1	3
p_n	2	3	11	14	53
q_n	1	1	4	5	19

Daí então, para

$$\begin{aligned} n = 1 \text{ teremos } 3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 &= (-1)^{1-1} \\ &= 1; \\ n = 2 \text{ teremos } 11 \cdot 1 - 3 \cdot 4 &= (-1)^{(2-1)} \\ &= -1; \\ n = 3 \text{ teremos } 4 \cdot 4 - 11 \cdot 5 &= (-1)^{(3-1)} \\ &= 1; \\ n = 4 \text{ teremos } 53 \cdot 5 - 14 \cdot 19 &= (-1)^{(4-1)} \\ &= -1. \end{aligned}$$

A expressão $p_nq_{n-1} - p_{n-1}q_n$ é conhecida como Fórmula do Determinante, pois

$$\begin{vmatrix} p_n & p_{n-1} \\ q_n & q_{n-1} \end{vmatrix} = p_nq_{n-1} - p_{n-1}q_n.$$

O fato de que cada convergente de uma fração contínua possui numerador e denominador primos entre si é assegurado pelo colorário que segue.

Corolário 4.3.2. Para todo convergente $c_n = \frac{p_n}{q_n}$ temos que $(p_n, q_n) = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Seja d o Máximo Divisor Comum de p_n e q_n, com $d \in \mathbb{N}$, isto é, $d = (p_n, q_n)$.

Pelo Teorema 4.3.3 temos

$$p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n-1}.$$

Desse modo, como $d \mid p_n q_n$,temos

$$d \mid (p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n)$$

Logo $d \mid 1$ ou $d \mid -1$.
Portanto, d deve ser igual a 1. □

Corolário 4.3.3. Considere a sequência (c_n) de convergentes duma fração contínua, tal que $(c_n) = (c_0, c_1, c_2, \cdots, c_{n-1}, c_n, \cdots)$. Fazendo uso das notações anteriores, segue que, para $n \geqslant 1$, vale

$$c_n - c_{n-1} = \frac{(-1)^{n-1}}{q_n q_{n-1}} \tag{4.1}$$

e para $n \geqslant 2$, vale

$$c_n - c_{n-2} = \frac{a_n(-1)^{n-2}}{q_n q_{n-2}}. \tag{4.2}$$

Demonstração. (4.1) Sabemos que

$$p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n-1}.$$

Dividindo a igualdade acima pelo número inteiro positivo $q_n q_{n-1}$, obteremos, para $n \geqslant 1$,

$$\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1}}{q_n q_{n-1}}.$$

Portanto, para $n \geqslant 1$,

$$c_n - c_{n-1} = \frac{(-1)^{n-1}}{q_n q_{n-1}}.$$

(4.2) Considere que $p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}$ e $q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}$, para $n \geqslant 2$.
Usando a definição de convergente na expressão abaixo, temos

$$\begin{aligned}
c_n - c_{n-2} &= \frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-2}}{q_{n-2}} \\
&= \frac{p_n q_{n-2} - p_{n-2} q_n}{q_n q_{n-2}} \\
&= \frac{(a_n p_{n-1} + p_{n-2}) q_{n-2} - p_{n-2}(a_n q_{n-1} + q_{n-2})}{q_n q_{n-2}} \\
&= \frac{a_n(p_{n-1} q_{n-2} - p_{n-2} q_{n-1})}{q_n q_{n-2}} \\
&= \frac{a_n(-1)^{n-2}}{q_n q_{n-2}}.
\end{aligned}$$

O que conclui a demonstração. □

Observe que de 4.1 temos que, para dois convergentes consecutivos, a diferença será ora positiva, ora negativa, a depender da paridade do expoente $n-1$. 3 sendo $c_2 > c_0$.
Das relaçãoes expressas neste exemplo percebemos que $c_0 < c_2 < c_1$.
Pelo Corolário 4.3.3, é possível mensurar a distância entre dois convergentes consecutivos. As relações expressas no Corolário 4.3.3 são muito úteis. Precisarremos utilizá-lo no teorema que segue. Para isso, considere a sequência (c_n) de todos os convergentes de uma fração contínua, isto é, $(c_n) = (c_0, c_1, c_2, \cdots, c_n, c_{n+1}, \cdots)$, independente se finita ou infinita.

Teorema 4.3.4. A sequência (c_n) dos convergentes de uma fração contínua satisfaz as seguintes propriedades:

(i) $c_1 > c_3 > c_5 > \cdots > c_{2n+1} > c_{2n+3} > \cdots$

(ii) $c_0 < c_2 < c_4 < c_6 < \cdots < c_{2n} < c_{2n+2} < \cdots$

(iii) $c_{2n} < c_{2n+2} < c_{2n+1}$

Demonstração. Seja (c_n) a sequência dos convergentes de uma fração contínua.
Da equação 4.1, no Colorário 4.3.3, segue que a diferença entre dois convergentes consecutivos é dada por

$$c_n - c_{n-2} = \frac{a_n(-1)^{n-2}}{q_n q_{n-2}}, \text{ para } n \geqslant 1.$$

Usando a equação acima, vamos demonstrar o Teorema analisando a paridade do índice de cada termo da sequência (c_n).
Quando n for par, existirá $k \in \mathbb{Z}$, com $k \geqslant 0$, tal que $n = 2k+2$. Daí, obteremos

$$\begin{aligned} c_{2k+2} - c_{2k} &= \frac{a_{2k+2}(-1)^{2k}}{q_{2k+2}q_{2k}} \\ &= \frac{a_{2k+2}}{q_{2k+2}q_{2k}} \\ &> 0. \end{aligned}$$

Logo, $c_{2k+2} > c_{2k}$, para $k \in \mathbb{Z}$, com $k \geqslant 0$.
De modo análogo, quando n-ésimo índice for ímpar, existirá $k \in \mathbb{Z}$, com $k \geqslant 1$, tal que $n = 2k-1$. Donde,

$$\begin{aligned} c_{2k+1} - c_{2k-1} &= \frac{a_{2k+1}(-1)^{2k-1}}{q_{2k+1}q_{2k-1}} \\ &= -\frac{a_{2k+1}}{q_{2k+1}q_{2k-1}} \\ &< 0. \end{aligned}$$

Portanto, $c_{2k+1} > c_{2k-1}$, com $k \geqslant 1$.
Tomando agora dois termos consecutivos com paridades diferentes, isto é, existe $k \in \mathbb{Z}$, com $k \geqslant 0$, tal que, ainda pelo Colorário 4.3.3, temos

$$\begin{aligned} c_{2k+2} - c_{2k+1} &= \frac{(-1)^{2k+1}}{q_{2k+2}q_{2k+1}} \\ &= -\frac{1}{q_{2k+2}q_{2k+1}} \\ &< 0. \end{aligned}$$

Logo, $c_{2k+1} > c_{2k+2}$.
O que conclui nossa demonstração. □

Deste Teorema, concluimos que a sequência dos convergentes de índice ímpar, é estritamente decrescente e limitada inferiormente por c_1, enquanto a sequência dos convergentes de índice par, é estritamente crescente e limitada superiormente poor c_0. Além disso, em (iii) temos que uma fração contínua sempre estará entre dois convergentes consecutivos. Ainda precisamos mostrar que a sequência (c_n) é convergente. Para isso, os teoremas abaixo servirão como base.

