Universidade Federal de Sergipe

Pro-Reitoria de Pós-Graduação e Pesquisa

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Dissertação

Problemas Diretos e Inversos no Ensino Básico

por

Cristiane Menezes Furtado Meireles

Mestrado Profissional em Matemática

Orientador: Prof. Dr. André Vinicius Santos Dória

São Cristóvão-SE

Junho de 2021

Universidade Federal de Sergipe

Pro-Reitoria de Pós-Graduação e Pesquisa

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Problemas Diretos e Inversos no Ensino Básico

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Cristiane Menezes Furtado Meireles

Orientador: André Vinicius Santos Dória

São Cristóvão-SE, Junho de 2021.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

	Meireles, Cristiane Menezes Furtado
M514p	Problemas diretos e inversos no ensino básico / Cristiane Menezes Furtado Meireles ; orientador André Vinicius Santos Dória. – São Cristóvão, 2021. 45 f. : il.
	Dissertação (mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Sergipe, 2021.
	1. Problemas inversos (Equações diferenciais). 2. Álgebra linear. 3. Mecânica celeste. 4. Matemática – Estudo e ensino. I. Dória, André Vinicius Santos orient. II. Título.
	CDU 51

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Problemas Diretos e Inversos no Ensino Básico

por

Cristiane Menezes Furtado Meireles

Aprovada pela banca examinadora:

Prof. Dr. André Vinicius Santos Dória- UFS
Orientador

Prof.Dr. Naldisson dos Santos- UFS
Primeiro Examinador

Prof. Dr. Filipe Dantas dos Santos- UFS
Segundo Examinador

São Cristóvão, 18 de Junho de 2021

Cidade Universitária "Prof. José Aloísio de Campos" – Av.Marechal Rondon, s/no - Jardim Rosa Elze – Campus de São Cristóvão. Tel. (00 55 79) 3194-6887
CEP: 49100-000 - São Cristóvão – Sergipe - Brasil – E-mail: promat.ufs@gmail.com

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, que desde o momento que resolvi me inscrever no Mestrado e apresentei a Ele, para que Sua vontade fosse feita na minha vida, tudo deu certo e durante todo o curso vivi o sobrenatural, em cada viagem, em cada aula, em cada prova, em cada momento.

Ao meu Esposo, que em todo momento esteve no meu lado me dando força, me ajudando, com muito amor. As minhas filhas, por cada oração, por cada sorriso, por cada gesto de carinho que me fortalecia a prosseguir.

A minha mãe, por toda palavra de incentivo e por todo amor. A meu irmão Rodrigo, uma inspiração que tenho na vida e que mesmo estando longe está o tempo todo me apoiando e me encorajando.

A meu primo Otávio, que me ajudou muito, que esteve ao meu lado todo tempo com muito carinho e dedicação. A tia Bel, por cada oração, por abrir as portas de sua casa com amor, me acolhendo, me dando carinho, me incentivando, me tratando como uma filha.

A todos os meus colegas do Profmat, em especial, Mary, Cinthia, Robson, David e Erivaldo que sempre se mostraram dispostos a discutir os conteúdos mais complicados e a tirar minhas dúvidas.

Aos meus professores do curso Profmat. A meu orientador, professor doutor André Vinicius, por sua dedicação e paciência na orientação deste trabalho, por solucionar cada dúvida gerada durante o processo. Sou grata pela oportunidade de ter sido sua orientanda.

A todos os amigos e familiares que de uma forma direta ou indireta, me ajudaram nessa conquista.

Obrigada de coração!!!

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Resumo

Este trabalho tem como objetivo principal abordar os problemas diretos e inversos em três grupos: introdutórios (aplicados no ensino fundamental e no ensino médio), em Cálculo Diferencial e em Álgebra Linear. Um problema inverso vem acompanhado de um problema direto, contudo identificar a escolha de quais problemas são diretos e quais são inversos não é totalmente preciso, pois não existem regras gerais para isso. Nos problemas introdutórios serão tratados as operações inversas, como por exemplo multiplicação e divisão. No Cálculo, temos a relação inversa entre diferenciação e integração e em Álgebra problemas de causalidade e identificação. Por fim, são apresentadas algumas propostas de sequência didática, cujo público alvo são os alunos do ensino fundamental e médio.

Palavras-chave: Problemas Inversos. Problemas Diretos. Mecânica Celeste. Causalidade. Identificação. Ensino de Matemática.

Abstract

This work has as main objective to approach the direct and inverse problems in three groups: introductory (applied in elementary and high school), in Differential Calculus and in Linear Algebra. An inverse problem is accompanied by a direct problem, however identifying the choice of which problems are direct and which are inverse is not entirely accurate, as there are no general rules for this. In introductory problems, inverse operations will be dealt with, such as multiplication and division. In Calculus, we have the inverse relationship between differentiation and integration and in Algebra, problems of causality and identification. Finally, some didactic sequence proposals are presented, whose target audience is elementary and high school students.

Keywords: Inverse Problems. Direct Problems. Celestial Mechanics. Causality. Identification. Mathematics Teaching.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Os problemas matemáticos podem ser divididos em dois tipos: diretos e inversos. Problemas diretos podem ser caracterizados como aqueles em que dadas informações suficientes para realizar um processo estável e bem definido leva a uma solução única. Normalmente, tal processo é descrito em detalhes com uma entrada apropriada e saída única. Já um problema inverso tem o objetivo de determinar a causa de um fenômeno, observando-se o efeito por ele produzido. Por exemplo, o problema de representar um número inteiro como o produto de dois números inteiros não tem solução única. Contudo, adicionando mais condições e conceitos (números primos, fatoração, ...) ao problema, afim de obtermos uma única solução, se observa a importância dos problemas inversos para o desenvolvimento e apresentação da Matemática.

Um problema inverso é colocado de uma forma invertida daquela em que a maioria dos problemas costumam ser apresentados. O problema direto determina o efeito y de uma determinada causa x e podemos modelar matematicamente da seguinte forma: $Ax = y$, onde A representa o processo. Para tais problemas, assumimos que há um único efeito y para cada causa x e pequenas alterações em x resultam em alterações (significantes ou não) em y. Portanto, dado um problema direto do tipo que acabamos de discutir, dois problemas inversos podem ser colocados:

(1) Os problemas inversos de causalidade: dados A e y, determine x;

(2) A identificação do modelo: dados x e y, determine A.

Nos problemas diretos, a unicidade e a estabilidade das soluções são assumidas, mas nos problemas inversos nenhum desses fenômenos podem ser tomados como certo e isso reforça o fato dos problemas inversos serem desafiadores e interessantes.

Correspondendo ao problema direto de determinar a força resistiva em um sólido movendo-se através de um fluido, Newton propôs o problema inverso de determinar uma forma que dá origem a dada força resistiva. Da mesma forma, Huygens, em seu projeto de um relógio de pêndulo isócrono, e Bernoulli, em seu estudo dos caminhos que levam a um determinado tempo de descida, estudaram problemas inversos. Ver[4]

Problemas inversos são importantes na Ciência e na Matemática, porque eles nos falam sobre parâmetros que não podemos observar diretamente. Eles têm ampla aplicação em identificação de sistema, óptica, radar, acústica, comunicação, processamento de sinais, imagens médicas, visão computacional, geofísica, oceanografia, astronomia, sensoriamento remoto, processamento de linguagem natural, aprendizado de máquina, testes não destrutivos, análise de estabilidade de declive e muitos outros campos.

Neste trabalho, os problemas inversos serão aplicados em Cálculo e Álgebra Linear. Além disso, teremos problemas inversos no cotidiano, no ensino fundamental e médio. No Capítulo 1, será apresentado os Problemas Inversos, que tem o intuito de despertar o interesse pelo assunto e servir de motivação para um estudo mais especifico no Cálculo Diferencial e Álgebra Linear. Já no Capítulo 2, terá aplicações de problemas inversos no ensino básico, em Cálculo Diferencial (como Mecânica Celeste e a Teoria do movimento de Newton) e em Álgebra Linear (problemas de causalidade e identificação). No Capítulo 3, será apresentado sequências didáticas, que podem ser aplicados no ensino fundamental e médio.

Capítulo 2

Problemas inversos

Uma definição do problema direto e inverso foi feita por Kirsch (1996), segundo esse autor dois problemas são considerados inversos entre si se a formulação de um deles necessitar do conhecimento total (ou parcial) do outro. No problema direto a informação deve ser completa e precisa. No problema inverso a informação pode ser incompleta e imprecisa.

O termo "problema inverso"apareceu na década de 1960 na Geofísica, por meio de experiências de causa-efeito e determinação de incógnitas nas equações da Física. Hoje, a noção de "problema inverso"denomina reconstrução de informações ausentes, a fim de determinar causas e/ou modelo e/ou parâmetros.

A descoberta de Le Verrier do planeta Netuno é um exemplo famoso de problemas inversos, mais especificamente a identificação da causa. No começo de século 19, os astrônomos ainda não haviam descoberto o planeta Netuno. O planeta mais distante então descoberto foi Urano, encontrado por Herschel em 1781. Quando os astrônomos aplicaram a teoria da gravitação universal de Newton ao movimento de Urano, a órbita calculada e o movimento não coincidiu com a órbita observada e o movimento.

Incentivado por Arago, Le Verrier começou em 1844 a trabalhar neste problema, usando perturbações inversas de características (massa, órbita e posição atual) do planeta hipotético que se supõe produzir as irregularidades observadas de Urano. Em seu relatório para a Academia de Ciências em 31 de agosto de 1846, Le Verrier apresentou os elementos orbitais deste novo planeta. Então, em 23 de setembro, o dia exato em que recebeu de LeVerrier uma carta detalhando sua posição prevista, o astrônomo berlinense Galle conseguiu observar o objeto. Arago declarou então à Academia de Ciências: "Sr.

Le Verrier percebeu a nova estrela sem nem mesmo lançar um único olhar para o céu; ele viu no final de sua pena."

