Universidade Federal de Sergipe

Centro de Ciências Exatas e Tecnologia

Departamento de Matemática

Mestrado em Matemática

Princípios Sobre a Teoria das Equações Funcionais via Aplicações e uma Proposta de Intervenção no Ensino Básico

Anderson Santos Freire

São Cristóvão – SE
Julho de 2021

Universidade Federal de Sergipe

Centro de Ciências Exatas e Tecnologia

Mestrado em Matemática

Princípios Sobre a Teoria das Equações Funcionais via Aplicações e uma Proposta de Intervenção no Ensino Básico

por

Anderson Santos Freire

sob a orientação do

Prof. Dr. Gerson Cruz Araújo

São Cristóvão – SE
Julho de 2021

Catalogação na publicação

Universidade Federal de Sergipe

Biblioteca da UFS

XXXX Freire, Anderson Santos.
Princípios Sobre a Teoria das Equações Funcionais via Aplicações e uma Proposta de Intervenção no Ensino Básico xxxxxxxxxxxxxxxxx / xxxx xxx xx
xxxxx

xxxxxxxxxxx.
Orientador: Gerson Cruz Araújo
xxxxx.

xxxxxxxxxxxxxxx
xxxxxxxxxxxx.

BC/UFS CDU: xxxx(xxx)

Princípios Sobre a Teoria das Equações Funcionais via Aplicações e uma Proposta de Intervenção no Ensino Básico

por

Anderson Santos Freire

Monografia apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de Sergipe como requisito parcial para a obtenção do título de Mestrado em Matemática.

Área de Concentração: Análise

Aprovada em .

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Gerson Cruz Araújo – UFS
(Orientador)

Prof. Dr$^{\underline{a}}$. - Franciele Conrado Santos - UFMGE
(Examinadora Externa)

Prof. Dr$^{\underline{a}}$. - Karine de Almeida Santos - UFPE
(Examinadora Externa)

Aos meus pais

Agradecimentos

Gostaria de agradecer primeiramente a Deus por ter me dado saúde e força para superar as dificuldades.

A minha família, pelo incentivo e apoio incondicional, em especial a minha mãe que nunca mediu esforço e sempre acreditou em mim.

Aos professores do PROFMAT, pelo conhecimento adquirido ao longo deste curso.

Ao meu orientador Professor Gerson Cruz pelo suporte no pouco tempo que lhe coube, pela paciência, pelas suas correções e incentivos.

Aos amigos e colegas do PROFMAT-SE, pelo intenso companheirismo, que foi de imensa importância durante a minha formação, em especial: César, Cinthia, Cristiane, David, Erivaldo, Marianny, Paulo, Robson e Ricardo.

E enfim, a todos que contribuíram para a realização deste trabalho, seja de forma direta ou indireta, fica registrado aqui, o meu muito obrigado!

Resumo

Este texto, tem por âmago, divulgar premissas do estudo sobre as mais clássicas Equações e Inequações Funcionais, considerando a relevância destas para o desenvolvimento da matemática, tendo também a visão de difundir uma proposta de material de pesquisa que contribua para a melhoria do ensino deste ramo da matemática, pouco explorado na literatura brasileira. Apresentamos ao longo da redação, uma breve discussão sobre a história de alguns estudiosos que fizeram uso das Equações Funcionais, exibindo aspectos de soluções para certas Equações Funcionais padrões, a saber, Equação Aditiva de Cauchy, Equação de Jensen e Equação Funcional Linear. Além disso, expomos um estudo detalhado sobre as classes de soluções que caracterizam as Equações Funcionais Exponenciais, Logarítmicas, Multiplicativas de Cauchy e a Equação de D'Alembert. Ressaltemos que pudemos ao longo do trabalho generalizar algumas Equações Funcionais, como as Equações Funcionais Aditivas de Cauchy, com a meta de buscar soluções mais complexas que satisfaçam as denominadas Equações de Pexider e Vince. Explanamos ainda um estudo de Equações Funcionais envolvendo duas variáveis, como a Equação de Euler e a Equação Aditiva de Cauchy em duas variáveis. Dissertaremos também, certas casos especiais de uma família de Equações Funcionais de uma variável, denominada Equação de Conjugação, entre estas, consta, a Equação de Schröder, a Equação de Abel, e a Equação de Böttcher. Mostraremos ainda resultados sobre Equações Funcionais com radicais múltiplos e equações Polinomiais, ambas propostas pelo célebre matemático indiano Srinivasa Ramanujan. Finalmente, ilustraremos algumas aplicações das Equações Funcionais em problemas do Ensino Básico, mais estritamente, em questões provenientes das Olimpíadas de Matemática, contidas nos mais variados eventos desta categoria, tanto em âmbito nacional quanto internacional.

Palavras-chave: Equações Funcionais; Inequações Funcionais.

Abstract

The purpose of this text is to disclose the premises of the study on the most classic Functional Equations and Inequations, considering their relevance for the development of mathematics, also having the vision of spreading a proposal for research material that contributes to the improvement of teaching in this field of mathematics, which is little explored in Brazilian literature. We present throughout the writing, a brief discussion about the history of some scholars who made use of Functional Equations, showing aspects of solutions for certain standard Functional Equations, namely, Additive Cauchy Equation, Jensen Equation and Linear Functional Equation. Furthermore, we present a detailed study on the classes of solutions that characterize the Exponential, Logarithmic, Functional Equations, Cauchy Multiplicatives and the D'Alembert Equation. We emphasize that we were able to generalize, throughout the work, some Functional Equations, such as the Cauchy's Additive Functional Equations, with the goal of looking for more complex solutions that satisfy the so-called Pexider and Vince Equations. We also explain a study of Functional Equations involving two variables, such as the Euler Equation and the Additive Cauchy Equation in two variables. We will also discuss certain special cases of a family of Functional Equations of a variable, called the Conjugation Equation, among these, the Schröder Equation , the Abel Equation, and the Böttcher Equation. We will also show results on Functional Equations with multiple radicals and Polynomial equations, both proposed by the famous Indian mathematician Srinivasa Ramanujan. Finally, we will illustrate some applications of Functional Equations in Basic Education problems, more strictly, in questions from the Mathematics Olympiads, contained in the most varied events of this category, both in scope national and international.

Keywords: Functional Equations; Cauchy's equations.

Sumário

Introdução

A equação é uma ferramenta importante da álgebra que podemos utilizar para resolver problemas corriqueiros em nosso cotidiano e suas aplicações se estendem em diversos ramos da ciência, na engenharia, na física, na química, na biologia, na arquitetura, no urbanismo, nos esportes, na economia, na informática, entre outros. A humanidade não teria alcançado tantos avanços sem a utilização da álgebra. Denomina-se equação a sentença matemática expressa por uma igualdade com uma ou mais letras, chamadas incógnitas, que representam números desconhecidos.

Outro tipo de equações que norteiam grandes matemáticos desde o século XIV são as denominadas Equações Funcionais. Tais equações têm peculiaridades semelhantes às equações algébricas, diferenciando-se pelo fato das incógnitas serem funções definidas em certo intervalo da reta real. Bem antes de sua formalização, as Equações Funcionais já vinham sendo objeto de estudo e trabalho de vários matemáticos. Através de uma Equação Funcional, o matemático Nicole Oresme[1] forneceu uma definição indireta de funções lineares. Porém esta definição de linearidade representa apenas um exemplo de Equações Funcionais. Em 1352, Oresme escreveu um importante tratado de uniformidade e deformidade de intensidades, intitulado *Tractatus de configurationibus qualitatum et motuum*. Neste trabalho, ele estabeleceu a definição de uma relação funcional entre duas variáveis e a ideia que se pode expressar essa relação geometricamente.

Durante mais algumas centenas de anos essas equações foram sendo utilizadas por vários matemáticos sem que a teoria tivesse sido formalizada, entre eles destaca-se Gregório de Saint-Vincent[2]

[1] De herança normanda, Oresme nasceu em 1323 e morreu em 1382. Em 1355, Oresme obteve o grau de Mestre em Teologia, e logo depois foi nomeado Grão-Mestre do Colégio de Navarra, um dos colégios da Universidade de Paris, fundada em 1304. Nicole Oresme foi indiscutivelmente o maior matemática europeu do século XIV. Ele morreu em 1382 em Lisieux.

[2] Gregório de Saint-Vincent foi um jesuíta nascido em 08 de Setembro de 1584 em Bruges, Bélgica e falecido em 27 de Janeiro de 1667 em Gante, Bélgica. O trabalho principal de Saint-Vincent é um livro de mais de 1.250 páginas que inclui um estudo de círculos, triângulos, série geométrica, elipses, parábolas e hipérboles.

cujo trabalho sobre a hipérbole fez uso implícito da equação funcional

$$f(xy) = f(x) + f(y),$$

e foi pioneiro na teoria do logaritmo. O trabalho de Saint-Vincent apareceu em seu grande tratado de 1647 intitulado *Opus Geometricum quadraturae circuli et sectionum coni* que trata de métodos para calcular áreas e propriedades de seções cônicas. Em particular mostra como é possível calcular a área sob uma hipérbole ramo de $y = x^{-1}$ (ver detalhes em [6]), conforme figura 1.

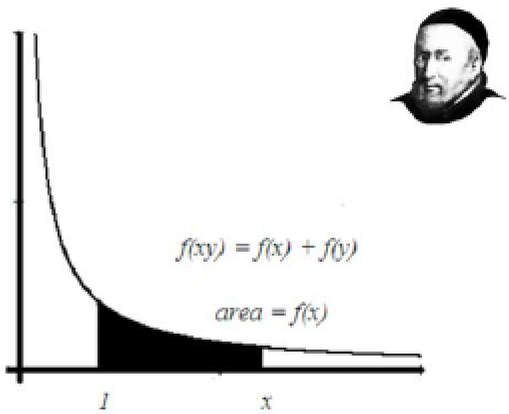


Figura 1: Gregório de Saint-Vincent foi o pioneiro na teoria dos logaritmos ao reconhecer que a área sob uma hipérbole satisfaz uma equação funcional. Usando o argumento geométrico para área constante mostrado acima, Gregório de Saint-Vincent foi capaz de derivar a Equação Funcional agora associada ao logaritmo.

Nos tempos modernos, a área sob uma curva, como uma hipérbole, é um tópico geralmente deixado para a teoria da integração. No entanto, Saint-Vincent fez grandes progressos no problema usando argumentos puramente geométricos.

Embora a definição de linearidade de Oresme possa ser interpretada como um exemplo inicial de uma Equação Funcional, ela não representa um ponto de partida para a teoria das Equações Funcionais. O surgimento do conceito de Equações Funcionais é datado do trabalho de Augustin Louis Cauchy[3]. Nascido em 1789 em Paris na França, Augustin Louis Cauchy trabalhou em diversas áreas da matemática tendo maior destaque por seus trabalhos no cálculo e é reconhecido como um

[3]Augustin Louis Cauchy nasceu em 21 de agosto de 1789 e faleceu no ano de 1857. Foi um matemático francês, considerado um dos impulsores da análise no século XIX. Nasceu em Paris e estudou na Escola Politécnica desta cidade. Cauchy verificou a existência de funções elípticas recorrentes, deu o primeiro impulso para a teoria geral de funções e fixou a base para o tratamento moderno da convergência de séries infinitas. Também aperfeiçoou o método de integração das equações diferenciais de primeiro grau. No campo da física, interessou-se pela propagação da luz e da teoria da elasticidade.

dos fundadores da moderna teoria da Análise Matemática.

Um outro matemático que que fez uso de equações funcionais foi Jean D'Alembert[4] que historicamente, precede Augustin Louis Cauchy. No entanto, no contexto de equações funcionais, parece mais natural considerar suas contribuições após Cauchy.

No campo das equações funcionais de uma variável podemos destacar matemáticos importantes, como por exemplo, Niels Henrik Abel (1802-1829), de uma família humilde e numerosa, considerado um dos mais brilhantes matemáticos de todos os tempos por seus profundos resultados em Álgebra e Teoria das Funções; Outro, Srinivasa Ramanujan[5] (1887-1920), que é considerado o gênio hindu do século vinte por ter mostrado contribuições importantes para o estudo de equações funcionais através do estudo sobre radicais múltiplos. Em 1911, Ramanujan propôs o problema de calcular

$$\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{\cdots}}}}$$

Esse radical múltiplo apareceu em 1966 na 27ª competição de Putnam, onde os alunos foram convidados a provar que o radical múltiplo valia 3. O problema não é uma equação funcional em si, e a solução oficial não envolve equações funcionais. No entanto, há uma equação funcional escondida aqui. Ramanujan havia feito contatos na comunidade matemática e começou a publicar e resolver problemas no *Journal of the Indian Mathematical Society*, que é onde ele colocou o problema apresentado acima. Era típico de tais problemas que eles seriam publicados no jornal e que as soluções seriam publicadas posteriormente. No entanto, o problema de Ramanujan permaneceu sem resolução até ele mesmo o resolver.

Finalmente, para uma leitura didática desse texto, salientamos que explanamos o material dividido em quatro capítulos e um apêndice.

No primeiro capítulo, mostraremos que é possível encontrar uma classe de soluções para as Equações Funcionais Aditiva, Exponencial, Logarítmica e Multiplicativa de Cauchy, as Equações

[4] Jean d'Alembert era um homem de muitos nomes. Filho ilegítimo de um oficial do exército, Louis-Camus Destouches, e da escritora Claudine Guérin de Tencin, nasceu em Paris em 1717, enquanto seu pai estava no exterior. Pouco depois de seu nascimento, sua mãe o abandonou na igreja de Saint-Jean-le-Rond. Seguindo a tradição, ele foi nomeado Jean le Rond em homenagem à igreja, e colocado em um orfanato. Após o retorno de seu pai, ele foi removido do orfanato e colocado com a Sra. Rousseau, esposa de um vidraceiro. Embora Destouches continuasse a apoiar financeiramente seu filho, ele optou por não reconhecê-lo publicamente. Em 1738, Jean le Rond entrou na faculdade de direito, onde foi registrado com o nome de Daremberg. Mais tarde, ele mudou esse nome para D'Alembert.

[5] Srinivasa Ramanujan foi um dos maiores gênios matemáticos indianos. Nasceu em 1887 na casa de sua avó em Erode, uma pequena vila a cerca de 400 km de Madras. Fez contribuições importantes para a teoria analítica dos números e trabalhou nas funções elípticas, frações contínuas e séries infinitas. Morreu aos 33 anos deixando vários trabalhos por completar, que continuam, ainda hoje, a ser estudados por outros matemáticos.

Funcionais de Jensen, Linear, de D'Alembert, Pexider e Vince. Com objetivo de finalizar o primeiro capítulo e apresentar uma possível continuidade do estudo sugerido aqui, estabeleceremos o conceito de Inequação Funcional de Cauchy.

No segundo capítulo, apresentaremos as Equações Funcionais de Cauchy (em duas variáveis) e a Equação Funcional de Euler. É importante ressaltar que, neste capítulo, trabalharemos com funções Escalares que dependem de duas variáveis. Prosseguiremos estabelecendo a classe de soluções para essas equações. Ainda no segundo capítulo, demonstraremos o resultado que caracteriza como deve ser representada uma solução para a Equação Funcional de Euler.

Posteriormente, no terceiro capítulo discutiremos uma família de equações funcionais de uma variável chamada de equação de conjugação e na sequência algoritmos que nos levam a encontrar soluções para equações pertencentes a esta família. Mostramos ainda resultados sobre equações funcionais com radicais múltiplos e equações polinomiais.

Na proposta imposta no quarto capítulo, veremos algumas questões de Olimpíadas de Matemática na qual indicaremos mais algumas técnicas de resolução, que podem ajudar a esclarecer algumas dúvidas e assim fazer com que o aluno crie seu próprio arsenal de técnicas para a resolução de problemas sobre equações funcionais.

É importante destacar, que este trabalho também apresenta algumas aplicações, a partir de alguns resultados acima, tais como: As fórmulas de soma dos quadrados dos n primeiros números naturais; a fórmula da desintegração radioativa, a definição do logaritmo; a fórmula do retângulo; a fórmula dos juros simples e dos juros compostos.

Finalmente, no apêndice apresentaremos as definições e os resultados mais importantes que serão utilizados em todo o trabalho, tais como: ponto aderente, função contínua, função monótona, função limitada, funções seno e cosseno hiperbólicos, Teorema de Euler - Fermat.

Capítulo 1

Equações e Inequações Funcionais Envolvendo Funções com duas Variável Tipo I

Neste capítulo, abordaremos equações funcionais em duas variáveis[1]. Mostraremos que é possível encontrar uma classe de soluções para as Equações Funcionais Aditiva, Exponencial, Logarítmica e Multiplicativa de Cauchy, e também para as Equações Funcionais de Jensen, Linear, de D'Alembert, Pexider e Vince. Por fim, apresentaremos uma possível continuidade do estudo sugerido aqui, estabeleceremos o conceito de Inequação Funcional de Cauchy.

Permita-nos enfatizar que todo este capítulo baseia-se nas referências [1], [2], [3] e [7].

Neste capítulo o leitor terá o auxílio do apêndice para qualquer dúvida.

1.1 Equações Funcional Aditiva de Cauchy, de Jensen e Linear

Formalmente as Equações Funcionais foram inicialmente estudadas a partir dos trabalhos desenvolvidos do Matemático Augustin Louis Cauchy, nascido em 1789, em Paris, na França. Cauchy é reconhecido, principalmente, por suas contribuições em Cálculo e é considerado um dos fundadores

[1]Aqueles que trabalham em equações funcionais falam de equações em uma, duas ou mais variáveis. Essa expressão não deve ser confundida com a expressão funções de uma ou mais variáveis. Por exemplo, a equação de Cauchy em (**??**) envolve uma função de uma única variável real. No entanto, é uma equação funcional em duas variáveis, ou seja, o x e y que aparecem em (**??**). Embora a maioria das equações que estudamos neste livro envolvam funções de uma variável real, ocasionalmente consideraremos funções de duas ou mais.

da Análise Matemática Moderna (para mais detalhes ver [7]).

Outro Matemático que nomeará uma das equações funcionais a ser estudada nesta seção é Johan Ludwig William Valdemar Jensen. Nascido em 1859, em Nakskov, na Dinamarca, Jensen é reconhecido por sua famosa desigualdade (conhecida como desigualdade de Jensen) e também por suas contribuições em Análise Complexa (para mais detalhes ver [7]).

Nesta seção, mostraremos que é possível encontrar uma classe de soluções para as equações funcionais conhecidas como Equação de Cauchy, Equação de Jensen e Equação Linear.

Comecemos a Equação Funcional aditiva de Cauchy.

Definição 1.1. Seja f uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, que associa cada número $x \in \mathbb{R}$ um valor $f(x) \in \mathbb{R}$. A equação funcional em (1.1)

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \quad \forall \;\; x, y \in \mathbb{R}. \tag{1.1}$$

é chamada *Equação Funcional Aditiva de Cauchy*, e toda função real que satisfaz (1.1) é uma solução desta equação.

Ao longo do texto, usaremos Equação de Cauchy para significar Equação Funcional Aditiva de Cauchy.

Depois da função nula, o exemplo mais simples que ilustra uma solução da Equação de Cauchy é a função identidade como mostra o exemplo a seguir.

Exemplo 1.1. A identidade $I : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $I(x) = x$, para todo $x \in \mathbb{R}$, satisfaz (1.1),

$$I(x+y) = x + y = I(x) + I(y), \quad \forall \;\; x, y \in \mathbb{R}.$$

O exemplo a seguir generaliza o exemplo anterior e mostra que a função linear é solução da Equação de Cauchy.

Exemplo 1.2. De fato, dado $a \in \mathbb{R}$, a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = ax$, para todo $x \in \mathbb{R}$, chamada função linear.

$$f(x+y) = a(x+y) = ax + ay = f(x) + f(y), \quad \forall \;\; x, y \in \mathbb{R}.$$

Estamos interessados em determinar todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que são soluções (sob certas hipóteses) para a Equação de Cauchy (1.1). Gostaríamos de frisar que a família de soluções dada no Exemplo 1.2 é a candidata imediata a satisfazer (1.1). No entanto, isto é verdade somente se assumirmos que as soluções para (1.1) são limitadas inferiormente em algum intervalo da forma $[c, d]$, onde $c, d \in \mathbb{R}$, ou contínuas.

O teorema crucial deste tópico, garante as informações dadas acima se considerarmos que as soluções de (1.1) são contínuas. Todavia, apresentaremos, inicialmente, um lema que será útil na prova do resultado principal sobre a equação de Cauchy.

Lema 1.1. *Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função satisfazendo a seguinte Equação Funcional Aditiva de Cauchy:*

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \quad \forall \;\; x, y \in \mathbb{R}.$$

Então, existe um número real a tal que

$$f(q) = aq, \quad \forall \;\; q \in \mathbb{Q}.$$

Demonstração. Primeiramente, vamos mostrar por indução matemática sobre n, que

$$f(x_1 + x_2 + ... + x_n) = f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n), \quad \forall \;\; x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}. \tag{1.2}$$

De fato, para $n = 2$ a igualdade (1.2) é verdadeira, pois

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2), \quad \forall \;\; x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

Fornecido que f satisfaz (1.1). Assuma a afirmação (1.2) para algum $k \in \mathbb{N}$, ou seja,

$$f(x_1 + x_2 + ... + x_k) = f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_k), \quad \forall \;\; x_1, x_2, ..., x_k \in \mathbb{R}. \tag{1.3}$$

Vamos provar que (1.2) também é verdadeira para o valor $k + 1 \in \mathbb{N}$. Com efeito,

$$\begin{aligned} f(x_1 + x_2 + ... + x_k + x_{k+1}) &= f[(x_1 + x_2 + ... + x_k) + x_{k+1}] = f(x_1 + x_2 + ... + x_k) + f(x_{k+1}) \\ &= f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_k) + f(x_{k+1}), \end{aligned}$$

onde na segunda e terceira igualdades acima aplicamos (1.1) e a hipótese da indução (1.3), respectivamente. Portanto, a afirmação (1.2) é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

Um caso especial é encontrado quando adotamos $x = x_1 = x_2 = ... = x_n \in \mathbb{R}$. Assim, (1.2) se torna

$$f(nx) = f(\overbrace{x + x + \cdots + x}^{\text{n vezes}}) = \overbrace{f(x) + f(x) + \cdots + f(x)}^{\text{n vezes}} = nf(x), \quad \forall \;\; n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}. \tag{1.4}$$

Agora, para $t \in \mathbb{R}$, considere que $x = (m/n)t$, onde $m \in \mathbb{N}$ e $n \in \mathbb{N}^*$, para obter

$$nf(x) = f(nx) = f(mt) = mf(t).$$

Consequentemente, chegamos a

$$nf[(m/n)t] = mf(t), \quad \forall \;\; m, n \in \mathbb{N}, t \in \mathbb{R},$$

mas, isto é equivalente a,

$$f[(m/n)t] = (m/n)f(t), \quad \forall \;\; m, n \in \mathbb{N}, t \in \mathbb{R}. \tag{1.5}$$

Assim, acabamos de provar que

$$f(qt) = qf(t), \quad \forall \;\; t \in \mathbb{R}, q \in \mathbb{Q}^+. \tag{1.6}$$

(Note que se $q = m/n$, com $m, n < 0$, teríamos $q = (-m)/(-n)$, onde $-m$ e $-n$ são naturais). Podemos estender (1.6) de modo a incluir $q = 0$. De fato, por (1.1), temos que

$$f(y) = f(y + 0) = f(y) + f(0), \quad \forall \;\; y \in \mathbb{R}.$$

Então, $f(0) = 0$. A partir daí, temos, imediatamente, que

$$f(0 \cdot t) = f(0) = 0 \cdot f(t), \quad \forall \;\; t \in \mathbb{R}.$$

Portanto (1.6) é verdadeira para todo q racional não negativo. Na verdade, o caso $q < 0$ racional também é válido. Com efeito, por (1.1), obtemos

$$0 = f(0) = f(x + (-x)) = f(x) + f(-x), \quad \forall \;\; x \in \mathbb{R},$$

e, concluímos que f é uma função ímpar, isto é

$$f(-x) = -f(x), \quad \forall \;\; x \in \mathbb{R}.$$

A partir deste fato,

$$f(qt) = f[-(-q)t] = -f[(-q)t] = -(-q)f(t) = qf(t), \quad \forall \ \ q \in \mathbb{Q}^- \text{ e } t \in \mathbb{R}.$$

Portanto, inferimos que

$$f(qt) = qf(t), \quad \forall \ \ t \in \mathbb{R}, q \in \mathbb{Q}. \tag{1.7}$$

Denote $a = f(1)$. Deduzimos que

$$f(q) = aq, \quad \forall \ \ q \in \mathbb{Q}.$$

Isto prova o lema em questão. □

Teorema 1.1. *Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua satisfazendo a seguinte Equação Funcional Aditiva de Cauchy:*

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \quad \forall \ \ x, y \in \mathbb{R}.$$

Então, existe um número real a tal que

$$f(x) = ax, \quad \forall \ \ x \in \mathbb{R}.$$

Demonstração. A priori, sabemos que $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$, $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. Assim, para $x \in \mathbb{R}$, temos que existe uma sequência $(q_n) \in \mathbb{Q}$ tal que $\lim q_n = x$.

$$f(x) = f(\lim q_n) = \lim f(q_n) = \lim aq_n = a \lim q_n = ax, \quad \forall \ \ x \in \mathbb{R}.$$

Logo, podemos concluir que

$$f(x) = ax, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

□

É importante ressaltar que, quando desconsideramos a continuidade da função f no Teorema (1.1) podemos chegar a mesma conclusão sobre f se acrescentarmos a esta a condição de ser limitada inferiormente em um intervalo fechado. Mais precisamente, temos o seguinte resultado.

Teorema 1.2. *Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função que satisfaz a Equação Funcional Aditiva de Cauchy* (1.1). *Suponhamos, além disso, que existe algum intervalo $[c, d]$ de números reais, e f é limitada* *inferiormente, isto é, existe um número real M tal que $f(x) \geq M$ para todo $x \in [c, d]$. Então, existe um número real a tal que*

$$f(x) = ax, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Demonstração. Vamos fazer esta prova por etapas:

i) Vimos em (1.4) que,

$$f(nx) = nf(x), \quad \forall \;\; n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R},$$

e note que a hipótese de continuidade não foi utilizada para esse fim.

ii) Afirmamos que f é limitada inferiormente no intervalo $[0, p]$, onde $p = d - c$. De fato, como f é limitada inferiormente em [c,d], então exite um $M \in \mathbb{R}$ tal que,

$$M \leq f(x), \quad \forall \;\; x \in [c, d].$$

Agora, considere que $x \in [0, p]$. Assim, podemos inferir

$$0 \leq x \leq p \Leftrightarrow 0 \leq x \leq d - c \Leftrightarrow c \leq x + c \leq d \Leftrightarrow x + c \in [c, d].$$

Logo, concluímos que $M \leq f(x + c)$, já que $x + c \in [c, d]$. Mas, por (1.1), podemos escrever

$$M \leq f(x + c) = f(x) + f(c).$$

Por fim, chegamos a,

$$M - f(c) \leq f(x), \quad \forall \;\; x \in [0, p].$$

Portanto, f é limitado inferiormente por $M - f(c)$ em $[0, p]$.

iii) Agora, defina uma função auxiliar $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ por:

$$g(x) = f(x) - f(p)(x/p), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Veja que g também é limitada inferiormente no intervalo $[0, p]$ e satisfaz (1.1). De certo, vimos em **ii**), que

$$f(x) \geq M, \quad \forall \;\; x \in [0, p].$$

Pela definição de g, temos que

$$g(x) + f(p)(x/p) \geq M, \quad \forall \;\; x \in [0, p],$$

logo, chegamos a

$$g(x) \geq M - f(p)(x/p), \quad \forall \;\; x \in [0, p].$$

Posteriormente, dividimos o estudo em dois casos para $f(p)$:

1. Suponha que $f(p) \geq 0$. Como $x \in [0, p]$ com $p \neq 0$, então

$$0 \leq f(p)(x/p) \leq f(p)(p/p) = f(p).$$

   Consequentemente, podemos inferir

$$M - f(p) \leq M - f(p)(x/p) \leq g(x), \quad \forall \;\; x \in [0, p].$$

2. Por sua vez, se $f(p) < 0$, então

$$g(x) \geq M - f(p)(x/p) \geq M, \quad \forall \;\; x \in [0, p].$$

   Portanto, encontramos

$$g(x) \geq C, \quad \forall \;\; x \in [0, p], \tag{1.8}$$

   onde $C = \min\{M, M - f(p)\}$.

