Ernesto Araújo de Almeida

Funções Quadráticas: Ensino e Aplicações

Itabaiana, Sergipe

Agosto de 2020

Ernesto Araújo de Almeida

Funções Quadráticas:
Ensino e Aplicações

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal de Sergipe como requisito para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Universidade Federal de Sergipe

Departamento de Matemática

Programa de Pós-Graduação

Orientador: Prof. Dr. Alejandro Caicedo Roque

Itabaiana, Sergipe

Agosto de 2020

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA PROFESSOR ALBERTO CARVALHO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

A447f Almeida, Ernesto Araújo de.
Funções Quadráticas: ensino e aplicações / Ernesto Araújo de Almeida; orientação: Alejandro Caicedo Roque. – Itabaiana, 2020.
100 f.; il.

Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Sergipe, 2020.

1. Matemática. 2. Quadrática. Equação 3. Funções matemática. I. Roque, Alejandro Caicedo (org.). II. Título.

CDU 511.55

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Funções Quadráticas: Ensino e Aplicações

por

Ernesto Araújo de Almeida

Aprovada pela banca examinadora:

Alejandro Caicedo Roque.

Prof. Alejandro Caicedo Roque - UFS
Orientador

Eder Mateus de Souza

Prof. Éder Mateus de Souza - UFS
Primeiro Examinador

Prof. Ives Lima de Jesus - IFBA
Segundo Examinador

São Cristóvão, 14 de Agosto de 2020

Cidade Universitária "Prof. José Aloísio de Campos" – Av. Marechal Rondon, s/no - Jardim Rosa Elze – Campus de São Cristóvão. Tel. (00 55 79) 3194-6887
CEP: 49100-000 - São Cristóvão – Sergipe - Brasil – E-mail: promat.ufs@gmail.com

Este trabalho é dedicado àqueles que não desistem de seus sonhos, mesmo frente aos diversos obstáculos que a vida nos oferta, sem impedir que os outros sonhem.

À memória de meu irmão José Caldas de Almeida Filho e minha tia Estelita Nogueira da Silva, segunda mãe, saudades eternas.

A todos, especialmente aos meus familiares, e aos apaixonados pela Matemática, dedico este trabalho.

Agradecimentos

Inicialmente, agradeço a Deus, pois me dás mais que eu mereço.

Os principais agradecimentos vão para minha família, pelo apoio incondicional aos desafios que enfrento, principalmente, agradeço aos meus pais, Avani Costa Araújo e José Caldas de Almeida pela forma como me criaram.

Novamente, agradeço a Deus, pelos meus belos e amorosos filhos, Maysa Dantas Araújo de Almeida, José Caldas de Almeida Neto e Sara Santana de Almeida, razões do meu viver, e também pela dedicada companheira Claudiane de Jesus Nascimento, cuja paciência e compreensão foram essenciais para que este trabalho se concretizasse.

Os agradecimentos especiais dedico ao **MEC/CAPES**[1] pelo apoio e por manter tão importante curso de aperfeiçoamento do trabalho de docência, o **PROFMAT**, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, e também aos professores Dr. Alejandro Caicedo Roque, Dr. Éder Mateus de Souza, Me. Samuel Brito Silva, Me. Wagner Ferreira Santos e M.ª Viviane de Jesus Lisboa Aquino pela dedicação e compromisso na arte de ensinar.

Agradeço também à banca examinadora, aos professores Dr. Ives Lima de Jesus e Dr. Éder Mateus de Souza pelas excelentes considerações que deram uma forma final a esta dissertação.

Finalmente, registro um agradecimento muito especial ao Prof. Dr. Alejandro Caicedo Roque pela forma como me orientou durante todo o processo de construção deste trabalho, fundamental para manter-me motivado durante toda a caminhada.

A todos, muito obrigado!

[1] O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Resumo

A dificuldade que os alunos enfrentam no primeiro ano do ensino médio está relacionada ao estudo das funções quadráticas, em resolver equações quadráticas e construir seu gráfico, pois, geralmente, o primeiro contato com curvas não-lineares acontece a partir da construção da parábola, a ponto de significar o sucesso ou o fracasso de estudantes em disciplinas relacionadas às Ciências Exatas, como Matemática e Física. O Objetivo dessa dissertação é contribuir no ensino e aprendizado de funções quadráticas nas séries finais da educação básica e, principalmente, na série inicial do ensino médio, e orientar a prática pedagógica através de suas aplicações, como em Física e em Economia, propiciando correlações com o mundo real sem ignorar as tecnologias digitais, tais como o simulador PhET e o aplicativo GeoGebra, cujos usos adequados e interativos podem facilitar a compreensão de conceitos e propriedades, além de funcionarem como ferramenta útil no processo de abstração, possibilitando uma visão mais transparente do tema em estudo.

Palavras-chave: Equação quadrática. Função quadrática. Parábola.

Abstract

The difficulty that students face in the first year of high school is related to the study of quadratic functions, in solving quadratic equations and building their graph, because, generally, the first contact with non-linear curves happens from the construction of the parable, the point of signifying the success or failure of students in subjects related to Exact Sciences, such as Mathematics and Physics. The objective of this dissertation is to contribute to the teaching and learning of quadratic functions in the final series of basic education and, mainly, in the initial series of high school, and to guide pedagogical practice through its applications, such as in Physics and Economics, providing correlations with the real world without ignoring digital technologies, such as the PhET simulator and the GeoGebra application, whose appropriate and interactive uses can facilitate the understanding of concepts and properties, in addition to functioning as a useful tool in the abstraction process, allowing a more transparent view of the subject under study.

keywords: Quadratic equation. Quadratic function. Parabola.

Lista de abreviaturas e siglas

CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
DVD	Disco de Vídeo Digital
IMPA	Instituto de Matemática Pura e Aplicada
MRUV	Movimento Retilíneo Uniformemente Variado
MU	Movimento Uniforme
MUV	Movimento Uniformemente Variado
OBM	Olimpíadas Brasileiras de Matemática
OBMEP	Olimpíadas Brasileiras de Matemática das Escolas Públicas
PA	Progressão Aritmética
PhET	Physics Education Technology
PROFMAT	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
SBM	Sociedade Brasileira de Matemática
SSE	Se, e Somente Se
TIC	Tecnologia da Informação e Comunicação

Sumário

1 Introdução

No ensino de Matemática, nas diversas etapas de ensino, algumas definições e conceitos abstratos, claros e precisos, são introduzidos com o objetivo de apresentar uma generalização cujo intuito é estudar um conteúdo específico, definir uma regra ou observar um padrão. Assim, aprender a generalizar e abstrair é um desejo (ou uma meta) do professor que seus alunos alcancem. Mas os obstáculos são muitos quando o assunto é abstração, por isso muito se fala em *contextualização*. É comum ouvir dos alunos, "professor, por que não usa números ao invés de letras?". Assim, na prática docente, Matemática Pura e Matemática Aplicada deveriam caminhar "abraçadas" de tal maneira que a contextualização facilitasse a abstração, embora saibamos que nem tudo pode ser contextualizado em Matemática.

Nessa linha de pensamento, um obstáculo à compreensão de alguns conceitos matemáticos por parte dos estudantes do ensino básico pode ser o fato desse conceito não ser ou não estar contextualizado, e muitas vezes exigir um grau de abstração elevado aos estudantes. Os Parâmetros Curriculares Nacionais (NACIONAIS; MÉDIO, 2013) afirma:

> *A consolidação do Estado democrático, as novas tecnologias e as mudanças na produção de bens, serviços e conhecimentos exigem que a escola possibilite aos alunos integrarem-se ao mundo contemporâneo nas dimensões fundamentais da cidadania e do trabalho".*

Além disso, destaca:

> *"O critério central é o da contextualização e da interdisciplinaridade, ou seja, é o potencial de um tema permitir conexões entre diversos conceitos matemáticos e entre diferentes formas de pensamento matemático, ou, ainda, a relevância cultural do tema, tanto no que diz respeito às suas aplicações dentro ou fora da Matemática, como à sua importância histórica no desenvolvimento da própria ciência.*

O processo de ensino-aprendizagem de Matemática no Ensino Básico vem acompanhado de insucessos principalmente pela forma destituída de significados para a maioria dos estudantes, e boa parte de seus docentes muitas vezes não tem formação inicial e continuada adequadas, ou lhes faltam meios, para iniciar uma transformação significativa desse cenário. Funções é um conceito importante em Matemática e por outro lado, pode ser um tópico rico em contextualização, e aqui se encaixa perfeitamente **funções quadráticas**, modelo utilizado, por exemplo, para explicar o movimento uniformemente variado, e em particular, o de queda livre. Porém, no contexto dessas funções há a necessidade de resolver equações quadráticas, e por causa disso apresentar aos alunos métodos práticos de resolução que permitam ignorar a fórmula quadrática.

Os PCN's (NACIONAIS; MÉDIO, 2013) corroboram o discurso acima:

> *Um primeiro exemplo disso pode ser observado com relação às funções. O ensino isolado desse tema não permite a exploração do caráter integrador que ele possui. Devemos observar que uma parte importante da Trigonometria diz respeito às funções trigonométricas e seus gráficos. As sequências, em especial progressões aritméticas e progressões geométricas, nada mais são que particulares funções. As propriedades de retas e parábolas estudadas em Geometria Analítica são propriedades dos gráficos das funções correspondentes. Aspectos do estudo de polinômios e equações algébricas podem ser incluídos no estudo de funções polinomiais, enriquecendo o enfoque algébrico que é feito tradicionalmente.*

Realmente, nesta dissertação, houve um grande esforço para contextualizar boa parte dos conceitos, sempre que possível, através de aplicações e ou de exemplos aplicados. A seguir, resumimos cada um de seus capítulos, a partir do segundo.

No capítulo 2, iniciamos o estudo da equação quadrática apresentando um interessante enigma encontrado em (TAHAN, 1972), e, em seguida, realizamos uma breve viagem sobre a origem da equações quadráticas, para então defini-las e resolvê-las, seja através da fórmula quadrática ou por alguma técnica, como a da fatoração, a do completamento do quadrado e da soma e produto, onde na seção correspondente a esta enunciamos a proposição 2.3.1, uma das referências desse estudo, quiçá inédita, que facilita, em alguns casos, principalmente quando $a \neq 1$, o cálculo de raízes inteiras.

O capítulo 3 é de fato onde começamos o estudo das funções quadráticas, e apresentamos proposições importantes, como a que diz que uma função quadrática está bem definida por três de seus valores assumidos. Ademais, a forma canônica das funções quadráticas é apresentada de forma enfática, dada a sua enorme importância pois facilita o entendimento de propriedades valiosas dessas funções. Neste capítulo também destacamos uma propriedade notável da parábola e enunciamos o Teorema de Caracterização das Funções Quadráticas.

No capítulo 4, estudamos algumas aplicações de funções quadráticas: na Física o Movimento Uniformemente Variado é visto num eixo (unidimensional) e no plano (bidimensional), e na Economia através de modelos matemáticos que geram regras de otimização nos negócios, como no cálculo de receita total quadrática. Além disso, introduzimos a modelagem matemática e algumas normas para a criação de modelos.

No Capítulo 5, sugerimos três atividades no Geogebra[1], o qual é um excelente software de Geometria Dinâmica desenvolvido por Markus Hohenwarter, cujo objetivo é facilitar o entendimento de alguns conceitos ou propriedades apresentados ao longo dessa dissertação.

Finalmente, no capítulo 6, levamos ao leitor alguns problemas envolvendo funções e equações quadráticas em olimpíadas de Matemática.

[1] Disponível em http://www.geogebra.org

2 Equações Quadráticas

Iniciamos esse capítulo, apresentando aqui um curioso "enigma algébrico" encontrado em (TAHAN, 1972):

> *O professor de Matemática perguntou, certa vez, ao melhor aluno de sua turma:*
> *- Roberto! Qual é a sua idade ?*
> *O interrogado respondeu prontamente:*
> *- É muito simples, professor. Dentro de dois anos a minha idade será igual ao quadrado da idade que eu tinha há 10 anos.*
> *O professor sem hesitar respondeu:*
> *- Já sei Roberto! Você tem quatorze anos.*

O autor comenta a solução:

> O menino tem mais de dez anos e a sua idade diminuída de dois é um quadrado.
>
> Os quadrados maiores que dez são:
>
> $$16, 25, 36, 49, 64 \ldots$$
>
> Diminuídos de 2 darão:
>
> $$14, 23, 34, 47, 62 \ldots$$
>
> [...]
>
> Com os recursos da Álgebra podemos resolver esse problema. Tudo irá recair em banalíssima equação do 2º grau com uma incógnita.
>
> Chamemos x a idade atual do Roberto.
>
> A idade desse menino, dentro de dois anos, será
>
> $$x + 2$$
>
> A sua idade, há dez anos passados, era
>
> $$x - 10$$
>
> De acordo com o enunciado do problema a idade $x + 2$ é o quadrado da idade $x - 10$. Temos então:
>
> $$x + 2 = (x - 10)^2$$
>
> Obtemos, dessa forma, uma equação do 2º grau. Efetuando o quadrado, vem
>
> $$x + 2 = x^2 - 20x + 100$$
>
> Transpondo e reduzindo:
>
> $$x^2 - 19x + 98 = 0 \text{ [sic]}$$
>
> Essa equação apresenta duas raízes reais, inteiras e positivas: 14 e 7.
>
> A 1ª raiz serve ao problema. O menino tem 14 anos.
>
> A 2ª raiz serve à equação mas não serve ao problema. [...]
>
> Conclusão: Roberto tem 14 anos de idade.
>
> E afinal a verdade deve ser dita: Resolver um problema assim banalíssimo, com fórmulas e equações, é o mesmo que matar formiga saúva, na roça, com bomba atômica.

2.1 Notas Históricas

A história mostra que o desenvolvimento das equações quadráticas tem origem na contribuição de diversos povos, entre eles babilônios, egípcios e gregos. Muitas informações sobre as civilizações antigas são registros arqueológicos feitos em tabletes de argila. Algumas dessas memórias nos revelam um pouco da história da solução de equações quadráticas que se disseminou pelo mundo durante mais de 4000 anos. Segundo (BURTON, 1985), os primeiros tabletes conhecidos são oriundos da Babilônia de aproximadamente 1600 aC, onde a diagonal de um quadrado de lado unitário é dada com cinco casas decimais de precisão. A esse tipo de registro foi dado o nome de escrita cuneiforme.

O Tratamento Babilônico de Equações Quadráticas

A maioria dos problemas que recaiam em equações quadráticas origina-se de enigmas nos quais deveriam ser determinados dois números tais que eram conhecidos a soma e o produto deles ou em determinar as dimensões de um retângulo conhecidos o seu perímetro e a sua área.

Diversos tabletes de argila indicam que os babilônios de 2000 a.C. conheciam a fórmula, na verdade, uma receita, para resolver a equação quadrática e um deles ilustra um texto antigo da Babilônia que cita o seguinte problema [aqui traduzido para o nosso sistema decimal] (BURTON, 1985):

Eu adicionei a área e dois terços do lado do meu quadrado e é $\frac{7}{12}$. Qual é o lado do meu quadrado?

Em linguagem matemática atual, esse problema é expresso como

$$x^2 + \frac{2}{3}x = \frac{7}{12}$$

embora a solução seja descrita como uma receita (algoritmo) da seguinte maneira:

- Tome a unidade: 1 (o coeficiente de x^2).
- Divida a unidade em três partes e tome duas dessas partes: $\frac{2}{3}$.
- Tome a metade disso $\left(\frac{1}{3}\right)$ e cruze (multiplique) por si só: $\frac{1}{9}$.
- Some $\frac{1}{9}$ a $\frac{7}{12}$: $\frac{25}{36}$. Isso é o quadrado de $\frac{5}{6}$.
- O $\frac{1}{3}$ que você cruzou por si só, subtraia de $\frac{5}{6}$: o lado do quadrado é $\frac{1}{2}$.

Convertidos em notação algébrica moderna, esses passos revelam que

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{7}{12}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} = \sqrt{\frac{1}{9}+\frac{7}{12}} - \frac{1}{3} \\ &= \sqrt{\frac{25}{36}} - \frac{1}{3} = \frac{5}{6} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Em vista disso, essas instruções babilônicas representam uma equação que nos é bastante familiar

$$x = \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 + p} - \frac{s}{2}$$

como método para resolver a equação quadrática $x^2 + sx = p$ porém a sistematização empregada nessas receitas para resolver exemplos concretos sugere que os matemáticos babilônicos pretendiam ensinar um procedimento geral, embora não conhecessem uma fórmula resolutiva para qualquer equação quadrática (BURTON, 1985).

De fato, chamando dois números de x e z, sua soma s e seu produto p, respetivamente, são $s = x + z$ e $p = x \cdot z$. Logo, $z = s - x$. Mas,

$$p = x \cdot z = x(s - x) = sx - x^2$$

que equivale a

$$x^2 - sx + p = 0$$

Assim, se tais números existem, são as soluções de uma equação quadrática que servem ao problema. Na época, os babilônios só admitiam números positivos (grandezas), pois eram associados à medidas de comprimento, área, volume, etc. Desta forma, se x é uma solução da equação, $s - x$ também o é, pois

$$\begin{aligned} (s - x)^2 - s(s - x) + p &= s^2 - 2sx + x^2 - s^2 + sx + p \\ &= x^2 - sx + p = 0 \end{aligned}$$

No entanto, é importante que professores mostrem aos seus alunos que nem sempre o problema apresenta solução. De fato, não existem dois números inteiros cuja soma seja 5 e o produto, 7. Sendo 7 o produto, tais números têm o mesmo sinal, e como a soma é 5, portanto, positiva, os números desejados são também positivos menores do que 5, e é fácil ver que o maior produto possível é 6 (6,25 se admitissem soluções reais).

2.2 Expressões Algébricas Fundamentais: Produtos Notáveis

Antes de apresentarmos a definição de equação quadrática e determinar a sua forma canônica, devemos rever algumas identidades algébricas chamadas de produtos notáveis.

São expressões algébricas porque envolvem letras (incógnitas), números (constantes) e operações (somas, subtrações, multiplicações). Por outro lado, são chamadas de notáveis porque aparecem em diversos cálculos em matemática em suas diversas áreas. Veremos apenas aquelas pertinentes ao estudo de funções quadráticas.

Proposição 2.2.1. Sejam x, α e β números reais quaisquer. Valem as seguintes igualdades:

a) $x(a+b) = ax + bx$

b) $(x+\alpha)^2 = x^2 + 2\alpha x + \alpha^2$

c) $(x-\alpha)^2 = x^2 - 2\alpha x + \alpha^2$

d) $(x+\alpha)(x-\alpha) = x^2 - \alpha^2$

Em cada item da proposição 2.2.1, a expansão no segundo membro da igualdade é o desenvolvimento da propriedade distributiva da soma em relação à multiplicação, o quadrado da soma de dois termos, o quadrado da diferença de dois termos e o produto da soma pela diferença de dois termos, respetivamente. O caminho contrário, é o processo que chamamos de fatoração, o qual representa o fator comum em evidência, a fatoração do trinômio quadrado perfeito (b), c)), e da diferença de dois quadrados, respetivamente.

Provaremos os itens c) e, em seguida, usaremos c) para a prova de d). Deixaremos a prova dos itens a) e b) como exercícios, onde uma prova geométrica pode ser adequada.

Prova (item c)**.**

$$\begin{aligned}(x-\alpha)^2 &= (x-\alpha)(x-\alpha)\\ &= x(x-\alpha) - \alpha(x-\alpha)\\ &= x^2 - x\alpha - \alpha x + \alpha^2\\ &= x^2 - 2\alpha x + \alpha^2\end{aligned}$$

□

Prova (item d)**.** Daqui em diante "*sse*" denotará "*se, e somente se*":

$$\begin{aligned}(x-\alpha)^2 &= x^2 - 2\alpha x + \alpha^2, \text{ sse}\\ (x-\alpha)^2 + 2\alpha x &= x^2 + \alpha^2, \text{ sse}\\ (x-\alpha)^2 + 2\alpha x - 2\alpha^2 &= x^2 + \alpha^2 - 2\alpha^2, \text{ sse}\\ (x-\alpha)^2 + 2\alpha(x-\alpha) &= x^2 - \alpha^2, \text{ sse}\\ (x-\alpha)(x-\alpha+2\alpha) &= x^2 - \alpha^2, \text{ sse}\\ (x-\alpha)(x+\alpha) &= x^2 - \alpha^2 \quad \square\end{aligned}$$

□

Esses produtos notáveis são essenciais para explicar a técnica de completamento do quadrado, principalmente (b) e (c). Basicamente, ela consiste em transformar uma expressão noutra contendo um trinômio quadrado perfeito, que são as expressões do segundo membro em (a) e (b), realizando operações como somar ou subtrair um termo dos membros de uma igualdade.

Exemplo 2.2.1. (Áustria) (Extraído de (CAMINHA, 2011)). Sejam a e b racionais positivos tais que $\sqrt{ab}$ é irracional. Prove que, $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ é irracional.

Prova. Suponha que o número $q=\sqrt{a}+\sqrt{b}$ seja racional. Logo,

$$\begin{aligned} q^2 &= \left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 = a+2\sqrt{a}\sqrt{b}+b = a+2\sqrt{ab}+b \text{ sse} \\ \sqrt{ab} &= \frac{q^2-a-b}{2} \end{aligned} \tag{2.1}$$

Como a fração em 2.1 tem numerador e denominador racionais, então $\sqrt{ab}$ é racional, que é um absurdo, pois, por hipótese, $\sqrt{ab}$ é irracional. □

2.3 A Equação Quadrática

Definição 2.3.1. Uma equação chama-se quadrática quando pode ser reduzida à forma

$$ax^2+bx+c=0 \tag{2.2}$$

onde a, b e c são números reais, sendo $a \neq 0$.

Em (CAMINHA, 2011), o autor destaca:

> o primeiro membro da equação também é denominado o **trinômio de segundo grau** associado à equação 2.2, e a, b e c são os seus **coeficientes**.
>
> Dada uma equação de segundo grau como acima, denotamos por Δ o número
> $$\Delta = b^2-4ac.$$
> Tal número é o discriminante da equação (ou do trinômio associado) e [...] será usado para discriminar quando a mesma possui raízes.

No exemplo a seguir, são apresentadas algumas equações quadráticas em sua forma reduzida e seus respectivos coeficientes.

Exemplo 2.3.1.

a) $x^2+2x+1=0$, onde $a=1$, $b=2$ e $c=1$.

b) $x^2-6x-16=0$, onde $a=1$, $b=-6$ e $c=-16$.

c) $\sqrt{2}x^2-\frac{2}{3}x=0$, onde $a=\sqrt{2}$, $b=-\frac{2}{3}$ e $c=0$.

d) $x^2-9=0$, onde $a=1$, $b=0$ e $c=-9$.

e) $\frac{1}{3}x^2=0$, onde $a=\frac{1}{3}$, $b=c=0$.

2.3.1 Sem Fórmula Mágica

As únicas equações quadráticas que sabemos resolver diretamente, ou seja, sem utilizar uma fórmula resolutiva, são as seguintes:

I) $(\alpha x+\beta)^2=\gamma$, com $\gamma \geq 0$, donde segue-se

$$\alpha x+\beta=\pm\sqrt{\gamma} \text{ e daí } x=\frac{-\beta\pm\sqrt{\gamma}}{\alpha}$$

II) $(\alpha x+\beta)(\alpha' x+\beta')=0$, e, portanto,

$$\alpha x+\beta=0 \text{ ou } \alpha' x+\beta'=0 \text{ isto é } x=\frac{-\beta}{\alpha} \text{ ou } x=\frac{-\beta'}{\alpha'}$$

Veja que devemos impor $\alpha \neq 0$ e $\alpha' \neq 0$, pois são equações do 2º grau.

Exemplo 2.3.2.

a) Se $(2x-4)^2=16$, então $2x-4=\pm\sqrt{16}$, e daí $2x-4=-4$ ou $2x-4=4$, cujas soluções são respetivamente $x=0$ e $x=4$.

b) Se $(2x-1)(x+3)=0$, a lei do produto nulo exige que $2x-1=0$ ou $x+3=0$, donde temos as soluções $x=\frac{1}{2}$ e $x=-3$, respetivamente.

A seguir, veremos algumas técnicas para resolver equações quadráticas sem o auxílio de uma fórmula, obtendo uma equação do tipo I ou do tipo II.

2.3.1.1 Completamento do Quadrado

O objetivo desse método é obter uma expressão do tipo $(x\pm m)^2-k$, a partir de uma expressão do 2º grau ax^2+bx+c.

Exemplo 2.3.3. Complete o quadrado para a expressão x^2+bx.

$$x^2+bx=x^2+1\cdot bx=x^2+\frac{2}{2}\cdot bx=x^2+2\cdot\frac{b}{2}x \tag{2.3}$$

$$=x^2+2\cdot\frac{b}{2}x+\left(\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{b}{2}\right)^2 \tag{2.4}$$

$$=\left(x+\frac{b}{2}\right)^2-\frac{b^2}{4} \tag{2.5}$$

Na linha (2.3), multiplicamos por um (1) o termo bx, isto é, $bx=2\cdot\frac{b}{2}x$. Em seguida, na linha (2.4), somamos e subtraímos $\left(\frac{b}{2}\right)^2$, isto é, somamos zero, o que não altera a expressão. Então, os três primeiros termos de (2.4) completam um trinômio quadrado perfeito, a saber $\left(x+\frac{b}{2}\right)^2$.

