UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

SILVIA DE OLIVEIRA BARRETO

APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA NA EDUCAÇÃO DE JOVENS E ADULTOS: UM TRABALHO COM DIVISIBILIDADE

ITABAIANA

2020

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

SILVIA DE OLIVEIRA BARRETO

APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA NA EDUCAÇÃO DE JOVENS E ADULTOS: UM TRABALHO COM DIVISIBILIDADE

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como exigência parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Profª Dra. Marta Elid Amorim Mateus

ITABAIANA

2020

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

	Barreto, Silvia de Oliveira
B273a	Aprendizagem significativa na educação de jovens e adultos: um trabalho com divisibilidade / Silvia de Oliveira Barreto ; orientador Marta Elid Amorim Mateus. - Itabaiana, 2020.
	115 f. : il.
	Dissertação (mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Sergipe, 2020.
	1. Matemática. 2. Aritmética – Estudo e ensino. 3. Educação de jovens e adultos. I. Mateus, Marta Elid Amorim orient. II. Título.
	CDU 51:37

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA NA EDUCAÇÃO DE JOVENS E ADULTOS: UM TRABALHO COM DIVISIBILIDADE

por

Silvia de Oliveira Barreto

Aprovada pela banca examinadora:

Marta Élid Amorim Mateus
Profa. Marta Élid Amorim Mateus – UFS
Orientadora

Viviane de Jesus Lisboa Aquino
Profa. Viviane de Jesus Lisboa Aquino – UFS
Primeira Examinadora

Charles Braga Amorim
Prof. Charles Braga Amorim – UFS
Segundo Examinador

São Cristóvão, 19 de Novembro de 2020

Cidade Universitária "Prof. José Aloísio de Campos" – Av. Marechal Rondon, s/no - Jardim Rosa Elze – Campus de São Cristóvão. Tel. (00 55 79) 3194-6887
CEP: 49100-000 - São Cristóvão – Sergipe - Brasil – E-mail: promat.ufs@gmail.com

DEDICATÓRIA

Ao meu pai, Paulo Araújo Barreto, (*in memorian*) e à minha mãe, Luzinete Menezes de Oliveira Barreto, pelo grande incentivo e suporte para estudar, ensinando-me sempre valores dignos e honrosos.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, e acima de tudo, agradeço a Deus, por ter me dado a vida, me amado incondicionalmente e derramado sobre mim da Sua suficiente graça dia após dia. Foi o Senhor quem esteve ao meu lado em todos os momentos desse mestrado, protegendo a minha mente, me capacitando e não me deixando desistir. A Ele toda honra e toda glória!

Ao meu pai, pelo amor que demorei a compreender e hoje sinto imensa falta! Sou grata pelo suprimento, por cada ensinamento, por sempre ter acreditado em mim. Te amarei para sempre!

À minha mãe pelo amor, carinho e preocupação, pois sempre zelou por mim e possibilitou que eu pudesse me dedicar aos estudos. Te devo tudo, mainha!

Ao meu irmão e à minha cunhada-irmã, que são presentes de Deus em minha vida. Obrigada por me socorrerem sempre que precisei e por não desistirem de me ajudar a ser uma pessoa melhor.

Aos meus demais familiares por me fazerem sentir uma mulher importante e amada. Agradeço cada palavra de incentivo. É maravilhoso saber que posso contar com vocês!

Aos meus amigos e irmãos em Cristo, que intercederam por mim junto ao Pai para que esse trabalho fosse concluído. Vocês trouxeram palavras de ânimo, conselhos sábios e momentos de descontração maravilhosos durante toda essa jornada. Os amo muito!

Aos meus colegas e professores do PROFMAT-UFS. Não foi uma jornada fácil, mas percorrê-la com alguns de vocês tornou tudo muito mais agradável. Conheci pessoas inteligentes, batalhadoras e generosas, que levarei para sempre em meu coração, em especial Deise, Rejane, Adriano e Laedson. Eu aprendi muito com vocês!

À Secretaria Municipal de Educação de Nossa Senhora do Socorro por me conceder a licença para mestrado, sem a qual eu jamais conseguiria concluir este curso. A exemplo de outros colegas que, por terem esse direito negado por seus gestores, não puderam dar continuidade à sua especialização profissional.

À direção, aos colegas e alunos do Colégio Estadual Olavo Bilac, que tanto me ajudaram incentivando-me e adaptando os horários para que eu não perdesse as aulas do PROFMAT. Em especial, aos estudantes que participaram desta pesquisa pelo carinho, respeito e dedicação que construímos mutualmente durante todo o período letivo.

Aos professores membros da banca examinadora, Profª. Ma. Viviane de Jesus Lisboa Aquino e Prof. Dr. Charles Braga Amorim, por terem aceitado prontamente o nosso convite em nos ajudar e pelas valiosas contribuições para o enriquecimento do nosso trabalho.

Finalmente, meus sinceros agradecimentos à querida Profª. Dra. Marta Élid Amorim Mateus, pela honra de aceitar o convite para orientar esta dissertação. Orientação esta que foi muito além das minhas expectativas. Obrigada por me deixar escolher um tema que não era sua especialidade e por estudar esse tema comigo. Por tanta paciência, dedicação, competência e amizade, sou eternamente grata.

RESUMO

O presente trabalho apresenta uma abordagem sobre o ensino de Divisibilidade no segundo segmento do Ensino Fundamental da Educação de Jovens e Adultos através da teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel. Apresentamos um relato de experiência em uma escola da rede púbica de ensino com duas Atividades Propostas comparativas e realizamos um apanhado sobre a evolução dessa modalidade de ensino em nosso país ao longo do tempo, ressaltando sua importância e a necessidade de um olhar diferenciado para suas peculiaridades. Argumentamos ainda sobre a teoria da Aprendizagem Significativa, que combinada à Resolução de Problemas, entre outras metodologias, mostra ser um excelente sistema de referencial teórico para a organização do ensino, em particular o ensino da EJA, que pede uma abordagem menos tecnicista e mais humana possível. Por fim, concluímos que, apesar das muitas dificuldades e limitações, a Educação de Jovens e Adultos necessita de um trabalho diferenciado com um estudo prévio e uma seleção adequada dos instrumentos metodológicos para que sejam alcançados resultados satisfatórios.

Palavras-chaves: Divisibilidade, Educação de Jovens e Adultos, Aprendizagem Significativa.

ABSTRACT

The present work presents an approach on the teaching of Divisibility in the second segment of Elementary Education of Youth and Adult Education through Ausubel's theory of Meaningful Learning. We present an experience report in a public school with two Comparative Proposed Activities. We reviewed the evolution of this type of education in our country over time, emphasizing its importance and the need for a different look at its peculiarities. We also argue about the theory of Meaningful Learning, which combined with Problem Solving, among other methodologies, shows an excellent theoretical reference system for the organization of teaching, in particular the teaching of YAE, which calls for a less technical and more human approach possible. Finally, we conclude that, despite the many difficulties and limitations, Youth and Adult Education needs a differentiated work with a previous study and an adequate selection of methodological instruments to achieve satisfactory results.

Keywords: Divisibility, Youth and Adult Education, Meaningful Learning.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

A presente pesquisa sobre a Aprendizagem Significativa de Divisibilidade na Educação de Jovens e Adultos (EJA) consiste em um estudo que, inicialmente, teve como enfoque a construção de uma sequência didática para depois ser aplicada (ou testada) na sala de aula, buscando verificar qual a contribuição para o alcance de uma aprendizagem significativa desse conceito no referido público alvo.

Por conta de uma série de fatores, alheios à vontade da pesquisadora, a sequência didática não pôde ser plenamente desenvolvida. Mas, tivemos uma experiência com duas Atividades Propostas com o conteúdo de Divisibilidade em uma turma de EJA bastante interessante que revelou além das nossas intenções iniciais.

Esta dissertação foi desenvolvida de modo a ser útil a qualquer professor de Matemática que busque uma orientação pedagógica para o processo de ensino-aprendizagem na EJA. Pensando no contexto escolar e na sistemática da sala de aula, a teoria de Ausubel traz uma nova maneira de pensar a aprendizagem dos jovens e adultos e contribui para que possamos entender o porquê de muitas práticas utilizadas hoje não surtirem o efeito esperado.

Considerando que a educação contemporânea está repleta de indícios de aprendizagem mecânica, como indica a pesquisa feita pela Coordenação de Educação de Jovens e Adultos (COEJA) na Proposta Curricular da modalidade de ensino:

> Os professores consultados apontaram aulas expositivas e exercícios (individuais, em grupo e de fixação) como as estratégias didáticas utilizadas com maior frequência. Isto pode ser um indicador de que eles apresentam aos alunos atividades passíveis de serem resolvidas de forma mecânica e que os problemas, quando são apresentados, se destinam a aplicar os conceitos ensinados. (BRASIL, 2002, p. 14)

Desejamos aqui levar o professor a avaliar seu trabalho e refletir sobre a maneira como vem apresentando os conteúdos com o intuito de oferecer uma alternativa que proporcione aos seus alunos uma aprendizagem significativa. Segundo David Ausubel, é preciso identificar aquilo que o aluno já sabe, para depois criar ferramentas que auxiliem cada estudante a estabelecer conexões entre os atuais e os novos conhecimentos.

Este trabalho está organizado em cinco capítulos e uma seção para conclusões descritos a seguir.

No primeiro capítulo, apresentamos o conhecimento matemático relacionado à pesquisa, a saber, Divisibilidade. Nele, abordamos os conteúdos mais relevantes para o nosso estudo e que direcionaram a elaboração das atividades propostas aplicadas aos alunos.

O Capítulo 2 é composto pelos antecedentes, motivações, justificativas para a escolha do tema desta investigação, a questão de pesquisa e os objetivos que pretendíamos alcançar, a escolha e o perfil dos entrevistados, os procedimentos metodológicos e alguns problemas apresentados. Além de introduzir a Teoria da Aprendizagem Significativa como uma fundamentação teórica bastante adequada para o professor da EJA.

No capítulo seguinte, trazemos o histórico e algumas considerações teóricas sobre a Educação de Jovens e Adultos no Brasil. Reforçamos a importância da EJA como uma ferramenta de inclusão de um conjunto de cidadãos vítimas da história excludente do nosso país e necessária para a eliminação das discriminações e para a busca de uma sociedade mais justa e com menos desigualdades.

O quarto capítulo apresenta os fundamentos teóricos que deram suporte ao nosso trabalho. Percebemos a Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel como uma excelente norteadora da prática pedagógica do professor e a Resolução de Problemas como uma ferramenta bastante eficaz para o ensino-aprendizagem de Matemática.

Por fim, no quinto e último capítulo, expomos a discussão dos resultados sob as perspectivas da Análise de Erros (Cury, 1994) e da Resolução de Problemas, utilizando as etapas propostas por Polya (1995), que são: compreensão do problema, elaboração de um plano, execução do plano e retrospecto ou verificação. Nesse momento, buscamos distinguir em que fase da resolução de problemas os estudantes apresentam maior dificuldade e uma possível causa da mesma.

Finalizamos nosso trabalho apresentando nossas conclusões, um resumo dos resultados obtidos a partir da análise dos dados e respondemos à questão de pesquisa. São feitas ainda algumas reflexões frutos deste trabalho e acerca de algumas perspectivas futuras.

CAPÍTULO 1

DIVISIBILIDADE – O CONHECIMENTO MATEMÁTICO RELACIONADO AO NOSSO ESTUDO

Neste capítulo abordamos os conteúdos utilizados na pesquisa. De início, estudamos as propriedades elementares da divisibilidade no conjunto dos inteiros, passando pelo importantíssimo algoritmo da divisão e finalizando com o Máximo Divisor Comum e com o Mínimo Múltiplo Comum, a mesma sequência didática utilizada com os alunos, que concluíram a primeira etapa do segundo ciclo da Educação de Jovens e Adultos com estes conteúdos. Na construção deste capítulo, tomamos como referência os livros de HEFEZ, Abramo. Aritmética. Rio de Janeiro: SBM, 2006 e de SANTOS, José Plínio de Oliveira. Introdução à Teoria dos Números. Rio de Janeiro: IMPA, 2011.

1.1 Divisibilidade

Considere o conjunto dos números inteiros,

$$Z = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}.$$

Definição 1.1.1 Dados dois números inteiros a e b, com $a \neq 0$, diz-se que a "divide" b, e escrevemos $a|b$, quando existir um inteiro k, tal que $b = k \cdot a$[1]. Neste caso, podemos dizer que a é um divisor ou um fator de b ou ainda que b é um múltiplo de a.

Como a divisão de um número inteiro por outro nem sempre é possível, expressamos essa possibilidade pela relação de divisibilidade. Quando essa relação não existir, ainda assim será possível efetuar uma "divisão com resto pequeno", a chamada divisão euclidiana.

Observe que a notação $a|b$ não representa nenhuma operação em $\mathbb{Z}$, nem representa uma fração. Trata-se de uma sentença que diz ser verdade a existência de um inteiro k, tal que $b = k \cdot a$. Denotaremos k também por b/a.

Proposição 1.1.1 Sejam a, b e c números inteiros. Se $a|b$ e $b|c$, então $a|c$.

[1] A expressão $k \cdot a$ também pode ser escrita como ka.

Demonstração: Se a é divisor de b então, existe um número natural k_1, tal que $b = ak_1$. Da mesma forma, se b é divisor de c, então existe um natural k_2, tal que $c = bk_2$. Substituído o valor de b, temos que $c = a \cdot k_1 \cdot k_2$. Portanto, $c = a \cdot (k_1 k_2)$. Ou seja, a é divisor de c.

Exemplo 1.1.1 $8|24$, pois $24 = 8 \cdot 3$. Por outro lado, $6 \nmid 10$, pois considerando o conjunto $M = 6k$, com $k \in Z$; $M = \{\cdots, -12, -6, 0, 6, 12, \cdots\}$, dos múltiplos de 6, vemos que 10 não pertence a ele.

Proposição 1.1.2 Sejam a, b, c, m e n números inteiros. Se $c|a$ e $c|b$ então $c|(ma + nb)$.

Demonstração: Se $c|a$ e $c|b$ então existem k_1 e $k_2$inteiros tais que $a = c \cdot k_1$ e $b = c \cdot k_2$. Multiplicando as duas equações por m e n, respectivamente, teremos $ma = mck_1$ e $nb = nck_2$. Somando as duas equações temos $ma + nb = (mk_1 + nk_2)c$. Portanto, $c|(ma + nb)$.

Teorema 1.1.1 A divisão possui as seguintes propriedades:

(i) $n|n$;

(ii) $d|n \implies ad|an$;

(iii) $ad|an$ e $a \neq 0 \implies d|n$;

(iv) $1|n$;

(v) $n|0$;

(vi) Se $d|n$ e $n \neq 0$ então $|d| \leq |n|$. (Todo divisor de n é menor ou igual a $|n|$);

(vii) Se $d|n$ e $n|d$, então $|d| = |n|$;

$(viii)$ $d|n$ e $d \neq 0 \implies (n/d)|n$

Demonstração:

(i) De fato, $n|n$ pois $n = 1.n$, inclusive para $n = 0$ (Propriedade reflexiva).

(ii) Se $d|n$ então $n = cd$ para algum inteiro c. Logo $an = cad$ o que conclui a demonstração.

(iii) Se $ad|an$ e $a \neq 0$ então existe k inteiro, tal que $an = adk$, e como $a|a$ temos que $n = dk$. Logo $d|n$.

(iv) De fato, $1|n$ pois $n = n.1$ para todo inteiro n.

(v) De fato, $n|0$ pois $0 = n.0$.

(vi) Se $d|n$ e $n \neq 0$, então existe um inteiro $q \neq 0$ tal que $n = d \cdot q$. Logo: $|n| = |d| \cdot |q|$, como $n \neq 0$, temos $q \neq 0$, logo $1 \leq |q|$ e, consequentemente, $|d| \leq |d| \cdot |q| = |n|$.

(vii) Suponhamos que $d|n$ e que $n|d$. Se $d = 0$ ou $n = 0$, temos que $d = n = 0$. No caso $d, n \neq 0$ temos que $|d| \leq |n|$ e $|n| \leq |d|$. Logo, $|n| = |d|$

$(viii)$ Se $d|n$ então $n = kd$ e, portanto, $k = n/d$ é um inteiro. Como $(n/d) \cdot d = n$ segue da definição que $(n/d)|n$.

Exemplo 1.1.2

i) $7|7$, pois $7 = 1 \cdot 7$.

ii) $2|8$ e $6 = 2 \cdot 3|8 \cdot 3 = 24$.

iii) $6|24$ e $3 \neq 0$, então $2|8$.

iv) $1|33$, pois $33 = 1 \cdot 33$

v) $7|0$, pois $0 = 7 \cdot 0$.

vi) $6|-12$ e $|6| \leq |-12|$

vii) $7|-7$ e $-7|7$ logo $|7| = |-7|$

viii) $12|24$ e $3|24$ (3 é divisor de 12)

1.2 O Algoritmo da Divisão de Euclides

O Algoritmo da Divisão de Euclides, também conhecido como a divisão euclidiana, é um dos assuntos mais difíceis de se ensinar nas turmas de EJA. É recorrente na primeira conversa informal que realizamos com os alunos, com o intuito de conhecer o repertório que possuem e preconceitos que têm em relação a disciplina, ouvir da maioria a afirmação de que odeiam matemática e não sabem nada a respeito dela. A minoria, no entanto, revela gostar da disciplina e afirma saber algumas coisas, mas confessa não saber dividir. Procuramos encorajá-los e desmistificar a divisão com uma afirmação que repetimos para eles: “Todos os alunos que passam da 1ª para a 2ª etapas da EJAEF (Educação de Jovens e Adultos do Ensino Fundamental) passam sabendo efetuar divisões. Uns com maior domínio, outros menos, mas todos irão aprender a dividir.”.

Incentivamos ao longo da etapa que sejam assíduos e participativos, enfatizando que na 1ª etapa da EJAEF o que será ensinado será o alicerce que servirá de fundamento para a continuidade dos estudos matemáticos para que a edificação futura seja forte e continue a crescer. A divisão é uma das camadas mais importantes desse fundamento, sem a qual não pode ser construído quase nada por cima.

Após transcorrer com os pré-requisitos para o estudo da Divisão que são: o estudo dos Números, dos Sistemas de Numeração e das operações iniciais (Adição, Subtração e Multiplicação), introduzimos o conteúdo da Divisão como a operação inversa da Multiplicação, a qual a maioria já compreende bem. Posteriormente, ampliamos o seu significado para uma operação entre dois números quaisquer, que sempre será possível ser efetuada, mesmo que sobre um resto "pequeno". Vamos observar, por exemplo, as divisões de 12 e 17 por 3.

$12 = 3 \cdot 4 + 0$

$17 = 3 \cdot 5 + 2$

Assim como nas outras operações, cada número dessas divisões recebe um nome específico. O 3 é o divisor de ambos os cálculos, o 12 e o 17 são os dividendos, o 0 e o 2 são os restos e os resultados da divisão chamados de quocientes são o 4 e o 5, respectivamente. Temos que a primeira conta é uma divisão exata, por ter resto zero, e a segunda, uma divisão não exata, por ter resto diferente de zero. E vemos ainda de forma clara nesses cálculos como a divisão está intimamente relacionada à Multiplicação.

Este processo é uma aplicação direta do Algoritmo da Divisão de Euclides apresentado em sua famosa obra Os Elementos (c. 300 a.C.), que é um dos mais antigos algoritmos que ainda é utilizado nos dias de hoje. Sobre Euclides de Alexandria, sabe-se que foi um professor, matemático platônico e escritor grego, muitas vezes referido como o "Pai da Geometria". Além de sua principal obra, Os Elementos, Euclides também escreveu sobre perspectivas, seções cônicas, geometria esférica, teoria dos números e rigor (BOYER. 2003). E sobre Os Elementos Boyer afirma:

> É uma das mais influentes na história da matemática, servindo como o principal livro para o ensino de matemática (especialmente geometria) desde a data da sua publicação até o fim do século XIX ou início do século XX. Nessa obra, os princípios do que é hoje chamado de geometria euclidiana foram deduzidos a partir de um pequeno conjunto de axiomas. A obra composta por treze volumes, sendo cinco sobre geometria plana, três sobre números, um sobre a teoria das proporções, um sobre incomensuráveis e três (os últimos) sobre geometria no espaço. Escrita em grego, a obra cobre toda a aritmética, a álgebra e a geometria conhecidas até então no mundo grego,

> reunindo o trabalho de predecessores de Euclides, como Hipócrates e Eudóxio. (BOYER. 2003).

O Algoritmo da Divisão de Euclides é encontrado em livros de Aritmética de diversos autores, mas para esta pesquisa tomei como referência os dois livros mais importantes para mim nessa área da Matemática: o livro de Plínio (2011), com o qual tive contato durante o período de graduação e que apresenta em seu primeiro capítulo uma explanação acerca do conteúdo da Divisibilidade; e o livro de Hefez (2013), ao qual fui apresentada durante o curso do PROFMAT e através do qual pude aprofundar meus conhecimentos em Aritmética. Segue o enunciado do Algoritmo de Euclides:

Teorema 1.2.1 Dados dois inteiros a e $b, b > 0$, existe um único par de inteiros q e r tais que $a = qb + r$, com $0 \leq r < b$ ($r = 0$ se, e somente se, $b|a$) (q é chamado de quociente e r de resto da divisão de a por b).

Demonstração: Primeiramente mostraremos a existência de q e r e, em seguida, mostraremos as unicidades. Temos duas situações possíveis, ou a é múltiplo de b ou a está situado entre dois múltiplos $b \cdot q$ e $b \cdot (q + 1)$, ou seja, $b \cdot q < a < b \cdot (q + 1)$, para algum inteiro q. Se a é múltiplo de b, então $a = b \cdot k$, e temos que $q = k$ e $r = 0$. Caso a não seja múltiplo de b, é fato que teremos,

$$b \cdot q < a < b \cdot (q + 1).$$

Nesta desigualdade podemos subtrair $b \cdot q$ de todos os membros, tendo assim,

$$0 < a - (b \cdot q) < b.$$

Tomemos,

$$a - (b \cdot q) = r \Rightarrow a = (b \cdot q) + r, \text{ com } 0 < r < b.$$

Segue que, quando $r = 0$, a é múltiplo de b.

Para provar a unicidade de q e r, suponhamos que existam outros inteiros r_0 e q_0 tais que,

$$a = b \cdot q_0 + r_0, \text{ com } 0 \leq r_0 < b.$$

Desta forma temos que,

$$a = b \cdot q + r = b \cdot q_0 + r_0 \Rightarrow (r - r_0) = (q - q_0) \cdot b.$$

Percebemos assim, que $(r - r_0)$ é um múltiplo de b e como $-b < r - r_0 < b$, o único valor possível é $r - r_0 = 0 \Rightarrow r = r_0$. Desta forma, $q = q_0$, provando assim, a unicidade.

Exemplo 1.2.1 Desenvolva a Divisão Euclidiana de 15 por 5.

Solução: Temos que, 15 = 5 · 3 + 0. Assim, 15 é múltiplo de 5.

Exemplo 1.2.2 Calcule a Divisão Euclidiana de -29 por 4.

Solução: Desse modo, temos que, -29 = 4 · (-8) + 3 e 0 < 3 < 4.

Assim, temos que o resto e o quociente da divisão -29 por 4, são 3 e -8 respectivamente.

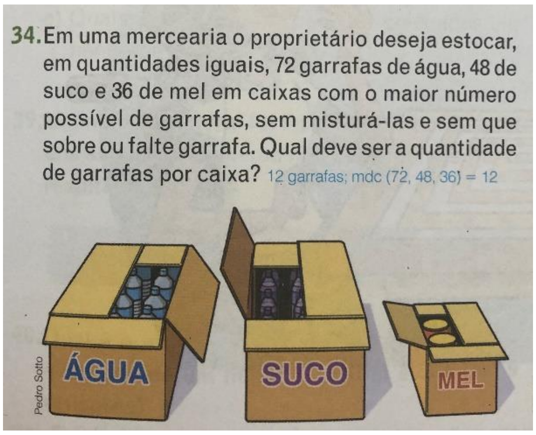
1.3 O Máximo Divisor Comum

Depois do estudo da Divisão Euclidiana e de uma série de aplicações e resoluções de problemas, prosseguimos com o estudo da Divisibilidade e as definições de Divisor e Múltiplo de um número. Através dos exercícios de divisão efetuados, com o intuito de verificar se um número é divisor de outro, por conseguinte, estimulamos os alunos a apreenderem os padrões que no seguimento da aprendizagem culminarão nos Critérios de Divisibilidade. É importante gradativamente ampliar os conceitos de divisor, depois de divisores comuns e por fim de máximo divisor comum gradativamente através de atividades nas quais os alunos consigam associar aos conceitos já existentes em sua estrutura cognitiva para que possam dar um significado real a esses conceitos. Dois exemplos desse tipo de atividades seriam:

Figura 2: Problema 1 MDC

Fonte: (SOUZA, 2012, p. 122)

Figura 1: Problema 2 MDC



Fonte: (ANDRINI, 2015, p. 107)

É mais difícil ainda em uma turma tão heterogênea como as turmas de EJA encontrar “ideias-âncora” para apresentar cada novo conteúdo, por isso é interessante diversificar e fazer uma análise prévia da turma, indagando, por exemplo, se trabalham ou já trabalharam; em caso afirmativo, indagar com o quê, investigar quais atividades praticam no dia a dia, quais seus interesses, etc. Obter e utilizar essas informações de forma adequada pode trazer benefícios tanto no âmbito de vinculação com a turma, uma vez que eles sentirão valorizados, quanto no escopo da aprendizagem. Momentos como esse, nos quais gastamos conhecendo os alunos com leveza e graça, sem, obviamente, perder o foco, faz diferença na continuidade e no compromisso que os alunos demonstrarão ao longo da etapa.

Na atividade da figura 2, o item proposto apresenta conceitos conhecidos e uma proposta de situação concreta a qual os alunos podem correlacionar, e inclusive esboçar o problema, um processo recomendado na hora de planejar a resolução de problemas. Após solucionar os problemas, é necessário continuar ampliando os conceitos.

Indicando por D(36), D(48) e D(72) o conjunto dos divisores de 36, de 48 e de 72, respectivamente, temos:

D(36) = {1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36}

D(48) = {1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48}

D(72) = {1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72}

Da lista acima, podemos concluir que D(36) ∩ D(48) ∩ D(72) = {1, 2, 3, 6, 12}, e que Máx [D(36) ∩ D(48) ∩ D(72)] = {12}, ou seja, 12 é o maior divisor comum de 36, 48 e 72. Portanto, 12 é o maior número de garrafas em cada caixa.

Formalmente teremos a seguinte definição de Máximo Divisor Comum.

Definição 1.3.1 O Máximo Divisor Comum de dois inteiros a e b, não simultaneamente nulos, denotado por (a, b), é o maior inteiro que divide a e b.

Euclides, no Livro VII dos Elementos, deu a seguinte definição, considerada um dos pilares da sua aritmética:

Diremos que d é um máximo divisor comum (mdc) de a e b se possuir as seguintes propriedades:

i) d é um divisor comum de a e de b, e

ii) d é divisível por todo divisor comum de a e de b.

A condição (ii) acima pode ser também enunciada como: “Se c é um divisor comum de a e b, então $c|d$”.

Assim, se d é um mdc de a e b, escrevemos $d = (a, b)$, e c é um divisor comum desses números, então $c \leq d$. Logo, o máximo divisor comum de dois números é efetivamente o maior dentre todos os divisores comum desses números, mostrando a equivalência entre as definições.

Teorema 1.3.1 Seja d o máximo divisor comum de a e b, então existem inteiros x e y tais que $d = ax + by$, ou seja, d é uma combinação linear de a e b. (Teorema de Bezout)

Demonstração: Seja $S = \{ax + by : x, y \in \mathbb{Z}\}$, o conjunto de todas as combinações lineares de a e b. Obviamente este conjunto contém números positivos, números negativos e o zero. Tomemos $d_0 = ax_0 + by_0$ o menor elemento positivo de S. Suponhamos, por absurdo que $n \nmid a$, então

$$a = d_0 q + r, 0 < r < d_0$$
$$\Rightarrow r = a - d_0 q = a - (ax_0 + by_0)q = a(1 - x_0 q) + b(-y_0 q)$$
$$\Rightarrow r \in S.$$

Absurdo! Pois $0 < r < d_0$ e d_0 é o menor elemento de S. Portanto $d\_0|a$ e, analogamente, $d_0|b$. Dessa forma d_0 é divisor comum de a e b. Resta mostrar que d_0 é o maior divisor comum de a e b, ou seja, que $d_0 = d$. De fato, se $d = (a, b)$, então

$$a = dq_1 \text{ e } b = dq_2$$
$$\Rightarrow d_0 = ax_0 + by_0 = (dq_1)x_0 + (dqq_2 2)y_0 = d(q_1 x_0 + q_2 y_0)$$
$$\Rightarrow d|d_0 \Rightarrow d \leq d_0.$$

Como d < d_0 não é possível, pois d é o maior divisor comum de a e b, concluímos que d = d_0.

Nesta demonstração, percebemos que não só o máximo divisor comum de a e b pode ser escrito como uma combinação linear desses números, mas que este mdc é o menor inteiro positivo dentre todas essas combinações lineares possíveis. Uma aplicação muito interessante desse teorema é o seguinte tipo de problema.

Exemplo 1.3.1 Em um determinado país existem apenas dois tipos de notas de dinheiro: \$5 e \$18. É possível pagar exatamente \$7 por alguma mercadoria? E se as notas fossem de \$6 e \$18?

Solução: Observemos que 2 × 18 − 7 × 5 = 1. Se multiplicarmos os dois lados da igualdade por 7 teremos que 14 × 18 − 49 × 5 = 7. Logo, para o primeiro item, basta darmos 14 notas de \$18 para recebermos 49 notas de \$ 5 como troco na compra da nossa mercadoria. Usando as notas de \$6 e \$18 não seria possível pagar \$7 pela mercadoria, pois, nesse caso 6|18 e, consequentemente, 6|6x + 18y quaisquer que sejam essas combinações lineares. Portanto, o dinheiro pago e recebido como troco por qualquer produto sempre é um múltiplo de 6 e 7 não é múltiplo de 6.