Teorema 4.3.5. Sejam as sequências de convergentes de índices par e ímpar, nessa ordem, (c_{2k}) e (c_{2k+1}), com $k \geqslant 0$. Ambas convergem e

$$\lim c_{2k+1} = \lim c_{2k}$$

Demonstração. Sejam as sequências de índices par e ímpar, nessa ordem, representadas por (c_{2k}) e (c_{2k+1}), e limitadas superior e inferiormente, por c_0 e c_1, respectivamente, com $k \geqslant 0$.
Sejam $\lim(c_{2k}) = l_1$ e $\lim(c_{2k+1}) = l_2$.
Do Corolário 4.3.3, temos

$$\begin{aligned} c_{2k+1} - c_{2k} &= \frac{(-1)^{2k-1}}{q_{2k+1}q_{2k}} \\ &= -\frac{1}{q_{2k+1}q_{2k}}. \end{aligned}$$

Note que

$$\lim(c_{2k+1} - c_{2k}) = \lim -\frac{1}{q_{2k+1}q_{2k}}.$$

Aplicando propriedades de limites na equação acima vemos

$$\lim(c_{2k+1} - c_{2k}) = 0$$

à medida que k torna-se suficientemente grande.
Uma vez que (q_k) é uma sequência de termos crescentes e positivos, garante que o segundo membro da equação é nulo.
Assim, temos

$$l_2 = \lim(c_{2k+1}) = \lim(c_{2k}) = l_1$$

Como queríamos demonstrar. □

Com isso, a partir do Teorema **??** e da análise da convergência das subsequências de (c_n), concluimos que a sequência (c_n) de todos os convergentes de uma fração contínua converge. Portanto, a sequência (c_n) configura uma sequência de Cauchy.
Mais adiante provaremos que há diferença na expansão em fração contínua entre números racionais e números não-racionais. Porém, a sequência (c_n) dos convergentes de uma fração contínua converge para o número real que a originou.

4.4 Frações contínuas e números reais

4.4.1 Relação entre números racionais e frações contínuas

No início da seção anterior, trouxemos a representação dos números racionais $\frac{17}{11}$ e $-\frac{26}{21}$ como frações contínuas. Vimos que em um certo momento obtivemos resto zero nas divisões sucessivas o que fez o processo parar. Essa afirmação nos é garantida pelo Teorema seguinte:

Teorema 4.4.1. Todo número racional é representado por uma fração contínua finita. Reciprocamente, toda fração contínua finita é representada por um número racional.

Demonstração. Para a primeira parte da prova deste teorema usaremos o processo de divisões sucessivas. Consideremos um número racional $\frac{p}{q}$ com p e q inteiros e $q \neq 0$. Ao dividirmos p por q obteremos a seguinte expressão:

$$p = a_0 q + r_0, \text{ com } 0 \leqslant r_0 < |q|$$

onde a_0 e r_0 são definidos como quociente e o resto de minha primeira divisão.
Se $r_0 = 0$, então $[a_0]$ é a fração contínua que representa $\frac{p}{q}$, isto é, $\frac{p}{q} = [a_0]$. Podendo este ser positivo, negativo ou nulo.
Sejam, agora, a_n e r_n o quociente e o resto de minha n-ésima divisão, com $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, de modo que o quociente a_n é o único que deixa resto r_n, fato garantido por Euclides em seu algoritmo da divisão.

Retomamos a divisão anterior, caso $r_0 \neq 0$, reescrevendo-a como

$$\frac{p}{q} = a_0 + \frac{r_0}{q} = a_0 + \frac{1}{\frac{q}{r_0}},\ 0 < r_1 < |q| \tag{4.3}$$

Da divisão de q por r_0, segue que

$$\frac{q}{r_0} = a_1 + \frac{r_1}{r_0},\ 0 < r_1 < |r_0| \tag{4.4}$$

Perceba que tanto $\frac{q}{r_0}$ como $\frac{r_1}{r_0}$ são não-negativos, uma vez que $0 < r_0 < |q|$ e $0 < r_1 < |r_0|$. Se $r_1 = 0$, o algoritmo pára e daí $\frac{q}{r_0} = a_1$. Substituindo 4.4 em 4.3 teremos a expressão

$$\begin{aligned} \frac{p}{q} &= a_0 + \frac{1}{\frac{q}{r_0}} \\ &= a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{r_1}{r_0}} \\ &= a_0 + \frac{1}{a_1} \\ &= [a_0; a_1]. \end{aligned} \tag{4.5}$$

como fração contínua de $\frac{p}{q}$.
Senão, caso $r_1 \neq 0$, então, repetindo o processo de divisão, agora r_0 por r_1 temos

$$\frac{r_0}{r_1} = a_2 + \frac{r_2}{r_1},\ 0 < r_2 < |r_1| \tag{4.6}$$

Novamente, se $r_2 = 0$ o processo pára e a expressão 4.6 incluida na equação 4.5 nos apresenta

$$\begin{aligned} \frac{p}{q} &= a_0 + \frac{1}{\frac{q}{r_1}} \\ &= a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\frac{r_1}{r_2}}} \\ &= a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}} \\ &= [a_0; a_1, a_2] \end{aligned}$$

Caso contrário, para $r_2 \neq 0$, o processo continua até que algum r_n seja nulo.
Dessas divisões sucessivas, obteremos uma sequência de equações tais que:

$$\begin{aligned}
\frac{p}{q} &= a_0 + \frac{1}{\frac{q}{r_0}},\ 0 < r_0 < |q| \\
\frac{q}{r_0} &= a_1 + \frac{r_1}{r_0},\ 0 \leq r_1 < |r_0| \\
\frac{r_0}{r_1} &= a_2 + \frac{r_2}{r_1},\ 0 \leq r_2 < |r_1| \\
\ldots \\
\frac{r_{n-3}}{r_{n-2}} &= a_{n-1} + \frac{r_{n-1}}{r_{n-2}},\ 0 \leq r_{n-3} < |r_{n-2}| \\
\frac{r_{n-2}}{r_{n-1}} &= a_n + \frac{0}{r_{n-1}},\ r_n = 0,
\end{aligned}$$

terminando depois de um número finito de divisões, quando $r_n = 0$, para algum n natural. Daí então, fazendo as devidas substituições chegamos a expressão almejada, isto é,

$$\begin{aligned}
\frac{p}{q} &= a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}}} \\
&= [a_0; a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n]
\end{aligned}$$

A segunda parte do teorema é imediata, pois basta efetuarmos as operações com frações para chegarmos ao número racional desejado. □

Vamos tratar agora de representação de frações contínuas para números racionais inversos. Note que temos duas situações possíveis: o numerador maior que o denominador e o numerador menor que o denominador.Daí, temos

Teorema 4.4.2. Sejam p e q inteiros positivos. Se $p > q$ e $\frac{p}{q} = [a_0; a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n]$, então $\frac{q}{p} = [0; a_0, a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n]$.

Demonstração. Se $p > q > 0$ e

$$
\begin{aligned}
\frac{p}{q} &= [a_0; a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n] \\
&= a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}}}
\end{aligned}
$$

então,

$$
\begin{aligned}
\frac{q}{p} &= \frac{1}{\frac{p}{q}} \\
&= 0 + \frac{1}{\frac{p}{q}} \\
&= 0 + \cfrac{1}{a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}}}} \\
&= [0; a_0, a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n].
\end{aligned}
$$

O que conclui nossa demonstração. $\square$

Corolário 4.4.1. Sejam p e q inteiros positivos. Se $p < q$ e $\frac{p}{q} = [0; a_0, a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n]$, então $\frac{q}{p} = [a_0; a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n]$.

Demonstração. Se $p < q$ e

$$\begin{aligned}
\frac{p}{q} &= [0; a_0, a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n] \\
&= 0 + \cfrac{1}{a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}}}} \\
&= 0 + \cfrac{1}{\cfrac{q}{p}}
\end{aligned}$$

Fazendo a comparação dos membros da igualdade temos

$$\begin{aligned}
\frac{q}{p} &= 0 + \cfrac{1}{a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}}}} \\
&= [a_0; a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n]
\end{aligned}$$

Terminando a prova. □

O exemplo abaixo nos ajudará a compreender melhor o dito acima.

Exemplo 4.4.1. Pelo Corolário 4.4.1, uma vez que $5 < 7$, para encontrar a fração contínua que representa o número racional $\frac{5}{7}$ inicialmente encontramos a fração continua para $\frac{7}{5}$. Veja:

$$7 = 1 \cdot 5 + 2$$

$$5 = 2 \cdot 2 + 1$$

$$2 = 2 \cdot 1 + 0$$

então o processo de divisões sucessivas pára e fazemos

$$\begin{aligned}\frac{7}{5} &= 1 + \frac{1}{\frac{5}{2}} \\ &= 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}} \\ &= [1; 2, 2].\end{aligned}$$

Daí temos que

$$\begin{aligned}\frac{5}{7} &= 0 + \frac{1}{\frac{7}{5}} \\ &= 0 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}} \\ &= [0; 1, 2, 2].\end{aligned}$$

4.4.2 Relação entre números irracionais e frações contínuas

No ínicio desta seção provamos que todo número racional tem uma fração contínua finita que o represeta e viceversa. O questionamento agora é sobre a representação de um número irracional em forma de fração contínua.