Vamos agora provar que g satisfaz (1.1). De fato, por (1.1), chegamos a

$$\begin{aligned} g(x+y) &:= f(x+y) - \frac{f(p)(x+y)}{p} \\ &= f(x) + f(y) - f(p)(x/p) - f(p)(y/p) \\ &= [f(x) - f(p)(x/p)] + [f(y) - f(p)(y/p)] \\ &=: g(x) + g(y), \quad \forall \;\; x, y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

iv) Agora estamos interessados em provar que g é periódica com período p, no sentido de que $g(x + p) = g(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Portanto, do fato que g é limitado inferiormente no intervalo $[0, p]$ (ver **iii)**), vamos concluir que g é limitado inferiormente em toda reta real $\mathbb{R}$.

De fato, por (1.1), concluímos

$$\begin{aligned} g(x+p) &= g(x)+g(p) \\ &:= [f(x)-f(p)(x/p)]+[f(p)-f(p)(p/p)] \\ &= f(x)-f(p)(x/p) \\ &:= g(x), \quad \forall \;\; x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Por outro lado, do estudo dos números reais, temos que,

$$\mathbb{R} = \bigcup_{z \in \mathbb{Z}} [zp, (z+1)p).$$

Assim sendo, se $x \in \mathbb{R}$, então $\exists \;\; z_0 \in \mathbb{Z}$ tal que, $x \in [z_0p, (z_0+1)p)$, com isso, $0 \leq x - z_0p \leq p$. Dessa forma, por (1.8), $\exists \;\; c > 0$ tal que $g(x - z_0p) \geq C$.

Vamos, agora, provar, por indução matemática em z, que

$$g(x+zp) = g(x), \quad \forall \;\; z \in \mathbb{N}.$$

Naturalmente temos, para $z = 1$,

$$g(x + 1 \cdot p) = g(x+p) = g(x).$$

Suponhamos por hipótese de indução que $g(x+np) = g(x)$. Logo, por (1.1), obtemos

$$\begin{aligned} g(x+(n+1)p) &= g(x+(np+p)) \\ &= g((x+np)+p) \\ &= g(x+np)+g(p). \end{aligned}$$

Mas, por hipótese de indução e (1.1), encontramos,

$$\begin{aligned} g(x+(n+1)p) &= g(x)+g(p) \\ &= g(x+p) \\ &= g(x). \end{aligned}$$

Portanto, podemos escrever a seguinte igualdade:

$$g(x+zp) = g(x), \quad \forall \;\; z \in \mathbb{N}.$$

Por outro lado, obtemos

$$\begin{aligned} g(-x) &:= f(-x) - f(p)[(-x)/p] = -f(x) - [-f(p)(x/p)] \\ &= -[f(x) - f(p)(x/p)] =: -g(x). \end{aligned}$$

Isto nos diz que g é uma função ímpar. Por outro lado, obtemos que

$$\begin{aligned} g(x + zp) &= g(-(-x - zp)) = -g((-x) + (-z)p) \\ &= -g(-x) = g(x), \quad \forall \ z < 0. \end{aligned}$$

Por fim, como $g(x + 0p) = g(x)$, podemos escrever

$$g(x + zp) = g(x), \quad \forall \ z \in \mathbb{Z}.$$

Por conseguinte, concluímos que

$$g(x) = g(x - z_0 p) \geq C, \quad \forall \ x \in \mathbb{R}.$$

Isto prova que g é limitada inferiormente em $\mathbb{R}$.

v) Afirmamos que g é identicamente nula. Suponha, por contradição, que existe algum $x_0 \in \mathbb{R}$ para o qual $g(x_0) \neq 0$. Sem perda de generalidade, assuma que $g(x_0) > 0$. Então,

$$\begin{aligned} g(nx_0) &:= f(nx_0) - f(p)[(nx_0)/p] = nf(x_0) - nf(p)(x_0/p) \\ &= n[f(x_0) - f(p)(x_0/p)] =: ng(x_0), \end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$. Provamos, em **iv**), que $g(x) \geq C$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Logo,

$$ng(x_0) = g(nx_0) \geq C,$$

e assim, obtemos

$$n \geq C/g(x_0), \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Por conseguinte, considerando que $C \geq 0$, temos que

$$n \geq \frac{C}{g(x_0)} \geq 0, \quad \forall \ n \in \mathbb{Z}.$$

Mas isto é um absurdo em $\mathbb{Z}$. Por outro lado, se $C < 0$ então, $-C/g(x_0) > 0$. Pela Propriedade

Arquimediana, $\exists \ n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $-C/g(x_0) < n_0$. Daí, $-n_0 < C/g(x_0) \leq n, \quad \forall \ n \in \mathbb{Z}$, o que é uma contradição. Conclui-se então que, $\nexists \ x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $g(x_0) \neq 0$. Logo, $g(x) = 0, \forall \ x \in \mathbb{R}$.

vi) Aplicando o fato que g é identicamente nula, concluímos que

$$f(x) = ax, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

onde $a = f(p)/p$. De fato, vimos, pelo item **v**), que

$$0 = g(x) := f(x) - f(p)(x/p), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Portanto,

$$f(x) = (f(p)/p)x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Isto completa a prova do Teorema 1.2. $\square$

É importante ressaltar aqui que se retirarmos as hipóteses de continuidade do Teorema 1.1 ou de limitação do Teorema 1.2, ainda assim é possível encontrar solução para (1.1) e esta não é da forma dada nestes dois resultados (para mais detalhes ver [7]). Contudo, não é do nosso interesse o estudo destas soluções.

Sabemos que toda função real contínua definida em um intervalo fechado é limitada superior e inferiormente. Dessa forma, a condição de limitação do Teorema 1.2 é mais geral do que a hipótese de continuidade considerada no Teorema 1.1. Entretanto, a continuidade e a limitação são, em alguns momentos, difíceis de serem verificadas. Portanto, apresentaremos dois resultados que expõem hipóteses, algumas vezes, mais simples de serem checadas.

No primeiro deles, substituiremos a condição de continuidade do Teorema 1.1 por uma suposição de monotonicidade para mostrar que a mesma conclusão ainda segue.

Corolário 1.3. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função monótona satisfazendo a seguinte Equação Funcional Aditiva de Cauchy:*

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Então,

$$f(x) = ax, \quad \forall \ x \in \mathbb{R},$$

para algum $a \neq 0$ (sendo $a \geq 0$, se f é não-decrescente, e $a \leq 0$, caso f seja não-crescente).

Demonstração. Suponha, inicialmente, que f é monótona não decrescente.

Aplicando o Lema 1.1, chegamos ao fato de

$$f(q) = aq, \quad \forall \ q \in \mathbb{Q},$$

com $a = f(1)$, desde que f satisfaz (1.1). Como f é não-decrescente, isto é, $f(x) \leq f(y)$, sempre que $x < y$, então

$$0 = f(0) \leq f(1) = a,$$

pois $0 < 1$. Isto nos permite concluir que $a \geq 0$. Agora, usando a hipótese de monotonicidade, temos, para qualquer número real x, que

$$aq_n = f(q_n) \leq f(x) \leq f(r_n) = ar_n,$$

onde $q_n, r_n \in \mathbb{Q}$ são tais que,

$$x - \frac{1}{n} < q_n < x - \frac{1}{n+1}, \ x + \frac{1}{n+1} < r_n < x + \frac{1}{n}, \quad \forall \ n \in \mathbb{N}.$$

Conforme o teorema do confronto segue que, $\lim q_n = x$ e $\lim r_n = x$. Além disso,

$$q_n < x - \frac{1}{n+1} < x < x + \frac{1}{n+1} < r_n, \quad \forall \ n \in \mathbb{N}.$$

Pela monotonicidade, temos que

$$f(q_n) \leq f(x) \leq f(r_n), \quad \forall \ n \in \mathbb{N}. \tag{1.9}$$

Mas, passando ao limite, quando $n \to \infty$, encontramos

$$\lim f(q_n) = \lim aq_n = a \lim q_n = ax$$

e também

$$\lim f(r_n) = \lim ar_n = a \lim r_n = ax.$$

Novamente, aplicando o teorema do confronto a (1.9), obtém-se

$$f(x) = ax, \quad \forall \ x \in \mathbb{R},$$

onde $a \geq 0$.

Agora, considere que f seja uma função não-crescente, isto é, $f(x) \geq f(y)$, sempre que $x < y$. Assim sendo, considere $c < d$ em $\mathbb{R}$ para encontrar

$$f(d) \leq f(x), \quad \forall \;\; x \in [c, d].$$

Dessa forma, f é limitada inferiormente em $[c, d]$, por $f(d)$. Por outro lado, como f satisfaz (1.1), obtemos pelo Teorema 1.2 que existe $a \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = ax, \quad \forall \;\; x \in \mathbb{R}.$$

Por fim, observe que

$$a = f(1) \leq f(0) = 0,$$

já que f é não-crescente. □

Os casos em que a função f seja crescente e a função f seja decrescente segue de modo análogo onde $a > 0$ e $a < 0$, respectivamente.

A seguir, apresentaremos um resultado que mostra mais uma hipótese a ser adotada para encontrarmos uma família de soluções para a equação (1.1). Para isto precisamos da definição a seguir:

Definição 1.2. Seja f uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, que associa cada número $x \in \mathbb{R}$ um valor $f(x) \in \mathbb{R}$. A equação em (1.10)

$$f(xy) = f(x)f(y), \quad \forall \;\; x, y \in \mathbb{R}. \tag{1.10}$$

é chamada *Equação Funcional Multiplicativa de Cauchy*, e toda função real que satisfaz (1.10) é uma solução desta equação.

Exemplo 1.3. É fácil ver que a aplicação identidade $I : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $I(x) = x$, para todo $x \in \mathbb{R}$, satisfaz (1.10). Com efeito,

$$I(xy) = xy = I(x)I(y), \quad \forall \;\; x, y \in \mathbb{R}.$$

É também fato que a função nula $0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $0(x) = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$, satisfaz (1.10). De fato,

$$0(xy) = 0 = 0 \cdot 0 = 0(x)0(y), \quad \forall \;\; x, y \in \mathbb{R}.$$

Abaixo, mostraremos que só as funções identidade e a nula satisfazem as (1.1) e (1.10).

Corolário 1.4. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma aplicação que satisfaz a Equação Funcional Aditiva de Cauchy:*

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \quad \forall \ x, y \in \mathbb{R}.$$

e a Equação Multiplicativa de Cauchy:

$$f(xy) = f(x)f(y), \quad \forall \ x, y \in \mathbb{R}.$$

Então, ou f é a aplicação nula, ou é a identidade.

Demonstração. Primeiramente, para concluirmos que f transforma números não negativos em números com mesmo sinal, considere que $z \geq 0$ e aplique (1.10) para obter

$$f(z) = f(\sqrt{z}\sqrt{z}) = f(\sqrt{z})f(\sqrt{z}) = [f(\sqrt{z})]^2 \geq 0. \tag{1.11}$$

Portanto, podemos concluir que

$$f(z) \geq 0, \quad \forall \ z \geq 0. \tag{1.12}$$

Esta informação diz que f é uma função monótona crescente. De fato, assumindo que $x \leq y$ em $\mathbb{R}$, obtemos $y - x \geq 0$ e, consequentemente, por (1.12), escrevemos $f(y-x) \geq 0$. Daí, segue por (1.1), que $f(y) + f(-x) \geq 0$. Portanto, por (1.7), chegamos a

$$f(y) \geq -f(-x) = f(x).$$

Isto nos mostra que f é, de fato, monótona crescente. Sendo assim, aplicando o Corolário 1.3, segue que

$$f(x) = ax, \quad \forall \ x \in \mathbb{R},$$

onde ($a \geq 0$). Usando (1.11), tem-se que $f(1) = [f(1)]^2$. Por conseguinte, $[f(1)[1 - f(1)] = 0$. Isto implica que $f(1) = 0$ ou $f(1) = 1$. Como $a = f(1)$, então $a = 0$ ou $a = 1$. Por fim,

$$f(x) = 0, \quad \forall \ x \in \mathbb{R},$$

no caso $a = 0$, ou,

$$f(x) = x, \quad \forall \ x \in \mathbb{R},$$

no caso $a = 1$. Isto completa a prova do corolário em questão.

Enfim, as características básicas sobre as equações de Cauchy foram observadas. $\square$

Estudaremos, posteriormente, a Equação Funcional de Jensen. Mais precisamente, nossa meta, assim como anteriormente, é encontrar uma família de soluções para esta equação. Vejamos, então, como representar matematicamente esta equação funcional e o que significa solucioná-la.

Definição 1.3. Seja f uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, que associa cada número $x \in \mathbb{R}$ um valor $f(x) \in \mathbb{R}$, A equação em (1.13)

$$f\Big(\frac{x+y}{2}\Big) = \frac{f(x)+f(y)}{2}, \quad \forall \ x, y \in \mathbb{R}, \tag{1.13}$$

é chamada *Equação Funcional de Jensen*, e toda função real que satisfaz (1.13) é uma solução desta equação.

Exemplo 1.4. A função identidade $I : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $I(x) = x$, para todo $x \in \mathbb{R}$, satisfaz (1.13). Com efeito,

$$I\Big(\frac{x+y}{2}\Big) = \frac{x+y}{2} = \frac{x}{2} + \frac{y}{2} = \frac{I(x)}{2} + \frac{I(y)}{2} = \frac{I(x)+I(y)}{2}, \quad \forall \ x, y \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 1.5. Podemos garantir que qualquer solução para a Equação de Cauchy é também solução para a Equação de Jensen. De fato, se f satisfaz (1.1), então f obedece a igualdade (1.7) e

$$f\Big(\frac{x+y}{2}\Big) = f\Big(\frac{x}{2} + \frac{y}{2}\Big) = f\Big(\frac{x}{2}\Big) + f\Big(\frac{y}{2}\Big) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(y) = \frac{f(x)+f(y)}{2}, \quad \forall \ x, y \in \mathbb{R}.$$

Dessa forma, f satisfaz (1.13).

Exemplo 1.6. Note que a Equação de Jensen possui mais que uma solução. Na verdade, (1.1) possui infinitas soluções. Com efeito, dados $a, b \in \mathbb{R}$, a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = ax+b$, para todo $x \in \mathbb{R}$, satisfaz (1.13) haja visto que,

$$f\Big(\frac{x+y}{2}\Big) = a\Big(\frac{x+y}{2}\Big) + b = \frac{ax+b}{2} + \frac{ay+b}{2} = \frac{f(x)}{2} + \frac{f(y)}{2} = \frac{f(x)+f(y)}{2}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Vamos provar, no resultado à seguir que sob a hipótese de continuidade, a família de soluções para a Equação de Jensen é dada pelas funções expostas no Exemplo 1.6.

Teorema 1.5. *Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua satisfazendo a seguinte Equação Funcional* *de Jensen:*

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}, \quad \forall \ \ x,y \in \mathbb{R}.$$

Então, existem números reais a e b tais que

$$f(x) = ax + b, \quad \forall \ \ x \in \mathbb{R}.$$

Demonstração. Inicialmente, defina uma função auxiliar $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = f(x) - f(0), \quad \forall \ \ x \in \mathbb{R}. \tag{1.14}$$

Vamos provar que a equação g satisfaz (1.1). Primeiramente, note que g é uma solução para (1.13). De fato,

$$\begin{aligned} g\left(\frac{x+y}{2}\right) &:= f\left(\frac{x+y}{2}\right) - f(0) = f\left(\frac{x+y}{2}\right) - f\left(\frac{0+0}{2}\right) \\ &= \frac{f(x)+f(y)}{2} - \frac{f(0)+f(0)}{2} = \frac{f(x)-f(0)}{2} + \frac{f(y)-f(0)}{2} \\ &=: \frac{g(x)}{2} + \frac{g(y)}{2} = \frac{g(x)+g(y)}{2}, \quad \forall \ \ x,y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$g\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{g(x)+g(y)}{2}, \quad \forall \ \ x,y \in \mathbb{R}. \tag{1.15}$$

Observe também que, g é uma função contínua, pois, por suposição, f é contínua e, além disso, $g(0) = 0$. Com efeito,

$$g(0) = f(0) - f(0) = 0.$$

Substituindo $y = 0$ em (1.15), obtemos

$$g\left(\frac{x}{2}\right) = g\left(\frac{x+0}{2}\right) = \frac{g(x)+g(0)}{2} = \frac{g(x)}{2}, \quad \forall \ \ x \in \mathbb{R},$$

Consequentemente, obtemos

$$g\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{g(x+y)}{2}, \quad \forall \ \ x,y \in \mathbb{R}. \tag{1.16}$$

Substituindo a igualdade (1.16)em (1.15), chegamos a identidade

$$g(x+y) = g(x) + g(y), \quad \forall \ \ x, y \in \mathbb{R},$$

ou seja, g satisfaz a Equação de Cauchy. Portanto, pelo Teorema 1.1, existe um $a \in \mathbb{R}$ tal que

$$g(x) = ax, \quad \forall \ \ x \in \mathbb{R}.$$

A partir daí, denotando $b = f(0)$, encontramos

$$f(x) - b = g(x) = ax, \quad \forall \ \ x \in \mathbb{R}.$$

Com isso, concluímos que

$$f(x) = ax + b, \quad \forall \ \ x \in \mathbb{R}. \tag{1.17}$$

Isto conclui a prova do teorema em questão. □

Para finalizar esta seção, trabalharemos com a Equação Funcional Linear. Mais especificamente, encontraremos uma família de soluções para esta equação. Vejamos, então, como representar, através de uma igualdade envolvendo funções reais, esta equação funcional e o que significa solucioná-la.

Definição 1.4. Seja f uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, que associa cada número $x \in \mathbb{R}$ um valor $f(x) \in \mathbb{R}$, A equação dada em (1.18)

$$f(ax + by + c) = af(x) + bf(y) + r, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, \tag{1.18}$$

onde $a, b, c, r \in \mathbb{R}$, $a, b \neq 0$, é chamada Equação Funcional Linear. E toda função real que satisfaz (1.18) é uma solução desta equação.

Observe que se considerarmos $a = b = 1$ e $c = r = 0$, a Equação Linear se torna a Equação Aditiva de Cauchy. Além disso, a Equação Linear se reduz a Equação de Jensen se adotarmos

$$a = b = \frac{1}{2} \text{ e } c = r = 0.$$

Exemplo 1.7. Vamos comprovar a existência de infinitas soluções para a Equação Linear, se $a + b \neq 1$. Com efeito, a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) := sx + \frac{sc-r}{a+b-1}$, para todo $x \in \mathbb{R}$, satisfaz (1.18) já que,

$$\begin{aligned}
f(ax+by+c) &:= s(ax+by+c) + \frac{sc-r}{a+b-1} = a\Big(sx + \frac{sc-r}{a+b-1}\Big) + b\Big(sy + \frac{sc-r}{a+b-1}\Big) + r \\
&= a(sx) + a\Big(\frac{sc-r}{a+b-1}\Big) + b(sy) + b\Big(\frac{sc-r}{a+b-1}\Big) + sc + \frac{sc-r}{a+b-1} \\
&- a\Big(\frac{sc-r}{a+b-1}\Big) + b(sy) - b\Big(\frac{sc-r}{a+b-1}\Big) \\
&= a\Big(sx\frac{sc-r}{a+b-1}\Big) + b\Big(sy + \frac{sc-r}{a+b-1}\Big) + sc + \frac{sc-r-asc+ar-bsc+br}{a+b-1} \\
&=: af(x) + bf(y) + sc - \frac{sc(a+b-1) - r(a+b-1)}{a+b-1} \\
&= af(x) + bf(y) + sc - (sc+r)\Big(\frac{a+b-1}{a+b-1}\Big) \\
&= af(x) + bf(y) + r, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Exemplo 1.8. Considere, agora que $a+b=1$. Seja $t, s \in \mathbb{R}$ tais que $sc = r$. Defina $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $f(x) = sx + t$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Assim,

$$\begin{aligned}
f(ax+by+c) &= s(ax+by+c) + t = asx + at + bsy + bt + r \\
&= af(x) + bf(y) + r, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Logo, f satisfaz (1.18). Neste caso, também exibimos infinitas soluções para (1.18).

No resultado a seguir veremos que, sob a hipótese de continuidade, a família de soluções para a Equação de Jensen é dada pelas funções expostas no Exemplo 1.6.

Teorema 1.6. *Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua satisfazendo a seguinte Equação Funcional Linear:*

$$f(ax+by+c) = af(x) + bf(y) + r, \quad \forall \ \ x, y \in \mathbb{R}.$$

Então, existem números reais s e t tais que

$$f(x) = sx + t, \quad \forall \ \ x \in \mathbb{R},$$

onde $sc = r$ e t qualquer, se $a+b=1$. E $t = \frac{sc-r}{a+b-1}$ e s qualquer, caso contrário.

Demonstração. Primeiramente, provaremos que as seguintes igualdades são verdadeiras:

i) $f(0) = af\Big(\dfrac{-c}{a}\Big) + bf(0) + r;$

ii) $f(u) = af\Big(\dfrac{u-c}{a}\Big) + bf(0) + r, \quad \forall \;\; u \in \mathbb{R};$

iii) $f(v) = af\Big(\dfrac{-c}{a}\Big) + bf\Big(\dfrac{v}{b}\Big) + r, \quad \forall \;\; v \in \mathbb{R};$

iv) $f(u+v) = af\Big(\dfrac{u-c}{a}\Big) + bf\Big(\dfrac{v}{b}\Big) + r, \quad \forall \;\; u, v \in \mathbb{R}.$

A partir destas igualdades acima, concluiremos que

$$f(u+v) + f(0) - f(u) - f(v) = 0. \tag{1.19}$$

e também que

$$f(x) = sx + t, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \tag{1.20}$$

para algumas constantes s e t reais.

Vamos primeiramente mostrar que **i**) é válida. Assim sendo, substituindo $x = \frac{-c}{a}$ e $y = 0$ em (1.18), obtemos,

$$af\Big(\frac{-c}{a}\Big) + bf(0) + r = f\Big(a\Big(\frac{-c}{a}\Big) + b0 + c\Big) = f(-c+c) = f(0).$$

Isto prova **i**).

Agora vejamos como provar **ii**). Para este fim, sejam $x = \frac{u-c}{a}$ e $y = 0$ os valores a serem substituídos em (1.18). Logo,

$$\begin{aligned} af\Big(\frac{u-c}{a}\Big) + bf(0) + r &= f\Big(a\Big(\frac{u-c}{a}\Big) + b0 + c\Big) \\ &= f(u - c + 0 + c) \\ &= f(u), \quad \forall \;\; u \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Assim, **ii**) segue.

A igualdade **iii**) pode ser provada da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} af\Big(\frac{-c}{a}\Big) + bf\Big(\frac{v}{b}\Big) + r &= f\Big(a\Big(\frac{-c}{a}\Big) + b\Big(\frac{v}{b}\Big) + c\Big) \\ &= f(-c + v + c) \\ &= f(v), \quad \forall \;\; v \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

concluindo **iii**).

Com o objetivo de provar **iv)**, substitua $x = \frac{u-c}{a}$ e $y = \frac{v}{b}$ em (1.18) para encontrar

$$\begin{aligned} af\Big(\frac{u-c}{a}\Big) + bf\Big(\frac{v}{b}\Big) + r &= f\Big(a\Big(\frac{u-c}{a}\Big) + b\Big(\frac{v}{b}\Big) + c\Big) \\ &= f(u - c + v + c) \\ &= f(u+v), \quad \forall \;\; u, v \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Agora estamos aptos a provar a igualdade (1.19). Deste modo, pelos itens provado acima, inferimos que,

$$\begin{aligned} f(u+v) + f(0) - f(u) - f(v) &= af\Big(\frac{u-c}{a}\Big) + bf\Big(\frac{v}{b}\Big) + r + af\Big(\frac{-c}{a}\Big) + bf(0) + r \\ &\quad - \Big[af\Big(\frac{u-c}{a}\Big) + bf(0) + r\Big] - \Big[af\Big(\frac{-c}{a}\Big) + bf\Big(\frac{v}{b}\Big) + r\Big] \\ &= 0, \quad \forall \;\; u, v \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Isto nos informa que (1.19) vale.

Por sua vez, para provar (1.20) defina uma função auxiliar $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$g(x) = f(x) - f(0), \quad \forall \;\; x \in \mathbb{R}. \tag{1.21}$$

Vamos mostrar que g satisfaz (1.1). De fato, obtém-se, por (1.19), que

$$\begin{aligned} g(x+y) &:= f(x+y) - f(0) \\ &= -f(0) + f(x) + f(y) - f(0) \\ &= f(x) - f(0) + f(y) - f(0) \\ &=: g(x) + g(y), \quad \forall \;\; x, y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Logo, pelo Teorema 1.1, existe um $s \in \mathbb{R}$ tal que

$$g(x) = sx, \quad \forall \;\; x \in \mathbb{R}.$$

Substituindo esta útima igualdade em (1.21), obtemos

$$sx = f(x) - f(0), \quad \forall \;\; x \in \mathbb{R}.$$

Sendo assim,

$$f(x) = sx + t, \quad \forall \;\; x \in \mathbb{R},$$

onde $t = f(0) \in \mathbb{R}$.

Por fim, note que quando substituímos a solução f encontrada acima em (1.18), chegamos a,

$$s(ax + by + c) + t = a(sx + t) + b(sy + t) + r, \quad \forall \;\; x, y \in \mathbb{R}.$$

Segue que,

$$sc = (a + b - 1)t + r. \tag{1.22}$$

Consideremos dois casos:

1. Assuma que $a+b = 1$. Neste caso, por (1.22), temos que $sc = r$ e t pode ser qualquer número real.

2. Considere que $a + b \neq 1$. Assim sendo, $t = \frac{sc-r}{a+b-1}$ e s pode assumir qualquer valor real. Por conseguinte,
$$f(x) = sx + \frac{sc - r}{a + b - 1}, \quad \forall \;\; x \in \mathbb{R}.$$

□

A seguir exibiremos resultados, no qual podemos abordar a teoria até aqui exposta.