Teorema 1.3.2 O máximo divisor comum d de a e b é divisível por todo divisor comum de a e b. Ou ainda, se c é um divisor comum de a e b, então $c|d$.

Demonstração: Se c é um divisor comum de a e b, pelo teorema anterior, temos que $c|d$. E o teorema 1.1.1 (vii) nos diz que no caso de haver dois números positivos com a mesma propriedade, de ambos serem divisíveis por todos os divisores comuns de a e b, então esses números devem ser iguais.

Proposição 1.3.1 Quaisquer que sejam $a, b \in \mathbb{Z}$, não ambos nulos, e $n \in \mathbb{N}$, tem-se que $(na, nb) = n(a, b)$.

Demonstração: Basta lembrar que, pelo teorema 1.3.1 (na, nb) é o menor valor positivo de $nax + nby$ $(x \text{ e } y$ inteiros), que é igual a n vezes o menor valor positivo de $ax + by$ que é igual a $n(a, b)$.

Proposição 1.3.2 Sejam a, b ∈ $\mathbb{Z}$ e k ∈ $\mathbb{N}$ divisor de a e b, temos que $\left(\frac{a}{k}, \frac{b}{k}\right) = \frac{(a,b).}{k}$

Demonstração: Sabemos que k é um divisor natural de a e de b, logo $\frac{a}{k}$ e $\frac{b}{k}$ são números inteiros. Da Proposição 1.3.1, obtermos:

$$k\left(\frac{a}{k}, \frac{b}{k}\right) = \left(k\frac{a}{k}, k\frac{b}{k}\right) \Rightarrow k\left(\frac{a}{k}, \frac{b}{k}\right) = (a, b) \Rightarrow \left(\frac{a}{k}, \frac{b}{k}\right) = \frac{(a, b)}{k}.$$

Corolário 1.3.1 Se $(a, b) = d$, então $\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1$.

Demonstração: É só tomar k como o maior divisor comum na proposição anterior. Então

$$\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = \frac{1}{d}\,(a, b) = \frac{d}{d} = 1.$$

Exemplo 1.3.2 Se (20,25) = 5, então (4,5) =1.

Definição 1.3.2 Dois inteiros a e b são ditos números primos entre si (ou coprimos) quando (a, b) =1, ou seja 1 é o único divisor comum de a e b.

Teorema 1.3.3 Sejam $a, b, n \in \mathbb{Z}$ temos que $(a, b) = (a, b + na)$.

Demonstração: Seja $d = (a, b)$ e $d' = (a, b + na)$. Temos que $d = (a, b) \Rightarrow d|a, d|na \; e \; d|b \Rightarrow d|a \; e \; d|b + na$. Assim, d é um divisor comum de a e $b + na$, e como d' é o maior divisor comum, temos então $d' \geq d$. Por outro lado,

$$d' = (a, b + na) \Rightarrow d'|a \; e \; d'|b + na$$

$$\Rightarrow d'|a, d'|na \; e \; d'|b + na \Rightarrow d'|a \; e \; d'|b + na - na \Rightarrow d'|a \; e \; d'|b.$$

Assim d' é um divisor comum de a e b, e como d é o maior divisor comum, temos $d \geq d'$. Logo $d = d'$, como queríamos demonstrar.

Exemplo 1.3.3 $(2{,}4) = (2, 4 + 2 \times 2) = (2, 4 + 3 \times 2) = (2, 4 + 4 \times 2) = \ldots = 2$

Teorema 1.3.4 Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Se $a|bc$ e $(a, b) = 1$, então $a|c$. (Lema de Gauss)

Demonstração: Se $a|bc$ então existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $bc = ak$. Se $(a, b) = 1$, então, pelo Teorema 1.3.1 temos que existem $m, n \in \mathbb{Z}$ tais que $ma + nb = 1$. Multiplicando-se os dois lados desta igualdade por c, temos que c = mac + nbc. Substituindo bc por ak nesta última igualdade, temos que

$$c = mac + nak = a(mc + nk)$$

e, portanto, $a|c$.

Exemplo 1.3.4 $6|(5 \times 12)$ e, como $(6{,}5) = 1$, então $6|12$.

Teorema 1.3.5 Sejam $a, b, q, r \in \mathbb{Z}$. Se $a = qb + r$, então $(a, b) = (b, r)$.

Demonstração: Da igualdade $a = qb + r$ e da Proposição 1.1.2 podemos inferir que todo divisor de b e r é um divisor de a. Escrevendo $r =$

$a - qb$, percebemos que todo divisor de a e b é também um divisor de r. Portanto o conjunto dos divisores comuns de a e b é igual ao conjunto dos divisores comuns de b e r, o que nos garante que $(a, b) = (b, r)$.

O teorema acima apesar de apresentar um resultado rudimentar, é de muita importância na demonstração do Teorema 1.3.6, mais conhecido como **Algoritmo de Euclides**. Ele representa uma prova da existência do mdc dada por Euclides no volume VII de seu livro Os Elementos cerca de 300 a. C.. "O método, chamado *Algoritmo de Euclides*, é um primor do ponto de vista computacional e pouco conseguiu-se aperfeiçoá-lo em mais de dois milênios" (HEFEZ, 2006, p.56).

Teorema 1.3.6 Sejam $r_0 = a$ e $r_1 = b$ inteiros não-negativos com $b \neq 0$. Se o algoritmo da divisão for aplicado sucessivamente para se obter $r_j = q_{j+1}r_{j+1} + r_{j+2}, 0 \leq r_{j+2} < r_{j+1}$ para $j = 0,1,2,\ldots, n-1$ e $r_{n+1} = 0$ então $(a, b) = r_n$, o último resto não nulo.

Demonstração: Inicialmente iremos aplicar o algoritmo da divisão para dividir $r_0 = a$ por $r_1 = b$ obtendo $r_0 = q_1r_1 + r_2$. Em seguida dividimos r_1 por r_2 obtendo $r_1 = q_2r_2 + r_3$ e assim, sucessivamente até a obtenção de $r_{n+1} = 0$. Isto acontecerá, pois, a sequência de números naturais $a = r_0 > r_1 > r_2 > \cdots$ pelo Princípio da Boa Ordem possui um menor elemento. Logo, após um número finito de aplicações do Teorema 1.2.1, teremos um resto nulo. Segue que para algum n, temos que $r_n | r_{n-1}$, o que implica que $(a, b) = r_n$ (Teorema 1.3.5).

Exemplo 1.3.5 Calcule o mdc de 180 e 96.

180 = 1 x 96 + 84

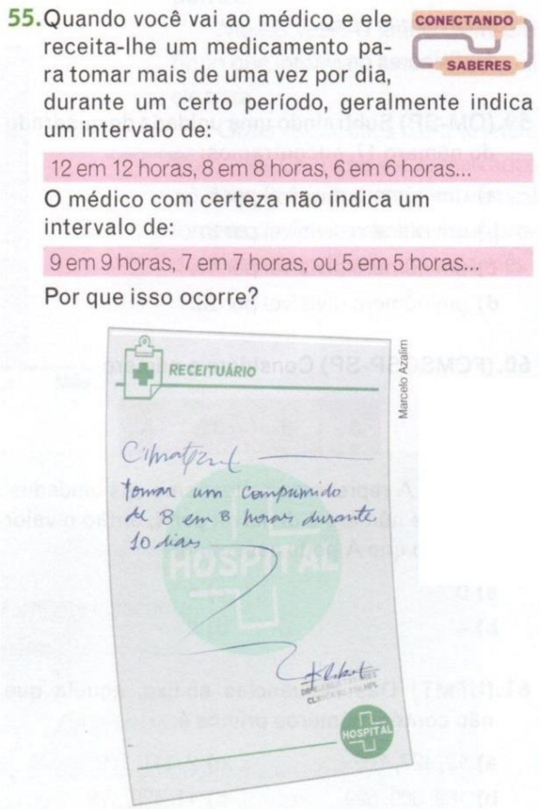
96 = 1 x 84 + 12 $\Leftarrow$ 12 é o mdc de 180 e 96.

84 = 7 x 12 + **0**

1.4 O Mínimo Múltiplo Comum

Este é outro conteúdo fundamental e cheio de aplicações para se trabalhar com os jovens e adultos. Mais importante do que decorar uma fórmula para calcular o mmc de dois ou mais números é ter uma aprendizagem real através da resolução de problemas com a empregabilidade desse conceito.

Figura 3: Problema 1 MMC


55. Quando você vai ao médico e ele receita-lhe um medicamento para tomar mais de uma vez por dia, durante um certo período, geralmente indica um intervalo de:

12 em 12 horas, 8 em 8 horas, 6 em 6 horas...

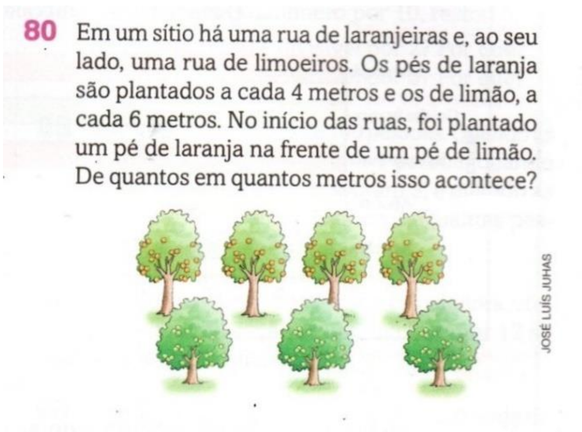
O médico com certeza não indica um intervalo de:

9 em 9 horas, 7 em 7 horas, ou 5 em 5 horas...

Por que isso ocorre?

Fonte: (Andrini, 2015, p. 111)

Figura 4: Problema 2 MMC


80 Em um sítio há uma rua de laranjeiras e, ao seu lado, uma rua de limoeiros. Os pés de laranja são plantados a cada 4 metros e os de limão, a cada 6 metros. No início das ruas, foi plantado um pé de laranja na frente de um pé de limão. De quantos em quantos metros isso acontece?

Fonte: (Bianchini, 2011, p. 115)

Iniciar cada aula com um problema familiar ao aluno, que posteriormente será relacionado ao conteúdo, é uma das estratégias que facilitará essa aprendizagem. Dois exemplos para o conteúdo de mínimo múltiplo comum utilizados com os alunos que posteriormente participariam dessa pesquisa foram:

Esses problemas apresentam situações familiares que permitirão uma conexão de elementos já existentes na estrutura cognitiva do aprendiz com o novo conceito que está sendo ensinado. Além disso, quando apresentados no início das aulas, os problemas estimulam o pensamento e o raciocínio dos alunos (BRASIL, 2002).

Na figura 3, alguns alunos são contemplados ao acessar o conhecimento prévio. Muitos adultos, pais e mães, filhos e filhas, lidam com o uso de medicamentos no seu dia a dia e não entendem essa relação com os horários dos remédios e as 24 horas do dia (alguns inclusive desconhecem que o dia tem 24 horas).

Na figura 4, os alunos retomam a ideia dos múltiplos de um número com a proposta da questão ao salientar o distanciamento das árvores. O primeiro pé de laranja está no início que seria o “0 metro”, a segunda “nos 4 metros”, a próxima “nos 8 metros”, depois “nos 12 metros” (raciocínio dos alunos), e assim por diante. O pé de limão também começa no 0, o próximo em 6 metros, depois em 12 metros. Não demora muito e eles já identificam o primeiro múltiplo comum, mas será que tem mais? Facilmente eles descobrem que sim. Apenas após essa descoberta o conteúdo formal é apresentado e interligado ao saber já existente no aluno.

Esses problemas simples permitem diversas reflexões, inclusive sobre a importância da Matemática nas muitas áreas da vida. Contudo, itens como esses são trazidos apenas no final dos livros didáticos, após uma gama de exercícios mecânicos anteriores e definições distanciadas da realidade.

Cabe ao professor, especialmente ao professor de EJA, reverter essa ordem aproveitando melhor o tempo para estimular e valorizar a estrutura de conhecimento tão repleta de informações dos seus alunos.

Para a definição formal de Mínimo Múltiplo Comum, tomaremos como base o livro de Abramo Hefez.

Primeiro chamaremos de **múltiplo comum** de dois números naturais a qualquer número que seja múltiplo de ambos os números simultaneamente. O número ab sempre é um múltiplo comum de a e de b.

Definição 1.4.1 Sejam a e b inteiros positivos. Diremos que um número $m \geq 0$ é o mínimo múltiplo comum (mmc) de a e b se m é o menor inteiro positivo que é divisível por a e por b.

Exemplo 1.4.1 O número 30 é um múltiplo comum de 3 e 5, mas não é o mmc desses números, pois 15 < 30 é divisível por 3 e por 5. Como 15 é o menor inteiro positivo nessa condição, 15 é o mmc de 3 e 5.

Do exemplo e da definição acima, inferimos que se c é um múltiplo comum de a e b, temos que $m|c$, e, portanto, $m \leq c$. Isso nos diz que o mínimo múltiplo comum, se existe, ele é único.

Denotamos por $[a, b]$ o mínimo múltiplo comum de a e b.

Proposição 1.4.1 Sejam a e b inteiros positivos. Temos que $[a, b]$ existe e $[a, b](a, b) = ab$.

Demonstração: Ponhamos m = $[a, b]$ e d = (a, b).

Escrevendo $m = \dfrac{ab}{(a,b)} = \dfrac{ab}{d}$, temos que $a|m$ e $b|m$ (pois $m = ak_1$ e $m = bk_2$, $k_1 e\ k_2 \in \mathbb{Z}$).

Seja c um múltiplo comum de a e b. Então, $c = n_1 a = n_2 b$. Daí:

$$n_1 \frac{a}{d} = n_2 \frac{b}{d}$$

Como pelo Corolário 1.3.1 $\dfrac{a}{d}$ e $\dfrac{b}{d}$ são primos entre si, segue do Teorema 1.3.4 que $\dfrac{a}{d}|n_2$, e, portanto,

$$n_2 = \frac{a}{d}k \Rightarrow c = \frac{a}{d}kb \geq \frac{a}{d}b = m.$$

A Proposição acima nos mostra que, sabendo o mdc de dois números, basta dividir o produto desses números pelo mdc para obtermos o respectivo mmc. E ainda, como consequência desse fato, temos que se dois números são primos entre si o mmc desses números é igual ao seu produto.

Exemplo 1.4.2

a) $(5,8) = 1 \Rightarrow [5,8] = 5 \times 8 = 40$

b) $(12,18) = 6 \Rightarrow [12,18] = \frac{12 \times 18}{6} = 36$

Esse estudo pode ser ainda bastante ampliado, afinal existem outras formas de se calcular o mmc e o mdc de dois ou mais números. Mas essa abordagem de relacionar os dois conteúdos, além de ser bastante interessante para o aluno, minimiza as constantes confusões entre esses dois importantes elementos da Matemática.

1.5 Critérios de Divisibilidade

Os critérios de divisibilidade são apresentados no currículo escolar do ensino fundamental como um conjunto de regras para se memorizar e aplicar de maneira direta, regras que não podem ser descartadas por serem muito úteis na resolução de problemas. Mas será que existe uma melhor maneira de transmitir esses conceitos para os alunos?

Acreditamos que, em vez de entregar os critérios prontos, os professores deveriam provocar os alunos a elaborar conceitos a partir de situações problema adequadas, pois assim serão estimulados ao desenvolvimento do pensamento analítico. Estes terão maiores chances de, diante de outros problemas da vida, lembrar-se do critério outrora descoberto por ele para utilizá-lo quando convier.

Problemas como os dos exemplos abaixo promovem um raciocínio lógico dedutivo e levam o estudante a ir além dos resultados, a especular sobre outros possíveis critérios não apresentados.

Problema 1: Comprei um pacote com 378 canetas e quero montar kits escolares com 5 canetas cada, de forma que não sobre nem falte nenhuma caneta. Isso será possível?

Grande parte dos alunos não demora a perceber essa impossibilidade. O importante é deixá-los concluir sozinhos o porquê que 378 não é divisível por 5, sem precisar efetuar essa divisão. Eles vão dando respostas interessantes que se aproximam do conceito matemático já estabelecido, mas com um esforço mental para formular a resposta mais adequada que possa ser usada para convencer a outros. Desse mesmo problema podemos variar o número de canetas em cada kit escolar e eles vão descobrindo novos critérios.

Problema 2: Ana esqueceu o último algarismo da senha do seu celular. Ela sabe apenas que a senha é o triplo do número da senha anterior, que ela também não se lembra. Sua filha, para ajudá-la, diz que então a senha é um múltiplo de 3. Quais algarismos Ana deve colocar no último dígito, sabendo que ela só tem três tentativas para não bloquear o celular?

3	7	0	_

Esse problema, mais desafiador para que eles elaborem um critério de divisibilidade por 3 sozinhos, que é um dos menos perceptíveis, levou mais tempo e foi necessária ajuda para mudar o foco deles de observar apenas o término dos números para outras características comuns dos múltiplos de um número. Os múltiplos de 3 tem como soma dos algarismos sempre um múltiplo de 3. Se a soma dos três primeiros algarismos é 10, o último algarismo só pode ser 2, 5 ou 8.

Para estabelecer um critério de divisibilidade por n, a ideia é descobrir uma expressão mais simples em termos de dígitos utilizando o sistema decimal. Assim, se n é um número natural, então existem um número natural r (único) e algarismos $a_0, a_1, \dots, a_r, 0 \leq a_i \leq 9$ (também únicos) tais que:

$$n = a_r \cdot 10^r + a_{r-1} \cdot 10^{r-1} + \cdots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0$$

Podemos então escrever

$$n = (a_r \cdot 10^{r-1} + a_{r-1} \cdot 10^{r-2} + \cdots + a_2 \cdot 10 + a_1)10 + a_0,$$

onde a_0 é o algarismo da unidade de n. Reciprocamente, se n é da forma $n = 10m + a_0$, onde a_0 é um dos algarismos de 0 a 9, então a_0 é o algarismo da unidade de n.

1.5.1 Divisibilidade por 2, 5 e 10

Exemplo 1.5.1 Verifique se 1968 e 70707 são divisíveis por 2.

Solução:

$$\begin{aligned} 1968 &= 1 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10 + 8 = 10\,(10^2 + 9 \cdot 10 + 6) + 8 \\ &= 10k + 8 \end{aligned}$$

Como 10 é divisível por 2 e 8 é divisível por 2, então, pela Proposição 1.1.2, 1968 também é.

$$\begin{aligned} 70707 &= 7 \cdot 10^4 + 0 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10 + 7 = 10\,(7 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10) + 7 \\ &= 10k + 7 \end{aligned}$$

Temos agora que 10 é divisível por 2 mas 7 não é, logo 70707 não é divisível por 2.

Para fazer a generalização do resultado acima, consideremos n um número natural na base 10,

$$n = a_r \cdot 10^r + a_{r-1} \cdot 10^{r-1} + \cdots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0.$$

Podemos reescrever n na forma $n = 10m + a_0$, com $m \in \mathbb{N}$.

Como 10 é divisível por 2, então n será divisível por 2 se, e somente se, a_0 for divisível por 2. Como a_0 é um algarismo, a_0 será divisível por 2 se, e somente se, $a_0 = 0, 2{,}4{,}6$ ou 8.

Um número natural n é divisível por 2 se, e somente se, terminar em 0, ou 2, ou 4, ou 6, ou 8. Isso ocorre se n for par.

Observação: Para obter o critério de divisibilidade por 5 e por 10 usamos o mesmo argumento apresentado acima, basta substituir 2 por 5 ou por 10. Concluímos o seguinte:

Um número natural n é divisível por 5 se, e somente se, terminar em 0 ou em 5.

E ainda que:

Um número natural n é divisível por 10 se, e somente se, terminar em 0.

1.5.2 Divisibilidade por 3 e 9

Exemplo 1.5.2 Verifique se 1968 e 70007 são divisíveis por 3.

Solução:

$$
\begin{aligned}
1968 &= 1 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10 + 8 \\
&= 1 \cdot (999 + 1) + 9 \cdot (99 + 1) + 6 \cdot (9 + 1) + 8 \\
&= (999 \cdot 1 + 99 \cdot 9 + 9 \cdot 6) + (1 + 9 + 6 + 8) \\
&= 9(111 \cdot 1 + 11 \cdot 9 + 1 \cdot 6) + 24
\end{aligned}
$$

Como 9 é divisível por 3 e 24 é divisível por 3 então, de acordo com a Proposição 1.1.2, 1968 também é.

$$
\begin{aligned}
70007 &= 7 \cdot 10^4 + 0 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10 + 7 \\
&= 7 \cdot (9999 + 1) + 7 \\
&= (9999 \cdot 7) + (7 + 7) \\
&= 9(1111 \cdot 7) + 14
\end{aligned}
$$

Temos que 9 é divisível por 3 mas 14 não é, logo, 70007 não é divisível por 3.

Vamos generalizar o resultado para um número natural $n = a_r \ldots a_2 a_1 a_0$.

$$n = a_r \cdot 10^r + a_{r-1} \cdot 10^{r-1} + \cdots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0$$
$$= a_r(999 \ldots 9 + 1) + \cdots + a_2(99 + 1) + a_1(9 + 1) + a_0$$
$$= (999 \ldots 9a_r + \cdots + 99a_2 + 9a_1) + (a_r + \cdots + a_2 + a_1 + a_0)$$
$$= 9(111 \ldots 1a_r + \cdots + 11a_2 + a_1) + (a_r + \cdots + a_2 + a_1 + a_0)$$

Como 9 é divisível por 3, pela Proposição 1.1.2, n só será divisível por 3 se $a_r + \cdots + a_2 + a_1 + a_0$ for divisível por 3. Percebemos assim, que um número é divisível por 3, se a soma de seus algarismos for um número divisível por 3.

Um número natural n é divisível por 3 se, e somente se, a soma de seus algarismos for divisível por 3.

Observação: O critério de divisibilidade por 9 decorre do mesmo sentido, basta substituir 3 por 9 no argumento acima. Concluímos que:

Um número natural n é divisível por 9 se, e somente se, a soma de seus algarismos for divisível por 9.

1.5.2 Divisibilidade por 4

Exemplo 1.5.2 Verifique se 1968 e 70707 são divisíveis por 4.

Solução:

$$1968 \;=\; 1 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10 + 8 = 100\,(10 + 9) + 68 = 100k + 68$$

Como 100 é divisível por 4 e 68 é divisível por 4, então, pela Proposição 1.1.2, 1968 também é.

$$70707 \;= 7 \cdot 10^4 + \; 0 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10 + 7 = 100\,(7 \cdot 10^2 + 7) + 7$$
$$= 100k + 7$$

Temos agora que 100 é divisível por 4 mas 7 não é, logo 70707 não é divisível por 4.

Generalizando o resultado acima, consideremos como n um número natural na base 10, $n = a_r \ldots a_2 a_1 a_0$. Sua forma estendida na base 10 é:

$$n = a_r \cdot 10^r + a_{r-1} \cdot 10^{r-1} + \cdots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0$$

Podemos reescrever n na forma $n = 100 \cdot k + 10a_1 + a_0$, com $k \in \mathbb{N}$.

Como 100 é divisível por 4, então n será divisível por 4 se, e somente se, $10a_1 + a_0$ for divisível por 4. Mas $10a_1 + a_0 = a_1 a_0$, ou seja, o número cujo algarismo das unidades é a_0 e o das dezenas é a_1. Com isso, n será divisível por 4 se, e somente se, o número formado por seus dois últimos algarismos for divisível por 4.

Um número natural n é divisível por 4 se, e somente se, termina em 00 ou o número formado por seus dois últimos algarismos for divisível por 4.

Existem muitos outros critérios de divisibilidade que não citaremos aqui, principalmente por não terem sido trabalhados com os alunos da EJA. Mas ficaram como sugestão de pesquisa para os alunos que tinham interesse em expandir esse conhecimento.

Devemos ter em mente que o calendário e os horários nesta modalidade de ensino são bastante reduzidos em comparação ao ensino regular. Porém, apesar de a maioria dos alunos só terem aquele momento de aula para estudar, existem alguns que tem tempo e disposição maiores, que podem e devem ser direcionados por nós para buscar ampliar seus conhecimentos além do ambiente escolar.

CAPÍTULO 2

CONFIGURAÇÃO DA PESQUISA

Neste capítulo, apresentamos a configuração da nossa pesquisa, as nossas escolhas e justificativas e iniciamos com o percurso que antecedeu a escolha pelo mestrado profissional em Matemática e as motivações para a escolha do tema. Por conseguinte, introduzimos a Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel como fundamentação para o nosso estudo. Em seguida, apresentamos a questão de pesquisa, os objetivos, e, por último, os procedimentos metodológicos.

2.1 Antecedentes e motivações[2]

Iniciei este curso de mestrado com o objetivo principal de melhorar a minha prática profissional, além de buscar novas possibilidades e desafios para minha carreira docente. Decidi aproveitar experiências em sala de aula, bem e malsucedidas, para fomentar pesquisas e produzir material de apoio para as minhas aulas de modo que pudessem ser utilizados/adaptados por outros professores de Matemática que, como eu, buscam alternativas viáveis para aumentar a eficiência do ensino-aprendizagem. Sobre as experiências malsucedidas ou "fracassos", gosto de pensar como Andrew Carnegie, que disse a Napoleon Hill "... você aprenderá muito mais como ser bem-sucedido a partir dos fracassos do que com o tão chamado 'sucesso'. Eles lhe ensinarão o que não fazer" (Napoleon Hill, 2014, p.11).

Imagino que todo professor, principalmente no início de sua carreira, muito empolgado e cheio de teorias fresquinhas na ponta da língua, se depara com experiências de fracasso na hora de pôr em prática seus planos de ensino. São muitas variáveis a considerar, muitas coisas que podem dar errado no meio do processo e que normalmente dão. Só com o passar do tempo e, infelizmente,

[2] Neste item optou-se por utilizar a primeira pessoa do singular para retratar experiências vividas pela mestranda e suas expectativas em relação a sua formação e atuação profissional.

depois de algumas experiências ruins é que o professor passa a ter aquele "*feeling*" de para qual público, em qual momento e de que jeito ele pode pôr em prática determinado projeto.

Foi no ano de 2007, enquanto ainda era estudante do curso de Licenciatura em Matemática na Universidade Federal de Sergipe, que tive meu primeiro contato com a Educação de Jovens e Adultos. Foi um contrato com o governo do estado de Sergipe e minha primeira experiência assumindo integralmente uma sala de aula com toda a responsabilidade adjacente. Não é difícil imaginar que essa inexperiente professora de apenas 20 anos, mesmo se esforçando e cheia das melhores intenções, cometeu inúmeros erros.

Um dos erros cometidos, também muito comum entre alguns colegas, foi o de desconsiderar a especificidade do público-alvo e tratá-lo como uma turma comum do ensino regular: como se todos fossem de uma mesma faixa etária, com os mesmos objetivos, com os pré-requisitos necessários para estar naquela série, entre outros.

Procurei utilizar uma linguagem precisa e rebuscada, a qual vinha aperfeiçoando na Universidade, acreditando que o ensino deveria ser o meu foco principal e a aprendizagem seria uma consequência imediata. Também cometi o erro de não ouvir os alunos, falando o tempo todo para que não houvesse espaço para que eles conversassem e "atrapalhassem" a aula.

Ainda acreditava que minhas aulas eram maravilhosas, muito bem explicadas, com os alunos bem quietos me olhando. E qual não foi a minha surpresa quando, ao corrigir as primeiras provas (do meu fracasso), me deparei com muitas notas zero.

Para tentar remediar e encobrir meus erros, recorri a dois caminhos desonrosos, mas infelizmente comuns a colegas de profissão. O primeiro foi culpar os alunos, seus professores anteriores, seus pais, a escola, o sistema, ou seja, a todos menos a mim. E o segundo, passar "trabalhos" onde basicamente eles só precisavam copiar, sem aprender nada, mas teriam notas suficientes para serem aprovados e atingirem o objetivo da maioria, a "conclusão dos estudos", de modo a me livrar, aparentemente, da temida imagem de uma péssima professora diante deles e da equipe diretiva da instituição de ensino.

E assim, semestre após semestre, eu fui prejudicando muitos jovens e adultos que tiveram a infelicidade de serem meus alunos naquela época da minha vida. Fui enchendo-os de conteúdos pouco significativos, os quais eu retirava dos livros didáticos do Ensino Regular, selecionando os que eu considerava mais importante para que eles tivessem chance de ingressar em uma universidade ou serem aprovados num concurso público (esse era o objetivo que eu definia para eles e usava a fim de incentivá-los). Alguns poucos alunos, mais por méritos próprios, realmente conseguiram aprender e atingiram esses objetivos, mas a maioria conseguiu seu certificado de conclusão do Ensino Médio sem nenhum domínio básico da Matemática e de outras disciplinas.

Foi no ano de 2011 que, felizmente, eu fiz uma das melhores escolhas da minha vida profissional e decidi cursar uma pós-graduação em Educação Matemática. A partir dessa formação, fui me constituindo uma *educadora matemática*, cujo enfoque deixou de ser o conteúdo em si e passou a ser a formação integral do meu aluno para a qual o conhecimento matemático agora é um instrumento ou um meio para um objetivo maior.

Encantei-me no meu primeiro contato com as tendências metodológicas: Etnomatemática, Modelagem Matemática, Mídias Tecnológicas, História da Matemática, Investigação Matemática e Resolução de Problemas. Imediatamente apliquei toda aquela nova aprendizagem em minhas turmas de Ensino Fundamental e Médio regulares de uma escola particular, a qual trabalhava com Pedagogia de Projetos e dava todo um suporte tecnológico e de recursos diversos para a minha prática educacional.