Vamos explicar o processo de como encontrar a fração contínua para um número irracional, fazendo um passo-a-passo.

Seja α um número irracional. Devemos levar em conta que não podemos representá-lo como quociente entre dois inteiros. Logo, só nos cabe aqui considerar sua parte inteira, isto é, considerarmos o maior inteiro menor que α, independente se este for positivo ou negativo, ou ainda nulo. Daí, então, encontramos nosso a_0, o primeiro quociente parcial. Assim,

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{r_1}, \text{ com } 0 < \frac{1}{r_1} < 1,$$

onde

$$r_1 = \frac{1}{\alpha - a_0}$$

é um número irracional, pois α foi desmembrado como uma soma de duas parcelas, sendo uma inteira e outra irracional.

Continuando, vamos encontrar a_1, a parte inteira de r_1, da seguinte forma

$$r_1 = a_1 + \frac{1}{r_2}, \text{ com } 0 < \frac{1}{r_2} < 1,$$

onde

$$r_2 = \frac{1}{r_1 - a_1}.$$

Repetiremos esse processo infinitas vezes e chegaremos a sucessivas equações do tipo

$$\begin{aligned}
\alpha &= a_0 + \frac{1}{r_1}, \text{ com } r_1 > 1,\\
r_1 &= a_1 + \frac{1}{r_2}, \text{ com } r_2 > 1,\\
r_2 &= a_2 + \frac{1}{r_3}, \text{ com } r_3 > 1,\\
\cdots\\
r_n &= a_n + \frac{1}{r_{n+1}}, \text{ com } r_{n+1} > 1,\\
\cdots
\end{aligned}$$

onde todos os $a_n's$ são inteiros não nulos para $n \geqslant 1$ e todos os $r_n's$ são números irracionais, para $n \geqslant 1$.

Esse processo não pára. Senão teríamos $r_n = a_n$, para algum $n \in \mathbb{N}$. O que é impossível visto que α é irracional.

Logo, substituindo cada r_n na equação imediatamente anterior, teremos

$$\begin{aligned}
\alpha &= a_0 + \frac{1}{r_1}\\
&= a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{r_2}}\\
&= a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{r_3}}}\\
&= a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots}}}}\\
&= [a_0; a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{n-1}, a_n, \cdots].
\end{aligned}$$

E assim acabamos demonstrando a primeira parte do Teorema seguinte.

Teorema 4.4.3. Todo número irracional é representado por uma fração contínua infinita. Reciprocamente, toda fração contínua infinita é representada por um número irracional.

A demonstração da segunda parte segue de modo direto da aplicação das operações com fração.
Esse Teorema nos permite identificar se um número real é racional ou não por meio da observação de sua representação como fração contínua: se finita então o número é racional; se infinita, é irracional.

Exemplo 4.4.2. Considere o irracional $\sqrt{2}$. Expanda-o como uma fração contínua.
O maior inteiro menor que $\sqrt{2}$ é $a_0 = 1$. Logo

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{r_1}.$$

em que

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}-1} \\ &= \sqrt{2}+1. \end{aligned}$$

Logo,

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}+1}.$$

Dando continuidade, segue que o maior inteiro menor que r_1 é $a_1 = 2$, então

$$r_1 = 2 + \frac{1}{r_2}$$

para

$$\begin{aligned} r_2 &= \frac{1}{r_1 - 2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}+1-2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}-1} \\ &= \sqrt{2}+1. \end{aligned}$$

Então temos a expansão,

$$\begin{aligned}\sqrt{2} &= 1 + \frac{1}{\sqrt{2}+1}\\ &= 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{r_2}}\\ &= 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\sqrt{2}+1}}.\end{aligned}$$

Sabemos também que o maior inteiro menor que r_2 é $a_2 = 2$, assim

$$r_2 = 2 + \frac{1}{r_3}$$

$$\begin{aligned}r_3 &= \frac{1}{r_2 - 2}\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}+1-2}\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}-1}\\ &= \sqrt{2}+1.\end{aligned}$$

e então de

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{r_3}}}$$

temos

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\sqrt{2}+1}}}.$$

Uma vez que obtivemos $r_1 = r_2 = r_3 = \sqrt{2}+1$, utilizando a mesma estratégia encontraremos $r_4 = r_5 = \cdots = r_n = \cdots = \sqrt{2}+1$. Portanto todos os quocientes parciais serão iguais a 2 e teremos então a expasão inifnita de $\sqrt{2}$ como sendo

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\ddots}}}}}} \tag{4.7}$$
$$= [1; 2, 2, 2, 2, 2, \cdots]$$
$$= [1; \bar{2}].$$

Sendo que na última notação a barra sobre o 2 indica que este repete-se infinitamente.
Este exemplo nos provoca à seguinte dúvida: é possível garantir que a fração contínua infinita $[1; 2, 2, 2, 2, 2, \cdots] = [1; \bar{2}]$ representa o número $\sqrt{2}$?
A resposta para esta pergunta será obtida a partir da manipulação da própria fração contínua. Donde podemos escrever

$$x = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\ddots}}}}$$

ou ainda,

$$x - 1 = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\ddots}}}}$$

Agora note que

$$x = 1 + \cfrac{1}{2 + \left(\cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\ddots}}} \right)}$$
$$= 1 + \frac{1}{2 + (x - 1)}$$
$$= 1 + \frac{1}{x + 1}$$

Logo $(x-1)(x+1) = 1$ ou $x^2 = 2$.
Portanto

$$\begin{aligned} x &= 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\ddots}}}} \\ &= \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Outros exemplos similares de números irracionais sob forma de fração contínua infinita são:

$$\begin{aligned} \sqrt{3} &= [1; 1, 2, 1, 2, 1, 2, \cdots] = [1; \overline{1, 2}], \\ \sqrt{15} &= [3; 1, 6, 1, 6, 1, 6, \cdots] = [3; \overline{1, 6}] \\ \sqrt{31} &= [5; \overline{1, 1, 3, 5, 3, 1, 1, 10}] \\ e &= [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, \cdots] \\ \pi &= [3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, \cdots] \\ \phi &= [1; 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \cdots] \end{aligned}$$

Ressaltando que os números sob a barra são chamados de período da fração contínua e que estes podem ser extensos, como no caso de $\sqrt{31}$. Note que o período pode ocorrer a partir de certo estágio, como em $\sqrt{15}$, ou pode se apresentar já do início, como em $\sqrt{5}+2$. Neste último caso, dizemos que a fração contínua é puramente periódica.
Os exemplos acima e o que vem logo a seguir ilustram um Teorema que será demonstrado mais adiante.

Exemplo 4.4.3. Encontre a expansão em fração contínua infinita de

$$x = \frac{25 + \sqrt{53}}{22}.$$

Como feito no exemplo anterior, já que $7 < \sqrt{53} < 8$, temos que o maior inteiro menor que x é $a_0 = 1$. Então

$$\begin{aligned} x &= \frac{25 + \sqrt{53}}{22} \\ &= a_0 + \frac{1}{x_1} \\ &= 1 + \frac{1}{x_1} \end{aligned}$$

onde,

$$
\begin{aligned}
r_1 &= \frac{1}{x-1} \\
&= \frac{22}{3+\sqrt{53}} \cdot \frac{3-\sqrt{53}}{3-\sqrt{53}} \\
&= \frac{\sqrt{53}-3}{2}.
\end{aligned}
$$

Encontramos o maior inteiro que seja menor que r_1, no caso $a_1 = 2$, então

$$
\begin{aligned}
r_1 &= a_1 + \frac{1}{r_2} \\
&= 2 + \frac{1}{r_2}
\end{aligned}
$$

onde

$$
\begin{aligned}
r_2 &= \frac{1}{r_1 - 2} \\
&= \frac{2}{\sqrt{53}-7} \\
&= \frac{\sqrt{53}+7}{2}.
\end{aligned}
$$

Estamos seguindo esse raciocínio com a intenção de verificar a presença de um período. Sendo assim, temos que o maior inteiro menor que x_2 é $a_2 = 7$, então

$$
\begin{aligned}
r_2 &= a_2 + \frac{1}{r_3} \\
&= 7 + \frac{1}{r_3}
\end{aligned}
$$

onde

$$
\begin{aligned}
r_3 &= \frac{1}{r_2 - 7} \\
&= \frac{2}{\sqrt{53}-7} \\
&= \frac{\sqrt{53}+7}{2}.
\end{aligned}
$$

Logo $r_2 = r_3$, isso implica que o cálculo se repetirá infinitamente.