1.1.1 Aplicações da Equação Aditiva de Cauchy

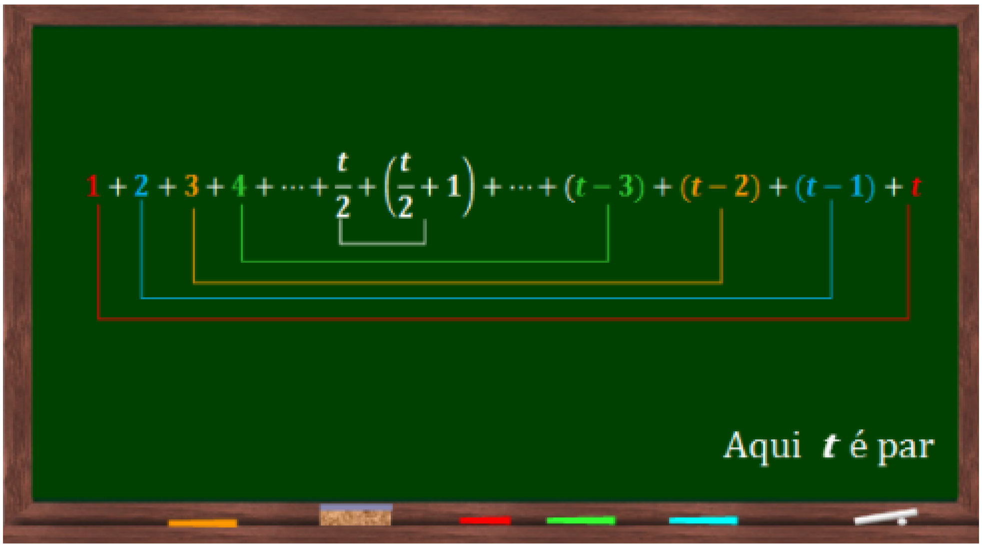
Nesta subseção, vamos apresentar uma maneira de usar os resultados obtidos acima para encontrar uma expressão que determine a soma dos quadrados dos n primeiros números naturais. Mais especificamente, uma simples aplicação da Equação Funcional Aditiva de Cauchy nos leva facilmente a confirmação desta afirmação.

O matemático alemão Carl Friedridrich Gauss nasceu em Braunschweig (1777) e morreu em Gottingen (1985). É considerado por muitos como o maior gênio da história da matemática. Gauss aprendeu sozinho a ler e a somar. Aos 10 anos de idade, surpreendeu seu professor na sala de aula com a tarefa de obter a soma dos números naturais de 1 a 100.

Gauss, ao contrário dos demais alunos, percebeu que era muito fácil efetuar a adição não na ordem em que os números foram apresentados, e sim das extremidades para o meio, adicionando os pares equidistantes dos extremos. Ele contou 50 somas, cada uma igual a 101, daí o resultado: $50 \cdot 101 = 5050$.

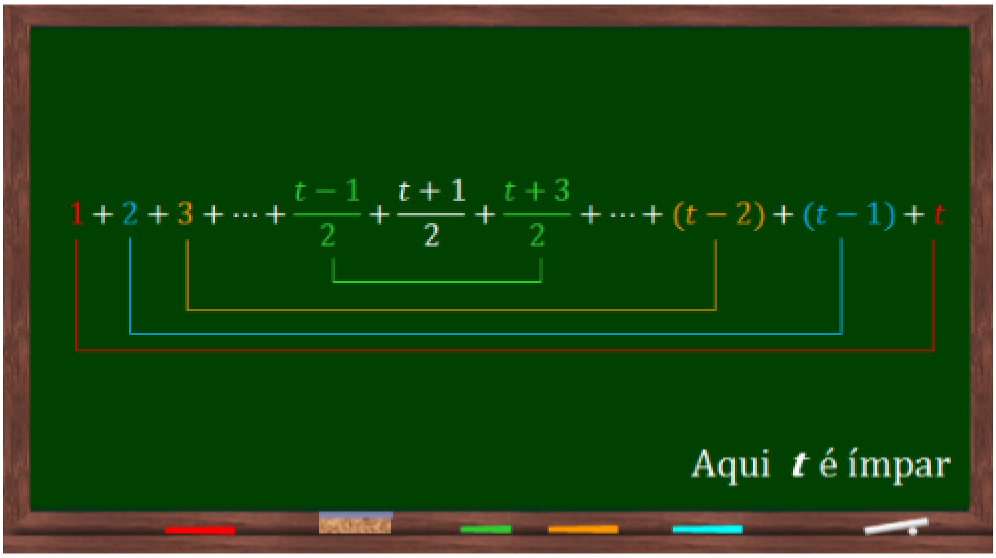
Generalizando o que Gauss fez, considere t um número natural maior do que 1.

Suponha que t seja par; assim podemos agrupar os t números $1, 2, 3, \cdots, t$ de dois em dois, conforme mostra a figura abaixo, e somá-los.



$$
\begin{aligned}
1+2+3+\cdots+t &= 1+2+3+4\cdots+(t-3)+(t-2)+(t-1)+t = \\
= \underbrace{[1+t]+[2+(t-1)]+[3+(t-2)]+[4+(t-3)]+\cdots+\left[\frac{t}{2}+\left(\frac{t}{2}+1\right)\right]}_{\frac{t}{2}\ parcelas} & \\
&= \underbrace{[1+t]+[t+1]+[t+1]+\cdots+\Big[t+1\Big]}_{\frac{t}{2}\ parcelas} \\
&= \frac{t}{2}\cdot(1+t) \\
&= \frac{(1+t)\cdot t}{2}
\end{aligned}
$$

Se t for ímpar, podemos também agrupar os t números $1, 2, 3, \cdots, t$ conforme mostra a figura abaixo e somá-los.



$$\begin{aligned}
1+2+\cdots+t &= 1+2+3+\cdots+(t-2)+(t-1)+t = \\
&= \underbrace{[1+t]+[2+(t-1)]+[3+(t-2)]+\cdots+\left[\frac{t-1}{2}+\frac{t+3}{2}\right]}_{\frac{t-1}{2}\ parcelas}+\frac{t+1}{2} \\
&= \underbrace{[1+t]+[t+1]+[t+1]+\cdots+\Big[t+1\Big]}_{\frac{t-1}{2}\ parcelas}+\frac{t+1}{2} \\
&= \frac{t-1}{2}\cdot(1+t)+\frac{1+t}{2} \\
&= \frac{(1+t)\cdot t}{2}
\end{aligned}$$

E se Gauss fosse desafiado a encontrar a soma dos 100 primeiros quadrados naturais, quais estratégias ele utilizaria?

Iremos utilizar conhecimento de equação funcional para demonstrar uma fórmula da soma dos quadrados dos n primeiros números naturais, isto é, um fórmula para $1^2+2^2+...+n^2$

Demonstração. Primeiramente, defina $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ por

$$f(n)=1^2+2^2+...+n^2, \quad \forall \ n\in\mathbb{N}.$$

Observe que

$$
\begin{aligned}
f(m+n) &= 1^2+2^2+...+m^2+(m+1)^2+(m+2)^2+...+(m+n)^2\\
&= (1^2+2^2+...+m^2)+(1^2+2^2+...+n^2)+2m(1+2+...+n)+m^2n\\
&= f(m)+f(n)+2m\Big[\frac{n(n+1)}{2}\Big]+m^2n\\
&= f(m)+f(n)+m^2n+mn^2+mn,
\end{aligned}
$$

para todo $m,n\in\mathbb{N}$. Portanto,

$$f(m+n)=f(m)+f(n)+m^2n+mn^2+mn,\quad \forall\ \ m,n\in\mathbb{N}.$$

Agora defina uma função auxiliar $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ por

$$g(n)=f(n)-\frac{n^2}{2}-\frac{n^3}{3},\quad \forall\ \ n\in\mathbb{N}.$$

Em seguida, mostraremos que g satisfaz a Equação Aditiva de Cauchy. De fato,

$$
\begin{aligned}
g(m+n) &:= f(m+n)-\frac{(m+n)^2}{2}-\frac{(m+n)^3}{3}\\
&= f(m)+f(n)+m^2n+mn^2+mn-\frac{m^2}{2}-mn-\frac{n^2}{2}-\frac{m^3}{3}-m^2n-m^2n-\frac{n^3}{3}\\
&= f(m)-\frac{m^2}{2}-\frac{m^3}{3}+f(n)-\frac{n^2}{2}-\frac{n^3}{3}\\
&=: g(m)+g(n),
\end{aligned}
$$

para todo $m,n\in\mathbb{N}$. Assim, pela prova do Lema 1.1, existe um número natural a tal que

$$g(n)=an,\quad \forall\ \ n\in\mathbb{N}.$$

Por fim, chegamos a

$$f(n)=an+\frac{n^2}{2}+\frac{n^3}{3},\quad \forall n\in\mathbb{N}. \tag{1.23}$$

Como $f(1)=1$, temos que $a=\frac{1}{6}$. Portanto,

$$f(n)=\frac{1}{6}n+\frac{n^2}{2}+\frac{n^3}{3}=\frac{n+3n^2+2n^3}{6}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},\quad \forall\ \ n\in\mathbb{N}.$$

Consequentemente, inferimos que

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \forall \ n \in \mathbb{N}.$$

$\square$

1.2 Equações Funcionais Exponencial, Logarítmica e Multiplicativa de Cauchy

Nesta seção, trabalharemos com as Equações Funcionais Exponencial, Logarítmica e Multiplicativa de Cauchy. Mais precisamente, nosso objetivo, como na seção anterior, é encontrar uma classe de soluções para estas equações.

Primeiramente, vejamos, então, como definir matematicamente a Equação Exponencial de Cauchy e o que significa solucioná-la.

Definição 1.5. Seja f uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, que associa cada número $x \in \mathbb{R}$. A equação dada em (1.24)

$$f(x+y) = f(x)f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, \tag{1.24}$$

é chamada Equação Funcional Exponencial de Cauchy. E toda função real que satisfaz (1.24) é uma solução desta equação.

Exemplo 1.9. Perceba que a função nula soluciona (1.24). Com efeito,

$$f(x+y) = 0 = 0 \cdot 0 = f(x)f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Deste modo, f soluciona (1.24).

Exemplo 1.10. Considere a aplicação $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Assim,

$$f(x+y) = 1 = 1 \cdot 1 = f(x)f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^+.$$

Logo, f soluciona (1.24).

Exemplo 1.11. Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = e^{ax}$, para todo $x \in \mathbb{R}$ (a aplicação exponencial está bem estabelecida em [5], juntamente com suas propriedades). Dessa forma,

$$f(x+y) = e^{a(x+y)} = e^{ax+ay} = e^{ax}e^{ay} = f(x)f(y), \quad \forall \;\; x, y \in \mathbb{R}.$$

Por conseguinte, f soluciona (1.24).

Vamos provar, a seguir, que, sob a hipótese de continuidade, a família de soluções para a Equação Exponencial de Cauchy é dada pelas funções expostas no Exemplo 1.16.

Teorema 1.7. *Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua satisfazendo a seguinte Equação Funcional Exponencial de Cauchy:*

$$f(x+y) = f(x)f(y), \quad \forall \;\; x, y \in \mathbb{R},$$

então, ou f é identicamente nula, ou existe um número $a \in \mathbb{R}$ tal que,

$$f(x) = e^{ax}, \quad \forall \;\; x \in \mathbb{R}.$$

Demonstração. Consideremos, inicialmente, que exista um valor $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) = 0$. A partir de (1.24), chegamos a

$$f(x) = f[(x - x_0) + x_0] = f(x - x_0)f(x_0) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Assim, f é identicamente nula. A partir de agora, podemos assumir que $f(x) \neq 0, \quad \forall \;\; x \in \mathbb{R}$.

Além disso, tome $x = y = t/2$ em (1.24), para concluir que

$$f(t) = f(t/2 + t/2) = f(t/2)f(t/2) = [f(t/2)]^2 > 0, \quad \forall \;\; t \in \mathbb{R}.$$

Com isso, concluímos que,

$$f(x) > 0, \quad \forall \;\; x \in \mathbb{R}.$$

Por conseguinte, podemos definir uma função auxiliar $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$g(x) = \ln[f(x)], \quad \forall \;\; x \in \mathbb{R}. \tag{1.25}$$

(Aqui a aplicação logarítmica está bem estabelecida, juntamente com suas propriedades). Em seguida, vemos que g é continua (pois ln e f são contínuas). Note também que a função g satisfaz a Equação Aditiva de Cauchy. De fato, por (1.24), chegamos a

$$\begin{aligned} g(x+y) &:= \ln[f(x+y)] = \ln[f(x)f(y)] \\ &= \ln f(x) + \ln f(y) =: g(x) + g(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Logo, g satisfaz a Equação Aditiva de Cauchy e, como já vimos, existe um número a real tal que

$$g(x) = ax, \quad \forall \;\; x \in \mathbb{R}. \tag{1.26}$$

Daí, substituindo este resultado em (1.30), obtemos,

$$ax = \ln f(x), \quad \forall \;\; x \in \mathbb{R},$$

por fim,

$$f(x) = e^{ax}, \quad \forall \;\; x \in \mathbb{R}.$$

□

Trataremos agora da Equação Funcional Logarítmica de Cauchy. Primeiramente, vejamos como definir precisamente esta equação funcional e o que significa solucioná-la.

Definição 1.6. Seja f uma função $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, que associa cada número $x \in \mathbb{R}^*$. A equação dada em (1.27)

$$f(xy) = f(x) + f(y), \quad \forall \;\; x, y \in \mathbb{R}^*, \tag{1.27}$$

é chamada Equação Funcional Logarítmica de Cauchy. E toda função real que satisfaz (1.27) é uma solução desta equação.

Exemplo 1.12. É fácil checar que a função nula soluciona (1.27). Com efeito,

$$f(xy) = 0 = 0 + 0 = f(x) + f(y), \quad \forall \;\; x, y \in \mathbb{R}^*.$$

Deste modo, f soluciona (1.27).

Exemplo 1.13. Considere $a \in \mathbb{R}$ e defina $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ por $f(x) = a \ln |x|$ (ver a definição precisa de ln, juntamente com suas propriedades, em [5]), para todo $x \in \mathbb{R}^*$. Dessa forma,

$$f(xy) = a \ln |xy| = a(\ln |x| + \ln |y|) = a \ln |x| + a \ln |y| = f(x) + f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^*.$$

Por conseguinte, f soluciona (1.27).

O próximo teorema irá expor que, sob a hipótese de continuidade, a família de soluções para a Equação Logarítmica de Cauchy é dada pelas funções expostas no Exemplo 1.13.

Teorema 1.8. *Seja $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua satisfazendo a seguinte Equação Funcional Logarítmica de Cauchy:*

$$f(xy) = f(x) + f(y), \quad \forall \ x, y \in \mathbb{R}^*,$$

Então, existe um número real a tal que

$$f(x) = a \ln |x|, \quad \forall \ x \in \mathbb{R}^*.$$

Demonstração. Note que, por (1.27), concluímos que

$$f(t^2) = f(t \cdot t) = f(t) + f(t) = 2f(t), \quad \forall \ t \in \mathbb{R}^*.$$

Do mesmo modo, novamente por (1.27), chegamos a

$$f(t^2) = f((-t)(-t)) = f(-t) + f(-t) = 2f(-t), \quad \forall \ t \in \mathbb{R}^*,$$

com isso, obtemos,

$$f(t) = f(-t), \quad \forall \ t \in \mathbb{R}^*. \tag{1.28}$$

Agora, suponhamos que $x = e^s$ e $y = e^t$, onde $s, t \in \mathbb{R}$. Sendo assim, $s = \ln x$ e $t = \ln y$, e por (1.27), obtemos

$$f(e^{s+t}) = f(e^s e^t) = f(e^s) + f(e^t), \quad \forall s, t \in \mathbb{R}. \tag{1.29}$$

Defina a função auxiliar $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$g(s) = f(e^s), \quad \forall \ s \in \mathbb{R}. \tag{1.30}$$

Naturalmente, g é continua (pois f e exp são contínuas). Note também que a função g satisfaz a Equação Aditiva de Cauchy. De fato, por (1.29), chegamos a

$$\begin{aligned} g(s+t) &:= f(e^{s+t}) \\ &= f(e^s) + f(e^t) \\ &=: g(s) + g(t), \quad \forall \ \ s, t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Logo, g satisfaz a Equação Aditiva de Cauchy (1.1), existe um número a real tal que

$$g(s) = as, \quad \forall s \in \mathbb{R}. \tag{1.31}$$

Daí, substituindo este resultado em (1.30), obtemos

$$a \ln x = as = f(e^s) = f(x),$$

e consequentemente,

$$f(x) = a \ln x, \quad \forall \ \ x \in \mathbb{R}_+.$$

Por fim, por (1.28), temos que a solução geral de (1.27) é dada por

$$f(x) = a \ln |x|, \quad \forall x \in \mathbb{R}^*. \tag{1.32}$$

□

Agora, trabalharemos com a Equação Funcional Multiplicativa de Cauchy, a qual já foi definida em (1.10). Todavia, consideraremos que as soluções para (1.10) estão definidas em $\mathbb{R}_+$, isto é, procuraremos uma família de soluções para a Equação Multiplicativa de Cauchy

$$f(xy) = f(x)f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}_+. \tag{1.33}$$

onde $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ é uma função contínua.

Exemplo 1.14. Naturalmente a função nula soluciona (1.33). De certo,

$$f(xy) = 0 = 0 \cdot 0 = f(x)f(y), \quad \forall \ \ x, y \in \mathbb{R}_+.$$

Deste modo, a função nula soluciona (1.33).

Exemplo 1.15. Defina $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ por $f(x) = 1$, para todo $x \in \mathbb{R}^+$. Dessa forma, chegamos à equação

$$f(xy) = 1 = 1 \cdot 1 = f(x)f(y), \quad \forall \ x, y \in \mathbb{R}^+.$$

Por isso, f soluciona (1.33).

Exemplo 1.16. Neste exemplo, provamos a existência de infinitas soluções para a Equação Multiplicativa de Cauchy. Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x^a$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Dessa forma,

$$f(xy) = (xy)^a = x^a y^a = f(x)f(y), \quad \forall \ x, y \in \mathbb{R}.$$

Por conseguinte, f soluciona (1.24).

O resultado a seguir, mostra-nos como estabelecer a família de soluções para a Equação Multiplicativa de Cauchy (1.33).

Teorema 1.9. *Seja $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua satisfazendo a seguinte Equação Funcional Multiplicativa de Cauchy:*

$$f(xy) = f(x)f(y), \quad \forall \ x, y \in \mathbb{R}^+,$$

Então, ou f é identicamente nula, ou é constante igual a 1, ou existe um número real não nulo a tal que

$$f(x) = x^a, \quad \forall \ x \in \mathbb{R}^+.$$

Demonstração. Defina uma função auxiliar $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$g(x) = f(e^x), \quad \forall \ x \in \mathbb{R}. \tag{1.34}$$

Primeiramente vamos provar que g satisfaz a Equação Exponencial de Cauchy, ou seja,

$$g(z + w) = g(z)g(w), \quad \forall \ z, w \in \mathbb{R}. \tag{1.35}$$

De fato, se $z, w \in \mathbb{R}$, então existem únicos $x, y \in \mathbb{R}^+$ tais que $\ln x = z$ e $\ln y = w$. Consequentemente, por (1.33), infere-se que

$$\begin{aligned}
g(z+w) &= g(\ln x + \ln y) = g(\ln(xy)) \\
&:= f(e^{\ln(xy)}) = f(xy) \\
&= f(x)f(y) = f(e^z)f(e^w) \\
&=: g(z)g(w).
\end{aligned}$$

Consequentemente, g satisfaz a (1.24). Como f e a função exponencial são contínuas, então g também o é. Logo, pelo Teorema 1.7, concluímos que g é nula, ou

$$g(x) = e^{ax}, \quad \forall \ x \in \mathbb{R}, \tag{1.36}$$

para algum $a \in \mathbb{R}$. Do fato de g ser nula, segue que f é nula. Agora do fato de $g(x) = e^{ax}$ segue que

$$\begin{aligned}
f(x) = f(e^{\ln x}) &=: g(\ln(x)) \\
&= e^{a \ln x} = e^{\ln x^a} \\
&= x^a, \quad \forall \ x \in \mathbb{R}_+.
\end{aligned}$$

ou equivalentemente,

$$f(x) = x^a, \quad \forall \ x \in \mathbb{R}_+,$$

onde $a \in \mathbb{R}$, com $a \neq 0$. E ainda, note que quando $a = 0$, $f = 1$.Isto completa a prova do teorema em questão. □

Realizando a exposição explanaremos aplicações da equação funcional exponencial e logarítmica de Cauchy.

1.2.1 Aplicação da Equação Exponencial de Cauchy

Seja m_0 (em gramas) a massa inicial não nula do elemento radioativo e $m(t)$ a quantidade de massa presente no tempo t. Denote por $f(t)$ a relação entre a massa presente em um tempo t e a massa inicial m_0, tal que

$$m(t) = m_0 f(t). \tag{1.37}$$

A quantidade de substância radioativa no momento $t+h$, como pode ser visto na (figura 1.1), pode ser expresso de duas formas diferentes:

$$m(t+h) = m_0 f(t+h) \ \ e \ \ m(t+h) = m_0 f(t)f(h)$$

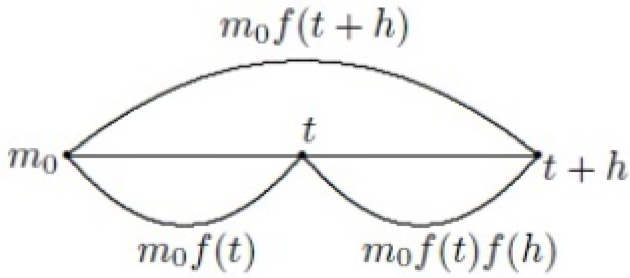


Figura 1.1: Quantidade de substância

Assim, $m_0 f(t+h) = m_0 f(t)f(h)$, para todo $t, h \in \mathbb{R}^+$. Então

$$f(t+h) = f(t) \cdot f(h).$$

Do ponto de vista desta aplicação, f pode ser assumida como contínua. A solução contínua da equação funcional acima é dada por

$$f(t) = m_0 e^{\alpha t},$$

onde $\alpha \in \mathbb{R}$. Assim, temos que

$$m(t) = m_0 f(t) = m_0 e^{\alpha t}.$$

Como a massa $m(t)$ decresce com o tempo, a constante deve ser negativa, fazendo $\alpha = -\wedge$ para $\lambda > 0$, temos

$$m(t) = m_0 e^{-\lambda \cdot t}.$$

A constante λ é chamada de constante de decaimento radioativo.

1.2.2 Aplicação da Equação Funcional Logarítmica de Cauchy

Em um curso de Análise real, a aplicação dada pelo logaritmo neperiano é definida através de uma integral. Através do nosso estudo, estabelecido acima, vamos mostrar que se $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ é dada por

$$g(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt, \quad \forall \ x \in \mathbb{R}^+,$$

então, na verdade, g é a função logaritmo natural.

Teorema 1.10. *É verdade que*

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt, \quad \forall \ x \in \mathbb{R}^+.$$

Demonstração. Inicialmente, vamos definir uma função auxiliar $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ por

$$g(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt, \quad \forall \ x \in \mathbb{R}^+. \tag{1.38}$$

Assim, obtemos, através de uma simples mudança de variável, que

$$\begin{aligned} g(x) + g(y) &:= \int_1^x \frac{1}{t} dt + \int_1^y \frac{1}{t} dt \\ &= \int_1^x \frac{1}{t} dt + \int_x^{xy} \frac{1}{t} dt \\ &= \int_1^{xy} \frac{1}{t} dt \\ &=: g(xy), \end{aligned}$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}^+$. Assim, obtemos

$$g(xy) = g(x) + g(y), \quad \forall \ x, y \in \mathbb{R}^+. \tag{1.39}$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, obtemos que g é contínua. Daí, pela prova do Teorema 1.8, temos que existe $a \in \mathbb{R}$ tal que

$$g(x) = a \ln x, \quad \forall \ x \in \mathbb{R}^+. \tag{1.40}$$

Usando resultados de integração, concluímos que

$$g(e) = \int_1^e \frac{1}{t} dt = 1,$$

para mais detalhes ver [5]. Assim, temos $a = 1$ e, por conseguinte,

$$g(x) = \ln x, \quad \forall \;\; x \in \mathbb{R}^+,$$

e desta forma,

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt, \quad \forall \;\; x \in \mathbb{R}^+.$$

$\square$

Historicamente, Jean D'Alembert precede Augustin-Louis Cauchy. No entanto, no contexto das Equações Funcionais, parece mais natural considerar suas contribuições após Cauchy.
Em seus esforços para compreender os princípios das combinações de forças, matemáticos do século XVIII, como D'Alembert, foram levados à equação que iremos ver a partir de agora. Aqui, encontramos um nível maior de dificuldade na análise em comparação com a equação de Cauchy. A equação é uma reminiscência de uma identidade trigonométrica.

1.3 Equação Funcional de D'Alembert

O Matemático Jean Le Rond D'Alembert é reconhecido por ser um dos pioneiros a entender a importância dos conceitos de funções e de limites para o Cálculo. Além disso, D'Alembert contribuiu no estudo sobre conservação de energia cinética, o qual está relacionado ao Princípio de D'Alembert na Mecânica Clássica. É importante ressaltar que este matemático também se mostrou interessado em trabalhar com Hidrodinâmica, Mecânica de Corpos Rígidos, e com o Problema de Três-corpos em Astronomia (para mais detalhes ver [7]).

Nesta seção, do mesmo modo que nas anteriores, procuraremos por uma classe de soluções que representa todas as soluções possíveis (sob a hipótese de continuidade) para a Equação de D'Alembert.

Permita-nos definir qual equação funcional representa matematicamente a Equação de D'Alembert.

Definição 1.7. Seja f uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, que associa cada número $x \in \mathbb{R}$ A equação dada em (1.41)

$$f(x + y) + f(x - y) = 2f(x)f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{1.41}$$

é chamada Equação Funcional de D'Alembert. E toda função real que satisfaz (1.41) é uma solução desta equação.

Exemplo 1.17. A aplicação identicamente nula é solução da Equação de D'Alembert (1.41), pois

$$f(x+y)+f(x-y)=0+0=0=2f(x)f(y), \quad \forall \ x,y\in\mathbb{R}.$$

Exemplo 1.18. Seja $a\in\mathbb{R}$. Observe que a função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, dada por

$$f(x)=\cos(ax), \quad \forall \ x\in\mathbb{R},$$

satisfaz a equação (1.41). Certamente, haja visto que,

$$\begin{aligned} f(x+y)+f(x-y) &= \cos(a(x+y))+\cos(a(x-y)) \\ &= \cos(ax)\cos(ay)-\operatorname{sen}(ax)\operatorname{sen}(ay)+\cos(ax)\cos(ay)+\operatorname{sen}(ax)\operatorname{sen}(ay) \\ &= 2\cos(ax)\cos(ay) \\ &= 2f(x)f(y), \quad \forall \ x,y\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

(Vale salientar que as aplicações seno e cosseno estão precisamente estabelecidas em [5], juntamente com suas propriedades). Portanto, f satisfaz (1.41). Isto comprova que (1.41) tem infinitas soluções.

Exemplo 1.19. Seja $a\in\mathbb{R}$. A função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, dada por

$$f(x)=\cosh(ax), \quad \forall x\in\mathbb{R},$$

satisfaz a equação de D'Alembert. De forma natural,

$$\begin{aligned} f(x+y)+f(x-y) &= \cosh(a(x+y))+\cosh(a(x-y)) \\ &= \cosh(ax)\cosh(ay)+\operatorname{senh}(ax)\operatorname{senh}(ay)+\cosh(ax)\cosh(ay)-\operatorname{senh}(ax)\operatorname{senh}(ay) \\ &= 2\cosh(ax)\cosh(ay) \\ &= 2f(x)f(y), \quad \forall \ x,y\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

Por conseguinte, f satisfaz (1.41).

O resultado a seguir comprova que as únicas possíveis soluções para a Equação Funcional de D'Alembert (1.41) estão dadas nos exemplos mencionados acima.

Teorema 1.11. *Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua satisfazendo a seguinte equação funcional:*

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y), \quad \forall \;\; x, y \in \mathbb{R}.$$

Então, f é identicamente nula, ou existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \cos(ax)$, para todo $x \in \mathbb{R}$, ou existe $b \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \cosh(bx)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Primeiramente, note que, fazendo $x = y = 0$ em (1.41), obtemos $f(0) + f(0) = 2f(0)f(0)$, ou seja, $2f(0) = 2[f(0)]^2$. Assim, chegamos a $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$.