Foram três anos longe da EJA, mas melhorando meus conhecimentos e minha prática pedagógica no Ensino Regular, o que cooperou para ser aprovada em um concurso público e voltar para a rede estadual em janeiro de 2013, novamente para trabalhar na Educação de Jovens e Adultos do Ensino Fundamental, dessa vez como professora efetiva e com uma visão totalmente diferente da anterior.

Ao perceber que os jovens e adultos seriam o meu público principal de atuação profissional, comecei a ler e pesquisar artigos, trabalhos acadêmicos, matérias de revistas e o que mais pudesse encontrar sobre a EJA. Qual a melhor maneira de abordar os alunos? Como resgatar sua autoestima? Como tratá-los nas suas diferenças, garantindo uma aprendizagem melhor para todos? Que tipo de questões? Qual a melhor linguagem? Busquei e experimentei de tudo para verdadeiramente fazer uma diferença positiva naquelas vidas já muito prejudicadas que estavam ali comigo todas as noites e esperavam tanto de mim.

Percebi ao aplicar essas teorias que algumas eram impraticáveis na atual realidade, mas poderiam ser ajustadas para uma experiência futura. Pude comprovar que algo que tinha muito sucesso em um semestre já não surtia o mesmo efeito no período seguinte e vice-versa. Aprendi ainda que nada funcionava para todos, então era preciso variar o máximo possível as abordagens para conseguir um alcance máximo da aprendizagem.

A culminância dessas pesquisas e experiências, a princípio bastante pessoais e informais, contribuíram para essa dissertação de mestrado que retrata não só uma prática pedagógica voltada especialmente para os jovens e adultos, mas também tenta transmitir para outros o que aprendi ao longo desses anos que foi valorizar e defender essa importantíssima modalidade de ensino que é a EJA.

2.2 Nossas escolhas

À procura de uma fundamentação teórica para estruturar o presente trabalho, nos deparamos com a Teoria da Aprendizagem Significativa de David Paul Ausubel. Em meio a uma pesquisa sobre teorias da aprendizagem como a comportamentalista (behaviorismo), a humanista e a cognitivista (construtivismo), uma frase de Ausubel capturou nossa atenção:

> O fator isolado mais importante que influencia a aprendizagem é aquilo que o aprendiz já conhece. Descubra o que ele sabe e baseie nisso os seus ensinamentos. (AUSUBEL; NOVAK; HANESIAN, 1980)

Sabemos como o conhecimento prévio dos alunos da EJA é riquíssimo. São experiências múltiplas, que precisam ser consideradas e valorizadas no processo de ensino aprendizagem. Segundo a Proposta Curricular (PC) para a Educação de Jovens e Adultos:

> Em qualquer aprendizagem, a aquisição de novos conhecimentos deve considerar os conhecimentos prévios dos alunos. Em relação aos jovens adultos, no entanto, é primordial partir dos conceitos decorrentes de suas vivências, suas interações sociais e sua experiência pessoal: como detêm conhecimentos amplos e diversificados, podem enriquecer a abordagem escolar, formulando questionamentos, confrontando possibilidades, propondo alternativas a serem consideradas.... Esse conhecimento reclama um tratamento respeitoso e deve constituir o ponto de partida para o ensino e a

> aprendizagem da Matemática. Por isso, os alunos devem ter oportunidades de contar suas histórias de vida, expor os conhecimentos informais que têm sobre os assuntos, suas necessidades cotidianas, suas expectativas em relação à escola e às aprendizagens em Matemática (BRASIL, 2007, p. 15).

A frase de Ausubel mencionada acima condiz exatamente com os anseios da Educação de Jovens e Adultos descritos nesta última citação. A Teoria da Aprendizagem Significativa (TAS) mostrou-se totalmente coerente com o ensino de Matemática voltado para o nosso público-alvo. Uma característica marcante desta disciplina, mais que em qualquer outra, é que se o estudante não detém os conhecimentos prévios necessários, dificilmente fará progressos na mesma.

Reconhecer tais pré-requisitos, identificar o que o aluno sabe deles e, a partir daí, desenvolver estratégias para ensinar o novo conteúdo constitui algo perfeitamente condizente com a realidade na qual a pesquisadora se encontra inserida.

Aliada à teoria de Ausubel, utilizaremos a resolução de problemas como ferramenta para otimizar essa aprendizagem. Sobre essa metodologia, a PC para a EJA orienta que:

> (...) um dos caminhos para "fazer matemática em sala de aula de jovens e adultos" é a resolução de problemas. Consideram-se como problema situações que demandam a realização de uma sequência de ações ou operações para obter um resultado; ou seja, situações em que a solução não está disponível de início, mas é necessário e possível construí-la. (BRASIL, 2007, p. 27)

Acreditamos, portanto, que essas teorias combinadas em sequências didáticas possibilitarão uma experiência de aprendizagem mais eficiente aos alunos da EJA. Sobre elas, teremos a oportunidade de nos aprofundar mais no Capítulo 4.

2.3 Procedimentos Metodológicos

O objetivo de nosso estudo será investigar as potencialidades de uma atividade sobre Divisibilidade para promoção de uma aprendizagem efetiva de estudantes da EJA.

Para alcançar esse objetivo, nos propusemos a buscar resposta para a seguinte questão: *Que aspectos precisam ser contemplados em uma atividade envolvendo divisibilidade em uma turma de EJA, para que esta seja potencialmente significativa?*

Para viabilizar a realização da nossa pesquisa, escolhemos uma turma de jovens e adultos da 1ª etapa da Educação de Jovens e Adultos do Ensino Fundamental – EJAEF – do Colégio Estadual Olavo Bilac na cidade de Aracaju/SE.

O trabalho realizado apresenta um caráter qualitativo e, por ter sido realizada no próprio ambiente dos sujeitos da pesquisa, trata-se de uma pesquisa de campo. De acordo com Fiorentini e Lorenzato (2012), a pesquisa naturalista ou de campo:

> [...] é aquela modalidade de investigação na qual a coleta de dados é realizada diretamente no local em que o problema ou fenômeno acontece e pode se dar por amostragem, entrevista, observação participante, pesquisa–ação, aplicação de questionário, teste, entre outros. (FIORENTINI E LORENZATO, 2012, p. 106).

No nosso caso, em que desejamos promover uma mudança no ambiente estudado com uma "melhoria das práticas e maior liberdade de ação e de aprendizagem dos participantes" (FIORENTINI E LORENZATO, 2012, p. 112), temos então características de uma pesquisa-ação.

Caminham juntas nesse processo a prática investigativa, a prática reflexiva e a prática educativa. Sobre esta última, Fiorentini e Lorenzato (2012) acrescentam que "a prática educativa, ao ser investigada, produz compreensões e orientações que são imediatamente utilizadas em sua própria transformação, gerando novas situações de investigação" (FIORENTINI E LORENZATO, 2012, p. 113).

Foi utilizada uma abordagem fenomenológico-hermenêutica, que busca a essência dos fenômenos, suas causas e significados e não uma aparente magnitude dos fatos (Fiorentini e Lorenzato, 2012).

Não iremos aqui, portanto, nos deter a contabilizar erros e acertos dos alunos, mas buscaremos ir além do certo e errado. Procuraremos analisar as formas como os alunos resolvem problemas, os conhecimentos mobilizados, as estratégias e como os sujeitos percebem suas dificuldades perante os problemas propostos.

Para a realização da pesquisa, os instrumentos de coletas de dados foram dois questionários envolvendo conteúdos relativos à Divisibilidade. No primeiro constavam apenas exercícios diretos de mmc e mdc e, no segundo, problemas escolhidos especificamente que se relacionavam ao conteúdo já aprendido, envolvendo situações familiares aos alunos.

2.3.1 Aplicação da atividade de pesquisa

Previamente houve uma conversa com os alunos sobre a participação da turma na pesquisa, os objetivos e a forma como se daria seu desenvolvimento. A princípio, todos concordaram em participar, mas nos dias da pesquisa duas alunas e um aluno, que frequentavam esporadicamente, não compareceram e, no segundo dia, um grupo de alunas deixou a sala sem responder ao segundo questionário.

No início de cada aula de todo o conteúdo de Divisibilidade (Múltiplos e Divisores, Os Múltiplos de um Número, Os Divisores de um Número, Critérios de Divisibilidade, Números Primos, Decomposição em Fatores Primos, O Máximo Divisor Comum, O Mínimo Múltiplo Comum) os alunos foram desafiados a pensar sobre um determinado problema que eles, provavelmente, se deparavam no seu dia a dia e que se relacionava com o conteúdo a ser posteriormente ensinado. Dessa forma, os estudantes conseguiam fazer uma ligação direta de algo que já estava em sua estrutura cognitiva com algo novo, que seria o conceito apresentado.

Além disso, ao final de cada aula os alunos deveriam elaborar um problema que utilizasse aquele conteúdo para avaliar a capacidade de empregar o novo conhecimento em alguma situação.

A aplicação dos questionários aconteceu nos dias 25 e 26 de novembro, em dois encontros com duração de duas horas/aula cada, logo após o término dessa sequência de aulas sobre Divisibilidade com a aplicação de dois questionários, de naturezas diferentes, um a cada dia.

Os alunos foram organizados em grupos escolhidos anteriormente de maneira não-arbitrária. Os educandos que tinham características próximas ficaram em um mesmo grupo para responder os questionários propostos pela pesquisadora.

No primeiro questionário constavam duas questões comuns nos livros didáticos, com pouca ou nenhuma interação com os conceitos relevantes existentes na estrutura cognitiva dos alunos. No segundo foram propostas também duas questões, mas de natureza distinta. A diferença estava no teor das perguntas, que no segundo dia da pesquisa eram especialmente direcionadas para esses alunos com perguntas relacionáveis a sua estrutura de conhecimento de forma não-arbitrária e intencional. Eram problemas contextualizados dentro da própria realidade deles e foi-lhes instruído no início da aula que tivessem liberdade para responder com o raciocínio que usariam no dia a dia diante daquelas mesmas situações.

Um outro momento destinado à uma entrevista com os alunos, a correção das atividades e consolidação da instrução, não pôde acontecer por conta da deflagração de uma greve dos professores da rede estadual por tempo indeterminado. Inclusive, no segundo dia de aplicação da atividade, as aulas já haviam sido suspensas e nós fomos os únicos a comparecer à escola naquela noite.

Esse evento interferiu negativamente no nosso trabalho, mas não impossibilitou a continuidade e realização dessa pesquisa, que ainda conseguiu reunir informações importantes acerca da aprendizagem significativa de Divisibilidade na Educação de Jovens e Adultos.

O desenvolvimento e os resultados obtidos das atividades da pesquisa serão analisados no quinto capítulo deste material. Até lá reforçaremos a importância da modalidade de ensino aqui centralizada, a sua evolução na história do nosso país e nos aprofundaremos na Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel, aliando-a à metodologia da Resolução de Problemas.

CAPÍTULO 3

HISTÓRICO E CONSIDERAÇÕES SOBRE A EDUCAÇÃO DE JOVENS E ADULTOS

Este capítulo traz os resultados de pesquisas sobre a história do ensino de jovens e adultos no Brasil, os quais esperamos que esclareçam e incentivem a todos que desejem se fundamentar e entender um pouco mais sobre essa vertente tão importante da Educação.

Acreditamos que ao estudar o passado, aprendemos importantes lições que nos impedem de repetir os mesmos erros e nos conduzem a ações mais adequadas no presente e no futuro. Ou, nas palavras de Heródoto, é preciso “pensar o passado para compreender o presente e idealizar o futuro”.

Em seguida, reforçaremos através de documentos específicos oficiais a importância da EJA como uma ferramenta de inclusão de um conjunto de cidadãos vítimas da história excludente do nosso país e necessária para a eliminação das discriminações e para a busca de uma sociedade mais justa e com menos desigualdade.

3.1 Histórico da Educação de Jovens e Adultos no Brasil

A Educação de Jovens e Adultos no Brasil remete-se aos tempos do Brasil Colônia. Nesse período, os religiosos catequistas detinham o monopólio das ações educativas para adolescentes e adultos com o objetivo de professar as ideias da Igreja Católica e impor a cultura europeia. Os jesuítas acreditavam não ser possível a conversão dos índios sem que eles soubessem ler e escrever. Assim, a importância da alfabetização (catequização) na vida dos adultos já era percebida, tanto para servir à igreja como também ao trabalho (SILVA; MOURA, 2013).

Segundo Haddad e Di Pierro (2000b, p.109) “com a desorganização do sistema de ensino produzido pela expulsão dos jesuítas do Brasil em 1759, somente no Império (1822-1889) voltaremos a encontrar informações sobre ações educativas no campo da educação de adultos”. Vemos que foi instituída na Primeira Constituição Brasileira (1824) a garantia de uma “instrução primária e gratuita para todos os cidadãos". Tal citação foi sendo semeada e continuou sempre presente nas constituições que se seguiram.

Havia dois principais empecilhos, na época, que impossibilitaram as ações efetivas do que foi escrito na lei. O primeiro era a própria concepção de cidadania, que considerava apenas a população livre e oriunda da elite, excetuando-se, principalmente, um grande contingente de escravos para o qual a possibilidade de escolarização era negada. E o segundo era o fato de que o orçamento das Províncias não previa recursos para o salário dos professores, o que levou o sistema a ser organizado pela iniciativa particular, medida que dificultava imensamente o ingresso de uma grande parte da população menos privilegiada nesse sistema, fato esse que culminou em 82,6% da população analfabeta[3] ao final do império.

Na Primeira República (1889-1930), em um contexto de crescente desenvolvimento urbano e industrial do país e ainda sob influência da cultura europeia, são aprovados projetos de leis que trazem a obrigatoriedade da educação de adultos, atendendo a interesses da própria elite como o aumento do contingente eleitoral, que desde a Constituição Federal de 1891 excluía os analfabetos de todas as participações políticas. Sobre esse período, Haddad e Di Pierro dizem que:

> Apesar do descompromisso da União em relação ao ensino elementar, o período da Primeira República se caracterizou pela grande quantidade de reformas educacionais que, de alguma maneira, procuraram um princípio de normatização e preocuparam-se com o estado precário do ensino básico. Porém, tais preocupações pouco efeito prático produziram, uma vez que não havia dotação orçamentária que pudesse garantir que as propostas legais resultassem numa ação eficaz. O censo de 1920, realizado 30 anos após o estabelecimento da República no país, indicou que 72% da população acima de cinco anos permanecia analfabeta[4]. (HADDAD; DI PIERRO, 2000, p. 109-110).

No período da ditadura de Vargas (1937-1945), a Educação de Jovens e Adultos se estabeleceu como uma questão de política nacional, por força da

---

[3] Censo de 1890 que considerara, para efeito de analfabetismo, a população total. Somente a partir de 1920 temos o indicador para a população de 15 anos ou mais (FERRARO, 2002).

[4] Para a população de jovens e adultos, a partir dos 15 anos, esse mesmo censo traz um índice de 64,9% da população analfabeta (FERRARO, 2002).

Constituição de 1934, que instituiu a obrigatoriedade e a gratuidade do ensino primário para todos. "A partir da década de 40 e com grande força na década de 50 que a educação de jovens e adultos volta a pautar a lista de prioridades necessárias do país" (STRELHOW, 2010). Segundo a PC para a Educação de Jovens e Adultos, destacaram-se em âmbito nacional:

> - a criação do Fundo Nacional de Ensino Primário (1942), que tinha por objetivo ampliar a educação primária, de modo a incluir o ensino supletivo para adolescentes e adultos;
> - o Serviço de Educação de Adultos (SEA, de 1947), cuja finalidade era orientar e coordenar os planos anuais do ensino supletivo para adolescentes e adultos analfabetos;
> - a criação de campanhas como a Campanha de Educação de Adolescentes e Adultos (CEAA, de 1947), que teve grande importância como fornecedora de infraestrutura aos estados e municípios para atender à educação de jovens e adultos;
> - a Campanha Nacional de Educação Rural (1952);
> - a Campanha Nacional de Erradicação do Analfabetismo (1958)
>   As duas últimas, de curta duração, tiveram poucas realizações. (BRASIL, 2002, p.14)

Esses programas receberam muitos investimentos em recursos financeiros e materiais pedagógicos, mas a eficiência deles é bastante questionável. Sabe-se que os relatórios que chegavam ao Ministério de Educação e Saúde eram muitas vezes "forjados", mostrando que as administrações estaduais podiam fazer ajustes fraudulentos na prestação de contas. Sobre isso, Lauro de Oliveira Lima, pedagogo que presenciou muitos desses acontecimentos e que foi convidado pelo diretor do Departamento Nacional de Educação (DNE) como inspetor seccional para fazer a fiscalização da educação de adultos, escreveu que, mal pôde iniciar e teve de desistir, pois "[...] tal foi a celeuma que os políticos criaram em torno da 'fiscalização'; de fato, não existia nenhum serviço de educação de adultos, sendo as verbas para este fim destinadas usadas de maneira que não chegamos a verificar [...]" (LIMA, 1979, p. 325). E ainda, segundo os relatórios da campanha em 1950, Lima diz que "[...] Calculou-se que cerca de UM MILHÃO de adultos foram, então, alfabetizados... Embora as estatísticas sobre o fenômeno sejam divergentes, por simples "impressão", temos muito a duvidar dos dados que constam dos relatórios [...]" (LIMA, 1979, p. 324).

Entretanto, para a EJA, esse período foi muito importante, uma vez que, os esforços empreendidos durante as décadas de 1940 e 1950 fizeram cair os índices de analfabetismo das pessoas acima dos quinze anos de idade para

39,6% no ano de 1960 (FERRARO, 2002). Os níveis de escolarização da população brasileira permaneciam, no entanto, em patamares reduzidos quando comparadas à média dos países do primeiro mundo e mesmo de vários dos vizinhos latino-americanos (HADDAD; DI PIERRO, 2000).

No início da década de 60, a Lei nº 4.024/61 trouxe, pela primeira vez, a possibilidade da obtenção de certificados de conclusão do ensino mediante a prestação de exames para os jovens e adultos. Essa legislação não especificava quem seriam os responsáveis pelos exames, então eles passaram a ser realizados também por escolas privadas autorizadas pelos conselhos e secretarias. Essa medida desde então vem afastando uma boa parte dos jovens e adultos da escola e inserindo-os direto no mercado de trabalho, com o seu certificado na mão, mas, muitas vezes, sem a aprendizagem necessária para participarem efetivamente da vida econômica, política e cultural do país e seguir aprendendo ao longo da vida. É quase inexistente, por exemplo, a possibilidade dessas pessoas ingressarem no ensino superior e ascender socialmente através da Educação.

Algo positivo que emergiu no final da década de 50 e início da década de 60 foi uma nova perspectiva na educação brasileira através das ideias de educação popular, acompanhando a democratização da escolarização básica. A Educação de Jovens e Adultos, que antes era oferecida apenas em nível equivalente aos anos iniciais do Ensino Fundamental (antigo primário), a partir de 1960, foi estendida ao hoje chamado anos finais do Ensino Fundamental (antes, o ginásio).

Vários movimentos e programas voltados para a educação de adultos foram surgindo, dentre os quais destacaram-se: Movimento de Educação de Base (MEB), da Conferência Nacional dos Bispos do Brasil (CNBB); Movimento de Cultura Popular do Recife, iniciado em 1961; Centros Populares de Cultura da União Nacional dos Estudantes (UNE); Campanha De Pé no Chão Também se Aprende a Ler, da Secretaria Municipal de Educação de Natal; Programa Nacional de Alfabetização do Ministério da Educação e Cultura, em 1964, que contou com a presença do educador e filósofo Paulo Freire (BRASIL, 2002, p.14).

Paulo Reglus Neves Freire (Recife, 19 de setembro de 1921 — São Paulo, 2 de maio de 1997) é considerado um dos pensadores mais notáveis na história da pedagogia mundial e o Patrono da Educação Brasileira, o qual após experiências bem-sucedidas de alfabetização de adultos identificava o analfabetismo não como a causa da condição de pobreza, mas como consequência de uma sociedade injusta e desigual.

Paulo Freire foi indicado pelo o governo brasileiro – na época o presidente João Goulart – para multiplicar essas experiências bastante exitosas num Plano Nacional de Alfabetização. A Campanha Nacional de Alfabetização, da qual ele seria o coordenador, tinha como objetivo formar uma grande quantidade de educadores para em um curto espaço de tempo implantar 20 mil núcleos (os chamados "círculos de cultura") por todo o país. Infelizmente, meses depois de iniciada a implantação do Plano, o golpe militar de 1964 suprimiu esse esforço. Freire foi preso durante 70 dias por ser considerado traidor e, em seguida, foi exilado, retornando ao Brasil apenas em 1980 (PELANDRÉ, 1998).

Durante o regime militar (1964-1985), destacaram-se, no que se refere à Educação de Jovens e Adultos, a criação do Movimento Brasileiro de Alfabetização (MOBRAL), em 1967, e do ensino supletivo, em 1971, através da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (n.º 5.692/71). Este, a princípio, seria uma modalidade temporária, de suplência, porém tornou-se uma forma de ensino permanente, necessária para atender uma demanda cada vez maior. O Ensino Supletivo, por sua flexibilidade, seria a nova oportunidade dos que perderam a possibilidade de escolarização em outras épocas, ao mesmo tempo em que seria a chance de atualização para os que gostariam de acompanhar o movimento de modernização da nova sociedade que se implantava dentro da lógica de “Brasil Grande” da era Médici (HADDAD; DI PIERRO, 2000, p. 118).

O MOBRAL, por outro lado, tinha por objetivo alcançar uma política educacional que atendesse simultaneamente aos interesses das camadas marginalizadas do sistema escolar e aos intentos políticos do governo ditatorial. O programa acabou limitando-se apenas a proporcionar ao indivíduo a competência de ler e escrever, sem se preocupar com a compreensão do que estava escrito.

Os alfabetizadores contratados, muitas vezes, não tinham nenhuma formação ou experiência de ensino, passando a ideia de que, para alfabetizar um adulto é preciso somente ser alfabetizado. O programa obteve poucos avanços, pois durantes seus 15 anos de duração, “[…] das quarenta milhões de pessoas que frequentaram o movimento, apenas 10% foram alfabetizadas" (PARANÁ, 2006, p. 18). O MOBRAL acaba em 1985, quando chega o período da Nova República.

Neste novo período, caracterizado pela ampla democratização política do Brasil e sua estabilização econômica, foi promulgada a nova Constituição Federal de 1988 que, de forma inédita, assegura legalmente os direitos das pessoas jovens e adultas que, por algum motivo, não conseguiram ter acesso aos estudos na idade própria, à educação fundamental, com a consequente responsabilização do Estado por sua oferta pública, gratuita e universal como declara Oliveira (2007):

> A Constituição Federal de 1988 é a primeira a explicitar os direitos dos que não se escolarizaram na idade ideal. O inciso I do artigo 208 indica que o Ensino Fundamental passa a ser obrigatório e gratuito, "assegurada, inclusive, sua oferta gratuita para todos os que a ele não tiveram acesso na idade própria". Em seu artigo 214, a Carta Magna indica também a que legislação "estabelecerá o Plano Nacional de Educação, de duração plurianual, visando à articulação e ao desenvolvimento do ensino em seus diversos níveis e à integração das ações do poder público que conduzam à • I – erradicação do analfabetismo, • II – universalização do atendimento escola. (Oliveira, 2007, p. 03-04)

A Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB) nº 9394/96 de 20 de dezembro de 1996 reforça essa nova Constituição e determina a elaboração do Plano Nacional de Educação, além de alterar a idade mínima para realização de exames supletivos para 15 anos, no Ensino Fundamental, e 18, no Ensino Médio e incluir a educação de jovens e adultos no sistema de ensino regular, entre outras medidas.

Com base na LDB, a Educação de Jovens e Adultos foi estabelecida como modalidade de ensino através da resolução CNB/CEB Nº 1, de 5 de julho de 2000, que cria as Diretrizes Curriculares Nacionais para a Educação de Jovens e Adultos, as quais ressaltam também o direito dos jovens e adultos a uma educação adequada às suas necessidades particulares de ensino-aprendizagem, e ao poder público fica o dever de oferecer esta educação de forma gratuita a partir de cursos e exames supletivos (ANTUNES, 2006, p. 33).

Infelizmente, apesar da grande quantidade de leis que vieram garantir o direito a uma educação de qualidade para todos os cidadãos, as estatísticas apontam que uma grande parte da população ainda não foi contemplada com esse benefício. Muitos, mesmo frequentando as escolas, acabam sendo excluídos do sistema educacional, se “formando” com dificuldades na leitura, na escrita, no cálculo e outros. Sobre esse quadro do final do século XX, e que não é muito diferente dos dias atuais, Haddad e Di Pierro comentam que:

> A ampliação da oferta de vagas não foi acompanhada de uma melhoria das condições de ensino, de modo que, hoje, temos mais escolas, mas sua qualidade é muito ruim. A má qualidade do ensino combina-se à situação de pobreza extrema em que vive uma parcela importante da população para produzir um contingente numeroso de crianças e adolescentes que passam pela escola sem lograr aprendizagens significativas e que, submetidas a experiências penosas de fracasso e repetência escolar, acabam por abandonar os estudos. Temos agora um novo tipo de exclusão educacional: antes as crianças não podiam frequentar a escola por ausência de vagas, hoje ingressam na escola, mas não aprendem e dela são excluídas antes de concluir os estudos com êxito (HADDAD e DI PIERRO, 2000b, p.126).

Já no século XXI, após os muitos altos e baixos pelos quais passaram as políticas públicas relacionadas à EJA, convém destacar as criações do Programa Brasil Alfabetizado, lançado em 2003 por meio da Secretaria Extraordinária de Erradicação do Analfabetismo; da Secretaria de Educação Continuada, Alfabetização, Diversidade e Inclusão – SECADI, uma secretaria específica à EJA, na qual são elaboradas estruturas específicas para essa modalidade de ensino, em 2004; do Programa Nacional de Inclusão de Jovens (PROJOVEM), em 2005, e o Programa Nacional de Integração da Educação Profissional à Educação Básica na Modalidade de Educação de Jovens e Adultos (PROEJA) (CORTE, 2016). Todos continuam em vigor até hoje, com exceção da SECADI que foi dissolvida no dia 2 de janeiro de 2019, trazendo novamente muitas incertezas para a Educação de Jovens e Adultos no Brasil.

Sobre o corte de investimentos em educação e o desmonte das políticas educacionais promovidos singularmente pelo atual governo, a doutora em Educação e especialista em Educação de Jovens e Adultos, Analise da Silva, disse em entrevista ao Programa Brasil de Fato, no dia 10 de setembro de 2019:

> Não temos nenhuma política pública voltada ao atendimento desses cidadãos e cidadãs, que somam 43% da população do país. Então, a preocupação com esses dados deve ser do tamanho da necessidade de encaminharmos o mais rápido possível a pauta nacional da Educação de Jovens e Adultos (EJA), que agora está colocada de lado. Temos a necessidade de fazer com que essa pauta se concretize em termos de legislação e de política pública.（Silva，2019）

Segundo a pedagoga, o número de jovens e adultos que não concluiu o ensino médio ou mesmo fundamental, chega a quase metade da população brasileira. Ela afirma ainda que a chance de o país cumprir a meta do Plano Nacional de Educação (PNE), aprovado em 2014, de reduzir a zero o índice de analfabetismo absoluto de pessoas com 15 anos ou mais até 2024, é nula.

Continuamos com um alto número de analfabetos, 11,3 milhões de pessoas com mais de 15 anos (6,8% da população brasileira) de acordo com dados do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística. Lembrando que nesse cálculo não são considerados os inúmeros analfabetos funcionais, que são pessoas que, mesmo tendo frequentado a escola e sabendo decodificar letras, frases, textos curtos e números não desenvolveram a habilidade de interpretação e compreensão de textos e de realizar operações matemáticas.

Fica claro, portanto, que as políticas educacionais irresponsáveis e baseadas em interesses governistas, muitas vezes mais preocupados em maquiar e fingir que o problema não existe, têm trazido graves consequências no âmbito social para o Brasil. Acreditamos que a conquista e a definição da modalidade de Educação de Jovens e Adultos (EJA) como política pública de acesso e continuidade à escolarização básica, infelizmente ainda não está consolidada e tem muito a evoluir.

3.2 As Funções da EJA

Enquanto modalidade de educação básica, a EJA, conforme expressa na Lei Federal número 9.394 de 20 de dezembro de 1996 (LDB 9394/96), não se resume apenas a alfabetização do seu público-alvo, mas vai muito além em abrangência e importância. O Parecer CNE/CEB nº 11/2000 redefiniu as funções do ensino supletivo presentes no Parecer CFE nº 699/72 indicando que:

> [...] a Educação de Jovens e Adultos (EJA) representa uma dívida social não reparada para com os que não tiveram acesso a ela e nem domínio da escrita e leitura como bens sociais, na escola ou fora dela, e tenham sido a força de trabalho empregada na constituição de riquezas e na elevação de obras públicas. Ser privado deste acesso é, de fato, a perda de um instrumento imprescindível para uma presença significativa na convivência social contemporânea (BRASIL, 2000, p. 5).

Segundo as Diretrizes Curriculares Nacionais para a EJA, essa modalidade deve desempenhar três funções:

> – Função reparadora: vai muito além do acesso dos jovens e adultos na esfera dos direitos civis, através da restauração de um direito a eles negado – o direito a uma escola de qualidade –, abrange ainda o reconhecimento da igualdade ontológica de todo ser humano de ter acesso a um bem real, social e simbolicamente importante.

> Porém, não devemos confundir a noção de reparação com a de suprimento. Para isso, é indispensável um modelo educacional que crie situações pedagógicas satisfatórias para atender às necessidades de aprendizagem particulares dos alunos jovens e adultos.
>
> – Função equalizadora: tem relação com a igualdade de oportunidades, que possibilite oferecer aos indivíduos inserções diferenciadas no mundo do trabalho, na vida social, nos espaços da estética e nos canais de participação. A equidade é a forma pela qual os bens sociais são distribuídos tendo em vista uma maior igualdade, dentro de situações específicas. Nesse sentido, a EJA possibilita um caminho de desenvolvimento a todas as pessoas, de várias idades, permitindo que jovens e adultos atualizem conhecimentos, demonstrem habilidades, troquem experiências e acessem a novas formas de trabalho e cultura.
>
> – Função qualificadora: faz alusão a uma educação permanente, baseada no caráter incompleto do ser humano, cujo potencial de desenvolvimento e de adequação pode se atualizar em ambientes escolares ou não. Mais que uma função, é o próprio sentido da educação de jovens e adultos (BRASIL, 2002, p.18).