Portanto, a fração contínua requisitada é

$$\begin{aligned} x &= 1 + \cfrac{1}{r_1} \\ &= 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{r_2}} \\ &= 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{r_3}}}. \end{aligned}$$

E finalmente, obtemos

$$\begin{aligned} x &= \frac{25 + \sqrt{53}}{22} \\ &= 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{\ddots}}} \\ &= [1; 2, 7, 7, \cdots] \\ &= [1; 2, \bar{7}]. \end{aligned}$$

Agora, faremos o processo de "volta", isto é, encontraremos o número irracional a partir da fração contínua infinita que o representa.
Seja

$$x = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{\ddots}}}}}$$

Tomemos

$$\begin{aligned} y &= 7 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{\ddots}}} \\ &= 7 + \frac{1}{y}. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Logo y é a raiz positiva da equação

$$y^2 - 7y - 1 = 0,$$

isto é,

$$y = \frac{7+\sqrt{53}}{2}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} x &= 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{y}} \\ &= 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{2}{7+\sqrt{53}}}, \text{ após simplificarmos a expressão temos,} \\ &= \frac{25+\sqrt{53}}{22}. \end{aligned}$$

Valor almejado por nós.
Essa estratégia, para encontrar a fração contínua infnita que representa um determinado número irracional e vice-versa, só é possível devido a ideia intuitiva de que existe limite para as expressões à direita da igualdade em 4.7 e 4.8, por exemplo.
Vamos escrever um número real α em forma de fração contínua. Assim,

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{n-1}, r_n].$$

Chamaremos o número real r_n de resíduo de α e o definiremos como

$$r_n = a_n + \frac{1}{r_{n+1}},$$

com $0 \leqslant \frac{1}{r_n} < 1$, para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.
Sendo assim, queremos destacar que a sequência (r_n) possui todos os termos não-negativos, vide definição de quocientes parciais. Além disso, se tratarmos, em alguma posição n, o resíduo r_n como número inteiro positivo, teremos, então, uma fração contínua finita associada a α cujo último convergente será dado por

$$\frac{r_n p_{n-1} + p_{n-2}}{r_n q_{n-1} + q_{n-2}}.$$

Donde concluimos que α é um número racional. Note que para tal é necessário ter $\frac{1}{r_{n+1}} = 0$.
Porém, será que esse fato também se aplica ao número irracional? Vejamos no Teorema seguinte.

Teorema 4.4.4. Seja α um número irracional associado à uma fração contínua, de modo que

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{n-1}, r_n]$$

com $r_n = a_n + \dfrac{1}{r_{n+1}}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Então,

$$\alpha = \frac{r_n p_{n-1} + p_{n-2}}{r_n q_{n-1} + q_{n-2}},$$

onde $a_n's$ são inteiros positivos, com exceção de a_0 que pode assumir valores negativos e também nulo, e com todos os $p_n's$ e $q_n's$ definidos de acordo com 4.3.1, para $n \geqslant 1$.

Demonstração. Seja $[a_0; a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{n-1}, r_n]$ a fração contínua associada ao número irracional α. Do teorema 4.4.3, sabemos que essa fração contínua é infinita e, consequentemente, temos que $r_n = [a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \cdots]$.
Vamos usar indução sobre n para demonstrar esse Teorema. Em sua etapa inicial, para $n = 1$:

$$\begin{aligned} \alpha &= [a_0; r_1] \\ &= a_0 + \frac{1}{r_1} \\ &= \frac{r_1 a_0 + 1}{r_1 \cdot 1} \\ &= \frac{r_1 p_0 + 1}{r_1 q_0}. \end{aligned}$$

A situação acima é tida como exceção devido às condições iniciais expostas no Teorema 4.3.1.
Agora, tomando $n = 2$ temos:

$$\begin{aligned} [a_0; a_1, r_2] &= a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{r_2}} \\ &= a_0 + \cfrac{1}{\cfrac{r_2 a_1 + 1}{r_2}} \\ &= \frac{r_2(a_1 a_0 + 1) + a_0}{r_2 a_1 + 1} \\ &= \frac{r_2 p_1 + p_0}{r_2 q_1 + q_0}. \end{aligned}$$

Supondo a afirmação verdadeira para $n = k$, queremos mostrar que também valerá para $n = k + 1$. Logo,

$$
\begin{aligned}
[a_0; a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{k-1}, a_k, r_{k+1}] &= \left[a_0; a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{k-1}, a_k + \frac{1}{r_{k+1}]}\right] \\
&= \frac{\left(a_k + \frac{1}{r_{k+1}]}\right) p_{k-1} + p_{k-2}}{\left(a_k + \frac{1}{r_{k+1}]}\right) q_{k-1} + q_{k-2}} \\
&= \frac{r_{k+1}(a_k p_{k-1} + p_{k-2}) + p_{k-1}}{r_{k+1}(a_k q_{k-1} + q_{k-2}) + q_{k-1}} \\
&= \frac{r_{k+1} p_k + p_{k-1}}{r_{k+1} q_k + q_{k-1}}.
\end{aligned}
$$

Isso conclui a demonstração. □

Donde concluímos que o valor numérico de α e o valor numérico da fração contínua infinita associada a ele correspondem.
O Teorema 4.3.5 afirma que a sequência (c_n) de convergentes de uma fração contínua converge pela análise da convergência de suas subsequências. Mas será que a sequência (c_n) de convergentes de uma fração contínua infinita que representa um número irracional também converge? O fato é que até então não podíamos afirmar se o limite dessa sequência existe ou não. Porém, no Teorema que segue temos

Teorema 4.4.5. Sejam α um número irracional e (c_n) a sequência de convergentes de α representado por uma fração contínua, então

$$\lim c_n = \alpha.$$

Demonstração. Seja $\alpha = [a_0; a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{n-1}, r_n]$, com $r_n = a_n + \dfrac{1}{r_{n+1}}$, para todo $n \geqslant 1$. Sabemos do Teorema 4.4.4 que

$$
\begin{aligned}
\alpha &= [a_0; a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{n-1}, r_n] \\
&= \frac{r_n p_n + p_{n-1}}{r_n q_n + q_{n-1}}.
\end{aligned}
$$

Logo, usando a definição de convergente, temos

$$\begin{aligned}
\alpha - c_n &= \frac{r_n p_n + p_{n-1}}{r_n q_n + q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n} \\
&= \frac{(r_n p_n + p_{n-1})q_n - (r_n q_n + q_{n-1})p_n}{(r_n q_n + q_{n-1})q_n} \\
&= \frac{r_n(p_n q_n - p_n q_n) + (p_{n-1}q_n - p_n q_{n-1})}{(r_n q_n + q_{n-1})q_n} \\
&= \frac{-(p_n q_{n-1} - p_{n-1}q_n)}{(r_n q_n + q_{n-1})q_n} \\
&= \frac{-(-1)^{n-1}+}{(r_n q_n + q_{n-1})q_n} \\
&= \frac{(-1)^n}{(r_n q_n + q_{n-1})q_n}.
\end{aligned}$$

Do Corolário 4.3.1 temos que (q_n) é uma sequência estritamente crescente de termos positivos e como (r_n) é uma sequência de termos positivos. Uma vez que $(r_n q_n + q_{n-1})q > q_{n-1}q_n$ temos

$$\lim((r_n q_n + q_{n-1})q_n) = \infty.$$

$$\begin{aligned}
\lim(\alpha - c_n) &= \lim \frac{(-1)^n}{(r_n q_n + q_{n-1})q_n} \\
&= 0
\end{aligned}$$

e portanto,

$$\lim c_n = \alpha.$$

$\square$

Do Corolário 4.3.3, sabemos que todos os convergentes ímpares são maiores que todos os convergentes pares. Além disso, temos do teorema anterior que

$$\lim c_{2k} = \lim c_{2k+1} = \alpha.$$

Com isso, perceba que α estará entre c_{2k} e c_{2k+1} sempre por excesso ou por falta.
Porém, uma vez que α é um número irracional, como visto no Teorema 4.4.3, (c_n) é infinita. Contudo, todos os termos de (c_n) aproximam-se de α e é possível mensurar essa proximidade.