A situação em que as fontes são diretamente acessíveis por medida é chamada de medida direta. No entanto, em muitos casos, as informações buscadas não são calculáveis diretamente. Em vez disso, está fisicamente conectado a outros valores calculáveis. Chamamos isso de medição indireta de avaliação. Embora esses valores calculáveis sejam evidentemente dependentes da física do fenômeno estudado, eles também dependem dos instrumentos de medição empregados. As leis da física que ligam as informações aos valores pesquisados, por exemplo, equações integrais ou derivadas parciais. A solução para um problema que calcula resultados observados de valores desconhecidos, ou um problema direto, é freqüentemente mais simples e mais fácil de dominar do que um problema inverso, que calcula valores desconhecidos de resultados observados.

Outra definição de problema inverso, é apresentada no livro de Engl et al. (1996): "Resolver um problema inverso é determinar causas desconhecidas a partir de efeitos desejados ou observados". Já os problemas diretos necessitam de um conhecimento completo e preciso das causas para a determinação dos efeitos. No esquema abaixo mostra-se a relação entre problema direto e inverso. Num modelo matemático, as causas são as condições iniciais e de contorno, e os efeitos são as propriedades calculadas a partir de um modelo direto, por exemplo, o campo de temperatura, concentração de partículas, corrente elétrica, etc.

$$\underset{causas}{X} \stackrel{\varrho}{\rightarrow} \underset{efeitos}{Y}$$

$$\underset{causas}{X} \stackrel{\varrho^{-1}}{\leftarrow} \underset{efeitos}{Y}$$

ϱ é o modelo direto e ϱ^{-1} é o modelo inverso

2.1 Na Antiguidade

A solução de problemas inversos tem sido um fator importante no desenvolvimento da Matemática e das Ciências. Essa razão por si só já justificaria o estudo de problemas inversos. Contudo, mais importante do que o estudo de quaisquer problemas inversos é estimular o hábito do "pensamento inverso" nos alunos. Se os alunos considerarem apenas o problema direto, eles não estarão olhando para a situação de todos os lados e não conseguirão ver o quadro completo. O hábito de sempre olhar os problemas do ponto de vista direto é limitado e o problema inverso é um ato de questionamento que deve ser sempre incentivado.

Os problemas inversos aparecem desde da antiguidade. Um antigo problema inverso é a história do banho de Arquimedes. O rei Hieron de Siracusa estava suspeitando que sua coroa de ouro estava adulterada e suspeitou que o ourives (pessoa que conserta e/ou vende artigos trabalhados em ouro) o havia enganado ao adulterar o ouro da coroa com um metal mais leve. Havia um método direto para testar sua suspeita: simplesmente derreter a coroa para determinar seu volume e comparar seu peso com um volume igual de ouro puro. Mas parecia uma vergonha destruir uma coroa tão bonita, então Hieron pediu a Arquimedes (287 AC - 212 AC) para conceber uma outra alternativa para verificar sua suspeita em relação ao ouro da coroa, o que é chamado na literatura técnica de hoje, uma avaliação não destrutiva (EQM). A ideia para a técnica de EQM mais antiga veio a Arquimedes um dia, enquanto ele estava tomando banho. Como diz Plutarco:

Segundo a história, Arquimedes, enquanto se lavava, pensou em uma forma de calcular a proporção de ouro na coroa do rei Hieron observando a quantidade de água que corria no banco de banho. Ele saltou como um possesso, gritando Eureka! Depois de repetir isso várias vezes, ele seguiu seu caminho.

O esquema de EQM de Arquimedes é tão simples quanto engenhoso. Use uma balança para pesar um pedaço de ouro de peso igual ao da coroa. Mergulhe o ouro na água e meça o volume deslocado. Se esse volume for menor que o deslocamento da coroa, então a coroa foi adulterada com um metal mais leve. Não é certo que este tenha sido realmente o método que Arquimedes usou, pois a diferença de volume poderia ser excessivamente pequena. Outra abordagem possível que Arquimedes poderia ter usado é equilibrar cuidadosamente a coroa com um peso igual de ouro e então mergulhar a balança, a coroa e o ouro na água para observar qualquer desequilíbrio a favor da amostra de ouro puro. Em qualquer caso, diz a tradição que o ourives foi considerado culpado de fraude e tendo recebido, provavelmente, consequências desagradáveis.

2.2 Na Prática

Para resolver um problema inverso, precisamos de um modelo matemático do evento e entender quais causas levam a quais efeitos. Então, dados os efeitos conhecidos, podemos usar a Matemática para encontrar as possíveis causas. Veremos exemplos de problemas inversos em Matemática e Física e em situações do dia-a-dia.

Alguns problemas inversos na Matemática e Física:

1- Encontre um polinômio $p(x)$ de grau n com as raízes $x_1, ..., x_n$. Isso é inverso ao problema direto de encontrar as raízes $x_1, ..., x_n$ de um determinado polinômio $p(x)$ de grau n. Neste caso, o problema inverso é mais fácil, tendo uma solução $p(x) = c(x - x_1)...(x - x_n)$, que não é único porque $c \neq 0$ é uma constante arbitrária.

2- Dada uma matriz simétrica real A de ordem n, e n números reais $\lambda_1, ..., \lambda_n$, encontre uma matriz diagonal D de modo que $A + D$ tenha autovalor $\lambda_1, ..., \lambda_n$. Isso é inverso ao problema direto de encontrar os autovalores $\lambda_1, ..., \lambda_n$ de $A + D$, onde A e D são uma matriz simétrica e diagonal, respectivamente.

3- Encontre a distribuição em massa $\rho(x)$ da matéria dentro da terra, dado o potencial gravitacional $\phi(x)$ para x na superfície da terra. Isso é inverso ao problema direto de encontrar $\phi(x)$ dado $\rho(x)$, que tem a solução

$$\phi(x) = \tfrac{G}{4\pi} \int \rho(x') / |x - x'| \, dx',$$

onde G é a constante gravitacional e $|x - x'|$ é a distância de x a x'. O problema inverso é importante na localização de regiões de alta ou baixa densidade dentro da terra, que podem conter minério ou petróleo, a partir de observações de anomalias no potencial gravitacional na superfície da terra.

4- Encontre o potencial intermolecular $V(r)$ entre duas moléculas separadas por uma distância r, dada a equação de estado de um gás composto por tais moléculas. Isso é inverso ao problema direto de encontrar a equação de estado, dado o potencial, que é um problema da Mecânica Estatística.

Alguns problemas inversos visto em situações do dia-a-dia:

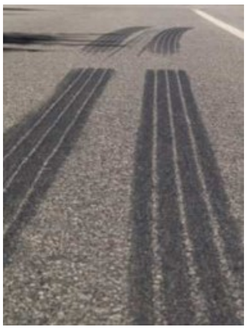
1- Combate ao crime.

Quando um crime é cometido, a polícia deve examinar todas as evidências deixadas na cena do crime e trabalhar de trás para frente para deduzir o que aconteceu e quem o fez. Freqüentemente, a evidência é resultado de um processo físico bem compreendido, como um carro em alta velocidade causando marcas de derrapagem. Portanto, para descobrir a causa exata da evidência (a velocidade do carro), a matemática que descreve a física precisa ser executada ao contrário. Isso significa resolver um problema inverso.

Vamos entrar em um dia comum na vida de uma unidade policial e ver como a matemática pode ajudar a combater o crime. Estamos investigando um acidente de carro e precisamos responder à pergunta: o carro estava em alta velocidade?

As evidências disponíveis são os danos por colisão nos veículos envolvidos, relatórios de testemunhas e marcas de derrapagem nos pneus. O exame das marcas de derrapagem pode ajudar a reconstruir o acidente. As marcas são causadas pela velocidade do carro e também por outros fatores como força de frenagem, atrito com a estrada e impactos com outros veículos.

Matematicamente, podemos usar a mecânica (Cinemática e Dinâmica) para modelar esse evento em termos do comprimento da derrapagem s, da velocidade do veículo v, da aceleração da gravidade g e do coeficiente de tempos de atrito da eficiência de frenagem μ. O modelo relaciona a causa (a velocidade do carro) ao efeito (a distância da derrapagem):



$$s = \frac{v^2}{2\mu g}$$

Isso pode ser reorganizado para que, dada a distância de derrapagem, possamos determinar a velocidade do carro:

$$v = \sqrt{2\mu g s}.$$

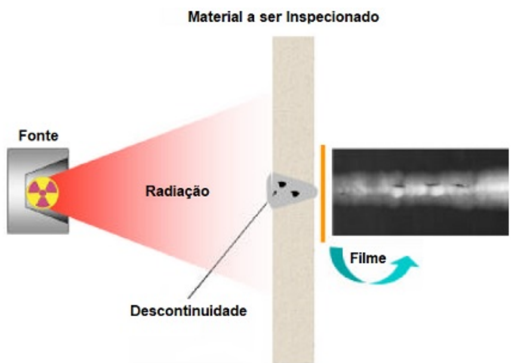
Contanto que tenhamos uma estimativa precisa do valor que descreve a eficiência de fricção e frenagem, podemos resolver o problema e determinar a velocidade do carro a partir de suas marcas de derrapagem.

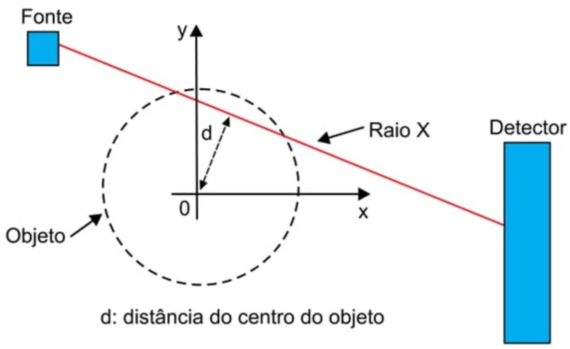
2- Salvando vidas.

Há pouco tempo, se você tinha algo errado com seu interior, precisava ser operado para descobrir o que era. Qualquer operação desse tipo trazia um risco significativo, especialmente no caso de problemas com o cérebro. De qualquer modo, já não é este o caso; os médicos são capazes de usar uma variedade de técnicas de escaneamento para olhar dentro de você de uma forma totalmente segura.