Para que essas funções sejam realmente cumpridas, a EJA deve ser pensada de maneira a contemplar "um modelo pedagógico próprio a fim de criar situações pedagógicas e satisfazer às necessidades de aprendizagem de jovens e adultos", como afirma o Parecer CNE/CEB nº 11/2000. É preciso garantir no processo de ensino e de aprendizagem a presença de metodologias e de práticas pedagógicas que valorizem as experiências sociais, culturais, profissionais dos alunos.

3.3 A Matemática na Educação de Jovens e Adultos

Aprender Matemática é um direito e uma necessidade básica de todo e qualquer indivíduo. Por ser a ciência que fornece o melhor instrumental para qualquer profissional tornar-se bem-sucedido em sua área, ela prepara o estudante para a vida como nenhuma outra disciplina pode fazer. Segundo Napoleão Bonaparte, "O progresso de um povo depende, exclusivamente, do desenvolvimento da Matemática". Saber contar, calcular, medir, raciocinar, resolver problemas, interpretar e tratar informações estatísticas dentre outros são pré-requisitos indispensáveis para um bom exercício da cidadania. Tudo isso demonstra a importância da matéria na formação dos jovens e adultos.

Contudo, o ensino da Matemática para qualquer público, especialmente o da EJA, não pode estar centrado em decorar algumas regras e táticas para resolver questões, nem deve ser voltado a conteúdos pouco significativos para os alunos. Pelo contrário, a instrução desses educandos deve ter como objetivo o estímulo do raciocínio, da criatividade, da iniciativa pessoal e da construção do pensamento de forma significativa, respeitando-se as diferenças etárias, culturais, sociais e dos graus de compreensão de cada um.

Os Parâmetros Curriculares para a Educação de Jovens e Adultos do segundo segmento do Ensino Fundamental lançado pelo Ministério da Educação no ano de 2002 tem sido o norteador principal para os professores dessa modalidade de ensino desde então. Apesar de seus 18 anos de lançamento, continua extremamente atual e um dos melhores guias teóricos para os educadores da modalidade de ensino aqui centrada.

O material está organizado em três volumes, onde o primeiro discorre sobre algumas características específicas da EJA bem como a construção de uma proposta curricular; e os dois últimos são dedicados às áreas diversas curriculares, apresentando orientações específicas para cada área, sendo que a Matemática aparece no volume 3.

Sobre o papel dessa disciplina na EJA, o documento diz:

> Na educação de jovens e adultos, a atividade matemática deve integrar, de forma equilibrada, dois papéis indissociáveis:
> - Formativo, voltado ao desenvolvimento de capacidades intelectuais para a estruturação do pensamento;
> - Funcional, dirigido à aplicação dessas capacidades na vida prática e à resolução de problemas nas diferentes áreas de conhecimento (BRASIL, 2002, p.12).

Trata-se, portanto, de buscar atender uma necessidade intelectual dos nossos alunos, mas nunca isolado da prática. Não há tempo para conteúdos longos e sem sentido para o estudante da EJA. Quanto mais se possa agregar cada assunto com a sua aplicação melhor.

Outra recomendação da PC é que se aproveite as situações vividas e trazidas pelos alunos como ponto de partida para o ensino de novos conteúdos, uma estratégia que muito provavelmente proporcionará uma aprendizagem significativa àqueles que estiverem envolvidos na atividade. Segundo o documento, não se deve ignorar “a riqueza de conteúdos provenientes da experiência pessoal e coletiva dos jovens e adultos – que deveriam ser considerados como ponto de partida para a construção de novos conhecimentos” (p.14).

Apesar de não citar a aprendizagem significativa de Ausubel, o material orientador do currículo da EJA possui muitos direcionamentos convergentes com essa teoria, como na extrema valorização do conhecimento prévio e de que se trabalhem conceitos decorrentes das vivências dos alunos. Como no seguinte trecho:

> Em qualquer aprendizagem, a aquisição de novos conhecimentos deve considerar os conhecimentos prévios dos alunos. Em relação aos jovens adultos, no entanto, é primordial partir dos conceitos decorrentes de suas vivências, suas interações sociais e sua experiência pessoal: como detêm conhecimentos amplos e diversificados, podem enriquecer a abordagem escolar, formulando questionamentos, confrontando possibilidades, propondo alternativas a serem consideradas (BRASIL, 2002, p.15).

A contextualização também é incentivada. Situações que façam sentido e que pertençam a vivência do aluno são preferíveis nesse material, porém sem ficar totalmente preso a essas situações, partindo da situação contextualizada, descontextualizá-la para o abstrato, para depois contextualizar novamente. Como diz BRASIL, 2002:

> A contextualização dos temas matemáticos é outro aspecto que vem sendo amplamente discutido. Trata-se de apresentá-los em uma ou mais situações em que façam sentido para os alunos, por meio de conexões com questões do cotidiano dos alunos. Um conhecimento só se constrói plenamente quando é mobilizado em situações diferentes daquelas que lhe deram origem, isto é, quando é transferível para novas situações. Isto significa que os conhecimentos devem ser descontextualizados, para serem novamente contextualizados (BRASIL, 2002, p.17).

Precisamos optar por metodologias de ensino que promovam a participação dos alunos em seu processo de aprendizagem, estimulando o raciocínio, a argumentação lógica e um ambiente positivo nas aulas de Matemática e evitar ao máximo didáticas que valorizam apenas procedimentos algorítmicos e respostas rápidas e “corretas”. Só assim promoveremos uma aprendizagem verdadeiramente significativa.

CAPÍTULO 4

A TEORIA DA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA E A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Na busca de uma metodologia de ensino mais eficiente para suas aulas, o professor de Matemática tem contato com muitas teorias bastante úteis, algumas mais práticas ou tecnicistas, outras que se preocupam mais com a parte psicológica ou afetiva da aprendizagem. Mas, seja qual for a metodologia adotada para abordar determinado conteúdo, ou sequência de conteúdos para alcançar sua potencialidade, é importante que nenhuma teoria seja trabalhada isoladamente.

Este capítulo trata da Teoria da Aprendizagem Significativa de David Ausubel como principal norteadora da prática pedagógica do professor e da Resolução de Problemas como uma ferramenta para auxiliar o ensino-aprendizagem de Matemática. Teorias que nortearam a elaboração de uma sequência de aulas, problemas, atividades e sua posterior aplicação em uma turma do segundo segmento da Educação de Jovens e Adultos do Ensino Fundamental.

4.1 A Teoria da Aprendizagem Significativa

David Paul Ausubel, (1918-2008), criador dessa teoria, foi um pesquisador norte-americano filho de imigrantes judeus que relata ter sofrido por vários anos na escola por não ter sua história pessoal considerada pelos seus educadores. Por conta disso, apesar de sua formação em Medicina Psiquiátrica, ele dedicou parte de sua vida à Psicologia Educacional no intuito de buscar as melhorias necessárias ao verdadeiro aprendizado. Na abertura do seu livro *Educational Psychology: A Cognitive View,* ele é incisivo ao declarar que: “O fator isolado mais importante que influencia o aprendizado é aquilo que o aprendiz já conhece”.

Para Ausubel, aprendizagem significa organização e integração de um material na *estrutura cognitiva*. Esta, por sua vez, seria “o conteúdo total e organizado de ideias de um dado indivíduo” (AUSUBEL, 1968, p. 37), ou seja, a soma de informações, ideias, conceitos, proposições e tudo aquilo que ele já aprendeu. Essa organização segue muitas vezes uma hierarquia partindo de conceitos mais gerais para conceitos mais específicos.

Pode-se remeter também a ideia de estrutura cognitiva para o contexto da aprendizagem. Nesse caso, a estrutura cognitiva pode ser entendida como “o conteúdo e organização de suas ideias em uma área particular de conhecimentos” (AUSUBEL, 1968, p. 37). Por exemplo, na área da Matemática, tudo aquilo que o aluno já adquiriu, já armazenou, já organizou sobre Matemática faz parte de uma determinada estrutura cognitiva que está relacionada com esse contexto específico de aprendizagem.

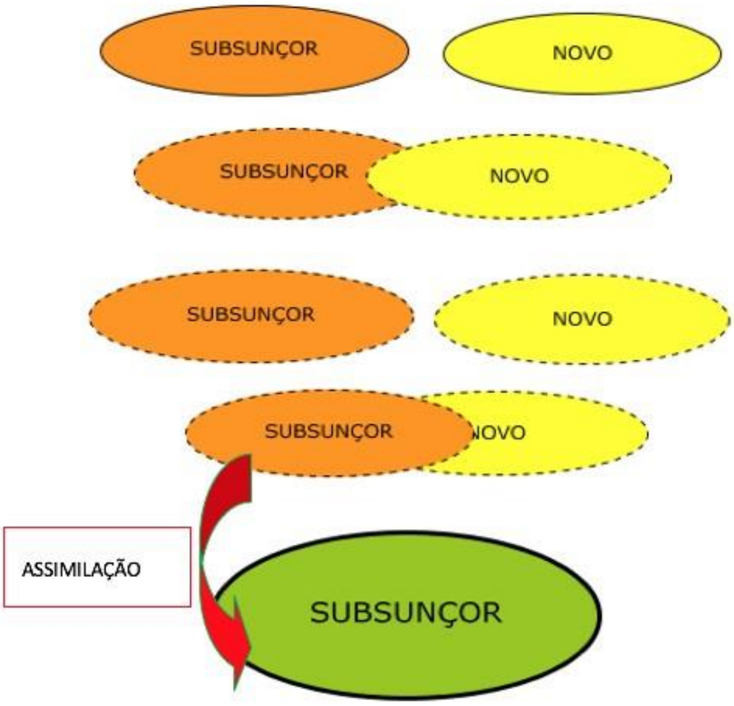
Conforme Moreira e Masini, especialistas na teoria ausubeliana:

> Novas ideias e informações podem ser aprendidas e retidas na medida em que conceitos relevantes e inclusivos estejam adequadamente claros e disponíveis na estrutura cognitiva do indivíduo e funcionem, dessa forma, como ponto de ancoragem para as novas ideias e conceitos. [...] A aprendizagem significativa processa-se quando o material novo, ideias e informações que apresentam uma estrutura lógica, interage com conceitos relevantes e inclusivos, claros e disponíveis na estrutura cognitiva, sendo por eles assimilados, contribuindo para sua diferenciação, elaboração e estabilidade (MOREIRA E MASINI, 2006, p.14).

Para Ausubel, aprendizagem significativa é um processo pelo qual uma nova informação se relaciona com um aspecto relevante da estrutura de conhecimento do indivíduo. Essa estrutura de conhecimento específica, presente no indivíduo, é definida por Ausubel como *subsunçor* (*subsumer*). Há uma interação entre a nova informação e os subsunçores relevantes presentes na estrutura do aprendiz, funcionando como um ancoradouro, abrangendo e integrando o material novo e, ao mesmo tempo modificando-se em função dessa ancoragem (MOREIRA E MASINI, 2006).

A figura abaixo ilustra esse processo:

Figura 4: interação entre a nova informação e o subsunçor



Fonte: Lima (2008, p.64)

O conceito subsunçor pode ser chamado também de conceito inclusor, pelo fato de que é ele que permite que as novas informações sejam incluídas na estrutura cognitiva do aprendiz.

4.1.1 Aprendizagem mecânica x Aprendizagem significativa

Quando a nova informação não se relaciona de maneira lógica e clara com os conceitos subsunçores ou inclusores, ou seja, não há um ponto de ancoragem entre o que está sendo aprendido e a estrutura cognitiva do sujeito, Ausubel diz que essa aprendizagem é mecânica. Por exemplo, um aluno que decora uma revisão para a prova e, se as questões não forem precisamente as mesmas, ele tira zero, ele se utilizou de uma aprendizagem totalmente mecânica para fazer essa prova. Se as questões fossem exatamente iguais, ele poderia ter atingido a nota máxima. Por ser armazenada de forma arbitrária, essa aprendizagem não garante flexibilidade no uso, nem longevidade da nova informação.

A aprendizagem mecânica contrasta com a aprendizagem significativa, por acontecerem de maneiras diversas, porém elas não são opostas. Para

Ausubel, essas aprendizagens fazem parte de um *continuum*, ora nós aprendemos de forma significativa, ora de forma mecânica.

Figura 5: O continuum aprendizagem mecânica–aprendizagem significativa

Fonte: (NOVAK, 2000, p. 20)

Segundo Novak (2000), a aprendizagem significativa apresenta quatro grandes vantagens sobre a aprendizagem mecânica ou por memorização:

- Os conhecimentos adquiridos significativamente ficam retidos por um período maior de tempo.
- As informações assimiladas resultam num aumento da diferenciação das ideias que serviram de âncoras, aumentando, assim, a capacidade de uma maior facilitação da subsequente aprendizagem de materiais relacionados.

– As informações que não são recordadas (são esquecidas), após ter ocorrido a assimilação, ainda deixam um efeito residual no conceito assimilado e, na verdade, em todo o quadro de conceitos relacionados.
– As informações apreendidas significativamente podem ser aplicadas numa enorme variedade de novos problemas e contextos.

É importante destacar, contudo, que a aprendizagem mecânica se complementa à aprendizagem significativa e não deve ser menosprezada. O fato de que o professor deve organizar suas aulas visando a aprendizagem significativa, não garante que esta realmente acontecerá. Nenhum material de aprendizagem pode ser previamente considerado como significativo, mas apenas como potencialmente significativo.

E quando o indivíduo não possui os subsunçores para um determinado assunto? E se o tema a ser estudado for completamente estranho ao aprendiz? A aprendizagem mecânica torna-se de grande importância nesse momento, podendo evoluir depois para uma aprendizagem significativa como veremos adiante.

4.1.2 A origem dos subsunçores

Dada a importância desse conceito na teoria da aprendizagem significativa de Ausubel, é pertinente o questionamento: “De onde vêm os subsunçores?” ou “Qual a origem dos subsunçores?” Uma possibilidade seria que eles se originam da aprendizagem mecânica. Assim, quando uma pessoa não conhece nada a respeito de um determinado tema, ou seja, ela não possui em sua estrutura cognitiva um ponto de ancoragem, ou subsunçor, ela precisará aprender a construi-lo mecanicamente.

À medida que forem sendo estabelecidos dados relevantes daquela nova área de conhecimento, passam a existir na estrutura cognitiva do indivíduo alguns elementos subsunçores, ainda que pouco elaborados, mas que já poderão ancorar novas informações na mesma área. Com o passar do tempo, essa aprendizagem passa a ser significativa e esses subsunçores se ampliam, tornando-se mais sofisticados e mais capazes de ancorar novas informações.

Por exemplo, ao se apresentar o conceito de número primo – todo número que possui apenas dois divisores, 1 e ele mesmo –, este só terá sentido na medida em que seja relacionado com alguma ideia relevante, que esteja clara e organizada na estrutura cognitiva do aluno. Caso contrário, essa informação será armazenada de forma mecânica em um primeiro momento. O conhecimento anterior sobre divisores e critérios de divisibilidade facilitará a construção do conceito de número primo que, por sua vez, servirá em seguida como ancoradouro a novos conceitos. Somente no decorrer do tempo, com a aquisição das “ideias âncoras” é que o conceito de número primo passará a ter significado para o aluno.

Outra possibilidade para a origem dos subsunçores na estrutura cognitiva é a *formação de conceitos*, que ocorre na primeira infância, fazendo com que as crianças cheguem à escola com “um conjunto adequado de conceitos que permite a aprendizagem significativa por recepção” (MOREIRA E MASINI, 2006, p.20). Esses conceitos podem ser objetos, eventos, situações, propriedades que têm atributos de critérios comuns e que são nomeados mediante algum símbolo.

Nesse processo de formação, o conceito se adquire pela experiência, pelo contato com o mesmo e pela interação com terceiros. “É um tipo de aprendizagem por descoberta, envolvendo, de forma primitiva, certos processos psicológicos” (MOREIRA E MASINI, 2006, p. 20).

Já na fase escolar e até a fase adulta, a aquisição dos novos conceitos se dá através da “*assimilação, diferenciação progressiva e reconciliação integrativa* de conceitos” (MOREIRA E MASINI, 2006, p. 20). Estes vão sendo produzidos à medida que se amplia o vocabulário e vão sendo acrescentados novos atributos àquelas ideias iniciais. Por exemplo, a formação do conceito de bola: a princípio a criança aprende o que é uma bola, antes mesmo de saber falar a palavra, pelo contato com o objeto e pela interação com outras pessoas, ela sabe que a bola é redonda, rola, pula; à medida que cresce, ela vai assimilando novas características ao objeto bola, existem bolas de gude, de basquete, de futebol, esta última pode ser branca com hexágonos pretos.

Das três formas de aquisição de conceitos, Moreira e Masini trazem primeiramente que:

> A assimilação de conceitos é, caracteristicamente, a forma pela qual as crianças mais velhas, bem como os adultos, adquirem novos conceitos pela recepção de seus atributos criteriais e pelo relacionamento desses atributos com ideias relevantes já estabelecidas em sua estrutura cognitiva. Os conceitos não-espontâneos, manifestados através de significado categórico generalizado, passam a predominar, somente próximo à adolescência

> e em indivíduos que passam por processo de escolarização. O indivíduo pode adquirir conceitos de modo muito mais eficiente e passa, significativamente, a relacionar os atributos criteriais do novo conceito à sua estrutura cognitiva, sem necessitar relacioná-los anteriormente a instâncias particulares que o exemplifiquem (MOREIRA E MASINI, 2006, p. 20).

Sobre a diferenciação progressiva, Moreira e Masini (2006, p. 30) afirmam que é “o princípio pelo qual o assunto deve ser programado de forma que as ideias mais gerais e inclusivas da disciplina sejam apresentadas antes e, progressivamente diferenciadas, introduzindo os detalhes específicos necessários”. Ou seja, no topo da estrutura conceitual devem estar as ideias mais inclusivas, e gradativamente, vão sendo incorporadas proposições, conceitos e fatos mais específicos e mais diferenciados.

Já a reconciliação integrativa é definida por Moreira e Masini (2006, p. 30) como sendo “o princípio pelo qual a programação do material instrucional deve ser feita para esporar relações entre ideias, apontar similaridades e diferenças significativas, reconciliando discrepâncias reais ou aparentes”. Porém, de acordo com os autores, embasados na teoria de Ausubel, se trata de relações que o aprendiz faz dos novos conceitos com aqueles já existentes na sua estrutura cognitiva. Sendo assim, à medida que novas informações são adquiridas, os elementos existentes na estrutura cognitiva reorganizam-se e adquirem novos significados.

4.1.3 Organizadores prévios

Com o objetivo de acelerar o processo de aprendizagem, Ausubel sugere a manipulação da estrutura cognitiva do aluno através do uso de organizadores prévios, que “são materiais introdutórios apresentados antes do material a ser aprendido”. Para Ausubel, a principal função desses organizadores é “servir de ponte entre o que o aprendiz já sabe e o que ele deve saber, a fim de que o material seja aprendido de forma significativa” (apud MOREIRA E MASINI, 2006, p. 21).

Um professor de Matemática que busca uma aprendizagem significativa no conteúdo de Equações do 1º grau, por exemplo, pode usar como organizadores prévios para facilitar a compreensão desse conceito a ideia do equilíbrio entre dois pratos de uma balança. Esse organizador prévio é algo que está na estrutura cognitiva do sujeito (todos conhecem) e vai servir de ancoradouro provisório para esse conceito de igualdade e equações. É como se utilizar de uma ferramenta para executar um serviço que não é a ferramenta correta, mas cumprirá uma função temporária até que não seja mais necessária.

Depois que o aluno estiver com o conceito principal bem claro e definido em sua estrutura cognitiva, o organizador prévio não será mais necessário. No caso do exemplo acima, não se usa mais os pratos da balança para resolver as equações. Ele foi utilizado apenas para facilitar a ocorrência da aprendizagem significativa. Para Moreira e Masini (2006):

> A principal função dos organizadores é, então, superar o limite entre o que o aluno já sabe e o que ele precisa saber, antes de poder aprender a tarefa apresentada. [...] Os organizadores são mais eficientes quando apresentados no início das tarefas de aprendizagem, do que quando introduzidos simultaneamente com o material aprendido, pois dessa forma suas propriedades integrativas ficam salientadas (p. 21-22).

Nem sempre é uma tarefa fácil encontrar organizadores prévios para introduzir todos os conteúdos. Eles também não são obrigatórios para a ocorrência da aprendizagem significativa. Mas certamente são ótimos ativadores de subsunçores e compensam em qualidade da aprendizagem o tempo que é gasto para utilizá-los. São ferramentas interessantes ainda para ampliar o número de associações da Matemática com o mundo, portanto vale a pena empregar um esforço mental para encontrá-los.

4.1.4 Condições para a ocorrência da aprendizagem significativa

David Ausubel propõe duas condições sem as quais a aprendizagem não será significativa:

1ª) o material aprendido precisa ser potencialmente significativo, isto é, precisa ser relacionável a estrutura cognitiva do aprendiz, de maneira não arbitrária (não-aleatória) e não-literal (substantiva). Isso quer dizer que o aprendiz precisa ser capaz de concatenar e reter a substância das novas ideias, e não apenas as palavras exatas usadas para sua expressão. Para isso, ele deve possuir os conceitos subsunçores específicos com os quais o material é relacionável.

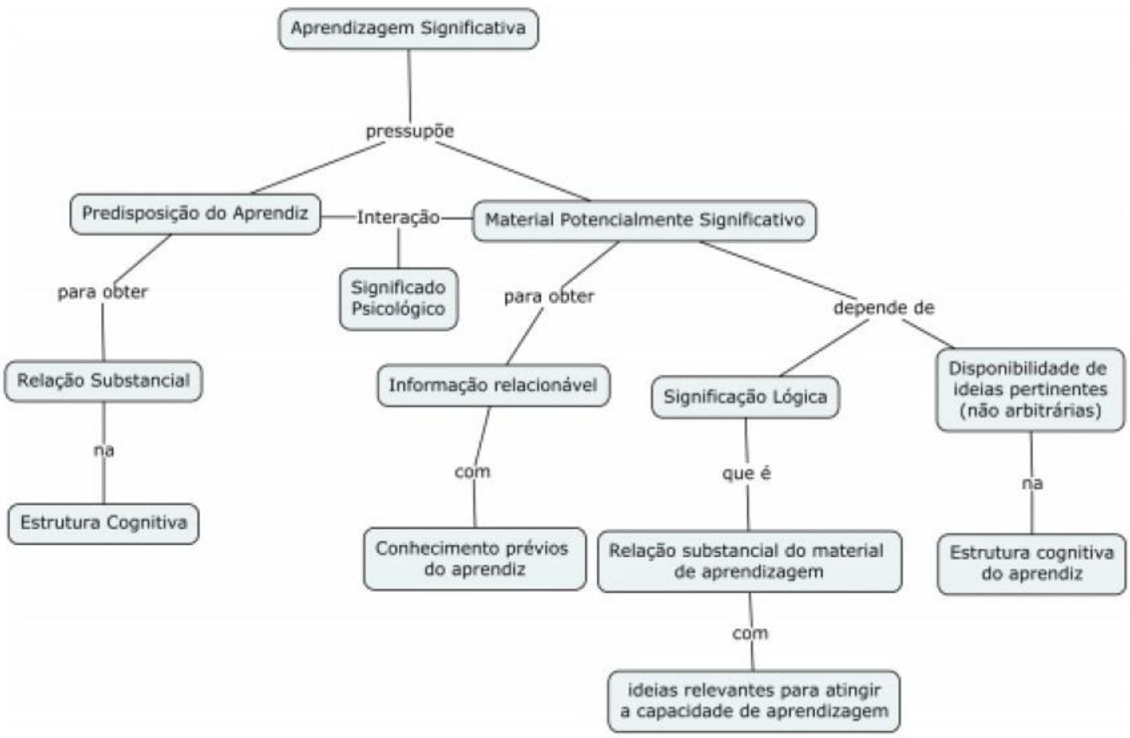
2ª) o aprendiz deve manifestar disposição para relacionar o material à sua estrutura cognitiva. Essa condição indica que se a intenção do aluno for de simplesmente memorizar os conceitos, o produto da aprendizagem será mecânico e, portanto, pouco flexível e de pouca longevidade, independentemente de quão potencialmente significativo seja o material.

Para que ocorra a aprendizagem significativa é indispensável a predisposição favorável do sujeito. Por isso que a preocupação do professor deve ir além da preparação da sua aula para uma aproximação e preocupação com o sentimento do seu aluno. Ninguém aprende se não estiver motivado. De acordo com Silva:

> [...] o aprendiz deve apresentar uma motivação voluntária e consciente para aprender, ou seja, ele deve se predispor a relacionar (diferenciando e integrando) os novos conhecimentos à estrutura cognitiva prévia, modificando-a, enriquecendo-a, elaborando-a e criando novos significados a esse novo material cognitivo. Esta predisposição não se trata exatamente de motivação, ou de gostar da matéria (SILVA, 2017, p.10).

A figura a seguir é um mapa conceitual que resume a interdependência dessas condições para a ocorrência de uma aprendizagem significativa.

Figura 6: Condições para a ocorrência da aprendizagem significativa



Fonte: (SILVA, 2017, p.10)

4.1.5 Evidências da aprendizagem significativa

Como reconhecer se, de fato, os alunos conseguiram alcançar uma aprendizagem significativa?

Segundo Ausubel (1968), a compreensão genuína de um conceito implica em quatro aspectos que o aprendiz deve tomar posse, que seriam a <u>clareza</u>, a <u>precisão</u>, a capacidade de <u>diferenciar</u> e de <u>transferir</u> significados.

A capacidade de empregar aquele determinado conhecimento em uma nova situação e de exprimi-lo com uma linguagem pessoal demonstram que houve uma aprendizagem significativa.

Para evitar que essa aprendizagem seja simulada por alguém, Ausubel propõe que questões e problemas sejam formulados de uma maneira nova e não familiar que requeira máxima transformação do conhecimento existente. Para ele, testes de compreensão devem, pelo menos, ser escritos de maneira diversa e apresentados em um contexto, de certa forma, diferente daquele, originalmente, encontrado no material instrucional (MOREIRA E MASINI, 2006).

Segundo Ausubel, outra forma de verificar se a aprendizagem significativa aconteceu é a de propor uma tarefa de aprendizagem ao aluno, em sequência, que dependa de outra, a qual não possa ser executada sem uma compreensão da anterior. Na verdade, o que se está avaliando é a aprendizagem significativa do conceito anterior.

Ainda sobre essa busca por uma avaliação que comprove a aprendizagem significativa, Moreira e Masini afirmam que:

> Solução de problemas é, sem dúvida, um método válido e prático de se procurar evidência da aprendizagem significativa. Porém Ausubel chama atenção para o fato de que se um aprendiz não é capaz de resolver um problema, isso não significa, necessariamente, que ele tenha somente memorizado os princípios e conceitos relevantes à solução do problema, pois esta implica também certas habilidades além da compreensão (MOREIRA E MASINI, 2006, p.24).

No caso da experiência relatada neste estudo, veremos que os princípios e conceitos haviam sido aprendidos e internalizados, porém, a deficiência nas habilidades de leitura e interpretação dificultaram a realização dos problemas a princípio. Foi necessária uma intervenção de leitura para a posterior resolução dos problemas.

4.1.6 O papel do professor na facilitação da aprendizagem significativa

Temos um modelo de ensino muito baseado na aprendizagem por recepção e bastante dependente do professor. Poucos alunos, especialmente na EJA, se sentem responsáveis por sua própria educação. Convém, portanto, analisar como o docente deve agir para facilitar a ocorrência da aprendizagem significativa nesse processo de ensino e de aprendizagem.

Segundo Moreira (2006), o papel do professor na facilitação da aprendizagem significativa envolve quatro tarefas essenciais:

1ª) Identificar a estrutura conceitual e proposicional da matéria de ensino. Isto é, identificar os conceitos e os princípios unificadores, inclusivos, com maior poder explanatório e propriedades integradoras, e organizá-los hierarquicamente de modo que progressivamente, abranjam os menos inclusivos até chegar aos exemplos e dados específicos.

2ª) Identificar quais os subsunçores (conceitos, proposições e ideias claras, precisas, estáveis) relevantes à aprendizagem do conteúdo a ser ensinado, que o aluno deveria ter em sua estrutura cognitiva para poder aprender significativamente esse conteúdo.

3ª) Diagnosticar o que o aluno já sabe; distinguir dentre os subsunçores especificamente relevantes quais os que estão disponíveis na estrutura cognitiva do aluno.