Teorema 4.4.6. Se α é um número irracional e $c_n = \dfrac{p_n}{q_n}$ é um convergente de α então

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^2}$$

para todo $n \geqslant 0$.

Demonstração. Seja α é um número irracional cuja representação em fração contínua infinita é dada por

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{n-1}, r_n]$$

em que $r_n = a_{n+1} + \dfrac{1}{r_{n+1}}$ é um número racional, para todo $n \geqslant 1$.
Note que $a_{n+1} < r_n$.
Sabemos que da demonstração anterior que

$$\begin{aligned} \alpha - c_n &= \alpha - \frac{p_n}{q_n} \\ &= \frac{(-1)^n}{(r_n q_n + q_{n-1})q_n}. \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} |\alpha - c_n| &= \frac{1}{(r_n q_n + q_{n-1})q_n} \\ &< \frac{1}{(a_{n+1} q_n + q_{n-1})q_n} \\ &< \frac{1}{q_{n+1} q_n} \\ &< \frac{1}{q_n^2}. \end{aligned}$$

Isso conclui nossa demonstração. □

Com isso, perceba que quanto maior for o n-ésimo quociente parcial, melhor será a representatividade da aproximação dos termos da sequência (c_n) do número irracional α. Temos que α sempre estará contido num intervalo cujos extremos são os termos c_n e c_{n+1} da sequência. Os exemplo abaixo nos ajudará na compreensão deste Teorema.

Exemplo 4.4.4. Vamos calcular os quatro primeiros convergentes do irracional $\sqrt{2}$.
Sabemos que

$$\sqrt{2} = [1, \overline{2}], \text{ então}$$

n	0	1	2	3	4	5
a_n	1	2	2	2	2	2
p_n	1	3	7	17	41	99
q_n	1	2	5	12	29	70

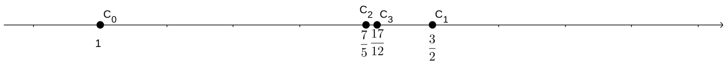
Tabela 4.3: Quatro primeiros convergentes de $\sqrt{2}$.

Assim,

$$\begin{aligned} c_0 &= 1 \\ c_1 &= \frac{3}{2} \\ c_2 &= \frac{7}{5} \\ c_3 &= \frac{17}{12} \end{aligned}$$

A figura que segue nos ajudará melhor na interpretação.

Figura 4.2: Representatividade da aproximacao de $\sqrt{2}$ por números racionais.



Pela figura 4.4.4, percebemos que a partir do terceiro, os próximos convergentes estarão mais aproximados do número, pois $c_n < \alpha < c_{n+1}$, vide Teorema 4.3.1.
Contudo, vimos também que o número $\sqrt{2}$ é raiz da equação $x^2 - 2 = 0$. Por isso, $\sqrt{2}$ é, também, definido como número algébrico, uma vez que qualquer número real ou complexo que é solução de uma equação polinomial com coeficientes inteiros é dito algébrico. A saber, todo número racional $\frac{a}{b}$, com $b \neq 0$, é algébrico por ser raiz da equação polinomial $bx - a = 0$. Quando um número real ou complexo não for algébrico será dito transcendente.

Definição 4.4.1. Uma fração contínua infinita $[a_0; a_1, a_2, a_3, \cdots]$ é dita períodica se existem $h \in \mathbb{N}$ e $n \in \mathbb{Z}$, com $n \geqslant 0$, tais que para todo $m \geqslant n$ temos

$$a_{m+h} = a_m$$

onde os valores $a_{n+1}, a_{n+2}, \cdots, a_{n+h}$ representam o período. Desse modo a fração contínua períodica também é escrita como

$$[a_0; a_1, a_2, a_3, \cdots, \overline{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \cdots, a_{n+(h-1)}}].$$

Em particular, quando $m = n = 0$ a fração contínua infinita é dita puramente periódica, escrita como

$$[\overline{a_0; a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{h-1}}].$$

O menor valor assumido por h chama-se periódo.
Sendo assim, em exemplos como

i) $\sqrt{7} = [1; 2, \overline{7}]$

ii) $\sqrt{5} = [2; \overline{4}]$

iii) $\sqrt{5} + 2 = [\overline{4}]$

trazemos frações contínuas infinitas periódicas, cuja parte repetida pode acontecer a partir de uma certa posição, como em *i)* e em *ii)*, ou ainda vir desde o primeiro quociente parcial, caracterizando-se como puramente periódica, em *iii)*.
Estas três situações ainda são exemplos de números algébricos, isto é, estes números irracionais associados a frações contínuas infinitas períodicas são raizes de equações polinomiais com coeficientes inteiros. Mas de que tipo de equações polinomiais estamos falando? Acompanhe o teorema que segue.

Teorema 4.4.7. Se α é um número irracional associado a uma fração contínua períodica, então α é raiz de uma equação polinomial quadrática com coeficientes inteiros.

Demonstração. Seja o número irracional α cuja representação em fração contínua infinita puramente periódica, por hipótese, é dada por

$$\alpha = [\overline{a_0; a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n}],$$

para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.
Observe que α pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \alpha &= a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{r_{n+1}}}}}} \\ &= [a_0; a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, a_n, r_{n+1}], \end{aligned}$$

com $r_{n+1} = [a_0; a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \overline{a_0, a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n}] = \alpha$.
Retomando o Teorema 4.4.4, consideramos

$$\alpha = \frac{\alpha p_n + p_{n-1}}{\alpha q_n + q_{n-1}}, \text{ para } n \geqslant 1.$$

Da igualdade acima temos aequação de segundo grau

$$q_n \alpha^2 - (p_n - q_{n-1})\alpha - p_{n-1} = 0, \tag{4.9}$$

donde cocluimos que uma das raízes é α.
Vamos encontrar a outra raiz dessa equação.

Seja o n-ésimo convergente da fração contínua associada à α dado por

$$\frac{p_n}{q_n} = [a_0; a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, a_n].$$

Do Corolário 4.3.2, sabemos que

$$\begin{aligned}\frac{p_n}{p_{n-1}} &= [a_n; a_{n-1}, \cdots, a_1, a_0]\\ &= \frac{p'_n}{q'_n}\end{aligned}$$

e, ainda,

$$\begin{aligned}\frac{q_n}{q_{n-1}} &= [a_n; a_{n-1}, \cdots, a_2, a_1]\\ &= \frac{p'_{n-1}}{q'_{n-1}},\end{aligned}$$

onde $\frac{p'_n}{q'_n}$ e $\frac{p'_{n-1}}{q'_{n-1}}$ são, respectivamente, o n-ésimo e o $(n-1)$ convergentes da fração contínua $[a_n, a_{n-1}, \cdots, a_2, a_1, a_0]$.
Desse modo, podemos escrever

$$\begin{aligned} p'_n &= p_n & \qquad p'_{n-1} &= q_n \\ q_n &= p_{n-1} & \qquad q'_{n-1} &= q_{n-1} \end{aligned} \tag{4.10}$$