Um exemplo é uma tomografia computadorizada que detecta o efeito que a passagem por um corpo tem sobre os raios-X. Neste scanner, o paciente deita em uma cama e passa pelo orifício no meio do dispositivo, este orifício contém uma fonte de raios-X que gira em torno do paciente. Os raios-X desta fonte passam pelo paciente e são detectados no outro lado. O nível de intensidade do raio-X pode ser medido com precisão e os resultados processados.

Conforme um raio-X passa por um paciente, sua intensidade é reduzida. O grau em que isso acontece depende do material pelo qual o raio passa: sua intensidade é reduzida mais quando passa pelo osso do que quando passa pelo músculo, um órgão interno ou um tumor.





Um objeto é irradiado por vários raios-X com a intensidade dos raios medida em um detector. Alguns raios-X passam por todo o objeto e são fortemente absorvidos, de modo que sua intensidade (registrada no centro do detector) é baixa, enquanto outros passam menos pelo objeto e são menos absorvidos. Efetivamente, o objeto projeta uma sombra dos raios-X e a partir disso podemos calcular suas dimensões básicas.

A intensidade do raio-X onde atinge o detector depende da largura do objeto e do comprimento do caminho percorrido pelo objeto e pelo ar. Medindo com precisão a intensidade de muitos raios-X que passam por um objeto de muitos ângulos diferentes, as dimensões e o tamanho do objeto podem ser reconstruídos.

Ao passar do tempo, fica evidente o avanço na precisão e eficiência dessas técnicas tornando o exame mais fácil para os pacientes e mais útil para os médicos, e com sorte salvar mais vidas.

Estes são apenas dois exemplos em que a matemática nos ajuda a retroceder a partir de um resultado - seja a partir de marcas de derrapagem ou raios-X detectados em uma tomografia computadorizada. Contudo, existem diversas situações onde os problemas inversos estão presentes.

2.3 Cálculo Diferencial

O Cálculo é uma fonte rica de problemas inversos, pois a relação inversa entre diferenciação e integração está no centro do Cálculo. Além disso, a diferenciação aproximada, mostra a instabilidade dos problemas inversos envolvendo processos contínuos. Problemas inversos no Cálculo Diferencial envolvem uma série de conceitos e técnicas fundamentais do cálculo, incluindo o cálculo vetorial, coordenadas polares e geometria analítica de seções cônicas.

No início do século XVIII, o Cálculo Diferencial desenvolvido por Leibniz foi aplicado por Jacob Hermann, Pierre Varignon e Johann Bernoulli, no problema do movimento planetário, ou seja, descrever a órbita dos planetas sob a suposição de que seu movimento é determinado por uma força atrativa em direção ao Sol, que varia inversamente com o quadrado da distância.

Em 1679, Robert Hooke escreveu a Isaac Newton:

... e particularmente se você me deixar saber seus pensamentos sobre a composição dos movimentos celestiais dos planetas de um movimento direto pela tangente e um movimento atraente em direção ao corpo central.

Um período muito importante na vida de Newton foram os anos de 1664 a 1666, durante os quais obteve seus primeiros resultados importantes em Matemática e na Física. Newton inspirado por Napier e Cavalieri, fundamentou suas idéias em duas noções básicas: a de fluente e a de fluxão. Os fluentes eram as grandezas geradas e as fluxões as velocidades de movimento dessas grandezas, ou seja, o fluente corresponde a integral e a fluxão a derivada, daí ele encontrou os métodos direto e inverso das fluxões, que são a base do nosso cálculo diferencial e integral. A partir do método das tangentes, ele podia calcular derivadas, assim como podia calcular área, por meio de uma integral definida. Sua descoberta do Teorema Fundamental do Cálculo ligando a integração como sendo o inverso da diferenciação também vem desses anos.

Para falar sobre problemas inversos na Mecânica, vamos considerar a obra prima de Newton, o *Principia*. Newton apresentou seis fenômenos relacionados com as leis de Kepler dos movimentos dos corpos celestes e daí deduziu que a força da gravidade é inversamente proporcional ao quadrado das distâncias. Após chegar a esses resultados, Newton começou o processo inverso. Isto é, começando com uma força gravitacional variando com o inverso do quadrado da distância entre os corpos, proporcional a $1/r^2$, ele deduziu as leis de Kepler.

Assim, Newton partiu das leis de Kepler para então deduzir sua lei da gravitação universal. Depois, ele deduziu um conjunto de novos resultados, começando por: a força da gravidade proporcional ao produto das massas que estão interagindo e varia com o inverso do quadrado da distância entre elas.

Newton sempre considerou os aspectos inversos em todos os ramos de seus trabalhos, incluindo Matemática, Mecânica, Óptica e Filosofia. Essa característica de sua maneira de raciocinar e de considerar os diferentes problemas foi uma das principais fontes de sua criatividade na ciência.

2.4 Álgebra Linear

A Álgebra Linear permite descrever claramente as coordenadas e interações de planos em dimensões superiores e realizar operações nelas. Nos sistemas lineares de equações permite também a análise de rotações no espaço, ajuste de mínimos quadrados, solução de equações diferenciais acopladas, determinação de um círculo passando por três pontos dados, assim como muitos outros problemas em Matemática, Física e Engenharia.

Um problema central da álgebra linear é a solução da equação matricial. Dadas as matrizes A e $\mathbf{b}$, encontrar o vetor $\mathbf{x}$ que satisfaz essa igualdade

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

esse $\mathbf{x}$ é chamado de solução. Embora possa ser resolvido usando uma matriz inversa (caso A seja inversível)

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b},$$

pode ser resolvido também pela eliminação Gaussiana (que é um algoritmo para se resolver sistemas de equações lineares).

Os problemas inversos surgem em muitas aplicações importantes, incluindo imagens médicas, microscopia, geofísica e astrofísica, onde envolvem sistemas lineares de grande escala. Os problemas de Álgebra Linear associados a problemas inversos são matematicamente desafiador de resolver. Os esquemas de solução requerem normalização, usando, por exemplo, informações anteriores e/ou impondo restrições à solução. Além disso, aproximações de matriz e algoritmos para matrizes estruturadas devem ser empregados.

No problema básico da Álgebra Linear, resolver um sistema de equações lineares, é um problema inverso e existem três questões levantadas nos problemas inversos na Álgebra:

1º- Questões da existência - o problema deve ter uma solução;

2º- Unicidade das soluções - deve existir apenas uma solução para o problema;

3º- A instabilidade - a solução deve variar continuamente com os dados.

No contexto da Álgebra Linear, essa instabilidade dos problemas inversos se manifesta na forma de mau condicionamento de sistemas lineares, ou seja, o problema é considerado mal-posto se sua solução não existe, não é única e/ou não depende continuamente dos dados de entrada.

Na seção 2.3 será considerado vários conceitos fundamentais da Álgebra Linear dentro da estrutura de problemas inversos de causalidade e identificação. Ver[3]

Capítulo 3

Aplicações

Problemas Inversos envolvem a determinação de uma causa (desconhecida) a partir de um efeito (dado) medido ou observado e possuem uma vasta quantidade de aplicações em várias áreas. Além da relevância das aplicações, a formulação e solução de tais problemas envolvem o conhecimento de vários campos da matemática. Nesta seção veremos aplicações de problemas inversos no Ensino Básico, Cálculo diferencial e Álgebra Linear. Ver[6]

3.1 Problemas Introdutórios

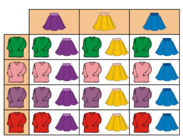
Problemas resolvidos por meio da multiplicação podem ser denominados *problemas diretos*, um exemplo é quando seu enunciado apresenta a quantidade de saias e blusas, sendo requerido a quantidade de trajes possíveis.

- **Problema 1**: Ana vai a uma festa e precisa escolher sua roupa. Ela separou 3 saias e 4 blusas. De quantas maneiras diferentes ela pode se arrumar?

  Esse problema pode ser resolvido de, pelo menos, duas maneiras distintas, como mostraremos a seguir:

  Solução 1 − Multiplicação Direta: $4 \times 3 = 12$.

  Solução 2 − Princípio Multiplicativo da Contagem.



Já os problemas solucionados por meio da divisão são denominados problemas inversos, um exemplo é quando seu enunciado apresenta o valor do produto e de uma parcela, sendo solicitado encontrar o valor da segunda parcela. Por exemplo: Ana foi viajar e ao arrumar sua mala onde só tinha saias e blusas, levou 12 trajes diferentes. Se ela levou 3 saias, quantas blusas ela levou para formar os 12 trajes?

Resolver esse problema, portanto, requer compreender que cada elemento do conjunto das 3 saias pode aparecer em diversas combinações com elementos do outro conjunto dos 12 trajes que Ana levou na mala, ou seja, resolvendo $12 : 3 = 4$ acharemos a quantidade de blusas que tem dentro da mala.

- **Problema 2**: Resolva a equação do $1^{\underline{o}}$ grau:

$$5x = 10.$$

O problema direto algébrico tem solução única: $x = 2$. Já o problema algébrico inverso $ax+b = 0$, com $x = 2$, , que tem como objetivo encontrar uma equação do $1^{\underline{o}}$ grau que tenha 2 como solução, não apresenta uma solução única, pois substituindo x por 2 na equação $ax + b = 0$ teremos $a = -b/2$.

- **Problema 3**: Na escola Dínamo, a professora de João foi calcular sua média em duas unidades e usou a seguinte fórmula:

$$M = \tfrac{U_I + U_{II}}{2},$$

onde U_I = nota da unidade I e U_{II} = nota da unidade II. Para resolver o problema direto, teremos os valores de U_I e U_{II} e acharemos o valor de M, que é a média aritmética das duas unidades. Já o problema inverso, teremos o valor da média M e daí descobriremos quais notas U_I e U_{II} João tirou para alcançar aquela média, onde teríamos várias soluções.