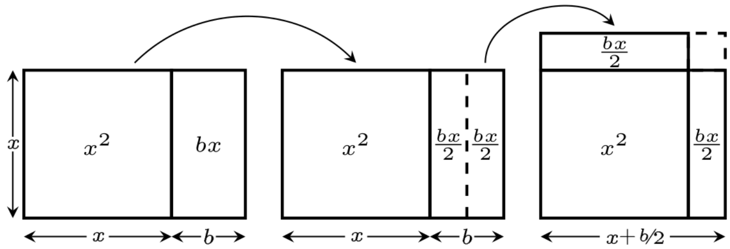


Figura 1 – Obtendo um quadrado de lado $\left(x + \dfrac{b}{2}\right)$.

Observe que x^2, com $x > 0$, representa a área de um quadrado de lado x, e bx, $b > 0$, a área de um retângulo de lados b e x. Disso, a soma $x^2 + bx$ significa a junção das áreas mencionadas. O retângulo pode ser divido em dois de lados x e $\dfrac{b}{2}$, e área $\dfrac{bx}{2}$ cada. Movendo um dos retângulos conforme figura 1 e completando a parte que falta (tracejada), que é um quadrado de lado $\dfrac{b}{2}$, obtemos um quadrado de lado $x + \dfrac{b}{2}$. Esse é o método completamento do quadrado de um ponto vista geométrico.

A técnica é análoga para expressões do tipo $x^2 - bx$.

Exemplo 2.3.4. Complete o quadrado para o binômio $x^2 + 10x$.

$$\begin{aligned} x^2 + 10x &= x^2 + 2 \cdot 5x \\ &= (x^2 + 2 \cdot 5x + 5^2) - 5^2 \\ &= (x + 5)^2 - 25 \end{aligned}$$

2.3.1.2 Soma e Produto

Em certas situações, conhecidos a soma e o produto das raízes de uma equação quadrática, podemos calcular com praticidade tais raízes.

Dada a equação $ax^2 + bx + c = 0$, e pondo a em evidência teremos

$$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = 0 \text{ sse } x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \text{ sse } x^2 - sx + p = 0$$

onde s é a soma das raízes e p, o produto.

Particularmente, esse método é indicado para calcular raízes inteiras da equação quadrática.

Exemplo 2.3.5. (União Soviética)(Extraído de (CAMINHA, 2011)). Sejam a,b e c números reais dois a dois distintos. Mostre que o número

$$a^2(c - b) + b^2(a - c) + c^2(b - a)$$

é sempre diferente de zero.

Temos que:

$$\begin{aligned}
a^2(c-b)+b^2(a-c)+c^2(b-a) &= a^2(c-b)+ab^2-cb^2+bc^2-ac^2\\
&= a^2(c-b)+ab^2-ac^2+bc^2-cb^2\\
&= a^2(c-b)-a(c^2-b^2)+bc(c-b)\\
&= a^2(c-b)-a(c-b)(c+b)+bc(c-b)\\
&= (c-b)[a^2-(b+c)a+bc)]\\
&= (c-b)(a-b)(a-c)\neq 0
\end{aligned}$$

Exemplo 2.3.6. Resolver a equação $x^2-6x+5=0$.

Devemos pensar em dois números cuja soma é $s=6$ e o produto, $p=5$ e, em seguida, verificar se há soluções inteiras, analisando o produto. Como 5 é um número primo, o único produto possível é $p=5\cdot 1$ e como $s=1+5$, as raízes da equação dada são 1 e 5.

Exemplo 2.3.7. Vamos resolver a equação $5x^2-6x+1=0$ usando a técnica da soma e do produto mas, antes, vamos enunciar a seguinte proposição.

Proposição 2.3.1. Dada a equação $ax^2+bx+c=0$, com $a\neq 0$ e $c\neq 0$, e raízes α e β, então a equação $cx^2+bx+a=0$ tem raízes $\dfrac{1}{\alpha}$ e $\dfrac{1}{\beta}$.

Prova. Basta mostrar que $\dfrac{1}{\alpha}$ e $\dfrac{1}{\beta}$ são raízes de $cx^2+bx+a=0$.

Sejam $s=\alpha+\beta$ e $p=\alpha\beta$, respetivamente, a soma e o produto das raízes de $ax^2+bx+c=0$.

Como $p\neq 0$, tem-se

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{s}{p}=\frac{-b}{c}=s' \quad \text{e} \quad \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}=\frac{1}{p}=\frac{a}{c}=p',$$

logo existe uma equação quadrática cuja soma e produto das raízes são s' e p', respetivamente, donde obtém-se as equivalências:

$$\begin{aligned}
x^2-s'x+p'&=0, \text{ sse}\\
x^2-\left(\frac{-b}{c}\right)x+\frac{a}{c}&=0, \text{ sse}\\
x^2+\frac{b}{c}x+\frac{a}{c}&=0, \text{ sse}\\
cx^2+bx+a&=0.
\end{aligned}$$

□

Voltando ao exemplo 2.3.7, sabendo que as raízes de $x^2-6x+5=0$ são $\alpha=1$ e $\beta=5$, então segue da proposição 2.3.1 que as raízes de $5x^2-6x+1=0$ são $\alpha'=\dfrac{1}{\alpha}=\dfrac{1}{1}=1$ e $\beta'=\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{1}{5}$.

Exemplo 2.3.8. Encontre as raízes de $12x^2 + 7x + 1 = 0$.

Consideremos a equação $x^2 + 7x + 12 = 0$, cuja soma e produto das raízes são, respetivamente, $s = -7$ e $p = 12$. Como $p > 0$, as raízes têm o mesmo sinal, e do fato de que $s = -7 < 0$, concluímos que as duas raízes são números reais negativos. Para que o produto seja igual a 12, deve-se ter:

- $12 = (-12) \cdot (-1)$
- $12 = (-6) \cdot (-2)$
- $12 = (-4) \cdot (-3)$

Dos produtos disponíveis, aquele cuja soma dos fatores é -7 é $(-4) \cdot (-3)$, sendo $x = -4$ ou $x = -3$ suas raízes. Assim, a proposição 2.3.1 diz que as raízes procuradas são $-\frac{1}{4}$ e $-\frac{1}{3}$.

2.3.1.3 Fatoração

Outro método prático para determinar as raízes de uma equação quadrática sem a utilização de uma fórmula é o método da fatoração, ou seja, transformar $ax^2 + bx + c = 0$ em sua forma fatorada $a(x - \alpha)(x - \beta) = 0$, onde α e β são as raízes da equação dada.

Exemplo 2.3.9. Vamos resolver a equação $2x^2 + x - 1 = 0$ por fatoração.

Fazendo $x = 2x - x$, temos

$$2x^2 + x - 1 = 2x^2 + 2x - x - 1$$

Em seguida, agrupamos os termos com fatores comuns

$$2x^2 + x - 1 = (2x^2 + 2x) - (x + 1)$$

Colocamos $2x$ em evidência e obtemos

$$2x^2 + x - 1 = 2x(x + 1) - (x + 1)$$

Fatoramos a expressão com fator comum $x + 1$ em evidência, e igualamos a zero

$$2x^2 + x - 1 = (x + 1)(2x - 1) = 0$$

E, daí, aplicamos a lei do produto nulo

$$x + 1 = 0 \quad \text{ou} \quad 2x - 1 = 0$$

Logo

$$x = -1 \quad \text{ou} \quad x = \frac{1}{2}$$

Exemplo 2.3.10. Fatore a equação quadrática $11x^2 + 15x + 4 = 0$ e em seguida encontre as suas raízes.

Substituindo $15x$ por $14x + x$, obtemos

$$11x^2 + 15x + 4 = 11x^2 + 11x + 4x + 4$$

Colocamos agora $11x$ em evidência e obtemos

$$11x^2 + 15x + 4 = 11x(x + 1) + 4(x + 1)$$

Donde surge um fator comum $(x + 1)$ que colocamos em evidência e depois igualamos a zero

$$11x^2 + 15x + 4 = (x + 1)(11x + 4) = 0$$

Daí, aplicamos a lei do produto nulo

$$x + 1 = 0 \text{ ou } 11x + 4 = 0$$

Donde obtemos

$$x = -1 \text{ ou } x = -\frac{4}{11}$$

É importante orientar os alunos quanto à possibilidade de existir raízes irracionais ou simplesmente não haver raízes, mas quase sempre é melhor iniciar a resolução tentando buscar raízes inteiras ou racionais.

2.3.1.4 Raiz Média

Nesta seção, denominamos de método da Raiz Média uma técnica citada em (LIMA et al., 2012) como indício de algoritmo empregado pelos babilônios para achar dois números cuja soma e cujo produto são dados:

Eleve ao quadrado a metade da soma, subtraia o produto e extraia a raiz quadrada da diferença. Some ao resultado a metade da soma. Isso dará o maior dos números procurados. Subtraia-o da soma para obter o outro número.

Traduzido em linguagem matemática atual, o enigma seria representado pela equação

$$x^2 - sx + p = 0 \tag{2.6}$$

e cujas possíveis soluções seriam dadas por

$$x = \frac{s \pm \sqrt{s^2 - 4p}}{2} \quad \text{ou} \quad x = \frac{s}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - p}$$

As duas raízes,

$$x_1 = \frac{s}{2} - \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - p} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{s}{2} + \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - p}$$

estão representadas na figura 2, onde supomos $x_1 \leq x_2$. Assim, sendo $s = x_1 + x_2$ a soma dessas raízes, $\bar{x} = \frac{s}{2}$ é a média aritmética delas, por isso o nome Raiz Média.

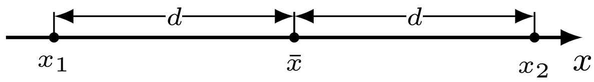


Figura 2 – Raiz Média: $\bar{x}$.

Observando a figura 2, vê-se que $\bar{x}$ está a uma distância d das raízes, onde $d \geq 0$, isto é,

$$x_1 = \bar{x} - d \quad \text{e} \quad x_2 = \bar{x} + d.$$

Como $p = x_1 x_2$, então

$$p = (\bar{x} - d)(\bar{x} + d) = \bar{x}^2 - d^2$$

e daí

$$d^2 = \bar{x}^2 - p \tag{2.7}$$

Portanto, a equação 2.7 define o método da Raiz Média para se obter as raízes da equação 2.6 determinando-se d.

Exemplo 2.3.11. Resolva a equação $x^2 - 14x + 33 = 0$ usando o método da Raiz Média.

Temos que $s = 14$, $\bar{x} = 7$, $p = 33$, mas $d^2 = \bar{x}^2 - p$, ou seja, $d^2 = 49 - 33 = 16$, assim $d = 4 > 0$. Daí,

$$x_1 = \bar{x} - d = 7 - 4 = 3 \quad \text{e} \quad x_2 = \bar{x} + d = 7 + 4 = 11$$

Exemplo 2.3.12. Encontre as raízes de $2x^2 - x - 1 = 0$, caso existam.

Como $s = \frac{1}{2}$, $p = -\frac{1}{2}$, $\bar{x} = \frac{1}{4}$ e $d^2 = \bar{x}^2 - p$, então $d^2 = \frac{1}{16} + \frac{1}{2} = \frac{9}{16}$, isto é, $d = \frac{3}{4}$, portanto,

$$x_1 = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$$

Exemplo 2.3.13. Encontre as raízes de $x^2 - 2x + 1 = 0$, caso existam.

Da equação dada, obtemos $s = 2$, $p = 1$ e $\bar{x} = 1$. Assim, pelo método da raiz média, $d^2 = 1^2 - 1 = 0$ ou $d = 0$, logo

$$x_1 = 1 - 0 = 1 \quad \text{e} \quad x_2 = 1 + 0 = 1$$

Exemplo 2.3.14. Determine as raízes de $x^2 - 5x + 7 = 0$, se existirem.

Sabemos que $s = 5$, $p = 7$ e $\bar{x} = \dfrac{5}{2}$, donde obtemos

$$d^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 7$$

logo $d^2 = -\dfrac{3}{4} < 0$; assim sendo, d não é um número real, portanto, não há raízes.

Repare que, em cada exemplo, a dedução algébrica confirma o argumento geométrico ilustrado na figura 2, portanto,

- se $d > 0$, há duas raízes reais distintas;
- se $d = 0$, há uma raiz real dupla;
- se $d < 0$, não há raízes reais.

Veja que a equação quadrática assume a forma $x^2 + bx + c = 0$ quando $a = 1$, e o método da raiz média resume-se a

$$d^2 = \left(\frac{-b}{2}\right)^2 - c$$

2.3.2 Forma Canônica do Trinômio $ax^2 + bx + c$

Lema 2.3.1. Se a, b e c são números reais, com $a \neq 0$, então

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} \tag{2.8}$$

O segundo membro de 2.8 é a forma canônica do trinômio no primeiro membro.

Prova. Usaremos o método de completamento do quadrado (seção 2.3.1.1). Então,

$$\begin{aligned}
ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c \\
&= a\left[x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a} \cdot x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] - a\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + c \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}
\end{aligned}$$

□

Fazendo $m = \dfrac{-b}{2a}$ e $k = \dfrac{-\Delta}{4a}$ em 2.8, obtemos

$$ax^2 + bx + c = a(x - m)^2 + k \tag{2.9}$$

onde 2.9 é outra forma de escrever a identidade 2.8.

Exemplo 2.3.15. Obtenha a forma canônica do trinômio $2x^2 - 10x + 12$.

$$\begin{aligned}
2x^2 - 10x + 12 &= 2(x^2 - 5x) + 12 \\
&= 2\left[x^2 - 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2\right] - 2 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 12 \\
&= 2\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{2} + 12 \\
&= 2\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25 - 24}{2} \\
&= 2\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

2.3.3 A Fórmula Quadrática

Proposição 2.3.2. As soluções ou raízes reais da equação $ax^2 + bx + c = 0$ são dadas pela fórmula quadrática

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \tag{2.10}$$

se, e somente se, $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$.

Demonstração. Segue de 2.3.1 que $ax^2 + bx + c = 0$ implica

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = 0$$

Ou seja

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$$

Mas, de $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$ deduzimos que $\Delta \geq 0$ para que

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}} \quad \text{ou} \quad x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Donde obtemos

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

□

Proposição 2.3.3. Se x_1 e x_2 são raízes reais de $ax^2 + bx + c = 0$ então

a) $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$ e $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}$;

b) $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) = 0$.

Demonstração (item a)**.** De fato, sendo a soma s e o produto p, segue que

$$\begin{aligned}
s &= x_1 + x_2 \\
&= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\
&= \frac{-b - \cancel{\sqrt{\Delta}} - b + \cancel{\sqrt{\Delta}}}{2a} \\
&= \frac{-\cancel{2}b}{\cancel{2}a} = \frac{-b}{a}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
p &= x_1 \cdot x_2 \\
&= \left(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right) \cdot \left(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right) \\
&= \frac{(-b)^2 - (\Delta)^2}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} \\
&= \frac{\cancel{4a} \cdot c}{\cancel{4a} \cdot a} = \frac{c}{a}
\end{aligned}$$

$\square$

Prova (item b)**.** Segue de 2.3.1 que

$$\begin{aligned}
ax^2 + bx + c &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} \\
&= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] \\
&= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right] \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) \\
&= a\left(x + \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right) \\
&= a\left(x - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right) \\
&= a(x - x_1)(x - x_2) = 0
\end{aligned} \tag{2.11}$$

$\square$

Observação 2.3.1.

i. Quando $\Delta = 0$, diremos que existe somente uma raiz real dupla, e caso $\Delta < 0$, que a equação não possui raízes reais. Sendo $\Delta > 0$, há duas raízes reais distintas.

ii. De $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$, obtém-se $\dfrac{x_1 + x_2}{2} = -\dfrac{b}{2a}$, e sem perda de generalidade, podemos supor, $x_1 < x_2$, observando-se que x_1 e x_2 são equidistantes de $-\dfrac{b}{2a}$ sendo $M = \left(\dfrac{-b}{2a}, 0\right)$ ponto médio do segmento $\overline{X_1X_2}$, onde $X_1 = (x_1, 0)$ e $X_2 = (x_2, 0)$.

iii. É fácil ver a equivalência entre as expressões de b), pois são duas equações quadráticas com o mesmo coeficiente líder (a) e as mesmas raízes.

iv. A expressão em 2.11 é também a forma canônica da equação quadrática.

As fórmulas do item (a) da proposição 2.3.3 são conhecidas como fórmulas de Viète[1] e a igualdade do item (b) é a forma fatorada da equação quadrática.

Observação 2.3.2. A maioria dos livros didáticos do primeiro ano do ensino médio, ao mostrar como é a forma fatorada da equação quadrática, não utilizam a sua forma canônica, e talvez percam uma ótima oportunidade de enfatizar a utilidade desse formato, omitindo mais uma de suas consequências e a simplicidade como é obtida.

[1] François Viète foi um matemático francês do século XVI, cujo legado inclui o aperfeiçoamento das notações algébricas.

3 Funções Quadráticas

Segundo (LIMA et al., 2012), o estudo das funções quadráticas tem sua origem na resolução da equação quadrática. Além disso, sabemos que Galileu Galilei[1], ao estudar o movimento de queda livre nas proximidades da superfície da Terra, definiu que as posições s ocupadas por um corpo em queda livre são funções quadráticas na variável t, onde t são os instantes de queda, isto é,

$$s(t) = \frac{g}{2}t^2,$$

onde g é a aceleração da gravidade, e vale aproximadamente 9,8 m/s^2; então passemos à seguinte definição.

Definição 3.0.1. Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que $f(x) = ax^2 + bx + c$, onde a, b, c são números reais, com $a \neq 0$, chama-se quadrática.

Note que $a \neq 0$ é uma condição necessária, senão a função afim seria um caso particular da função quadrática, e isso faz sentido porque se $\boldsymbol{a = 0}$ a função não é quadrática, pois

$$f(x) = 0x^2 + bx + c = bx + c$$

Evidentemente, os outros coeficientes pode ser nulos. A seguir, damos alguns exemplos de funções quadráticas.

Exemplo 3.0.1.

a) $f(x) = x^2,$ onde $a = 1$, $b = 0$ e $c = 0$;

b) $f(x) = -2x^2 + 4x - 5,$ onde $a = -2$, $b = 4$ e $c = -5$;

c) $f(x) = 3x^2 + 7,$ onde $a = 3$, $b = 0$ e $c = 7$;

d) $f(x) = 4x^2 - 16x,$ onde $a = 4$, $b = -16$ e $c = 0$;

e) $f(x) = x^2 - 5x + 6,$ onde $a = 1$, $b = -5$ e $c = 6$.

3.1 Função Quadrática Determinada por Três Pontos

Sabemos que a função afim $g(x) = ax + b$ fica bem determinada por dois de seus pontos distintos (LIMA et al., 2012). Um resultado similar pode ser encontrado para as funções quadráticas, resumido na seguinte proposição.

Proposição 3.1.1. Se x_1, x_2, x_3 são três números distintos e $f(x) = ax^2 + bx + c$ é uma função quadrática cujos valores nestes números são dados, então existe uma única função f tal que $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$ e $f(x_3) = y_3$.

[1] Galileu Galilei foi um físico, matemático, astrônomo e filósofo florentino, nascido na Itália, Pisa, em 15 de fevereiro de 1564, e faleceu em Florença, em 8 de janeiro de 1642

Demonstração. De fato, sejam x_1, x_2, x_3 três números distintos tais que $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$ e $f(x_3) = y_3$, onde $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, ou seja,

$$S : \begin{cases} ax_1^2 + bx_1 + c = y_1 \\ ax_2^2 + bx_2 + c = y_2 \\ ax_3^2 + bx_3 + c = y_3 \end{cases}$$

onde S é um sistema onde as variáveis a serem determinadas são os coeficientes a, b e c da função quadrática.

Fazendo as diferenças entre a segunda e a primeira e entre a terceira e a segunda equações, reduzimos S a um sistema equivalente S' com duas incógnitas (a e b):

$$S' : \begin{cases} a(x_2^2 - x_1^2) + b(x_2 - x_1) = y_2 - y_1 \\ a(x_3^2 - x_2^2) + b(x_3 - x_2) = y_3 - y_2 \end{cases}$$

Dividindo a primeira e a segunda equações de S' por $x_2 - x_1$ e por $x_3 - x_2$, respetivamente, transformamos S' em

$$S'' : \begin{cases} a(x_2 + x_1) + b = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ a(x_3 + x_2) + b = \dfrac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} \end{cases}$$

Novamente, subtraindo as duas equações de S'' , teremos

$$\begin{aligned} a(x_3 + x_2) - a(x_2 + x_1) &= \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \text{ sse} \\ a(x_3 - x_1) &= \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \text{ sse} \\ a &= \frac{1}{x_3 - x_1}\left(\frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right) \end{aligned}$$

A garantia de que $a \neq 0$ vem do fato da não-colinearidade dos pontos, ou seja,

$$\frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \neq 0$$

Para mostrar que ela única, suponha que exista uma função quadrática $g(x)$, tais que $g(x_1) = f(x_1)$, $g(x_2) = f(x_2)$ e $g(x_3) = f(x_3)$, e provemos que $f(x) = g(x)$, qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$.

De fato, seja $g(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1$, e o sistema

$$\Sigma : \begin{cases} a_1x_1^2 + b_1x_1 + c_1 = ax_1^2 + bx_1 + c \\ a_1x_2^2 + b_1x_2 + c_1 = ax_2^2 + bx_2 + c \\ a_1x_3^2 + b_1x_3 + c_1 = ax_3^2 + bx_3 + c \end{cases}$$

do qual obtemos Σ', fazendo $g(x_i) - f(x_i) = 0$, $1 \leq i \leq 3$:

$$\Sigma' : \begin{cases} (a_1 - a)x_1^2 + (b_1 - b)x_1 + c_1 - c = 0 \\ (a_1 - a)x_2^2 + (b_1 - b)x_2 + c_1 - c = 0 \\ (a_1 - a)x_3^2 + (b_1 - b)x_3 + c_1 - c = 0 \end{cases}$$

Fazendo $a_1 - a = a'$, $b_1 - b = b'$ e $c_1 - c = c'$, Σ' assume a forma

$$\Sigma' : \begin{cases} a'x_1^2 + b'x_1 + c' = 0 \\ a'x_2^2 + b'x_2 + c' = 0 \\ a'x_3^2 + b'x_3 + c' = 0 \end{cases}$$

Procedendo como em S, determinando as diferenças entre a segunda e a primeira equações e entre a terceira e a segunda, reduzimos Σ' para

$$\Sigma'' : \begin{cases} a'(x_2^2 - x_1^2) + b'(x_2 - x_1) = 0 \\ a'(x_3^2 - x_2^2) + b'(x_3 - x_2) = 0 \end{cases}$$

Sabendo que $x_2 - x_1 \neq 0$ e $x_3 - x_2 \neq 0$, podemos simplificar Σ'' dividindo a primeira e a segunda equações respetivamente por $x_2 - x_1$ por $x_3 - x_2$, obtendo

$$\Sigma''' : \begin{cases} a'(x_2 + x_1) + b' = 0 \\ a'(x_3 + x_2) + b' = 0 \end{cases}$$

Finalmente, subtraindo membro a membro as igualdades de Σ''', encontramos $a'(x_3 - x_1) = 0$, ou seja, $a' = 0$, pois $x_1 \neq x_3$. Logo, $a = a_1$, e em decorrência disto, $b' = 0$ e $c' = 0$, portanto, $b = b_1$ e $c = c_1$. □

Exemplo 3.1.1. Determinar a função quadrática que passa pelos pontos $(1, 2), (3, 4)$ e $(6, 5)$.

Seja $f(x) = ax^2 + bx + c$ a função tal que $f(1) = 2$, $f(3) = 4$ e $f(6) = 5$. Daí, teremos o sistema

$$\begin{cases} a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 2 \\ a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c = 4 \\ a \cdot 6^2 + b \cdot 6 + c = 5 \end{cases} \text{ equivalente a } \begin{cases} a + b + c = 2 \\ 9a + 3b + c = 4 \\ 36a + 6b + c = 5 \end{cases}$$

Subtraindo as duas primeiras equações e, em seguida , as duas últimas, obtemos:

$$\begin{cases} 8a + 2b = 2 \\ 27a + 3b = 1 \end{cases}$$

A resolução do último sistema nos dá $a = -\dfrac{2}{15}$, $b = \dfrac{23}{15}$ e $c = \dfrac{3}{5}$, e a função procurada é

$$f(x) = -\frac{2}{15}x^2 + \frac{23}{15}x + \frac{3}{5}.$$

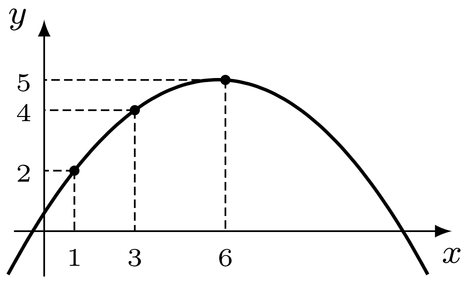


Figura 3 – Função quadrática definida pelos pontos $(1, 2)$, $(3, 4)$ e $(6, 5)$.

Observação 3.1.1. Uma maneira mais fácil e prática, e que não requer conhecimentos sobre determinantes, para mostrar que três pontos distintos $(x_1,\, y_1)$, $(x_2,\, y_2)$ e $(x_3,\, y_3)$, com $x_1 \neq x_2$, $x_1 \neq x_3$ e $x_2 \neq x_3$, são colineares é verificar que

$$\frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = 0, \text{ ou melhor, } \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

isto é, que a razão $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ é constante. Caso $x_1 = x_2 = x_3$, nada a demonstrar, uma vez que tais pontos pertencem a mesma reta vertical $x = x_1$.