Se $f(0) = 0$, então, assumindo $y = 0$ em (1.41), encontramos

$$f(x+0) + f(x-0) = 2f(0)f(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

o que culmina em $2f(x) = 0$ e portanto, $f(x) = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Agora, suponha que $f(0) = 1$. Daí, fixando $x = 0$, (1.41) se reduz a

$$f(y) + f(-y) = 2f(0)f(y), \quad \forall \;\; y \in \mathbb{R},$$

consequentemente

$$f(y) = f(-y), \quad \forall \;\; y \in \mathbb{R}. \tag{1.42}$$

Em seguida, defina $x = y$ em (1.41) para obter

$$f(2x) + 1 = 2[f(x)]^2, \quad \forall \;\; x \in \mathbb{R},$$

ou equivalentemente, tomando $u = 2x$, temos $\left[f\left(\frac{u}{2}\right)\right]^2 = \frac{f(u)+1}{2}, \quad \forall \;\; u \in \mathbb{R}$, daí,

$$\left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2 = \frac{f(x)+1}{2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1.43}$$

Como f é contínua e $f(0) = 1$, então existe algum $t > 0$ tal que

$$f(x) > 0, \quad \forall \;\; x \in [-t, t].$$

Agora vamos dividir o argumento em dois casos:

Caso 1: considere $0 < f(t) < 1$.

Neste caso, exite algum número $0 < s < \frac{\pi}{2}$ de modo que $f(t) = \cos(s)$. A partir desta afirmação, por indução matemática sobre m, e utilizando a igualdade (1.41), vamos mostrar que

$$f\left(\frac{t}{2^m}\right) = \cos\left(\frac{s}{2^m}\right), \quad \forall \;\; m \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \tag{1.44}$$

A igualdade $m = 0$ já foi estabelecida acima. Suponha que (1.44) seja válida. Assim sendo, por

$$f\left(\frac{t}{2^k}\right) = \cos\left(\frac{s}{2^k}\right) \;\; para \;\; m = k$$

Provemos que para $m = k + 1$, (1.44), também é válido. naturalmente, usando (1.44) tem-se,

$$\begin{aligned}\left[f\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)\right]^2 &= \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{t}{2^m}\right) + 1\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{s}{2^m}\right) + 1\right] \\ &= \cos^2\left(\frac{s}{2^{m+1}}\right),\end{aligned}$$

Considerando raízes quadradas em ambos os lados das igualdades acima, concluímos que

$$f\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right) = \cos\left(\frac{s}{2^{m+1}}\right),$$

como desejado. Isto conclui a prova da igualdade (1.44). Em seguida vamos retornar a (1.41) e fazer a seguinte substituição $x = ny$. Isso nos fornece,

$$f(ny + y) + f(ny - y) = 2f(ny)f(y), \quad \forall \;\; n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, y \in \mathbb{R},$$

e, chegamos a

$$f[(n+1)y] = 2f(y)f(ny) - f[(n-1)y], \quad \forall \;\; n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, y \in \mathbb{R}. \tag{1.45}$$

Agora, estamos interessados em provar, pelo segundo princípio de indução sobre n, que vale a igualdade,

$$f\left(\frac{nt}{2^m}\right) = \cos\left(\frac{ns}{2^m}\right), \quad \forall m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \tag{1.46}$$

Primeiramente, note que para $n = 0$

$$f\left(\frac{0 \cdot t}{2^m}\right) = g(0) = 1 = \cos(0) = \cos\left(\frac{0 \cdot s}{2^m}\right).$$

Agora suponha que (1.46) seja verdade para todo $m \leq n$. Dessa forma, por (1.45), encontramos

$$\begin{aligned}
f\Big(\frac{(n+1)t}{2^m}\Big) &= 2f\Big(\frac{t}{2^m}\Big)f\Big(\frac{nt}{2^m}\Big) - \Big[f\Big(\frac{(n-1)t}{2^m}\Big)\Big] \\
&= 2\cos\Big(\frac{s}{2^m}\Big)\cos\Big(\frac{ns}{2^m}\Big) - \cos\Big[\frac{(n-1)s}{2^m}\Big] \\
&= 2\cos\Big(\frac{s}{2^m}\Big)\cos\Big(\frac{ns}{2^m}\Big) - \Big[\cos\Big(\frac{ns}{2^m}\Big)\cos\Big(\frac{s}{2^m}\Big) + \operatorname{sen}\Big(\frac{ns}{2^m}\Big)\operatorname{sen}\Big(\frac{s}{2^m}\Big)\Big] \\
&= \cos\Big(\frac{ns}{2^m}\Big)\cos\Big(\frac{s}{2^m}\Big) - \operatorname{sen}\Big(\frac{ns}{2^m}\Big)\operatorname{sen}\Big(\frac{s}{2^m}\Big) \\
&= \cos\Big(\frac{(n+1)s}{2^m}\Big).
\end{aligned}$$

Isto completa o processo de indução. Uma vez que ambos s e t são maiores que zero, podemos escrever $s = at$ para algum $a > 0 (a = \frac{s}{t})$. Assim a equação (1.46), torna-se

$$f\Big(\frac{nt}{2^m}\Big) = \cos\Big(a\frac{nt}{2^m}\Big), \quad \forall \ m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \tag{1.47}$$

Usando o fato de que tanto f como cos são funções pares, podemos escrever $f(x) = \cos(ax)$, onde $a > 0$ e $x = \pm n2^{-m}t$, para todo $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. É importante ressaltar que, os números da forma $\pm n2^{-m}$ são chamados racionais diádicos[2]. Além disso, é sabido que o conjunto dos racionais diádicos é denso nos reais (ver [6]). Sendo assim, qualquer número real pode ser escrito como um limite de uma sequência de números racionais diádicos. Usando argumentos análogos aos aplicados no Lema 1.1, chegamos a

$$f(x) = \cos(ax), \quad \forall \ x \in \mathbb{R},$$

onde $a > 0$. Claramente, podemos considerar que $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, pois a função cosseno é par.

Caso 2: Considere que $f(t) \geq 1$.

Pela estrutura do cosseno hiperbólico vê-se que existe algum $s \geq 0$ tal que $f(t) = \cosh s$, já que cosh é uma função crescente em $[0, \infty)$. Daqui em diante, o argumento neste segundo caso é semelhante ao argumento no caso anterior; porém, para comodidade do leitor, decidimos expor a prova.

[2]Em matemática, um racional diádico é um número que pode ser expresso como uma fração cujo denominador é uma potência de dois . Por exemplo, 1/2, 3/2 e 3/8 são racionais diádicos, mas 1/3 não é. Esses números são importantes na ciência da computação porque são os únicos com representações binárias finitas . Os racionais diádicos também têm aplicações em pesos e medidas e em compassos musicais.

Primeiramente vamos provar, por indução sobre m, que

$$f\Big(\frac{t}{2^m}\Big) = \cosh\Big(\frac{s}{2^m}\Big), \quad \forall \ m \in \mathbb{N}\cup\{0\}. \tag{1.48}$$

O caso $m = 0$ foi discutido acima. Suponha que (1.48) seja válida. Logo, por (1.43), e pela identidades das funções hiperbólicas encontramos

$$\begin{aligned}\Big[f\Big(\frac{t}{2^{m+1}}\Big)\Big]^2 &= \Big[f\Big(\frac{\frac{t}{2^m}}{2}\Big)\Big]^2 = \frac{1}{2}\Big[f\Big(\frac{t}{2^m}\Big)+1\Big]\\ &= \frac{1}{2}\Big[\cosh\Big(\frac{s}{2^m}\Big)+1\Big] = \cosh^2\Big(\frac{s}{2^{m+1}}\Big).\end{aligned}$$

Considerando as raízes quadradas de ambos os lados das igualdades acima, chegamos a

$$f\Big(\frac{t}{2^{m+1}}\Big) = \cosh\Big(\frac{s}{2^{m+1}}\Big),$$

como queríamos. Isto conclui a prova de (1.48).

Agora estamos interessados em provar, por indução sobre n, que

$$f\Big(\frac{nt}{2^m}\Big) = \cosh\Big(\frac{ns}{2^m}\Big), \quad \forall n \in \mathbb{N}\cup\{0\}. \tag{1.49}$$

De fato, observe que,

$$f\Big(\frac{0\cdot t}{2^m}\Big) = g(0) = 1 = \cosh(0) = \cosh\Big(\frac{0\cdot s}{2^m}\Big).$$

Agora, suponha que (1.49) é válida para todo $m < n$. Consequentemente, por (1.45), obtemos

$$\begin{aligned}f\Big(\frac{(n+1)t}{2^m}\Big) &= 2f\Big(\frac{t}{2^m}\Big)f\Big(\frac{nt}{2^m}\Big) - \Big[f\Big(\frac{(n-1)t}{2^m}\Big)\Big]\\ &= 2\cosh\Big(\frac{s}{2^m}\Big)\cosh\Big(\frac{ns}{2^m}\Big) - \cosh\Big[\frac{(n-1)s}{2^m}\Big]\\ &= 2\cosh\Big(\frac{s}{2^m}\Big)\cosh\Big(\frac{ns}{2^m}\Big) - \Big[\cosh\Big(\frac{ns}{2^m}\Big)\cosh\Big(\frac{s}{2^m}\Big) - \operatorname{senh}\Big(\frac{ns}{2^m}\Big)\operatorname{senh}\Big(\frac{s}{2^m}\Big)\Big]\\ &= \cosh\Big(\frac{ns}{2^m}\Big)\cosh\Big(\frac{s}{2^m}\Big) + \operatorname{senh}\Big(\frac{ns}{2^m}\Big)\operatorname{senh}\Big(\frac{s}{2^m}\Big)\\ &= \cosh\Big(\frac{(n+1)s}{2^m}\Big),\end{aligned}$$

Concluindo o princípio de indução. Por conseguinte, (1.49) está provada. Após a conclusão desta parte da prova, deduzimos, da mesma forma que fizemos anteriormente, que

$$f(x) = \cosh(bx), \quad \forall \ x \in \mathbb{R}, \tag{1.50}$$

onde $b \geq 0$. Como cosh é uma aplicação par podemos considerar que $b \in \mathbb{R}$.

Note que se $b = 0$, encontramos

$$f(x) = 1, \quad \forall \ \ x \in \mathbb{R}.$$

Por fim, concluímos que as possíveis soluções para a equação (1.41) são:

$$f(x) = 0, \ f(x) = 1, \ f(x) = \cos(ax), \ f(x) = \cosh(bx), \quad \forall \ \ x \in \mathbb{R},$$

onde $a \in \mathbb{R}$ $b \in \mathbb{R}$. □

1.4 Equações Funcionais de Pexider e Vince

Nesta seção, estudaremos duas equações funcionais que procuram como solução mais que uma função real. No caso da Equação Funcional de Pexider, três aplicações são consideradas incógnitas concomitantemente. Já com relação a Equação Funcional de Vince, quatro funções incógnitas são sugestionadas a serem soluções ao mesmo tempo.

Comecemos definindo a Equação Funcional de Pexider.

Definição 1.8. Sejam $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, funções que associam cada número $x \in \mathbb{R}$ aos valores $f(x), g(x), h(x) \in \mathbb{R}$, respectivamente. A equação dada em (1.51)

$$f(x + y) = g(x) + h(y), \quad \forall \ \ x, y \in \mathbb{R}, \tag{1.51}$$

é chamada Equação Funcional de Pexider. E toda função real que satisfaz (1.51) (simultaneamente) são soluções desta equação.

Exemplo 1.20. Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$. Defina as funções $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

i) $f(x) = ax + b + c, \quad \forall \ \ x \in \mathbb{R};$

ii) $g(x) = ax + b, \quad \forall \ \ x \in \mathbb{R};$

iii) $h(x) = ax + c, \quad \forall \ \ x \in \mathbb{R}.$

Assim sendo, encontramos

$$f(x+y) = a(x+y) + b + c = ax + b + ay + c = g(x) + h(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Portanto, f, g, h solucionam (1.51). Observe que este exemplo mostra que a Equação de Pexider tem infinitas soluções.

É importante ressaltar que, se as aplicações g e h coincidem com f então a Equação de Pexider se torna a Equação Aditiva de Cauchy.

Permita-nos demonstrar, sob a hipótese de continuidade, que a classe de soluções para a Equação de Pexider é dada pelas funções expostas no exemplo dado acima.

Teorema 1.12. *Sejam $f, g, h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas satisfazendo a seguinte Equação Funcional de Pexider:*

$$f(x+y) = g(x) + h(y), \quad \forall \ x, y \in \mathbb{R}.$$

Então, as seguintes definições para f, g e h são verificadas:

i) $f(x) = ax + b + c, \quad \forall \ x \in \mathbb{R};$

ii) $g(x) = ax + b, \quad \forall \ x \in \mathbb{R};$

iii) $h(x) = ax + c, \quad \forall \ x \in \mathbb{R}.$

Demonstração. Substitua $y = 0$ em (1.51) e denote $c = h(0)$ para obter

$$f(x) = f(x+0) = g(x) + h(0) = g(x) + c, \quad \forall \ x \in \mathbb{R}.$$

Portanto,

$$g(x) = f(x) - c, \quad \forall \ x \in \mathbb{R}. \tag{1.52}$$

Por outro lado, assumindo $x = 0$ em (1.51) e denotando $b = g(0)$, temos que

$$f(y) = f(0+y) = g(0) + h(y) = b + h(y), \quad \forall \ y \in \mathbb{R}.$$

Deste modo, chegamos a

$$h(y) = f(y) - b, \quad \forall \ y \in \mathbb{R}. \tag{1.53}$$

Então, (1.51) se torna

$$f(x+y) = f(x) + f(y) - b - c, \quad \forall \; x, y \in \mathbb{R}.$$

Agora defina uma função auxiliar $f_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$f_0(z) = f(z) - b - c, \quad \forall \; z \in \mathbb{R}.$$

Veremos, a seguir, que f_0 é solução para (1.1), ou seja,

$$f_0(x+y) = f_0(x) + f_0(y), \quad \forall \; x, y \in \mathbb{R}.$$

Com efeito, por (1.51), inferimos que

$$\begin{aligned} f_0(x+y) &= f(x+y) - b - c = [f(x) + f(y) - b - c] - b - c \\ &= [f(x) - b - c] + [f(y) - b - c] =: f_0(x) + f_0(y), \quad \forall \; x, y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Portanto, f_0 satisfaz, de fato, a Equação Aditiva de Cauchy. Além disso, a continuidade de f implica na continuidade de f_0. Assim sendo, pelo Teorema 1.1, obtemos

$$f_0(z) = az, \quad \forall z \in \mathbb{R}, \tag{1.54}$$

onde $a \in \mathbb{R}$. Por conseguinte, por (1.52), (1.53) e (1.54), as soluções para a Equação de Pexider são:

i) $f(x) = ax + b + c, \quad \forall \; x \in \mathbb{R};$

ii) $g(x) = ax + b, \quad \forall \; x \in \mathbb{R};$

iii) $h(x) = ax + c, \quad \forall \; x \in \mathbb{R}.$

□

Note que o Teorema 1.13 mostra que mesmo com a generalização da Equação de Pexider para a Equação Aditiva de Cauchy, nenhuma aplicação é acrescentada à família dada pelo Teorema 1.1.

A equação funcional abaixo é uma clara generalização da Equação de Pexider.

Definição 1.9. Sejam $f, g, h, k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, funções que associam cada número $x \in \mathbb{R}$ valores $f(x)$,

$g(x)$, $h(x)$, $k(x) \in \mathbb{R}$, respectivamente. A equação dada em (1.55)

$$f(x+y) = g(x)k(y) + h(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{1.55}$$

é chamada Equação Funcional de Vince. E toda função real que satisfaz (1.55) (simultaneamente) são soluções desta equação.

A seguir exibiremos uma série de exemplos que culminará um importante resultado da Teoria, que é o teorema 1.13.

Exemplo 1.21. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Seja $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função qualquer. Defina as funções $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

i) $f(x) = a, \quad \forall \ x \in \mathbb{R};$

ii) $g(x) = b, \quad \forall \ x \in \mathbb{R};$

iii) $h(x) = a - bk(x), \quad \forall \ x \in \mathbb{R}.$

Assim sendo, encontramos

$$g(x)k(y) + h(y) = bk(y) + a - bk(y) = a = f(x+y), \quad \forall \ x, y \in \mathbb{R}.$$

Portanto, f, g, h, k solucionam (1.55). Este exemplo mostra que a Equação de Vince admite infinitas soluções.

Exemplo 1.22. Sejam $a \in \mathbb{R}$. Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função qualquer. Defina as funções $f, h, k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

i) $f(x) = a, \quad \forall \ x \in \mathbb{R};$

ii) $h(x) = a, \quad \forall \ x \in \mathbb{R};$

iii) $k(x) = 0, \quad \forall \ x \in \mathbb{R}.$

Deste modo, percebe-se

$$g(x)k(y) + h(y) = 0 + a = a = f(x+y), \quad \forall \ x, y \in \mathbb{R}.,$$

garantimos assim que f, g, h, k solucionam (1.55).

Exemplo 1.23. Sejam $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, com $c \neq 0$. Defina as funções $f, g, h, k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

i) $f(x) = ax + b, \quad \forall \ x \in \mathbb{R};$

ii) $g(x) = \dfrac{ax + b - d}{c}, \quad \forall \ x \in \mathbb{R};$

iii) $h(x) = ax + d, \quad \forall \ x \in \mathbb{R};$

iv) $k(x) = c, \quad \forall \ x \in \mathbb{R}.$

Dessa forma, percebe-se que

$$g(x)k(y) + h(y) = \frac{ax + b - d}{c}c + ay + d = a(x + y) + b = f(x + y), \quad \forall \ x, y \in \mathbb{R}.$$

Por isso, f, g, h, k satisfazem (1.55).

Exemplo 1.24. Sejam $a, b, c, d, j \in \mathbb{R}$, com $j \neq 0$. Defina as funções $f, g, h, k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

i) $f(x) = ae^{bx} + c, \quad \forall \ x \in \mathbb{R};$

ii) $g(x) = \dfrac{ae^{bx} + c - d}{j}, \quad \forall \ x \in \mathbb{R};$

iii) $h(x) = c + (d - c)e^{bx}, \quad \forall \ x \in \mathbb{R};$

iv) $k(x) = je^{bx}, \quad \forall \ x \in \mathbb{R}.$

Com isso, podemos escrever

$$g(x)k(y) + h(y) = \frac{ae^{bx} + c - d}{j}(je^{by}) + c + (d - c)e^{by} = ae^{b(x+y)} = f(x + y), \quad \forall \ x, y \in \mathbb{R}.$$

Por isso, f, g, h, k satisfazem (1.55).

É importante notar que, se a aplicação k é constante e igual a 1, então a Equação de Vince se torna a Equação de Pexider.

Permita-nos demonstrar, sob a hipótese de continuidade, que a classe de soluções para a Equação de Vince é dada pelas funções expostas no exemplo dado acima.

Teorema 1.13. *Sejam $f, g, h, k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas satisfazendo a seguinte Equação Funcional de Vince:*

$$f(x + y) = g(x)k(y) + h(y), \quad \forall \ x, y \in \mathbb{R}.$$

Então, f, g, h e k são definidas por uma das formas estabelecidas nos Exemplos 1.21*,* 1.22*,* 1.23 *e* 1.24*.*

Demonstração. Primeiramente, substitua $y = 0$ em (1.55) e denote $a = k(0)$ e $b = h(0)$ para obter

$$f(x) = g(x)a + b, \quad \forall \;\; x \in \mathbb{R}. \tag{1.56}$$

Considere que $a = 0$ para encontrar

$$f(x) = b, \quad \forall \;\; x \in \mathbb{R}.$$

Suponha que $k \not\equiv 0$, ou seja, existe $y_0 \in \mathbb{R}$ tal que, $k(y_0) \neq 0$. Daí, por (1.55), inferimos que

$$b = f(x + y_0) = g(x)k(y_0) + h(y_0), \quad \forall \;\; x \in \mathbb{R}.$$

Portanto,

$$g(x) = \frac{b - c}{k(y_0)}, \quad \forall \;\; x \in \mathbb{R},$$

onde $c = h(y_0)$. Assim sendo, novamente por (1.55), tem-se

$$b = f(x + y) = dk(y) + h(y), \quad \forall \;\; y \in \mathbb{R},$$

onde $d = \frac{b-c}{k(y_0)}$. Logo,

$$h(y) = b - dk(y), \quad \forall \;\; y \in \mathbb{R}.$$

Resumindo, chegamos a

$$f(x) = b, \, h(x) = b - dk(x), \, g(x) = d, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

onde k é uma função qualquer não nula, conforme o exemplo (1.21).

Suponha agora $k \equiv 0$, por (1.55), obtemos

$$h(y) = f(x + y) = b, \quad \forall \;\; x, y \in \mathbb{R}.$$

Daí, chegamos a,

$$f(x) = h(x) = b,\ k(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

e g é uma função qualquer, de acordo com o exemplo (1.22).

Assuma que $a \neq 0$. Portanto, por (1.56), temos que

$$g(x) = \frac{f(x) - b}{a}, \quad \forall\ \ x \in \mathbb{R}. \tag{1.57}$$

Sejam $\phi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por

$$\phi(y) = \frac{k(y)}{a},\ \psi(y) = h(y) - \frac{bk(y)}{a} \quad \forall\ \ y \in \mathbb{R}. \tag{1.58}$$

Assim, podemos reescrever (1.55) como

$$f(x+y) = \phi(y)f(x) + \psi(y), \quad \forall\ \ x, y \in \mathbb{R}. \tag{1.59}$$

Por outro lado, como $k(0) = a$ e $h(0) = b$, temos que,

$$\phi(0) = \frac{k(0)}{a} = \frac{a}{a} = 1,$$

e também,

$$\psi(0) = h(0) - \frac{bk(0)}{a} = b - \frac{ba}{a} = 0.$$

Agora, defina uma função auxiliar $\chi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$\chi(y) = f(y) - f(0), \quad \forall\ \ y \in \mathbb{R}. \tag{1.60}$$

Afirmamos que

$$\chi(x+y) = \phi(y)\chi(x) + \chi(y), \quad \forall\ \ x, y \in \mathbb{R}. \tag{1.61}$$

Com efeito, substitua $x = 0$ em (1.59) para obter

$$f(y) = \phi(y)f(0) + \psi(y), \quad \forall\ \ y \in \mathbb{R}. \tag{1.62}$$

Por conseguinte, novamente por (1.59), chegamos a

$$f(x+y) - f(y) = \phi(y)f(x) + \psi(y) - [\phi(y)f(0) + \psi(y)], \quad \forall \ x, y \in \mathbb{R},$$

consequentemente,

$$f(x+y) = \phi(y)[f(x) - f(0)] + f(y), \quad \forall \ x, y \in \mathbb{R}. \tag{1.63}$$

Por sua vez, por (1.63)

$$\begin{aligned} \chi(x+y) &:= f(x+y) - f(0) \\ &= \phi(y)[f(x) - f(0)] + f(y) - f(0) \\ &=: \phi(y)\chi(x) + \chi(y), \ \forall \ x, y \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

contudo, encontramos

$$\phi(y)\chi(x) + \chi(y) = \chi(x+y) = \chi(y+x) = \phi(x)\chi(y) + \chi(x), \quad \forall \ x, y \in \mathbb{R},$$

daí obtemos

$$[\phi(y) - 1]\chi(x) = [\phi(x) - 1]\chi(y), \ \forall \ x, y \in \mathbb{R}. \tag{1.64}$$

A ideia agora é resolver a equação funcional acima.

Primeiramente, considere que

$$\phi(y) = 1, \quad \forall \ y \in \mathbb{R}. \tag{1.65}$$

Neste caso por (1.61) , vemos que χ satisfaz a Equação Aditiva de Cauchy, ou seja,

$$\chi(x+y) = \chi(x) + \chi(y), \quad \forall \ x, y \in \mathbb{R}.$$

Assim, pelo Teorema 1.1, existe $d \in \mathbb{R}$ tal que

$$\chi(x) = dx, \quad \forall \ x \in \mathbb{R},$$

com isso, determinamos que

$$dx = \chi(x) = f(x) - f(0) \quad \forall \ x \in \mathbb{R},$$

isto é, $f(x) = dx + f(0), \quad \forall x \in \mathbb{R}$, e portanto,

$$f(x) = dx + c, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

onde $c = f(0)$. Substituindo f em (1.59), e utilizando o fato de que $\phi \equiv 1$, podemos concluir que

$$d(x+y) + c = dx + c + \psi(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Portanto,

$$\psi(y) = dy, \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

A partir destas soluções, podemos obter as expressões para as funções originais desconhecidas:

$$f(x) = dx + c,\ g(x) = \frac{dx + c - b}{a},\ h(x) = dx + b,\ k(x) = a, \quad \forall\ \ x \in \mathbb{R},$$

de acordo com o exemplo (1.23).

Por fim, considere que $\phi(y_0) \neq 1$ para algum $y_0 \in \mathbb{R}$. Substitua $y = y_0$ em (1.64) e denote

$$\frac{\chi(y_0)}{\phi(y_0) - 1} = s \tag{1.66}$$

para obter

$$\chi(x) = s[\phi(x) - 1], \quad \forall\ \ x \in \mathbb{R}. \tag{1.67}$$

Agora, supondo que f não é uma função constante, inferimos que χ não é uma função nula. Com efeito, suponha $\chi \equiv 0$, isto é, $\chi(y) = 0,\ \forall\ \ y \in \mathbb{R}$. Com isso, teríamos,

$$\chi(y) = f(y) - f(0) = 0, \quad \forall\ \ y \in \mathbb{R},$$

ou equivalentemente,

$$f(y) = f(0), \quad \forall\ \ y \in \mathbb{R},$$

isto é uma contradição, pois estamos considerando que f não é constante. Daí segue que existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\chi(x_0) \neq 0$. Por (1.67), assumindo $x = x_0$ fixo, obtemos,

$$0 \neq \chi(x_0) = s[\phi(x_0) - 1].$$

Assim, concluímos que $s \neq 0$. Por outro lado, por (1.64) e (1.64), concluímos que,

$$s[\phi(x+y)-1] = \chi(x+y) = \phi(y)\chi(x)+\chi(y) = s\phi(y)[\phi(x)-1]+s[\phi(y)-1], \quad \forall \;\; x,y \in \mathbb{R}.$$

Como $s \neq 0$, podemos cancelar s para encontrar

$$\phi(x+y)-1 = \phi(y)[\phi(x)-1]+\phi(y)-1, \quad \forall \;\; x,y \in \mathbb{R}.$$

Por isso, chegamos a

$$\phi(x+y) = \phi(x)\phi(y), \quad \forall \;\; x,y \in \mathbb{R}. \tag{1.68}$$

Assim, como ϕ é contínua por k ser contínua, conforme (1.58), temos que ϕ satisfaz a Equação Exponencial de Cauchy. Portanto, pelo Teorema 1.7, existe uma constante $t \in R$ tal que

$$\phi(y) = e^{ty}, \quad \forall \;\; y \in \mathbb{R}, \tag{1.69}$$

com isso, podemos obter

$$\begin{aligned} f(x) &= \chi(x)+f(0) = s[\phi(x)-1]+f(0) \\ &= s[e^{tx}-1]+f(0) = st^{x}-[s-f(0)] \\ &= se^{tx}+c, \quad \forall \;\; x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

onde $c = f(0)-s$. Por conseguinte, chegamos a

$$\begin{aligned} \psi(y) &= f(x+y)-\phi(y)f(x) = se^{t(x+y)}+c-e^{ty}(se^{tx}+c) \\ &= c-e^{ty}c = c(1-e^{ty}), \quad \forall \;\; x,y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Em seguida, vemos que ψ pode ser escrita como

$$\psi(y) = c(1-e^{ty}), \quad \forall \;\; y \in \mathbb{R}. \tag{1.70}$$

A aplicação k pode ser encontrada através da igualdade abaixo:

$$k(y) = a\phi(y) = ae^{ty}, \quad \forall \;\; y \in \mathbb{R}.$$

Note que g é dada por:

$$g(x) = \frac{f(x)-b}{a} = \frac{se^{tx}+c-b}{a}, \quad \forall \;\; x \in \mathbb{R}.$$

E finalmente, h satisfaz

$$\begin{aligned} h(y) &= \psi(y) + \frac{bk(y)}{a} = c(1-e^{ty}) + \frac{b(ae^{ty})}{a} \\ &= c - ce^{ty} + be^{ty} = c + (b-c)e^{ty}, \quad \forall \ y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Podemos finalmente escrever as soluções em termos de nossas funções originais da seguinte maneira:

$$f(x) = se^{tx} + c, \; g(x) = \frac{se^{tx} + c - b}{a}, \; h(x) = c + (b-c)e^{tx}, \; k(x) = ae^{tx}, \quad \forall \ x \in \mathbb{R},$$

de a cordo com o exemplo (1.24).
E assim concluímos a demonstração. □

1.5 Inequação Funcional de Cauchy

Para finalizar este capítulo, mostraremos que também é possível indagar se uma inequação funcional possui solução. Mais claramente, nesta seção, provaremos, mesmo sem considerar a hipótese de continuidade, que um sistema de inequações funcionais tem solução única. Para mais detalhes, ver o principal resultado desta seção.