3.2 Furo no Reservatório

Se enchermos um tanque com água e fizermos um furo na lateral, o que acontece? Água vai jorrar do buraco, seguindo um arco e espirrar a alguma distância do tanque.

A física nos diz que a distância alcançada pelo jato (o alcance da queda inicial do jato) é claramente determinada por duas coisas: a altura do buraco e a velocidade com que a água emerge do buraco. A velocidade é determinada pela pressão ao nível do furo, que por sua vez depende da carga hidráulica, ou seja, a altura da coluna de água acima do furo. Essa relação foi descoberta por Torricelli (1608-1647).

Vamos desprezar o efeito da resistência do ar e assumir que a força anormal atuando em qualquer uma das gotas de água que emergem do buraco é a força constante da gravidade. Um jato que emerge com velocidade horizontal v manterá sempre essa velocidade na direção horizontal. Como não há força atuando na direção horizontal (estamos desprezando a resistência do ar), a queda sempre terá velocidade horizontal v e, portanto, no tempo t sua posição horizontal será

$$s = vt.$$

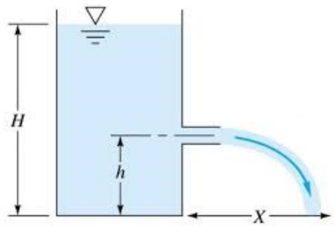


Figura 3.1: Reservatório com coluna d$'$água de altura H

A gota cai sob a influência da gravidade, sua posição vertical denotada por y é dada pela lei de Galileu para corpos caindo no vácuo:

$$y = h - \tfrac{g}{2}t^2,$$

onde g é a aceleração da gravidade e h é a altura do furo acima do fundo do tanque. A velocidade horizontal com que a água sai do buraco é dada pela Lei de Torricelli:

$$v = \sqrt{2g(H - h)},$$

onde H é a profundidade da água no tanque. A carga hidráulica é definida por $H - h$, ou seja, a profundidade da coluna de água acima do furo. Durante o instante em que o orifício é destampado pela primeira vez, o nível da água desce um pouco, diminuindo o volume de água no tanque. Se a massa deste volume de água for m e sua velocidade for

v, então sua energia cinética é $\frac{mv^2}{2}$. Se as forças de atrito forem ignoradas, a energia total será conservada e, portanto, essa energia cinética deve corresponder à energia potencial perdida pela água no tanque. Esta energia potencial é $mg\,(H-h)$ e, portanto,

$$\tfrac{1}{2}mv^2 = mg\,(H-h),$$

que dá a Lei de Torricelli.

O problema direto da Lei de Torricelli é determinar o alcance do jato, fornecidas tanto a altura da coluna d′água H quanto a altura do furo h.

Exemplo 1:

Um reservatório estava cheio de água e foi feito um furo na lateral. A profundidade H da água é de 10m e a altura h do furo é 4m. Qual a equação que descreve a trajetória do jato?

Dadas as seguintes equações: $s = vt$ e $v = \sqrt{2g(H-h)}$, substituindo v na equação $s = vt$

$$s = \sqrt{2g(H-h)}t.$$

Logo,

$$t = \tfrac{s}{\sqrt{2g(H-h)}}.$$

Substituindo na equação $y = h - \frac{g}{2}t^2$, obtêm-se

$$y = h - \tfrac{s^2}{4(H-h)}.$$

Substituindo $H = 10m$ e $h = 4m$, a equação que descreve a trajetória do jato é

$$y = 4 - \tfrac{s^2}{4(10-4)}.$$

$$y = 4 - \tfrac{s^2}{36}.$$

No Exemplo 2, vamos trabalhar com um problema inverso, ou seja, determinar a altura do furo h, dado H.

Exemplo 2:

Seja X, o alcance horizontal do jato, com $0 < X < H$. Mostre que há geralmente duas alturas de furo h que produzem esse alcance X.

Temos que $X = v.t_1$, onde $v = \sqrt{2g(H-h)}$ e t_1 é o tempo que leva para a primeira gota atingir o solo, ou seja, $h - \frac{g}{2}t_1^2 = 0 \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$.

Assim,

$$X = \sqrt{2g\left(H-h\right)}.\sqrt{\tfrac{2h}{g}}$$

$$X = \sqrt{4h\left(H-h\right)}$$

Elevando os dois lados da equação ao quadrado, temos:

$$\begin{aligned} X^2 &= 4h\left(H-h\right) \\ X^2 &= 4hH - 4h^2 \\ 4h^2 - 4hH + X^2 &= 0, \end{aligned}$$

resolvendo a equação do 2º grau:

$$\begin{aligned} \triangle &= \left(-4H\right)^2 - 4\left(4\right)\left(X^2\right) \\ \triangle &= 16H^2 - 16X^2 = 16\left(H^2 - X^2\right). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} h &= \tfrac{-(-4H)\pm\sqrt{16(H^2-X^2)}}{2(4)} \\ h &= \tfrac{4H\pm4\sqrt{H^2-X^2}}{8} \\ h &= \tfrac{H\pm\sqrt{H^2-X^2}}{2}. \end{aligned}$$

3.3 Mecânica Celeste

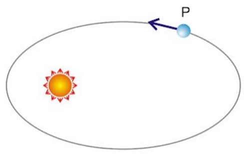
Vamos abordar um problema inverso elementar em mecânica celeste baseado na Teoria do movimento de Newton. Newton expôs essa teoria majestosa em seu livro *Princípios Matemáticos*, publicado em 1687. O objetivo dos *Princípios* era nada menos do que um tratamento rigoroso, axiomático e matemático do mundo físico. O tema central desse livro é a interação de força e movimento.

Há dois aspectos desse dueto: o problema direto de determinar o movimento, dada a força; o problema inverso de determinar a força, dado o movimento. Newton foi bastante explícito sobre a importância de ambos os pontos de vista. No prefácio da edição do *Princípios*, ele escreve:

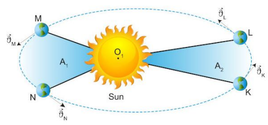
Eu ofereço este trabalho como os princípios matemáticos da filosofia, pois todo o fardo da filosofia parece consistir nisso - a partir dos movimentos investigamos as forças da natureza, e a partir dessas forças para demonstrar os outros fenômenos ...

Observe que Newton coloca o problema inverso primeiro. Ele tinha, graças a Kepler, informações precisas sobre os movimentos dos corpos celestes. Ele reconheceu que foi capaz de desenvolver seu sistema do mundo porque "se apoiou nos ombros de gigantes". Entre esses gigantes estavam Galileo Galilei e Johannes Kepler. De Galileo, Newton obteve a lei da queda dos corpos e (talvez) a lei da inércia: um corpo que não experimenta nenhuma força externa está em repouso ou se move com velocidade constante ao longo de uma linha reta. Kepler deu ao mundo as três grandes leis de sua nova astronomia "física":

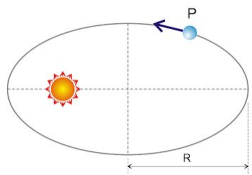
(1) A órbita de um planeta é uma elipse com o sol (o centro de atração) em foco.



(2) O vetor raio do sol a um planeta varre áreas iguais em tempo igual.



(3) O quadrado do período de um planeta é proporcional ao cubo do comprimento do eixo maior de sua órbita.



É importante lembrar que as leis de Kepler são *empíricas*, ou seja, uma expressão matemática que sintetiza, por meio de regressões, correlações ou outro meio numérico, uma série de resultados observados em diversos ensaios, sem que seja necessário para isto dispor de uma teoria que a sustente, nem explicar porque e por quais processos naturais/físicos funcionam. Daí, foi necessário Newton para estabelecê-los com base em princípios matemáticos.

Newton começou sua investigação matemática da gravidade em 1666. Naquela época, ele analisou a força necessária para manter a lua em sua órbita; considerou a órbita lunar circular de raio r e assumiu que a velocidade era constante. Assim, a velocidade era $v = \frac{2\pi r}{T}$, onde T é o período de revolução, que corresponde ao tempo gasto em uma volta completa e ele concluiu que a força na lua era $\frac{v^2}{r}$. Em seguida, Newton supôs que a terceira lei de Kepler se aplicava à lua, bem como aos planetas e, portanto, T^2 era proporcional a r^3, que denotaremos por $T^2 \cong r^3$. Ele então concluiu que

$$v \cong \tfrac{r}{T} \cong \tfrac{r}{r^{3/2}} = r^{-1/2}$$

e, portanto $v^2 \cong r^{-1}$. Daí, a força $\frac{v^2}{r}$ é proporcional a r^{-2}.

Newton provavelmente passou essa lei da suposta órbita circular da lua para as órbitas elípticas dos planetas. Dezoito anos depois, quando Halley visitou Newton em Cambridge e perguntou-lhe que tipo de curva orbital seria implicada por uma força gravitacional inversa do quadrado, Newton respondeu imediatamente: "uma elipse". Quando Halley perguntou como ele sabia disso, Newton respondeu: "Eu calculei isso ..." Essa reunião acabou levando à publicação do seu livro *Princípios Matemáticos*, no qual Newton fez da lei do quadrado inverso uma pedra angular de sua teoria e provou o resultado mais geral.

A estrutura matemática apropriada para o estudo do movimento é o cálculo vetorial. A posição de uma partícula pontual (em relação ao sistema de coordenadas usual) é dada por uma função vetorial $\mathbf{s}$, em função do tempo t:

$$\mathbf{s}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k},$$

onde os vetores $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$ são vetores canônicos de R^3; O comprimento de um vetor será indicado pelo mesmo símbolo sem negrito, por exemplo,

$$s(t) = \|\mathbf{s}(t)\| = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2}.$$

Vamos usar a notação de "ponto" de Newton para indicar a derivada de uma variável em relação ao tempo, por exemplo,

$$\dot{\mathbf{s}} = \tfrac{dx}{dt}\mathbf{i} + \tfrac{dy}{dt}\mathbf{j} + \tfrac{dz}{dt}\mathbf{k},$$

enquanto as derivadas com respeito as variáveis são indicadas pela notação d mais convencional de Leibniz.