A proposição 3.1.1 é um caso particular da *Interpolação Polinomial de Lagrange*[2].

3.2 Forma Canônica da Função Quadrática

A forma canônica da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ é a mesma do trinômio (2.8), isto é

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} \qquad \text{ou} \qquad f(x) = a(x - m)^2 + k$$

onde $m = \dfrac{-b}{2a}$ e $k = \dfrac{-\Delta}{4a}$.

Exemplo 3.2.1. A forma canônica da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que $f(x) = 2x^2 + 4x - 6$, é:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^2 + 4x - 6 \\ &= 2(x^2 + 2x) - 6 \\ &= 2(x^2 + 2x + 1^2) - 6 - 2 \\ &= 2(x + 1)^2 - 8 \end{aligned}$$

Observação 3.2.1. A maioria dos livros do primeiro ano de ensino médio iniciam o estudo de *função quadrática* sem sequer introduzir (definir e demonstrar) a forma canônica, pois, além de sua simplicidade e clareza, é fundamental para determinar as suas raízes, seus pontos críticos (máximo ou mínimo), as equações de Viète (fórmulas da soma e do produto), a forma fatorada, os vértices da parábola, etc.

[2] Joseph Louis Lagrange foi um importante matemático italiano nascido no século 18.

Zeros

Uma das consequências imediatas da forma canônica é a obtenção dos zeros da equação quadrática.

Definição 3.2.1. Dada uma função $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$, tal que $f(x) = y$, chama-se zeros da função f os valores de $x \in \mathbb{D}$ tais que $f(x) = 0$, quando existem.

Definição 3.2.2. Os zeros da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ são as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$, isto é,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad \text{se } \Delta \geq 0.$$

Exemplo 3.2.2. As raízes da equação $2x^2 - 10x + 12 = 0$, onde $a = 2$, $b = -10$ e $c = 12$ são

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 12}}{2 \cdot 2} \\ &= \frac{10 \pm \sqrt{100 - 96}}{4} \\ &= \frac{10 \pm \sqrt{4}}{4} \end{aligned}$$

Assim sendo,

$$x = \frac{10 - 2}{4} = 2 \quad \text{ou} \quad x = \frac{10 + 2}{4} = 3$$

Pela forma canônica,

$$\begin{aligned} 2x^2 - 10x + 12 &= 2(x^2 - 5x) + 12 \\ &= 2\left(x^2 - 5x + \frac{25}{4}\right) + 12 - \frac{25}{2} \\ &= 2(x - \frac{5}{2})^2 - \frac{1}{2} = 0 \end{aligned}$$

Ou melhor,

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

Donde obtemos as mesmas soluções

$$x = \frac{5 \pm 1}{2}$$

Extremo Absoluto: Máximo ou Mínimo

Alguns problemas interessantes, como os descritos nos exemplos 3.2.3 e 3.2.4, são aplicações das funções quadráticas nas quais se deve determinar seu ponto extremo: máximo ou mínimo. Também é útil para se responder um enigma milenar: achar dois números cuja soma é dada, e tais que o produto entre eles seja máximo.

Definição 3.2.3. Um função $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ possui um valor máximo absoluto quando existe $m \in \mathbb{D}$ tal que $f(x) \leq f(m)$, para todo $x \in \mathbb{D}$.

Definição 3.2.4. Um função $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ possui um valor mínimo absoluto quando existe $m \in \mathbb{D}$ tal que $f(x) \geq f(m)$, para todo $x \in \mathbb{D}$.

Nas definições acima, o ponto $(m, f(m))$ é chamado de ponto extremo da função.

Proposição 3.2.1. A função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, onde $a \neq 0$, possui um ponto extremo, máximo ou mínimo, quando $x = m$, sendo $m = \dfrac{-b}{2a}$.

Prova. Supondo que a forma canônica de f seja $f(x) = a(x - m)^2 + k$ e $a > 0$, as desigualdades seguintes são equivalentes:

$$a(x - m)^2 \geq 0, \text{ sse } a(x - m)^2 + k \geq k, \text{ sse } f(x) \geq k = f(m),$$

por conseguinte, f atinge o seu valor mínimo quando $f(x) = f(m) = k$. Analogamente, tomando $a < 0$, temos

$$a(x - m)^2 \leq 0, \text{ sse } a(x - m)^2 + k \leq k, \text{ sse } f(x) \leq k = f(m),$$

mostrando que f tem seu valor máximo quando $f(x) = f(m) = k$. □

Assim, quando $a > 0$ a função é limitada inferiormente, e quando $a < 0$, limitada superiormente, como ilustra a figura 4.

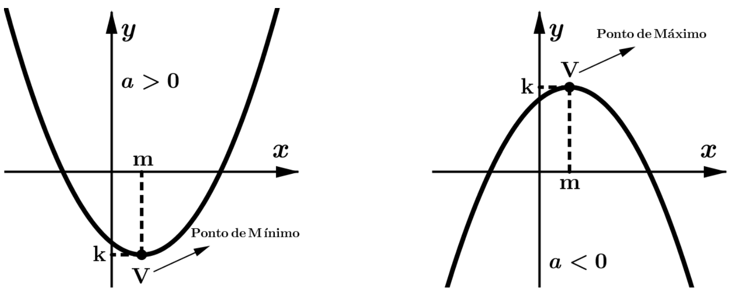


Figura 4 – Extremos da função quadrática.

Exemplo 3.2.3. Mostre que, de todos os retângulos de mesmo perímetro, aquele que tem área máxima é o quadrado.

Seja $2p$ o perímetro desses retângulos, ou melhor,

$$2p = 2(x + y) \text{ , sse } p = x + y. \tag{3.1}$$

A sua área é

$$A = x \cdot y = x(p - x), \text{ sse } A = f(x) = -x^2 + px,$$

assim, a função $f(x)$ que fornece a área desse retângulo é uma função quadrática com $a = -1 < 0$, logo possui um ponto de máximo dado por

$$x = \frac{-b}{2a} = -\frac{p}{2(-1)} = \frac{p}{2}\text{ , sse } p = 2x.$$

Substituindo $p = 2x$ em (3.1), tem-se $2x = x + y$, sse $x = y$, que é o que queríamos provar.

Exemplo 3.2.4. (Extraído de (SANTOS; FERREIRA, 2009)) Cobrando-se uma diária de R\$ 200,00, um hotel consegue ocupar todos os seus 60 quartos. Para cada acréscimo de R\$ 5,00 no preço da diária, estima-se que um quarto não será ocupado.

a) Determine a relação entre o faturamento diário do hotel F com o número x de quartos desocupados.

b) Qual o valor da diária para que o faturamento seja máximo?

c) Qual o valor do faturamento máximo?

a) Do enunciado, temos que $F(x) = (60 - x)(200 + 5x)$, onde x é o números de quartos desocupados, isto é

$$F(x) = -5x^2 + 100x + 12000$$

b) Como o faturamento é uma função quadrática com $a = -1 < 0$, ela apresenta um ponto de máximo dado por

$$x = x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-100}{-10}$$

Portanto, $x = 10$.

O faturamento máximo ocorre quando há 10 quartos desocupados.

c) O faturamento máximo é

$$f(10) = -5 \cdot 10^2 + 100 \cdot 10 + 12000$$

Logo, $f(10) = 12500$.

O faturamento máximo é de R\$ 12.500,00, apontando uma diária de R\$ 250,00.

Exemplo 3.2.5. Sabendo que $f(x) = -3(x-1)^2 + 2$, mostre que $f(x) \leq f(1)$.

Observe que a função foi dada em sua forma canônica, logo $a = -3$ e f é limitada superiormente pelo valor $f(m)$, onde $m = 1$ é a abscissa do vértice. Portanto,

$$f(x) \leq f(m) = f(1)$$

Eixo de Simetria

Começamos fazendo a seguinte pergunta: existem $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, tais que $x_1 \neq x_2$ e para os quais $f(x_1) = f(x_2)$? Veremos que a proposição 3.2.2 responde a essa pergunta.

Definição 3.2.5. O eixo de simetria de uma parábola é uma reta em relação à qual ela é simétrica.

Proposição 3.2.2. A função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ possui um eixo de simetria dado pela reta vertical cuja equação é $x = -\dfrac{b}{2a}$.

Demonstração. Segue da forma canônica e de $f(x_1) = f(x_2)$ as seguintes equivalências:

$$\begin{aligned} a\left(x_1 + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} &= a\left(x_2 + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}, \text{ sse} \\ a\left(x_1 + \frac{b}{2a}\right)^2 &= a\left(x_2 + \frac{b}{2a}\right)^2, \text{ sse} \\ \left(x_1 + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \left(x_2 + \frac{b}{2a}\right)^2, \text{ sse} \\ x_1 + \frac{b}{2a} &= \pm\left(x_2 + \frac{b}{2a}\right) \end{aligned}$$

Mas $x_1 \neq x_2$, por isto,

$$x_1 + \frac{b}{2a} = -\left(x_2 + \frac{b}{2a}\right)$$

Donde obtemos

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-b}{2a}$$

□

Portanto, o gráfico da função quadrática tem como eixo de simetria a reta vertical

$$x = \frac{-b}{2a}$$

uma vez que

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

é equidistante de x_1 e x_2 (verifique!), sendo x_1 e x_2 números reais arbitrários. Também perceba que a reta que contém os pontos (x_1, y) e (x_2, y), onde $y = f(x_1) = f(x_2)$, é perpendicular ao eixo da parábola (por quê?) e será tangente à parábola quando $x_1 = x_2$, sendo o vértice o ponto de tangência.

Exemplo 3.2.6. A função quadrática $f(x) = 2x^2 - 3x$ possui como eixo de simetria a reta de equação

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{3}{4}$$

No exemplo 3.2.7, usamos uma tática diferente para justificar que a reta $x = 3$ é o eixo de simetria da função dada.

Exemplo 3.2.7. A reta $x = 3$ é o eixo de simetria do gráfico de $f(x) = x^2 - 6x + 5$.

Com efeito,

$$\begin{aligned} f(3-\alpha) &= (3-\alpha)^2 - 6(3-\alpha) + 5 \\ &= 9 - 6\alpha + \alpha^2 - 18 + 6\alpha + 5 \\ &= \alpha^2 + 6\alpha + 9 - 6\alpha - 18\alpha + 5 \\ &= (\alpha+3)^2 - 6(\alpha+3) + 5 \\ &= f(3+\alpha), \end{aligned}$$

para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

Segue da proposição 3.2.2 que

$$\frac{(3-\alpha)+(3+\alpha)}{2} = 3 = x_V.$$

3.2.1 Domínio, Contradomínio e Imagem

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$. Da definição, sabemos que seu domínio é $\mathbb{D}(f) = \mathbb{R}$ e seu contradomínio $\mathbb{CD}(f) = \mathbb{R}$. O conjunto imagem depende do valor do coeficiente a, pois, se $a < 0$, a função quadrática é limitada superiormente, e, caso contrário, sendo $a > 0$, ela é limitada inferiormente. Em ambos os casos, esses limites são iguais à ordenada do vértice $\dfrac{-\Delta}{4a}$. Portanto, se

- $a < 0$, a imagem de f é o conjunto $\mathbb{I}m = \left\{ y \in \mathbb{R};\ y \leq \dfrac{-\Delta}{4a} \right\}$.
- $a > 0$, a imagem de f é o conjunto $\mathbb{I}m = \left\{ y \in \mathbb{R};\ y \geq \dfrac{-\Delta}{4a} \right\}$.

Exemplo 3.2.8. Encontre o conjunto imagem das funções quadráticas:

a) $f(x) = x^2 - 4x + 3$;

b) $f(x) = -3x^2 + 3x + \dfrac{3}{2}$.

a) De $f(x) = x^2 - 4x + 3$, obtemos $a = 1$, $b = -4$ e $c = 3$, e sendo $a > 0$, f é limitada inferiormente por

$$y_v = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{4 \cdot 1 \cdot 3 - (-4)^2}{4 \cdot 1} = \frac{12 - 16}{4} = -1$$

Daí

$$\mathbb{I}m(f) = \{y \in \mathbb{R};\ y \geq -1\}$$

b) De $f(x) = -3x^2 + 3x + \dfrac{3}{2}$, tiramos $a = -3$, $b = 3$ e $c = \dfrac{3}{2}$, e como $a < 0$, f é limitada inferiormente por

$$y_v = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{4 \cdot (-3) \cdot 3/2 - 3^2}{4 \cdot (-3)} = \frac{-18 - 9}{-12} = \frac{-27}{-12} = \frac{9}{4}$$

Então

$$\mathbb{I}m(f) = \left\{ y \in \mathbb{R};\ y \leq \frac{9}{4} \right\}$$

3.3 Gráfico da Função Quadrática

Teorema 3.3.1. O gráfico de uma função quadrática é uma parábola.

Demonstração. Para mostrar que o gráfico de $f(x) = ax^2 + bx + c$ é uma parábola, é suficiente mostrar que a representação gráfica de $y = ax^2$ também o é, pois como veremos mais adiante, o gráfico daquela pode ser obtido do gráfico desta através de translações vertical e horizontal. Veja o exemplo 3.3.2. $\square$

Uma boa estratégia didática para esboçar o gráfico de uma função quadrática, pela simplicidade, é considerar a função $f(x) = x^2$. Como seus pontos são da forma (x, x^2), obtemos a seguinte tabela:

x	$f(x) = x^2$
0	0
1	1
-1	1
2	4
-2	4

Plotando-os, obtemos o gráfico representado pela figura 5.

Podemos deduzir do gráfico da figura 5 que $f(x) = f(-x)$, isto é, a função quadrática $f(x) = x^2$ é par, e isso significa que essa função é simétrica em relação ao eixo y. Por outro lado, $f(x) = x^2 \geq 0$, isto é, essa função admite um valor mínimo quando $x = 0$.

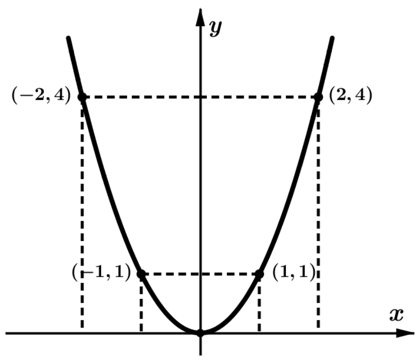


Figura 5 – Gráfico de $f(x) = x^2$.

No entanto, a parábola não é apenas o nome dado ao gráfico da função quadrática, é uma curva com propriedades excepcionais como veremos mais adiante.

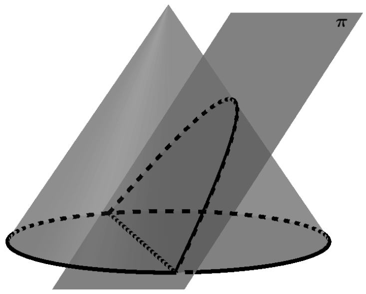


Figura 6 – Parábola: interseção de um cone e um plano paralelo a uma de suas geratrizes.

Quando um plano interseta um cone com uma inclinação paralela a uma de suas geratrizes (figura 6), a curva resultante é uma parábola, e por isso é chamada de curva cônica.

Num sistema de coordenadas cartesianas, a parábola é definida como um lugar geométrico dos pontos do plano caracterizados como na definição subsequente.

Definição 3.3.1. Dados um ponto fixo, F, denominado foco, e uma reta d, chamada diretriz, tais que $F \notin d$, define-se parábola como o conjunto de todos os pontos $P(x, y)$ do plano contendo F e d, tais que P é equidistante a F e à reta diretriz d. Isto é, $d(P, F) = d(P, d)$, onde $2p$ é a distância do foco à diretriz e parâmetro da parábola.

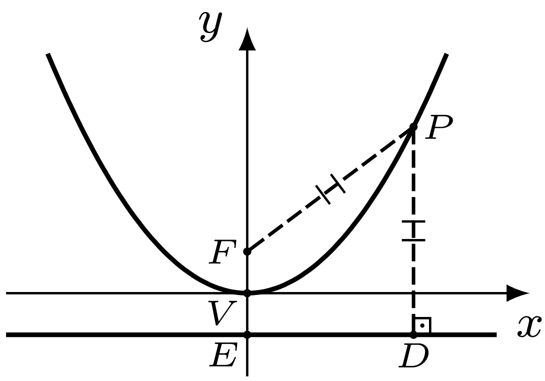


Figura 7 – Parábola de foco F e diretriz $d = \overleftrightarrow{ED}$.

Principais elementos de uma parábola:

a) Foco: ponto F tal que $FE = 2p$.

b) Diretriz: reta $d = \overleftrightarrow{ED}$ cuja equação é $y = -p$.

c) Vértice: ponto V que corresponde ao ponto médio do segmento FE pois, pela definição de parábola, temos $FV = VE = p$. O vértice é o ponto da parábola mais próximo da diretriz.

d) Eixo de simetria ou reta focal: reta $\overleftrightarrow{FV}$ perpendicular à diretriz passando pelo foco.

Conhecendo os seus elementos e a distância entre dois pontos (apêndice B) aplicamos a definição de parábola, com vértice na origem do plano cartesiano, para determinar a sua equação, ou seja,

$$\sqrt{(x-0)^2+(y-p)^2} = y+p$$

Elevando ao quadrado os membros da igualdade, temos

$$x^2+(y-p)^2 = (y+p)^2$$

Expandindo os quadrados, vem

$$x^2+y^2-2py+p^2 = y^2+2py+p^2$$

Cancelando os termos comuns, obtemos

$$x^2-2py = 2py$$

Finalmente, isolamos y encontrando

$$y = \frac{1}{4p}x^2 \tag{3.2}$$

Fazendo $a = \dfrac{1}{4p}$ em (3.2), onde $p = \dfrac{1}{4a}$, obtemos

$$y = ax^2$$

Exemplo 3.3.1. Dada a função real $f(x) = x^2$, onde $a = 1$, seu gráfico é uma parábola com foco $F\left(0, \dfrac{1}{4}\right)$ e diretriz a reta horizontal $y = -\dfrac{1}{4}$.

Como um ponto qualquer $P(x,\, x^2)$ do gráfico de f deve satisfazer $d(P,F) = d(P,d)$ e, por tratar-se de grandezas positivas (distâncias), temos:

$$\sqrt{(x-0)^2+\left(x^2-\frac{1}{4}\right)^2} = x^2-\left(-\frac{1}{4}\right)$$

Daí, elevando ao quadrado os membros desta igualdade, vem

$$\begin{aligned} x^2+\left(x^2-\frac{1}{4}\right)^2 &= x^2+x^4-2x^2\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{16} \\ &= x^2+x^4-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{16} \\ &= x^4+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{16} \\ &= \left(x^2+\frac{1}{4}\right)^2 \end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exemplo 3.3.2. Consideremos a função quadrática $f(x) = ax^2$ cujo gráfico é uma parábola de foco $F = \left(0,\ \dfrac{1}{4a}\right)$ e diretriz $y = -\dfrac{1}{4a}$.

Com efeito, como no exemplo anterior, verificamos que um ponto genérico $P(x,\ ax^2)$ do gráfico de f deve satisfazer $d(P, F) = d(P, d)$, isto é,

$$\begin{aligned}
\sqrt{(x-0)^2 + \left(ax^2 - \frac{1}{4a}\right)^2} &= ax^2 - \left(-\frac{1}{4a}\right), \quad \text{sse} \\
x^2 + \left(ax^2 - \frac{1}{4a}\right)^2 &= x^2 + a^2x^4 - 2ax^2 \cdot \frac{1}{4a} + \frac{1}{16a^2} \\
&= x^2 + a^2x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{16a^2} \\
&= a^2x^4 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{16a^2} \\
&= \left(ax^2 + \frac{1}{4a}\right)^2
\end{aligned}$$

Em termos gerais, se a parábola tem vértice $V(x_0,\ y_0) \neq (0,\ 0)$, então sua equação é da forma

$$(x - x_0)^2 = 4p(y - y_0)$$

De fato, desenvolvendo o primeiro e o segundo membros dessa igualdade e, em seguida, isolando y, temos

$$\begin{aligned}
x^2 - 2x_0x + x_0^2 &= 4py - 4py_0, \quad \text{sse} \\
4py &= x^2 - 2x_0x + x_0^2 + 4py_0 \\
y &= \frac{1}{4p}x^2 - \frac{2x_0}{4p}x + \frac{x_0^2 + 4py_0}{4p} \\
&= \frac{1}{4p}x^2 - \frac{x_0}{2p}x + \frac{x_0^2}{4p} + y_0
\end{aligned}$$

onde $a = \dfrac{1}{4p}$, $b = -2ax_0$, isto é, $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$, $c = ax_0^2 + y_0$; daí $y_0 = c - ax_0^2 = c - a\left(\dfrac{-b}{2a}\right)^2$, portanto, $y_0 = \dfrac{4ac - b^2}{4a}$, onde claramente vemos que x_0 e y_0 são as coordenadas do vértice da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$.

De uma maneira geral, dada a função $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, e sua forma canônica $f(x) = a(x-m)^2 + k$, vemos que o gráfico da função pode ser obtido de $g(x) = ax^2$ através de uma translação horizontal

$$(x,\ y) \mapsto (x + m,\ y),$$

seguida de uma translação vertical

$$(x,\ y) \mapsto (x,\ y + k).$$

Assim, $f(x) = ax^2 + bx + c$, tem como gráfico uma parábola cujo foco é $F = \left(m, \dfrac{1}{4a} + k\right)$, diretriz d cuja equação é $y = -\dfrac{1}{4a} + k$ e vértice $V = (m, k)$. Resumindo:

a) o foco é $F = \left(\dfrac{-b}{2a}, \dfrac{4ac - b^2 + 1}{4a}\right)$;

b) a diretriz d é $y = \dfrac{4ac - b^2 - 1}{4a}$;

c) o vértice é $V = \left(\dfrac{-b}{2a}, \dfrac{4ac - b^2}{4a}\right)$.

Ora, o que acabamos de expor nos mostra que os gráficos das funções $f(x) = ax^2$ e $f(x) = ax^2 + bx + c$ são congruentes pois eles apenas são deslocados no plano. De maneira análoga, $f(x) = -ax^2$ tem gráfico oriundo de $f(x) = ax^2$ através de uma reflexão sobre o eixo x, daí a seguinte definição.

Definição 3.3.2. Os gráficos de $f(x) = ax^2 + bx + c$ e $g(x) = a'x^2 + b'x + c'$ são parábolas congruentes quando $a = \pm a'$.

Portanto, duas parábolas congruentes têm a mesma abertura de concavidade, sobrepondo-se uma a outra por uma translação ou reflexão em torno do eixo x. Observe que aqui não estamos considerando a rotação, pois estamos tratando de gráficos de funções, e uma rotação pode gerar gráficos de não-funções.

3.3.1 Interpretação Geométrica dos Coeficientes da Função Quadrática

Nessa seção, vamos explicar o papel que desempenha cada coeficiente da função quadrática em relação ao seu gráfico. Uma interpretação geométrica desses coeficientes facilita muito a construção da parábola.

O Coeficiente a

Modificando o parâmetro a, verifica-se que ele é responsável pela concavidade da curva, como mostra a figura 8, contendo as representações gráficas de $f(x) = ax^2$, para $a = \pm\dfrac{1}{2}$, $a = \pm\dfrac{1}{4}$, $a = \pm 1$ e $a = \pm 2$.

Observemos que, quanto maior for o número $|a|$, a função cresce ($a > 0$) ou decresce ($a < 0$) mais rapidamente, fazendo com que sua concavidade seja mais fechada. Ao contrario, quanto menor for o número $|a|$, a função cresce ($a > 0$) ou decresce ($a < 0$) mais lentamente, e sua concavidade apresenta-se mais aberta. Quando $a > 0$, a parábola abre-se para cima, e dize-

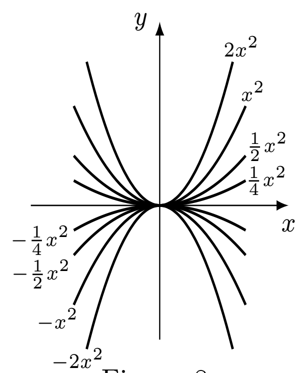


Figura 8

mos que possui concavidade para cima, mas, sendo $a < 0$, a parábola abre-se para baixo, e dizemos que ela possui concavidade para baixo.

O Coeficiente b

O coeficiente b confere um comportamento peculiar à parábola, uma vez que, quando $b > 0$, o eixo y é cortado pela porção ascendente do gráfico, e quando $b < 0$, o mesmo eixo é cortado pela porção descendente da curva.

Como já observado, o gráfico de $f(x) = ax^2 + bx + c$ tem um eixo de simetria dado por $x = \dfrac{-b}{2a}$. Vamos considerar $a > 0$.

Se $b < 0$, teremos $x_v > 0$, mas $f(x_v) < f(0) = c$, e portanto, a parábola corta o eixo y em sua porção descendente. Caso contrário, se $b > 0$, teremos $x_v < 0$, e como $f(x_v) < f(0)$, pois $f(x_v)$ é seu valor mínimo, e desta forma, a parábola corta o eixo y em sua porção ascendente. A prova é análoga para $a < 0$.

Do exposto acima, não é coincidência a proposição 3.3.1.