Permita-nos definir, precisamente, o que significa uma função real ser solução para a Inequação de Cauchy.

Definição 1.10. Considere f uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, que associa cada número $x \in \mathbb{R}$ o valor $f(x) \in \mathbb{R}$, a inequação dada em (1.71)

$$f(x+y) \leq f(x) + f(y), \quad \forall \ x, y \in \mathbb{R}, \tag{1.71}$$

é chamada Inequação Funcional de Cauchy. E toda função que satisfaz (1.71) é uma solução desta inequação.

Exemplo 1.25. Seja $a \in \mathbb{R}$. Defina a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$f(x) = ax, \quad \forall \ x \in \mathbb{R}.$$

Assim sendo, encontramos

$$f(x+y) = a(x+y) = ax + ay \leq f(x) + f(y), \quad \forall \ x, y \in \mathbb{R}.$$

Portanto, f soluciona (1.71). Observe que este exemplo mostra que a Inequação de Cauchy tem infinitas soluções.

Na verdade, é importante ressaltar que, se uma função f é solução da Equação Aditiva de Cauchy (1.1) então esta também satisfaz (1.71).

Exemplo 1.26. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e $b \geq 0$. Defina a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$f(x) = ax + b, \quad \forall \ x \in \mathbb{R}.$$

Deste modo, chegamos a

$$f(x+y) = a(x+y) + b \leq ax + b + ay + b \leq f(x) + f(y), \quad \forall \ x, y \in \mathbb{R}.$$

Com isso, f soluciona (1.71). Isto nos mostra que a família de soluções para a Inequação de Cauchy (1.71) é estritamente maior que a classe de soluções para a Equação Aditiva de Cauchy (1.1).

Abaixo definiremos uma outra inequação funcional que, em conjunto com a Inequação de Cauchy, terá como solução a aplicação identidade.

Definição 1.11. Dizemos que uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, que associa cada número $x \in \mathbb{R}$ ao valor $f(x) \in \mathbb{R}$, é uma solução da inequação funcional

$$f(x) \leq x, \quad \forall \ x \in \mathbb{R}. \tag{1.72}$$

se esta satisfaz (1.72).

Exemplo 1.27. Seja $b \in \mathbb{R}^-$. Defina a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$f(x) = x + b, \quad \forall \ x \in \mathbb{R}.$$

É fácil ver que

$$f(x) = x + b \leq x, \quad \forall \ x \in \mathbb{R},$$

logo, f satisfaz (1.72). Note que (1.72) tem infinitas soluções pela escolha de b.

Exemplo 1.28. Seja $I : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função identidade, isto é,

$$I(x) = x, \quad \forall \ x \in \mathbb{R}.$$

Podemos checar que

$$I(x+y) = x + y \leq I(x) + I(y), \quad \forall \ x, y \in \mathbb{R}.$$

Além disso,

$$I(x) = x \leq x, \quad \forall \ x \in \mathbb{R}.$$

Isto nos informa que I satisfaz (1.71) e (1.72).

O teorema a seguir mostra que a única solução para o sistema composto pelas inequações funcionais (1.71) e (1.72) é, de fato, a identidade.

Teorema 1.14. *Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função satisfazendo as seguintes inequações funcionais:*

$$f(x+y) \leq f(x) + f(y) \ \text{ e } \ f(x) \leq x, \quad \forall \ x, y \in \mathbb{R}.$$

Então, f é a aplicação identidade, isto é, $f(x) = x$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Assuma $x = y = 0$ em (1.71) para obter

$$f(0) = f(0+0) \leq f(0) + f(0) = 2f(0).$$

Portanto, podemos inferir $f(0) \geq 0$. Por outro lado, também temos $f(0) \leq 0$ (por (1.72)). Segue que $f(0) = 0$. Em seguida, escolha $y = -x$ em (1.71) para chegar a

$$0 = f(0) = f(x + (-x)) \leq f(x) + f(-x), \quad \forall \ x \in \mathbb{R},$$

e portanto, concluímos que

$$f(x) \geq -f(-x), \quad \forall \ x \in \mathbb{R}.$$

Por sua vez, usando (1.72), temos que

$$f(x) \geq -f(-x) \geq -(-x) = x, \quad \forall \ x \in \mathbb{R}.$$

Por fim, novamente por (1.72), inferimos que $f(x) = x$, para todo $x \in \mathbb{R}$. $\square$

Capítulo 2

Equações Funcionais Envolvendo Funções com Duas Variáveis Tipo II

Neste capítulo iremos investigar soluções para equações funcionais que tenham como incógnitas funções que estejam definidas no $\mathbb{R}^2$. Primeiramente, faremos uma extensão da equação de Cauchy, agora com coeficientes em duas dimensões. Depois disto, veremos a equação de Euler que também são funções com coeficientes bidimensionais por considerando uma família de equações funcionais associadas à propriedade de homogeneidade. Por fim, vamos ver algumas aplicações usando resultados destas equações.

Permita-nos enfatizar que todo este capítulo baseia-se nas referências [1], [2], [3] e [7].

2.1 Equações Funcionais de Cauchy e de Euler no caso bidimensional

Nesta seção, consideraremos equações funcionais que tenham como incógnitas funções que estejam definidas em duas variáveis reais, sendo que, a extensão para o caso em que tais incógnitas assumam valores em domínios com mais de duas variáveis segue de maneira natural à exposta a seguir.

Permita-nos começarmos nossos estudos com as Equações Aditivas de Cauchy para Duas Variáveis. Estas, por sua vez, tem soluções que satisfazem (1.1) quando consideramos que uma de suas variáveis é assumida estar fixa. Mais precisamente, temos a seguinte definição.

Definição 2.1. Seja f uma função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, que associa cada par $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ o valor $f(x, y) \in \mathbb{R}$. As equações dadas em (2.1)

$$f(x_1 + x_2, y) = f(x_1, y) + f(x_2, y) \quad \text{e} \quad f(x, y_1 + y_2) = f(x, y_1) + (x, y_2), \tag{2.1}$$

para todo $x, y, x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$, são chamadas Equações Funcionais Aditivas de Cauchy para Duas Variáveis. E toda função que satisfaz (2.1) é uma solução para tais equações funcionais.

Exemplo 2.1. Seja $a \in \mathbb{R}$. Defina a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ por

$$f(x, y) = axy, \quad \forall \;\; x, y \in \mathbb{R}.$$

Assim, obtemos

$$f(x_1 + x_2, y) = a(x_1 + x_2)y = ax_1y + ax_2y = f(x_1, y) + f(x_2, y), \quad \forall \;\; x_1, x_2, y \in \mathbb{R},$$

e também,

$$f(x, y_1 + y_2) = ax(y_1 + y_2) = axy_1 + axy_2 = f(x, y_1) + f(x, y_2), \quad \forall \;\; x, y_1, y_2 \in \mathbb{R}.$$

Portanto, f satisfaz (2.1). Por conseguinte, (2.1) tem infinitas soluções pela escolha de a.

Na verdade, quando supomos que a solução do sistema (2.1) é continua em duas variáveis, a aplicação dada no exemplo anterior representa toda a família de soluções para este mesmo sistema. Mais especificamente, enunciamos o seguinte teorema.

Teorema 2.1. *Seja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, em cada variável, satisfazendo as seguintes equações funcionais:*

$$f(x_1 + x_2, y) = f(x_1, y) + f(x_2, y) \quad e \quad f(x, y_1 + y_2) = f(x, y_1) + f(x, y_2),$$

para todo $x, y, x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$. Então, existe $a_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = a_0xy$, para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Inicialmente, fixe $y_0 \in \mathbb{R}$ e defina uma função auxiliar $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ por

$$g(x) = f(x, y_0), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2.2}$$

Note que, a função g satisfaz (1.1). De fato, por 2.1, inferimos que

$$g(x + y) := f(x + y, y_0) = f(x, y_0) + f(y, y_0) =: g(x) + g(y), \quad \forall \;\; x, y \in \mathbb{R}.$$

Como f é contínua na primeira variável g também o é, assim, pelo Teorema 1.1, existe um $a(y_0) \in \mathbb{R}$, tal que

$$g(x) = a(y_0)x, \quad \forall \ x \in \mathbb{R}.$$

Substituindo o resultado acima em (2.2), obtemos

$$f(x, y_0) = a(y_0)x, \quad \forall \ x, y_0 \in \mathbb{R}. \tag{2.3}$$

Por (2.1), chegamos a

$$a(y_1 + y_2)x = f(x, y_1 + y_2) = f(x, y_1) + f(x, y_2) = a(y_1)x + a(y_2)x, \quad \forall \ x, y_1, y_2 \in \mathbb{R}.$$

Portanto,

$$a(y_1 + y_2)x = a(y_1)x + a(y_2)x, \quad \forall \ x, y_1, y_2 \in \mathbb{R}.$$

Assuma que $x = 1$ na igualdade acima. Com isso, a satisfaz (1.1). Como f é contínua na segunda variável, segue que a é uma função contínua. Assim, podemos concluir que existe algum número real a_0 tal que

$$a(y) = a_0 y, \quad \forall \ y \in \mathbb{R}.$$

Substituindo o resultado acima na igualdade (2.3), concluímos que,

$$f(x, y) = a_0 xy, \quad \forall \ x, y \in \mathbb{R}.$$

Isto completa a prova do teorema em questão. $\square$

Agora direcionaremos para outro tipo especial de equação funcional difundida pelo célebre Euler.

Leonhard Euler nasceu em 1707, em Basel, na Suíça. Este Matemático trabalhou com o Cálculo Diferencial de Leibniz juntamente com o Método de Newton em Análise Matemática, melhorou a ideia de função e introduziu as funções transcendentais beta e gama. Euler também esteve presente nas origens do Cálculo de Variações e foi um dos pioneiros em Topologia (para mais detalhes ver [7]).

A seguir, continuaremos a nossa busca por soluções para equações funcionais, envolvendo funções de duas variáveis, considerando uma propriedade particular de homogeneidade. Mais precisamente, temos a seguinte definição.

Definição 2.2. Seja $k \in \mathbb{R}$. Dizemos que uma função $f : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$, que associa cada par $(x, y) \in \mathbb{R}^2_+$ o valor $f(x, y) \in \mathbb{R}$, é uma solução para a equação funcional

$$f(tx, ty) = t^k f(x, y), \quad \forall \ x, y, t \in \mathbb{R}_+. \tag{2.4}$$

se esta satisfaz (2.4). Neste caso, f é dita ser uma função homogênea de grau k. A equação dada em (2.4) é chamada Equação Funcional de Euler.

Exemplo 2.2. A função $f : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \frac{x + y}{2}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}_+,$$

é homogênea de grau um. De fato,

$$f(tx, ty) = \frac{tx + ty}{2} = \frac{t(x + y)}{2} = t^1 f(x, y), \quad \forall \ x, y, t \in \mathbb{R}_+.$$

Portanto, f satisfaz (2.4), com $k = 1$.

Exemplo 2.3. A função $f : (\mathbb{R}_+)^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \frac{x}{y}, \quad \forall \ x, y \in \mathbb{R}_+,$$

é homogênea de grau zero. De fato,

$$f(tx, ty) = \frac{tx}{ty} = t^0 \frac{x}{y} = t^0 f(x, y), \quad \forall \ x, y, t \in \mathbb{R}_+.$$

Logo, f satisfaz (2.4), com $k = 0$. Já a função $g : (\mathbb{R}_+)^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x, y) = x^2 + 2y^2 + 7xy, \quad \forall \ x, y \in \mathbb{R}_+,$$

é homogênea de grau dois. Com efeito,

$$\begin{aligned} g(tx, ty) &= (tx)^2 + 2(ty)^2 + 7(tx)(ty) = t^2x^2 + 2t^2y^2 + 7t^2xy \\ &= t^2(x^2 + 2y^2 + 7xy) = t^2 g(x, y), \quad \forall \ x, y, t \in \mathbb{R}_+. \end{aligned}$$

Portanto, g satisfaz (2.4), com $k = 2$.

Exemplo 2.4. Sejam $k \in \mathbb{R}$ e $f : (\mathbb{R}_+)^2 \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ uma função tal que

$$f(tx, ty) = h(t)f(x, y), \quad \forall \ \ x, y, t \in \mathbb{R}_+,$$

onde $h : R_+ \to \mathbb{R}$ é contínua. Daí, temos que h satisfaz (1.10). Com efeito,

$$\begin{aligned} h(ts) &= \frac{f((ts)x, (ts)y)}{f(x, y)} \\ &= \frac{f(t(sx), t(sy))}{f(sx, sy)} \frac{f(sx, sy)}{f(x, y)} \\ &= h(t)h(s), \quad \forall \ \ t, s \in \mathbb{R}_+. \end{aligned}$$

Como h é contínua, então, pelo Teorema 1.9, temos que, h é constante igual a 1 ou existe $k \in \mathbb{R}$ tal que

$$h(t) = t^k, \quad \forall \ \ t \in \mathbb{R}_+.$$

(Aqui h nula implicaria na nulidade de $f > 0$). Portanto, ou

$$f(tx, ty) = f(x, y) = t^0 f(x, y), \quad \forall \ \ x, y, t \in \mathbb{R}_+,$$

ou então

$$f(tx, ty) = t^k f(x, y), \quad \forall \ \ x, y, t \in \mathbb{R}_+,$$

De qualquer forma, f satisfaz (2.4).

Veremos como podemos encontrar a classe de todas as funções que satisfaçam a Equação de Euler (2.4) para uma determinada escolha de k.

Teorema 2.2. *Sejam $k \in \mathbb{R}$ e $f : (\mathbb{R}_+)^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função. Então, f é solução de* (2.4) *se, e somente se, existe uma aplicação $g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que*

$$f(x, y) = x^k g(x^{-1}y), \quad \forall \ \ x, y \in \mathbb{R}_+.$$

Demonstração. Sejam $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ e $f : (\mathbb{R}_+)^2 \to \mathbb{R}$ funções tais que

$$f(x, y) = x^k g(x^{-1}y), \quad \forall \ \ x, y \in \mathbb{R}_+. \tag{2.5}$$

Afirmamos que f satisfaz (2.4). De fato,

$$\begin{aligned} f(tx,ty) &= (tx)^k g((tx)^{-1}(ty)) = t^k x^k g((t^{-1}t)(x^{-1}y)) \\ &= t^k x^k g(x^{-1}y) = t^k f(x,y), \quad \forall \ \ x,y,t \in \mathbb{R}_+, \end{aligned}$$

consequentemente, f soluciona (2.4). Isto significa que f é uma função homogênea de grau k.

Reciprocamente, considere que $f : (\mathbb{R}_+)^2 \to \mathbb{R}$ é uma função homogênea de grau k, ou seja,

$$f(tx,ty) = t^k f(x,y), \quad \forall \ \ x,y,t \in \mathbb{R}_+.$$

Sendo assim

$$(x^{-1})^k f(x,y) = f(x^{-1}x, x^{-1}y) = f(1, x^{-1}y), \quad \forall \ \ x,y \in \mathbb{R}_+.$$

Dessa forma, podemos escrever

$$f(x,y) = x^k f(1, x^{-1}y), \quad \forall \ \ x,y \in \mathbb{R}_+. \tag{2.6}$$

Defina $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ por,

$$g(z) = f(1,z), \quad \forall \ \ z \in \mathbb{R}_+. \tag{2.7}$$

Logo, por (2.6) e (2.7), obtemos

$$f(x,y) = x^k g(x^{-1} \cdot y), \quad \forall \ \ x,y \in \mathbb{R}_+.$$

□

Veremos que alguns fenômenos sociais e naturais podem ser justificados por estas equações funcionais.

2.1.1 Aplicações das Equações Funcionais Aditivas de Cauchy em Duas Variáveis Tipo II

Nesta subseção, faremos algumas aplicações utilizando Equações Funcionais Aditivas de Cauchy. Mais especificamente, vamos obter a fórmula para a área do retângulo e as fórmulas para calcular juros simples e compostos usando tais equações.

Aplicação 1

Em 1791, Adrien-Marie Legendre obteve a fórmula para a área do retângulo usando a equação funcional aditiva de Cauchy. Considere um retângulo cujo comprimento da base é b e o comprimento da altura é a.

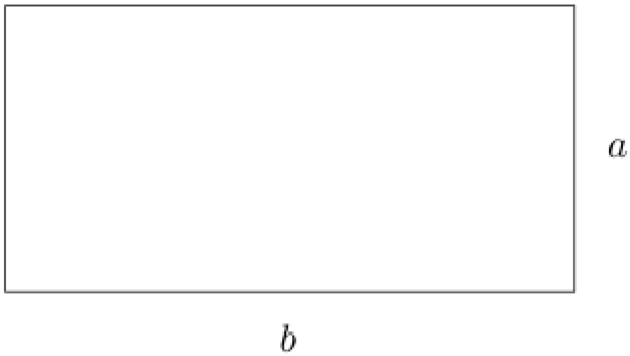


Figura 2.1: Retângulo

É evidente que a área deste retângulo dependerá da altura e da base. Assim, a área A, do retângulo é uma função de a e b, Isto é,

$$A = f(a, b); f : (\mathbb{R}_{+}^{*})^2 \to \mathbb{R}$$

Dividiremos este retângulo em dois retângulos menores, traçando uma linha paralela à base, de modo que $a = a_1 + a_2$ (veja figura 2.2).

Então, a área original A é a soma das duas áreas A_1 e A_2.

$$A = A_1 + A_2,$$

isto é,

$$f(a, b) = f(a_1, b) + f(a_2, b).$$

Como $a = a_1 + a_2$, temos que

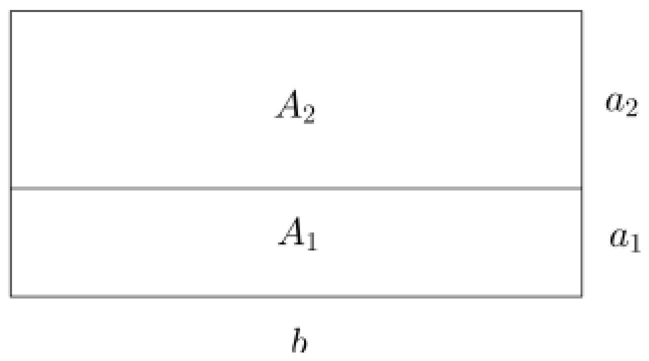


Figura 2.2: Área do retângulo

$$f(a_1 + a_2, b) = f(a_1, b) + f(a_2, b). \tag{2.8}$$

Note que (2.8) é válida para todos $a_1, a_2, b \in [0, \infty)$. Da mesma forma, dividindo o retângulo em dois subretângulos por uma linha paralela a altura, temos

$$f(a, b_1 + b_2) = f(a, b_1) + f(a, b_2). \tag{2.9}$$

para todos $b_1, b_2, a \in [0, \infty)$. Como a área é positiva, temos $f(a, b) > 0$, (É natural supor que $f(a, b)$ é contínua em cada variável). Portanto, pelo Teorema 2.1 e tomando $k = 1$, podemos escrever

$$f(a, b) = a \cdot b, \quad \forall \;\; a, b \in [0, \infty).$$

Aplicação 2 (Juros Simples e Juros Composto)

Agora iremos obter a fórmula de juros simples e juros compostos usando equação funcional de Cauchy. Para iniciarmos, veremos algumas definições de matemática financeira que serviram para nortear estas aplicações.

Definição 2.3. *(*Juro*). "**Juro** é a remuneração que ou se recebe da instituição ou a ela se paga em relação ao capital"(BARROSO et al., 2010).*

Definição 2.4. *(*Capital*). **Capital** é uma expressão usualmente utilizada dentro da matemática financeira para expressar o valor sem o acréscimo de juros, ele pode ser chamado de principal ou*

Capital inicial.

Definição 2.5. *(*Montante*).* ***Valor Futuro ou Montante*** *representa o valor do dinheiro em uma data futura. Este Valor Futuro é o Valor Principal acrescido dos Juros aferidos no período.*

Definição 2.6. *(*Taxa de Juros*). A* ***taxa de juros*** *é a razão entre os juros pagos no final do período e o valor originalmente aplicado*

Comecemos trabalhando com juros simples.

Juros Simples

Definição 2.7. Juros Simples *é aquele que a taxa de juros é sempre aplicada sobre o capital inicial. O cálculo do juros simples é aplicado no prazo total, ou seja, o período de aplicação é entendido como um todo, sem acúmulo de juros.*

Segue diretamente do Teorema (2.1) as seguintes conclusões:
Denote $f(x,t)$ como o montante (ou valor futuro) de um capital, por x que foi investido por um período de tempo t.
Então, para o juros simples (ver 2.7), a função $f(x,t)$ satisfaz

$$f(x+y,t) = f(x,t) + f(y,t) \tag{2.10}$$

e também

$$f(x,t+s) = f(x,t) + f(x,s), \tag{2.11}$$

para todo $x, y, t, s \in \mathbb{R}_+$.
Com efeito, Aqui, a equação (2.10) diz que o valor futuro do capital $x + y$, depois de ter sido investido por um período de tempo t é igual à soma dos valores futuros do capital x e do capital y, depois de terem sido investidos por um mesmo período. A equação (2.11) diz que o valor futuro do capital x, depois de ter sido investido por um período de tempo $t + s$ é igual à soma do valores futuros do capital x investidos por um período t e por um período s.
Assim, pelo Teorema (2.1) (É natural supor que $f(x,t)$ é contínua em cada variável), podemos escrever que

$$f(x,t) = kxt, \quad \forall \;\; x, y \in \mathbb{R}_+,$$

onde k é uma constante positiva dependendo da unidade, aqui k representa a taxa de juros (ver 2.6).

Juros Compostos

O regime de juros compostos é o mais comum no sistema financeiro e, portanto, o mais útil para cálculos de problemas do dia-a-dia.

Definição 2.8. Juros Compostos *são aqueles em que a taxa de juros é aplicada sobre o valor futuro obtido a cada período de tempo considerado (ao dia, ao mês, ao ano, etc). Sendo que inicialmente se aplica ao valor do capital (emprestado ou aplicado), mas é preciso expressar o período de tempo na mesma unidade da taxa.*

Obs 2.1. *Os juros compostos são conhecidos como juros acumulativos, ou seja, o juros são acumulados a cada parte do período total de aplicação, por exemplo um capital é aplicado por um período de 3 meses, no final do primeiro mês o capital redeu um juros, no final do segundo mês o juros é calculado referente ao montante gerado no primeiro mês, e no final do terceiro mês os juros é calculado sobre o montante gerado no segundo mês. Assim os juros compostos acabam sendo mais vantajosos do que os juros simples para quem aplica o capital.*

Considere, agora, uma função $g(x,t)$ (denota o valor futuro de um capital x que foi investido por um período de tempo t) que satisfaz

$$g(x+y,t) = g(x,t) + g(y,t) \tag{2.12}$$

e também

$$g(x,t+s) = g(g(x,t),s), \tag{2.13}$$

para todo $x, y, t, s \in \mathbb{R}_+$. Aqui, a equação (2.12) diz que o valor futuro do capital $x+y$, depois de ter sido investido por um período de tempo t é igual à soma dos valores futuros do capital x e do capital y, depois de terem sido investidos por um mesmo período. A equação (2.13) diz que o valor futuro do capital investido por um período de tempo $t+s$ é igual ao valor do capital $g(x,t)$ investido por um período s. É natural supor que $g(x,t)$ é contínua em cada variável. Então, a solução da equação 2.12 é dada, pelo Teorema 1.1, para cada $t \in [0,+\infty)$ fixado, temos

$$g(x,t) = c(t) \cdot x, \quad \forall \;\; x\mathbb{R}, \tag{2.14}$$

onde $c : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$. Pelo Teorema 1.7, a solução contínua da equação (**??**) é dada por

$$c(t) = e^{\lambda t}, \quad \forall \ t \in \mathbb{R}_+,$$

onde λ é uma constante. Fazendo $r = e^{\lambda t} - 1$, r representa a taxa de juros (ver 2.6), daí obtemos

$$g(x,t) = x(1+r)^t, \quad \forall \ x, t \in \mathbb{R}_+.$$

Capítulo 3

Equações funcionais com uma variável

3.1 Introdução

Até agora estudamos equações funcionais com funções definidas em duas variáveis. Neste capítulo apresentaremos alguns casos especiais de equações funcionais com funções definidas em uma variável juntamente com algoritmos específicos que nos ajudarão a encontrar soluções para estes tipos de equações. Por fim, apresentaremos alguns exercícios nos quais a teoria vista durante o trabalho pode ser aplicada.

Permita-nos enfatizar que todo este capítulo baseia-se nas referências [12] e [7].

3.2 Equações de conjugação

Todas as equações que consideraremos nesta seção são casos especiais de uma família de equações, ditas equações de conjugação, que assume a forma

$$f[\alpha(x)] = \beta[f(x)] \tag{3.1}$$

onde α e β são funções apropriadamente escolhidas. Por simplicidade, faremos uso da seguinte notação: $\alpha^1(x) = \alpha(x), \alpha^2(x) = \alpha(\alpha(x)), \cdots, \alpha^{n+1}(x) = \alpha[\alpha^n(x)]$, para $n = 1, 2, 3, \cdots$. Por conveniência, definimos $\alpha^0(x) = x$.

Definição 3.1. *Quando a equação (3.1) tem como solução uma função injetiva, dizemos que as funções α e β são conjugadas.*

3.3 Equação de Schröder

A equação

$$f[\alpha(x)] = s[f(x)] \tag{3.2}$$

é denominada equação de Schröder.[1] A nossa tarefa é verificar a existência de uma ou mais funções f e um número real $s \neq 0$ tal que a igualdade (3.2) seja satisfeita. Porém, é necessário ser cuidadoso quanto ao domínio de uma função f que seja solução de (3.2). Vejamos o exemplo a seguir.

Exemplo 3.1. *Seja $f[\alpha(x)] = s[f(x)]$, onde $s \neq 1$ e $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.*

Se x_0 é um ponto fixo da função α, então temos $\alpha(x_0) = x_0$. Substituindo na equação de Schröder, temos $f[\alpha(x_0)] = sf(x_0)$, portanto

$$f(x_0) = sf(x_0) \Leftrightarrow f(x_0) - sf(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0)(s-1) = 0$$

Como $s \neq 1$, segue que:

1. $f(x_0) = 0$ ou
2. $s = 1$, nesse caso x_0 não pertence ao domínio de f.