A derivada da posição em relação ao tempo é a *velocidade* e a derivada da velocidade em relação ao tempo é a *aceleração*. Assumimos que nossa partícula pontual tem massa unitária e, portanto, pela lei do movimento de Newton, a aceleração $\mathbf{a}$ é a força que atua sobre a partícula.

Considere agora alguns problemas diretos para determinar o movimento da partícula, dada a força que atua sobre a partícula. A mais simples delas é a lei da inércia: se $\ddot{\mathbf{s}} = 0$, então, após duas integrações,

$$\mathbf{s}\left(t\right) = vt + b,$$

onde v e b são vetores constantes. E se $v \neq 0$, então a partícula viaja em uma linha reta com velocidade constante $\dot{\mathbf{s}}\left(t\right) = v$. Por outro lado, se $v = 0$, então a partícula está imóvel na posição b.

Vamos modelar o movimento planetário assumindo que o planeta é a partícula e que ele age apenas pelo sol, que colocamos na origem. Newton concebeu o sol como um atrator que atrai o planeta em sua direção. Ele supôs que a força que atrai o planeta em direção ao sol depende da distância r entre o planeta e o sol. Esta ideia de uma força *central* pode ser expressa em notação vetorial da seguinte maneira:

$$\ddot{\mathbf{s}} = -f\left(r\right)\tfrac{\mathbf{s}}{r},$$

onde f é uma função diferenciável em r, ou seja, uma força central é direcionada para a origem e depende apenas da distância da origem. O simples fato da força ser central tem duas consequências extraordinárias. Primeiro, se a força é central, então, por propriedades do produto vetorial, obtemos:

$$\mathbf{s} \times \ddot{\mathbf{s}} = -\tfrac{f(r)}{r}\mathbf{s} \times \mathbf{s} = 0,$$

e, portanto

$$\tfrac{d}{dt}\left(\mathbf{s} \times \dot{\mathbf{s}}\right) = \dot{\mathbf{s}} \times \dot{\mathbf{s}} + \mathbf{s} \times \ddot{\mathbf{s}} = 0 + 0 = 0.$$

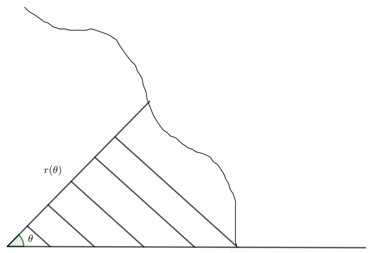
O vetor $\mathbf{s} \times \dot{\mathbf{s}}$ é chamado de *momento angular* da partícula. Esta equação diz que sob a ação de uma força central o momento angular é conservado, ou seja,

$$\mathbf{s} \times \dot{\mathbf{s}} = \mathbf{c},$$

para algum vetor constante $\mathbf{c}$. Qual é o significado geométrico disso? O vetor $\dot{\mathbf{s}}$ é tangente ao caminho do movimento, então a equação acima diz que a parte do movimento está no plano da origem, que é perpendicular a $\mathbf{c}$, pois $\mathbf{s}\cdot\mathbf{c} = \mathbf{s}\cdot(\mathbf{s} \times \dot{\mathbf{s}}) = (\mathbf{s} \times \mathbf{s})\cdot\dot{\mathbf{s}} = 0$. Portanto, sob a influência de uma força central, o movimento é *plano*. Isso simplifica a visualização e a análise do movimento direcionado para o centro.

É conveniente imaginar o movimento em um sistema de coordenadas polares, isto é,

$$\mathbf{s} = r\cos\theta\mathbf{i} + r\sin\theta\mathbf{j}.$$



Áreas em Coordenadas Polares

Considere agora a fórmula para a área A varrida pelo vetor raio de 0 a θ

$$A = \tfrac{1}{2}\int_0^\theta r\left(\alpha\right)^2 d\alpha.$$

A *taxa* na qual a área é varrida é, então, pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$\tfrac{dA}{dt} = \tfrac{1}{2}r\left(\theta\right)^2\theta.$$

Contudo,

$$\dot{\mathbf{s}} = \left(\dot{r}\cos\theta - r\sin\theta\,\dot{\theta}\right)\mathbf{i} + \left(\dot{r}\sin\theta + r\cos\theta\,\dot{\theta}\right)\mathbf{j},$$

e, portanto, pela conservação do momento angular,

$$\mathbf{c} = \mathbf{s}\times\dot{\mathbf{s}} = r^2\dot{\theta}\mathbf{k} = \tfrac{2}{c}\tfrac{dA}{dt}\mathbf{c},$$

isto é, $\frac{dA}{dt}$ é uma constante, ou seja, $\frac{c}{2}$.

Em outras palavras, sob a influência de uma força central, o vetor raio varre áreas iguais em tempos iguais. Esta é a segunda lei de Kepler.

Lembre-se de que uma seção cônica é caracterizada como uma curva plana, que é o lugar geométrico de um ponto, cuja distância de um ponto fixo O (*foco*) e de uma linha fixa L (*diretriz*) é uma constante e (*excentricidade*). Uma representação analítica da seção cônica geral em combinações polares é fácil de encontrar. Colocamos a origem em O e tomamos o eixo polar perpendicular a L, como na Figura 2.1. Denote a distância de L a O por k.

A condição $|\mathrm{OP}| = e\,|\mathrm{PQ}|$ se torna,

$$r = ek - er\cos\theta$$

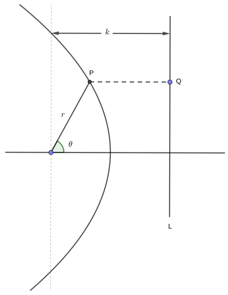


Figura 3.2: Uma Seção Cônica

ou

$$r = \frac{ek}{1+e\cos\theta}.$$

Suponha agora que o corpo orbita sem a influência de uma força central quadrada inversa, ou seja, o vetor posição satisfaz

$$\ddot{\mathbf{s}} = -\frac{a}{r^3}\mathbf{s},$$

onde a é uma constante. Como a força é central, vimos que

$$\mathbf{s} \times \dot{\mathbf{s}} = \mathbf{c},$$

onde $\mathbf{c}$ é um vetor constante. Daí temos que:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathbf{s}}{r}\right) = \frac{(\mathbf{s}\times\dot{\mathbf{s}})\times\mathbf{s}}{r^3},$$

e como $\mathbf{s} \times \dot{\mathbf{s}} = \mathbf{c}$, substituindo na equação acima teremos:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathbf{s}}{r}\right) = \frac{\mathbf{c}\times\mathbf{s}}{r^3}.$$

Multiplicando a equação acima por $-a$, temos:

$$-a\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathbf{s}}{r}\right) = \mathbf{c} \times \frac{-a\mathbf{s}}{r^3} = -\ddot{\mathbf{s}} \times \mathbf{c}.$$

Integrar isso dá:

$$a\left(\mathbf{b} + \frac{\mathbf{s}}{r}\right) = \dot{\mathbf{s}} \times \mathbf{c},$$

onde $\mathbf{b}$ é uma constante de integração. Observe que $\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = 0$ e, portanto, $\mathbf{b}$ está no plano orbital. Se medirmos o deslocamento angular do corpo orbital em relação ao eixo na direção $\mathbf{b}$, como na Figura 2.2, então é fácil ver que a órbita é uma seção cônica.

Na verdade, a partir da última equação, obtemos

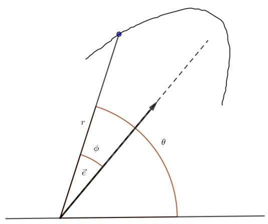


Figura 3.3: Orientação da Órbita

$$a\,(\mathbf{s}\cdot\mathbf{b}+r)=\mathbf{s}\cdot(\dot{\mathbf{s}}\times\mathbf{c})=(\mathbf{s}\times\dot{\mathbf{s}})\cdot\mathbf{c}=c^2.$$

Mas $\mathbf{s}\cdot\mathbf{b}=re\cos\phi$, então

$$r\,(1+e\cos\phi)=\tfrac{c^2}{a},$$

ou

$$r=\tfrac{ek}{1+e\cos\phi},$$

onde $k=\dfrac{c^2}{(ae)}$ é uma seção cônica de excentricidade e com foco no centro de atração. Dependendo do valor de e, a cônica pode ser uma elipse, uma parábola ou uma hipérbole. Esta é a primeira lei de Kepler.

Este é o resumo dos principais resultados para um corpo orbitando um centro de atração:

- Sem força $\Rightarrow$ movimento em linha reta uniforme (ou repouso).
- Força central $\Rightarrow$ órbita planar + lei de áreas iguais.
- Força central quadrada inversa $\Rightarrow$ órbita cônica com foco na origem.

O que Newton fez foi fornecer uma justificativa matemática sólida para essas observações de seus antecessores. É natural perguntar sobre os problemas inversos correspondentes: Até que ponto as implicações "$\Rightarrow$"podem ser substituído por "$\Leftarrow$"? Esses e outros problemas inversos foram tratados por Newton no seu livro *Princípios Matemáticos*.

3.4 Causalidade e Identificação

Um problema *direto* da Álgebra Linear consiste em determinar a ação de uma transformação linear representada por uma matriz, ou seja, dada uma matriz A, $m \times n$, e um vetor $\mathbf{x}$, determine o vetor $\mathbf{b}$, tal que $\mathbf{b} = A\mathbf{x}$. Existem dois problemas inversos na Álgebra Linear: O problema de Causalidade e o problema de Identificação. O problema da *causalidade* é encontrar todas as soluções $\mathbf{x}$ de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, fixados A e b. Um outro problema inverso, tratado com menos frequência, é o problema de *identificação*: identifique a matriz A, dada uma coleção apropriada de pares "entrada-saída"$(\mathbf{x}, \mathbf{b})$ satisfazendo $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Iremos fazer uma apresentação de ambos os problemas inversos para matrizes reais $m \times n$.