Proposição 3.3.1. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função quadrática $f(x) = a^2 + bx + c$, onde a, b e $c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. A reta tangente ao gráfico de f no ponto $(0,\, c)$ é $g(x) = bx + c$.

Prova. Supondo $a > 0$, $f(x) - g(x) \geq 0$, pois

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= ax^2 + bx + c - (bx + c) \\ &= ax^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Se $a < 0$, então $f(x) - g(x) = ax^2 \leq 0$. □

Em ambos os casos, $a > 0$ ou $a < 0$, o gráfico de $f(x)$ está situado em um dos semiplanos determinados por g, a igualdade ocorrendo apenas quando $x = 0$, isto é, $f(0) = g(0) = c$.

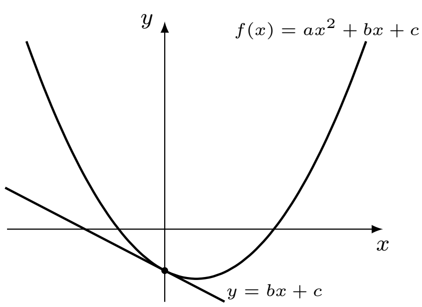


Figura 9 – Reta tangente no ponto $(0,\, c)$.

Exemplo 3.3.3. A tangente ao gráfico de $f(x) = -0,1x^2 - 2x + 8$ pelo seu y-interseto é a reta e gráfico da função $y = -2x + 8$, como mostra a figura 10.

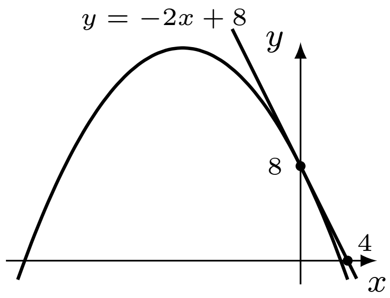


Figura 10 – Tangente ao gráfico de $f(x) = -0,1x^2 - 2x + 8$.

O Coeficiente c

O coeficiente c, indica a ordenada do ponto em que a parábola corta o eixo y, pois $f(0) = c$, e um ponto da forma $(0, c)$, $c \in \mathbb{R}$, está no eixo y, sobre a ordenada c (figura 12) .

Como seria o gráfico da função $g(x) = x^2 + c$? É fácil verificar que esse gráfico pode ser obtido do gráfico da figura 5 da página 37 adicionando-se c a suas ordenadas pois os pontos de g são da forma $(x,\ f(x) + c)$, provocando um deslocamento vertical daquele gráfico para cima ou para baixo, conforme $c > 0$ ou $c < 0$, respetivamente, como na figura 11.

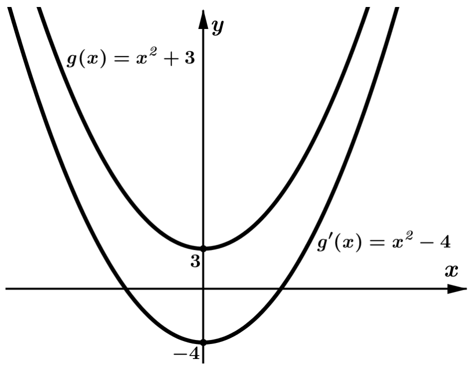


Figura 11 – Gráficos de $g(x) = x^2 + 3$ e $g'(x) = x^2 - 4$.

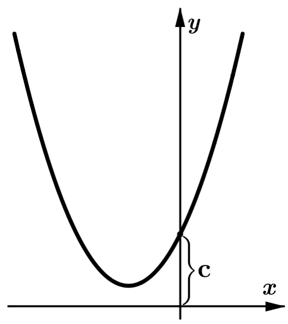


Figura 12 – y-interseto: $(0, c)$.

3.3.1.1 Reta Tangente a uma Parábola

O gráfico de uma parábola não possui tangente apenas no ponto $(0, c)$. Aqui mostraremos quais características deve ter uma reta tangente ao gráfico de uma função quadrática em um ponto genérico $P(x,\ y)$. Começaremos com a definição de reta tangente.

Definição 3.3.3. Uma reta é tangente a uma parábola quando têm um único ponto em comum entre elas e a parábola fica inteiramente situada em um dos semiplanos determinados por essa reta (ver a Figura 13).

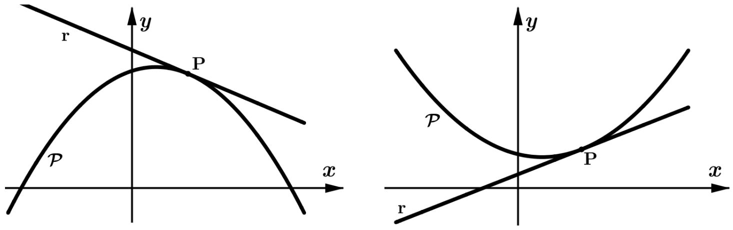


Figura 13 – Reta r tangente à parábola $\mathcal{P}$.

Observe que essa definição é precisa porque uma reta pode ter um único ponto em comum com uma parábola mas ter partes da parábola em ambos os semiplanos que determina, como exemplifica a figura 14.

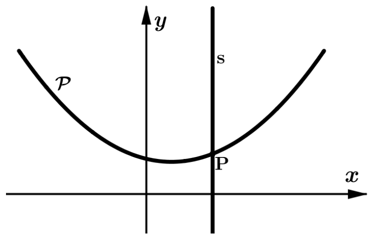


Figura 14 – A reta s não é tangente à parábola $\mathcal{P}$.

Teorema 3.3.2. O coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ num ponto $P(x_0,\, y_0)$ é $2ax_0 + b$.

Prova. Seja $2ax_0 + b = \dfrac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$ o coeficiente angular do gráfico da função $g(x)$ que é a reta que passa pelo ponto $P(x_0, y_0)$ da parábola $f(x) = ax^2 + bx + c$, ou seja,

$$g(x) = g(x_0) + (2ax_0 + b)(x - x_0).$$

De $g(x_0) = f(x_0)$, obtemos $g(x_0) = ax_0^2 + bx_0 + c$. Supondo $a > 0$ e $x \neq x_0$, temos que

$$\begin{aligned}
f(x) - g(x) &= ax^2 + bx + c - \left[(2ax_0 + b)(x - x_0) + ax_0^2 + bx_0 + c\right] \\
&= ax^2 + bx + c - (2ax_0x - 2ax_0^2 + bx - bx_0 + ax_0^2 + bx_0 + c) \\
&= ax^2 + bx + c - (2ax_0x - ax_0^2 + bx + c) \\
&= ax^2 + bx + c - 2ax_0x + ax_0^2 - bx - c) \\
&= ax^2 - 2ax_0x + ax_0^2 \\
&= a(x^2 - 2xx_0 + x_0^2) \\
&= a(x - x_0)^2 > 0
\end{aligned}$$

A prova é análoga para $a < 0$. □

Evidentemente, a igualdade só ocorre quando $x = x_0$, que é a abscissa do ponto de tangência, e assim $f(x) \geq g(x)$, mostrando que a parábola situa-se apenas em um dos semiplanos definidos por $g(x)$, e lhe é tangente no ponto $P(x_0, y_0)$.

3.3.2 Construção do Gráfico da Função Quadrática

Agora que já conhecemos o significado geométrico de cada coeficiente da função quadrática e que seu gráfico é uma parábola, veremos uma técnica de como esboçá-la. Precisamos de alguns pontos para o desenho do gráfico, e esses pontos podem ser:

- as interseções com o eixo x, quando existirem, que chamaremos de x-intersetos;
- a interseção com o eixo y, que também chamaremos de y-interseto;
- o vértice da parábola e seu eixo;
- o ponto simétrico do y-interseto $(0, c)$.

x-intersetos

Os x-intersetos, quando existirem, são pontos da forma $(x, 0)$, pois pertencem ao eixo x, logo são os zeros da função quadrática uma vez que $f(x) = 0$.

y-interseto

O y-interseto é da forma $(0, y)$, já que estão sobre o eixo y. Substituindo esses valores na função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ tem-se

$$f(0) = y = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c.$$

Como já foi visto, a parábola interseta o eixo y no ponto $(0, c)$.

O Vértice da Parábola

Já vimos que o vértice da parábola é o ponto $V\left(\dfrac{-b}{2a}, \dfrac{-\Delta}{4a}\right)$, e que também pode ser obtido da forma canônica $f(x) = a(x - m)^2 + k$, ou seja, $V(m, k)$.

Ponto Simétrico de $(0,\ c)$

Proposição 3.3.2. O simétrico de $(0,\ c)$ pela função quadrática é o ponto $\left(\dfrac{-b}{a},\ c\right)$.

Prova. Estamos procurando os pontos da função quadrática tais que $f(x) = c$, logo

na igualdade acima, substituimos $f(x)$ por $ax^2 + bx + c$,

$$ax^2 + bx + c = c$$

Em seguida, usamos a lei do corte para cancelar c,

$$ax^2 + bx = 0$$

Depois, cocolocamos x em evidência,

$$x(ax + b) = 0,$$

Daí aplicamos a lei do produto nulo,

$$x = 0 \text{ ou } ax + b = 0,$$

Da qual obtemos

$$x = 0 \text{ ou } x = \frac{-b}{a}$$

□

Se as raízes reais existirem, e supondo que elas sejam x_1 e x_2, então $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$, isto é, o simétrico de $(0, c)$ é o ponto $(x_1 + x_2, c)$, como podemos ver na figura 15 onde consideramos $a > 0$.

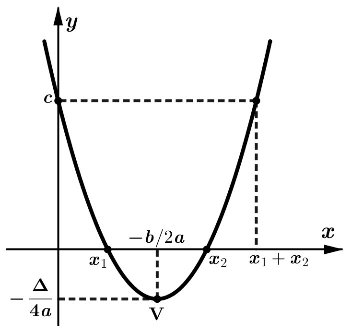


Figura 15

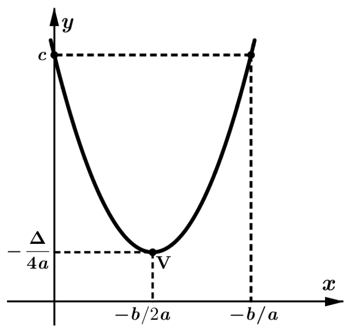


Figura 16

Exemplo 3.3.4. Faça um esboço do gráfico da função $f(x) = 7x^2 - 8x + 1$.

Os coeficientes de f são $a = 7$, $b = -8$ e $c = 1$. Sabemos que $a > 0$, logo a curva tem concavidade voltada para cima. O ponto $(0, 1)$ é o y-interseto. Para determinar os x-intersetos devemos encontrar os zeros da função dada, e para isso vamos utilizar a proposição 2.3.1, ou seja, calculamos os zeros de $h(x) = x^2 - 8x + 7$ cuja soma é $s = 8$ e produto $p = 7$. É fácil verificar que essas raízes são 7 e 1, uma vez que $p = 7 = 7 \cdot 1$ e $s = 8 = 7 + 1$. Portanto, as raízes de f são $x_1 = \frac{1}{7}$ e $x_2 = 1$. O vértice tem coordenadas

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{8}{14} = \frac{4}{7} \quad \text{e} \quad y_v = \frac{(-8)^2 - 4 \cdot 7 \cdot 1}{4 \cdot 7} = \frac{36}{4 \cdot 7} = \frac{9}{7}.$$

Agora, temos pontos suficientes para esboçar o gráfico pedido, ilustrado na figura 17.

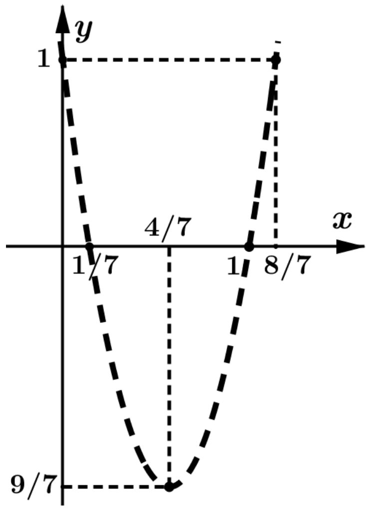


Figura 17

Exemplo 3.3.5. Vamos esboçar o gráfico da função $f(x) = -\dfrac{1}{18}x^2 + \dfrac{2}{3}x - 4.$

Seus principais elementos são:

a) Coeficientes:

• $a = -\dfrac{1}{18} < 0$, indicando concavidade da parábola voltada para baixo;

• $b = \dfrac{2}{3} > 0$, assim a parábola corta eixo y em sua parte ascendente;

• $c = -4$, daí y-interseto é $(0, -4)$.

b) Discriminante:

• $\Delta = b^2 - 4ac = \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 - 4 \cdot \left(-\dfrac{1}{18}\right)(-4) = \dfrac{4}{9} - \dfrac{16}{18} = -\dfrac{4}{9} < 0$, logo não há x-intersetos pois não há raízes.

c) Vértice:

• $x_V = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-2/3}{2 \cdot (-1/18)} = 6 \quad \text{e} \quad y_V = \dfrac{-\Delta}{4 \cdot (-1/18)} = \dfrac{4/9}{-2/9} = -2.$

d) Ponto simétrico do y-interseto:

• $(-b/a,\ c) = \left(\dfrac{-2/3}{-1/18},\ -4\right) = (12,\ -4).$

e) Eixo de simetria: $x = x_V = 6$.

Reunindo as informações acima, obtém-se o esboço do gráfico na figura 18.

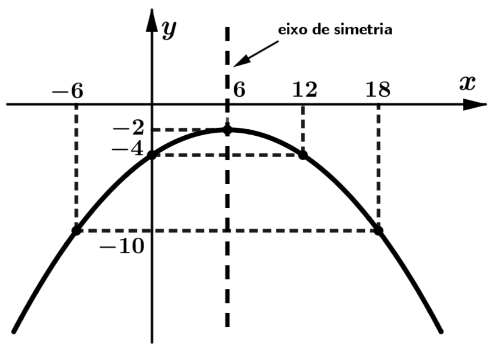


Figura 18

Caso não haja zeros, ou exista apenas um, podemos incluir mais pontos, mas de preferência simétricos, para obtermos uma esboço mais correto do gráfico, como na figura 18, onde fizemos $f(x) = -10$, obtendo os pontos $(-6, -10)$ e $(18, -10)$.

As figuras 19 e 20 ilustram a disposição do gráfico em função dos valores do coeficiente a e do discriminante Δ.

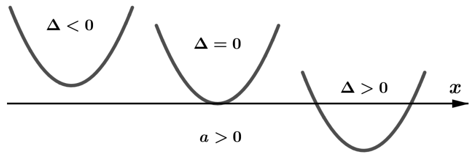


Figura 19

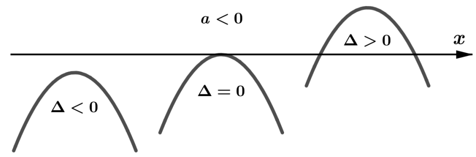


Figura 20

Observação 3.3.1. Um comentário, na verdade uma crítica oportuna, se faz necessário, pois a maioria dos livros didáticos de matemática para o ensino médio ignoram o ponto simétrico do y-interseto, e tal ponto é relevante para o esboço da parábola.

3.3.3 Sinal

Estudar o sinal da função quadrática

$$f(x) = ax^2 + bx + c \qquad (a \neq 0)$$

significa determinar para quais valores de $x \in \mathbb{D}(f)$ ocorre

a) $f(x) < 0$; b) $f(x) = 0$; c) $f(x) > 0$.

Teorema 3.3.3 (Sinal da função quadrática)**.** Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$. Então,

a) se $\Delta < 0$, f tem o mesmo sinal de a, para todo $x \in \mathbb{R}$.

b) se $\Delta = 0$, com $f(x_1) = 0$, f tem o mesmo sinal de a, para todo $x \in \mathbb{R} - \{x_1\}$.

c) se $\Delta > 0$, com $f(x_1) = f(x_2) = 0$, f tem o mesmo sinal de a, para todo $x \in \mathbb{R} - [x_1, x_2]$, e sinal oposto ao de a se $x \in \,]x_1, x_2[$.

Prova. Para a prova, utilizaremos a forma canônica.

a) Se $\Delta < 0$, tem-se

$$a \cdot f(x) = a^2 \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right] > 0, \text{ para todo } x \in \mathbb{R},$$

pois $a^2 > 0$, $\left(x + \dfrac{b}{2a} \right)^2 \geq 0$ e $-\dfrac{\Delta}{4a^2} > 0$.

Conclui-se que a e $f(x)$ têm o mesmo sinal qualquer que seja o x no domínio de f:

- $a < 0$, sse $f(x) < 0$,
- $a > 0$, sse $f(x) > 0$.

Veja que a figura 21 comprova a demonstração algébrica.

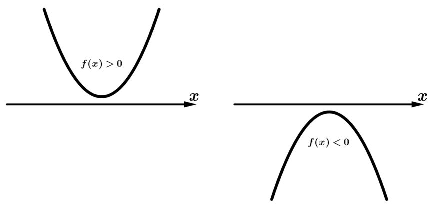


Figura 21 – Se $\Delta < 0$, $a \cdot f(x) > 0$.

b) Se $\Delta = 0$, tem-se

$$a \cdot f(x) = a^2 \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 \geq 0, \text{ para todo } x \in \mathbb{R},$$

pois $a^2 > 0$ e $\left(x + \dfrac{b}{2a} \right)^2 \geq 0$.
Como $\Delta = 0$, há um único zero x_1, sendo que $f(x)$ tem o mesmo sinal de a para todo x do domínio de f, exceto em x_1, onde f é nula (figura 22).

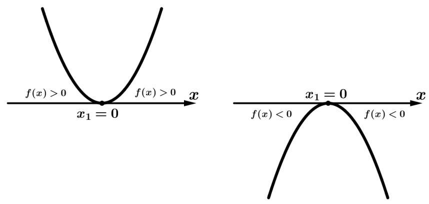


Figura 22 – Se $\Delta = 0$, $a \cdot f(x) \geq 0$.

c) Se $\Delta > 0$, há dois zeros (x-intersetos), e supondo $x_1 < x_2$, tem-se

$$a \cdot f(x) = a^2(x - x_1)(x - x_2),$$

cujo sinal de $a \cdot f(x)$ depende dos fatores $x - x_1$ e $x - x_2$:

- se $x < x_1 < x_2$, então $(x - x_1)(x - x_2) > 0$ e $a \cdot f(x) > 0$;
- se $x_1 < x < x_2$, então $(x - x_1)(x - x_2) < 0$ e $a \cdot f(x) < 0$;
- se $x > x_2 > x_1$, então $(x - x_1)(x - x_2) > 0$ e $a \cdot f(x) > 0$.

Havendo as duas raízes, entre elas, $f(x)$ tem sinal oposto ao de a, caso contrário, $f(x)$ tem o mesmo sinal de a sempre que $x \neq x_1$ ou $x \neq x_2$, uma vez que $f(x_1) = f(x_2) = 0$. A figura 23 é uma comprovação disto.

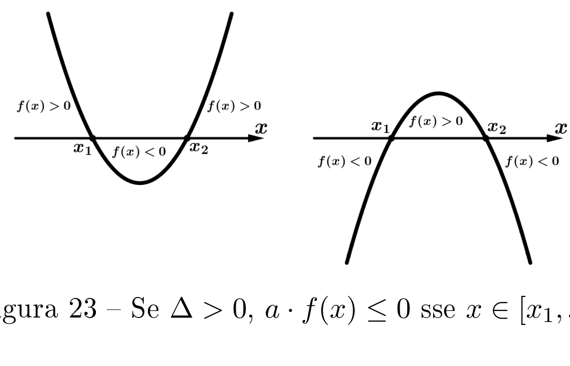


Figura 23 – Se $\Delta > 0$, $a \cdot f(x) \leq 0$ sse $x \in [x_1, x_2]$

□

Exemplo 3.3.6. Para estudar o sinal de $f(x) = x^2 - 13x + 42$, determinamos as suas raízes que são $x_1 = 6$ e $x_2 = 7$, pois $s = 13$ e $p = 42$. Como $a = 1 > 0$, f tem o mesmo sinal de a, exceto no intervalo $[6, 7]$, ou seja:

- $f(x) > 0$ quando $x < 6$ ou $x > 7$,
- $f(x) = 0$ quando $x = 6$ ou $x = 7$,

- $f(x) < 0$ quando $6 < x < 7$.

O esboço gráfico da figura 24 confirma a dedução algébrica acima.

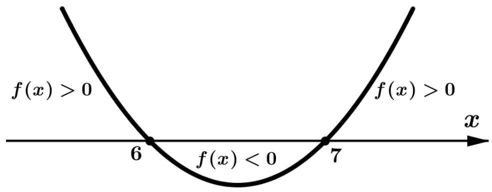


Figura 24 – Estudo de sinal do Exemplo 3.3.6.

Exemplo 3.3.7. Estudando o sinal de $f(x) = x^2 - x + 2$, temos que $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2$, e daí, $\Delta = -7 < 0$. Logo f tem o mesmo sinal de $a = 1 > 0$ para todo x de seu domínio, isto é, $f(x) > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$, confirmado na figura 25.

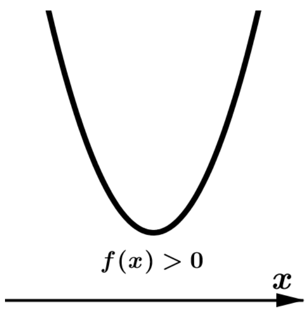


Figura 25 – $f(x)$ tem o mesmo sinal de a quando $\Delta < 0$.

3.4 Uma Propriedade Singular da Parábola

Uma superfície de revolução é aquela gerada pela rotação de uma curva entorno de uma reta(eixo). Aqui em particular, consideraremos uma cônica (parábola) e como reta seu eixo. A revolução de uma parábola em torno de seu eixo gera uma superfície denominada paraboloide de revolução ou superfície parabólica.

A parábola, como dito antes, é uma curva com propriedades incríveis, e não apenas o nome da curva que representa o gráfico de uma função quadrática, e essa propriedade vem de sua capacidade refletora: um raio de luz que atinge a superfície parabólica paralelamente ao seu eixo é refletido numa direção que passa pelo seu foco, e reciprocamente. Aplicações são encontradas na construção de antenas parabólicas, faróis de carro e telescópios, por exemplo. O sinais que atingem a Terra oriundos do espaço são muito fracos, como a luz e as ondas de rádio. Naturalmente, são necessários receptores parabólicos com áreas consideráveis que captem tais sinais e os concentrem num ponto com a intenção de amplificá-los.

Antes de mostrar tais propriedades precisamos do seguinte Lema.

Lema 3.4.1. Os gráficos da funções $f(x) = mx + n$ e $g(x) = m'x + n'$ são retas perpendiculares quando $m \cdot m' = -1$.

Prova. Consideremos as retas definidas por $F(x) = mx$ e $G(x) = m'x$, respetivamente paralelas a $f(x) = mx + n$ e $g(x) = m'x + n'$, perpendiculares entre si. As funções F e G são lineares, logo passam pela origem do sistema xOy, tais que $F(1) = m$ e $G(1) = m'$, cujos gráficos estão representados no plano da figura 26.

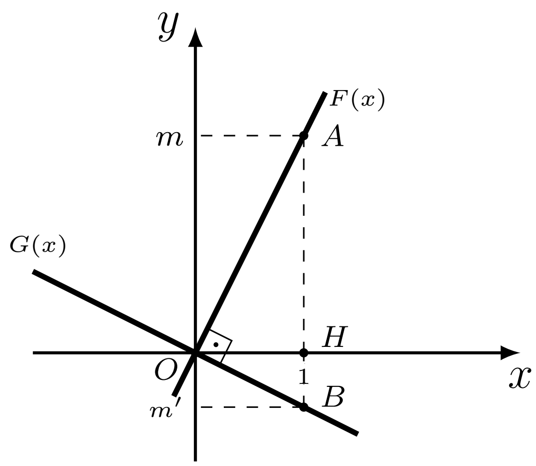


Figura 26 – Gráficos de F e G.

Observe que o triângulo OAB é retângulo em O com hipotenusa $\overline{AB}$, altura $\overline{OH} = 1$ e projeções dos catetos sobre a hipotenusa $\overline{AH} = m$ e $\overline{BH} = -m'$. Das relações métricas nos triângulos retângulos, sabemos que

$$\overline{OH}^2 = \overline{AH} \cdot \overline{BH},$$

de modo que

$$m \cdot (-m') = 1, \text{ isto é, } m \cdot m' = -1.$$

□

Agora estamos prontos para a estabelecer o teorema que comprova a propriedade refletora da parábola.

Teorema 3.4.1. (Poncelet) Dado uma parábola de foco F e um ponto P pertencente a mesma, as bissetrizes dos ângulos formados pelo raio vetor e pela reta perpendicular à diretriz d que passa por P são as retas tangente e normal à parábola em P.