Com o intuito de evitar este caso 2, podemos supor que a função α não tem ponto fixo em qualquer intervalo onde uma função $f(x)$ esteja definida. Se pudermos encontrar uma solução positiva para a equação (3.2) com qualquer escolha de $0 < s < 1$, então podemos encontrar soluções para outros valores de s, conforme veremos a seguir.

Proposição 3.1. *Se $f(x)$ é solução da equação de Schröder, então $[f(x)]^p$ também o é.*

Demonstração. De fato, se $f(x)$ é solução da equação de Schröder, então

$$f[\alpha(x)] = sf(x)$$

[1]Friedrich Wilhelm Karl Ernst Schröder nasceu em 25 de novembro de 1841 em Mannheim, Alemanha. Fez trabalhos importantes na área de Álgebra, Teoria de Conjuntos e Lógica. Schröder faleceu em 16 de Junho de 1902 em Karlsruhe, também na Alemanha.

Daí.

$$\begin{aligned}
[f\alpha(x)]^p &= \underbrace{(f\alpha(x)) \cdot (f\alpha(x)) \cdot \cdots \cdot (f\alpha(x))}_{pfatores} \\
&= \underbrace{(sf(x)) \cdot (sf(x)) \cdot \cdots \cdot (sf(x))}_{pfatotores} \\
&= \underbrace{(s \cdot s \cdot \ \cdots \ \cdot s)}_{pfatores} \cdot \underbrace{(f(x) \cdot \ \cdots \ \cdot f(x))}_{pfatores} \\
&= s^p \cdot [f(x)]^p.
\end{aligned}$$

Logo, $[f(x)]^p$ também é solução com s substituído por s^p. □

Vejamos a seguir como obter uma equação funcional que envolve a função inversa da equação de Schröder. Seja f uma solução de (3.2) que admite inversa. Se $g = f^{-1}$ obtemos $f(x) = y$ se, e somente se, $g(y) = x$. Daí,

$$g(sy) = g[sf(x)].$$

Como f é solução de (3.2), temos

$$g[sf(x)] = g[f[\alpha(x)]] = f^{-1}[f[\alpha(x)]] = \alpha(x) = \alpha[g(y)].$$

Logo, g satisfaz a equação

$$g(sy) = \alpha[g(y)]. \tag{3.3}$$

A equação (3.3) é denominada equação de*Poincaré*.[2]

3.4 Equação de Abel

A equação

$$f[\alpha(x)] = f(x) + a, \tag{3.4}$$

[2]Henri Poincaré foi um famoso matemático, cientista teórico e filósofo da ciência. Nasceu em 29 de Abril de 1854 e faleceu em 17 de Julho de 1912. Poincaré contribuiu para a maioria das disciplinas da Matemática e criou novas disciplinas como Teoria das Funções Automorfas, Topologia Algébrica e Sistemas Dinâmicos. Poincaré é considerado o último matemático completo.

onde a é um número real diferente de zero, é denominada *Equação de Abel* [3] Quando $\beta(x) = x + a$, com $a \in \mathbb{R}^*$ em (3.1) torná-se a equação em (3.4), portanto é uma equação de conjugação.

Igualmente ao que acontece com a Equação de Schröder, devemos ser bastantes cautelosos acerca do domínio da função f. Se escolhemos um valor x_o tal que $\alpha(x_0) = x_0$, caso exista, temos que x_0 não pode pertencer ao domínio de f. De fato, se x_0 pertencer ao domínio de f, então

$$f[\alpha(x_0)] = f(x_0) + a.$$

Como $\alpha(x_0) = x_0$, segue que

$$f[\alpha(x_0)] = f(x_0) = f(x_0) + a,$$

o que é um absurdo, pois $a \neq 0$. Desse modo, os números de x tais que $\alpha(x) = x$ não podem pertencer ao domínio de f.

3.5 Equação de Böttcher

A Equação

$$f[\alpha(x)] = [f(x)]^p. \tag{3.5}$$

onde $p \neq 0$ é denominada equação de Böttcher[4]. Esta também é uma equação de conjugação, basta considerar $\beta(x) = x^p$ com $p \neq 1$ na equação em (3.1) que chegamos na equação (3.5). Note que para esta equação estamos interessados em funções não negativas f que a satisfaça. De fato, se tivéssemos, por exemplo, $f(x) < 0$ para algum x pertencente ao domínio de f e p um número par a equação de Böttcher não seria satisfeita já que teríamos $f[\alpha(x)] < 0$ e $[f(x)]^p > 0$ ou ainda se $p = \frac{1}{2}$ teríamos $\sqrt{f(x)}$ com $f(x) < 0$. Logo, $f(x) \geq 0$.

[3]Niels Henrik Abel foi um matemático norueguês nascido em 05 de Agosto de 1802. Abel morreu com pouco mais de 26 anos vítima de tuberculose. O que ele realizou em seus pouco mais de dez anos de produtividade foi algo quase nunca visto na história da humanidade. Deve-se a ele, entre outras coisas, o primeiro estudo sistemático das funções algébricas.

[4]Lucjan Emil Böttcher é um matemático polonês nascido em Varsóvia no ano de 1872. Escreveu e publicou artigos em Matemática, Educação Matemática, Lógica e Mecânica tendo destaque seu estudo sobre equações funcionais. Böttcher faleceu no ano de 1937.

3.6 Busca de soluções para equações de conjugação

3.6.1 O Algoritmo de Koenigs

O algoritmo de Koenigs[5] é usado para encontrar uma solução para a equação de Schröder.

Proposição 3.2. *Se f é uma solução para a equação de Schröder (3.2), então qualquer função múltipla de f também o é.*

Demonstração. Seja $g(x) = cf(x)$, onde c é uma constante qualquer.

Como f é solução da equação de Schröder, segue que

$$g[\alpha(x)] = cf[\alpha(x)] = csf(x) = s[cf(x)] = sg(x).$$

Portanto, $g(x) = cf(x)$, ou seja, a função g também é solução. □

Definição 3.2. *A iterada $\alpha^n(x)$ é aproximadamente geométrica se existe um número $s \in (0,1)$ tal que o limite*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^n(x)}{s^n}.$$

existe é finito e não nulo, para algum x pertencente ao domínio de $\alpha^n(x)$. Neste caso, dizemos que a iterada tem taxa s.

Propriedades 3.1. *Em um domínio de valores de x onde a iterada de x é aproximadamente geométrica, com taxa s independente de x, uma solução para a equação de Schröder é dada por*

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^n(x)}{s^n}.$$

para uma escolha particular de s.

Demonstração. De $\alpha^n(x), onde$

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^n(x)}{s^n}.$$

[5]Gabriel Xavier Paul Koenigs foi um matemático francês. Trabalhou com Análise e Geometria. Koenigs nasceu na cidade de Toulouse em 1851 e faleceu em Paris, capital francesa, no ano de 1931.

Mostremos que f é solução da equação de Schröder, de fato,

$$f(\alpha(x)) = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^n(\alpha(x))}{s^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^{n+1}(x)}{s^n}.$$

Como $\alpha^n(x)$é uma iterada aproximadamente geométrica, o limite acima existe. Multiplicando-o por s/s

$$f(\alpha(x)) = s \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^{n+1}(x)}{s^{n+1}}.$$

e fazendo $n + 1 = k$, temos

$$f(\alpha(x)) = s \lim_{k\to\infty} \frac{\alpha^k(x)}{s^k} = sf(x).$$

Portanto,

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^n(x)}{s^n}.$$

é solução da equação de Schröder. □

Esse método é chamado de algoritmo de Koenigs.

Proposição 3.3. *Se o limite*

$$s = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^{n+1}(x)}{\alpha^n(x)}.$$

existe para todo $x \in \mathbb{R}$ em algum domínio e é independente de x, então podemos obter uma solução generalizada da equação de Schröder (3.2). Mais precisamente, para cada x_0 nesse domínio,

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^n(x)}{\alpha^n(x_0)}.$$

é uma solução (3.2), desde que esse limite exista e seja finito.

Demonstração. De fato, tomando

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^n(x)}{\alpha^n(x_0)}$$

temos

$$f(\alpha(x)) = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^n(\alpha(x))}{\alpha^n(x_0)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^{n+1}(x)}{\alpha^n(x_0)}.$$

Observando que

$$\frac{\alpha^{n+1}(x)}{\alpha^n(x_0)} = \frac{\alpha^{n+1}(x)}{\alpha^n(x_0)} \frac{\alpha^n(x)}{\alpha^n(x)} = \frac{\alpha^{n+1}(x)}{\alpha^n(x)} \frac{\alpha^n(x)}{\alpha^n(x_0)},$$

temos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^{n+1}(x)}{\alpha^n(x_0)} = \lim_{n\to\infty} [\frac{\alpha^{n+1}(x)}{\alpha^n(x)} \frac{\alpha^n(x)}{\alpha^n(x_0)}].$$

Agora,

$$s = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^{n+1}(x)}{\alpha^n(x)},$$

e

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^n(x)}{\alpha^n(x_0)}$$

Assim, usando as propriedades de limite, temos:

$$f(\alpha(x)) = \lim_{n\to\infty} [\frac{\alpha^{n+1}(x)}{\alpha^n(x)} \frac{\alpha^n(x)}{\alpha^n(x_0)}] = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^{n+1}(x)}{\alpha^n(x)} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^{n+1}(x)}{\alpha^n(x_0)} = sf(x). \tag{3.6}$$

Portanto,

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^n(x)}{\alpha^n(x_0)}$$

é solução de (3.2) e é chamada solução principal para a equação de Schröder. □

3.6.2 O Algoritmo de Lévy

Este algoritmo é usado para encontrar uma solução para a equação de Abel (3.4).

Proposição 3.4. *Se f é uma solução qualquer da equação de Abel*

$$f(\alpha(x)) = f(x) + a,$$

$a \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, então a função g, definida por $g(x) = f(x) + c$, onde c é uma constante qualquer, também é uma solução.

Demonstração. Se $g(x) = f(x) + c$ e f é solução da equação de Abel.

$$g(\alpha(x)) = f(\alpha(x)) + c = f(x) + a + c = (f(x) + c) + a = g(x) + a.$$

Portanto, $g(x) = f(x) + c$ também é solução para a equação de Abel. $\square$

Consideramos o caso especial da equação de Abel em que $a = 1$, ou seja,

$$f(\alpha(x)) = f(x) + 1,$$

Se a função $\alpha(x)$ é aproximadamente geométrica, pode ser mais apropriado transformar a equação de Abel na equação de Schröder e encontrar a solução principal tal qual foi visto na seção anterior. Por outro lado, pode ser que a função $\alpha(x)$ comporte-se quase como a função $x \longmapsto x + a$. Nesse caso a equação funcional deve ser na forma da equação de Abel.

Proposição 3.5. *Suponha que exista um $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^{n+1}(x_0) - \alpha^n(x_0)}{\alpha^{n+1}(x) - \alpha^n(x)} = 1 \tag{3.7}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Daí, se o limite

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^n(x) - \alpha^n(x_0)}{\alpha^{n+1}(x) - \alpha^n(x)} \tag{3.8}$$

existe, então $f(x)$ é uma solução para a equação de Abel.

Demonstração. Suponhamos que existe um $x \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^{n+1}(x_0) - \alpha^n(x_0)}{\alpha^{n+1}(x) - \alpha^n(x)} = 1$$

e que o limite

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^n(x) - \alpha^n(x_0)}{\alpha^{n+1}(x) - \alpha^n(x)}$$

Desse modo,

$$f(\alpha(x)) = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^n(\alpha(x)) - \alpha^n(x_0)}{\alpha^{n+1}(\alpha(x)) - \alpha^n(\alpha(x))} = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^{n+1}(x) - \alpha^n(x_0)}{\alpha^{n+2}(x) - \alpha^{n+1}(x)} \tag{3.9}$$

Agora, notemos que

$$\begin{aligned}\frac{\alpha^{n+1}(x)-\alpha^{n}(x_0)}{\alpha^{n+2}(x)-\alpha^{n+1}(x)} &= \frac{\alpha^{n+1}(x)-\alpha^{n}(x_0)+\alpha^{n+1}(x_0)-\alpha^{n+1}(x_0)}{\alpha^{n+2}(x)-\alpha^{n+1}(x)}\\ &= \frac{\alpha^{n+1}(x)-\alpha^{n+1}(x_0)}{\alpha^{n+2}(x)-\alpha^{n+1}(x)}+\frac{\alpha^{n+1}(x_0)-\alpha^{n}(x_0)}{\alpha^{n+2}(x)-\alpha^{n+1}(x)}\end{aligned}$$

Fazendo $x=\alpha(x)$ em (3.7), temos

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha^{n+1}(x_0)-\alpha^{n}(x_0)}{\alpha^{n+2}(x)-\alpha^{n+1}(x)}=1$$

Analogamente, substituindo $x=\alpha(x)$ em (3.8) concluímos que o limite

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha^{n+1}(x)-\alpha^{n}(x_0)}{\alpha^{n+2}(x)-\alpha^{n+1}(x)}$$

existe. Desta forma, utilizando as propriedades de limites na equação (3.9), temos

$$\begin{aligned}f(\alpha(x)) &= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{\alpha^{n+1}(x)-\alpha^{n+1}(x_0)}{\alpha^{n+2}(x)-\alpha^{n+1}(x)}+\frac{\alpha^{n+1}(x_0)-\alpha^{n}(x_0)}{\alpha^{n+2}(x)-\alpha^{n+1}(x)}\right]\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{\alpha^{n+1}(x)-\alpha^{n+1}(x_0)}{\alpha^{n+2}(x)-\alpha^{n+1}(x)}+\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha^{n+1}(x_0)-\alpha^{n}(x_0)}{\alpha^{n+2}(x)-\alpha^{n+1}(x)}\\ &= f(x)+1.\end{aligned}$$

Portanto,

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha^{n}(x)-\alpha^{n}(x_0)}{\alpha^{n+1}(x)-\alpha^{n}(x)}$$

é solução para a equação $f(\alpha(x))=f(x)+1$. □

A equação (3.8) é conhecida como o algoritmo de Lévy para a equação de Abel.

3.6.3 Um Algoritmo para a equação de Böttcher

A proposição a seguir nos mostra como encontrar infinitas soluções para equação de Böttcher (3.5) a partir de uma solução já conhecida.

Proposição 3.6. *Seja f uma solução qualquer para a equação de Böttcher (3.5), então uma função g, definida por $g(x):=[f(x)]^q$, onde q é uma potência qualquer, também é solução.*

Demonstração. De fato,

$$g(\alpha(x)) := [f(\alpha(x))]^q.$$

Como f é solução da equação de Böttcher, então

$$g(\alpha(x)) := [f(\alpha(x))]^q = [f(x)^p]^q = [f(x)^q]^p =: [g(x)]^p\,.$$

Portanto, $g(x) = f^q(x)$ satisfaz a equação (3.5). □

Vejamos agora um método geral para encontrar uma solução para a equação de Böttcher.

Proposição 3.7. *Uma solução para a equação de Böttcher*

$$f(\alpha(x)) = [f(x)]^p$$

pode ser obtida se o limite

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} [\alpha^n(x)]^{p^{-n}}$$

existe.

Demonstração. De fato, se o limite

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} [\alpha^n(x)]^{p^{-n}}$$

existe, então temos

$$\begin{aligned} f(\alpha(x)) &= \lim_{n\to\infty} [\alpha^n(\alpha(x))]^{p^{-n}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left[\alpha^{n+1}(x)\right]^{p^{-n}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left[\alpha^{n+1}(x)\right]^{p^{-(n+1-1)}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left[\alpha^{n+1}(x)\right]^{p^{-(n+1)+1}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left[\alpha^{n+1}(x)\right]^{p^{-(n+1)}\cdot p} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left[\left[\alpha^{n+1}(x)\right]^{p^{-(n+1)}}\right]^p. \end{aligned}$$

Mas, se $n \to \infty$, então $(n+1) \to \infty$. Desse modo

$$\lim_{n\to\infty} \left[\alpha^{n+1}(x)\right]^{p^{-(n+1)}} = f(x).$$

Portanto,

$$f(\alpha(x)) = \left[\lim_{n\to\infty} \left[\alpha^{n+1}(x)\right]^{p^{-(n+1)}}\right]^p = [f(x)]^p.$$

□

É importante ressaltar que do início do capítulo 3 até aqui todo trabalho foi retirado do material em ([12])

3.7 Aplicação de Equações Funcionais com uma variável

Apresentaremos uma aplicação das equações funcionais abordadas com o auxilio das técnicas vistas no capítulo anterior.

Encontre todas as funções $f : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$ que satisfazem as equações abaixo:

a) $f(x+1) = f(x) + 1$, para $x \in \mathbb{Q}^+$

b) $f(x^3) = [f(x)]^3$, para $x \in \mathbb{Q}^+$

Demonstração. Em a), temos a equação de Abel, com $\alpha(x) = x + 1$. Note que

$$\alpha(x) = x + 1;$$

$$\alpha^2(x) = \alpha(\alpha(x)) = \alpha(x+1) = x + 1 + 1 = x + 2;$$

$$\alpha^3(x) = \alpha(\alpha^2(x)) = \alpha(x+2) = x + 2 + 1 = x + 3.$$

O que nos leva a conjecturar

$$\alpha^n(x) = x + n, \forall n \in \mathbb{N}$$

Utilizando indução matemática sobre n podemos provar a validade da igualdade acima.

i) Para $n = 1$, temos

$$\alpha^1(x) = x + 1 \Rightarrow \alpha(x) = x + 1$$

ii) Suponhamos que para algum número natural $n > 1$ vale

$$\alpha^n(x) = x + n$$

iii) Utilizando o item ii), temos

$$\alpha^{n+1}(x) = \alpha(\alpha^n(x)) = \alpha(x + n) = x + n + 1 = x + (n + 1)$$

Assim, dado que a igualdade é válida para n natural qualquer, maior do que 1, ela também será válida para $n + 1$. Portanto, de (i), (ii) e (iii) segue do Princípio de Indução Finita que

$$\alpha^n(x) = x + n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Portanto,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^{n+1}(x_0) - \alpha^n(x_0)}{\alpha^{n+1}(x) - \alpha^n(x)} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_0 + n + 1 - x_0 - n}{x + n + 1 - x - n} = 1$$

e o limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^{n+1}(x) - \alpha^n(x_0)}{\alpha^{n+1}(x) - \alpha^n(x)} = \lim_{n\to\infty} \frac{x + n - x_0 - n}{x + n + 1 - x - n} = x - x_0$$

existe para todo $x \in \mathbb{Q}^+$. Assim, pelo algoritmo de Lévy (3.7)segue que $f(x) = x - x_0$ é uma solução para a equação funcional $f(x + 1) = f(x) + 1$. $\square$

Mas, f também deve satisfazer a equação de Böttcher $f(x^3) = [f(x)]^3$.

$$f((x - x_o)^3) = (x - x_0)^3 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2x_0 + 3xx_0^2 - x_0^3 - x_0 = x^3 - 3x^2x_0 + 3xx_0^2 - x_0^3 \Leftrightarrow x_0 = 0$$

Portanto, a função $f : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$ definida por $f(x) = x$ satisfaz as equações do enunciado.

3.8 Equações funcionais com radicais múltiplos

Como o próprio nome já sugere, um radical múltiplo é uma expressão na qual um radical está contido dentro de um ou mais radicais. Nesta seção, vamos estudar o problema proposto pelo matemático indiano Ramanujan em 1911.

$$\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{\cdots}}}}$$

A princípio pode não parecer, mas existe uma equação funcional escondida nesse radical, conforme veremos a seguir. Para estudar a expressão acima, devemos inicialmente generalizar o problema. Assim ficamos com

$$f(x)=\sqrt{1+x\sqrt{1+(x+1)\sqrt{1+(x+2)\sqrt{\cdots}}}}. \tag{3.10}$$

Sem se apegar rigor matemático, que nos faria fugir da ideia central desse trabalho, podemos elevar ambos os membros ao quadrado

$$\Big[f(x)\Big]^2=1+x\sqrt{1+(x+1)\sqrt{1+(x+2)\sqrt{\cdots}}}.$$

$$f(x+1)=\sqrt{1+(x+1)\sqrt{1+(x+2)\sqrt{\cdots}}},$$

desse modo,

$$\Big[f(x)\Big]^2=1+xf(x+1),$$

onde $f(x)\geq 0$. Como podemos observar essa equação não faz parte da família de equações funcionais estudadas até aqui. Assim, não conhecemos ainda um modo eficiente para encontrar uma solução para esta equação funcional. O resultado a seguir resolve este problema.

Proposição 3.8. *Seja f tal que $f(x)>0$ para todo $x\geq 1$. Se f é uma solução para a equação funcional*

$$\Big[f(x)\Big]^2=1+xf(x+1), \tag{3.11}$$

a qual satisfaz as desigualdades

$$\frac{x+1}{2} \leq f(x) \leq 2(x+1), \tag{3.12}$$

para todo $x \geq 1$, então $f(x) = x + 1$.

Demonstração. De fato substituindo x por $x+1$ na equação (3.12), obtemos

$$\frac{x+2}{2} \leq f(x+1) \leq 2(x+2), \tag{3.13}$$

De (3.11), temos

$$\Big[f(x)\Big]^2 = 1 + xf(x+1),$$

como $x \geq 1$ e $f(x) > 0$, temos

$$\Big[f(x)\Big]^2 > \frac{1}{2} + xf(x+1). \tag{3.14}$$

Por outro lado,

$$\Big[f(x)\Big]^2 = 1 + xf(x+1) < 2 + xf(x+1). \tag{3.15}$$

De (3.14) e (3.15), temos

$$\frac{1}{2} + xf(x+1) < \Big[f(x)\Big]^2 < 2 + xf(x+1). \tag{3.16}$$

Aplicando (3.13) em (3.16),

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + xf(x+1) < \Big[f(x)\Big]^2 < 2 + xf(x+1) &\Rightarrow \frac{1}{2} + x\frac{x+2}{2} < \Big[f(x)\Big]^2 < 2 + 2x(x+2) \\ &\Rightarrow \frac{1+x^2+2x}{2} < \Big[f(x)\Big]^2 < 2(1+x^2+2x) \\ &\Rightarrow \frac{(x+1)^2}{2} < \Big[f(x)\Big]^2 < 2(x+1)^2. \end{aligned}$$

Extraindo a raiz quadrada em todos os membros desta última dupla

$$\frac{x+1}{\sqrt{2}} < f(x) < \sqrt{2}(x+1). \tag{3.17}$$

Comparando (3.12) com (3.17), notamos que o intervalo ao qual f pertence "encolheu". Assim, aplicando esse mesmo procedimento k vezes chegamos a

$$\frac{(x+1)}{2^{\frac{1}{k}}} < f(x) < 2^{\frac{1}{k}}(x+1).$$

Quando $k \to \infty$, chegamos a

$$\frac{(x+1)}{2^0} \leq f(x) \leq 2^0 \cdot (x+1) \Rightarrow x+1 \leq f(x) \leq x+1.$$

Portanto,

$$f(x) = x + 1$$

□

O nosso problema inicial representa o caso particular $x = 2$.

$$f(2) = \sqrt{1 + 2\sqrt{1 + (2+1)\sqrt{\cdots}}} \Rightarrow f(2) = \sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{\sqrt{\cdots}}}}.$$

Portanto,

$$\sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{\sqrt{\cdots}}}} = f(2) = 2 + 1 = 3.$$

3.9 Equações polinomiais

Nesta seção iremos estudar maneiras para encontrar soluções para equações funcionais quando supomos que tal solução é um polinômio. Podemos aqui aplicar os métodos vistos nas seções anteriores. Porém, vale a pena considerar quais métodos adicionais podemos utilizar quando a solução de uma equação funcional é um polinômio. Neste caso, consideramos polinômios de uma variável real ou complexa com coeficientes reais ou complexos.

A seguir veremos que é possível usar a equação funcional para determinar o grau do polinômio. Suponha que $Gr(x)$ seja o grau de um polinômio $f(x)$. Se

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \qquad Gr(f \cdot g) = Gr(f) + Gr(g) \tag{3.18}$$

e

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] \qquad Gr(f \circ g) = Gr(f) \cdot Gr(g) \tag{3.19}$$

Utilizando-se destas fórmulas, qualquer equação polinomial envolvendo as operações de multiplicação e composição nos leva a solução da equação a partir do seu grau.

Exemplo 3.2. *Encontre as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que são soluções para a equação*

$$f(x-1) \cdot f(x+1) = f(f(x)), \tag{3.20}$$

onde f é um polinômio com coeficientes reais.

Seja $d = Grf$. Por (3.18) o grau do lado esquerdo da equação é $d + d = 2d$. Já pela fórmula (3.19) o grau do lado direito da equação é $d \cdot d = d^2$. Daí, devemos ter:

$$2d = d^2 \Rightarrow d^2 - 2d = 0 \Rightarrow d(d-2) = 0,$$

donde, $d = 0$ ou $d = 2$.
Se $d = 0$, temos que f é um polinômio de grau zero, ou seja, é o polinômio constante $f(x) = c$. Assim,

$$f(x-1) \cdot f(x+1) = f(f(x)) \Rightarrow c \cdot c = f(c) \Rightarrow c^2 = c \Rightarrow c^2 - c = 0 \Rightarrow c(c-1) = 0,$$

donde, $c = 0$ ou $c = 1$.
Portanto, as funções constantes que são soluções para $f(x-1) \cdot f(x+1) = f(f(x))$ são $f(x) = 0$ e $f(x) = 1$.

Se $d = 2$, f é um polinômio de grau 2, ou seja, $f(x) = ax^2 + bx + c; a, b, c \in \mathbb{R}$ com $a \neq 0$.