Primeiro, o problema da causalidade. Seja $\mathbf{x}$ uma solução deste problema, ou seja, um vetor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ satisfazendo $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, onde A é uma matriz real $m \times n$ e $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ é um vetor, sendo ambos previamente fixados. Temos que, x existe, se e somente se, $\mathbf{b}$ estiver na imagem de A, ou seja,

$$\mathbf{b} \in \mathrm{I}\,(A) = \{A\mathbf{x}/\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}.$$

Temos que, $I(A)$ é um subespaço de $\mathbb{R}^m$ formado por todas as combinações lineares dos vetores coluna de A. Daí se $\mathbf{b} \in \mathrm{I}\,(A)$, isto é, se uma solução existe, então encontraremos todas as soluções, através da eliminação gaussiana (também conhecido como método de escalonamento).

Exemplo:

1) O sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tem solução, onde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}?$$

Resolução:

Usando a eliminação de Gauss, temos:

$$\begin{bmatrix} A \mid & \mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Tornando o elemento a_{11} igual à unidade: através da operação elementar $\frac{L_1}{2}$, resulta

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 3/2 \\ 4 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Transformando o elemento a_{21} nulo: aplicando a operação elementar $L_2 - 4L_1$, obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

Assim, o sistema linear associado a esta matriz aumentada, que é equivalente à matriz aumentada original, é

$$\begin{cases} x + \frac{y}{2} = \frac{3}{2} \\ 0x = -4 \end{cases}$$

resultando na solução

$$2x + y = 3 \to y = 3 - 2x$$
$$0x = -4$$

Daí, concluímos que esse sistema não tem solução.

2) Qual o conjunto solução de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, sabendo que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}?$$

Resolução:

Usando a eliminação de Gauss, temos:

$$\begin{bmatrix} A \mid & \mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Transformando os elementos a_{12} e a_{13} nulos: aplicando as operações elementares $-2L_1 + L_2 \to L_2$ e $-1L_1 + L_3 \to L_3$, resulta

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Tornando o elemento a_{22} igual à unidade: através da operação elementar $-\frac{1}{5}L_2 \to L_2$, obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -4/5 & 2/5 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Transformando o elemento a_{32} nulo: aplicando a operação elementar $L_2 + L_3 \rightarrow L_3$, obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -4/5 & 2/5 \\ 0 & 0 & -9/5 & 2/5 \end{bmatrix}$$

Tornando o elemento a_{33} igual à unidade: através da operação elementar $-\frac{5}{9}L_3 \rightarrow L_3$, obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -4/5 & 2/5 \\ 0 & 0 & 1 & -2/9 \end{bmatrix}$$

Assim, o sistema linear associado a esta matriz aumentada, que é equivalente à matriz aumentada original, é

$$\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ y - \frac{4}{5}z = \frac{2}{5} \\ z = -\frac{2}{9} \end{cases}$$

resultando na solução

$$z = -\tfrac{2}{9}$$
$$y = \tfrac{2}{5} + \tfrac{4}{5}(-\tfrac{2}{9}) \rightarrow y = \tfrac{2}{5} - \tfrac{8}{45} \rightarrow y = \tfrac{2}{9}$$
$$x + 2(\tfrac{2}{9}) - (\tfrac{-2}{9}) = 2 \rightarrow x = 2 - \tfrac{4}{9} - \tfrac{2}{9} \rightarrow x = \tfrac{4}{3}$$

Observe que no exemplo acima a solução é única. Em geral, a unicidade do problema pode ser analisada através do cálculo do espaço nulo associado a A:

$$N(A) = \{\mathrm{x} \in \mathbb{R}^n / A\mathbf{x} = 0\}$$

Antes de prosseguirmos com o outro problema inverso, o problema da identificação, veremos um pouco mais sobre a estabilidade da solução $\mathbf{x}$ no caso de pertubações feitas no sistema linear e supondo que A é uma matriz inversível. O número de condição (ou número de condicionamento) associado ao sistema linear $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ é o número que estabelece uma estimativa da precisão que se pode obter para uma solução aproximada de $\mathbf{x}$. Um problema com um número de condição pequeno é chamado de bem condicionado, ao passo que um problema que possui um número de condição elevado é chamado de mal condicionado. Problemas mal condicionados são aqueles onde pequenas modificações nos coeficientes das matrizes resultam em grandes modificações na solução.

O número de condicionamento de uma matriz é dado por $k(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$, onde $||.||$ é uma norma definida por $\|A\| = \underset{j=1,\ldots,n}{max} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$, ou seja, corresponde ao máximo dos somatórios dos módulos dos elementos das colunas. Dizemos que a matriz é mal condicionada se $k(A) > 1$ e a matriz é bem condicionada se $k(A) \leq 1$.

Exemplo :

Seja a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 30 \\ 3 & 14 \end{bmatrix}$$

e sua inversa

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -7/3 & 5 \\ 1/2 & -1 \end{bmatrix}$$

Calculando as normas, temos:

$$k(A) = \|A\| \|A^{-1}\| = (30 + 14)(5 + 1) = 44.6 = 264.$$

Neste caso a matriz é mal condicionada.

Podemos verificar em termos do *número de condição* da matriz A, a estabilidade com respeito às perturbações em $\mathbf{b}$ da solução $\mathbf{x}$ do problema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Gostaríamos de saber em que medida erros relativamente pequenos em $\mathbf{b}$ pode levar a mudanças relativamente grandes na solução $\mathbf{x}$. Suponha que $\tilde{\mathbf{b}}$ é uma pertubação de $\mathbf{b}$. Fixada uma norma $\|\cdot\|$ definimos a variação da permutação por $\left\|\mathbf{b} - \tilde{\mathbf{b}}\right\| / \|\mathbf{b}\|$. Seja $\mathbf{x}$ a solução única do sistema correspondente ao $\mathbf{b}$, e seja $\tilde{\mathbf{x}}$ aquele correspondente ao $\tilde{\mathbf{b}}$. Pela propriedade de normas de matrizes, dado qualquer matriz A quadrada e qualquer vetor $\mathbf{x}$, temos que.

$$\|A\mathbf{x}\| \leq \|A\| \|\mathbf{x}\|$$

Então,

$$\|\mathbf{x}-\tilde{\mathbf{x}}\| = \left\|A^{-1}\mathbf{b} - A^{-1}\tilde{\mathbf{b}}\right\| \leq \|A^{-1}\| \left\|\mathbf{b}-\tilde{\mathbf{b}}\right\|.$$

A norma da matriz $\|A^{-1}\|$ fornece um limite para a mudança na solução, decorrente de uma perturbação em $\mathbf{b}$. Uma medida relativa desta mudança é obtida da seguinte forma:

$$\|\mathbf{x}-\tilde{\mathbf{x}}\| \leq \|A^{-1}\| \|\mathbf{b}\| \frac{\left\|\mathbf{b}-\tilde{\mathbf{b}}\right\|}{\|\mathbf{b}\|} \leq \|A^{-1}\| \|A\| \|\mathbf{x}\| \frac{\left\|\mathbf{b}-\tilde{\mathbf{b}}\right\|}{\|\mathbf{b}\|}$$

e, portanto

$$\frac{\|\mathbf{x}-\tilde{\mathbf{x}}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq k\left(A\right) \frac{\left\|\mathbf{b}-\tilde{\mathbf{b}}\right\|}{\|\mathbf{b}\|}.$$

O número da condição, portanto, fornece um limite superior para o erro relativo na solução, causado por um dado erro em $\mathbf{b}$. Para matrizes com grandes números de condição, isto é, matrizes mal condicionadas, perturbações relativamente pequenas em $\mathbf{b}$ podem dar origem a mudanças relativamente grandes na solução. É nesse sentido que sistemas mal condicionados são considerados instáveis.

Antes de passarmos para o outro tipo de problema inverso, voltaremos ao caso geral quando $\mathbf{b}$ não está na imagem da matriz A, ou seja, não há solução para o problema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Uma relação notável entre o espaço nulo, intervalo e transposição permite o desenvolvimento de um tipo de solução generalizada. Uma solução generalizada é um vetor $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ que minimiza a quantidade $\|A\mathbf{x}-\mathbf{b}\|$ onde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ e a norma é a norma euclidiana usual. Observe que esse mínimo é zero, se e somente se, o sistema tiver uma solução. Se $\mathbf{u}$ for uma solução, então para qualquer vetor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, a função

$$g\left(t\right) = \|A\left(\mathbf{u}+t\mathbf{v}\right)-\mathbf{b}\|^2 = \|A\mathbf{u}-\mathbf{b}\|^2 + 2\left(A\mathbf{v}, A\mathbf{u}-\mathbf{b}\right)t + \|A\mathbf{v}\|^2 t^2$$

tem um mínimo em t = 0, onde $(\cdot,\cdot)$ é o produto interno euclidiano. Logo, $g'\left(0\right) = 0$ assim

$$\left(A\mathbf{v}, A\mathbf{u}-\mathbf{b}\right) = 0.$$

Aplicando em $\left(A\mathbf{v}, A\mathbf{u}-\mathbf{b}\right) = 0$ a transposta da matriz A, A^t, temos

$$A^tA\mathbf{u} = A^t\mathbf{b}.$$

Então, soluções generalizadas de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ coincidi com soluções comuns do problema $A^tA\mathbf{x} = A^t\mathbf{b}$.

Exemplo:

Dado o sistema linear $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, sendo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Qual seria uma solução generalizada desse sistema?

Este sistema é claramente impossível, pois a primeira equação é inconsistente com a última. De forma mais automática, um passo no escalonamento da matriz aumentada associada revelaria a mesma conclusão:

$$\begin{bmatrix} A \mid & \mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Vamos tentar encontrar uma solução generalizada, ou seja, $A^t A\mathbf{x} = A^t\mathbf{b}$.