Prova. De fato, consideremos a parábola da figura 27, onde $\overline{PF}$ é o raio vetor e $\overleftrightarrow{PD}$ é a reta perpendicular à diretriz d passando por P; t e η são a tangente e a normal à parábola em P respetivamente. Inicialmente, observe que o $\triangle PDF$ é isósceles, pois pela definição de parábola $\overline{PD} = \overline{PF}$, logo $\angle DFP \cong \angle PDF$, daí $\gamma = \theta$. Afirmamos que $\overleftrightarrow{PM} \perp \overleftrightarrow{FD}$. Com efeito, a reta $\overleftrightarrow{PM}$, tangente à parábola no ponto $P(x_0, y_0)$, tem coeficiente angular dado por $m_{\overleftrightarrow{PM}} = 2ax_0 + b$, como demonstrado no teorema 3.3.2. Por outro lado, a reta $\overleftrightarrow{FD}$, onde $F(m, \frac{1}{4a} + k)$ e $D(x_0, -\frac{1}{4a} + k)$ tem coeficiente angular

$$m_{\overleftrightarrow{FD}} = \frac{\frac{1}{4a} + k - \left(-\frac{1}{4a} + k\right)}{m - x_0} = \frac{\frac{1}{2a}}{\frac{-b}{2a} - x_0} = \frac{-1}{2ax_0 + b} = \frac{-1}{m_{\overleftrightarrow{PM}}}$$

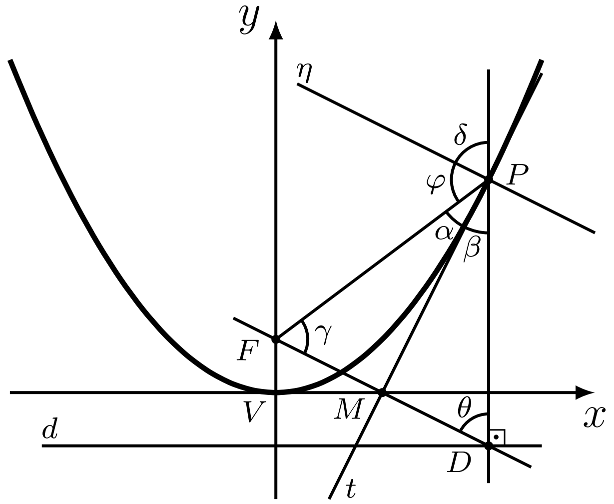


Figura 27 – A propriedade refletora da parábola.

Assim, os triângulos PMF e PMD são congruentes pelo caso cateto-hipotenusa, ou seja, $\angle FPM \cong \angle DPM$, ou equivalentemente, $\alpha = \beta$. Por outro lado, sendo η perpendicular a t, é paralela a $\overleftrightarrow{FD}$, daí $\varphi = \gamma$ e $\theta = \delta$, pois cada igualdade representa as medidas de ângulos alternos internos e correspondentes respetivamente, logo $\varphi = \delta$. □

Reflexão da Luz

Reflexão é um fenômeno que ocorre quando um feixe de luz incidente sobre uma superfície retorna ao meio de propagação. Essa propriedade permite que enxerguemos os objetos ao nosso redor.

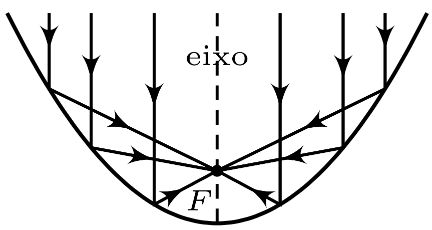


Figura 28 – Reflexão da luz.

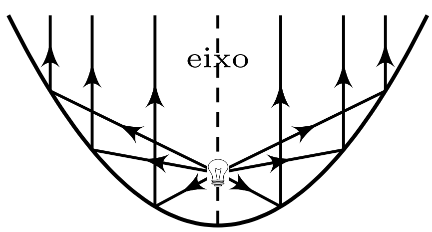


Figura 29 – Fonte luminosa no foco.

O Teorema 3.4.1 mostra que, considerando um raio de luz paralelo ao eixo principal e incidente à superfície parabólica em um ponto qualquer é refletido numa direção que passa no foco. Inversamente, uma raio de luz que emerge do foco e atinge a superfície parabólica num ponto qualquer, reflete-se numa direção paralela ao eixo da parábola. Essa é a propriedade notável da parábola utilizada em telescópios, faróis de carro, espelhos e antenas parabólicas etc.

3.5 Caracterização das Funções Quadráticas

3.5.1 Progressões Aritméticas

Definição 3.5.1. Uma progressão aritmética (PA) ou progressão aritmética de primeira ordem, ou ordinária, é uma sequência de números na qual a diferença entre um termo qualquer e o termo anterior é uma constante denominada razão da progressão e geralmente denotada por r.

Assim, se a sequência

$$(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \tag{3.3}$$

forma uma PA, onde $n \in \mathbb{N}$, então

$$r = x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = \ldots = x_n - x_{n-1}$$

Exemplificando, a sequência $(2, 5, 8, 11, \ldots)$ é uma PA cujo primeiro termo é $x_1 = 2$ e $r = 3$. Uma PA geralmente é caracterizada pelo termo inicial e a razão, mas também pelo seu termo geral x_n, uma função que determina qualquer termo a partir de sua posição n. Para o exemplo dado o termo geral é

$$x_n = -1 + 3n$$

Assim, a PA 3.3 tem termo genérico dado por

$$x_n = x_1 + (n-1)r$$

onde x_1, n e r são respetivamente o termo inicial, a posição que o termo ocupa e a razão da PA.

Podemos somar os termos de 3.3 para um dado valor de n. Denotando essa soma por S_n, temos

$$S_n = \frac{(x_1 + x_n)n}{2} \qquad \text{ou} \qquad S_n = \left(x_1 - \frac{r}{2}\right)n + \frac{r}{2}n^2 \tag{3.4}$$

Se a PA 3.3 for não-estacionária, ou seja, $r \neq 0$, a soma S_n é uma expressão quadrática com termo independente nulo, onde $a = \dfrac{r}{2}$ e $b = x_1 - \dfrac{r}{2}$.

No apêndice C, há deduções para o termo genérico x_n e a soma S_n.

3.5.2 Progressões Aritméticas de 2ª ordem

Definição 3.5.2. Uma progressão aritmética de segunda ordem é uma sequência na qual as diferenças sucessivas entre cada termo e o seu antecessor constitui uma progressão aritmética de primeira ordem não-estacionária.

A sequência $(2, 5, 10, 17, 26, \ldots)$ é uma PA de 2ª ordem pois as diferenças sucessivas $\Delta_i = x_i - x_{i-1} (i \in \mathbb{N}$ e $i > 1)$ formam a PA $(3, 5, 7, 9, \ldots)$.

3.5.3 Teorema de Caracterização

Já vimos que o gráfico da função quadrática é a parábola. Mas porque o gráfico dessa função tem a forma de "$\cup$" e não de "$\vee$", como ilustram os gráficos seguintes?

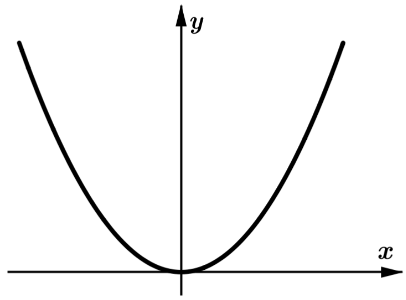


Figura 30

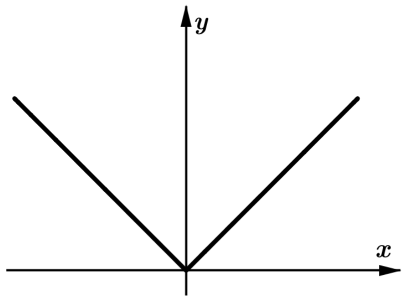


Figura 31

A função afim $f(x) = ax+b$ transforma uma progressão aritmética $(x_1, x_2, x_3, ...x_n)$ noutra progressão aritmética se restringido o seu domínio ao conjunto dos números naturais, por isso o gráfico de uma função afim tem semelhanças com o da figura 31, uma vez que incrementos constantes em x produzem incrementos constantes em $f(x)$. De fato,

$$\begin{aligned} f(x_1) &= ax_1 + b \\ f(x_2) &= ax_2 + b \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f(x_n) &= ax_n + b \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_1) &= ax_2 + b - (ax_1 + b) \\ &= a(x_2 - x_1) = ar = r' \\ f(x_3) - f(x_2) &= ax_3 + b - (ax_2 + b) \\ &= a(x_3 - x_2) = ar = r' \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f(x_n) - f(x_{n-1}) &= ax_n + b - (ax_{n-1} + b) \\ &= a(x_n - x_{n-1}) = ar = r' \end{aligned}$$

Na verdade, o gráfico apresentado em 31 é uma combinação de duas funções afins, isto é,

$$f(x) = \begin{cases} -x, & \text{se } x < 0 \\ x, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

Embora sejam gráficos diferentes, eles possuem mais semelhanças do que imaginamos. Ambos possuem um eixo de simetria que é o próprio eixo y, intersetam os eixos na origem, são decrescentes para $x \leq 0$ e crescentes para $x \geq 0$, ambos têm um valor mínimo absoluto quando $x = 0$, etc. No entanto, a resposta para a pergunta feita no início desta seção vem do seguinte teorema.

Teorema 3.5.1 (Caracterização da Função Quadrática)**.** Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua é quadrática se, e somente se, transforma toda progressão aritmética não-constante numa progressão aritmética de segunda ordem não-degenerada.

Uma função é dita contínua quando o seu domínio é um intervalo. Observe que a função quadrática tem domínio $\mathbb{D} = \mathbb{R}$, mas $\mathbb{R} = (-\infty; +\infty)$, ou seja, o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais pode ser visto como um intervalo contendo todos esses números, e portanto a função quadrática é contínua.

Prova. A função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ transforma a progressão aritmética ordinária

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$$

de razão $r \neq 0$, numa progressão aritmética de segunda ordem

$$y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n, \ldots$$

onde $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$, $y_3 = f(x_3)$ etc., pois as diferenças sucessivas

$$\begin{gathered} \Delta_1 = y_2 - y_1, \\ \Delta_2 = y_3 - y_2, \\ \Delta_3 = y_4 - y_3, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Delta_{n-1} = y_n - y_{n-1} \end{gathered}$$

formam uma progressão aritmética de razão $r' = 2ar^2$ não-estacionária pois $r' \neq 0$.

De fato,

$$\begin{aligned}
\Delta_i = y_{i+1} - y_i &= f(x_{i+1}) - f(x_i) \\
&= ax_{i+1}^2 + bx_{i+1} + c - \left(ax_i^2 + bx_i + c\right) \\
&= ax_{i+1}^2 - ax_i^2 + bx_{i+1} - bx_i \\
&= a\left(x_{i+1}^2 - x_i^2\right) + b(x_{i+1} - x_i) \\
&= a(x_{i+1} - x_i)(x_{i+1} + x_i) + b(x_{i+1} - x_i) \\
&= ar(2x_i + r) + br \\
&= 2arx_i + ar^2 + br
\end{aligned}$$

E daí,

$$\begin{aligned}
\Delta_2 - \Delta_1 &= 2arx_2 + ar^2 + br - (2arx_1 + ar^2 + br) \\
&= 2arx_2 - 2arx_1 \\
&= 2ar(x_2 - x_1) \\
&= 2ar^2 \\
\Delta_3 - \Delta_2 &= 2arx_3 + ar^2 + br - (2arx_2 + ar^2 + br) \\
&= 2arx_3 - 2arx_2 \\
&= 2ar(x_3 - x_2) \\
&= 2ar^2 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\Delta_n - \Delta_{n-1} &= 2arx_n + ar^2 + br - (2arx_{n-1} + ar^2 + br) \\
&= 2arx_n - 2arx_{n-1} \\
&= 2ar(x_n - x_{n-1}) \\
&= 2ar^2
\end{aligned}$$

Agora, seja f uma função contínua de domínio real. Dada a PA de segunda ordem

$$(y_1, y_2, y_3, \ldots, y_k, y_{k+1}, \ldots)$$

temos que

$$\begin{aligned}
x_1 &= y_2 - y_1 \\
x_2 &= y_3 - y_2 \\
x_3 &= y_4 - y_3 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x_{k-1} &= y_k - y_{k-1} \\
x_k &= y_{k+1} - y_k
\end{aligned}$$

formam uma PA não-estacionária, logo

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_k &= (\cancel{y_2} - y_1) + (\cancel{y_3} - \cancel{y_2}) + (\cancel{y_4} - \cancel{y_3}) + \ldots + (y_{k+1} - \cancel{y_k}) \\ &= y_{k+1} - y_1 \\ &= S_k \end{aligned}$$

daí, fazendo $n = k + 1$, temos $y_n = S_{n-1} + y_1$, donde concluímos que $y_n = f(n)$ é uma função quadrática em n, pois S_{n-1} é uma função quadrática em n como vimos em 3.4. Portanto, da continuidade de f podemos estabelecer que $f(x) = ax^2 + bx + c$ para todo x real.

□

Essa propriedade é exclusiva das funções quadráticas, e é exatamente essa caracterização que mostra que o gráfico de uma função quadrática tem a forma ilustrada por 30

Exemplo 3.5.1. (Extraído de (LIMA et al., 2012)) Dado um conjunto de retas do plano, elas determinam um número máximo de regiões quando estão na chamada posição geral: isto é, elas são concorrentes duas a duas e três retas nunca têm um ponto comum. Seja R_n o número máximo de regiões determinadas por n retas do plano.

a) Quando se adiciona uma reta na posição geral a um conjunto de n retas em posição geral, quantas novas regiões são criadas?

b) Deduza de a) que R_n é dada por uma função quadrática de n e obtenha a expressão para r_n.

a) A primeira reta traçada divide o plano em duas regiões, e a partir daí, cada nova reta cria uma nova região antes e após cada interseção com cada uma das n retas traçadas, logo são criadas $n + 1$ regiões quando uma nova reta é adicionada.

b) Assim, $R_{n+1} = R_n + n + 1$, e então $R_{n+1} - R_n = n + 1$ é uma PA de 2ª ordem. Portanto, o termo geral R_n é uma função quadrática em $n \geq 1$, tal que

$$\begin{aligned} R_2 - R_1 &= 2 \\ R_3 - R_2 &= 3 \\ R_4 - R_3 &= 4 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ R_n - R_{n-1} &= n \end{aligned}$$

Somando membro a membro as $n - 1$ igualdades, obtemos

$$R_n - R_1 = 2 + 3 + 4 + \ldots + n$$

que é a soma dos n primeiros números naturais menos um (1), logo:

$$\begin{aligned} R_n &= R_1 + \frac{n(n+1)}{2} - 1 \\ &= 2 + \frac{n(n+1)}{2} - 1 \end{aligned}$$

Ou seja,

$$R_n = \frac{n^2 + n + 2}{2}$$

4 Aplicações da Função Quadrática

Em muitas situações, funções quadráticas são usadas para modelar relações em Economia, nas Ciências e na Medicina. Por exemplo, uma utilidade habitual nos negócios é maximizar o lucro, ou seja, a diferença entre a receita total (dinheiro recebido) e os custos de produção (dinheiro gasto). Neste capítulo, enfocaremos as aplicações das funções quadráticas no âmbito da Física, para explicar o Movimento Uniformemente Variado (MUV), da Economia, por exemplo, para obter a Receita Total e gerar regras de otimização nos negócios, e também sugerimos algumas atividades orientadas e interativas através do software de geometria dinâmica Geogebra e cujo objetivo é dinamizar e potencializar o aprendizado.

4.1 O Movimento Uniformemente Variado

4.1.1 MUV Unidimensional

O modelo matemático para explicar o Movimento Uniformemente Variado são as funções quadráticas. Em meados do século XVI, Galileu Galileu demonstrou que corpos abandonados nas proximidades da superfície da Terra ocupam posições sucessivas proporcionais aos quadrados dos instantes de tempo nas quais tais posições ocorrem, isto é:

$$\frac{s(t_1)}{t_1^2} = \frac{s(t_2)}{t_2^2} = \frac{s(t_3)}{t_3^2} = \ldots = \frac{s(t_n)}{t_n^2} = \frac{g}{2}$$

Logo

$$s(t) = \frac{g}{2}t^2$$

onde a constante g é a aceleração da gravidade e vale aproximadamente $9{,}8\,\mathrm{m/s^2}$.

Galilei considerou apenas a queda dos corpos nas proximidades da superfície da Terra para desprezar a resistência do ar, como se estivesse no vácuo.

O movimento de queda livre, o lançamento vertical para cima ou para baixo, e os movimentos com aceleração constante e não-nula onde consideramos uma só dimensão são formas de MUV unidimensional, e caso a trajetória deles seja retilínea, são conhecidos como *movimento retilínea uniformemente variado* (MRUV). Seus principais parâmetros (posição, velocidade e aceleração) serão tratados como grandezas escalares, aquelas que ficam perfeitamente determinadas quando fornecidos o seu valor e a respectiva unidade de medida, isto é, não necessitam de orientação (direção e sentido) que caracteriza as grandezas vetoriais.

Equação da Posição

A principal característica desse movimento, além de sua aceleração constante, é que cada posição $s = f(t)$ é dada por uma função quadrática calculada em cada abscissa t que representa os sucessivos instantes de tempo registrados durante o movimento, ou melhor,

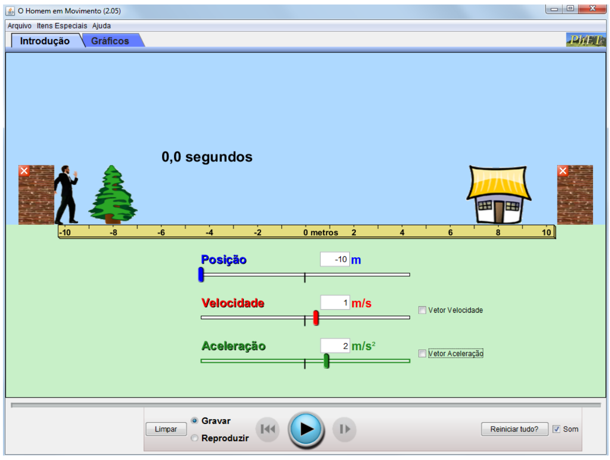
$$s(t) = At^2 + Bt + C$$

onde $C = s(0) = s_0$ é a posição inicial do móvel.

A fim de convencer o leitor de que cada posição $s = f(t)$ é realmente determinada por uma função quadrática na variável independente t, convidamos o leitor a visitar PhET e testar um dos seus simuladores de MUV, onde devemos definir os parâmetros aceleração, posição e velocidade iniciais, respetivamente, a, s_0 e v_0.

Como visto na figura 32, o teste foi iniciado com $a = 2{,}0\,\mathrm{m/s^2}$, $s_0 = -10\,\mathrm{m}$ e $v_0 = 1{,}0\,\mathrm{m/s}$.

Figura 32 – PhET - O Homem em Movimento.



Fonte: (COLORADO, 2020).

A simulação durou 4 s, e os dados coletados estão na seguinte tabela.

Instantes (s)	Posições (m)	Velocidades (m/s)
$t_0 = 0,0$	$s_0 = -10,0$	$v_0 = 1,0$
$t_1 = 0,5$	$s_1 = -9,25$	$v_1 = 2,0$
$t_2 = 1,0$	$s_2 = -8,00$	$v_2 = 3,0$
$t_3 = 1,5$	$s_3 = -6,25$	$v_3 = 4,0$
$t_4 = 2,0$	$s_4 = -4,00$	$v_4 = 5,0$
$t_5 = 2,5$	$s_5 = -1,25$	$v_5 = 6,0$
$t_6 = 3,0$	$s_6 = 2,00$	$v_6 = 7,0$
$t_7 = 3,5$	$s_7 = 5,75$	$v_7 = 8,0$
$t_8 = 4,0$	$s_8 = 10,0$	$v_8 = 9,0$

Observe então que as diferenças sucessivas $\Delta_i = s_{i+1} - s_i,\ i \in \{0, 1, 2, \ldots, 7\}$, formam uma PA ordinária não-degenerada. De fato, considerando a sequência de diferenças

$$\begin{array}{ll}
\Delta_0 = s_1 - s_0 = -9,25 + 10,0 = 0,75, & \Delta_1 = s_2 - s_1 = -8,00 + 9,25 = 1,25, \\
\Delta_2 = s_3 - s_2 = -6,25 + 8,00 = 1,75, & \Delta_3 = s_4 - s_3 = -4,00 + 6,25 = 2,25, \\
\Delta_4 = s_5 - s_4 = -1,25 + 4,00 = 2,75, & \Delta_5 = s_6 - s_5 = \ \ 2,00 + 1,25 = 3,25, \\
\Delta_6 = s_7 - s_6 = \ \ 5,75 - 2,00 = 3,75, & \Delta_7 = s_8 - s_7 = \ \ 10,0 - 5,75 = 4,25,
\end{array}$$

observamos que é uma PA de primeira ordem com termo inicial $\Delta_0 = 0,75$ e razão $r = 0,5$.

Desta forma, o Teorema 3.5.1 garante a existência de uma função quadrática $s(t) = At^2 + Bt + C$, tal que

$$\begin{cases} s_0 &= s(t_0) &= C &= -10 \\ s_2 &= s(t_2) &= A + B + C &= -8 \\ s_4 &= s(t_4) &= 4A + 2B + C &= -4 \end{cases}$$

Fazendo $s_2 - s_0$ e $s_4 - s_2$ obtemos o sistema

$$\begin{cases} A + B &= 2 \\ 3A + B &= 4 \end{cases}$$

tal que a diferença entre suas igualdades nos fornece $2A = 2$, ou seja, $A = 1$, e cuja substituição na primeira equação $1 + B = 2$ nos dá $B = 1$, e, portanto, não é coincidência que $2A = a$ e $B = v_0$, e assim

$$s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{a}{2} t^2$$

como veremos adiante.

Equação da Velocidade

A *velocidade média* v_m de um móvel é a razão entre a distância percorrida pelo móvel e o tempo gasto para percorrê-la. Se o movimento ocorrer num único sentido, a distância percorrida é igual ao seu deslocamento Δs, isto é,

$$v_m = \frac{\text{variação de espaço}}{\text{tempo gasto}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t} \tag{4.1}$$

sendo $\Delta t = t - t_0$ o tempo gasto entre os instantes t_0 e t, e t_0 o instante em que o movimento inicia, também chamado instante inicial.

Uma característica importante em qualquer movimento é a velocidade do corpo em cada instante de movimento conhecida por *velocidade instantânea* v, a qual pode ser obtida da velocidade média considerando intervalos de tempo muito pequenos, ou seja, considerando instantes muito próximos um do outro, que, em outras palavras, significa considerar intervalos de tempo Δt tendendo a zero. Daí,

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{A(t+\Delta t)^2 + B(t+\Delta t) + s_0 - (At^2 + Bt + s_0)}{\Delta t} \\ &= \frac{A(t^2 + 2t\Delta t + (\Delta t)^2) + Bt + B\Delta t + s_0 - At^2 - Bt - s_0}{\Delta t} \\ &= \frac{At^2 + 2At\Delta t + A(\Delta t)^2 + B\Delta t - At^2}{\Delta t} \\ &= \frac{2At\Delta t + A(\Delta t)^2 + B\Delta t}{\Delta t} \\ &= 2At + A\Delta t + B \end{aligned}$$

e como $\Delta t \approx 0$,

$$v(t) = 2At + B$$

donde $B = v_0$, pois $v_0 = v(0) = 2A \cdot 0 + B$.

Outra propriedade do MUV é que sua *aceleração instantânea* a é constante e portanto igual à *aceleração média* a_m, onde esta é a razão entre a variação de velocidade e o intervalo de tempo correspondente, isto é:

$$\begin{aligned} a &= \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} = \frac{v_0 + 2A(t+\Delta t) - (v_0 + 2At)}{\Delta t} \\ &= \frac{v_0 + 2At + 2A\Delta t - v_0 - 2At}{\Delta t} = \frac{2A\Delta t}{\Delta t} = 2A \end{aligned}$$

consequentemente, $v(t) = v_0 + at$.

Exemplo 4.1.1. Uma bola situada a 3 m acima do solo, é lançada para cima com uma velocidade de 14 m/s. Quando atinge o chão?

Inicialmente devemos adotar um sistema de referência adequado. Adotaremos como positivo o sentido ascendente (vertical para cima). Assim, a aceleração, a velocidade e a posição iniciais são $g = -10\,\text{m/s}^2$, $v_0 = 14\,\text{m/s}$ e $s_0 = 3\text{m}$, respetivamente, e daí

$$h(t) = 3 + 14t - \frac{1}{2}10t^2 = -5t^2 + 14t + 3$$

onde $h(t)$ é a altura atingida pela bola no instante t.

Ao atingir o solo, a altura da bola é nula, daí $h(t) = 0$. Logo, devemos resolver $-5t^2 + 14t + 3 = 0$ ou, equivalentemente, $5t^2 - 14t - 3 = 0$. Usaremos o método da fatoração.

Como $a \cdot c = -15$ e $b = -14$, devemos encontrar dois números que multiplicados resultem -15 e somados, -14. Esses números são -15 e 1. Logo,

$$\begin{aligned} 5t^2 - 14t - 3 &= 5t^2 - 15t + t - 3 \\ &= 5t(t-3) + (t-3) \\ &= (5t+1)(t-3) = 0 \end{aligned}$$

Donde, aplicando a propriedade do produto nulo, obtemos

$$5t + 1 = 0 \text{ ou } t - 3 = 0$$

Melhor dizendo,

$$t = -\frac{1}{5} \text{ ou } t = 3$$

Mas $t \geq 0$, então o corpo atinge o solo $3\,\mathrm{s}$ após o lançamento.

4.1.2 MUV Bidimensional

Até o momento, estávamos considerando o MUV unidimensional, mas esse tipo de movimento pode ocorrer no plano - como exemplo podemos mencionar o lançamento de projéteis - e é o que veremos a seguir.