Assim, desenvolvendo o lado esquerdo da equação funcional, obtemos:

$$\begin{aligned}
f(x-1)\cdot f(x+1) &= [a(x-1)^2+b(x-1)+c]\cdot[a(x+1)^2+b(x+1)+c]\\
&= a^2(x-1)^2(x+1)^2+ab(x-1)^2(x+1)+ac(x-1)^2+ab(x-1)(x+1)^2\\
&+ b^2(x-1)(x+1)+bc(x-1)+ac(x+1)^2+bc(x+1)+c^2\\
&= a^2(x-1)^2(x+1)^2+ab(x^2-1)(x-1)+ac(x^2-2x+1)+ab(x-1)(x+1)^2\\
&+ b^2(x^2-1)+bc(x-1)+ac(x^2+2x+1)+bc(x+1)+c^2\\
&= a^2(x^4-2x^2+1)+ab(x^3-x^2-x+1)+ac(x^2-2x+1)\\
&= +ab(x^3+x^2-x-1)+b^2(x^2-1)+bc(x-1)+ac(x^2+2x+1)+bc(x+1)+c^2\\
&= a^2x^4-2a^2x^2+a^2+abx^3-abx^2-abx+ab+acx^2-2acx+ac\\
&+ abx^3+abx^2-abx-ab+b^2x^2-b^2+bcx-bc+acx^2+2acx\\
&+ ac+bcx+bc+c^2\\
&= a^2x^4+x^3(ab+ab)+x^2(-2a+ac+b^2+ac)\\
&+ x(-ab-ab+bc+bc)+(a^2+ac-b^2+ac+c^2).
\end{aligned}$$

Logo,

$$f(x-1)\cdot f(x+1)=a^2x^4+2abx^3+(2ac-2a-2a^2)x^2+x(2b-2ab)+(c^2+2ac+a^2-b^2). \tag{3.21}$$

Agora, desenvolvendo o lado direito dela, obtemos:

$$\begin{aligned}
f(f(x)) &= f(ax^2+bx+c)\\
&= a(ax^2+bx+c)^2+b(ax^2+bx+c)+c\\
&= a(a^2x^4+2(bx+c)ax^2+(bx+c)^2)+bax^2+b^2x+bc+c\\
&= a^3x^4+2a^2x^2(bx+c)+a(b^2x^2+2bcx+c^2)+bax^2+b^2x+bc+c\\
&= a^3x^4+2a^2bx^3+2a^2cx^2+ab^2x^2+2abcx+ac^2+bax^2+b^2x+bc+c.
\end{aligned}$$

Assim,

$$f(f(x))=a^3x^4+2a^2bx^3+2a^2cx^2+ab^2x^2+2abcx+ac^2+bax^2+b^2x+bc+c. \tag{3.22}$$

Das equações (3.21) e (3.22), segue que

$$\begin{aligned}a^2x^4 + 2abx^3 + (b^2 + 2ac - 2a^2)x^2 + (2bc - 2ab)x + (c^2 + 2ac + a^2 - b^2) = \\ = a^3x^4 + 2a^2bx^3 + (2a^2c + ab^2 + ba)x^2 + (2abc + b^2)x + (ac^2 + bc + c).\end{aligned}$$

Da igualdade de polinômios, obtemos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} (1) : a^2 & = a^3 \\ (2) : 2ab & = 2a^2b \\ (3) : b^2 + 2ac - 2a^2 & = 2a^2c + ab^2 + ba \\ (4) : 2bc - 2ab & = 2abc + b^2 \\ (5) : c^2 + 2ac + a^2 - b^2 & = ac^2 + bc + c \end{cases}$$

de (1), temos

$$a^2 = a^3 \Rightarrow a^3 - a^2 = 0 \Rightarrow a^2(a-1) = 0.$$

Como $a \neq 0$, segue que

$$a - 1 = 0 \Rightarrow a = 1.$$

Assim, fazendo $a = 1$ em (3) chegamos a

$$b^2 + 2c - 2 = 2c + b^2 + b \Rightarrow b = -2$$

Agora fazendo $a = 1$ e $b = -2$ em (5), obtemos

$$c^2 + 2c + 1 - (-2)^2 = c^2 - 2c + c,$$

e com isso, seque que $c = 1$. Podemos facilmente verificar que os valores $a = 1, b = -2$ e $c = 1$ satisfazem (2) e (4). Logo, esses valores satisfazem o sistema de equações e com isso, obtemos

$$f(x) = x^2 - 2x + 1.$$

Portanto, as soluções da equação funcional são $f(x) = 0, f(x) = 1$ e $f(x) = x^2 - 2x + 1$.
O próximo método pra resolver equações polinomiais envolve o uso do seguinte princípio.

Proposição 3.9. *Suponha que $f(x)$ é um polinômio periódico, isto é, existe algum $a \neq 0$ para o qual $f(x+a) = f(x)$, para todo x real. Então, $f(x) = c$ para todo x, onde c é uma constante qualquer.*

Demonstração. De fato, se f é periódica, então é limitada. Mas isso é impossível no caso de polinômios não contantes, pois tomando um polinômio com coeficientes reais

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

com pelo menos um $a_i \neq 0, i = 1, 2, 3, \cdots, n$, temos que

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty.$$

Portanto, se $f(x)$ é um polinômio periódico, então $f(x)$ é constante. $\square$

Vejamos agora como esse resultado pode ser aplicado às equações funcionais. Seja $f_0(x)$ uma solução de uma determinada equação funcional polinomial. Seria esta a única solução? Veremos a seguir que pode haver outras soluções. Podemos escrever uma solução geral na forma

$$f(x) = f_0(x) + g(x),$$

onde $g(x)$ é um polinômio cuja forma deve ser determinada. Pode ser possível mostrar que $g(x)$ satisfaz as condições da proposição (4.9). Assim, concluímos que todas as soluções da equação tem a forma $f_0(x) + c$.

Exemplo 3.3. *Considere a seguinte equação*

$$f(x+1) - f(x-1) = 6x^2 + 2. \tag{3.23}$$

onde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função. Prove que a função $f_0(x) = x^3$ não é a única solução desta equação.

Inicialmente notemos que f_0 verifica (3.23). De fato,

$$\begin{aligned}
f_0(x) = x^3 &\Rightarrow f_0(x+1) - f_0(x-1) = (x+1)^3 - (x-1)^3 \\
&\Rightarrow f_0(x+1) - f_0(x-1) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - (x^3 - 3x^2 + 3x - 1) \\
&\Rightarrow f_0(x+1) - f_0(x-1) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - x^3 + 3x^2 - 3x + 1 \\
&\Rightarrow f_0(x+1) - f_0(x-1) = 6x^2 + 2.
\end{aligned}$$

Logo, $f_0(x)$ é de fato uma solução para a equação dada. De acordo com o fato mencionado acima, podemos escrever uma solução geral na forma

$$f(x) = x^3 + g(x), \tag{3.24}$$

onde $g(x)$ é um polinômio cuja forma deve ser determinada.
Aplicando (3.24) em (3.23), temos

$$\begin{aligned} f(x+1) - f(x-1) = 6x^2 + 2 &\Rightarrow (x+1)^3 + g(x+1) - [(x-1)^3 + g(x-1)] = 6x^2 + 2 \\ &\Rightarrow x^3 + 3x^2 + 3x + 1 + g(x+1) - [x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + g(x-1)] = 6x^2 + 2 \\ &\Rightarrow g(x+1) - g(x-1) = 0, \end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Logo $g(x)$ é um polinômio que satisfaz as condições da Proposição (3.9), com $a = 2$, daí $g(x) = c$, onde c é uma constante qualquer. Portanto, $f(x) = x^3 + c$ é uma solução para (3.23), onde c é uma constante qualquer.

Capítulo 4

Problemas Olímpicos

Um dos temas mais desafiadores para um olímpico são os problemas sobre equações funcionais. Porém, quase não existem livros escritos para iniciantes, o que contribui para dificultar mais ainda a implantação de um treinamento para a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) numa escola que deseja se aventurar no encantador universo das Olimpíadas de Matemática. Nosso objetivo é mostrar algumas técnicas de resolução, que podem ajudar a esclarecer alguma dúvidas e assim fazer com que o aluno crie seu próprio arsenal de técnicas para a resolução de problemas sobre equações funcionais.

Permita-nos enfatizar que todo este capítulo baseia-se nas referências [1], [2], [3], [7] e [12].

Exemplo 4.1. *(OBM/2003 - 2ª Fase): Determine todas as funções* $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ *tais que, para todos* $x, y \in \mathbb{R}^*$*:*

$$f(x)f(y) - f(xy) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \tag{4.1}$$

Demonstração. Fazendo $x = y = 1$ na equação dada em (4.1), temos

$$f(1)f(1) - f(1 \cdot 1) = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} \Rightarrow [f(1)]^2 - f(1) - 2 = 0 \tag{4.2}$$

Resolvendo a equação do segundo grau em $y = f(1)$, obtemos $f(1) = -1$ ou $f(1) = 2$. Analisaremos então os dois casos:

i) Se $f(1) = -1$, faça $y = 1$ na equação (4.1):

$$f(x)f(1) - f(x \cdot 1) = \frac{x}{1} + \frac{1}{x} \Rightarrow -2f(x) = x + \frac{1}{x} \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right), \forall x \in \mathbb{R}^*$$

ii) Se $f(1) = 2$, faça $y = 1$ na equação (4.1):

$$f(x)f(1) - f(x \cdot 1) = \frac{x}{1} + \frac{1}{x} \Rightarrow f(x) = x + \frac{1}{x}, \forall x \in \mathbb{R}^*$$

Testando $f(x) = -\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right), \forall x \in \mathbb{R}^*$, temos:

$$\begin{aligned} f(x)f(y) - f(xy) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} &\Leftrightarrow \left(-\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)\right)\left(-\frac{1}{2}\left(y + \frac{1}{y}\right)\right) - \left(-\frac{1}{2}\left(xy + \frac{1}{xy}\right)\right) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{4}\left(x + \frac{1}{x}\right)\left(y + \frac{1}{y}\right) + \frac{1}{2}\left(xy + \frac{1}{xy}\right) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \\ &\Leftrightarrow \frac{3}{4}xy + \frac{1}{4} \cdot \frac{x}{y} + \frac{1}{4} \cdot \frac{y}{x} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{xy} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \\ &\Leftrightarrow xy + \frac{1}{xy} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \end{aligned}$$

Essa última igualdade em é falsa para todo reais não-nulo x, y, Por exemplo, se $x = y = 2$, deveríamos ter $2.2 + \frac{1}{2 \cdot 2} = \frac{2}{2} + \frac{2}{2} \Rightarrow 4 + \frac{1}{4} = 2$, o que claramente é um absurdo. Portanto, esse caso é inválido.

Testando $f(x) = x + \frac{1}{x}, \forall x \in \mathbb{R}^*$, temos:

$$\begin{aligned} f(x)f(y) - f(xy) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} &\Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(y + \frac{1}{y}\right) - \left(xy + \frac{1}{xy}\right) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \\ &\Leftrightarrow xy + \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{1}{xy} - xy - \frac{1}{xy} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \\ &\Leftrightarrow \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \end{aligned}$$

Portanto é válido.

Então a solução de (4.1) é:

$$f(x) = x + \frac{1}{x}, \forall x \in \mathbb{R}^*$$

□

Exemplo 4.2. *(Austrália) Para todo inteiro positivo n, temos*

$$f(n) = \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+2n+1} + \sqrt[3]{n^2-1} + \sqrt[3]{n^2-2n+1}}.$$

Determine o valor da soma

$$f(1) + f(3) + \cdots + f(999997) + f(999999).$$

Demonstração. Lembremos que

$$a^3 - b^3 = (a-b)\cdot(a^2+ab+b^2), \tag{4.3}$$

basta fazermos agora $a = \sqrt[3]{n+1}$ e $b = \sqrt[3]{n-1}$, e a função dada pode ser reescrita como

$$f(n) = \frac{1}{a^2+ab+b^2} = \frac{a-b}{a^3-b^3} = \frac{a-b}{2}.$$

Escrevendo f desta forma, fica bastante claro porque usaremos (4.3), em seguida voltemos a variável n, da seguinte forma

$$f(n) = \frac{1}{a^2+ab+b^2} = \frac{a-b}{(a-b)(a^2+ab+b^2)} = \frac{a-b}{a^3-b^3},$$

fazendo as substituição, obtemos

$$f(n) = \frac{a-b}{a^3-b^3} = \frac{a-b}{(n+1)-(n-1)} = \frac{a-b}{2}.$$

Dessa forma

$$2\cdot f(n) = a - b = \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n-1}.$$

Daí, segue que

$$\begin{aligned}
2f(1) &= \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{0}\\
2f(3) &= \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}\\
2f(5) &= \sqrt[3]{6} - \sqrt[3]{4}\\
&\vdots\\
2f(999997) &= \sqrt[3]{999998} - \sqrt[3]{999996}
\end{aligned}$$

Adicionando, membro a membro, as equações acima temos

$$f(1) + f(3) + \cdots + f(999997) + f(999999) = \frac{1}{2}\sqrt[3]{1000000} = 50.$$

$\square$

Exemplo 4.3. *Determine todas as funções* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tais que*

$$f\left((x-y)^2\right) = (f(x))^2 - 2xf(y) + y^2. \tag{4.4}$$

Demonstração. Fazendo $x = y = 0$ em (4.4), temos

$$f\left((0-0)^2\right) = (f(0))^2 - 2 \cdot 0 \cdot f(0) + 0^2 \Leftrightarrow f(0) = (f(0))^2 \Leftrightarrow f(0)\left[f(0) - 1\right] = 0.$$

Há, então, dois casos:

Caso 1. $f(0) = 0$. Escolhendo $y = x$ em (4.4), teremos

$$f\left((x-x)^2\right) = (f(x))^2 - 2xf(x) + x^2 \Leftrightarrow (f(x) - x)^2 = 0.$$

Daí, temos $f(x) = x$, onde x é um número real qualquer.

Caso 2. $f(0) = 1$. Novamente escolhendo $x = y$ em (4.4), teremos

$$f\left((x-x)^2\right) = (f(x))^2 - 2xf(x) + x^2 \Leftrightarrow (f(x))^2 - 2xf(x) + x^2 = 1 \Leftrightarrow (f(x) - x)^2 = 1$$

Logo, $f(x) = x + 1$ ou $f(x) = x - 1$.
Testando $f(x) = x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$, temos:

$$\begin{aligned} f\left((x-y)^2\right) = (f(x))^2 - 2xf(y) + y^2 &\Leftrightarrow (x-y)^2 + 1 = (x+1)^2 - 2x(y+1) + y^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 2xy + y^2 + 1 = x^2 + 2x + 1 - 2xy - 2x + y^2 \\ &\Leftrightarrow (x-y)^2 = (x-y)^2. \end{aligned}$$

Portanto é válido.

Testando $f(x) = x - 1, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f\left((x-y)^2\right) = (f(x))^2 - 2xf(y) + y^2 &\Leftrightarrow (x-y)^2 - 1 = (x-1)^2 - 2x(y-1) + y^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 2xy - y^2 - 1 = x^2 - 2x + 1 - 2xy + 2x + y^2 \\ &\Leftrightarrow (x-y)^2 = (x-y)^2 + 2, \end{aligned}$$

o que é um absurdo. Então, as soluções são $f(x) = x$ ou $f(x) = x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

$\square$

Exemplo 4.4. *(Suíça/99): Determine todas as funções $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ satisfazendo:*

$$\frac{1}{x} f(-x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = x, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^*.$$

Demonstração. Uma tática bem interessante em problemas de equações funcionais é tentar "trocar"o que aparece dentro de dois $f's$ de lugar. Nesse caso, fazendo $x = -\frac{1}{x}$ na equação original, temos:

$$\frac{1}{-\frac{1}{x}} f\left(-\left(-\frac{1}{x}\right)\right) + f\left(\frac{1}{-\frac{1}{x}}\right) = -\frac{1}{x} \Rightarrow -xf\left(\frac{1}{x}\right) + f(-x) = \frac{1}{x}$$

Daí temos

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{f(-x) + \frac{1}{x}}{x}, \tag{4.5}$$

Substituindo (4.5) na equação original:

$$\frac{1}{x} f(-x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{f(-x) + \frac{1}{x}}{x} = x,$$

logo

$$2f(-x) = x^2 - \frac{1}{x}, \forall x \in \mathbb{R}^*. \tag{4.6}$$

fazendo $x = -x$ em (4.6):

$$2f(-(-x)) = (-)^2 - \frac{1}{-x} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}\left(x^2 + \frac{1}{x}\right), \forall x \in \mathbb{R}^*.$$

Testando, $f(x) = \frac{1}{2}\left(x^2 + \frac{1}{x}\right), \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$ na equação original, temos:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x}f(-x) + f(\frac{1}{x}) = &\Leftrightarrow \frac{1}{2x}\left((-x)^2 + \frac{1}{-x}\right) + \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{x}\right)^2 + \frac{1}{\frac{1}{x}}\right) = x \\
&\Leftrightarrow \frac{x}{2} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2x^2} + \frac{x}{2} = x \\
&\Leftrightarrow x = x.
\end{aligned}$$

Portanto, a solução é $f(x) = \frac{1}{2}\left(x^2 + \frac{1}{x}\right), \forall x \in \mathbb{R}^*$ □

Exemplo 4.5. *(Países Baixos/2014) Determine todas as funções $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ que satisfaz*

$$f(f(m) + n) + f(m) = f(n) + f(3m) + 2014, \ \forall \ \ m, n \in \mathbb{Z}. \tag{4.7}$$

Demonstração. Primeiramente, tome $c = 1007$ e defina uma função auxiliar $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ por

$$g(m) := f(3m) - f(m) + 2c \ \forall \ \ m \in \mathbb{Z}.$$

Em particular, $g(0) = 2c$. Agora a equação funcional em (4.7) reescrevemos como

$$f(f(m) + n) = g(m) + f(n), \ \forall \ \ m, n \in \mathbb{Z}$$

Por indução em t, segue que

$$f(tf(m) + n) = tg(m) + f(n) \quad \forall \ \ m, n, t \in \mathbb{Z} \tag{4.8}$$

De fato, para $t = 1$ a igualdade em (4.8) é verdadeira pois $f(f(m) + n) = g(m) + f(n)$ é a nova forma que reescrevemos a função g.
Suponha que a igualdade seja válida para para um certo $t > 1$, ou seja,

$$f(tf(m) + n) = tg(m) + f(n)$$

Vamos mostrar que a igualdade é verdadeira para $t + 1$. Usando a definição de $g(m)$, temos

$$f((t+1)f(m) + n) + g(m) - g(m) =: f(tf(m) + n + f(m)) + f(f(m) + n) - f(n) - [f(f(m) + n) - f(n)],$$

por hipótese de indução,

$$tg(m) = f(f(m) + n) + f(n)$$

Mais uma vez, pela definição de $g(m)$

$$tg(m) - f(f(m)+n) + f(n) =: tg(m) - (-g(m)) + f(n) = tg(m) + g(m) + f(n)$$

Logo,

$$f((t+1)f(m)+n) = (t+1)g(m) + f(n).$$

Asim, (4.8) é válido para $t+1$. Portanto, pelo princípio de indução finita

$$f(tf(m)+n) = tg(m) + f(n), \ \forall \ \ t \in \mathbb{N}$$

Aplicando esse resultado para um certo r nas triplas $(r, 0, f(0))$ e $(0, 0, f(r))$ no lugar de (m, n, t) obtemos

$$f(0)g(r) = f(f(r)f(0)) - f(0) = f(r)g(0).$$

Agora se $f(0) = 0$, e pelo caso particular da função auxiliar g, ou seja $tg(0) = 2c > 0$ então $f(r) = 0$. $\square$

Agora se $f(0) \neq 0$ a equação anterior produz $g(r) = \alpha f(r)$, onde $\alpha = \frac{g(0)}{f(0)}$ é uma constante diferente de zero.
Portanto, da definição da função auxiliar g, temos

$$\begin{aligned}
\alpha f(m) = g(m) := f(3m) - f(m) + 2c &\Leftrightarrow f(3m) = \alpha f(m) + f(m) - 2c \\
&\Leftrightarrow f(3m) = f(m)(\alpha+1) - 2c \\
&\Leftrightarrow f(3m) - \frac{2c}{\alpha} = \alpha f(m) + f(m) - 2c - \frac{2c}{\alpha} \\
&\Leftrightarrow f(3m) - \frac{2c}{\alpha} = (1+\alpha)f(m) + (1+\alpha)\left(-\frac{2c}{\alpha}\right) \\
&\Leftrightarrow f(3m) - \frac{2c}{\alpha} = (\alpha+1)\left(f(m) - \frac{2c}{\alpha}\right)
\end{aligned}$$

Logo,

$$f(3m) - \beta = (1+\alpha)(f(m) - \beta) \ \forall \ \ m \in \mathbb{Z}, \quad \text{onde} \ \ \beta = \frac{2c}{\alpha}. \tag{4.9}$$

Por indução sobre k, implica

$$f(3^k m) - \beta = (1-\alpha)^k (f(m) - \beta), \forall \;\; m \in \mathbb{Z} \text{ e } k \geq 0. \tag{4.10}$$

De fato, para $k = 0$, $f(3^0 m) - \beta = (1+\alpha)^0 (f(m) - \beta)$.
Suponha que a igualdade em (4.10) seja válida para um certo $k > 0$, *ou seja,*

$$f(3^k m) - \beta = (1-\alpha)^k (f(m) - \beta),$$

vamos mostrar que vale para $k + 1$.
Como $3^k \cdot m$ *é inteiro pois,* 3^k *e* m *são inteiros, pela definição da função auxiliar* $g(m)$, *temos*

$$f(3^{k+1} m) - \beta = f(3 \cdot (3^k m)) - \beta := \Big[(1+\alpha)(f(3^k m) - \beta) + \beta\Big] - \beta$$

Daí, pela hipótese de indução temos

$$\Big[(1+\alpha)(f(3^k m) - \beta) + \beta\Big] - \beta = \Big[(1+\alpha)((1-\alpha)^k (f(m) - \beta)) - \beta) + \beta\Big] - \beta$$

Logo,

$$f(3^{k+1} m) - \beta = (1-\alpha)^{k+1} (f(m) - \beta),$$

isso mostra que a igualdade (4.10) é válida para $k + 1$. *Portanto, pelo princípio de indução finita*

$$f(3^k m) - \beta = (1-\alpha)^k (f(m) - \beta), \;\forall \;\; k \geq 0.$$

Desde $3 \nmid 2014$, *existe por (4.7) um certo valor* $d = f(a)$ *alcançado por* f *não é divisível por 3. Agora em (**??**) nós temos* $f(n + td) = f(n) + tg(a) = f(n) = f(n) + \alpha \cdot tf(a)$, *pois* $g(r) = \alpha f(r)$, *então*

$$f(n + td) = f(n) + \alpha \cdot td, \;\;\forall \;\; n, t \in \mathbb{Z}. \tag{4.11}$$

Vamos corrigir qualquer número inteiro k *com* $d \mid (3^k - 1)$, *o que é possível já que* $(3, d) = 1$, *pelo teorema Euler-Fermat (ver Apêndice(5.5)), podemos tomar* $k = \varphi(|d|)$. *Agora para cada* $m \in \mathbb{Z}$ *temos*

$$f(3^k m) = f(m) + \alpha(3^k - 1)m. \tag{4.12}$$

A partir de (4.10) e de (4.12), temos

$$\begin{aligned} f(3^k m) - \beta = (1-\alpha)^k (f(m) - \beta) &\Leftrightarrow f(3^k m) - \beta = (1-\alpha)^k f(m) - (1-\alpha)^k \beta \\ &\Leftrightarrow f(m) + \alpha(3^k - 1)m - \beta = (1+\alpha)^k f(m) - \beta(1+\alpha)^k \\ &\Leftrightarrow \alpha(3^k - 1)m = (1+\alpha)^k f(m) - f(m) - \beta(1+\alpha)^k + \beta \\ &\Leftrightarrow \alpha(3^k - 1)m = f(m)[(1+\alpha)^k - 1] - \beta[(1+\alpha)^k - 1] \\ &\Leftrightarrow \alpha(3^k - 1)m = ((1+\alpha)^k - 1)(f(m) - \beta). \end{aligned}$$

Desde $\alpha \neq 0$, o lado direito da igualdade não desaparece com $m \neq 0$. Portanto, o primeiro fator do lado esquerdo também não pode desparecer.Segue que,

$$\frac{\alpha(3^k - 1)}{(1+\alpha)^k - 1} \cdot m + \beta.$$

Note que, $(1+\alpha)^k - 1 \neq 0$. Com efeito,

$$\begin{aligned} \alpha \neq 0 &\Leftrightarrow 1 + \alpha \neq 1 + 0 \\ &\Leftrightarrow (1+\alpha)^k \neq 1^k \\ &\Leftrightarrow (1+\alpha)^k - 1 \neq 0. \end{aligned}$$

Então f é uma função linear, digamos

$$f(m) = Am + \beta, \ \forall \ \ m \in \mathbb{Z}, \tag{4.13}$$

com algum $A \in \mathbb{Q}$ constante.
Conectando (4.13) em (4.7), obtemos

$$\begin{aligned} f(f(m)+n) + f(m) = f(n) + f(3m) + 2014 &\Leftrightarrow f(Am + \beta + n) + Am + \beta = An + \beta + A \cdot 3m + \beta + 2014 \\ &\Leftrightarrow A^2 m + A\beta + An + \beta Am + \beta = An + \beta + 3Am + \beta + 2014 \\ &\Leftrightarrow A^2 m + A\beta - 2Am - 2014 = 0 \\ &\Leftrightarrow (A^2 - 2A)m + A\beta + 2014 = 0, \end{aligned}$$

como $c = 1007$, temos

$$(A^2 - 2A)m + (A\beta + 2c) = 0, \ \forall \ \ m \in \mathbb{Z}, \tag{4.14}$$

que é equivalente a conjunção de $A^2 = 2A$ e $A\beta = 2c$.

A primeira equação equivale a $A \in \{0, 2\}$, como $c \neq 0$, temos

$$A = 2 \ \ e \ \ \beta = c = 1007$$

Isto mostra que f é

$$f(n) = 2n + 1007, \ \forall \ \ n \in \mathbb{Z}.$$

Exemplo 4.6. *(Croácia) Determine todas as funções $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ com a propriedade que*

$$f(x - f(y)) = f(f(x)) - f(y) - 1, \ \forall \ \ x, y \in \mathbb{Z} \tag{4.15}$$

Fazendo $x = 0$ e $y = f(0)$ em (4.15), obtemos

$$f(0 - f(f(0))) = f(f(0)) - f(f(0)) - 1 \Leftrightarrow f(f(0)) = f(f(0)) - f(f(0)) - 1 \Leftrightarrow f(f(0)) = -1$$

Fazendo $z = -f(f(0)) = f(y)$ na última igualdade temos

$$f(z) = -1, \ \forall \ \ z \in \mathbb{Z},$$

Com isso e conectando $y = z$ em (4.15), deduzimos que

$$f(x + 1) = f(f(x)), \ \forall \ \ x \in \mathbb{Z}, \tag{4.16}$$

Com efeito,

$$\begin{aligned} f(x - f(z)) = f(f(x)) - f(z) - 1 &\Leftrightarrow f(x - (-1)) = f(f(x)) - (-1) - 1 \\ &\Leftrightarrow f(x + 1) = f(f(x)). \end{aligned}$$

Assim, a equação em (4.15) se reduz em

$$f(x - f(y)) = f(x + 1) - f(y) - 1 \ \forall \ \ x, y \in \mathbb{Z}. \tag{4.17}$$

Agora trabalhamos para mostrar que f é linear contemplando a diferença $f(x+1) - f(x), \ \forall \ \ x \in \mathbb{Z}$ Aplicando (4.17) e (4.16) nesta ordem com $y = x$, obtemos

$$f(x + 1) - f(x) = f(x - f(x)) + 1,$$

note que $f(x - f(x))$ por (4.16) é $f(f(x - 1) - f(x))$.

Portanto, $f(x+1)-f(x) = f(x-f(x))+1 = f(f(x-1-f(x)))+1$. De (4.17) temos $f(x-1-f(x)) = f(x) - f(x) - 1 = 1$, que concluímos que $f(x-1-f(x)) = -1$, daí temos

$$f(x+1) = f(x) + A,$$

onde $A = f(-1) + 1$ é alguma constante.
Agora uma indução padrão em ambas as direções revela que f é realmente linear e desse fato temos

$$f(x) = Ax + B, \forall \ \ x \in \mathbb{Z}. \ com \ B = f(0)$$

Substituindo esse resultado em (4.16), temos

$$Ax + (A+B) = A^2x + (AB+B), \quad \forall \ \ x \in \mathbb{Z} \tag{4.18}$$

De fato, $A(x+1) + B = f(Ax+b) = A(Ax+B) + B \Leftrightarrow Ax + (A+B) = A^2x + (AB+B)$.
Denotando $x = 0$ e $x = 1$ em (4.18) obtemos $A + B = AB + B$ e $A^2 = A$. Com efeito,

$$\textit{(Para x=0)} \qquad A \cdot 0 + (A+B) = A^2 \cdot 0 + AB + B \Leftrightarrow A + B = AB + B,$$

e

$$\textit{(Para x=1)} \qquad A \cdot 1 + (A+B) = A^2 \cdot 1 + AB + B \Leftrightarrow A + A + B = A^2 + AB + B,$$

assim

$$\begin{cases} A = AB \\ 2A = A^2 + AB \end{cases}$$

resolvendo, o sistema temos $A = 1$ ou $A = 0$.
No caso $A = 1$ a primeira equação dá $B = 1$ o que significa que f deve ser uma função sucessora, isto é, $f(x) = x + 1, \ \ \forall \ \ x \in \mathbb{Z}$. No caso $A = 0$ a função f é constante, e (4.15) mostra que seu valor constante deve ser -1.
Com efeito, conectando $f(x) = B, \ \ \forall \ \ x \in \mathbb{Z}$ em (4.15) temos

$$\begin{aligned} f(x - f(y)) = f(f(x)) - f(y) - 1 &\Leftrightarrow f(x - B) = f(B) - f(B) - 1 \\ &\Leftrightarrow B = B - B - 1 \\ &\Leftrightarrow B = -1. \end{aligned}$$

Assim, a solução está completa.