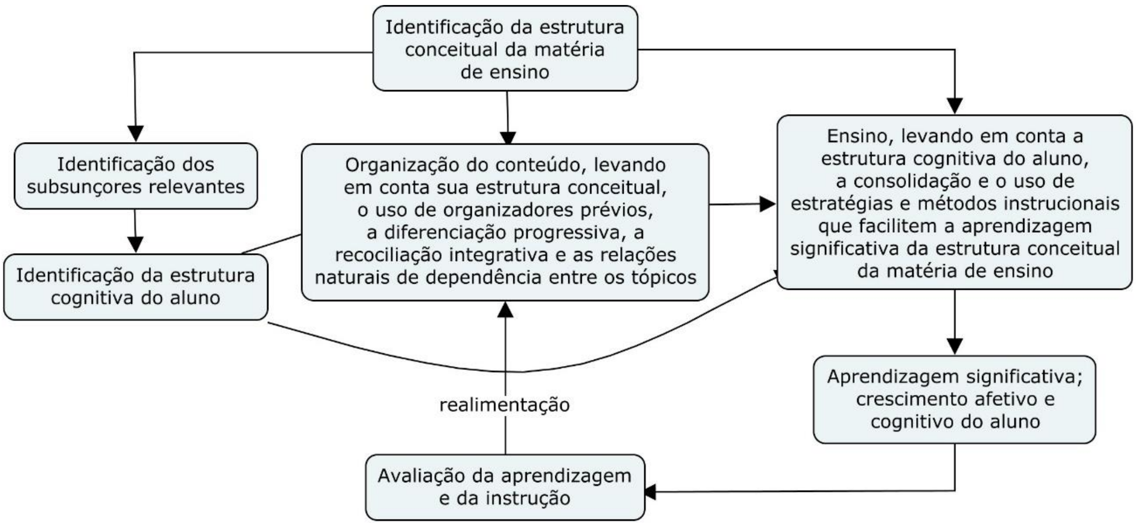
4ª) Ensinar utilizando recursos e princípios que facilitem a passagem da estrutura conceitual da matéria de ensino para a estrutura cognitiva do aluno de maneira significativa. A tarefa do professor aqui deve ser a de auxiliar o aluno a assimilar a estrutura da matéria de ensino e organizar sua própria estrutura cognitiva nessa área de conhecimento, pela aquisição de significados claros, estáveis e transferíveis.

Podemos concordar que, apesar de importante, a aplicação dessas tarefas no dia-a-dia do professor não é nada fácil. Inicialmente este deve dedicar um tempo considerável, para identificar e hierarquizar conceitos e proposições de um extenso programa para diferentes séries (especialmente o professor de Matemática), partindo do pressuposto de que subsunçor não é sinônimo de pré-requisito. O subsunçor tem mais o sentido de conhecimento prévio, algo já existente na estrutura cognitiva do indivíduo e que seja relevante para a aprendizagem do novo assunto.

O professor, tendo o entendimento de subsunçor, deve fazer uma tentativa séria de identificar a estrutura cognitiva do aluno antes da instrução, seja por meio de pré-testes, entrevistas ou outros instrumentos (Moreira, 2006). E, ainda, o autor ressalta que não se trata de impor ao aluno determinada estrutura conceitual, e, sim, de facilitar a aquisição significativa desses conceitos, o que é muito diferente, pois implica atribuição, por parte do aluno, de significado psicológico (idiossincrático) à citada estrutura. O professor pode inclusive se utilizar inicialmente de organizadores prévios, antes da temática propriamente dita, a fim de facilitar a ocorrência da aprendizagem significativa.

O papel do professor na facilitação da aprendizagem significativa está resumido e esquematizado no mapa conceitual da figura:

Figura 7: Um modelo para organizar a instrução de acordo com a Teoria de Ausubel



Fonte: Acervo da pesquisadora

4.1.7 A avaliação na aprendizagem significativa

A Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel é uma teoria cognitiva e, consequentemente, contrária à behaviorista que diz que somente o comportamento observável (estímulo e resposta) deve ser objeto de estudo. O psicólogo da educação interessa-se pelos mecanismos internos da mente humana durante a aprendizagem, logo os processos de subsunção, diferenciação progressiva e reconciliação integrativa, por exemplo, são processos cognitivos, e, como tais, não são simples de serem avaliados.

Inicialmente a avaliação não aparecia na teoria de Ausubel (1968). Só em 1980 ela foi introduzida por Joseph D. Novak como um dos elementos do ensino e da aprendizagem. Novak foi um dos responsáveis por aperfeiçoar e divulgar essa teoria, e sua importância foi tanta que alguns autores defendem que a aprendizagem significativa deveria ser conhecida hoje como a teoria de Ausubel e Novak. Em seu livro, Ausubel, Novak e Hanesian (1980) são listadas três importantes razões pelas quais a avaliação e a medida (nota) são de fundamental importância para a aprendizagem significativa:

(1) Através da avaliação é possível verificar o que o aprendiz já conhece antes de tentar ensiná-lo algo a mais. O que é fundamental em uma teoria cuja centralidade está, como já expusemos, em: "*o fator isolado mais importante que influencia a aprendizagem é aquilo que o aprendiz já conhece. Descubra o que ele sabe e baseie nisso os seus ensinamentos*".

(2) Também é possível vigiar a aprendizagem dos alunos, a fim de corrigir, esclarecer e consolidar a instrução. A avaliação deve permitir a ocorrência de uma retroalimentação que possibilite a instituição de medidas emendativas adequadas. Não é simplesmente informar os resultados dos testes, que também têm sua importância, mas é preciso discuti-los com os alunos, realizar um diagnóstico e buscar soluções para que os fins educacionais sejam realmente alcançados. Nas palavras dos autores:

> A retroalimentação de um exame confirma, esclarece e corrige as ideias e identifica diferencialmente áreas que exigem mais pensamento e estudo. O simples identificar as respostas corretas num teste de múltipla escolha aumenta significativamente os escores num reteste uma semana depois. Esta função corretiva da retroalimentação é extremamente importante porque os alunos muitas vezes se sentem 'certos' a respeito de respostas erradas (AUSUBEL, NOVAK E HANESIAN, 1980, p. 503).

(3) Por último, é através da avaliação que verificamos também a eficácia dos diversos métodos de ensino e das diferentes maneiras de organizar e sequenciar os conteúdos. É importante assegurar um controle sobre a qualidade do programa educacional e do currículo como um todo. Avaliar significa dar valor, julgar, apreciar, é preciso examinar os resultados do processo para ver se os objetivos educacionais estão realmente sendo atingidos. Objetivos esses que devem já estar bem claros para o professor. Para Ausubel, Novak e Hanesian,

> Em primeiro lugar, devemos decidir quais os resultados da aprendizagem que se deseja induzir, e depois estruturar o processo instrucional de acordo. Em segundo lugar, é necessário determinar o grau de progresso em relação ao objetivo durante o curso da aprendizagem – tanto como retroalimentação para o estudante quanto como meio de vigiar a eficácia da instrução. Finalmente, é importante avaliar os resultados últimos da aprendizagem em relação aos objetivos, tanto do ponto de vista do rendimento dos alunos como do ponto de vista dos métodos e materiais de ensino (AUSUBEL, NOVAK E HANESIAN, 1980, p. 500).

Esses autores enfatizam a importância de uma maior frequência e variedade nos instrumentos de avaliação. Sugerem testes frequentes, semanais e quadrimestrais, além dos exames finais, o que não só facilita "uma testagem, retroalimentação e consolidação após cada unidade (tópico, capítulo) de material de conhecimentos" evitando os estudos de última hora e a aprendizagem mecânica, como também diminuem a ansiedade dos alunos, dessensibilizando-se emocionalmente em relação às provas. Quanto à diversidade, recomenda-se ao professor que elabore "pré-testes e pós-testes a longo prazo, assim como pós-testes simultâneos e imediatos", testes dissertativos (para medir a organização, coesão e integração do conhecimento do estudante), testes de múltipla escolha (para medir a amplitude do conteúdo); simulados contextualizados e amostras de trabalhos.

A fim de favorecerem a aprendizagem, todos os testes aplicados pelo professor devem atender os seguintes critérios:

- Validade: para ser considerado válido um teste deve conter uma amostra adequada e representativa de itens, enfatizar a compreensão das ideias mais significativas de cada disciplina e as relações entre elas, e não só um domínio mecânico de fatos discretos.
- Fidedignidade: se refere a auto consistência do teste ou à sua generalidade sobre os itens que o compõem, sua estabilidade em testagens consecutivas, precisão, objetividade e ausência de itens que carecem de poder discriminativo. Quanto mais frequentes os testes e os resultados de um determinado aluno, mais autêntica será a sua média final, por exemplo.
- Representatividade: tomando como base o princípio da amostragem, pois é impossível avaliar o conhecimento do aluno em todos os componentes, um teste deve conter uma amostra adequada e

representativa do universo do conteúdo ao qual se avalia e, além disso, esta precisa ser aleatória, ou seja, selecionada ao acaso. Isso evita que o conhecimento de alguns alunos seja superestimado em detrimento de outros.

- Discriminabilidade: Um teste eficiente deve conter uma grande quantidade de itens cuidadosamente selecionados quanto à dificuldade, variando-se fatores para que seja possível distinguir entre os alunos que sabem mais e os que sabem menos. Quanto mais a média de uma turma se aproximar de 50% da nota, maior a discriminabilidade de um teste.
- Exequibilidade: Um teste será mais exequível à medida que atender afirmativamente às seguintes considerações: (1) As informações contidas são significativas e não triviais? (2) O teste é adequado para as diferentes idades dos alunos? (3) O custo do teste e o tempo de aplicação, interpretação e correção são convenientes? (4) A avaliação é objetiva? Há necessidade de preparação para interpretar o teste?

Fica claro que a avaliação como é feita hoje está muito distante desse ideal recomendado pelos autores. Iniciativas precisam ser tomadas, mas não no sentido de abandonar ou desprezar a avaliação, pois todas as falhas são remediáveis. O professor deve se valer cada vez mais dessa ferramenta não como um fim da prática educacional, mas como um meio para alcançar a aprendizagem.

4.2 O Ensino de Matemática na EJA e a Resolução de Problemas

Infelizmente, grande parte das dificuldades dos nossos alunos em Matemática são, na verdade, de natureza psicológica e não necessariamente um problema de aprendizagem em si. A ideia de que a Matemática é algo difícil, distante da realidade e até inacessível para pessoas comuns está espalhada por toda a parte, e muitos acreditam que são poucos os “gênios” que estão aptos para aprender a disciplina.

A Coordenação de Educação de Jovens e Adultos (COEJA) da Secretaria de Educação Fundamental do Ministério da Educação organizou uma consulta no primeiro semestre de 2001, preliminar à elaboração da PC, que apontou a

Matemática como sendo a disciplina mais difícil de ser aprendida, segundo alunos e professores. A partir desse estudo, BRASIL (2002) observou que:

> Atribui-se a ela uma grande parte da responsabilidade pelo fracasso escolar de jovens e adultos. O baixo desempenho em Matemática no Ensino Fundamental traduz-se em elevadas taxas de retenção, tornando-se um dos filtros sociais que selecionam os que terão ou não oportunidade de avançar na educação básica. Os que abandonam a escola o fazem por diversos fatores de ordem social e econômica, mas também por se sentirem excluídos da dinâmica de ensino e aprendizagem. Nesse processo de exclusão, o insucesso na aprendizagem matemática tem tido papel destacado e determina a frequente atitude de distanciamento, temor e rejeição em relação a essa disciplina, que parece aos alunos inacessível e sem sentido (BRASIL, 2002, p. 13).

Esse mito precisa ser banido da nossa sociedade. Nossas crianças, jovens e adultos devem ser apresentados a uma Matemática próxima de suas realidades, mostrar que ela está presente em tudo à nossa volta, sem a qual não poderíamos usufruir das facilidades que a tecnologia nos trouxe, das mais complexas às mais simples. Aprender Matemática se torna muito mais atraente e curioso quando conseguimos mostrar para os nossos alunos a importância dela no nosso dia a dia. Sobre a importância de mudar o "olhar" do nosso público para a Matemática, BRASIL (2002) afirma que:

> A maioria dos jovens e adultos que retomam os estudos já tiveram experiências negativas com o saber matemático. Portanto, as concepções que eles têm sobre a Matemática assim como sobre seu papel como alunos são fatores cruciais para a aprendizagem na EJA (BRASIL, 2002, p. 16).

Todos são capazes de aprender Matemática, e de certa forma, todos a sabem. É óbvio que a depender da atividade exercida alguns a utilizarão mais, outros menos, mas mesmo as pessoas mais simples diariamente estão cercadas de diversas situações nas quais a resolução de problemas, o raciocínio lógico e a tomada de decisões estão presentes em suas vidas. Precisamos rotineiramente fazer cálculos, medições, comparações, interpretar códigos, gráficos etc., e deveríamos saber que a Matemática é a matéria que nos dá muitas ferramentas para chegarmos às melhores soluções.

É o conhecimento de tamanha importância e da proximidade inevitável e benéfica da Matemática conosco que precisa ser <u>inculcado</u> em todas as pessoas, começando pelos que estão ao nosso alcance e responsabilidade, que são os nossos alunos. A partir desse objetivo de aproximar a Matemática da realidade dos educandos, foi que buscamos na aprendizagem significativa e na resolução de problemas a melhor abordagem para trabalhar os conteúdos matemáticos com os alunos de EJA.

Segundo BRASIL (2002):

> Os alunos da EJA devem perceber que a Matemática tem um caráter prático, pois permite às pessoas resolver problemas do cotidiano, ajudando-as a não serem enganadas, a exercerem sua cidadania. No entanto, o ensino e a aprendizagem da Matemática devem também contribuir para o desenvolvimento do raciocínio, da lógica, da coerência – o que transcende os aspectos práticos (BRASIL, 2002, 17).

Ou seja, devemos partir de situações práticas com os alunos jovens e adultos, mas ir gradativamente desvinculando do concreto e mobilizar os conceitos em situações diferentes a fim de que os mesmos possam ser generalizados e transferidos a outros contextos. “Um conhecimento só se constrói plenamente quando é mobilizado em situações diferentes daquelas que lhe deram origem, isto é, quando é transferível para novas situações” (BRASIL, 2002, p. 16). Podemos concluir que os conceitos introduzidos nos problemas contextualizados devem ser descontextualizados para, posteriormente, serem contextualizados novamente.

4.2.1 A Resolução de Problemas

A Proposta Curricular para a Educação de Jovens e Adultos traz em suas Orientações Didáticas que não há um único ou melhor caminho para ensinar Matemática, mas diz que o professor deve conhecer e construir sua prática com diversas possibilidades de trabalho entre as quais é destacada a Resolução de Problemas.

O trabalho com essa metodologia de ensino exige do professor e dos alunos novas posturas e atitudes com relação ao trabalho em sala de aula, colocando o aluno em uma posição mais ativa da sua aprendizagem, onde ele participa de “um esforço coletivo para construir a resolução de um problema, com direito a ensaios e erros, exposição de dúvidas, explicitação de raciocínios e validação de resultados” (BRASIL, 2002).

O professor deve escolher ou elaborar problemas apropriados ao conteúdo ou ao conceito que pretende construir, entregar aos alunos para que estes leiam, e interferir apenas com o objetivo de incentivar os estudantes a solucionar o problema, bem como provocá-los a aprofundar a reflexão sobre suas estratégias. É preciso ressaltar que, dependendo da complexidade do problema, uma aula com essa metodologia pode ser demorada. Os estudantes precisam ter a chance de desenvolver o pensamento matemático de maneira ativa, sobre o qual o professor irá formalizar um novo conhecimento. Então é preciso estar preparado.

Os problemas devem ser desafiadores e sua resolução não pode ser obtida por uma mera evocação da memória, mas precisa exigir um trabalho de interpretação e compreensão, a elaboração e execução de um plano e a possibilidade de retrospecto e verificação dos resultados. Como diz na Proposta Curricular para a EJA:

> Consideram-se como problema situações que demandam a realização de uma sequência de ações ou operações para obter um resultado; ou seja, situações em que a solução não está disponível de início, mas é necessário e possível construí-la (BRASIL, 2002, p.27).

George Polya (1887-1985), autor do livro “A Arte de Resolver Problemas”, considerado o pai dessa metodologia, disse que “a resolução de problemas foi e é a coluna vertebral da instrução matemática desde o Papiro de RHIND” (apud Dante 2000, p. 7).

O matemático formulou as quatro etapas fundamentais para a resolução de um problema:

- 1ª etapa - Compreender o problema. O que se pede? Quais são os dados do problema? É possível fazer um esquema ou uma figura para ajudar na resolução? É possível estimar uma resposta?
- 2ª etapa - Traçar um plano. Qual a melhor estratégia para tentar desenvolver? Lembro de algum problema semelhante que pode ajudar a resolver este? Posso organizar os dados em tabelas e gráficos? É possível separar o problema em partes?
- 3ª etapa - Colocar o plano em prática. Executar o plano traçado, verificando-o passo a passo. Efetuar todos os cálculos indicados no plano. Executar as estratégias pensadas e tentar obter outras maneiras de resolver o problema.
- 4ª etapa - Fazer o retrospecto ou a verificação. Examinar se a solução obtida está correta, se faz sentido e realmente responde o

que foi perguntado. É possível utilizar o método aplicado para resolver problemas análogos?

Essas estratégias apresentadas por Polya (2006) destacam elementos importantes, pois representam um método de investigação no qual é combinado todo o saber do aluno. Esse conjunto de processos de pensamentos (o levantamento de hipóteses, a testagem dessas hipóteses e a análise dos resultados) deve ser desenvolvido no dia a dia da sala de aula com o auxílio do professor. Para Polya:

> O professor que deseja desenvolver nos alunos o espírito solucionador e a capacidade de resolver problemas deve incutir em suas mentes algum interesse por problemas e proporcionar-lhes muitas oportunidades de imitar e de praticar. Além disso, quando o professor resolve um problema em aula, deve dramatizar um pouco as suas ideias e fazer a si próprio as mesmas indagações que utiliza para ajudar os alunos. Por meio desta orientação, o estudante acabará por descobrir o uso correto das indagações e sugestões e, ao fazê-lo, adquirirá algo mais importante do que o simples conhecimento de um fato matemático qualquer (POLYA, 2006, p.4).

As pesquisas realizadas pelo autor na resolução de problemas tinham como objetivo proporcionar uma educação matemática mais significativa. Polya (2006) ressalta que através dessa metodologia o professor deve assumir um papel de participante crítico e trabalhar de forma expressiva “para o desenvolvimento da inteligência do aluno, levando-o a pensar e trabalhar efetivamente na resolução, para que realmente aprenda, investigando e construindo o conhecimento” (COELHO, 2014, p. 6).

Reconhecendo essa grande importância da Resolução de Problemas como ferramenta para o ensino-aprendizagem da Matemática e sua associabilidade com a Teoria da Aprendizagem Significativa, acreditamos ser possível com essa união ampliar o potencial destas metodologias. Enquanto esta última apresenta possibilidades de práticas interessantes e motivadores, a primeira possibilita um sistema de referencial teórico para organização do ensino com uma abordagem mais humana e significativa.

CAPÍTULO 5
ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

A presente pesquisa, conforme mencionado no Capítulo 2, foi realizada através da aplicação de dois questionários com abordagens diferenciadas com o objetivo de verificar a aprendizagem dos alunos e comparar seus desempenhos nos diferentes tipos de atividades. A análise e discussão dos resultados do primeiro questionário será feita sob a perspectiva da análise de erros (Cury, 1994), enquanto no segundo utilizaremos as fases consideradas por Polya (1995) para a resolução de problemas, distinguindo a etapa na qual o aluno apresenta dificuldade na resolução.

Inicialmente faremos uma breve caracterização dos participantes e uma descrição dos momentos de aplicação dos questionários, tendo em vista a relevância nessa análise.

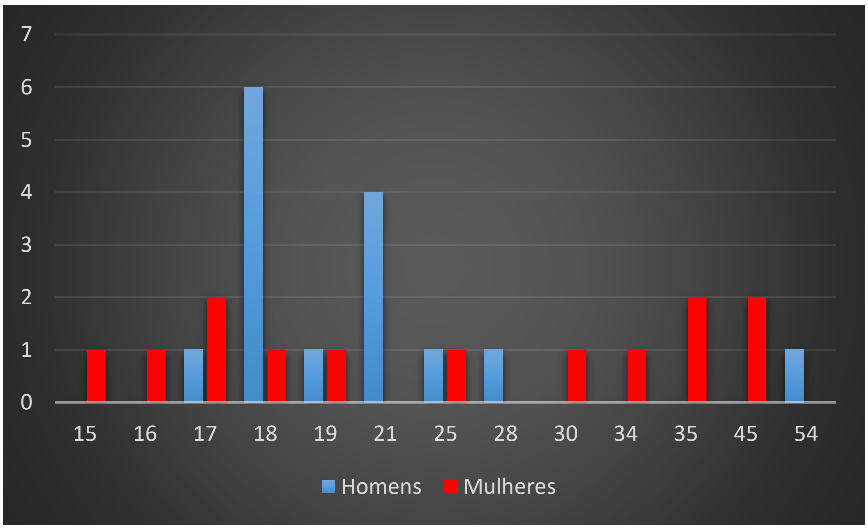
5.1 Caracterização dos participantes e aplicação dos questionários

Este estudo possui uma característica especial por ter sido realizado pela própria professora de Matemática do público examinado. Isso possibilitou, portanto, vários momentos de sondagem e conhecimento dos alunos, além de uma relação afetuosa e de confiança entre ambas as partes, desenvolvida através de momentos diários de diálogos e demonstração de interesse pela vida e pelos conhecimentos prévios dos alunos.

Durante o decorrer das aulas em que foi abordado o conteúdo de Divisibilidade, anteriormente à aplicação dos questionários, a professora baseou seu trabalho desde o início na Teoria da Aprendizagem Significativa e na resolução de problemas. O diferencial dos dias de resolução das atividades foi a forma não verbal de apresentação dos problemas.

Dentre os 28 alunos dessa turma, 15 eram do sexo masculino e 13 do sexo feminino. A enorme amplitude nas diferenças de idades desses alunos e consequente divergência de interesses, de vivências, de subsunçores, são fatores que representam alguns dos maiores desafios para o ensino da EJA. Podemos observar no gráfico abaixo como era grande essa variação:

Figura 8: Distribuição dos alunos da 1ª etapa da EJAEF por idade



Fonte: Acervo da pesquisadora

Dentre as profissões citadas pelos alunos havia: donas de casa, ex-agricultores, costureiras, vendedores, babás, cuidadores de idosos e diaristas. Sendo que havia ainda indivíduos que nunca trabalharam e cuja principal ocupação diária era a prática de esportes na rua ou o entretenimento com jogos virtuais e redes sociais, dois eram ex-presidiários.

Os participantes foram separados em 9 grupos, sendo 8 grupos com 3 alunos cada e um grupo com 4 alunos. Os grupos foram previamente escolhidos de modo que os alunos com perfis semelhantes ficassem juntos nos dois dias, com o objetivo de observar seu desempenho no segundo questionário, que foi elaborado com perguntas potencialmente significativas para aqueles alunos em específico.

Foi dado o tempo máximo de 1 hora e meia para cada grupo responder a cada questionário enquanto a professora faria as observações.

No dia da aplicação da primeira atividade surgiram poucas dúvidas. Os alunos sabiam automaticamente o que fazer para chegar nos resultados. Consultavam uns aos outros dentro do próprio grupo para tirar alguma dúvida que surgia. Estavam concentrados e ansiosos para terminar antes do tempo e serem liberados mais cedo.

O último grupo concluiu no horário limite e todos entregaram suas atividades sem maiores dificuldades.

Já no segundo dia de aplicação, o desenrolar foi bem diferente. Quando receberam os questionários específicos, todos os alunos questionavam o que deveria ser feito naquela atividade. A professora explicou a proposta das questões e o objetivo da atividade, mas os alunos continuaram perdidos como se tentando decifrar um enigma naquela folha.

Passou-se mais de meia hora e os alunos queriam desistir por não conseguirem nem começar a responder a atividade. Essa postura foi frustrante para a pesquisadora, que precisou intervir ativamente na resolução dos problemas, sentar-se com cada grupo e tentar compreender a dificuldade deles.

Foi quando ao ler as perguntas em voz alta para cada grupo, a professora percebeu que o obstáculo com o qual os estudantes haviam se deparado tratava-se de uma deficiência na **leitura** e interpretação de textos.

Durante as aulas potencialmente significativas que os alunos haviam tido, os problemas sempre eram lidos e explicados pela professora em voz alta para a turma. Ao se depararem com problemas escritos com “textos longos”, segundo eles, não sabiam como proceder e diziam não entender as questões e que estas eram muito difíceis, querendo unanimemente desistir.

Após essa intervenção indesejada, porém necessária, de leitura das questões para todos os grupos, estes afirmaram ter compreendido e serem por fim capazes de tentar solucionar os problemas.

O tempo limite necessitou ser estendido em trinta minutos, mas o restante da noite correu sem mais problemas.

Um terceiro momento que deveria ter ocorrido após a resolução do segundo questionário, com o intuito de corrigir, esclarecer e consolidar a instrução, além de obter um feedback dos alunos sobre as atividades acabou não sendo realizado, pois, naquele mesmo dia, foi deflagrada uma greve por tempo indeterminado dos professores da rede estadual de educação de Sergipe, impossibilitando uma melhor conclusão desta pesquisa.

Uma tentativa de obter algum retorno e a opinião dos estudantes quanto à aplicação das atividades precisou acontecer após a aplicação do segundo questionário de forma breve, por conta do atraso na finalização da atividade, do horário perto das 22 horas e de sermos os únicos na escola devido à greve.

Dessa forma, descobrimos a preferência dos alunos entre os tipos de atividades. E, ao contrário do que se esperava, ficou muito clara e unânime a preferência pelo Questionário I, com exercícios repetitivos, mecânicos sem contextualização por possuir enunciados curtos e diretos, que não exigiam uma grande mobilização de conceitos e do uso de diferentes estratégias por parte dos estudantes.

Os alunos declararam ainda ter ficado mais interessados e motivados pelo fato de trabalharem com seu próprio grupo de amigos e de se sentirem livres para trabalhar sem maiores intervenções da professora. Cada um se sentia responsável pelo bom desempenho do grupo e se esforçara muito mais do que se estivesse sozinho. De acordo com a Proposta Curricular da EJA “é importante que os alunos de EJA percebam que, pela cooperação na busca de soluções de problemas, podem aprender com seus pares e, também, ensinar” (BRASIL, 2002, p. 19). Tudo isso foi confirmado através da observação da pesquisadora.

5.2 Análise dos Questionários

Iremos analisar os dados extraídos das respostas dos alunos às atividades propostas. O espaço amostral total da pesquisa são os 28 alunos que, de fato, frequentavam as aulas e responderam aos questionários. Entretanto, ocasionalmente houve alunos que não responderam a alguns itens das questões.

Os dados foram coletados e organizados em uma tabela que traz, a princípio, uma abordagem quantitativa dos erros e acertos, mas veremos que as análises vão além de certo ou errado. É válido ressaltar que as informações coletadas têm por objetivo identificar as dificuldades dos alunos ao se depararem com problemas semelhantes apresentados de maneiras diferentes. Enquanto o primeiro questionário foi elaborado com questões mais objetivas, o segundo, exigia a interpretação do problema por parte do aluno a fim de resolver as questões.

Cury (2007) apresenta nove classificações para erros encontrados em uma pesquisa investigativa. Apresentaremos aqui uma classificação simplificada a fim de facilitar a compreensão dos dados e, de forma objetiva, trazer a reflexão sobre quais práticas pedagógicas podem ser utilizadas em uma intervenção futura no entendimento das estratégias de resolução das questões parcialmente corretas e incorretas.

As tabelas foram criadas considerando quatro aspectos das resoluções: corretas, parcialmente corretas, incorretas e em branco.

- **Corretas:** nessa categoria contempla as resoluções corretas, que chegaram ao resultado esperado usando o algoritmo ou o raciocínio adequado.
- **Parcialmente corretas:** respostas em que o aluno usa o algoritmo ou o raciocínio adequado, mas comete algum tipo de erro relacionado às operações matemáticas e, por conta disso, não chega ao resultado esperado.
- **Incorretas:** engloba questões que os alunos erraram por não entenderem o conteúdo, também aqueles que responderam de uma forma sem sentido apenas para não deixar em branco.
- **Em branco:** aquelas que o aluno não iniciou qualquer resolução.

5.2.1 Análise do Questionário I

O Questionário I (Apêndice I) aborda o estudo de 2 exercícios sobre mmc e mdc sendo a primeira questão com cinco itens (a, b, c, d, e) independentes e a segunda com apenas dois itens (a e b) dependentes entre si das respostas do problema proposto.

5.2.1.1 Análise da questão 1

1. Usando a decomposição simultânea em fatores primos, determine:

a) $\mathrm{m.m.c.}(30, 75) =$ ______ e $\mathrm{m.d.c.}(30, 75) =$ ______

b) $\mathrm{m.m.c.}(18, 60) =$ ______ e $\mathrm{m.d.c.}(18, 60) =$ ______

c) $\mathrm{m.m.c.}(66, 102) =$ ______ e $\mathrm{m.d.c.}(66, 102) =$ ______

d) $\mathrm{m.m.c.}(36, 54, 90) =$ ______ e $\mathrm{m.d.c.}(36, 54, 90) =$ ______

e) $\mathrm{m.m.c.}(48, 20, 40, 36) =$ ______ e $\mathrm{m.d.c.}(48, 20, 40, 36) =$ ______

Neste exercício era esperado que o aluno demonstrasse a habilidade de decompor simultaneamente dois ou mais números em fatores primos para encontrar o valor do mmc e do mdc entre eles. Esse tipo de questão pode ser resolvido mecanicamente, porém mobiliza todos os conceitos aprendidos anteriormente como: divisão, múltiplos, divisores, números primos. Sem esse conhecimento prévio esse tipo de questão simples torna-se dificílima.

Outra vantagem desse tipo de questão é a objetividade do que se pede. Os alunos prontamente (mecanicamente) sabiam o que deveriam fazer para solucionar cada item. Os erros se deram justamente pela deficiência na aprendizagem de um ou mais dos conceitos anteriores: ou os alunos erraram na divisão, ou não souberam encontrar os divisores de um determinado número, ou confundiram números primos e compostos.

O resultado, porém, foi bastante satisfatório. Houve uma participação ativa de cada membro dos grupos. Alguns dividiram os itens entre si, mas a maioria fez todos os cálculos juntos, um conferindo o cálculo do outro. Observamos o interesse deles em lembrar aos colegas o que a professora havia ensinado, ou como eles haviam resolvido problemas semelhantes nos dias anteriores.

Era perceptível também um raciocínio muito mecânico e decorado: “Agora faz assim”. “Não! Primeiro tem que ser por 2. Quando não puder mais por 2 é que vem o 3”. Alunas do grupo 2. “A gente já fez uma conta com esses mesmos números. Vai por 11, depois por 17”. Aluno do grupo 7.