Considere a fração contínua infinita puramente periódica

$$\beta = [\overline{a_n; a_{n-1}, \cdots, a_2, a_1, a_0}]$$

em que os quocientes parciais $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_2, a_1, a_0$ são os mesmos da fração contínua associada a α. Note que para este caso $a_0 \in \mathbb{N}$. Logo, $\alpha > 1$.
De modo análogo, usaremos novamente o Teorema 4.4.4, para obtermos

$$\beta = \frac{\beta p'_n + p'_{n-1}}{\beta q'_n + q'_{n-1}}$$

e encontrarmos a equação quadrática

$$q'_n \beta^2 - (p'_n - q'_n)\beta - p'_{n-1} = 0 \tag{4.11}$$

Substituindo as expressões de 4.10 na equação acima temos

$$p_{n-1}\beta^2 - (p_n - q_{n-1})\beta - q_n = 0 \tag{4.12}$$

Dividindo toda a equação 4.12 por $-\dfrac{1}{\beta^2}$ obtemos

$$q_n\left(-\frac{1}{\beta}\right)^2-(p_n-q_{n-1})\left(-\frac{1}{\beta}\right)-p_{n-1}=0 \tag{4.13}$$

Comparando as equações 4.9 e 4.13, concluimos que $-\dfrac{1}{\beta}$ é a outra raiz da equação quadrática, com coeficientes inteiros, do tipo

$$q_nx^2-(p_n-q_{n-1})x-p_{n-1}=0.$$

Sabemos que, para a fração contínua associada a um número irracional β,

$$0<\frac{1}{\beta}<1.$$

Logo,

$$-1<-\frac{1}{\beta}<0.$$

Consideremos o número irracional α cuja representação em fração contínua infinita periódica é dada por

$$\alpha=[a_0;a_1,a_2,a_3,\cdots,\overline{a_k,a_{k+1},a_{k+2},\cdots,a_{k+h}}],\ \text{para } k\in\mathbb{N}\cup\{0\}.$$

Vamos reescrever α como

$$\alpha=a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{\ddots+a_{k-1}+\cfrac{1}{\omega}}}}$$

em que $\omega=[\overline{a_k,a_{k+1},a_{k+2},\cdots,a_{k+h}}]$ é a parte peródica da fração contínua que representa uma fração contínua infinita puramente periódica.
De modo que temos

$$\alpha-a_0=\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{\ddots+a_{k-1}+\cfrac{1}{\omega}}}}$$

e ainda

$$\frac{1}{\alpha-a_0}=a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{\ddots+a_{k-1}+\cfrac{1}{\omega}}}$$

Como o número real $\alpha_1 = \dfrac{1}{\alpha - a_0}$ é irracional podemos escrever

$$\alpha_1 - a_1 = \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + a_{k-1} + \cfrac{1}{\omega}}}$$

repetindo esse processo recursivamente, ao final, encontraremos uma expressão do tipo

$$\frac{1}{\alpha_{k-1} - a_{k-1}} = \omega, \text{ com } k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Sabemos que ω é raiz positiva de uma equação de segundo grau com coeficientes inteiros, vide Teorema 4.4.7. Logo

$$\alpha_{k-1} - a_{k-1} = \frac{A + \sqrt{B}}{C}, \text{ com } A, B, C \in \mathbb{Z}. \tag{4.14}$$

Usaremos o mesmo raciocínio, agora, para verificar a configuração de nosso número irracional α, dado no início. Façamos o primeiro passo de nosso procedimento. Da equação (4.14), temos

$$\begin{aligned} \alpha_{k-1} &= a_{k-1} + \frac{A + \sqrt{B}}{C} \\ &= \frac{a_{k-1}C + A + \sqrt{B}}{C}, \text{ fazendo } a_{k-1}C + A = A', \text{ com } A' \in \mathbb{Z}, \\ &= \frac{A' + \sqrt{B}}{C}. \end{aligned}$$

Análogo ao que fizemos anteriormente, no final do processo, encontraremos

$$\alpha = \frac{A'' + \sqrt{B'}}{C}, \text{ com } A'', B', C \in \mathbb{Z}.$$

Logo α está associado a uma fração contínua infinita periódica.
Portanto, α também é raiz de uma equação de segundo grau com coeficientes inteiros.
O que conclui nossa demonstração. $\square$

Exemplos:

E1) O número irracional $\alpha = \sqrt{2} + 1$ está associado à fração contínua $[\overline{2}]$. Vamos calcular os três primeiros convergentes para α, acompanhe a tabela abaixo.

Da equação 4.9, com os dados da tabela acima, encontramos a equação

$$q_2\alpha^2 - (p_2 - q_1)\alpha - p_1 = 0,$$

n	0	1	2	3	4	5	$\cdots$
a_n	2	2	2	2	2	2	$\cdots$
p_n	2	5	12	29	70	169	$\cdots$
q_n	1	2	5	12	29	70	$\cdots$

Tabela 4.4: Cálculo dos 6 primeiros convergentes de $\sqrt{2}+1$.

substituindo os respectivos valores numéricos temos

$$5\alpha^2 - (12-2)\alpha - 5 = 0,$$

resultando em,

$$2\alpha^2 - 2\alpha - 1 = 0.$$

Cujas raízes são $\sqrt{2}+1$, como já esperávamos, e $-\dfrac{1}{\sqrt{2}+1} = 1-\sqrt{2}$.

E2) Considere o número irracional $\beta = [2;\overline{4}]$. Usaremos o raciocínio final da demonstração do Teorema 4.4.7. Daí,

$$\begin{aligned} \beta &= 2 + [0;\overline{4}] \\ \beta - 2 &= [0;\overline{4}] \\ \frac{1}{\beta-2} &= [\overline{4}] \end{aligned} \tag{4.15}$$

Precisamos encontrar um número irracional x associado a fração contínua $[\overline{4}]$. Para isso, basta resolver a equação com coeficientes inteiros que o tem como raiz positiva. Vamos calcular os dois primeiros convergentes de $[\overline{4}]$.

n	0	1	2	3	4	5	$\cdots$
a_n	4	4	4	4	4	4	$\cdots$
p_n	4	17	72	305	1292	5473	$\cdots$
q_n	1	4	17	72	305	1292	$\cdots$

Tabela 4.5: Cálculo dos 6 primeiros convergentes de $[\overline{4}]$.

A partir dos dados da tabela obtemos a equação.

$$x^2 - 4x - 1 = 0.$$

Logo $x = 2+\sqrt{5}$.

Substituindo o valor de x na equação 4.15 obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{\beta-2} &= [\overline{4}] \\ &= 2+\sqrt{5} \\ \beta - 2 &= \frac{1}{2+\sqrt{5}} \cdot \frac{2-\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}} \\ \beta &= \sqrt{5}. \end{aligned}$$

E3) Vamos seguir os mesmos passos do exemplo anterior para encontrar o número irracional $\beta = [1; 2, \overline{4}]$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\beta-1} &= 2 + [0; \overline{4}] \\ \frac{1}{\frac{1}{\beta-1} - 2} &= [\overline{4}], \end{aligned}$$

usando os resultados do item anterior, temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{\frac{1}{\beta-1} - 2} &= 2+\sqrt{5} \\ \frac{1}{\beta-1} - 2 &= \sqrt{5} - 2 \\ \beta - 1 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \beta &= \frac{5+\sqrt{5}}{5}. \end{aligned}$$

Exemplo interessante

A tabela abaixo, extraida de [2], contêm alguns exemplos de frações contínuas para números irracionais do tipo $\sqrt{N}$, com N não sendo um número natural quadrado perfeito.