O lançamento de projéteis, também denominado lançamento oblíquo, ocorre num plano determinado pelos vetores aceleração da gravidade e velocidade de lançamento. Nesse movimento bidimensional, a velocidade do móvel[1] é representada por um vetor, denominado vetor velocidade. Considerando um sistema cartesiano cuja origem coincide com a posição de lançamento, a velocidade em cada posição é dada por suas componentes horizontal e vertical, isto é, $\vec{v} = (v_x, v_y)$, como podemos ver na figura 33.

Como a gravidade atua na direção vertical com sentido apontando para o centro da Terra, ou seja, para baixo, a componente v_x não é afetada por ela, logo, na direção horizontal o movimento é uniforme. Porém, a componente vertical v_y sofre as variações impostas pela gravidade, portanto verticalmente ocorre um MUV. Na verdade, o lançamento oblíquo na superfície terrestre é uma composição de dois movimentos: um, na horizontal, que é uniforme, e outro, na vertical, que é uniformemente variado.

Observe que a posição inicial tem coordenadas $x_0 = 0$ e $y_0 = 0$, pois no início do movimento o corpo encontra-se na origem do sistema $x\mathrm{O}y$, como indica a figura 33.

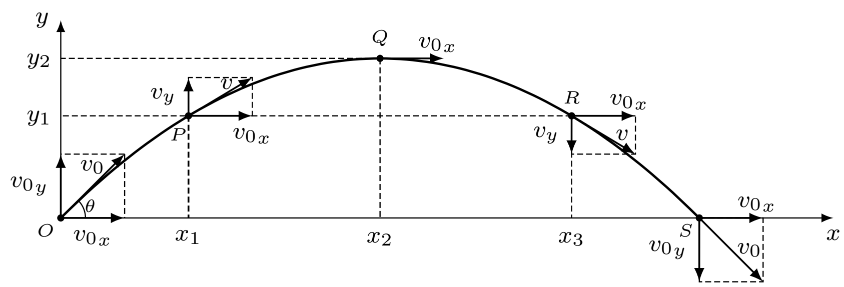


Figura 33 – Lançamento de um projétil.

Suponha um corpo que, lançado do solo na posição **O**, ocupe as posições **P**, **Q**, **R** e **S**. Observe que em **Q**, ele alcança altura máxima, momento em que $v_y = 0$, e sua

[1] Móvel é qualquer corpo em movimento.

posição é dada pelas suas coordenadas x_2 e y_2, tais que

$$x_2 = v_{0x}t \text{ e } y_2 = -\frac{g}{2}t^2 + v_{0y}t$$

uma vez que, na direção horizontal, o corpo desenvolve MU pois o vetor g não tem componente horizontal, logo a velocidade v_x é constante e igual a v_{0x}, mas na direção vertical, o corpo é governado por um MUV com aceleração $a = -g$, uma vez que $\vec{g}$ tem sentido oposto ao do eixo y. Observe também que pontos simétricos em relação ao eixo da parábola possuem velocidades iguais em módulo.

O ângulo θ que a velocidade de lançamento faz com o eixo x, denominado ângulo de tiro ou ângulo de disparo, é importante para o cálculo das componentes da velocidade $\vec{v}$, isto é,

$$v_x = v_{0x} = v_0 \cos\theta \quad \text{e} \quad v_y = v \operatorname{sen}\theta$$

4.1.3 Equação da trajétoria

Como $x = v_{0x}t$, temos $t = \dfrac{x}{v_{0x}}$, mas $v_{0x} = v_0 \cos\theta$, então

$$t = \frac{x}{v_0 \cos\theta}$$

Daí, substituindo t na equação $y = v_{0y}t - \dfrac{1}{2}gt^2$, obtemos

$$y = v_0 \operatorname{sen}\theta \frac{x}{v_0 \cos\theta} - \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0\cos\theta}\right)^2$$

e que simplificada assume a forma

$$y = \tan\theta x - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}x^2 \tag{4.2}$$

que é uma função quadrática, sendo a sua trajetória uma parábola com concavidade voltada para baixo.

4.1.3.1 Altura Máxima

A função quadrática 4.2 tem $a = -\dfrac{g}{2v_0^2\cos^2\theta} < 0$, portanto possui um valor máximo que chamaremos de altura máxima $y_{\text{máx}}$ dada por

$$\begin{aligned} y_{\text{máx}} = \frac{-\Delta}{4a} &= \frac{-\tan^2\theta}{4\cdot\left(-\dfrac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}\right)} \\ &= \frac{v_0^2\cos^2\theta\tan^2\theta}{2g} \end{aligned}$$

Desta forma,

$$y_{\text{máx}} = \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2\theta}{2g}$$

Exemplo 4.1.2. (Extraído de (VALENCIA, 2003)) Um caçador que não sabe que os projéteis caem, atirou num macaco que está em uma árvore. O macaco que não conhece física, cai exatamente quando o caçador atira. Mostre que o tiro atinge o macaco.

Sejam h e d, a altura inicial do macaco e sua distância horizontal ao caçador, respetivamente. Então, o ângulo de tiro é dado por

$$\tan\alpha = \frac{h}{d}.$$

As equações do movimento do projétil (P) e do macaco (M) são

$$x_P = v_0 t\cos\alpha,\ y_P = v_0 t\,\mathrm{sen}\,\alpha - \frac{1}{2}gt^2 \quad \text{e} \quad x_M = d,\ y_M = h - \frac{1}{2}gt^2$$

De modo que, quando $x_P = x_M$, resulta

$$v_0 t\cos\alpha = d$$

Isto é,

$$t = \frac{d}{v_0\cos\alpha}$$

Para esse tempo comparemos as alturas

$$\begin{aligned} y_P &= v_0 t\,\mathrm{sen}\,\alpha - \frac{1}{2}gt^2 = d\tan\alpha - \frac{1}{2}gt^2,\\ y_M &= h - \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned}$$

Concluímos que são iguais pois $h = d\tan\alpha$.

4.1.4 Alcance Máximo

Para obtermos o alcance máximo $x_{\text{máx}}$, que na figura 33 é a distância $\overline{OS}$, basta fazermos $y = 0$ em 4.2, cujas raízes satisfazem $x(\tan\theta - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}x) = 0$, ou seja,

$$x = 0 \quad \text{ou} \quad \tan\theta - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}x = 0$$

E como $x > 0$,

$$x_{\text{máx}} = \frac{v_0^2\,\mathrm{sen}\,2\theta}{g}$$

Exemplo 4.1.3. Mostre que o maior alcance possível de um projétil lançado com velocidade v_0 e ângulo de tiro θ ocorre quando $\theta = 45°$.

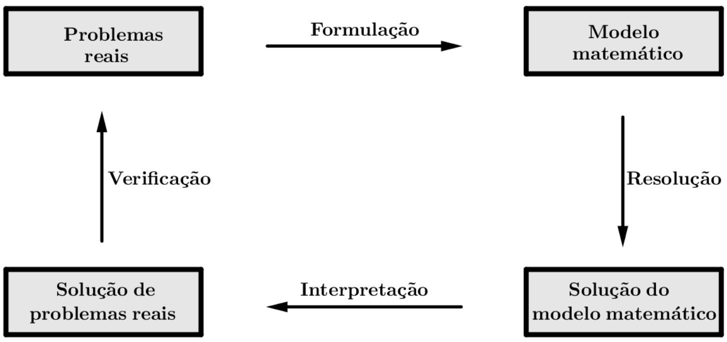
Como g é constante e não-nula e supondo v_0 fixo, então o alcance máximo $x_{\text{máx}} = \dfrac{v_0^2\,\mathrm{sen}\,2\theta}{g}$ se dá quando $\mathrm{sen}\,2\theta$ assume seu valor máximo, logo $\mathrm{sen}\,2\theta = 1$, e assim, $2\theta = 90°$, ou melhor , $\theta = 45°$.

4.2 Aplicações na Economia

4.2.1 Modelagem Matemática

A matemática pode ser útil na construção de modelos que interpretem problemas reais, principalmente aqueles vindos da Engenharia, Economia, Administração e Ciências Contábeis. Uma ferramenta muito utilizada na modelagem matemática são as funções, e em particular, as funções quadráticas. Segundo (TAN, 2007), os quatro passos que ilustram o processo são mostrados na seguinte figura

Figura 34 – Etapas de um processo de modelagem.



Fonte: Tan, S. T. (2007).

1 **Formulação**: Um problema do mundo real é apresentado e, em seguida, é traduzido segundo técnicas empregadas na construção de modelos matemáticos que geralmente farão uso de funções de uma ou mais variáveis independentes ou de equações que definem tais funções explicitamente.

2 **Resolução**: Depois de formulado o modelo matemático, métodos matemáticos convenientes são empregados para resolver o problema.

3 **Interpretação**: Nem sempre a solução do modelo matemático é também solução do problema, e essa contextualização ao problema real consiste em interpretar os resultados.

4 **Verificação**: Nessa fase, deve-se verificar se os resultados são satisfatórios, pois caso contrário devemos rever nosso modelo e talvez realizar alterações, e na pior das hipóteses, retomar ao primeiro passo.

4.2.1.1 Normas para a Criação de Modelos Matemáticos

Alguns modelos matemáticos podem ser desenvolvidos através do uso de conhecimentos geométricos ou algébricos muitas vezes elementares. A seguir, algumas normas elencadas por (TAN, 2007) para a criação de modelos matemáticos.

1 Escolha uma letra para cada variável descrita no problema. Desenhe e nomeie as figuras, se for apropriado.

2 Defina uma expressão para a quantidade desconhecida.

3 Use as condições do problema para escrever a quantidade desconhecida em função de uma variável. Observe as restrições ao domínio dessa função provenientes de considerações físicas.

Exemplo 4.2.1. (Extraído de (LIMA et al., 2012)) Com 80 metros de cerca um fazendeiro deseja circundar uma área retangular junto a um rio para confinar alguns animais. Quais devem ser as medidas do retângulo para que a área cercada seja a maior possível?

1 Chamaremos de A a área do retângulo a ser cercada, e de x e y a medida de seus lados, onde y é o comprimento dos lados do retângulo paralelos às margens do rio.

2 A área a cercar é dada por $A = xy$. O comprimento total da cerca é $2x + y = 80$, e assim $y = 40 - x$.

3 De $2x + y = 80$, obtemos $y = 80 - 2x$. Logo, $A = x(80 - 2x)$, isto é, $A = f(x) = 80x - 2x^2$.

Por outro lado, $x > 0$ e $y > 0$, pois são medidas dos lados do retângulo que delimita a área a ser cercada. Mas $y = 80-2x > 0$, e daí $0 < x < 40$. Como $f(x) = 80x-2x^2$, com $a = -2 < 0$, a área A é máxima quando

$$x = x_v = \frac{-b}{2 \cdot a} = \frac{-80}{-4}$$

isto é, $x = 20$ e $y = 80 - 2 \cdot 20 = 40$.

Portanto, para que a área seja máxima as medidas do retângulo devem ser 20 m e 40 m.

4.2.2 Modelos Econômicos

Nesta seção, estudaremos alguns modelos econômicos que utilizam funções quadráticas como ferramenta de modelagem.

Equações de Oferta e de Demanda

Numa economia de livre concorrência, a quantidade consumida de um determinado bem depende de seu preço unitário. Geralmente, quanto maior o preço de um bem, menor é a quantidade consumida - também conhecida como *demanda de consumo* - e vice-versa.

Desta forma, a *demanda* por certo bem é a procura por esse bem. A relação entre o preço unitário e a quantidade demandada é conhecida como **equação de demanda**, embora expresse uma função entre a demanda e o preço[2]. O gráfico da equação de demanda denomina-se **curva de demanda** (figura 35).

[2] Por questão de simplicidade, quando nos referirmos ao preço de um bem queremos dizer preço unitário desse bem.

Uma equação de demanda pode ser dada por uma das formas:

$$p = f(x) \qquad \text{ou} \qquad x = g(p)$$

onde f é chamada de função preço e $f(x)$ é o preço unitário do bem (ou mercadoria) quando x unidades são demandadas. A função g é a função de demanda, sendo $g(p)$ o número de itens demandados quando p for o preço unitário.

Observação 4.2.1. Em circunstâncias econômicas normais, as variáveis x e p são números reais não negativos, embora na prática x e p assumam valores racionais.

Exemplo 4.2.2. Seja a seguinte equação de demanda

$$p^2 + 3x - 27 = 0$$

A função preço é dada por

$$p = \sqrt{81 - 3x}$$

e como $p \geq 0$, assumimos que x pertença a um intervalo tal que $81 - 3x \geq 0$.

Isolando x na equação de demanda, obtemos a função de demanda

$$x = 81 - \frac{1}{3}p^2$$

e como $x \geq 0$, o preço unitário p deve variar no intervalo [0; 9].

A equação de demanda mais simples é uma função afim, tal que

$$p = mx + p_0$$

onde $m < 0$, uma vez que $p < p_0$, pois o mercado impõe uma condição na qual a demanda pela mercadoria aumenta quando o preço diminui, e quando o preço aumenta a demanda diminui.

Numa economia de **livre mercado** existe uma relação entre o preço unitário e a disponibilidade do bem ao consumidor. Segundo (LEITHOLD, 1988), um aumento no preço unitário leva o fornecedor a aumentar a oferta desse bem, pois o fornecedor aumentará a oferta a fim de obter vantagens dos preços mais altos, e reciprocamente, a queda do preço unitário leva a uma queda da oferta. Uma **equação de oferta** é aquela que traduz a relação entre o preço e a quantidade oferecida, e seu gráfico é conhecido como **curva de oferta** (36). Portanto, sendo agora x o número de unidades a ser ofertada de um bem ou mercadoria e p o seu preço unitário, e supondo que estas sejam as únicas variáveis, então uma equação contendo estas duas variáveis é a equação de oferta para esse bem.

A equação de oferta mais simples é uma função afim, logo assume a seguinte forma

$$p = mx + p_0$$

onde $m > 0$ e p_0 é o preço unitário de um bem ofertado e indisponível no mercado, ou seja, é o preço no qual o fornecedor não disponibiliza nenhuma mercadoria ao consumidor, pois quando o preço unitário é muito baixo, o fornecedor não oferta o produto.

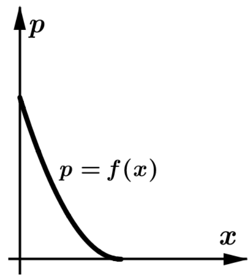


Figura 35 – Curva de Demanda.

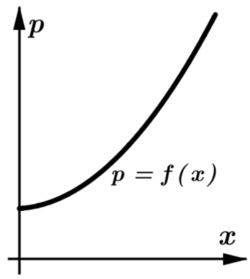


Figura 36 – Curva de Oferta.

Exemplo 4.2.3. Num país fictício denominado Terra Brasilis, um famoso fornecedor de antenas parabólicas deixa de ofertar seu produto até que seu preço supere a casa dos R\$ 735, 00. No entanto, se o preço for elevado a R\$ 810, 00, o fornecedor disponibilizará ao mercado 1250 antenas. Determine a equação de oferta.

Seja x o número de antenas fornecidas quando p é o preço unitário. Do enunciado, quando $x = 0$, $p = 735$ e quando $x = 1250$, $p = 810$. Como $p(x) = mx + p_0$ e $p_0 = p(0) = 735$, temos que $p(1250) = 1250m + 735 = 810$, ou seja, $1250m = 75$, donde m $= 0,06$, e, portanto,

$$p = 0,06x + 735$$

Equilíbrio de Mercado

Sob competição pura, afirma (TAN, 2007), o preço de uma mercadoria tende a se estabilizar em um patamar estabelecido pela condição na qual a sua oferta será igual a sua demanda, pois se o preço for demasiado alto, o consumidor não compra, e caso seja demasiado baixo, o fornecedor não oferta. O patamar mencionado chama-se equilíbrio de mercado, ocorrendo quando a quantidade ofertada é igual à demandada. Num equilíbrio de mercado, a quantidade produzida denomina-se quantidade de equilíbrio e o preço correspondente, preço de equilíbrio.

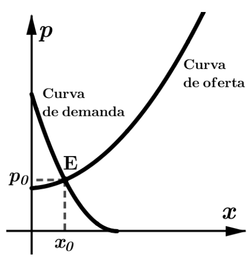


Figura 37 – Equilíbrio do mercado: ponto E.

Exemplo 4.2.4. (Adaptado de (TAN, 2007)) A função demanda por uma marca de mídia de DVD é dada por

$$p = d(x) = -0,01x^2 - 0,2x + 8$$

e a correspondente função oferta é dada por

$$p = o(x) = 0,01x^2 + 0,1x + 3$$

onde p é expresso em reais e x em unidades de milhar. Determine a quantidade e o preço de equilíbrio.

Para que ocorra o equilíbrio de mercado deve-se ter $d(x) = o(x)$, isto é

$$-0,01x^2 - 0,2x + 8 = 0,1x^2 + 0,1x + 3$$

que é equivalente a $0,02x^2 + 0,3x - 5 = 0$, melhor dizendo,

$$x^2 + 15x - 250 = 0$$

Como $p = -250 = -25 \cdot 10$ e $s = -15 = -25 + 10$, então

$$x = -25 \text{ ou } x = 10$$

mas $x \geq 0$, logo $x = 10$. Assim, a quantidade de equilíbrio é de 10000 mídias e o preço de equilíbrio é

$$p = o(10) = 0,01(10)^2 + 0,1(10) + 3 = 5$$

ou R\$ 5,00 por mídia de DVD.

4.2.3 Receita Total Quadrática

Outra função de destaque em Economia é a função receita total $R(x)$, tal que

$$R(x) = px$$

é uma função quadrática, pois estamos assumindo que a função preço p é a mais simples possível (função afim).

Da função receita, obtém-se

$$p = \frac{R(x)}{x}$$

indicando que a receita média é igual ao preço unitário.

Exemplo 4.2.5. A equação de demanda para um dado produto é

$$5x + 3p = 15$$

Encontre:

a) a função receita total;

b) o preço e a quantidade demandada quando o lucro for máximo.

c) o esboço do gráfico de $R(x)$.

a) A função preço é obtida isolando-se a variável p:

$$3p = -5x + 15 \quad \text{sse} \quad p = -\frac{3}{5}x + 5$$

logo, a receita total é

$$R(x) = px \quad \text{sse} \quad R(x) = \left(-\frac{3}{5}x + 5\right)x, \quad \text{sse} \quad R(x) = -\frac{3}{5}x^2 + 5x.$$

b) Observe que $R(x) = -\frac{3}{5}x^2 + 5x$ é uma função quadrática com $a = -\frac{3}{5} < 0$, assim possui um valor máximo quando

$$x = x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-5}{2 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right)} = \frac{25}{6} \approx 4$$

Daí, $p = -\frac{3}{5} \cdot 4 + 5 = -2,4 + 5$, ou seja, $p = 2,6$. Portanto, a receita máxima ocorre quando o preço é R\$ 2,60 ou equivalentemente quando a quantidade demandada é 4.

c) Para esboço do gráfico, temos:

- Coeficientes:
  - Como $a = -\frac{3}{5} < 0$, a parábola tem concavidade para baixo;
  - Sendo $c = 0$, seu y-interseto é a origem.
- Zeros:

$$R(x) = -\frac{3}{5}x^2 + 5x = 0 \quad \text{sse} \quad -x\left(\frac{3}{5}x - 5\right) = 0 \quad \text{sse} \quad x = 0 \text{ ou } x = \frac{25}{3}.$$

- Vértice:

$$x_V = \frac{25}{6} \quad \text{e} \quad y_V = \frac{-(5^2 + 4 \cdot 3/5 \cdot 0)}{-4 \cdot 3/5} = \frac{125}{12}$$

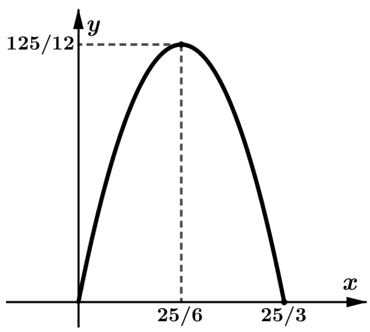


Figura 38 – Gráfico de $R(x) = -\frac{3}{5}x^2 + 5x$.

A fim de convencer o leitor de que a *receita total* $R(x)$ pode ser uma função quadrática, onde x é a quantidade demandada, reproduzimos parcialmente o quadro seguinte, resultado de uma pesquisa de mercado feita por (LEITE, 2015).

x(quantidade)	p(preço unitário)	$R(x)$ Receita Total
0	100	0
5	90	450
10	80	800
15	70	1050
20	60	1200
21	58	1218
25	50	1250
30	40	1200
35	30	1050
40	20	800
45	10	450
50	0	0

Observe que o preço unitário p forma uma PA ordinária de razão $r = -10$:

$$(100,\ 90,\ 80,\ \ldots,\ 0)$$

ao passo que, as diferenças sucessivas entre os valores de $R(x)$, formam uma progressão aritmética de primeira ordem não-degenerada, pois

$$\begin{aligned} &R(5) - R(0) = 450, && R(30) - R(25) = -50, \\ &R(10) - R(5) = 350, && R(35) - R(30) = -150, \\ &R(15) - R(10) = 250, && R(40) - R(35) = -250, \\ &R(20) - R(15) = 150, && R(45) - R(40) = -350, \\ &R(25) - R(20) = 50, && R(50) - R(45) = -450. \end{aligned}$$

Assim, pelo Teorema de caracterização da função quadrática, sendo $R(0) = 0$, $R(x)$ é uma função quadrática dada por

$$R(x) = ax^2 + bx \ (a,\ b \in \mathbb{R}, a \neq 0)$$

Observe também que a sequência desses dados indica $x = 25$ como eixo de simetria, pois $R(x + 25) = R(25 - x)$, e nessa posição a receita total assume o seu valor máximo, isto é, $R(25) = 1250$. Assim, $\dfrac{-b}{2a} = 25$, donde $b = -50a$. Daí, $R(x) = ax^2 - 50ax$ e $R(10) = 100a - 500a = 800$, donde $a = -2$, $b = 100$, e portanto

$$R(x) = -2x^2 + 100x$$

é a função receita total para os dados apresentados na tabela.

4.3 Funções Quadráticas no Geogebra

Atualmente, muito se fala da utilização das Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC's) no ensino de Matemática e de áreas afins. Tais tecnologias são importantes pois se bem empregadas permitem a visualização imediata de conceitos e uma assimilação quase instantânea do que está se estudando, afinal, *uma imagem vale mais que mil palavras*, reza um antigo ditado popular.

O GeoGebra(figura 39), como o próprio nome sugere, é um software de geometria dinâmica combinada com álgebra que pode proporcionar uma multiplicidade de caminhos para alcançar o objetivo de um determinado aprendizado, principalmente o estudo de funções e seus gráficos, em especial, o de funções quadráticas. [3]

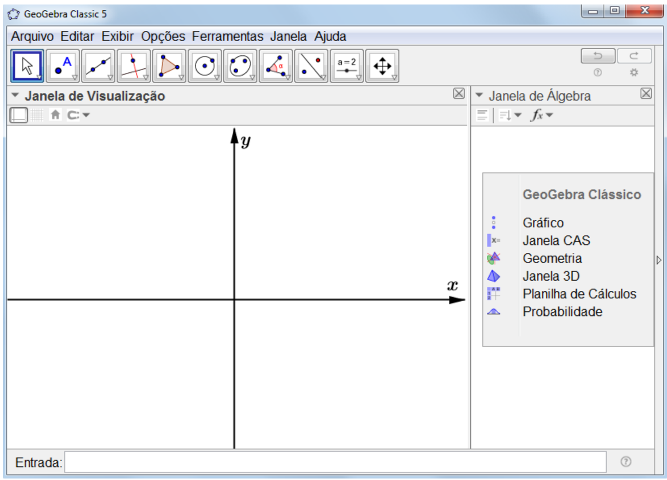


Figura 39 – Interface do programa.

Sugerimos três atividades (disponível em <http://bit.ly/fsquadsatvs>) no Geogebra 5 [4]: a primeira com a função quadrática em sua forma geral $f(x) = ax^2 + bx + c$, a segunda em sua forma canônica $f(x) = a(x - m)^2 + k$ e a última sobre parábolas congruentes.

4.3.1 Atividade Orientada 1

1. Objetivos

   O objetivo dessa atividade, contida no arquivo **fq_fgeral.ggb**, é fazer o aluno compreender como o valor de cada coeficiente interfere na disposição do gráfico, manipulando três controles deslizantes (números) ou seletores $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$, gerando mudanças instantâneas na parábola. Ao manipulá-los, sob a supervisão do professor, movendo-os com o "mouse" ou com as teclas de direção do teclado, ao selecioná-los, os alunos produzirão

[3] O GeoGebra(http://www.geogebra.org/) é um software gratuito e disponível para vários sistemas operacionais, como Windows, Linux, Android e IoS, permitindo o seu uso em dispositivos diversos: computadores pessoais, tablets e smartphones.

[4] Versão para desktop.

alterações nos coeficientes da função quadrática e, consequentemente, no aspecto gráfico, como alterações na concavidade da parábola, no y-interseto e x-intersetos (zeros), eixo de simetria e extremo absoluto (máximo ou mínimo), por exemplo. Também foram disponibilizadas caixas para exibir (ou esconder) objetos de acordo com o que se deseja verificar. O aplicador deverá informar aos alunos que a função dada está no formato $f(x) = ax^2 + bx + c$.