A tabela a seguir permite que visualizemos o desempenho dos grupos em cada item dessa questão.

Tabela 1: Desempenho dos grupos na Questão 1

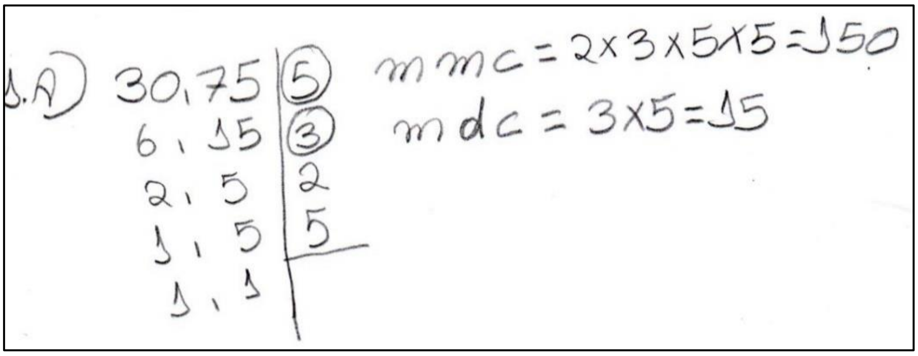
Questão 1	Resposta Correta	Resposta Parcialmente Correta	Resposta Incorreta	Em branco
Item a)	100%	-	-	-
Item b)	88,9%	11,1%	-	-
Item c)	77,8%	22,2%	-	-
Item d)	55,6%	33,3%	-	11,1%
Item e)	44,4%	44,4%	-	11,1%

Fonte: Acervo da pesquisadora

Como podemos inferir da tabela acima, os alunos tiveram um resultado bastante satisfatório nesta primeira questão, demonstrando ter conhecimento das operações de divisão, divisores e números primos. Também comprovaram saber calcular o mmc e o mdc de dois ou mais números naturais através da decomposição simultânea em fatores primos. Não houveram respostas totalmente incorretas, apenas o grupo 9 deixou os itens d) e e) em branco.

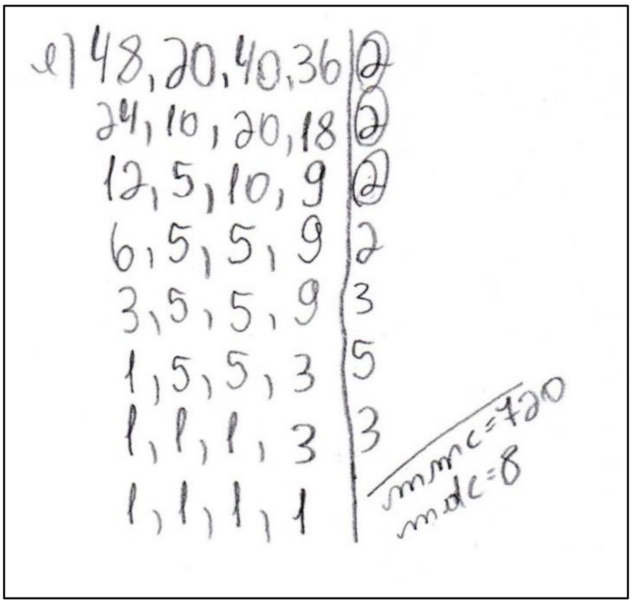
As figuras a seguir exemplificam as respostas dadas pelos alunos:

Figura 9: Resposta Correta do grupo 2 no item 1a)



Fonte: Acervo da pesquisadora

Figura 10: Resposta Parcialmente Correta do grupo 7 no item 1e)

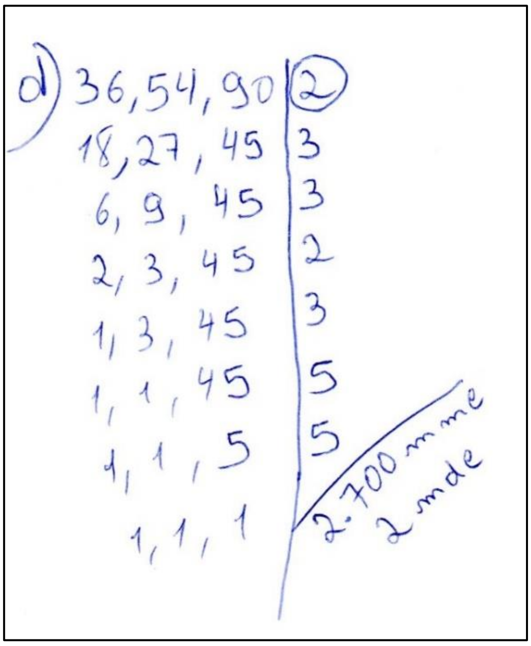


Fonte: Acervo da pesquisadora

Os alunos desenvolveram grande parte do raciocínio como esperado, porém, erroneamente circularam o terceiro fator 2, como se fosse mais um fator comum na decomposição. Todavia, não devemos desconsiderar os vários acertos em um algoritmo que mobiliza diversos conhecimentos. O mdc encontrado foi 8 ao invés de 4, que seria a resposta correta, contudo consideramos uma resposta satisfatória.

Se os alunos tivessem feito o retrospecto ou a verificação, teriam percebido que 8 não é divisor de 20 nem de 36, teriam retomado a resolução e corrigido o erro. É necessário reforçar com eles sempre essa importante etapa da resolução de problemas.

Figura 11: Resposta Parcialmente Correta do grupo 6 no item 1d)



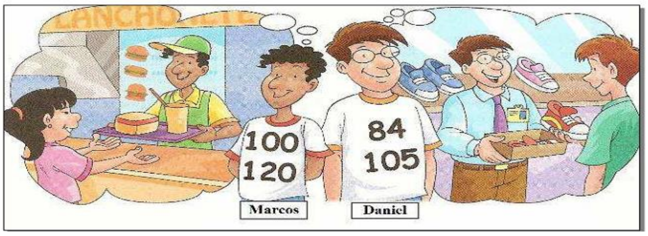
Fonte: Acervo da pesquisadora

Os alunos usaram o algoritmo adequado, mas não reconheceram o 3 como sendo divisor de 45. Ao efetuarem a divisão de 45 por 5 obtiveram um quociente equivocado. Por conseguinte, não chegaram ao resultado esperado.

Esse tipo de algoritmo incentiva a prática da divisão e a identificação dos divisores primos dos números. Mesmo sendo ensinados de várias formas de se encontrar o mmc e o mdc entre dois ou mais números, os alunos, na maioria das vezes, escolhem aprender um único método e o da decomposição simultânea em fatores primos é o mais comum. Isso se dá talvez por esse método já entregar ambos os valores de uma só vez. No caso dessa questão em particular esse foi o método pedido.

5.2.1.2 Análise da Questão 2

Marcos e Daniel são universitários. O máximo divisor comum (mdc) dos números escritos nas camisetas é a idade de cada um, e o mínimo múltiplo comum (mmc) corresponde a quanto cada um ganhou trabalhando nas últimas férias escolares. Calcule o mdc e o mmc e responda às perguntas:



Fonte: Acervo da pesquisadora

a) Quem é o mais velho?

b) Quem ganhou mais trabalhando nas últimas férias? Quanto a mais?

Nesta questão esperávamos que os alunos demonstrassem a habilidade de interpretação de texto para a resolução de um exercício. Pela questão anterior, eles já haviam revelado que sabiam utilizar o algoritmo ensinado para o cálculo do mmc e do mdc. Acrescenta-se agora a dificuldade da compreensão do texto para que o aluno novamente alcançasse o mesmo fim.

A tabela resultante da análise das respostas dos alunos na segunda questão encontra-se a seguir:

Tabela 2: Desempenho dos grupos na Questão 2

Questão 2	Resposta Correta	Resposta Parcialmente Correta	Resposta Incorreta	Em branco
Item a)	22,2%	55,6%	-	22,2%
Item b)	33,3%	44,4%	-	22,2%

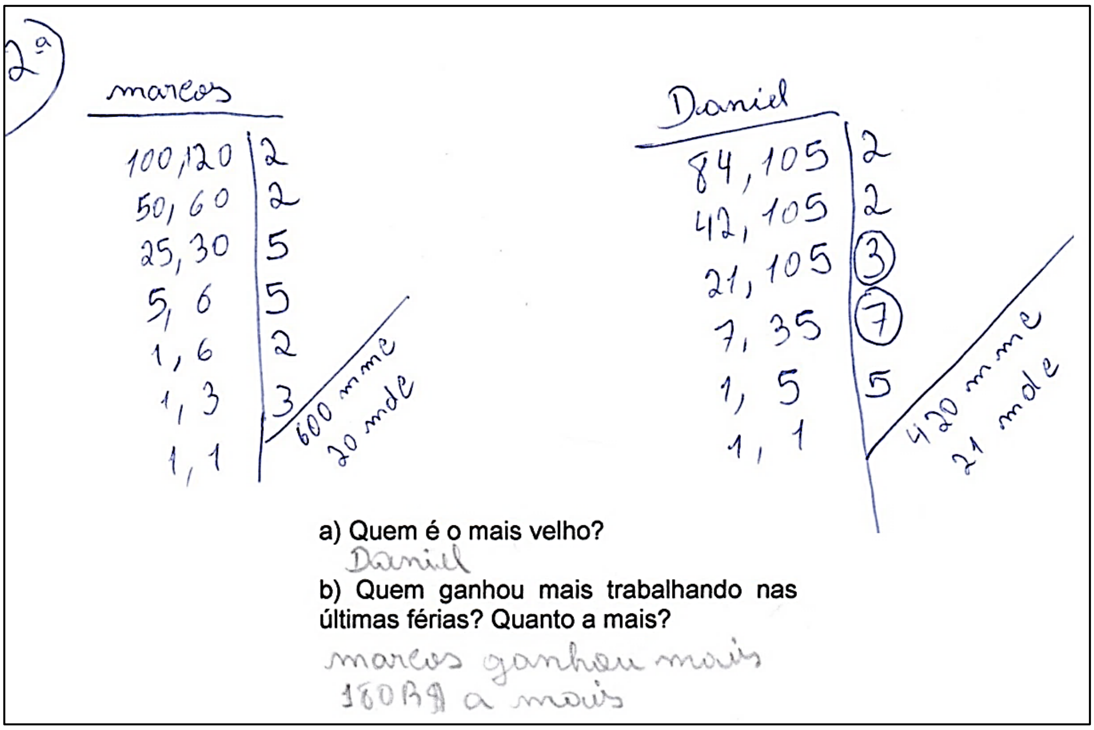
Fonte: Acervo da pesquisadora

Nesta avaliação percebemos a repetição dos erros apontados na questão 1. Erros “coerentes” que demonstram haver conhecimento do processo que deve ser realizado, entretanto aparecem alguns equívocos: no cálculo da divisão e da multiplicação, usando um divisor composto ao invés de um primo; falhas essas que seriam facilmente corrigíveis se os alunos tivessem o hábito de aplicar a 4ª etapa de Polya para a resolução de um problema.

Veremos nas imagens abaixo alguns exemplos das respostas obtidas e a seguir uma tabela onde consideramos as questões com pequenos erros na execução do plano traçado por eles como respostas parcialmente corretas. A maioria dos alunos demonstrou ter compreensão do que precisava ser feito e fez a escolha correta do plano de execução.

Observação: A princípio essa compreensão parecia ser do problema em si, mas, depois da experiência seguinte onde eles demonstraram uma séria deficiência na leitura e interpretação de textos, ficou evidente que eles sabiam o que fazer por já terem feito muitos exercícios semelhantes. O que permitiu-nos constatar indícios de uma aprendizagem mecânica com uma incorporação não substantiva, arbitrária e literal dos conceitos vistos, que serão rapidamente esquecidos no futuro.

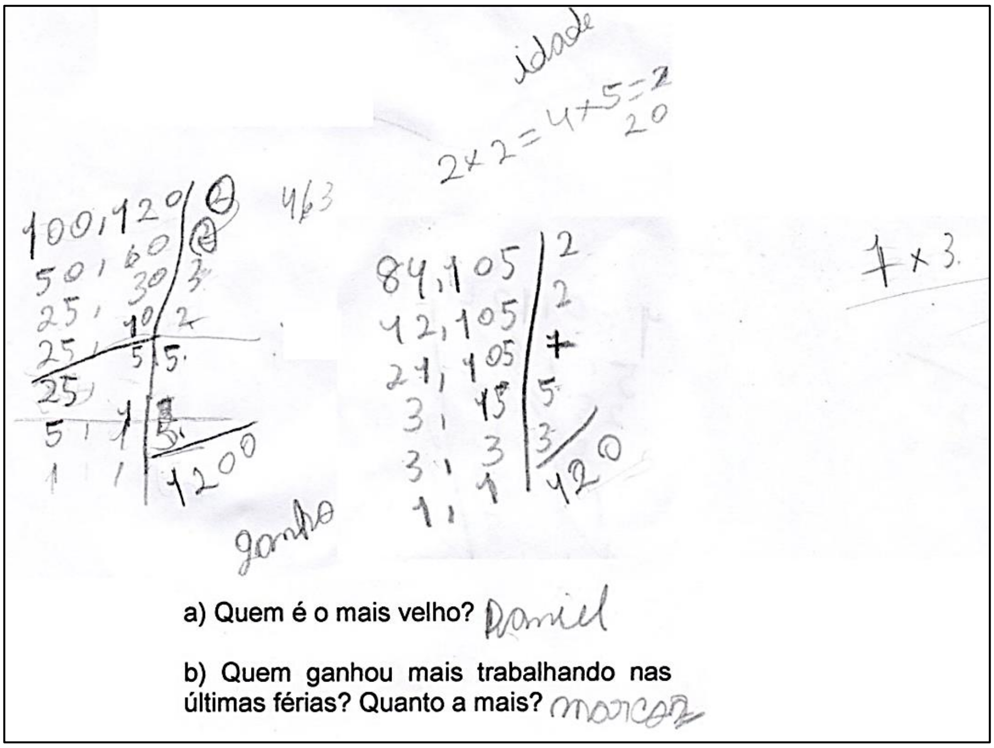
Figura 12: Resposta Correta do grupo 6 na questão 2



Fonte: Acervo da pesquisadora

Resolução correta. Os estudantes conseguiram traduzir em linguagem matemática as informações presentes no enunciado. As operações foram realizadas com êxito e os divisores perfeitamente identificados e multiplicados, produzindo resultados corretos, que foram traduzidos para as respostas inteiramente satisfatórias dos itens a) e b).

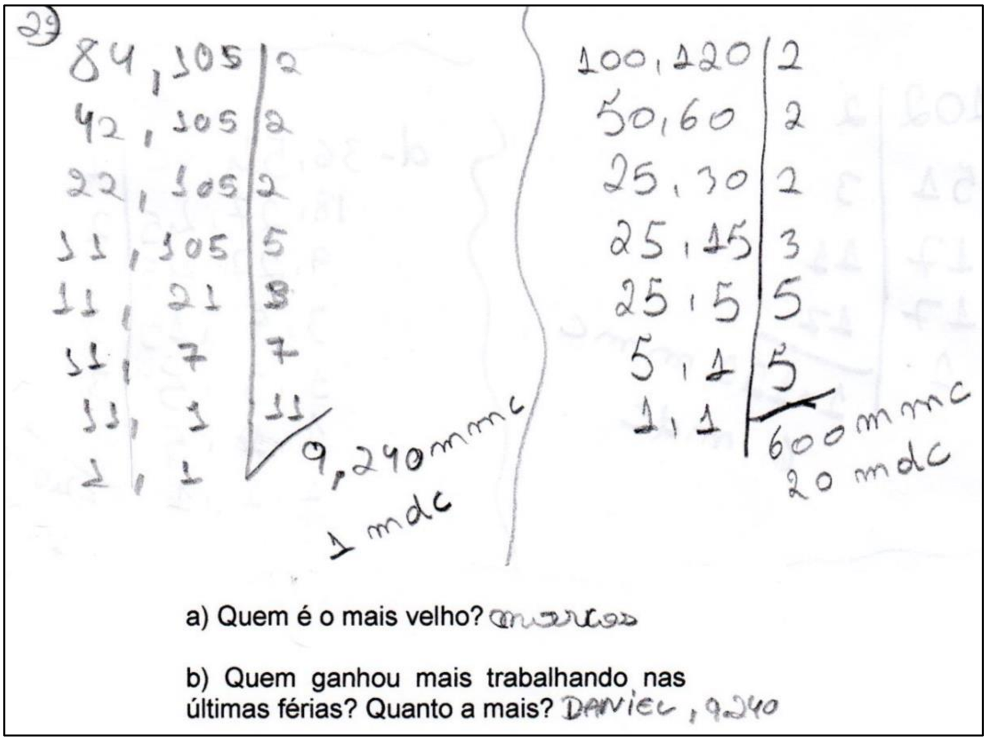
Figura 13: Resposta Parcialmente Correta do grupo 5 na questão 2



Fonte: Acervo da pesquisadora

Apesar de desorganizadas, as respostas estão corretas. Faltou apenas concluírem a resposta do item b) de quanto Marcos ganhou a mais que Daniel.

Figura 14: Resposta Parcialmente Correta do grupo 3 na questão 2



Fonte: Acervo da pesquisadora

Mesmo as respostas que seriam incorretas demonstraram a compreensão do problema e o domínio do algoritmo. Nesse caso, os alunos dividiram incorretamente 42 por 2, o que ocasionou o erro no encontro dos demais fatores primos, levando a um mmc e mdc dos números na camisa de Daniel incorretos e, por conseguinte, as respostas incorretas dos itens a) e b).

De modo geral, os alunos demonstraram conhecer bem a técnica de resolução, apresentando erros principalmente de cálculos na execução dos planos traçados e na falta de verificação dos resultados obtidos. Nesse dia não foi possível perceber erros de compreensão do problema, por serem questões familiares dando indícios de uma ocorrência satisfatória da aprendizagem, mas não sendo possível avaliar se houve uma aprendizagem efetiva. Contudo, os educandos revelaram um bom domínio do conteúdo de divisibilidade, que seria novamente testado no dia seguinte com outro tipo de atividade diferente das que estavam acostumados, permitindo a verificação da aprendizagem significativa.

5.2.2 Análise do Questionário II

O Questionário II (Apêndice II) foi elaborado e proposto de maneira totalmente diversa do Questionário I. Enquanto este foi baseado em atividades comuns em livros didáticos do Ensino Regular, o Questionário II foi pensado propositalmente para grupos específicos de alunos, diferente das questões, originalmente, encontradas no material instrucional, requerendo transformação do conhecimento.

Foram escolhidas perguntas não-aleatórias que fossem potencialmente significativas, relacionáveis e curiosas para aqueles estudantes. Questões essas que poderiam ser respondidas sem o uso de algoritmos ou cálculos formais, mas com o raciocínio análogo utilizado em atividades de seu dia a dia, no trabalho ou em qualquer ambiente não escolar.

Formado por duas questões que abordam ainda o conteúdo de Divisibilidade. Cada grupo (com os mesmos alunos da noite anterior) recebeu a sua atividade e a instrução para que lessem os problemas em conjunto, tentassem se apropriar dos mesmos e respondessem da maneira que preferissem. Não era obrigatório utilizar fórmulas ou algoritmos. Poderiam escrever, desenhar ou expressar livremente como fariam para solucionar aqueles problemas em uma situação cotidiana.

Este questionário foi composto por 4 Atividades diferenciadas para os 9 grupos. Sendo a Atividade I para os grupos 1, 8 e 9, a Atividade II para os grupos 5 e 7, a Atividade III para os grupos 4 e 6 e a Atividade IV para os grupos 2 e 3.

Para a análise das resoluções dos alunos ao Questionário II, iremos empregar as etapas formuladas por Polya (1995) para a resolução de problemas, distinguindo a etapa na qual o aluno apresentou equívoco na resolução. Classificaremos essas categorias da seguinte forma:

- **Dificuldade na compreensão:** quando os alunos deixaram questões em branco ou partiram de ideias incoerentes e sem lógica.
- **Dificuldade no planejamento:** quando os discentes expressaram a ideia corretamente, mas não conseguiram desenvolver nenhuma estratégia válida de resolução.
- **Dificuldade na execução:** os estudantes conseguiram expressar uma ideia e uma estratégia adequada, mas cometeram erros pelo caminho não conseguindo encontrar a solução.
- **Dificuldade no retrospecto:** Eis o problema mais comum. O educando encontrou uma resposta incorreta, e não se deu conta de que ela não servia como solução para o problema.

A partir da classificação acima, criamos a tabela abaixo que exibe o número de erros em cada categoria, e nos permite verificar mais facilmente em qual etapa nossos alunos apresentaram maior dificuldade durante as resoluções de problemas.

Tabela 3: Desempenho dos grupos no Questionário II

	Dificuldade na compreensão	**Dificuldade no planejamento**	**Dificuldade na execução**	**Dificuldade no retrospecto**
1ª questão	100%	16,7%	22,2%	22,2%
2ª questão	100%	16,7%	22,2%	27,8%

Fonte: Acervo da pesquisadora

Consideramos aqui que todos os 9 grupos tiveram dificuldade na compreensão dos problemas, pois não souberam iniciá-los sozinhos de forma alguma. Foi necessária a intervenção da professora pesquisadora, realizando a leitura das questões grupo por grupo para que estes pudessem compreender o problema.

As alunas do grupo 9 deixaram a sala antes do final da atividade, sem justificativa, deixando seu questionário em branco. Essa ausência de resposta foi considerada como dificuldade em todos as etapas acima.

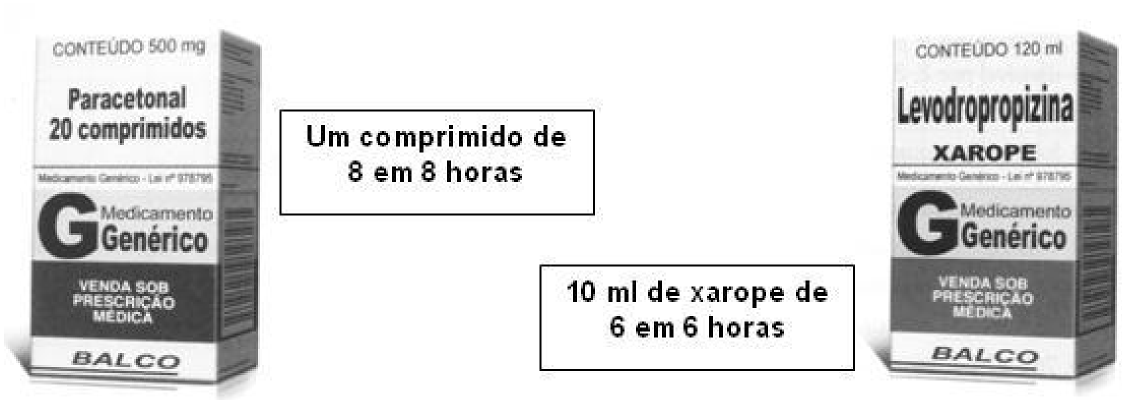
A seguir veremos mais detalhadamente cada questão e as resoluções dos estudantes.

5.2.2.1 Análise da Atividade I

As questões dessa atividade foram direcionadas aos alunos com experiência em agricultura, cuidadores de idosos, babás, pais, mães e avós que relatavam, por exemplo, uma rotina de uso de medicamentos. E, assim como os demais grupos, essas pessoas que têm interesses em comum, já se preferiam na sala de aula diariamente e ficaram muitos contentes por estarem nas mesmas equipes.

Análise da Atividade I – Questão 1

1. Roberto foi ao médico, que receitou a ele os seguintes medicamentos:



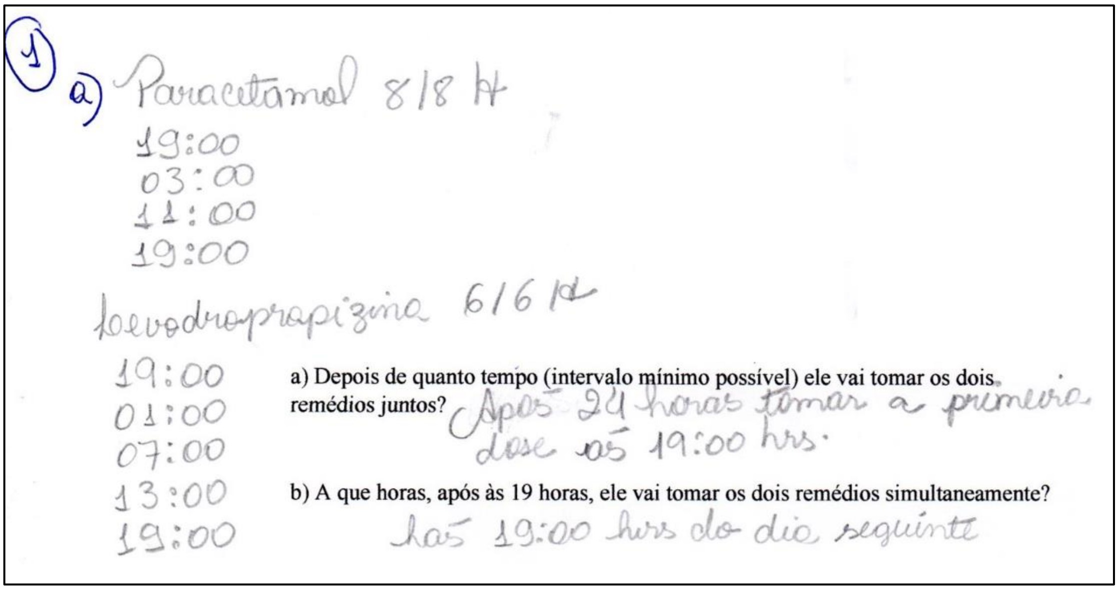
Sabendo que Roberto tomou ontem, às 19 horas, esses dois medicamentos, CALCULE os itens a seguir:

a) Depois de quanto tempo (intervalo mínimo possível) ele vai tomar os dois remédios juntos?

b) A que horas, após às 19 horas, ele vai tomar os dois remédios simultaneamente?

Esperávamos que os estudantes percebessem o 24 como sendo o menor múltiplo comum de 6 e 8, levando a coincidência dos horários dos remédios a apenas uma vez ao dia.

Figura 15: Resposta correta do grupo 1


1

a) Paracetamol 8/8 H

19:00
03:00
11:00
19:00

Levodropropizina 6/6 H

19:00
01:00
07:00
13:00
19:00

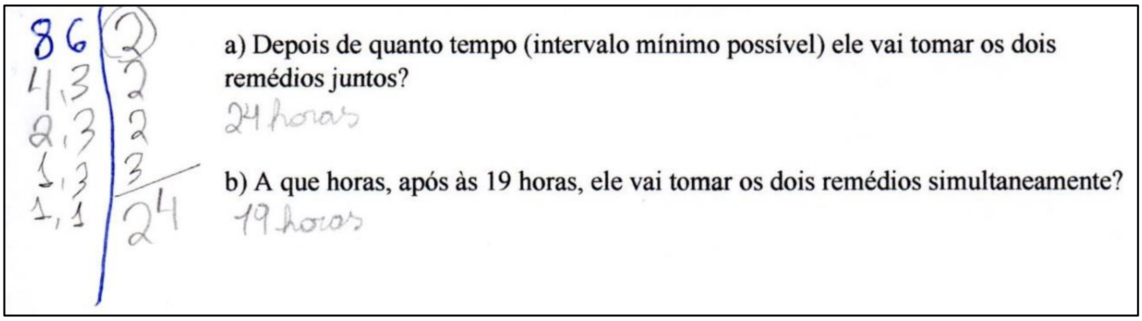
a) Depois de quanto tempo (intervalo mínimo possível) ele vai tomar os dois remédios juntos? Após 24 horas tomar a primeira dose as 19:00 hrs.

b) A que horas, após às 19 horas, ele vai tomar os dois remédios simultaneamente? Ás 19:00 hrs do dia seguinte

Fonte: Acervo da pesquisadora

O grupo escreveu os horários múltiplos, analisou corretamente e concluiu que ambos os remédios só seriam tomados juntos 24 horas depois. Esse grupo não associou o problema com o mmc entre os números 6 e 8 nesta questão, mas utilizando seus próprios conhecimentos chegaram à solução do problema sem maiores dificuldades.

Figura 16: Resposta correta do grupo 8:


8 6 | 2
4, 3 | 2
2, 3 | 2
1, 3 | 3
1, 1 | 24

a) Depois de quanto tempo (intervalo mínimo possível) ele vai tomar os dois remédios juntos?
24 horas

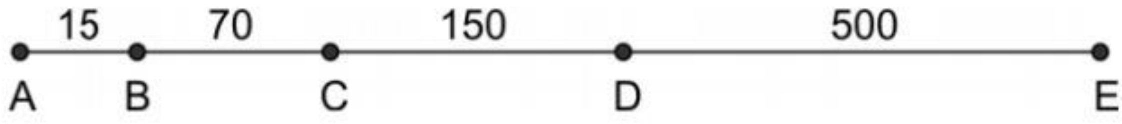
b) A que horas, após às 19 horas, ele vai tomar os dois remédios simultaneamente?
19 horas

Fonte: Acervo da pesquisadora

Esse grupo associou o problema ao mmc entre os números 6 e 8, efetuou o algoritmo e concluiu corretamente o raciocínio do problema de forma diversa, mas igualmente correta a do grupo anterior.

5.3.1.1 Análise da Atividade I – Questão 2

2. **(EPCAR – 2010 – adaptada)** Um agricultor fará uma plantação de feijão em canteiro retilíneo. Para isso, começou a marcar os locais onde plantaria as sementes. A figura abaixo indica os pontos já marcados pelo agricultor e as distâncias, em cm, entre eles.