N	Fração contínua para $\sqrt{N}$	N	Fração contínua para $\sqrt{N}$
2	$[1; \overline{2}]$	17	$[4; \overline{8}]$
3	$[1; \overline{1, 2}]$	18	$[4; \overline{4, 8}]$
5	$[2; \overline{4}]$	19	$[4; \overline{2, 1, 3, 1, 2, 8}]$
6	$[2; \overline{2, 4}]$	20	$[4; \overline{2, 8}]$
7	$[2; \overline{1, 1, 1, 4}]$	21	$[4; \overline{1, 1, 2, 1, 1, 8}]$
8	$[2; \overline{1, 4}]$	22	$[4; \overline{1, 2, 4, 2, 1, 8}]$
10	$[3; \overline{6}]$	23	$[4; \overline{1, 3, 1, 8}]$
11	$[3; \overline{3, 6}]$	24	$[4; \overline{1, 8}]$
12	$[3; \overline{2, 6}]$	26	$[5; \overline{10}]$
13	$[3; \overline{1, 1, 1, 1, 6}]$	27	$[5; \overline{5, 10}]$
14	$[3; \overline{1, 2, 1, 6}]$	28	$[5; \overline{3, 2, 3, 10}]$
15	$[3; \overline{1, 6}]$	29	$[5; \overline{2, 1, 1, 2, 10}]$

Apêndice

Produto cartesiano e relação de equivalência

Considere dois elementos a e b. Definiremos de modo intuitivo par ordenado

$$(a, b)$$

em que a é a primeira coordenada e b é a segunda coordenada.
Tomemos dois pares ordenados (a, b) e (c, d). Diremos que esses pares serão iguais se, e só se, as primeiras coordenadas são iguais e as segundas também o são. Em linguagem matemática,

$$(a, b) = (c, d) \leftrightarrow a = b \text{ e } c = d.$$

Definição 4.4.2. Sejam A e B dois conjuntos. Um produto cartesiano de A por B, denotado por $A \times B$ (A cartesiano B), é o conjunto formado por todos os pares ordenados (a, b), onde $a \in A$ e $b \in B$.

Definição 4.4.3. Seja a relação R do tipo $R : A \times A = A^2$. Dizemos que R é um conjunto formado por todos os pares ordenados compostos pelos elementos de A, isto é, pares do tipo (a, a), chamados diagonal de A^2.

Exemplo 4.4.5. Dados os conjuntos $A = \{0, 1, 2\}$ e $B = \{2, 3\}$, temos

$$\begin{aligned} A \times B &= \{(0,2), (0,3), \\ &\quad (1,2), (1,3), \\ &\quad (2,2), (2,3)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B \times A &= \{(2,0), (2,1), \\ &\quad (2,2), (3,0), \\ &\quad (3,1), (3,2)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A \times A &= \{(0,2),(0,3),\\ &\quad (1,2),(1,3),\\ &\quad (2,2),(2,3)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B \times B &= \{(2,2),(2,3),\\ &\quad (3,2),(3,3)\} \end{aligned}$$

Note que a igualdade dos pares (a,b) e (b,a) só acontece se $a = b$, como já foi definido anteriormente. Logo, no exemplo acima temos que o par $(0,2) \neq (2,0)$, uma vez que pertencem a produtos diferentes, $A \times B$ e $B \times A$.

Definição 4.4.4. Sejam A e B dois conjuntos. Chamamos de relação binária do conjunto A com o conjunto B, denotada por $\mathscr{R}$, à qualquer subconjunto de $A \times B$. Da notação de conjuntos, dizemos que $\mathscr{R} \subset A \times B$ ($\mathscr{R}$ está contido no produto cartesiano $A \times B$).

Considere os conjuntos A e B, uma relação $R \subset A \times B$ e um par ordenado (a,b). Representaremos o fato do par pertencer ou não a relação do seguinte modo:

$$(a,b) \in \mathscr{R} \text{ ou } (a,b) \notin \mathscr{R}, \text{ respectivamente.}$$

Ou ainda, podemos escrever que

$$a\mathscr{R}b \text{ (lê-se: } a \text{ está relacionado com } b) \text{ ou } a \not\mathscr{R} b \text{ (lê-se: } a \text{ não está relacionado com } b).$$

Chamamos de relação interna em A, à qualquer subconjunto de $A \times A$.

Definição 4.4.5. Seja A um conjunto e seja a relação $\mathscr{R} \subset A \times A$, também denotada por $\sim$. Chamamos $\mathscr{R}$ de relação de equivalência se

i) $\mathscr{R}$ é reflexiva: $a\mathscr{R}a$, para todo $a \in A$.

ii) $\mathscr{R}$ é simétrica: $a\mathscr{R}b \Rightarrow b\mathscr{R}a$

iii) $\mathscr{R}$ é transitiva: $a\mathscr{R}b$ e $b\mathscr{R}c \Rightarrow a\mathscr{R}c$

Exemplo 4.4.6. Seja A o conjunto dos números naturais, $A = \mathbb{N} \cup \{0\}$, e $\sim$ a relação entre dois elementos $a, b \in \mathbb{N}$ dada por

$$a \sim b \text{ se, e somente se, } a + b \text{ é par.}$$

Antes de verificarmos se essa relação é ou não uma relação de equivalência vamos analisar a paridade da soma de dois números naturais a, b.
Considere que se a é um número natural par então pode ser representado como $a = 2k$, com $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Ou ainda, se a é um número natural ímpar então pode ser representado como $a = 2k + 1$, com $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.
Sendo assim, quando

1) ambos são par: $a + b = 2k_1 + 2k_2 = 2k_3$ é par.

2) ambos são ímpar: $a + b = (2k_1 + 1) = (2k_2 + 1) = 2(k_1 + k_2) + 2 = 2k_3$ é par.

3) um for par e outro ímpar: $a + b = (2k_1 + 1) + 2k_2 = 2(k_1 + k_2) + 1$, não é par.

Note que

i) Seja $a + a = 2(2k)$ par, logo aRa.

ii) Se $a \sim b$, então $a + b$ é par. Como $a + b = b + a$ é par, logo $b \sim a$.

iii) Se $a \sim b$ e $b \sim c$, então $a + b$ e $b + c$ são pares. Como $a + c = (a + b) + (c - b)$ é par, temos que $a \sim c$.

Portanto, $\sim$ é uma relação de equivalência.

Definição 4.4.6. Sejam A um conjunto, $a \in A$ um elemento e $R \subset A \times A$ uma relação interna em A. Chamamos de classe de equivalência o conjunto

$$[a] = \{b \in A/a \sim b\}.$$

Exemplo 4.4.7. Seja A o conjunto de todas as pessoas e $\mathscr{R}$ a relação definida por: $a\mathscr{R}b$ quando a nascer no mesmo mês que b. É uma relação de equivalência, uma vez que

i) vale a reflexiva: seja $a \in A$ qualquer a está relacionado com a pelo seu mês de nascimento.

ii) vale a antissimétrica: sejam $a, b \in A$ e $a\mathscr{R}b$, isto é, a nasceu no mesmo mês que b; portanto b nasceu no mesmo mês que a, logo, $b\mathscr{R}a$.

iii) vale a transitiva: sejam $a, b \in A$, $a\mathscr{R}b$ e $b\mathscr{R}c$, isto é, a nasceu no mesmo mês que b e b nasceu no mesmo mês que c; assim, a nasceu no mesmo mês que c, logo, $a\mathscr{R}c$.

Como já sabemos que a relação “nascer no mesmo mês” é uma relação de equivalência em A, podemos agora organizar os elementos do conjunto de acordo com o mês de nascimento, isto é, consideramos, por exemplo, uma pessoa a nascida em março e buscamos todas as outras que estão relacionadas com ela. Logo a será a representante da classe de equivalência de todos os nascidos em março.

Anel

Definição 4.4.7. Sejam A um conjunto não-vazio munido de duas operações denominadas soma $(+)$ e produto $(\cdot)$. Chamaremos A de anel se forem verificadas as seguintes propriedades, quaisquer que sejam $a, b, c \in A$:

S1) Associatividade da soma: $(a+b)+c = a+(b+c)$

S2) Comutatividade da soma: $a+b = b+a$

S3) Existência do elemento neutro para a soma: Existe $0 \in A$ tal que $0+a = a+0 = a$. O símbolo 0 denotará o elemento neutro da soma e será chamado de zero.

Teorema 4.4.8. Seja A um anel. O elemento neutro da soma em A é único.

Demonstração. Sejam 0 e $0^{'}$ elementos neutros para a soma. Como $0^{'}$ é neutro, temos que

$$0+0^{'} = 0,$$

e como 0 é neutro, temos que

$$0^{'}+0 = 0^{'}.$$

Pela comutatividade da soma segue que $0 = 0^{'}$. □

S4) Existência do inverso para a soma - elemento simétrico: Para todo $a \in A$ existe $a^{'} \in A$ tal que $a+a^{'} = 0$. O símbolo $-a$ denotará o simétrico de um elemento $a \in A$.