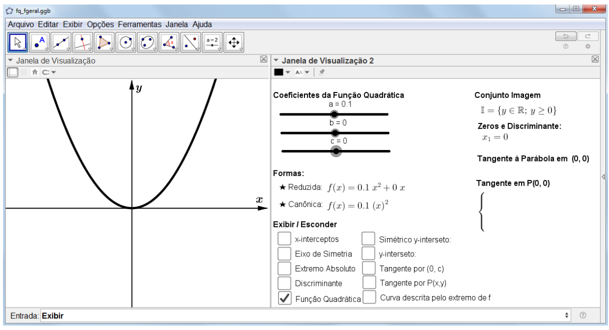


Figura 40 – Interface da Atividade Proposta 1.

2. Resultados Específicos de Aprendizagem

   Espera-se que o aluno aprenda a:

   2.1. converter a função quadrática para a sua forma canônica;

   2.2. construir uma tabela contendo pares ordenados $(x, f(x))$ para representar uma função quadrática;

   2.3. determinar a função quadrática tomando três pontos de seu gráfico;

   2.4. construir o gráfico da função quadrática no plano cartesiano;

   2.5. reconhecer os principais recursos de uma parábola, incluindo o vértice, x e y intersetos e eixo de simetria;

   2.6. identificar propriedades e alterações na forma da parábola ao modificar seus coeficientes.

3. Instruções

   Nessa atividade, os parâmetros iniciais da função $f(x)$ são $a = 0{,}1, b = 0$ e $c = 0$, e podem ser modificados através do respectivo seletor. Todas as caixas de exibição estão desligadas, exceto a da função quadrática, mas podem ser ligadas à medida que a atividade é executada ou quando o aplicador achar conveniente. Há também um número x_p que fará com que o ponto P percorra a parábola.

   O professor pode sugerir alguns valores de coeficientes a serem testados, como, por exemplo:

   a) $a = 1, b = -3$ e $c = -4$;

b) $a = -1, b = 0$ e $c = 5$;

c) $a = -1/5, b = 1$ e $c = 14/5$.

3.1. Selecione o controle $\boldsymbol{a}$ e altere-o com as teclas para cima ou para baixo (para direita ou para a esquerda). Como o coeficiente $\boldsymbol{a}$ influencia a forma da parábola? O que acontece se $\boldsymbol{a} = 0$?

3.2. Se $\boldsymbol{b} = 0$, qual a relação entre os zeros da função quadrática?

3.3. Altere o coeficiente $\boldsymbol{c}$ e descreva o que ele representa para o gráfico de f. Peça aos alunos para ligar a caixa de exibição correspondente.

3.4. Observe, alterando o valor de $\boldsymbol{b}$, como se comporta a tangente à curva pelo y-interseto, e determine a função afim correspondente.

3.5. Ainda em relação ao coeficiente $\boldsymbol{b}$, tente descrever duas propriedades gráficas que ele caracteriza.

3.6. Qual é o ponto simétrico do y-interseto? Após respostas dos alunos, deixar a caixa de exibição correspondente ligada.

3.7. Com as caixas de exibição correspondentes desligadas, para cada terno $\boldsymbol{(a,b,c)}$ sugerido pelo professor, achar os zeros, o extremo, a equação do eixo de simetria, o y-interseto e seu simétrico, ligando as caixas de exibição correspondentes após cálculos para cada terno proposto. Qual é o conjunto imagem de f?

3.8. O ponto $P(x, y)$ é um ponto sobre o gráfico de f. Peça aos alunos para alterar o número x_p pelo controle correspondente e pergunte-os quando a reta tangente é ascendente ou descendente. Fixando o valor de $\boldsymbol{a}$, qual coeficiente é responsável por essa característica?

3.9. Com o botão direito do mouse, clique no ponto extremo de f (ponto M) e habilite o seu rastro. Que curva ele descreve? Qual a lei que define essa curva? Para apagar o rastro digite `CTRL-F`.

3.10. Desligue a função f na caixa **Função Quadrática**, e em seguida, habilite o rastro do ponto P. Peça aos alunos que alterem os valores de x_p no controle correspondente. Que curva ele descreve? Por quê?

4.3.2 Atividade Orientada 2

1. Objetivos

Nessa atividade, definida pelo arquivo **fq_fcanon.ggb**, a forma usada para a função quadrática é a canônica: $f(x) = a(x - m)^2 + k$. Como na Atividade Orientada 1, definimos três seletores $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{m}$ e $\boldsymbol{k}$ que são os parâmetros da função quadrática na forma canônica, configurados com incrementos maiores, pois o maior objetivo dessa atividade é observar as translações e mostrar que o gráfico da função quadrática é a parábola, e o quarto seletor controla a abscissa do ponto P da parábola.

2. Resultados Específicos de Aprendizagem

   A aplicação dessa atividade, orientada pelo professor, também pode gerar bons resultados de aprendizagem. Manipulando os controles que definem os parâmetros, espera-se que o aluno

   2.1. visualize e compreenda como ocorre as translações no gráfico, tanto horizontais quanto verticais;

   2.2. observe os parâmetros da função quadrática e comprove que seu gráfico é uma parábola;

   2.3. aprenda a determinar a imagem da função, além de propriedades vistas na atividade anterior, como zeros, vértice, eixo de simetria etc;

   2.4. encontre a forma reduzida da função quadrática.

3. Instruções

   Sugerimos que o aplicador defina valores para a, m e k, tais como

   a) $a = 1, m = 3$ e $k = 2$;

   b) $a = 1, m = 3$ e $k = -5$;

   c) $a = 1, m = 3$ e $k = 0$;

   d) $a = -1/2, m = 5$ e $k = 3$;

   e) $a = -1/2, m = 0$ e $k = 3$;

   f) $a = -1/2, m = -5$ e $k = 3$;

   e siga as orientações abaixo.

   3.1. Para verificar a translação horizontal, peça aos alunos que cliquem no gráfico da função quadrática com o botão direito do mouse e selecione a opção *Habilitar Rastro*, e mantenham os parâmetros $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{k}$ invariáveis. Modificando apenas o parâmetro $\boldsymbol{m}$, o que ocorre ao gráfico? Ao fazer isso, sobre que reta o vértice se desloca?

   3.2. Proceda como em 3.1, agora fixando os valores de $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{m}$, fazendo apenas o parâmetro $\boldsymbol{k}$ variar.

   3.3. Qual a forma reduzida da função quadrática?

   3.4. Qual é a forma geral da função cujo gráfico é a reta tangente à parábola pelo y-interseto?

   3.5. Qual é o conjunto imagem da função f?

   3.6. Que ponto é simétrico de $(0, c)$?

   3.7. Manipule o número x_P de forma que o ponto $P(x_P, y_P)$ mova-se sobre a parábola. Qual relação existe entre os segmentos $\overline{PF}$ e $\overline{PD}$?

3.8. Quando o ponto P estiver sobre o vértice da parábola, qual o valor so segmento $\overline{PF}$ ou $\overline{PD}$? Esse valor é mínimo? Conclua então que o vértice é o ponto da parábola mais próxima da reta diretriz.

3.9. Observando os elementos da parábola, descreva a sua equação.

3.10. Observando o exposto na atividade, defina um conceito para parábola?

3.11. Peça aos alunos para exibir o círculo com centro em P e raio vetor $\overline{PF}$. Qual relação entre os ângulos α e β formados entre a tangente à curva em P e o raio vetor correspondente? Explique aos alunos que tal característica confere uma propriedade notável à parábola. Comente.

Uma descrição dessa atividade é mostrada na figura 41.

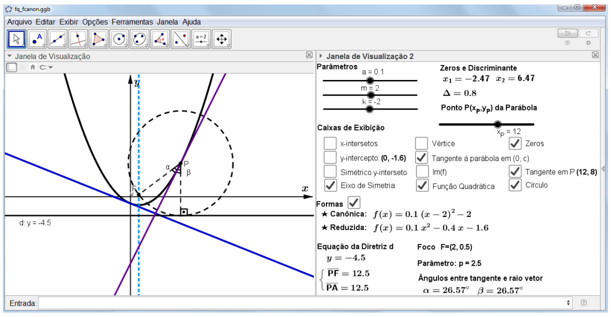


Figura 41 – Interface da Atividade Proposta 2.

4.3.3 Atividade Orientada 3

1. Objetivos

O objetivo dessa atividade (**fq_congs.ggb**) é consolidar o conceito de parábolas congruentes. São dadas duas funções $f(x) = a(x-m)^2 + k$ e $g(x) = a'(x-m')^2 + k'$ cujos valores iniciais dos parâmetros são respetivamente $a = 0,1$, $m = 5$, $k = 6$ e $a' = -0,1$, $m' = 20$, $k' = -7$.

2. Resultados Específicos de Aprendizagem

Espera-se que o aluno entenda o conceito de parábolas congruentes e perceba que os gráficos de f e g são congruentes quando $a = \pm a'$.

3. Instruções

Para orientar as repostas dos alunos, seguir as sugestões de prática para a atividade.

3.1. Do modo como f e g foram configuradas inicialmente seus gráficos são parábolas congruentes, isto é, podem coincidir por justaposição?

Espera-se uma reposta positiva. Para mostrar que sim, peça aos alunos que façam o seguinte.

3.2. Digitem no comando de entrada h(x)=Reflexão(g, y=0) ou h(x)=-g(x), provocando uma reflexão do gráfico de g sobre o eixo x. Lembre-se que este eixo é o lugar geométrico dos pontos do plano tais que $y = 0$.

3.3. Marquem o ponto P (simétrico de P') sobre $h(x)$, digitando P=(x_P,-g(x_P)).

3.4. Observem que, modificando x_P pelo controle correspondente, ao deslocar P' sobre o gráfico de $g(x)$, P desloca-se sobre o de $h(x)$. Quando P' coincidir com o vértice V_1, qual a posição de P? Quais as coordenadas do vértice de $h(x)$?

3.5. Marquem esse vértice vinculando-o a $h(x)$ da seguinte forma $\mathsf{V}_2 = (\mathsf{m}_1, -\mathsf{k}_1)$.

3.6. Definam o vetor u da seguinte forma u = vetor(V_2, V).

3.7. Em seguida, definam o ponto Q fazendo uma translação do ponto P através do vetor u assim: Q = Transladar(P,u).

3.8. Movam P através do número x_P correspondente. Se Q também se deslocar segundo o gráfico de $f(x)$, os gráficos de f e g são parábolas congruentes.

3.9. Com o botão direito do mouse cliquem sobre o ponto Q e selecione Habilitar Rastro. Em seguida esconda a função f. Faça variar o número x_P. O que acontece?

3.10. Criem o vetor v = (P, Q), selecione-o e habilite o seu rastro. Mova o seletor x_p segurando a tecla CTRL-Seta. O que acontece?

3.11. Para confirmar o objetivo do aprendizado, apaguem qualquer rastro (CTRL-F) e executem o comando Transladar(h, u), desligando em seguida a caixa de exibição da função f.

Observação 4.3.1. Antes de digitar cada comando é importante selecionar a Janela de Visualização 1, clicando com o mouse em qualquer área da mesma.

Observação 4.3.2. O comando Transladar(Objeto, Vetor) é um procedimento muito simples, já que necessita apenas de duas entradas, a primeira, o objeto que se deseja transladar, no caso h, e em seguida um vetor que definirá a translação, no caso, o vetor $\overrightarrow{V_2V}$, levando cada ponto de h num ponto de f se os gráficos forem parábolas congruentes, senão apenas leva V_2 em V.

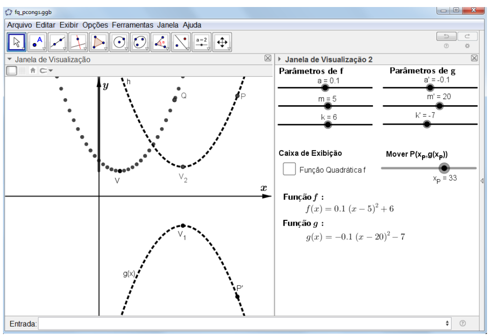


Figura 42 – Interface da Atividade 3 em execução.

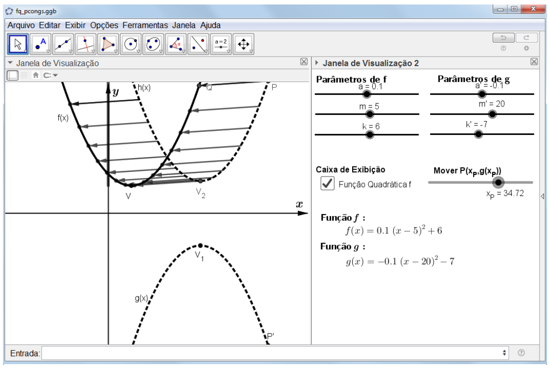


Figura 43 – Sobreposição de h sobre f.

A atividade pode ser continuada, daí sugerimos que o aplicador repita a atividade para outros valores de a, m e k e formule novos questionamentos, enriquecendo a experiência e aumentando as possibilidades de aprendizado.

5 Olimpíadas de Matemática

As Olimpíadas Brasileiras de Matemática, hoje também inseridas no contexto do ensino básico das escolas públicas, como a **OBMEP**[1], desempenham um importante papel na busca de talentos em várias regiões do Brasil. A SBM, Sociedade Brasileira de Matemática, organizadora dessas olimpíadas, com um olhar além da premiação, incentiva a participação de professores e alunos através de programas como o **OBMEP na Escola**, ofertando bolsas para os docentes e material didático de excelente qualidade para os estudantes interessados em aprender Matemática no âmbito das olimpíadas, além de canais "on-line", onde são disponibilizados vídeos, apostilas e listas de exercícios. Por outro lado, ao abordar problemas em olimpíadas estrangeiras, possibilita que seus participantes tenham contato com a Matemática praticada em outros países, estendendo olhares para além de nossas fronteiras, e em muitos casos, para países onde a Matemática apresenta índices relevantes de aprendizado e que também, na maioria das vezes, são grandes produtores de tecnologia, pois a linguagem das Ciências é a Matemática.

A página oficial da (OBMEP, 2020) destaca:

> A Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas - OBMEP é um projeto nacional dirigido às escolas públicas e privadas brasileiras, realizado pelo Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada - IMPA, com o apoio da Sociedade Brasileira de Matemática - SBM, e promovida com recursos do Ministério da Educação e do Ministério da Ciência, Tecnologia, Inovações e Comunicações - MCTIC.
>
> Criada em 2005 para estimular o estudo da matemática e identificar talentos na área, a OBMEP tem como objetivos principais:
>
> - Estimular e promover o estudo da Matemática;
>
> - Contribuir para a melhoria da qualidade da educação básica, possibilitando que um maior número de alunos brasileiros possa ter acesso a material didático de qualidade;
>
> - Identificar jovens talentos e incentivar seu ingresso em universidades, nas áreas científicas e tecnológicas;
>
> - Incentivar o aperfeiçoamento dos professores das escolas públicas, contribuindo para a sua valorização profissional;
>
> - Contribuir para a integração das escolas brasileiras com as universidades públicas, os institutos de pesquisa e com as sociedades científicas;
>
> - Promover a inclusão social por meio da difusão do conhecimento.
>
> O público-alvo da OBMEP é composto de alunos do 6º ano do Ensino Fundamental até último ano do Ensino Médio. Em 2019, mais de 18 milhões de alunos participaram da olimpíada.

Para (ALVES et al., 2010), participar da Olimpíada de Matemática é um motivo de ordem social que é determinado pela história de vida de cada aluno e pelos momentos

[1] Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas

vivenciados na escola. O desenvolvimento pessoal, o sucesso, o bem-estar serve como motivo para o aluno aprender, que pode ser explorado pela OBMEP estimulando por meio de suas premiações.

Assim sendo, neste capítulo reunimos alguns problemas envolvendo equações e funções quadráticas no contexto das olimpíadas nacionais, incluindo aqui a **OBMEP**, e também internacionais.

5.0.1 Questão 18 - OBM 2001 - 1ª fase - Nível 3

Seja $f(x) = x^2 - 3x + 4$. Quantas soluções reais tem a equação $f(f(f(\ldots f(x)))) = 2$ (onde f é aplicada 2001 vezes)?

a) 0 b) 1 c) 2 d) 2001 e) 2^{2001}

5.0.2 Questão 21 - OBM 2001 - 1ª fase - Nível 3

A soma dos valores reais de x tais que $x^2 + x + 1 = \dfrac{156}{x^2 + x}$ é:

a) 13 b) 6 c) -1 d) -2 e) -6

5.0.3 Questão 5 - OBMEP 2005 - 1ª Fase - Nível 3

Mariana entrou na sala e viu no quadro-negro algumas anotações da aula anterior, parcialmente apagadas, conforme a figura. Qual número foi apagado na linha de cima do quadro-negro?

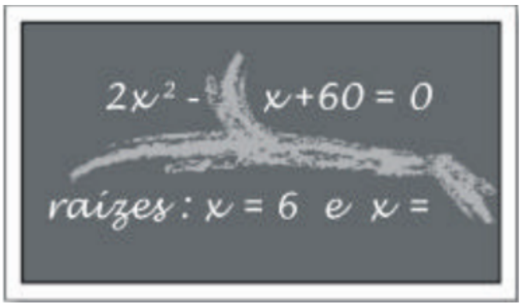
a) 11

b) 12

c) 13

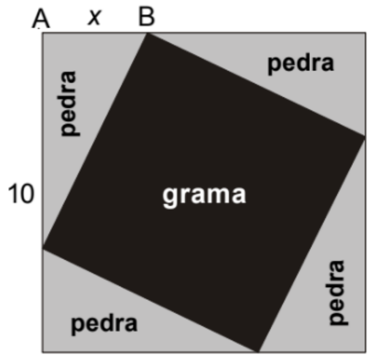
d) 20

e) 22



5.0.4 Questão 4 - OBMEP 2005 - 2ª Fase - Nível 3

Um prefeito quer construir uma praça quadrada de 10 m de lado, que terá quatro canteiros triangulares de pedra e um canteiro quadrado de grama, como na figura. O prefeito ainda não decidiu qual será a área do canteiro de grama, e por isso o comprimento do segmento AB está indicado por x na figura.



a) Calcule a área do canteiro de grama para $x = 2$.

b) Escreva a expressão da área do canteiro de grama em função de x.

Sabe-se que o canteiro de grama custa R\$ 4,00 por metro quadrado e os canteiros de pedra custam R\$ 3,00 por metro quadrado. Use esta informação para responder aos dois itens a seguir.

c) Qual a menor quantia que o prefeito deve ter para construir os cinco canteiros?

d) Se o prefeito tem apenas R\$ 358,00 para gastar com os cinco canteiros, qual é a área do maior canteiro de grama que a praça poderá ter?

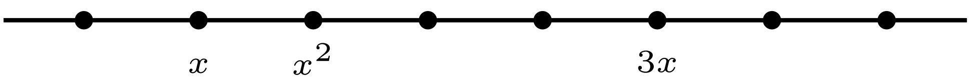
5.0.5 Questão 12 - OBM 2001 - 1ª fase - Nível 3

O número de soluções inteiras distintas da equação $(-6x^2 + 12x - 2)^{x^2-2x+2} = 4$ é:

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

5.0.6 Questão 2 - OBMEP 2015 - 1ª Fase - Nível 3

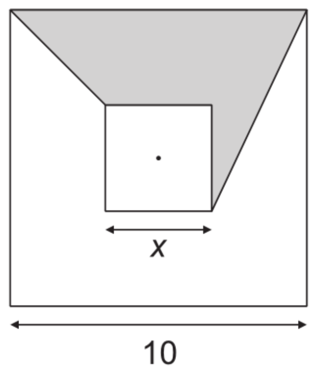
Na reta abaixo, a distância entre dois pontos consecutivos é sempre a mesma. Qual é o valor dessa distância?

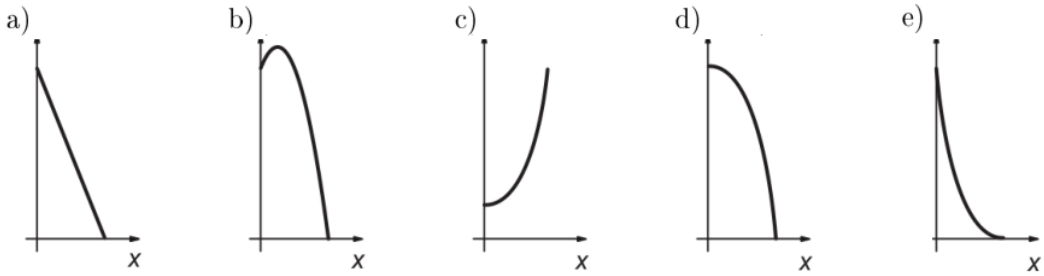


a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{2}{3}$ d) $\frac{2}{5}$ e) 1

5.0.7 Questão 8 - OBMEP 2016 - 1ª Fase - Nível 3

Os quadrados da figura têm lados paralelos e o mesmo centro. O quadrado maior tem lado 10 e o menor tem lado x. Qual é o gráfico que expressa a área da região cinza em função de x?





5.0.8 Questão 8 - OBMEP 2017 - 1ª Fase - Nível 3

Se $f(x) = 5x^2 + ax + b$, com $a \neq b$, $f(a) = b$ e $f(b) = a$, qual é o valor de $a + b$?

a) -5 b) $-\frac{1}{5}$ c) 0 d) $\frac{1}{5}$ e) 5

5.0.9 Questão 8 - OBMEP 2018 - 1ª Fase - Nível 3

A figura mostra o gráfico da função definida por $y = x^2$. O ponto A tem coordenadas $(0, p)$. Qual é o valor de p?

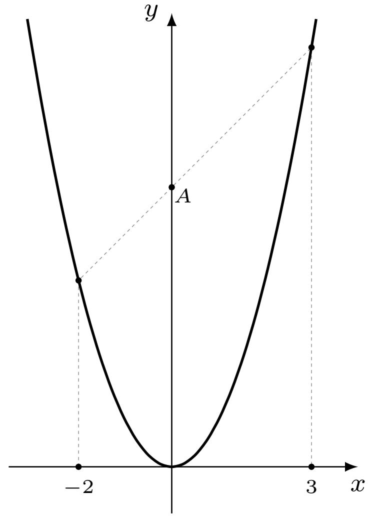
a) 5

b) 5,5

c) 6

d) 6,25

e) 6,5



5.0.10 China - 2005 (Extraído de (JIAGU, 2009))

Se p, q são dois números reais que satisfazem as relações $2p^2 - 3p - 1 = 0$ e $q^2 + 3q - 2 = 0$ e $pq \neq 1$. Encontre o valor de $\dfrac{pq + p + 1}{q}$.

5.0.11 CMO - 1988 (Extraído de (JIAGU, 2009))

Para quais valores de b as equações $1988x^2 + bx + 8891$ e $8891x^2 + bx + 1988 = 0$ têm uma raiz comum?

6 Considerações finais

A realização desse trabalho só foi possível devido aos esforços da **CAPES** em manter tão valioso curso de mestrado, o **PROFMAT**, e sua importância não para aqui, pois muitos professores, devido a condições financeiras não conseguiriam terminar o curso, ou sequer iniciar, se não fosse o seu programa de bolsas de estudo.

Em relação a esta dissertação, falar de funções quadráticas é começar a entender as dificuldades que os alunos do ensino básico, principalmente, os do primeiro ano do ensino médio enfrentam devido a graves problemas que afligem o sistema educacional brasileiro há décadas. “A crise da educação no Brasil não é uma crise; é um projeto.”, alertava Darci Ribeiro.

Lembro àqueles que terão oportunidade de ler esta obra, sejam eles alunos, professores ou curiosos, que não devemos usar a educação como um mecanismo de manutenção das desigualdades, e encerro essas considerações citando novamente o ilustre Darci Ribeiro: “Só há duas opções na vida: se resignar ou se indignar. ... ”.

APÊNDICE A – Resolução dos Problemas Olímpicos

A.1 Problema 1

Observe que

$$f(f(f(\dots f(x)))) = f(g(x)) = g^2(x) - 3g(x) + 4 = 2$$

onde $g(x) = f(f(f(\dots f(x))))$ aplicada 2000 vezes. Daí,

$$g^2(x) - 3g(x) + 4 = 2$$

Ou seja

$$g^2(x) - 3g(x) + 2 = 0$$

E cujas soluções são

$$g(x) = 1 \text{ ou } g(x) = 2$$

Mas a primeira não possui solução (verifique!), logo

$$f(f(f(\dots f(x)))) = 2$$

onde voltamos ao ponto de partida, mas agora f aplicada 2000 vezes.

Novamente, fazendo $f\,(g(x)) = f(f(f(\dots f(x))))$, temos agora $g(x) = f(f(f(\dots f(x))))$, com f aplicada 1999 vezes, resolveremos $f\,(g(x)) = 2$ ou $g^2(x) - 3g(x) + 4 = 2$, que nos dá $g(x) = 1$ ou $g(x) = 2$, a primeira não possuindo solução.

Recursivamente, fazendo o mesmo processo, chegaremos num ponto onde $f(x) = 2$ ou

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

donde obtemos $s = -3$, $p = 2$ e $d^2 = \left(\dfrac{-3}{2}\right)^2 - 2 = \dfrac{1}{2} > 0$.

Portanto, a equação $f(f(f(\dots f(x)))) = 2$ possui duas soluções reais, $x = 1$ ou $x = 2$.