Fonte: Acervo da pesquisadora

Esse agricultor, depois, marcou outros pontos entre os já existentes, de modo que a distância entre todos eles fosse a mesma e a maior possível. Qual deve ser a nova distância entre todos os pontos?

a) 4

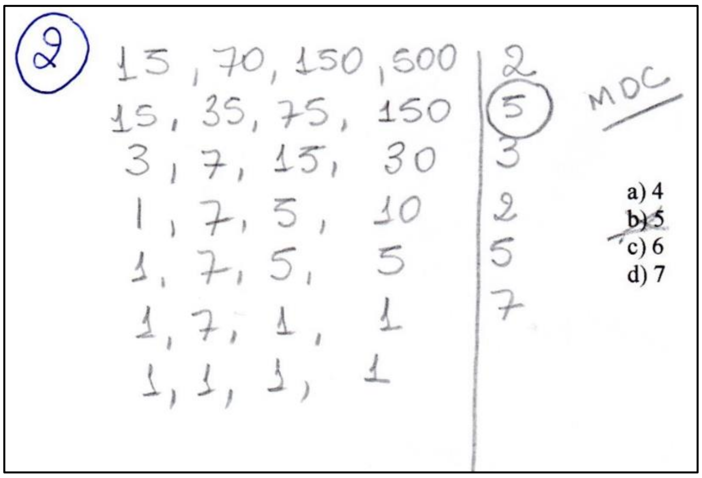
b) 5

c) 6

d) 7

Os alunos poderiam facilmente observar o 5 como sendo um divisor comum das distâncias 15, 70, 150 e 500 e, posteriormente, com uma análise mais detalhada, como sendo o maior divisor comum entre esses números, sem necessariamente utilizar algum algoritmo formal de resolução. Os critérios de divisibilidade os ajudariam nesse raciocínio.

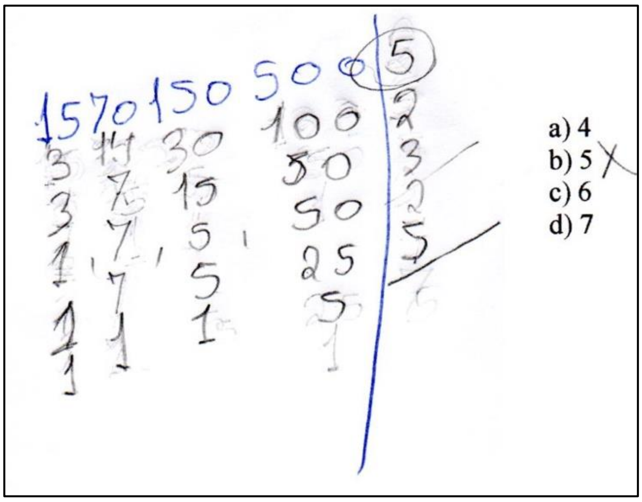
Figura 17: Resposta correta do grupo 1



Fonte: Acervo da pesquisadora

Diferente da primeira questão, o grupo 1 agora não soube responder a esta simples questão com um raciocínio prático. Eles realizaram o algoritmo e verificaram que o resultado procurado seria o mdc entre os valores dados.

Figura 18: Resposta correta do grupo 8



Fonte: Acervo da pesquisadora

O grupo 8 recorreu novamente ao algoritmo para resolver um problema simples, mesmo sendo instruídos de que não precisavam fazer o cálculo para resolver a estas questões. Mas, novamente, não tiveram outra dificuldade, senão na compreensão inicial.

5.3.2 Análise da Atividade II

Os problemas apresentados nesta atividade foram direcionados mais uma vez a alunos com perfis mais parecidos. Uma questão sobre jogos de aplicativos e outra sobre formas de redução de pena de um presidiário. Ambos os temas de interesse dos alunos a ela direcionados, para que a atividade fosse potencialmente significativa para eles.

5.3.2.1 Análise da Atividade II – Questão 1

1. Atualmente existem muitos aplicativos de fazendas virtuais que, apesar de críticas, possuem uma enorme quantidade de usuários. Embora apresentem algumas diferenças de funcionamento, as fazendas virtuais possuem a mesma concepção: cada vez que o usuário cuida de sua fazenda ou da de seus amigos,

ganha pontos, e, quanto mais pontos acumula, maior é seu nível de experiência. Em um aplicativo de fazenda virtual, o usuário precisa de 1 000 pontos para atingir o nível 1. Acumulando mais 1 200 pontos, atinge o nível 2; acumulando mais 1 400 pontos, atinge o nível 3 e assim por diante, sempre com esse padrão. Um usuário que está no nível 15 de experiência acumulou:

a) 3 800 pontos.

b) 15 200 pontos.

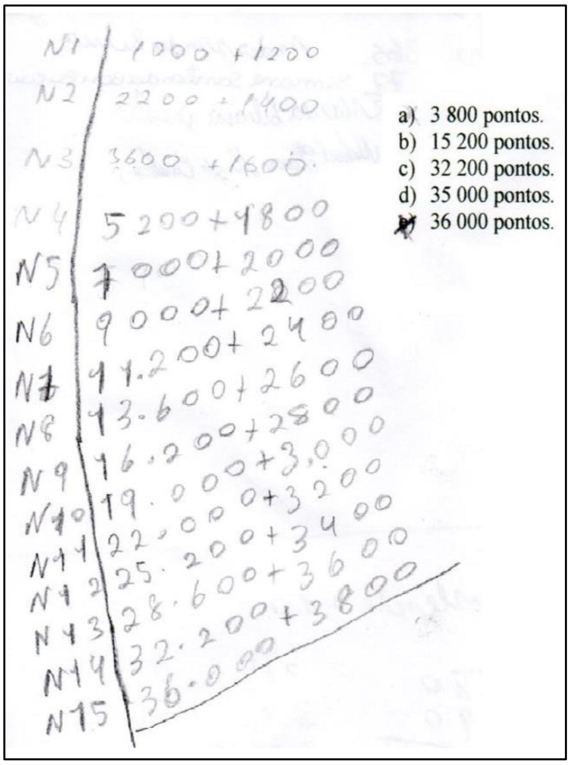
c) 32 200 pontos.

d) 35 000 pontos.

e) 36 000 pontos.

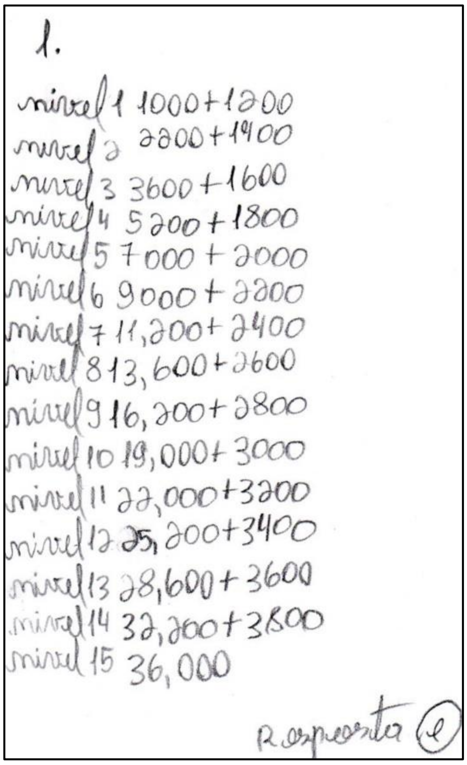
Nesta questão esperava-se que os alunos utilizassem seus conhecimentos de divisibilidade para calcular o total de pontos necessários para iniciar o nível 15 de um dado jogo virtual.

Figura 20: Resposta correta do grupo 5



Fonte: Acervo da pesquisadora

Figura 19: Resposta correta do grupo 7



Fonte: Acervo da pesquisadora

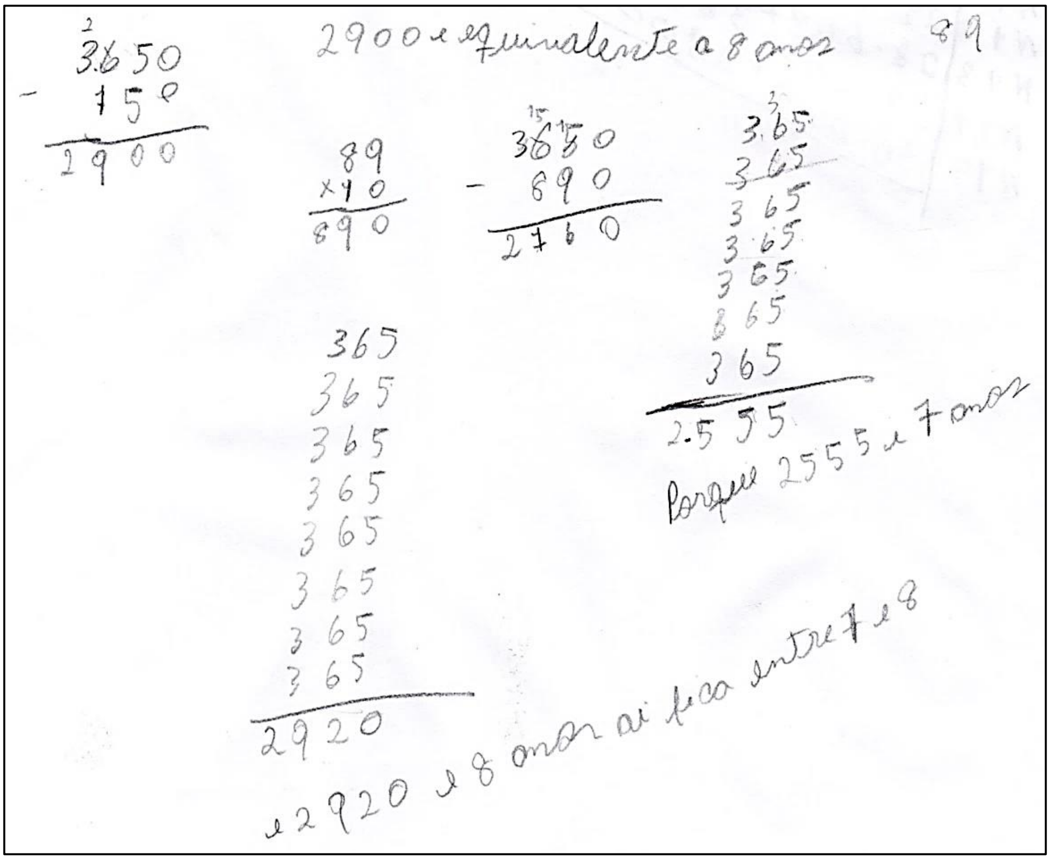
Interessante que as resoluções dos grupos foram muito parecidas. Fizeram um cálculo mais seguro, enumerando os níveis 1 a 1. Resposta correta e bastante satisfatória dos grupos. Revela compreensão plena do problema, mas uma aparente falta de associação com os conteúdos de Divisibilidade.

5.3.2.2 Análise da Atividade II – Questão 2

2. Uma pessoa, durante sua vida cometeu crimes, sendo, por consequência, condenada a 10 anos de cadeia. Ainda no tribunal, o juiz, interessado na recuperação dessa pessoa, lhe informou acerca da possibilidade que tinha em reduzir sua pena, caso se dispusesse a trabalhar na marcenaria da penitenciária. Informou-a que a cada 3 dias de trabalho, 1 dia seria "perdoado" em sua pena. Imaginando não haver outras formas de progressão de pena, e considerando que a pessoa trabalhe todos os dias da semana, quanto tempo ela deverá permanecer presa?
a) Entre 2 e 3 anos.
b) Entre 3 e 4 anos.
c) Entre 4 e 5 anos.
d) Entre 6 e 7 anos.
e) Entre 7 e 8 anos.

Esperávamos que os estudantes percebessem que 1 período em cada 3 seria reduzido da pena do presidiário caso este trabalhasse durante toda sua permanência na penitenciária. Dividindo 10 anos por 3, encontrariam quociente 3 e resto 1. Logo, seriam reduzidos pouco mais de 3 anos da pena do indivíduo e, por conseguinte, ele deveria permanecer preso entre 6 e 7 anos.

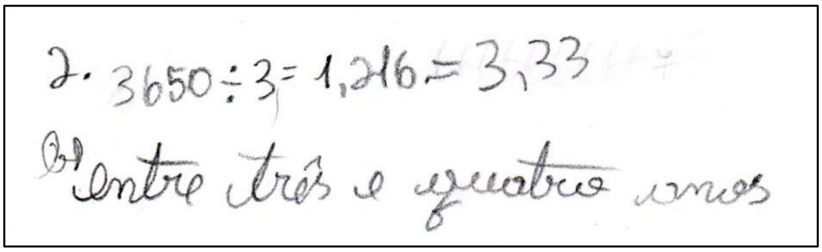
Figura 21: Resposta incorreta do grupo 5



Fonte: Acervo da pesquisadora

O raciocínio usado pelos membros do grupo 5 não ficou claro para a pesquisadora. Mas há indícios de que os estudantes tiveram dificuldades de planejamento, execução e retrospecto na resolução do problema, além da dificuldade de compreensão inicial comum a todos. Esses alunos também não conseguiram se utilizar dos conhecimentos de Divisibilidade para calcular o desconto na pena do presidiário.

Figura 22: Resposta do grupo 7:



Fonte: Acervo da pesquisadora

Diferente do grupo 5, o grupo 7 soube usar as ferramentas de Divisibilidade adequadas para o problema. Porém erraram por não fazer a verificação da resposta obtida que é exatamente o contrário do que foi perguntado. O objetivo era encontrar o total de dias de permanência na prisão e não o período descontado na pena. Dificuldade no retrospecto.

5.3.3 Análise da Atividade III

Os grupos de alunos que receberam essa atividade também já eram próximos e até amigos. Havia costureiras, vendedores e jogadores de basquete, e os problemas foram selecionadas de modo a, de alguma maneira, serem possivelmente familiares.

5.3.3.1 Análise da Atividade III – Questão 1

1. Professor Flavio quer montar times de basquete com as suas turmas da escola. Cada time de basquete é formado por cinco alunos, então o professor Flavio percebe que em algumas turmas ele conseguiu montar times completos e outras turmas sobraram alguns alunos sem time.

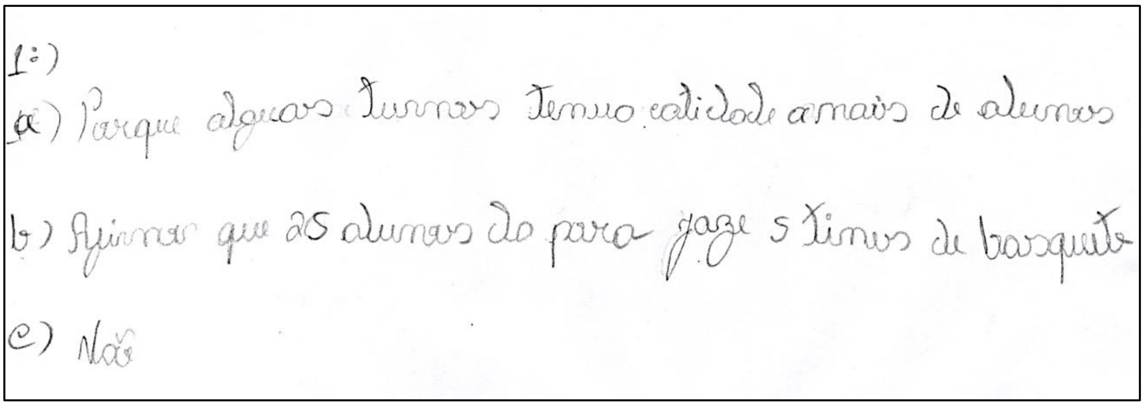
a) Como você justificaria esse fato de que em algumas turmas sobraram alunos sem time?

b) O que você poderia afirmar sobre o número de alunos das turmas que conseguiram formar times completos?

c) Você conseguiria estabelecer um critério que justificasse essa situação?

Neste problema esperava-se que os alunos relembrassem os critérios de divisibilidade, em especial, de divisibilidade por 5. Não era necessário nenhum tipo de cálculo, apenas um raciocínio simples.

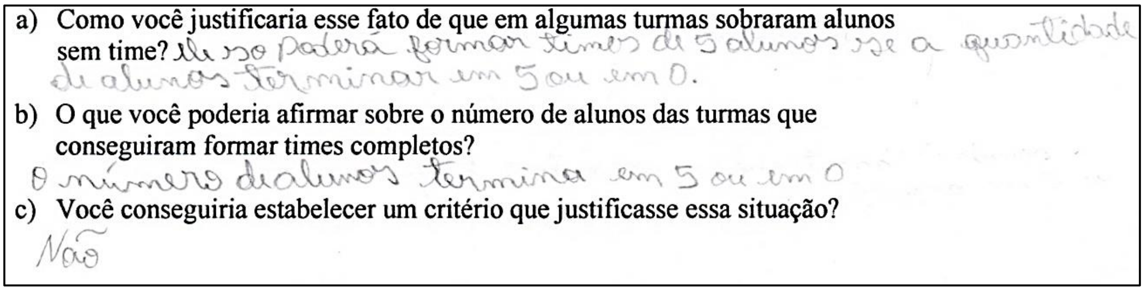
Figura 23: Resposta incorreta do grupo 4:


1:)
a) Porque alguas turmas temuo catidade a mais de alunos
b) Afirmar que 25 alunos do para faze 5 times de basquete
c) Não

Fonte: Acervo da pesquisadora

Os alunos desse grupo demonstraram uma grande deficiência em leitura e escrita. A resposta do item *a* está incompreensível, no item *b* eles deram uma resposta de uma situação específica e no item *c* revelaram ter ou preguiça de escrever ou desconhecimento do critério de divisibilidade. O grupo apresenta dificuldades no planejamento, execução e retrospecto, além da dificuldade de compreensão inicial.

Figura 24: Resposta Parcialmente correta do grupo 6


a) Como você justificaria esse fato de que em algumas turmas sobraram alunos sem time? Ele só poderá formar times de 5 alunos se a quantidade de alunos terminar em 5 ou em 0.
b) O que você poderia afirmar sobre o número de alunos das turmas que conseguiram formar times completos?
O número de alunos termina em 5 ou em 0
c) Você conseguiria estabelecer um critério que justificasse essa situação?
Não

Fonte: Acervo da pesquisadora

O grupo demonstrou compreender o problema (após a leitura da professora), associar ao conteúdo estudado e relembrar o critério de divisibilidade por 5. Apenas no item *c*, disseram não ser capazes de estabelecer um critério para justificar a situação, o que pode ter ocorrido pela comodidade que a pergunta trouxe. O item deveria ter sido escrito da seguinte forma:

"Estabeleça um critério que justifique essa situação". Foi um equívoco da pesquisadora.

5.3.3.2 Análise da Atividade III – Questão 2

2. Leia atentamente a seguir a exposição feita por uma professora de Matemática e as afirmativas feitas por alguns de seus alunos.

Fonte: Acervo da pesquisadora

Quem apresentou uma **afirmativa correta** de acordo com a exposição feita pela professora?

a) Ana Cláudia

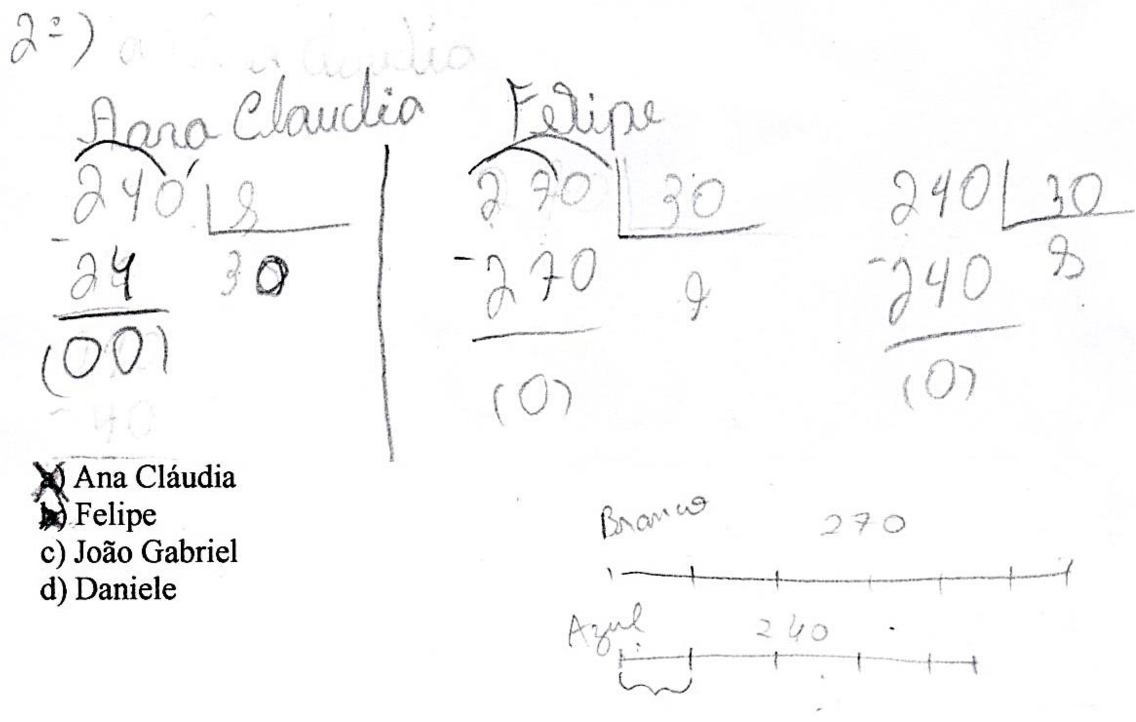
b) Felipe

c) João Gabriel

d) Daniele

Neste problema era esperado que os alunos identificassem 30 como o maior divisor comum entre 270 e 240. Também não era necessário que fizessem nenhum algoritmo para encontrar o resultado, apenas expusessem o raciocínio que seguiram.

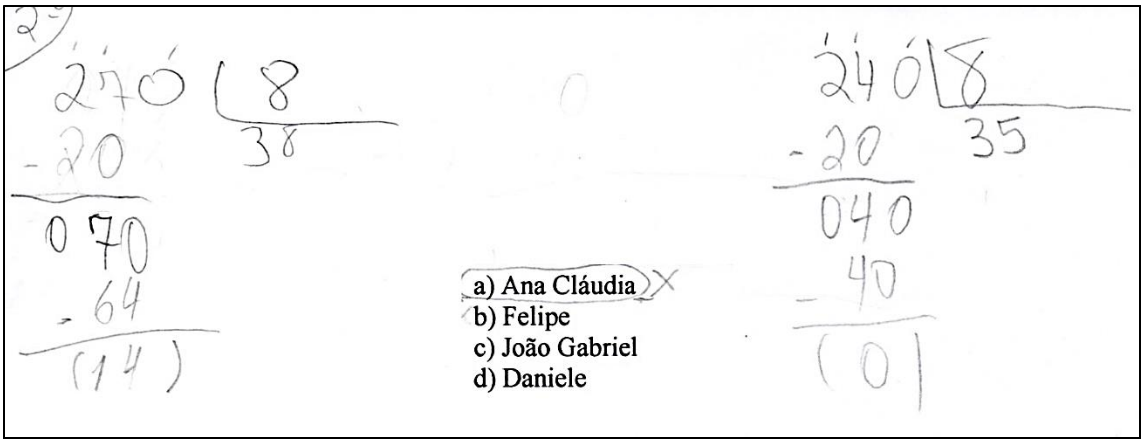
Figura 25: Resposta correta do grupo 4



Fonte: Acervo da pesquisadora

Bastante satisfatória a resposta do grupo 4. Enquanto, na questão anterior eles demonstraram pouca compreensão e conhecimento mínimo do conteúdo de Divisibilidade. Nesse problema, eles surpreenderam fazendo um cálculo diferenciado, porém bastante correto, encontrando precisamente a resposta esperada.

Figura 26: Resposta Parcialmente Correta do grupo 6



Fonte: Acervo da pesquisadora

Os alunos do grupo 6, que responderam de maneira correta a primeira questão, agora tentaram usar as ferramentas adequadas para resolução do problema, porém, por erro na execução cálculo, não obtiveram êxito. O grupo apresentou as seguintes dificuldades: compreensão, execução e retrospecto.

5.3.4 Análise da Atividade IV

Por fim, tivemos a quarta atividade que foi direcionada aos alunos mais jovens, que nunca tinham exercido nenhuma profissão e cujos interesses eram jogos, brincadeiras, lazer.

Essa atividade foi bastante leve e esperava-se verificar se os estudantes conseguiram dar significação ao conteúdo de Divisibilidade o qual vinham estudando.

5.3.4.1 Análise da Atividade IV – Questão 1

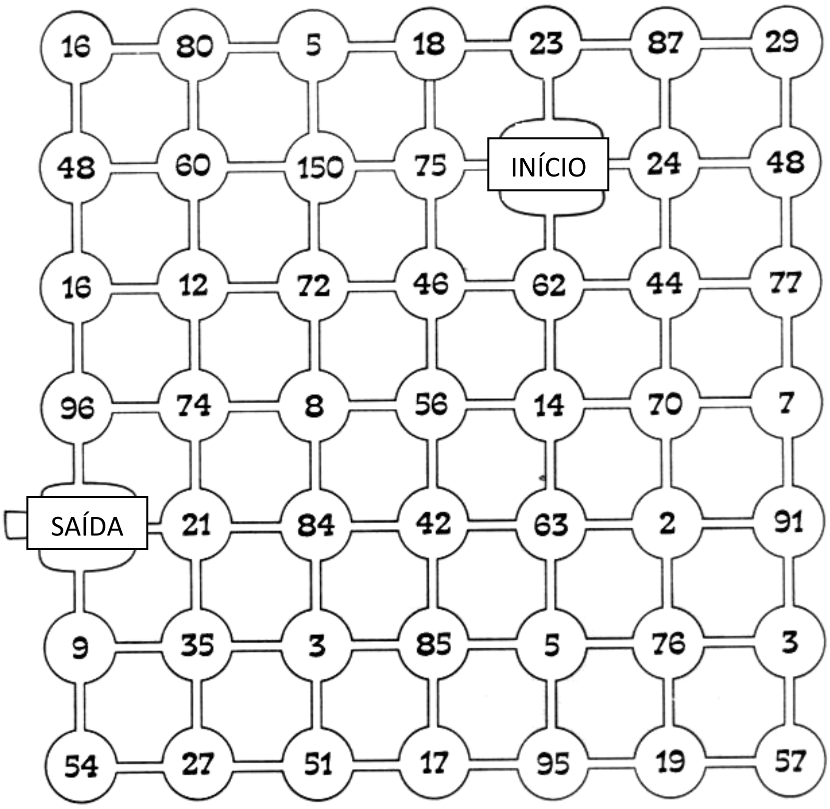
1. Imagine a seguinte situação:

Você está em um labirinto e precisa encontrar a saída. Atenção! Esse labirinto não é um labirinto qualquer.

Existem regras para que você possa caminhar:

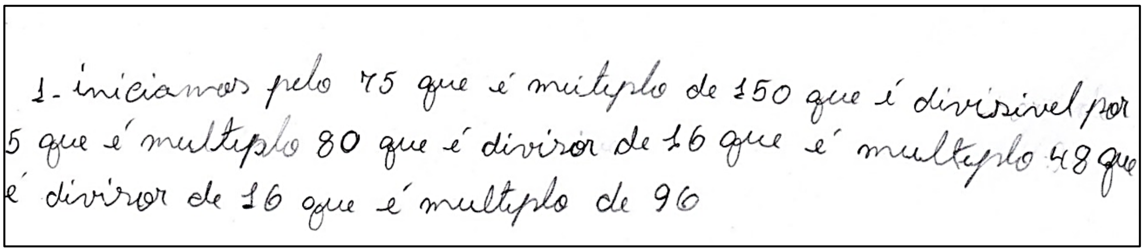
- Ir de um número para um de seus múltiplos; desse número, para um de seus divisores; desse último para um dos seus múltiplos e assim sucessivamente.

Tendo achado o caminho, escreva a sequência de números resultantes a partir do ponto em que você estava até a saída.



Esperávamos que os alunos aplicassem seus conhecimentos sobre múltiplos e divisores em uma atividade simples, seguindo corretamente a sequência do labirinto.

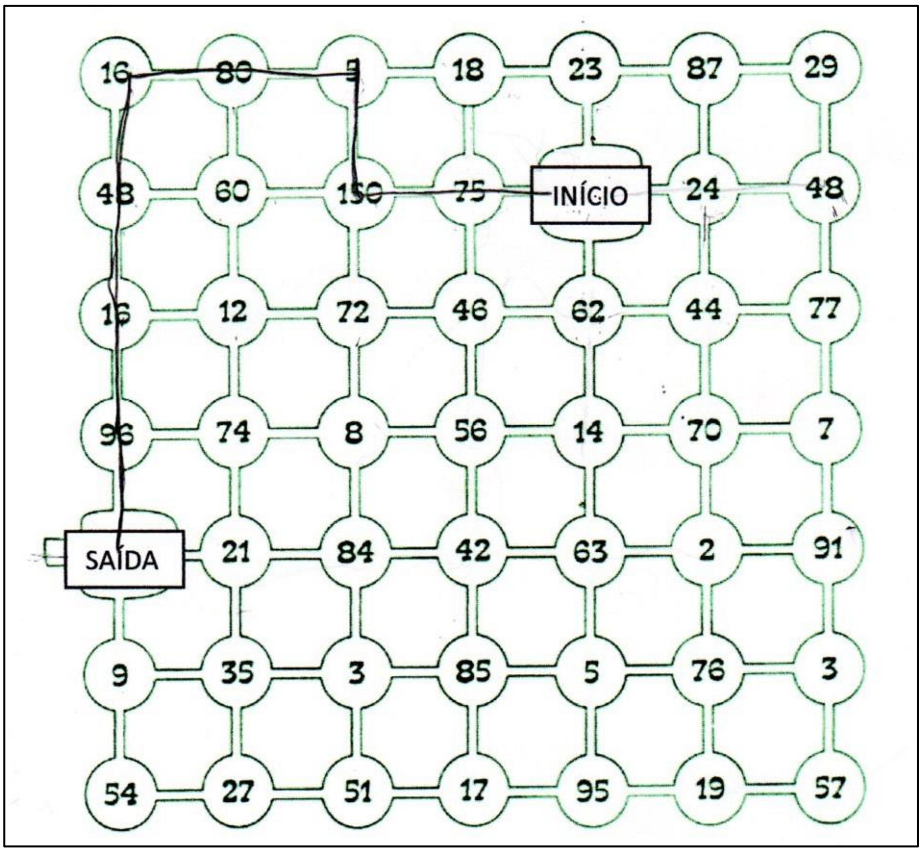
Figura 27: Resposta parcialmente correta do grupo 2


1- iniciamos pelo 75 que é multiplo de 150 que é divisivel por 5 que é multiplo 80 que é divisor de 16 que é multiplo 48 que é divisor de 16 que é multiplo de 96

Fonte: Acervo da pesquisadora

Os alunos demonstraram confusão nos conceitos de múltiplo e divisor. Mas a sequência numérica correspondente ao caminho percorrido está correta. Dificuldades de compreensão, execução e retrospecto.