Teorema 4.4.9. Seja A um anel. Para todo $a \in A$, o elemento simérico para a soma é único.

Demonstração. Sejam $a^{'}$ e $a^{''}$ elementos siméricos de a, então pela existência do elemento neutro temos

$$a^{''} = 0+a^{''} = (a^{'}+a)+a^{''} = a^{'}+(a+a^{''}) = a^{'}+0 = a^{'}.$$

□

P1) Associatividade do produto: $(a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)$

P2) Distributividade do produto em relação a soma: $a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$

P3) Existência do elemento neutro para o produto: O símbolo 1 denotará o elemento neutro do produto e será chamado simplesmente de um. Existe $1 \in A$, com $0 \neq 1$, tal que $a\cdot 1 = a$, para todo $a \in A$, diremos que A é um anel com unidade.

Teorema 4.4.10. Seja A um anel. O elemento neutro para o produto em A é único.

Demonstração. Para demonstrar que o elemento neutro do produto é único basta adaptar o que foi feito para o elemento neutro da soma. □

P4) Comutatividade do produto: $a\cdot b = b\cdot a$, para todo $a, b \in A$, diremos que A é um anel comutativo.

P5) Se $a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0$ ou $b = 0$,diremos que A é um anel sem divisores de zero.

Se A é um anel comutativo, com unidade e sem divisores de zero, dizemos que A é um dominio de Integridade ou somente domínio.
Por fim, para que um anel A caracterize-se como corpo é preciso que a seguinte propriedade seja satisfeita:

P6) Existência do inverso para o produto: Para todo $a \in A$, com $a \neq 0$, existe $b \in A$ tal que $a \cdot b = b \cdot a = 1$.

Teorema 4.4.11. Seja $a \in A$, com $a \neq 0$, seu inverso é único.

Demonstração. Sejam b e b' inversos do elemento $a \in A$. Segue que

$$b = b \cdot 1 = b \cdot (a \cdot b') = (b \cdot a) \cdot b' = (a \cdot b) \cdot b' = 1 \cdot b' = b',$$

donde concluimos que o inverso de um elemeto $a \neq 0$ é único. □

Nesse caso, um elemento $a \in A$ será dito invertível, se existir um elemento $b \in A$ tal que $a \cdot b = 1$. Daí, pois b será chamado de inverso de a, denotado por a^{-1}. Note que o elemento 0 não é invertível, pois se o fosse então existiria $b \in A$ tal que $0 \cdot b = 1$. Daí então, $0 = 0 \cdot b = 1$, o que é uma contradição pois $0 \neq 1$ por definição.

4.5 Corpo ordenado

Definição 4.5.1. Um corpo A se diz ordenado se nele existir $P \subseteq A$, que satisfaça duas condições:

(C_1) Dados $a, b \in P$, temos que $a + b \in P$ e $ab \in P$, ou seja, P é fechado em realção as operações de soma e produto.

(C_2) (Tricotomia) Dado um $c \in A$, temos uma, e só uma, das possibilidades: $c \in P$, $-c \in P$ ou $c = 0$.

O conjunto P será chamado de conjunto dos números positivos, também conhecido como "cone". Seja $-P$ o conjunto dos elementos simétricos de P. Esse conjunto será chamado de conjunto dos números negativos.
Podemos escrever o anel A como

$$A = P \cup -P \cup \{0\},$$

onde esses três conjuntos são disjuntos.

4.6 Relação de ordem no corpo A

Definição 4.6.1. Seja A um corpo ordenado. Existe uma relação binária $a \leqslant b$, lida como a é menor do que ou igual a b, com as seguintes propriedades:

P1) Reflexividade: Para todo $a \in A$ temos que $a \leqslant a$.

P2) Antissimetria: Para todos $a, b \in A$, se $a \leqslant b$ e $b \leqslant a$, então $a = b$.

P3) Transitividade: Para todos $a, b, c \in A$, se $a \leqslant b$ e $b \leqslant c$, então $a \leqslant c$.

Usaremos a notação $a < b$ ou $a > b$, lidas como a é menor que b ou a é maior que b, nessa ordem, para indicar que $a \leqslant b$ ou $a \geqslant b$, respectivamente, com $a \neq b$.

Proposição 4.6.1. Sejam A um corpo ordenado e $a \in A$. Se $a \neq 0$ então $a^2 \in P$.

Demonstração. Sendo $a \neq 0$ então, por definição, $a \in P$ ou $-a \in P$. Daí, segue que $a \cdot a \in P$ ou $(-a) \cdot (-a) \in P$. Como $(-a)(-a) = a \cdot a$, perceba que de qualquer modo $a \cdot a = a^2 \in P$. □

Referências Bibliográficas

[1] Ávila, Geraldo. *Análise Matemática para Licenciatura*. 2. ed.São Paulo: Edgard Blücher, 2005.

[2] OLDS, C. D. *Continued Fractions*. New York: Random House, 1963.

[3] BOYER, C. B. *História da Matemática*. 1. ed. São Paulo: Edgard Blucher LTDA, 1974.

[4] HEFEZ, A.*Aritmética*. 2. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2016.

[5] POMMER, Wagner M.*Frações contínuas e os números irracionais no ensino básico*. Anais do Seminário Sul-Mato-Grossense de Pesquisa em Educação Matemática, v. 6, n. 1, 2012.

[6] LOPES, Paula C. R. *Construções dos Números Reais*.163 f. Dissertação(Especialização em Matemática para o Ensino) - Universidade da Madeira, Funchal – Madeira, 2006.

[7] LIMA, Elon Lages. CURSO DE ANALISE, vol. 1. Publicação IMPA, Rio de Janeiro, 1995.

[8] PEREIRA, R. F. *Formalizando a Existência dos Números Reais*.45 f. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Geociências e Ciências Exatas). Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". Rio Claro, 2014.

[9] COSTA, P. C. *A construção dos números reais e aplicações no ensino médio*. 77 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal de Viçosa, Viçosa. 2017.

[10] SILVA, Bruno P. *Construção dos números reais por sequências de Cauchy e por cortes de Dedekind*. 55 f. Dissertação(Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT). Universidade Federal da Paraiba, João Pessoa, 2018.

[11] MOSCIBROSKI, Thais M. *A amplitude do conjunto dos números irracionais.* 71 f. Dissertação (Trabalho de conclusão do curso Matemática — Licenciatura). Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2002.

[12] KRISHNAN, Gautam G. *Continued Fractions.* 41 f. Curso(Notas para um minicurso da Ithaca High School). Cornell University, 2016.

[13] VIEIRA, Evilson. *Implementações Aritméticas.* 10 f. Revista eletrônica da Sociedade brasileira de matemática. Disponível em ¡https://doi.org/10.21711/2319023x2017/pmo51¿. PMO, v. 5, n. 1. SBM,2017.

[14] LISBOA, Fabrícia da C. *Uma caracterização das frações contínuas periódicas* 47 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas. Cruz das Almas, BA, 2019.

[15] MOREIRA, Carlos Gustavo T. A. *Frações Contínuas, Representações de Números e Aproximações Diofantinas.* 43 f. 1º Colóquio da Região Sudeste. IMPA, 2011.

[16] SANTOS, Jose Plínio de Oliveira. *Introdução à Teoria dos Números.* ed. Rio de Janeiro - RJ: IMPA, 1997.

[17] ontinued Fractions. In: WIKIPEDIA: a enciclopédia livre. Wikimedia 2020. Disponível em https://en.wikipedia.org/wiki/Continued fraction. Acesso em: 03/12/2018.

[18] GRECO, Federico. *Sulla Teoria Delle Frazioni Continue.* Tesi di Laurea in Teoria dei Numeri. Bologna, Università di Bologna, 2012.

[19] Santos, José Plínio de O. *Introdução à Teoria dos Números. Coleção Matemática Universitária.* Rio de Janeiro - IMPA, 2011.