É imediatamente verificado se ambas as funções mencionadas na resposta são as desejadas.

Capítulo 5

Apêndice A

Apresentaremos os resultados e as definições cruciais que serão utilizados em todo ao texto.

Comecemos com a definição de pontos aderentes e, a partir deste, definiremos o fecho de um subconjunto de $\mathbb{R}$ (conjunto dos números reais).

Definição 5.1. *(Ponto Aderente) Seja $X \subseteq \mathbb{R}$(subconjunto do corpo $\mathbb{R}$). Dizemos que $x \in \mathbb{R}$ é ponto aderente a X se existe uma sequência $(x_n) \subseteq X$ tal que $\lim x_n = x$.*

Exibiremos, abaixo, alguns exemplos de pontos aderentes e não-aderentes a alguns conjuntos.

Exemplo 5.1. *Observe que 0 é aderente a $X = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$, pois $(1/n) \subseteq X$ e $\lim \frac{1}{n} = 0$.*

Exemplo 5.2. *O ponto a é aderente a (a, b). Com efeito, a sequência $(a+\frac{1}{n})$ para n suficientemente grande está contida em (a, b) e $\lim(a+\frac{1}{n}) = a$. Analogamente, b é aderente a (a, b). Analogamente,*

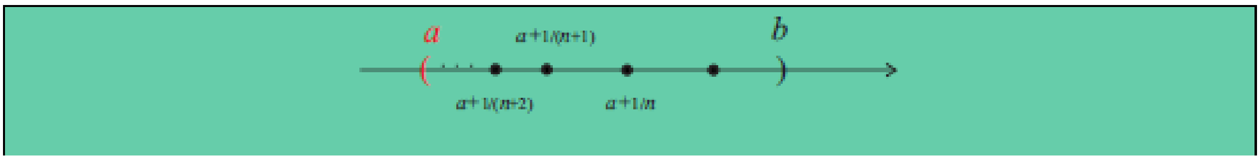


Figura 5.1: a é ponto aderante a (a, b)

prova-se que a e b são aderentes a $(a, b], [a, b), (a, \infty), [a, \infty], (-\infty, b), (-\infty, b]$. Observe que, se $(x_n) \subseteq (a, b)$ é uma sequência convergente, então

$$a < x_n < b, \forall \ \ n \in \mathbb{N} \Rightarrow a \leq \lim x_n \leq b.$$

Ou seja, se x é aderente a (a,b), então $x \in [a,b]$, $b+1$ não é aderente a (a,b). Analogamente, se x é aderente a $(a,\infty),[a,\infty)$ então $x \in [a,\infty)$ e se x é aderente a $(-\infty,b),(-\infty,b]$ então $x \in (-\infty,b]$.

Agora vamos a definição de fecho de um subconjunto de $\mathbb{R}$ (conjunto dos números reais).

Definição 5.2. Seja $X \subseteq \mathbb{R}$ um subconjunto do corpo $\mathbb{R}$. Chamamos o conjunto

$$\overline{X} = \{x \in \mathbb{R} : x \text{ é ponto aderente a } X\}$$

de fecho do conjunto X. Aqui um ponto x é aderente a X se dado $\varepsilon = \varepsilon(x) > 0$, é verdade que $X \cap (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \neq \emptyset$.

Um exemplo de fecho que será utilizado neste trabalho é o seguinte:

Exemplo 5.3. Naturalmente sabe-se que $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. De fato, sabemos que todo intervalo contém um número racional (para mais detalhes ver [5]), sendo assim, dados $x \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon > 0$, tem-se

$$(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset.$$

Logo, $x \in \overline{\mathbb{Q}}$, ou seja, $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

Discutiremos a seguir definições e resultados sobre sequências de números reais.

Definição 5.3. Uma função $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ dada por $x(n) = x_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, é denominada uma sequência de números reais. Neste caso, a imagem x_n de um dado número $n \in \mathbb{N}$ é chamada n-ésimo termo da sequência $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Notações: $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(x_1, x_2, ..., x_n, ...)$ ou (x_n), esta última quando não houver possibilidade de confusão.

Neste texto, também precisaremos da definição de limite de uma sequência constituída de números reais.

Definição 5.4. Seja (x_n) uma sequência. Dizemos que o limite de x_n é $x \in \mathbb{R}$ se dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\text{para todo } n \geq N, \text{com } n \in \mathbb{N}, \text{tem-se } x_n \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon).$$

Neste caso, escreveremos $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ ou $x_n \to x$. É comum dizermos, nestas condições, que x_n tende para x.

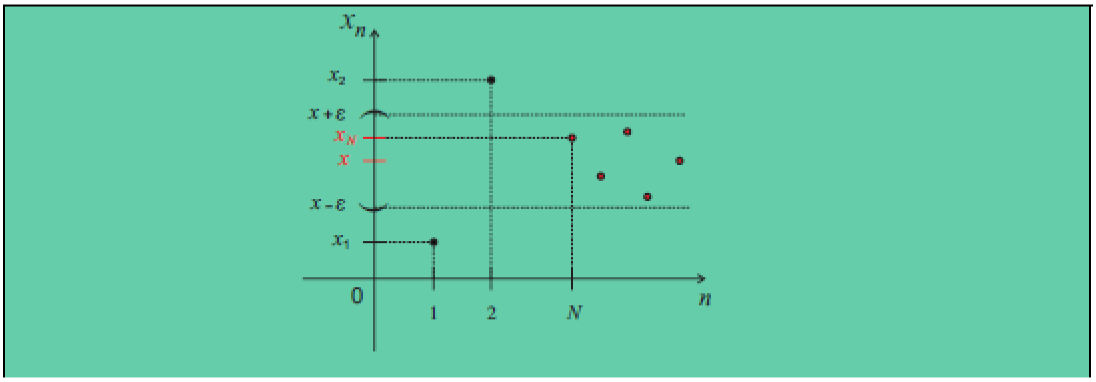


Figura 5.2: $\lim x_n = x$ é ponto aderante a (a, b)

Permita-nos informar que é possível definir ponto aderente através do conceito de sequências. Mais especificamente, temos o seguinte resultado.

Teorema 5.1. *Seja $X \subseteq \mathbb{R}$. Então, $x \in \mathbb{R}$ é ponto aderente a X se, e somente se, existe uma sequência $(x_n) \subseteq X$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.*

Um outro conceito que será utilizado ao longo da dissertação será sobre funções contínuas.

Definição 5.5. Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ e $y \in X$. Dizemos que f é contínua no ponto $y \in X$ se, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\forall\ x \in X \text{ com } |x - y| < \delta, \text{ tem-se } |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

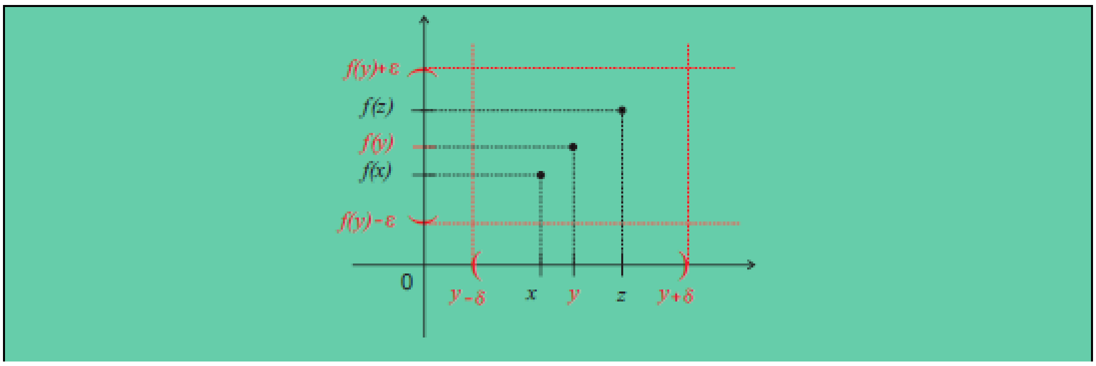


Figura 5.3: continuidade em $y \in X$

Dizemos que f é uma função contínua em X, ou simplesmente contínua, se f é contínua em cada ponto de X.

Exemplo 5.4. *A solução da E.D.O $y' = ky$ a função $f(x) = e^{kx}$ é uma função contínua.*

Uma caracterização para continuidade pode ser atribuída ao seguinte Teorema (ver [5]).

Teorema 5.2. *É fato que $f : X \to \mathbb{R}$ é contínua em $y \in X \Leftrightarrow \forall\ (x_n) \subseteq X$ com $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = y$, tem-se $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(y)$.*

Demonstração. $\Rightarrow$) Suponha que f é contínua em $y \in X$. Seja $(x_n) \subseteq X$ com $\lim x_n = x$ Dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\forall\ \ x \in X \ \ com \ \ |x - y| < \delta, \ \ tem - se \ \ |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Como $\lim x_n = x$, então $\exists\ \ N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall\ \ n \geq N, \quad \mathrm{infere-se} \quad |\mathrm{x_n - y}| < \delta.$$

Daí,$\forall n \geq N$, concluímos que

$$|f(x_n) - f(y) < \varepsilon,$$

ou seja, $\lim f(x_n) = f(y)$.

$\Leftarrow$) Suponha que f é descontínua em $y \in X$. Assim $\exists\ \ \varepsilon > 0$ tal que, dado $\delta > 0$, encontra-se

$$x_\delta \in X \quad \mathrm{com} \quad |\mathrm{x_\delta - y}| \ \ \mathrm{e} \ \ |\mathrm{f(x_\delta) - f(y)}| \geq \varepsilon.$$

Faça $\delta = 1, 1/2, \cdots, 1/n, \cdots$ com $n \in \mathbb{N}$. Portanto, existe $(x_n) \subseteq X$ tal que

$$0 \leq |x_n - y| < \frac{1}{n} \ \ e \ \ |f(x_\delta) - f(y)| \geq \varepsilon.$$

Pelo Teorema do Sanduíche, temos que $\lim x_n = y$ e $|f(x_n) - f(y)| \geq \varepsilon$. Se $\lim f(x_n) = f(y)$ teríamos então que

$$0 = \lim |f(x_n) - f(y)| \geq \varepsilon,$$

ou seja, $\varepsilon \leq 0$. Isto é um absurdo. Dessa forma, f é contínua em y. $\square$

O conceito de função monótona também desempenhará papel importante em nosso trabalho.

Definição 5.6. Seja $f : X \to \mathbb{R}$. Dizemos que f é não-decrescente (respectivamente, não-crescente) se $x, y \in X$ com $x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$ (respectivamente, $f(x) \geq f(y)$). Se $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$ (respectivamente, $f(x) > f(y)$), dizemos que f é crescente (respectivamente, decrescente). Em qualquer destes casos, f é dita uma função monótona.

Exemplo 5.5. *Seja* $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*_+, \quad h(x) = \log_a x_2$.
Para $a \neq 0, \quad a \neq 1$, *para* $x_1 < x_2, \quad \log_a x_1 < \log_a x_2$.

A seguir no espectro do estudo de funções, precisaremos dos conceitos a seguir.

Definição 5.7. Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ chama-se limitada inferiormente (respectivamente, superiormente) se $f(X) \subseteq \mathbb{R}$ é um conjunto limitado inferiormente (respectivamente, superiormente). f é dita limitada quando esta é limitada inferior e superiormente. Aqui, dizemos que um conjunto $X \subseteq \mathbb{R}$ é limitado inferiormente (respectivamente, superiormente) se existe $c \in \mathbb{R}$ (respectivamente, existe $d \in \mathbb{R}$) tal que $c \leq x$ (respectivamente, $x \leq d$), para todo $x \in X$. Neste caso, c (respectivamente, d) é denominado cota inferior (respectivamente, cota superior) de X.

Exemplo 5.6. $\mathbb{N}$ *é limitado inferiormente por* 1, $\mathbb{R}_-$ *é limitado superiormente por* 0 *e* $X = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ *é limitado inferior e superiormente, respectivamente, por* 0 *e* 1. *Os intervalos* $(a, b), [a, b], (a, b], [a, b)$ *são conjuntos limitados por* a *e* b.

Por fim, precisaremos das definições das funções seno e cosseno hiperbólicos.

Definição 5.8. As funções $\operatorname{senh}, \cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \text{e} \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

são denominadas seno e cosseno hiperbólicos, respectivamente.

Definição 5.9. *A partir da definição acima, considere as seguintes propriedades:*

$$\cosh(u + v) = \cosh u \cosh v + senh u senh v, \quad \forall u, v \in \mathbb{R}$$

e,

$$senh(u + v) = senh u \cosh v + senh v \cosh u, \quad \forall u, v \in \mathbb{R}.$$

Esta regra para dedução desta fórmula é conhecida como Regra de Osborne (para mais detalhes ver [8])

Agora estabeleceremos a definição precisa de Integral de Riemann. Para este fim, comecemos com as definições de supremo e ínfimo de conjuntos de números reais.

Definição 5.10. (Supremo) Seja $X \subseteq \mathbb{R}$ um conjunto não-vazio e limitado superiormente. O supremo do conjunto X, denotado por $\sup X$, é definido como sendo a menor das cotas superiores de X, ou seja,

i) $\sup X$ é cota superior de X;

ii) se y é cota superior de X, então $\sup X \leq y$.

Obs 5.1. *O item ii) pode ser substituído por uma das seguintes afirmações equivalentes:*

i') se $y < \sup X$ então y não é cota superior de X;

ii") Dado $\varepsilon > 0$, existe $x \in X$ tal que $\sup X - \varepsilon < x$.

Figura 5.4: Visualização do item ii")

Definição 5.11. (Ínfimo) Seja $X \subseteq \mathbb{R}$ um conjunto não-vazio, limitado inferiormente. O ínfimo de X, denotado por $\inf X$, é definido como sendo a maior das cotas inferiores, ou seja,

i) $\inf X$ é uma cota inferior de X;

ii) Se y é cota inferior de X, então $y \leq \inf X$.

Obs 5.2. O item ii) da Definição (5.11) pode ser substituído por um dos seguintes itens equivalentes:

i') *se $\inf X < y$ então não é uma cota inferior de X;*

ii") *se y é cota inferior de X, então $x < \inf X + \varepsilon$.*

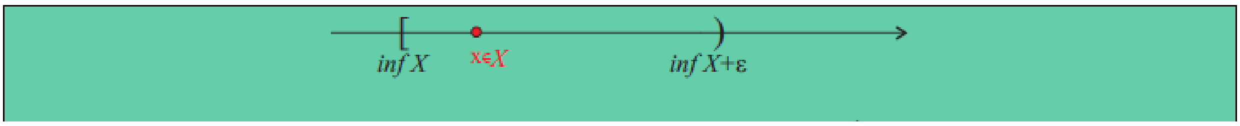


Figura 5.5: Visualização do item ii")

Agora, vejamos o que chamamos de partição de um intervalo.

Definição 5.12. Um subconjunto finito $P = \{t_0, t_1, ..., t_N\} \subseteq [a, b]$ do intervalo $[a, b]$ é denominado uma partição deste intervalo se $a, b \in P$. Por convenção, consideraremos que $a = t_0 < t_1 < ... < t_N = b$. Denotaremos a partição P por

$$P : a = t_0 < t_1 < ... < t_N = b.$$

Abaixo, definimos somas inferior e superior.

Definição 5.13. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Definimos as somas inferior e superior de f em relação à partição $P : a : t_0 < ... < t_N = b$, respectivamente, por

$$s^f(P) = \sum_{i=1}^{N} m_i^f (t_i - t_{i-1}) \quad \text{e} \quad S^f(P) = \sum_{i=1}^{N} M_i^f (t_i - t_{i-1}),$$

onde $m_i^f = \inf\{f(x) : x \in [t_{i-1}, t_i]\} \quad \text{e} \quad M_i^f = \sup\{f(x) : x \in [t_{i-1}, t_i]\}, \quad \forall\ i = 1, 2, ..., N.$

Vejamos como definir integrais inferior e superior.

Definição 5.14. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada. As integrais inferior e superior de f são definidas e denotadas, respectivamente, por

$$\underline{\int_a^b} f(x) \quad dx = \sup\{s^f(P) : P \ \text{ partição } \ \text{de } [a, b]\}, \quad \overline{\int_a^b} f(x) \quad dx = \inf\{S^f(P) : P \ \text{ partição } \ \text{de } [a, b]\}.$$

Abaixo, estabelecemos o que significa uma função real ser integrável a Riemann.

Definição 5.15. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitada. Dizemos que f é integrável a Riemann, ou simplesmente integrável, se

$$\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f.$$

Neste caso, definimos e denotamos a integral de f por

$$\int_a^b f = \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f.$$

Enunciaremos, agora, o Teorema Fundamental do Cálculo e o Teorema da Mudança de Variáveis. Para este fim, precisamos estabelecer as definições de limite e derivabilidade.

Definição 5.16. Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função real, onde $X \subseteq \mathbb{R}$. Seja $y \in \overline{X \setminus \{y\}}$. Dizemos que $l \in \mathbb{R}$ é o limite de $f(x)$ quando x tende a y, se dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in X$ que satisfaz $0 < |x - y| < \delta$, tem-se $|f(x) - l| < \varepsilon$. Neste caso, escrevemos $\lim\limits_{x \to y} f(x) = l$.

Definição 5.17. Sejam $X \subseteq \mathbb{R}$, $y \in X \cap (\overline{X \setminus \{y\}})$ e $f : X \to \mathbb{R}$. Dizemos que f é derivável em $y \in X \cap (\overline{X \setminus \{y\}})$ se

$$\lim_{x \to y} \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$$

existe. Dizemos que uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é derivável se f é derivável em cada ponto $y \in X \cap (\overline{X \setminus \{y\}})$.

Lembremos que toda função contínua é integrável.

Teorema 5.3. (Teorema Fundamental do Cálculo). *Sejam $I \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo e $y \in I$ um ponto fixo. Considere as funções $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$, onde f é contínua em I. Então, são equivalentes os seguintes itens:*

i) $g(x) = g(y) + \displaystyle\int_y^x f(t)\ dt, \ \forall\ x \in I$

ii) $g'(x) = f(x), \ \forall\ x \in I.$

Em palavras, g é uma integral indefinida de f se, e somente se, é uma primitiva para esta mesma função.

Demonstração. i) $\Rightarrow$ *ii)* Sejam $z, z+h \in I$. Assim, por propriedade da Integral a Riemann (ver em [5]), concluímos que

$$\begin{aligned}
\frac{g(z+h) - g(z)}{h} - f(z) &= \frac{g(y) + \displaystyle\int_y^{z+h} f(t)\ dt - \Big(g(y) + \displaystyle\int_z^y f(t)dt\Big)}{h} - \frac{\displaystyle\int_z^{z+h} f(z)\ dz}{h} \\
&= \frac{\displaystyle\int_y^{z+h} f(t)\ dt - \displaystyle\int_y^z f(t)\ dt}{h} - \frac{\displaystyle\int_z^{z+h} f(z)d(z)}{h} \\
&= \frac{\displaystyle\int_y^{z+h} f}{h} - \frac{\displaystyle\int_z^{z+h} f(z)}{h} \\
&= \int_z^{z+h} \frac{[f - f(z)]}{h}.
\end{aligned}$$

A integral de f existe, pois f é contínua, pois toda função contínua é integrável ver mais em ([5]). Além disso, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\mathrm{paratodo} \quad \mathrm{x \in I,} \quad \mathrm{com} \quad |\mathrm{x - y}| < \delta, \quad \mathrm{tem - se}\ |\mathrm{f(x) - f(z)}| < \epsilon$$

Dessa forma, por propriedades de integral (ver em [5]), com $0 < |h| < \delta \;\; e \;\; z + h \in I$, inferimos

$$\Big|\frac{g(z+h)-g(z)}{h} - f(z)\Big| = \Big|\int_z^{z+h} \frac{[f - f(z)]}{h}\Big| \leq \Big|\frac{1}{h}\Big| \int_z^{z+h} |f - f(z)|$$
$$\leq \Big|\frac{1}{h}\Big| \int_z^{z+h} \varepsilon \leq \Big|\frac{1}{h}\Big||h|\varepsilon = \varepsilon$$

pois $0 < |h| < \delta$ implica em $|x - z| < \delta$, para x entre z e $z + h$. Assim sendo,

$$\lim_{h \to 0} \Big|\frac{g(z+h)-g(z)}{h} - f(z)\Big| = 0,$$

isto é,

$$g'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{g(z+h)-g(z)}{h} - f(z).$$

ii) $\Rightarrow$ *i)* Reciprocamente, suponha que $g'(x) = f(x), \; \forall \;\; x \in I$. Defina $\lambda : I \to \mathbb{R}$ por

$$\lambda(x) = \int_y^x f, \; \forall \;\; x \in I.$$

Analogamente ao que foi feito acima,

$$\lambda'(x) = f(x), \; \forall \;\; x \in I.$$

Dessa forma, como por hipótese, $g'(x) = f(x)$, para todo $x \in I$, temos $\lambda'(x) = g'(x)$, isto é, $(\lambda - g)'(x) = 0$. Como toda função que possui derivada nula é constante, (ver em [5]), concluímos que $\lambda(x) - g(x) = k$, para todo $x \in I$, onde k é constante. Como

$$k = \lambda(y) - g(y) = \left(\int_y^y f\right) - g(y) = -g(y),$$

por propriedade da Integral a Riemann (ver [5]), então,

$$g(x) = \lambda(x) - k = g(y) + \int_y^x f, \; \forall \;\; x \in I.$$

$\square$

Uma aplicação do Teorema Fundamental do Cálculo bastante utilizada é a seguinte

Teorema 5.4. (Teorema da Mudança de Variáveis). *Sejam $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua e $h : [c,d] \to$*

$\mathbb{R} \in C^1$ *(isto é, derivável com derivada contínua), com* $h([c,d]) \subseteq [a,b]$. *Então,*

$$\int_{h(c)}^{h(d)} f = \int_c^d (f \circ h)h'.$$

Demonstração. Usando o Teorema (5.3), concluímos que

$$\int_{h(c)}^{h(d)} f = g(h(d)) - g(h(c)),$$

onde g é a primitiva de f em $[a,b]$. Pela regra da cadeia (ver [5]), concluímos que

$$(g \circ h)'(x) = g'(h(x))h'(x) = f(h(x))h'(x), \ \forall \ \ x \in [a,b].$$

Portanto, $g \circ h$ é a primitiva da função $(f \circ h) \circ h' : [c,d] \to \mathbb{R}$, a qual é contínua, pois f é contínua e h é contínua com derivada contínua.

Novamente, usando o Teorema 5.3, chegamos ao seguinte resultado:

$$\int_c^d (f \circ h)h' = g \circ h(d) - g \circ h(c) = g(h(d)) - g(h(c)) = \int_{h(c)}^{h(d)} f.$$

Por fim,

$$\int_c^d (f \circ h)h' = \int_{h(c)}^{h(d)} f.$$

□

Para concluir este capítulo enunciaremos a definição de sistema completo e o sistema reduzido de resíduos módulo m, e com isso provaremos o teorema de Euler/Fermat.

Definição 5.18. (Sistema Completo de Resíduos). *Um sistema completo de resíduos módulo m é qualquer lista de inteiros* $a_1, \cdots, a_n$ *dois a dois incongruentes.*

Definição 5.19. (Sistema Reduzido de Resíduos). *Um sistema reduzido de resíduos módulo é qualquer lista de inteiros* $r_1, \cdots, r_s$*, tais que:*

i) $(r_i, m) = 1, \ \forall \ \ i = 1, \cdots, s$, *onde* (r_i, m) *é o M.D.C entre* r_i *e* m*;*

ii) $r_i \not\equiv r_j \mod m$, se $i \neq j$*;*

iii) *Para cada* $n \in \mathbb{Z}$ *primo com* m *tem-se que* $n \equiv r_1 \mod m$, *para algum* $i = 1, \cdots, s$.

Exemplo 5.7. $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ *forma um sistema completo de resíduos módulo* 8. *Portanto* $1, 3, 5, 7$ *é um sistema reduzido de resíduos módulo* 8.

Teorema 5.5. (Teorema de Euler - Fermat). *Sejam* $m, a \in \mathbb{N}$ *com* $m > 0$ *e* $(a, m) = 1$. *Então*

$$a^{\varphi(m)} \equiv 1 \mod m.$$

Demonstração. Seja $r_1, \cdots, r_m$ um sistema reduzido de resíduos módulo m (ver 5.19).
Então $ar_1, \cdots, ar_{\varphi(m)}$ também é um sistema reduzido de resíduos módulo m.
Logo,

$$a^{\varphi(m)} \cdot r_1, \cdots r_{\varphi(m)} = (ar_1). \cdots .(ar_{\varphi(m)}) \equiv r_1. \cdots .r_{\varphi(m)} \mod m$$

Portanto

$$a^{\varphi(m)} \equiv 1 \mod m.$$

□

Exemplo 5.8. *Determinar o resto da divisão de* 3^{2014} *por 28.*

Sabemos que

$$3^{\varphi(28)} \equiv 1 \mod 28$$

Como

$$\varphi(28) = \varphi(2^2 \cdot 7) = 2^1 \cdot 1^0 \cdot (2-1) \cdot (7-1) = 12$$

Temos

$$3^{12} \equiv 1 \mod 28$$

Portanto

$$3^{2004} = (3^{12})^{167} \equiv 1 \mod 28 \Rightarrow 3^{2014} = 3^{2004} \cdot 3^{10} \equiv 3^{10} \equiv 25 \mod 28$$

Com isso o resto da divisão de 3^{2014} por 28 é 25.

Referências Bibliográficas

[1] ACZÉL, J., **Lectures on Functional Equations and Their Applications**, (2006).

[2] ANDREESCU, T., Boreico, T., **Functional Equations**, (2007).

[3] BEZERRA, Alex P.; TUESTA C. N., **Uma Introdução às Equações Funcionais**. Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT-CCEN-UFPB, 2014.

[4] LIMA, E. L., **Curso de Análise**, vol. 1, Décima Segunda Edição, Rio de Janeiro, IMPA, 2008.

[5] MELO, Wilberclay Gonçalves. **Análise na Reta**. Notas de Aula, UFS, 2016.

[6] Bonomi B., Maria Cristina **O gráfico de f(x)=1/x é uma hipérbole?**, IME -USP, São Paulo. Disponível http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/

[7] SMALL, C. G., **Functional Equations and How to Solve Them**. Problems Books in Mathematics, (2007).

[8] CARVALHO, P.C.P; MORGADO, A. C., **Matemática discreta**. SBM, 2013 (Coleção PROFMAT).

[9] HEFEZ, A., **Exercícios resolvidos de Aritmética**. SBM, 2016 (Coleção PROFMAT).

[10] HEFEZ, A.; FERNANDEZ, C.S., **Aritmética**. SBM, 2016 (Coleção PROFMAT).

[11] LÚCIA QUINTANILHA DE LIMA,Regina, **Cálculo Diferencial e Integral I**. Disponível http://www.uff.br/webmat/Calc1-LivroOnLine/index.html, Acesso em 22 de fev. 2016.

[12] Souza, Cleyson C.; Albuquerque Francisco S. B., **Algumas Equações Funcionais de Uma Variável e Aplicações**. Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT-CCT-UEPB, 2017.