Calculamos

$$A^t A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -6 \\ 2 & 3 & -2 \\ -6 & -2 & 16 \end{bmatrix}$$

e

$$A^t\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -10 \end{bmatrix}$$

Para resolvermos o sistema $A^t A\mathbf{x} = A^t\mathbf{b}$, vamos escalonar a matriz aumentada associada:

$$\begin{bmatrix} A^t A \mid & A^t\mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -6 & 5 \\ 2 & 3 & -2 & 3 \\ -6 & -2 & 16 & -10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 2 & -6 & 5 \\ 0 & 5 & 6 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 2 & -6 & 5 \\ 0 & 5 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Logo,

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 5 \\ 5x_2 + 6x_3 = -1 \\ 4x_3 = 1 \end{cases}$$

Assim,

$$x_3 = \tfrac{1}{4}$$
$$5x_2 + 6.\left(\tfrac{1}{4}\right) = -1 \Rightarrow x_2 = -\tfrac{1}{2}$$
$$3x_1 + 2.\left(-\tfrac{1}{2}\right) - 6.\left(\tfrac{1}{4}\right) = 5 \Rightarrow x_1 = \tfrac{3}{2}$$

Portanto, uma solução generalizada é

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 \\ -1/2 \\ 1/4 \end{bmatrix}.$$

Finalmente, consideramos brevemente o problema de identificação, isto é, o problema inverso de determinar uma matriz A, $m \times n$, dados pares de vetores $(\mathbf{x}, \mathbf{b})$ relacionados por $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Para cada um desses pares, chamamos $\mathbf{x}$ de entrada e $\mathbf{b}$ de saída correspondente. Vamos identificar A, de acordo com as entradas apropriadas $\mathbf{x}$ e observando as saídas $\mathbf{b}$. Como controlamos as entradas, podemos organizá-las de forma que sejam linearmente independentes e assumiremos que isso foi feito. É conveniente expressar as coisas em forma de matriz, agregando as entradas independentes $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2 ... \mathbf{X}_p$ como os vetores da coluna de uma matriz $\mathbf{X}$, $n \times p$, e de forma semelhante pensando nas saídas correspondentes $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2 ... \mathbf{B}_p$ como os vetores da coluna de uma matriz $\mathbf{B}$, $m \times p$. Dizemos que A é *identificável* a partir do par de matrizes $(\mathbf{X}, \mathbf{B})$ se houver uma matriz A, $m \times n$, que satisfaça $A\mathbf{X} = \mathbf{B}$.

Consideramos três casos, cada um com base em tamanhos relativos diferentes para n e p. Primeiro observe que $p > n$ é impossível, pois $\{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2 ... \mathbf{X}_p\}$ é um conjunto linearmente independente em $\mathbb{R}^n$. Se $p = n$, então $\mathbf{X}$ é invertível e A é identificável, de fato, $A = \mathbf{B}\mathbf{X}^{-1}$. Neste caso, uma modificação simples do método de eliminação de Gauss-Jordan fornece um algoritmo para identificar A. O método baseia-se na observação de que se $A\mathbf{X} = \mathbf{B}$, então $\mathbf{X}^t A^t = \mathbf{B}^t$. Portanto, vamos resolver a transposição da matriz do modelo A aumentando a transposta da matriz de entrada com a transposta da matriz de saída e executando o algoritmo de Gauss-Jordan da maneira usual:

$$[\mathbf{X}^t : \mathbf{B}^t] \rightarrow ... \rightarrow [I : A^t].$$

No último caso, quando $p < n$, suspeita-se que a informação de entrada-saída é insuficiente para identificar A, pois neste caso há um vetor $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ que é ortogonal a $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2 ... \mathbf{X}_p$. Seja C a matriz $m \times n$ cuja primeira linha é $\mathbf{q}^t$ e cujas outras linhas são vetores zero. Então $C\mathbf{X}$ é a matriz zero $m \times p$. Daí, se $A\mathbf{X} = \mathbf{B}$, então, da mesma forma, $(A + C)\,\mathbf{X} = \mathbf{B}$, e portanto, A não é identificável a partir das informações $(\mathbf{X}, \mathbf{B})$.

Exemplo:

Dado o sistema linear $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, sendo

$$A = \begin{bmatrix} a & c \\ d & e \end{bmatrix}, \mathbf{x_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{b_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{x_2} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{b_2} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Quais os possíveis valores de A?

$$\begin{bmatrix} a & c \\ d & e \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & c \\ d & e \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} a + 2c = 0 \\ d + 2e = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4a = 5 \\ 4d = 1 \end{cases}$$

$$a = 5/4$$
$$d = 1/4$$

Substituindo os valores de a e d no primeiro sistema, temos:

$$5/4 + 2c = 0 \Rightarrow c = -5/8$$
$$1/4 + 2e = 3 \Rightarrow e = 11/8$$

Assim,

$$A = \begin{bmatrix} 5/4 & -5/8 \\ 1/4 & 11/8 \end{bmatrix}.$$

Capítulo 4

Sequência Didática

A sequência didática é um conjunto de atividades ligados ao conteúdo, que busca favorecer a aprendizagem dos alunos. O educador e escritor espanhol Zabala no livro "A prática educativa: como ensinar" diz que sequência didática é "Uma série ordenada e articulada de atividades que formam as unidades didáticas", ou seja, é aonde o professor, através dos objetivos que pretende alcançar com seus alunos vai organizar sistematicamente uma série de atividades para atingir a aprendizagem daqueles conteúdos selecionados para uma determinada unidade didática.

Alguns professores planejam suas aulas levando apenas em conta, aquilo que o aluno traz de conhecimento. Como diz Peretti e Costa, é necessário também propor investigações sobre resultados encontrados nos cálculos e maneiras de resolvê-los, como poderiam ter sido desenvolvidos de uma maneira mais prática, construindo regras básicas para uma melhor compreensão.

Neste capítulo apresentaremos quatro atividades direcionadas para o ensino fundamental e médio, com o objetivo de auxiliar o professor a estimular o aluno a identificar e diferenciar os problemas diretos e inversos.

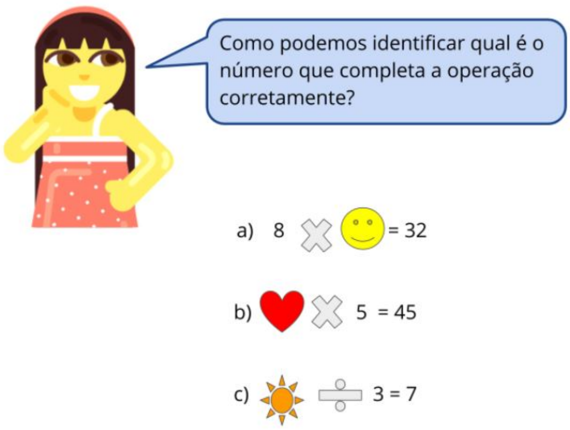
4.1 Multiplicação e Divisão

Sugestão de Atividade

As atividades tem como objetivo trabalhar as relações inversas entre multiplicação e divisão. Serão aplicados dois problemas, um direto e outro inverso. Essas atividades são direcionadas ao 6º ano do ensino fundamental. Primeiramente dividimos a turma em duplas que discutirão os problemas, afim de descobrir qual número está faltando em cada uma das operações, relatando quais as estratégias que eles elaboraram para responder.

Questão a ser aplicada

Problema 1:



Conclusão

Observando o item (a), os alunos devem perceber que se 8 vezes algum número resulta em 32, então 32 dividido por 8 nos indica qual é esse número, ou seja, o número procurado é 4. Seguindo a mesma ideia para o item (b). Já no item (c), algum número dividido por 3 é igual a 7. Então podemos pensar que em uma divisão foram formados 3 grupos com 7 elementos. Isso significa que 3 x 7 é igual à quantidade que foi dividida, que é 21. Existe outra resolução para o problema, ou seja, alguns alunos podem pensar na tabuada para responder os enigmas, por exemplo no item (a), pensar que um número multiplicado por 8 terá como resultado 32.

Problema 2:

Identificar quais números completam a operação corretamente?

a) $? \times ? = 32$

b) $? \div ? = 7$

Conclusão

Para resolver esse problema inverso, o aluno vai perceber que existem várias soluções tanto na alternativa (a), por exemplo, $8 \times 4 = 32$ ou $16 \times 2 = 32$, como na alternativa (b), por exemplo, $21 \div 3 = 7$ ou $49 \div 7 = 7$. Uma sugestão, seria pedir aos alunos que coloquem pelo menos três soluções para cada alternativa.

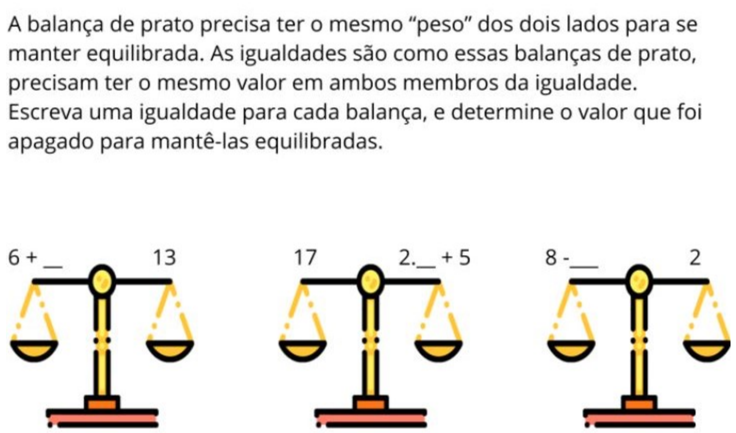
4.2 Equação do 1º grau

Sugestão de Atividade

Serão aplicados dois problemas: um direto e outro inverso. Essas atividades tem como objetivo reconhecer e explorar as linguagens algébricas para resolver problemas envolvendo equações de 1º grau, podendo ser aplicada no 1º ano do ensino médio, como uma revisão de equação. A atividade será entregue para duplas. Deixe que os alunos se familiarizem com o material por alguns instantes e, em seguida, peça que eles organizem suas ideias e resolvam a questão, permitindo a discussão sobre seus métodos e procedimentos.