A.2 Problema 2

É dado que $x^2 + x + 1 = \dfrac{156}{x^2 + x}$. Procedendo a mudança de variável $y = x^2 + x$, onde $y \neq 0$, obtemos

$$y + 1 = \frac{156}{y}$$

donde encontramos a equação quadrática

$$y^2 + y - 156 = 0$$

Pelo método da Raiz Média (Seção 2.3.1.4), determinamos $d^2 = (\bar{x})^2 - p$, onde $\bar{x} = \dfrac{s}{2} = \dfrac{-b}{2}$ e $p = c$, ou seja,

$$\begin{aligned} d^2 &= \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - (-156) \\ &= \frac{1}{4} + 156 \\ &= \frac{625}{4} \end{aligned}$$

Donde concluímos que

$$d = \frac{25}{2}$$

Daí

$$y = \bar{x} - d = -\frac{1}{2} - \frac{25}{2} = -13 \text{ ou } y = \bar{x} + d = -\frac{1}{2} + \frac{25}{2} = 12$$

Logo, $x^2 + x = 12$ ou $x^2 + x = -13$ que correspondem a $x^2 + x - 12 = 0$ e $x^2 + x + 13 = 0$, respetivamente. Como só a última equação não possui solução, pois, nesse caso,

$$d^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 13 < 0$$

a soma das raízes reais da primeira é $s = -1$.

A.3 Problema 3

Seja b o número apagado.

Como $x = 6$ é uma das raízes da equação $2x^2 - bx + 60 = 0$, então

$$2 \cdot 6^2 - b \cdot 6 + 60 = 0$$

Ou seja

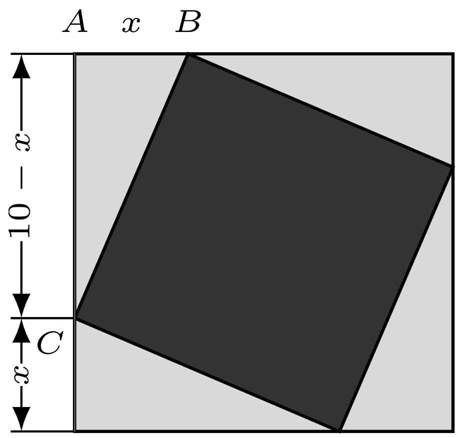
$$72 - 6b + 60 = 0$$

Donde obtemos

$$6b = 132 \text{ e, portanto, } b = 22, \text{ o número apagado.}$$

A.4 Problema 4

Na figura abaixo, os canteiros de pedra são triangulares e congruentes e o de grama, quadrangular, tal que $0 < x < 10$.



(a) Sendo $x = 2$, o triângulo ABC é retângulo de catetos 2 e 8 e hipotenusa $a = \overline{BC}$, lado do quadrado menor. Pelo teorema de Pitágoras

$$a^2 = 2^2 + 8^2$$

Mas, a^2 é a área A do canteiro quadrado, logo

$$A = 68$$

Assim, o canteiro quadrado tem área $68\,\mathrm{m}^2$.

(b) A área do canteiro de grama, denotada por $A(x)$, é o quadrado da hipotenusa de um canteiro triangular, isto é,

$$\begin{aligned} A(x) &= a^2 \\ &= x^2 + (10 - x)^2 \\ &= x^2 + 100 - 20x + x^2 \end{aligned}$$

Portanto

$$A(x) = 2x^2 - 20x + 100$$

(c) Seja $P(x)$ o preço para construir os canteiros. Os quatro canteiros de pedra tem área B igual a

$$B = 4 \cdot \frac{x(10 - x)}{2} = -2x^2 + 20x$$

Então

$$\begin{aligned} P(x) &= 4 \cdot A(x) + 3 \cdot B(x) \\ &= 4 \cdot \big(2x^2 - 20x + 100\big) + 3 \cdot \big(-2x^2 + 20x\big) \\ &= 8x^2 - 80x + 400 - 6x^2 + 60x \end{aligned}$$

Desta forma

$$P(x) = 2x^2 - 20x + 400$$

O Valor mínimo para $P(x)$ ocorre quando $x = x_V$ pois $a = 2 > 0$, ou seja

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{20}{2 \cdot 2} = 5$$

Logo, seu preço minímo é

$$\begin{aligned} P(5) &= 2 \cdot 5^2 - 20 \cdot 5 + 400 \\ &= 50 - 100 + 400 \end{aligned}$$

Portanto, a menor quantia a ser gasta para construir os cinco canteiros é R$ 350,00.

(d) Devemos fazer $P(x) = 358$. Logo,

$$2x^2 - 20x + 400 = 358$$

ou

$$2x^2 - 20x + 42 = 0$$

ou

$$x^2 - 10x + 21 = 0$$

Pelo método da Raiz Média (Seção 2.3.1.4),

$$\begin{aligned} d^2 &= \left(\frac{-b}{2}\right)^2 - c \\ &= \left(\frac{10}{2}\right)^2 - 21 \\ &= 25 - 21 = 4 \end{aligned}$$

Ou seja

$$d = 2$$

Portanto

$$x = 5 - 2 = 3 \quad \text{ou} \quad x = 5 + 2 = 7$$

Desta forma, a maior área é $A(3)$ ou $A(7)$, pois $A(3) = A(7)$:

$$\begin{aligned} A(3) &= 2 \cdot 3^2 - 20 \cdot 3 + 100 \\ &= 18 - 60 + 100 \\ &= 58\,\mathrm{m}^2 \end{aligned}$$

A.5 Problema 5

Observe que

$$\begin{aligned} -6x^2 + 12x - 2 &= -6(x^2 - 2x) - 2 \\ &= -6(x^2 - 2x + 1) - 2 + 6 \\ &= \boldsymbol{-6(x-1)^2 + 4} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} x^2 - 2x + 2 =& x^2 - 2x + 1 + 1 \\ &= \boldsymbol{(x-1)^2 + 1} \end{aligned}$$

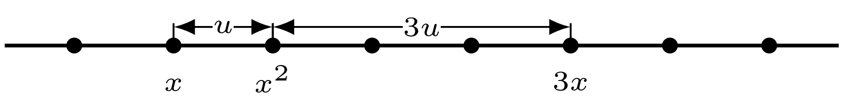
são as formas canônicas da base e da potência do lado esquerdo da igualdade, inteiros par e positivo, respetivamente, já que estamos considerando apenas soluções inteiras. O maior valor que a base assume é 4, logo $-6(x-1)^2 + 4 = \pm 2$ ou $-6(x-1)^2 + 4 = 4$.

Daí, temos as possibilidades $-6(x-1)^2+4 = -2$ e $(x-1)^2+1 = 2$, $-6(x-1)^2+4 = 2$ e $(x-1)^2 + 1 = 2$ ou $-6(x-1)^2 + 4 = 4$ e $(x-1)^2 + 1 = 1$.

Da primeira, temos que $(x-1)^2 = 1$, donde encontramos $x = 0$ ou $x = 2$. A segunda não apresenta solução pois $(x-1)^2 = 1$, mas $-6(x-1)^2 + 4 = -6 + 4 = -2 \neq 2$. Da terceira, temos que $(x-1)^2 = 0$, ou seja, $x = 1$. Logo, a equação possui três soluções.

A.6 Problema 6

Consideremos a figura abaixo, onde $u = x^2 - x \neq 0$ impõe $x \neq 0$.



Do enunciado e da figura, obtemos a igualdade

$$3x - x^2 = 3(x^2 - x) \neq 0$$

Daí, aplicamos a distributividade no lado direito da igualdade

$$3x - x^2 = 3x^2 - 3x$$

Em seguida reduzimos a equação, igualando-a a zero

$$4x^2 - 6x = 0$$

Pondo $2x$ em evidência, fatoramo-as

$$2x(2x - 3) = 0$$

Donde aplicamos a lei do produto nulo e encontramos

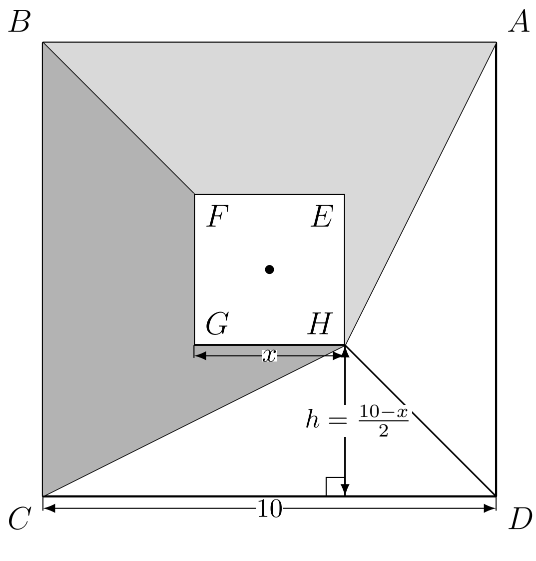
$$x = 0 \text{ ou } x = \frac{3}{2}$$

Portanto, sendo $x \neq 0$, a distância entre dois pontos consecutivos é

$$u = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{3}{2} = \frac{9}{4} - \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$$

A.7 Problema 7

Considere a figura abaixo obtida da original.



Observe que o polígono côncavo $ABFEH$ é congruente ao $CBFGH$ pois um pode ser obtido do outro por uma rotação de 180° em torno da reta $\overleftrightarrow{BH}$, logo possuem a mesma área que chamaremos $A(x)$. Por outro lado, os triângulos HCD e HAD são congruentes (LAL), pois $\overline{HD}$ é lado comum, $\angle CDH$ é congruente a $\angle ADH$ e $\overline{CD}$ é congruente a $\overline{AD}$. Veja também que $h = \dfrac{10-x}{2}$, altura do triângulo HCD, pois $\dfrac{x}{2} + h = \dfrac{10}{2}$. Assim, a área do quadrado de lado 10 é igual à soma de suas partes, ou seja,

$$2 \cdot A(x) + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot \left(\frac{10-x}{2}\right) + x^2 = 10^2$$

Após cálculos e simplificações, obtemos

$$2 \cdot A(x) + 50 - 5x + x^2 = 100$$

Melhor dizendo

$$A(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + 25$$

Como $a < 0$, sua concavidade é voltada para baixo, e do fato de $b > 0$, a curva corta o eixo y em sua parte ascendente (Seção 3.3.1). Logo, (b) é o item correto.

A.8 Problema 8

Seja $f(x) = 5x^2 + ax + b$, com $a \neq b$, onde $f(a) = b$ e $f(b) = a$. De $f(a) = b$, temos

$$5a^2 + a \cdot a + b = b$$

Ou seja

$$6a^2 = 0, \text{ portanto, } a = 0$$

Por outro lado, $f(b) = a$, assim,

$$5b^2 + ab + b = a$$

Mas $a = 0$, daí

$$5b^2 + b = 0$$

Colocamos b em evidência

$$b(5b + 1) = 0$$

Aplicando a lei do produto nulo, temos que

$$b = 0 \quad \text{ou} \quad 5b + 1 = 0$$

Mas $b \neq a$, logo

$$b = -\frac{1}{5}$$

Portanto

$$a + b = -\frac{1}{5}$$

A.9 Problema 9

Como os pontos $(-2, f(-2))$, $A(0,p)$ e $(3, f(3))$ estão alinhados, existe uma função afim $g(x) = mx + n$ cujo gráfico é uma reta passando por esses pontos. Assim, $g(0) = n = p$. De $g(-2) = f(-2) = (-2)^2 = 4$ e $g(3) = f(3) = 3^2 = 9$, obtemos

$$\begin{cases} -2m + p &= 4 \\ 3m + p &= 9 \end{cases}$$

Daí,

$$3(-2m + p) + 2(3m + p) = 3 \cdot 4 + 2 \cdot 9$$

Isto é,

$$-\cancel{6p} + 3p + \cancel{6p} + 2p = 30$$

Donde temos

$$5p = 30$$

E, então,

$$p = 6$$

A.10 Problema 10

Como $p, q \in \mathbb{R}$ satisfazem as relações $2p^2 - 3p - 1 = 0$ e $q^2 + 3q - 2 = 0$ e $pq \neq 1$, então, pela proposição 2.3.1, vale a equação $-2\left(\frac{1}{q}\right)^2 + 3 \cdot \frac{1}{q} + 1 = 0$ pois $q \neq 0$, ou equivalentemente,

$$2\left(\frac{1}{q}\right)^2 - 3 \cdot \frac{1}{q} - 1 = 0$$

Desta maneira, p e $\frac{1}{q}$ são raízes de $2x^2 - 3x - 1 = 0$, ou melhor

$$p + \frac{1}{q} = \frac{3}{2} \text{ e } p \cdot \frac{1}{q} = \frac{p}{q} = -\frac{1}{2}$$

Assim,

$$\frac{pq + p + 1}{q} = p + \frac{p}{q} + \frac{1}{q} = p + \frac{1}{q} + \frac{p}{q} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1$$

A.11 Problema 11

Pela proposição 2.3.1, as equações têm raízes inversas. Assim, se α e β são raízes de $1988x^2+bx+8891$, $\frac{1}{\alpha}$ e $\frac{1}{\beta}$ são as raízes de $8891x^2+bx+1988=0$. Há duas possibilidades pois $\alpha \neq \frac{1}{\beta}$, pois $\alpha\beta = \frac{8891}{1988}$:

- $\alpha = \frac{1}{\alpha}$ ou $\beta = \frac{1}{\beta}$

De $\alpha = \frac{1}{\alpha}$, temos $\alpha = \pm 1$, donde obtemos os possíveis valores de b:

$$\begin{aligned} 1988 \cdot 1^2 + b \cdot 1 + 8891 &= 0 \\ 1988 + b + 8891 &= 0 \end{aligned}$$

Ou melhor,

$$b = -10879$$

Em contrapartida,

$$\begin{aligned} 1988 \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + 8891 &= 0 \\ 1988 - b + 8891 &= 0 \end{aligned}$$

Daí

$$b = 10879$$

Dessa forma, $b = \pm 10879$.

APÊNDICE B – Distância entre dois pontos no $\mathbb{R}^2$

Da geometria euclidiana, sabemos que a distância entre dois pontos $A(x,\, y)$ e $B(x',\, y')$ é o segmento de reta cujos extremos são justamente A e B, isto é, $d(A,\; B) = \overline{AB}$. Inicialmente, plotamos A e B no plano xOy e determinamos o ponto $C(x',\, y)$ como na figura 44. Note que $\triangle ABC$ é retângulo em C, onde $d(A, B)$ é a sua hipotenusa e seus catetos, $\overline{AC} = x' - x$ e $\overline{BC} = y' - y$.

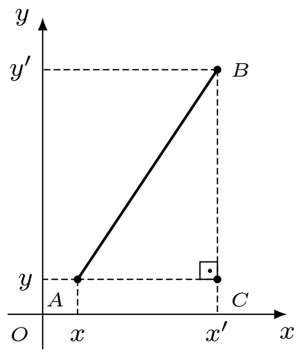


Figura 44 – Distância entre os pontos A e B.

Portanto, aplicando o Teorema de Pitágoras em $\triangle ABC$, temos:

$$\begin{aligned}\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 \text{ sse } d(A, B)^2 &= (x' - x)^2 + (y - y')^2 \\ \text{sse } d(A, B) &= \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}\end{aligned}$$

Exemplo B.0.1. A distância entre os pontos $A(-1,\, 3)$ e $B(3, 2)$ é

$$\begin{aligned}d(A, B) &= \sqrt{[3 - (-1)]^2 + (2 - 3)^2} = \sqrt{4^2 + (-1)^2} \\ &= \sqrt{16 + 1} = \sqrt{17}\end{aligned}$$

Exemplo B.0.2. A distância entre os pontos $A'(1,\, 5)$ e $B'(1, 2)$ é

$$d(A', B') = |2 - 5| = |-3| = 3$$

Observe que $d(A,\; B)$ é igual ao valor absoluto da diferença entre as ordenadas dos pontos pois eles pertencem ao mesmo segmento vertical.

Exemplo B.0.3. A distância entre os pontos $P(4,\, 5)$ e $Q(0, 5)$ é o comprimento do segmento horizontal $\overline{PQ}$, portanto

$$d(P, Q) = |0 - 4| = |-4| = 4$$

APÊNDICE C – PA: Termo Geral e Soma dos n Primeiros Termos

Proposição C.0.1. Dada uma PA cujo primeiro termo é x_1 e cuja razão é r, seu termo geral é uma igualdade que expressa seus termos em função de suas posições, ou seja,

$$x_n = x_1 + (n-1)r$$

Demonstração. De fato, temos

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 + r \\ x_3 &= x_2 + r \\ x_4 &= x_3 + r \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n &= x_{n-1} + r \end{aligned}$$

Somando membro a membro as $(n-1)$ igualdades, obtemos

$$\cancel{x_2} + \cancel{x_3} + \cancel{x_4} + \ldots + \cancel{x_{n-1}} + x_n = x_1 + \cancel{x_2} + \cancel{x_3} + \cancel{x_4} + \ldots + \cancel{x_{n-1}} + \underbrace{r + r + \ldots + r}_{n-1}$$

Ou melhor,

$$x_n = x_1 + (n-1)r$$

□

Proposição C.0.2. A soma dos n primeiros termos da PA $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n, \ldots)$ é $S_n = \dfrac{(x_1 + x_n)n}{2}$.

Demonstração. Seja S_n a soma dos n primeiros termos da PA dada.

Assim,

$$S_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + x_n$$

Isto é

$$S_n = x_n + x_{n-1} + \ldots + x_2 + x_1$$

Cuja soma membro a membro dessas igualdades é

$$\begin{aligned} 2S_n &= (x_1 + x_n) + (x_2 + x_{n-1}) + \ldots + (x_{n-1} + x_2) + (x_n + x_1) \\ &= (x_1 + x_n) + (x_1 + x_n) + \ldots + (x_1 + x_n) + (x_1 + x_n) \\ &= n(x_1 + x_n) \end{aligned}$$

Daí,

$$S_n = \frac{(x_1 + x_n)n}{2}$$

Note que

$$x_k + x_{n-(k-1)} = x_1 + (k-1)r + x_n - (k-1)r = x_1 + x_n$$

para algum $k \in \mathbb{N}$ e $1 < k < n$. $\square$

ANEXO A – Imagens de MUV no Simulador PhET

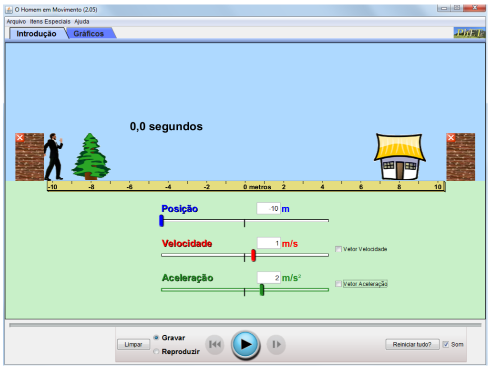


Figura 45

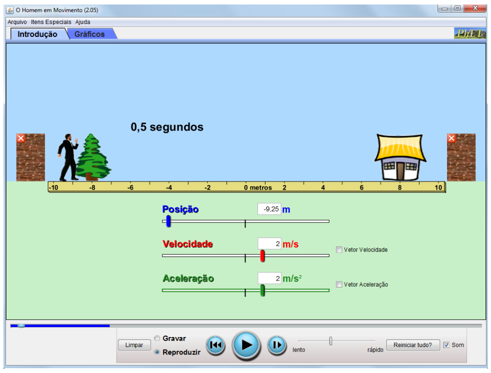


Figura 46

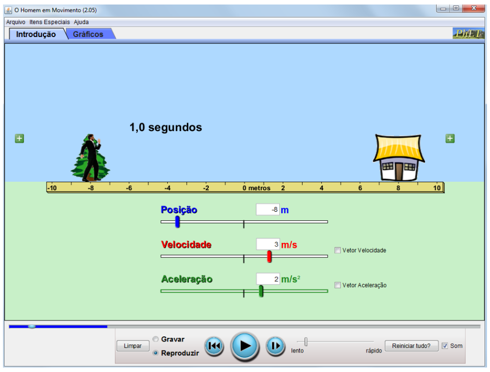


Figura 47

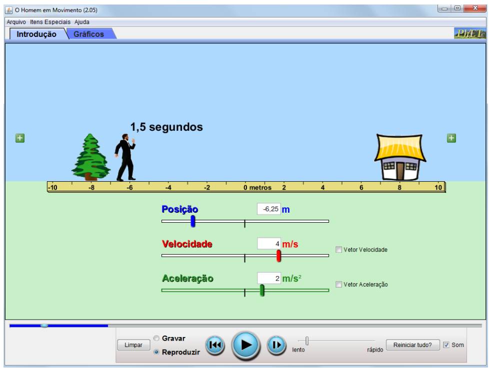


Figura 48

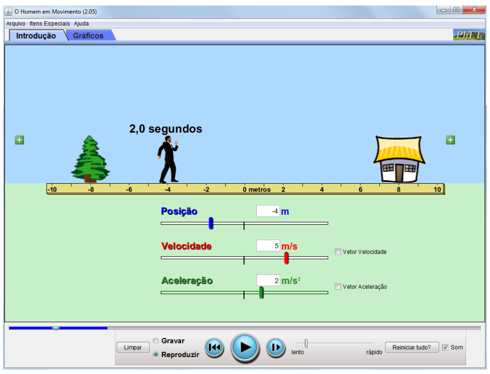


Figura 49

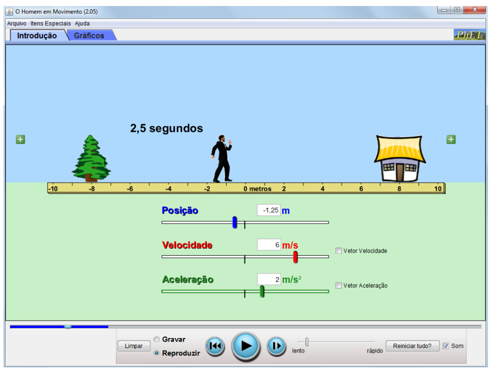


Figura 50

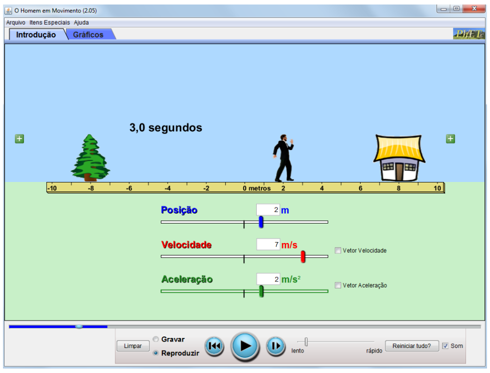


Figura 51

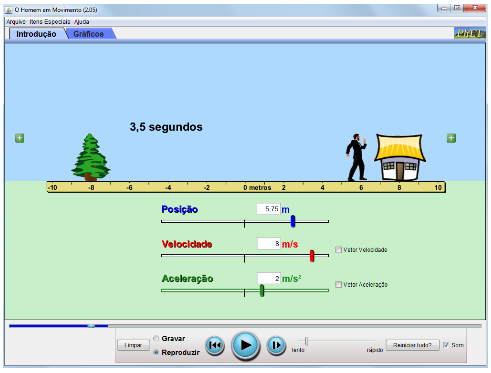


Figura 52

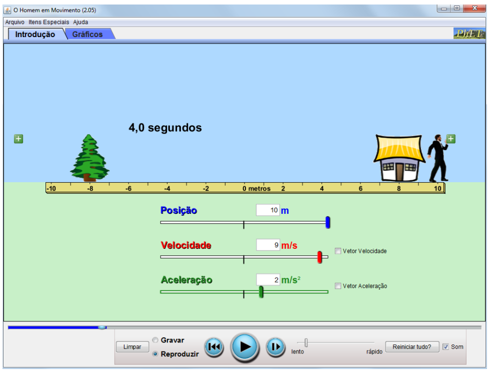


Figura 53

Referências

ALVES, W. J. S. et al. O impacto da olimpíada de matemática em alunos da escola pública. Tese (Doutorado) — Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática-PROFMAT), 2010.

BURTON, D. M. The history of mathematics: An introduction. Group, v. 3, n. 3, p. 35, 1985.

CAMINHA, A. Tópicos de matemática elementar, vol. 1. Números Reais, SBM, 2011.

COLORADO, U. do. PhET, Interactive Simulations. 2020. Disponível em: <https://phet.colorado.edu/pt_BR/simulation/moving-man>.

JIAGU, X. Lecture Notes On Mathematical Olympiad Courses: For Junior Section (In 2 Volumes)-Volume 2. [S.l.]: World Scientific, 2009. v. 6.

LEITE, A. Aplicações da Matemática: administração, economia e ciências contábeis. [S.l.]: Cengage Learning, 2015.

LEITHOLD, L. Matemática aplicada à economia e administração. [S.l.]: Harbra, 1988.

LIMA, E. L. et al. A matemática do ensino médio, vol. 1. Coleçao do Professor de Matemática, SBM, 2012.

NACIONAIS, P. C.; MÉDIO, E. Parte iii–ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Secretaria de Educação Média e Tecnológica, 2013.

OBMEP. Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas. 2020. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/>. Acesso em: 12 jan. 2020.

SANTOS, F. J. dos; FERREIRA, S. F. Geometria analítica. [S.l.]: Bookman Editora, 2009.

TAHAN, M. As maravilhas da matemática. Rio de Janeiro: Edições Bloch, p. 175–177, 1972.

TAN, S. T. Matemática aplicada à administração e economia. [S.l.]: Pioneira Thomson Learning, 2007.

VALENCIA, L. R. Introducción a la Física. [S.l.]: Universidad de Santiago de Chile, Santiago, 2003.