Figura 28: Resposta correta do grupo 3



Fonte: Acervo da pesquisadora

Os alunos apenas desenharam o percurso corretamente. Não escreveram a sequência de números correspondente ao caminho, porém não houve outras dificuldades além da compreensão.

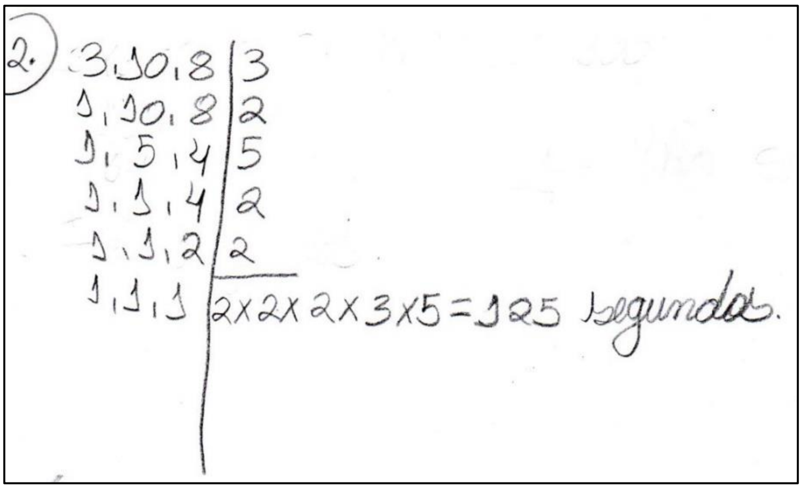
5.3.4.2 Análise da Atividade IV – Questão 2

2. (UNIFOR CE/2017) O Natal é um feriado religioso cristão comemorado anualmente em 25 de dezembro. A data é o centro das festas de fim de ano e da temporada de férias. Costumes populares modernos típicos do feriado incluem a troca de presentes, a Ceia de Natal, músicas natalinas, festas na igreja e as decorações das casas e espaços públicos em alusão ao período, o que inclui árvores de Natal, pisca-piscas, guirlandas, presépios etc.

Uma família comprou uma árvore de Natal e um dos enfeites colocados na árvore foi um pisca – pisca. Ao se ligar o pisca – pisca, todas as lâmpadas se acendem e depois um grupo de lâmpadas se acende de 3 em 3 segundos, outro grupo de 8 em 8 segundos e, finalmente, um terceiro grupo se acende de 10 em 10 segundos. Depois de quanto tempo todas as lâmpadas se acenderão novamente?

O objetivo era encontrar o menor múltiplo comum de 3, 8 e 10 da maneira que os alunos preferissem. Como o algoritmo não era obrigatório, esperávamos que os alunos utilizassem algum raciocínio mais prático para fazê-lo.

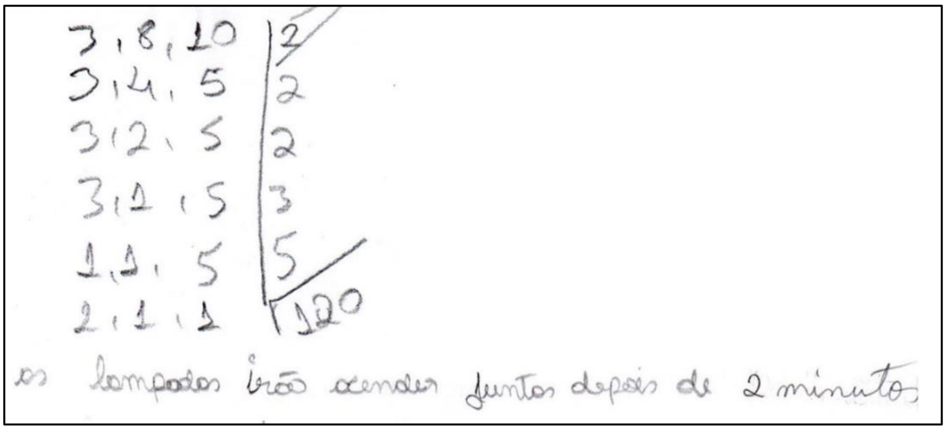
Figura 29: Resposta Parcialmente Correta do grupo 2



Fonte: Acervo da pesquisadora

Os alunos utilizaram uma ferramenta adequada para resolução do problema proposto, porém erraram na execução multiplicando os fatores da decomposição; o produto que daria 120, eles obtiveram 125. Dificuldades em compreensão, execução e retrospecto.

Figura 30: Resposta Correta do grupo 3



Fonte: Acervo da pesquisadora

Resposta correta obtida pelos alunos do grupo 3. Novamente escolheram utilizar o algoritmo da decomposição em fatores primos, mesmo este não sendo necessário.

Os dados obtidos ratificam que a maior dificuldade enfrentada pelos alunos na resolução de problemas é a compreensão. Dentre as quatro categorias, esse problema foi o único que incidiu em todas as questões. Porém, essa dificuldade está intimamente relacionada a deficiência na leitura dos nossos alunos. Ler é muito mais que decodificar letras e símbolos, mas é necessário entender o sentido do texto escrito.

Pelo que pudemos inferir desta análise, os discentes sequer puderam compreender o significado das questões que foram entregues a eles. Só após lhes serem lidos os enunciados foi que conseguiram dar início às resoluções dos problemas.

Para Ausubel, uma das formas de verificar a ocorrência de uma aprendizagem significativa é propor uma tarefa de aprendizagem ao aluno, em sequência, que dependa de outra, a qual não possa ser executada sem uma compreensão da anterior, e foi isso que tentamos fazer.

O teórico atenta para o fato de que se um aluno não for “capaz de resolver um problema, isso não significa, necessariamente, que ele tenha somente memorizado os princípios e conceitos relevantes à solução do problema, pois esta implica também certas habilidades além da compreensão” (MOREIRA E MASINI, 2006, p.24). Uma dessas habilidades seria a de leitura e interpretação, que foi a dificuldade mais limitante dos nossos alunos.

Nosso resultado foi para um viés bastante diferente do esperado. Entretanto, no que se refere à aprendizagem significativa da Divisibilidade, acreditamos ter cumprido nossa missão. Esses alunos chegaram no início do semestre alegando odiar a Matemática, não saber nada da disciplina e até se considerando incapazes de aprender por conta da idade ou outro motivo qualquer.

No entanto, o que vimos aqui são evidências de alunos que sabem resolver problemas, dominam as operações matemáticas e conseguem mobilizar os conceitos do conteúdo estudado. Porém esses estudantes necessitam aperfeiçoar com urgência suas habilidades de leitura e interpretação.

CONCLUSÕES

Nossa pesquisa trata do ensino de Divisibilidade na Educação de Jovens e Adultos através da Resolução de Problemas. A fundamentação teórica baseia-se na Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel, cujos preceitos apontam para a valorização dos conhecimentos prévios dos alunos. Princípio este muito valorizado na Proposta Curricular dessa modalidade de ensino.

Neste estudo tínhamos como objetivo investigar as potencialidades de uma atividade sobre Divisibilidade para promoção de uma aprendizagem significativa nos estudantes da EJA. Este objetivo foi alcançado, uma vez que essa averiguação pôde ser realizada através da análise dos resultados bastante satisfatórios dos alunos.

O motivo que nos induziu a esta pesquisa foi o nosso envolvimento com as muitas dificuldades enfrentadas pelos alunos do sistema EJA. Dificuldades estas que vão desde o acesso dos jovens e adultos a uma educação pública de qualidade até a utilização de seus conhecimentos matemáticos para a resolução de problemas. Ao trabalharmos com este público em especial, enriquecemo-nos por ter contato com os múltiplos saberes dos quais esses alunos são detentores.

Os instrumentos de coleta de dados foram dois questionários compostos por duas questões cada, onde, apenas o segundo, possuía questões específicas, de modo a serem potencialmente significativas, para grupos específicos de alunos.

Enquanto na primeira atividade, que era composta por questões com dados explícitos, pudemos identificar principalmente erros operacionais; na última, que possuía questões onde era necessária a interpretação dos problemas propostos, foi possível identificar a grave deficiência de leitura e compreensão de textos desses alunos.

O trabalho contou com a participação de 28 alunos da 1ª etapa do 2º ciclo do Ensino Fundamental da Educação de Jovens e Adultos do Colégio Estadual Olavo Bilac, localizado em Aracaju, Sergipe. A investigação ocorreu em dois momentos e em dias consecutivos, durante aulas de Matemática e dentro do próprio ambiente escolar. Motivo pelo qual, de acordo com Fiorentini e Lorenzato (2006), configura-se uma pesquisa de campo por acontecer dentro do próprio ambiente onde o problema ocorre.

Durante o desenvolvimento deste trabalho, nos valemos de vários estudos e documentos que nos deram suporte no andamento desta pesquisa. Nos utilizamos frequentemente do livro Aprendizagem Significativa – A Teoria de Ausubel, mas, principalmente, da Proposta Curricular para a Educação de Jovens e Adultos. Foi ela com quem primeiro tivemos contato e que nos direcionou sobre as orientações curriculares para nosso público específico e sobre a utilização da resolução de problemas, fortalecendo sua notabilidade como metodologia da aprendizagem.

Nossa opção por utilizar a Análise de Erros de Cury (1994) e as fases consideradas por Polya (1995) para a resolução de problemas, ambas análises qualitativas, se deu pelo fato de buscarmos aqui não uma medida de desempenho, mas uma compreensão das reais dificuldades dos nossos alunos, além de nos ajudar a tentar entender o porquê desses estudantes apresentarem tanta dificuldade com a resolução de problemas.

Ficou nítido que grande parte dos erros poderiam ter sido corrigidos se os estudantes tivessem o hábito de verificar a solução encontrada. Normalmente é muito fácil perceber a incoerência na resposta dada por eles, porém os discentes demonstram estar preocupados somente em resolver e escrever um resultado.

Isso pode ser ainda mais um indício da deficiência na habilidade de leitura e interpretação constatada, sobretudo, por ocasião da aplicação do segundo questionário. É possível que os alunos, nas tentativas de decodificar os enunciados, não tenham a total compreensão do que foi perguntado e acreditem que a conclusão encontrada por eles seja a correta.

Levando-se em consideração todas as informações aqui levantadas e analisadas, podemos responder à nossa questão de pesquisa que foi formulada da seguinte maneira:

- Que aspectos precisam ser contemplados em uma atividade envolvendo divisibilidade em uma turma de EJA para que esta seja potencialmente significativa?

Respondemos a essa pergunta afirmando que um material será potencialmente significativo sempre que o indivíduo conseguir atribuir-lhe significação lógica, que seria uma relação substancial do material de aprendizagem com ideias relevantes contidas em sua estrutura cognitiva. Ou ainda, as informações da atividade precisam ser relacionáveis com os conhecimentos prévios do aprendiz.

Notamos ainda que a compreensão dos problemas e as consequentes estratégias adequadas para sua resolução são dependentes de vários fatores, dentre os quais citamos a interpretação dos textos dos enunciados, sem a qual não é possível avançar muito em qualquer aprendizagem.

Desse modo, a dificuldade contida no ato de resolver um problema ultrapassa a questão do conhecimento de conceitos isolados e da utilização de certas estratégias. Requer uma verdadeira “teia” de conexões na estrutura cognitiva do indivíduo, ligando os mais diversos elementos, e é totalmente dependente (no caso de problemas transcritos) da fluência na leitura.

Percebemos no decorrer da pesquisa, com as aplicações e análise das respostas dos questionários que outros aspectos têm que ser levados em conta, além dos supostos inicialmente. Outras preocupações surgiram sobre o tema e necessitam ser melhor investigadas.

As dificuldades enfrentadas pelos discentes nos fez refletir sobre a importância de uma alfabetização legítima nos primeiros anos do Ensino Fundamental, além do incentivo à prática da leitura. O déficit apresentado reflete o quanto estudantes são encaminhados de uma série para outra, sem conseguir dominar a leitura de textos simples, que deveria ter sido o foco das séries iniciais.

Uma hipótese que não havia sido pensada anteriormente e que possivelmente ajudaria nesses casos seria a aplicação mais frequente de atividades com resolução de problemas em meio a uma rotina mais ampla de aprendizagem significativa. Onde, nessas aplicações, os estudantes teriam mais oportunidades de desenvolver suas habilidades, especialmente de leitura e interpretação. Este questionamento permanece, entre outros, possibilitando a abertura de caminhos para pesquisas futuras.

Finalizamos este trabalho com a certeza de não contemplar todas as possibilidades que outros venham a enxergar. Com uma angústia de achar que poderíamos ter esclarecido melhor, explorado outras possibilidades que permitiriam enriquecer mais o nosso estudo. Novos projetos podem certamente surgir como continuidade deste, pois descobrir os erros não é suficiente. É necessário procurar meios que possam reduzir ou até mesmo extinguir esses erros.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANDRINI, Á. Praticando Matemática. Álvaro Andrini, Maria José Vasconcelos. São Paulo: Editora do Brasil, 2015.

ANTUNES, Denise Dalpiaz. Relatos significativos de professores e alunos na educação de jovens e adultos e sua autoimagem e autoestima. Porto Alegre: tese de mestrado pela Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, 2006.

AUSUBEL, D.P. Educational Psychology: A Cognitive View. New York, Holt, Rinehart and Winston, 1968.

AUSUBEL, D. P.; NOVAK, J. D.; HANESIAN, H. Psicologia Educacional. Tradução de Eva Nick et al. Rio: Interamericana, 1980.

BIANCHINI, Edwaldo. Matemática. 7. ed. São Paulo: Moderna, 2011

BOYER, C. B. História da Matemática. Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo: Editora E. Blücher Ltda e Editora da Universidade de São Paulo, 2003.

BRASIL. MEC. Secretaria de Educação Fundamental. Proposta curricular para a educação de jovens e adultos: segundo segmento do ensino fundamental (5a a 8a série). Brasília, 2002. V. 01 e v. 03.

BRASIL. Ministério da Educação. Diretrizes nacionais para a educação de jovens e adultos. Brasília, 2000.

COELHO, Maria Solange Lopes. Explorando metodologias de resolução de problemas em sala de aula para 6º ano. Laranjeiras do Sul – Paraná, 2014.

CURY, Helena Noronha. As concepções de Matemática dos professores e suas formas de considerar os erros dos alunos. 276 f. Tese (Doutorado). Programa de Pós-graduação – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 1994.

CURY, Helena Noronha. Análise de erros em demonstrações de Geometria Plana: um estudo com alunos de 3º grau. 120 f. Cópia de Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2007.FELTES, Rejane Zeferino. Análise de erros em potenciação e radiciação: um estudo com alunos de Ensino Fundamental e Médio. 136 f. Dissertação (Mestrado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2007.

DANTE, L, R. Didática da resolução de problemas de matemática. 12 ed.ed. São Paulo: Ática, 2000.

FERRARO, Alceu. Analfabetismo e níveis de letramento no Brasil: o que dizem os censos? Educ. Soc., Campinas, vol. 23, n. 81, p. 21-47, dez. 2002. Disponível em: http://www.scielo.br/pdf/es/v23n81/13930.pdf. Acesso em 23 jan. 2020.

FIORENTINI, Dario; LORENZATO, Sergio. Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos. – 1. Reimp. – 3. ed. rev. – Campinas, SP: Autores Associados, 2012. – (Coleção formação de professores)

HADDAD, Sérgio; DI PIERRO, Maria C. Escolarização de jovens e adultos. 2000. Disponível em: < https://www.scielo.br/pdf/rbedu/n14/n14a07.pdf >. Acesso em: 23 jan. 2020.

HEFEZ, A. Aritmética. 2 ed. Rio de Janeiro. SBM, 2016.

HILL, Napoleon. Mais esperto que o diabo: o mistério revelado da liberdade e do sucesso. Tradução e epílogo de M. Conte Jr. Porto Alegre: CDG, 2014.

LIMA, L. A aprendizagem significativa do conceito de função na formação inicial do professor de matemática. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Educação. UECE-CE,2008.

LIMA, Lauro de Oliveira. Estórias da Educação no Brasil: de Pombal a Passarinho. 2. ed. Rio de Janeiro: Brasília, 1979.

MOREIRA, M. A. de; MASINI, E. F. S. Aprendizagem Significativa: A Teoria de David Ausubel. 2. ed. São Paulo: Moraes, 2006.

NOVAK, Joseph D. Aprender, criar e utilizar o conhecimento. Tradução de Ana Rabaça. Lisboa: Plátano, 2000.

OLIVEIRA, Romualdo L. Portela. Educação de Jovens e Adultos: o direito à educação, 2007, p. 4.

PARANÁ. Diretrizes Curriculares da Educação de Jovens e Adultos. Secretaria Estadual de Educação – SEED. Curitiba, 2006.

PELANDRÉ, Nilcea Lemos. Efeitos a longo prazo do método de alfabetização Paulo Freire. Florianópolis, 1998.

POLYA, George. A Arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático; tradução e adaptação Heitor Lisboa de Araújo. – 2. Reimpr. – Rio de Janeiro: interciência, 1995.

SANTOS, J. P. O. Introdução à Teoria dos Números. 3 ed. Rio de Janeiro: IMPA - SBM, 1998.

SILVA, Hellen Tânia Rodrigues da; MOURA, Tânia Mara Souza. Educação de jovens e adultos – EJA: desafios e práticas pedagógicas. Revista Eletrônica Univar. On-line, Vol 3, p. 31 -36, 2013. Disponível em: <revista.univar.edu.br/index.php/interdisciplinar/article/view/53/41> Acesso em: 15 jun. 2017.

SILVA, Analise. Entrevista Programa Brasil de Fato. São Paulo. 10 de Setembro de 2019 às 17:41. Disponível em: <https://www.brasildefato.com.br/2019/09/10/chance-de-acabar-com-analfabetismo-no-brasil-ate-2024-e-zero-afirma-especialista/>

SILVA, W. S. da. Uma Proposta Didática para o Ensino das Cônicas à luz da Aprendizagem Significativa de David Ausubel. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Campina Grande, 2017. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=150200671>.

SOUZA, Joamir R. de; PATARO, Patrícia R. M. Vontade de Saber Matemática, 6º ano. 2 ed. São Paulo: FTD, 2012.

STRELHOW, Thyeles Borcarte. Breve história sobre a educação de jovens e adultos no Brasil. Revista HISTEDBR On-line, Campinas, n.38, jun. 2010. Disponível em: <http://www.histedbr.fe.unicamp.br/revista/edicoes/38/art05_38.pdf>. Acesso em: 23 jan. 2020.

APÊNDICES

APÊNDICE I – Questionário I

ATIVIDADE DE MATEMÁTICA

1. Usando a decomposição simultânea em fatores primos, determine:

a) $m.m.c.(30, 75) =$ ______ $e\ m.d.c.(30, 75) =$ ______

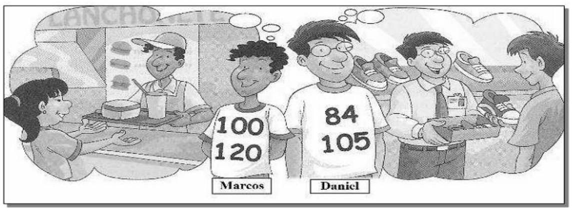
b) $m.m.c.(18, 60) =$ ______ $e\ m.d.c.(18, 60) =$ ______

c) $m.m.c.(66, 102) =$ ______ $e\ m.d.c.(66, 102) =$ ______

d) $m.m.c.(36, 54, 90) =$ ______ $e\ m.d.c.(36, 54, 90) =$ ______

e) $m.m.c.(48, 20, 40, 36) =$ ______ $e\ m.d.c.(48, 20, 40, 36) =$ ______

2. Marcos e Daniel são universitários. O máximo divisor comum (mdc) dos números escritos nas camisetas é a idade de cada um, e o mínimo múltiplo comum (mmc) corresponde a quanto cada um ganhou trabalhando nas últimas férias escolares. Calcule o mdc e o mmc e responda às perguntas:



a) Quem é o mais velho?

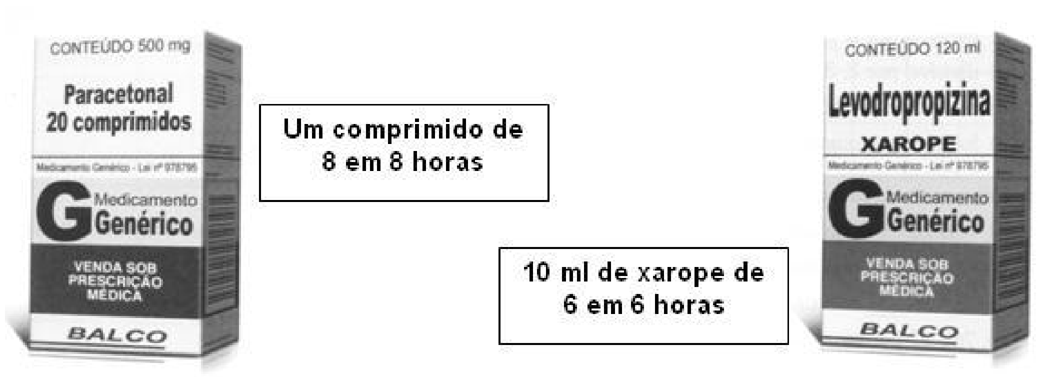
b) Quem ganhou mais trabalhando nas últimas férias? Quanto a mais?

APÊNDICE II – Questionário II (Atividades I, II, III e IV) I

COLÉGIO ESTADUAL OLAVO BILAC
ALUNOS(AS): ____
____ SÉRIE: EJAEFII–1ª ETAPA
PROFESSORA: SÍLVIA BARRETO DATA: ___/___/2019
DISCIPLINA: MATEMÁTICA VALOR: ____ NOTA: ____

ATIVIDADE

1. Roberto foi ao médico, que receitou a ele os seguintes medicamentos:

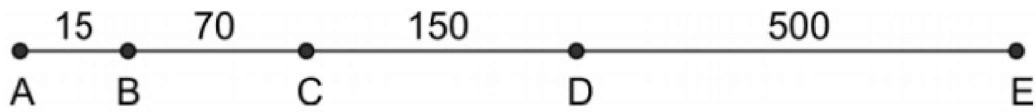


Sabendo que Roberto tomou ontem, às 19 horas, esses dois medicamentos, CALCULE os itens a seguir:

a) Depois de quanto tempo (intervalo mínimo possível) ele vai tomar os dois remédios juntos?

b) A que horas, após às 19 horas, ele vai tomar os dois remédios simultaneamente?

2. **(EPCAR – 2010)** Um agricultor fará uma plantação de feijão em canteiro retilíneo. Para isso, começou a marcar os locais onde plantaria as sementes. A figura abaixo indica os pontos já marcados pelo agricultor e as distâncias, em cm, entre eles.



Esse agricultor, depois, marcou outros pontos entre os já existentes, de modo que a distância entre todos eles fosse a mesma e a maior possível. Qual deve ser a nova distância entre todos os pontos?

a) 4
b) 5
c) 6
d) 7

II

ATIVIDADE

1. Atualmente existem muitos aplicativos de fazendas virtuais que, apesar de críticas, possuem uma enorme quantidade de usuários. Embora apresentem algumas diferenças de funcionamento, as fazendas virtuais possuem a mesma concepção: cada vez que o usuário cuida de sua fazenda ou da de seus amigos, ganha pontos, e, quanto mais pontos acumula, maior é seu nível de experiência. Em um aplicativo de fazenda virtual, o usuário precisa de 1 000 pontos para atingir o nível 1. Acumulando mais 1 200 pontos, atinge o nível 2; acumulando mais 1 400 pontos, atinge o nível 3 e assim por diante, sempre com esse padrão. Um usuário que está no nível 15 de experiência acumulou:

   a) 3 800 pontos.
   b) 15 200 pontos.
   c) 32 200 pontos.
   d) 35 000 pontos.
   e) 36 000 pontos.

2. Uma pessoa, durante sua vida, cometeu crimes, sendo, por consequência, condenada a 10 anos de cadeia. Ainda no tribunal, o juiz, interessado na recuperação dessa pessoa, lhe informou acerca da possibilidade que tinha em reduzir sua pena, caso se dispusesse a trabalhar na marcenaria da penitenciária. Informou-a que a cada 3 dias de trabalho, 1 dia seria "perdoado" em sua pena. Imaginando não haver outras formas de progressão de pena, e considerando que a pessoa trabalhe todos os dias da semana, quanto tempo ela deverá permanecer presa?
   a) Entre 2 e 3 anos.
   b) Entre 3 e 4 anos.
   c) Entre 4 e 5 anos.
   d) Entre 6 e 7 anos.
   e) Entre 7 e 8 anos.

III

COLÉGIO ESTADUAL OLAVO BILAC
ALUNOS(AS): ____
____ SÉRIE: EJAEFII–1ª ETAPA
PROFESSORA: SÍLVIA BARRETO DATA: ___/___/2019
DISCIPLINA: MATEMÁTICA VALOR: ____ NOTA: ____

ATIVIDADE

1. Professor Flavio quer montar times de basquete com as suas turmas da escola. Cada time de basquete é formado por cinco alunos, então professor Flavio percebe que em algumas turmas ele conseguiu montar times completos e outras turmas sobraram alguns alunos sem time.
   a) Como você justificaria esse fato de que em algumas turmas sobraram alunos sem time?

   b) O que você poderia afirmar sobre o número de alunos das turmas que conseguiram formar times completos?

   c) Você conseguiria estabelecer um critério que justificasse essa situação?

2. Leia atentamente a seguir a exposição feita por uma professora de matemática e as afirmativas feitas por alguns de seus alunos.

Quem apresentou uma **afirmativa correta** de acordo com a exposição feita pela professora?
a) Ana Cláudia
b) Felipe
c) João Gabriel
d) Daniele

IV

ATIVIDADE

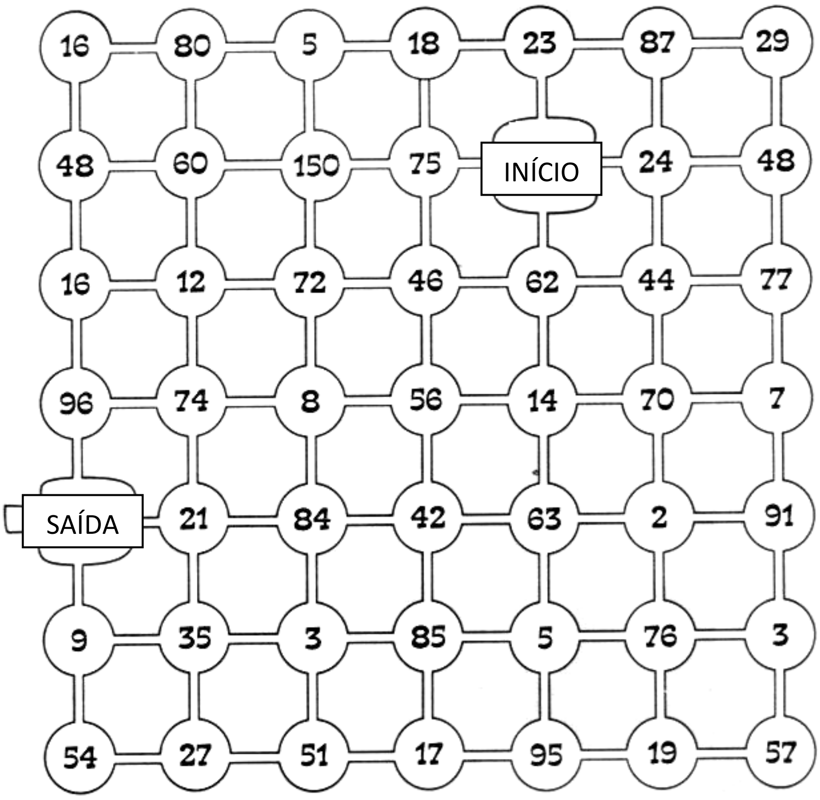
1. Imagine a seguinte situação:

Você está em um labirinto e precisa encontrar a saída. Atenção! Esse labirinto não é um labirinto qualquer.

Existem regras para que você possa caminhar:

- Ir de um número para um de seus múltiplos; desse número , para um de seus divisores; desse último para um dos seus múltiplos e assim sucessivamente.

Tendo achado o caminho, escreva a sequência de números resultantes a partir do ponto em que você estava até a saída.



2. **(UNIFOR CE/2017)** O Natal é um feriado religioso cristão comemorado anualmente em 25 de Dezembro. A data é o centro das festas de fim de ano e da temporada de férias. Costumes populares modernos típicos do feriado incluem a troca de presentes, a Ceia de Natal, músicas natalinas, festas na igreja e a decorações das casas e espaços públicos em alusão ao período, o que inclui árvores de Natal, pisca-piscas, guirlandas, presépios etc.
   Uma família comprou uma árvore de Natal e um dos enfeites colocados na árvore foi um pisca – pisca. Ao se ligar o pisca – pisca, todas as lâmpadas se acendem e depois um grupo de lâmpadas se acende de 3 em 3 segundos, outro grupo de 8 em 8 segundos e, finalmente, um terceiro grupo se acende de 10 em 10 segundos. Depois de quanto tempo todas as lâmpadas se acenderão novamente?