Questão a ser aplicada

Problema 1:



Conclusão

Nessa questão o aluno pode desenvolver de duas formas. Primeiro relembrando o conhecimento de situações de adição, subtração, multiplicação e divisão numa igualdade, por exemplo, no primeiro caso temos $6 + ? = 13$ o aluno vai pensar em um número que somado com 6 terá como resultado o número 13, encontrando assim o número 7. Analogamente para as outras duas balanças. Outra maneira mais formal de resolver esse problema é montar a respectiva equação do 1º grau, por exemplo na primeira balança temos:

$6 + x = 13$

$x = 13 - 6$

$x = 7.$

Problema 2:

Seja uma balança tal que em um dos pratos tenha um peso de 13 kilos. Tendo a disposição pesos de 1, 2, ..., 13 kilos, como podemos distribuir esses pesos no outro prato da balança para que a mesma permaneça em equilibro?

Conclusão

Na resolução deste problema inverso, o aluno perceberá que existem várias soluções como por exemplo, $1+2+10$ ou $2+3+8$ ou $2+11$ ou 13 ou ... Portanto, como sugestão o professor deve pedir aos alunos que achem no mínimo 3 soluções.

Nesta Seção 3.2 foram aplicados dois problemas com o objetivo de apresentar aos alunos questões que possuam mais de uma solução. Estimulando assim, o raciocínio e desenvolvendo a capacidade de identificar quais soluções se encaixam nos problemas.

4.3 Princípio Fundamental da Contagem

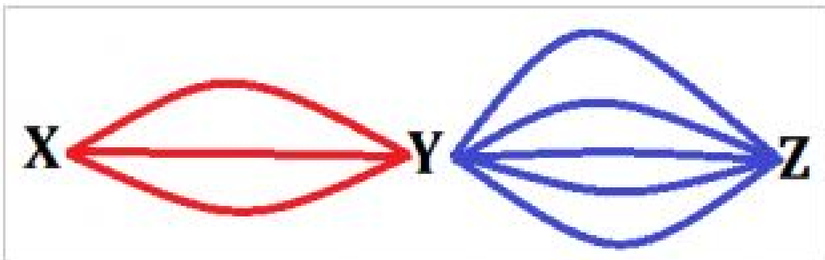
Sugestão de Atividade

Serão aplicados dois problemas nesta sequência didática: um direto e outro inverso. Falaremos sobre o Princípio Fundamental da Contagem e será aplicada no $7^{\underline{o}}$ ano, onde cada aluno resolverá individualmente os problemas. Este apresenta trajetos de combinações entre estradas e cidades.

Questão

Problema 1:

Há 3 estradas ligando as cidades X e Y, e 5 estradas ligando as cidades Y e Z. De quantas maneiras distintas é possível ir de X a Z, passando por Y?



Conclusão

Neste caso os alunos devem notar que a viagem de X a Z é uma ação composta por duas etapas sucessivas:

Etapa 1: O trajeto de X a Y pode ser feito através de 3 estradas distintas (vermelha).

Etapa 2: O trajeto de Y a Z pode ser feito através de 5 estradas distintas (azul).

Os alunos podem pensar de duas formas a resolução desse problema. Primeiro pegando a primeira estrada vermelha de X a Y e passando pelas 5 azul de Y a Z, ou seja, 5 possibilidades. Depois a segunda estrada vermelha de X a Y e passar pelas 5 azul de Y a Z, mais 5 possibilidades e por último a terceira estrada vermelha de X a Y passando também pelas 5 azul de Y a Z, outras 5 possibilidades, onde o final será $5 + 5 + 5 = 15$. Uma outra forma seria aplicando o Princípio Fundamental da Contagem.

Problema 2:

Existem 5 estradas ligando as cidades Y e Z, e 15 possibilidade de ir da cidade X até a cidade Z passando pela cidade Y. Quantas estradas existem ligando as cidades X e Y?

Conclusão

Para resolver esse problema inverso, o aluno terá que dividir 15, que é o total de possibilidades de ir de X a Z, por 5, que são as estradas que já ligam Y a Z. Então como resultado teria 3, que é a quantidade de estradas que ligam as cidades X e Y.

Nesta Seção 3.3 foram aplicados dois problemas com o objetivo dos alunos saber identificar o que é um problema direto e o que é um problema inverso.

4.4 Matriz e Vetor

Sugestão de Atividade

Esta atividade planejada tem como objetivo trabalhar problemas diretos e inversos com matrizes e vetores. Serão dados dois problemas, um direto e outro inverso. Estes problemas podem ser aplicados no 3º ano do ensino médio, onde os alunos formaram duplas para discutir e resolver os problemas.

Questão

Problema 1:

Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 5 & 5 & 2 \end{bmatrix}$ e o vetor $v = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$. Determine b, sabendo que $A.v = b$.

Conclusão

Resolvendo o problema acima, o aluno vai multiplicar a matriz A, pelo vetor coluna v e assim achar o vetor coluna b. De fato,

$$b = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 5 & 5 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3+3.4+5.3 \\ 5.3+5.4+2.3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 \\ 41 \end{bmatrix}.$$

Problema 2:

Sabendo que $A.v = b$, onde $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 5 & 5 & 2 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 27 \\ 41 \end{bmatrix}$. Determine v.

Conclusão

Nesta questão encontraremos um problema inverso, onde para achar o vetor v os alunos terão que formar um sistema e daí perceber que v poderá ter várias soluções. Uma sugestão, seria o professor fazer um desafio com os alunos para ver quem acharia pelo menos uma solução.

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 5 & 5 & 2 \end{bmatrix} .v = \begin{bmatrix} 27 \\ 41 \end{bmatrix}$$

Uma maneira geral de resolver o problema seria representar v por $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, daí:

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 5 & 5 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 \\ 41 \end{bmatrix},$$

onde será formado um sistema:

$$\begin{cases} 3y + 5z = 27 \\ 5x + 5y + 2z = 41 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, teremos:

$3y = 27 - 5z \Rightarrow y = \frac{27}{3} - \frac{5z}{3} \Rightarrow y = 9 - \frac{5z}{3}$

$5x + 5(9 - \frac{5z}{3}) + 2z = 41 \Rightarrow 5x + 45 - \frac{25z}{3} + 2z = 41 \Rightarrow x = \frac{19z}{15} - \frac{4}{5}$

Logo, o sistema tem infinitas soluções. É nítido o grau de dificuldade maior na resolução do problema inverso em comparação ao direto. Contudo, vale o esforço.

Capítulo 5

Conclusão

Os problemas inversos aparecem em enumeras situações, além disso os métodos de resolução empregados são diversos. Para sua formalização e análise não existe uma abordagem "padrão" para estes problemas. No entanto, a resolução de problemas inversos pode dar origem a ideias, procedimentos e observações que são úteis em outras situações.

Este trabalho foi desenvolvido com o objetivo de apresentar problemas inversos em Álgebra Linear, Cálculo Diferencial e em situações do cotidiano, que podem ser introduzidas no ensino fundamental e médio. Por exemplo, as marcas da derrapagem causadas pela alta velocidade de um carro e exames de Tomografia e Raio-x.

Na sequência didática foram desenvolvidos problemas para serem aplicados em sala de aula no ensino básico, com o objetivo do aluno descobrir e entender a natureza dos problemas inversos. Isso pode contribuir para que os mesmos tornem-se participativos e interessados nas aulas, facilitando sua aprendizagem e incentivando-os a serem curiosos, assumindo um papel ativo na aprendizagem e também colaborando para o despertar deles quanto ao gosto pela Matemática, colaborando para o ensino-aprendizagem e tomada de decisões quanto a resolução de questões. As sequências didáticas descritas mostram que os problemas inversos são inseridos de forma natural no ensino e que as resoluções destes problemas são mais desafiadoras, contudo valem a pena.

Esperamos que as atividades aqui apresentadas possam levar inspiração ao ensino de diversos professores e incentivá-los a trabalhar, diretamente ou indiretamente, com o tema: "Problemas Inversos" em sala de aula.

Referências Bibliográficas

[1] ADRIANO DE CEZARO. **Problemas Inversos: Uma Introdução**. Professor do Instituto de Matemática, Estatística e Física da Universidade Federal do Rio grande-FURG.

[2] ANTÔNIO VIDEIRA; DÉCIO KRAUSE **Brazilian Studies in Philosophy and History of Science. CAPTION: An account of recent work**. Springer.

[3] GROETSCH, C. W. **Inverse Problems: activities for undergraduates**. Washington: The Mathematical Association of America, 1999.

[4] HAROLDO FRAGA DE CAMPOS VELHO. **Problemas Inversos: Conceitos Básicos e Aplicações. Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, Lab. de Computação e Matemática Aplicada**.

[5] HAROLDO FRAGA DE CAMPOS VELHO. **Introdução aos Problemas Inversos: Aplicações em Pesquisa Espacial**. Laboratório Associado de Computação e Matemática Aplicada, Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais.

[6] HOWARD ANTON; CHRIS ROERRES. **Álgebra Linear com aplicações**. Professor Emérito da Drexel University; University of Pennsylvania.

[7] JOHANN BAUMEISTER; ANTONIO LEITÃO. **Topics in Inverse Problems**. Universität Frankfurt; UFSC. IMPA, 25º Colóquio Brasileiro de Matemática.

[8] JOSEPH B.KELLER; **Artigo: Inverse Problems**.

[9] MARCO DONATELLI; JAMES NAGY. **Linear Algebra and Inverse Problems**. Universit a “Insubria”, Como, Italy; Emory University, Atlanta, GA, USA.

[10] PIERRE ARGOUL. **Overview of Inverse Problems**. Ecole Nationale des Ponts et Chaussées.

[11] SANDRA MARIA P.M; ALINA GALVÃO S; LIANNY MILENNA S.M. **A Resolução de Problemas de Produto Cartesiano por Alunos do Ensino Fundamental**. Universidade Estadual de Santa Cruz(UESC); Universidade Federal de Pernambuco(UFPE); Centro de Referência de Assistência Social de Ipojuca(CRAS).

[12] Site Nova Escola. **https://novaescola.org.br/plano-de-aula/807/**.

[13] WIKIPEDIA - The Free Encyclopedia. **Problemas Inversos**.