



UNIVERSIDADE DO ESTADO DE MATO GROSSO
CAMPUS DE SINOP
FACULDADE DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM
REDE NACIONAL PROFMAT



Maria Luiza Favero

**APRENDENDO MATEMÁTICA ATRAVÉS DO ROMANCE
ALVA LEBRE LOBO AVERMELHADO: ESTA HISTÓRIA É FALSA –
UMA PROPOSTA INTERDISCIPLINAR COM LÍNGUA PORTUGUESA**

**Sinop -MT
2021**

Maria Luiza Favero

APRENDENDO MATEMÁTICA ATRAVÉS DO ROMANCE
ALVA LEBRE LOBO AVERMELHADO: ESTA HISTÓRIA É FALSA –
UMA PROPOSTA INTERDISCIPLINAR COM LÍNGUA PORTUGUESA

Dissertação de mestrado apresentada à Faculdade de Ciências Exatas e Tecnológicas da Universidade do Estado de Mato Grosso, Campus de Sinop, como parte dos requisitos exigidos para obtenção do título de Mestre em Matemática no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT.

Orientador: Dr. Emivan Ferreira da Silva

Coorientadora: Dra. Adriana Souza Resende

Sinop -MT

2021

F273a	FAVERO, Maria Luiza. Aprendendo Matemática Através do Romance Alva Lebre Lobo Avermelhado: Esta História É Falsa Uma Proposta Interdisciplinar com Língua Portuguesa / Maria Luiza Favero - Sinop, 2021. 176 f.; 30 cm. (ilustrações) Il. color. (não)
	Trabalho de Conclusão de Curso (Dissertação/Mestrado) - Curso de Pós-graduação Stricto Sensu (Mestrado Profissional) Profmat, Faculdade de Ciências Exatas e Tecnológicas, Câmpus de Sinop, Universidade do Estado de Mato Grosso, 2021. Orientador: Dr. Emivan Ferreira da Silva Coorientador: Dra. Adriana Souza Resende
	1. Logaritmo. 2. Aprendizagem Baseada em Projetos. 3. Proposta Interdisciplinar. I. Maria Luiza Favero. II. Aprendendo Matemática Através do Romance Alva Lebre Lobo Avermelhado: Esta História É Falsa: Uma Proposta Interdisciplinar com Língua Portuguesa.
	CDU 517.5(07)



MARIA LUIZA FAVERO

**APRENDENDO MATEMÁTICA ATRAVÉS DO ROMANCE ALVA LEBRE LOBO
AVERMELHADO: ESTA HISTÓRIA É FALSA - UMA PROPOSTA
INTERDISCIPLINAR COM LÍNGUA PORTUGUESA**

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – ProfMat da Universidade do Estado de Mato Grosso/UNEMAT – Campus Universitário de Sinop, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Emivan Ferreira da Silva
Coorientadora: Profa. Dra. Adriana Souza Resende
Aprovado em 05/10/2021

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Emivan Ferreira da Silva
UNEMAT – SINOP - MT

Profa. Dra. Chiara Maria Seidel Luciano Dias
UNEMAT – SINOP - MT

Profa. Dra. Andréia Dalcin
UFRGS – PORTO ALEGRE – RS

Sinop/MT
2021

Dedico este trabalho aos meus pais, que sempre acreditaram no meu potencial:

Arilde Maria Dallan (in memoriam)

e Claudir Favero.

AGRADECIMENTOS

Tenho muito a agradecer e a ordem dos fatores não altera o produto.

Agradeço a Deus, que orienta meu caminho e minhas escolhas.

À minha mãe (in memoriam) por sempre ter me incentivado a estudar, ser independente e em quem ainda me espelho para ser uma mulher forte e de valor.

A meu pai pelo incentivo constante durante a realização do mestrado e pelas contribuições valiosas durante toda a jornada.

Devo um agradecimento especial ao meu colega Rafael Bitiati Bianchini pelas horas de estudo que dividimos, pelos bolos de chocolate e por ter sido a pessoa que fez minha inscrição no mestrado.

Agradeço ao meu orientador o professor Dr. Emivan Ferreira da Silva e a coorientadora a professora Dra. Adriana Souza Resende, pois contribuíram muito para elaboração deste trabalho.

Aos meus professores do mestrado por ter expandido meus conceitos, compartilhado comigo sua paixão pela matemática e por mostrar que um professor dedicado faz diferença sim.

A CAPES, pelo apoio financeiro.

Tenho que agradecer a equipe gestora da Escola Estadual Cândido Portinari.

Também agradeço ao meu irmão José Francisco, sua esposa Eidilaine e aos meus queridos sobrinhos Elisa e Leonardo.

Muito obrigada a todos!

“A matemática é linda!”

(Autor desconhecido)

RESUMO

Este trabalho enfatiza as contribuições do livro *Alva lebre lobo avermelhado: esta história é falsa*, de Tom Pollock, na abordagem de conteúdos matemáticos, através de um projeto interdisciplinar entre Matemática e Língua Portuguesa, realizado com alunos do 3º ano do Ensino Médio da Escola Estadual Cândido Portinari de Tapurah-MT. A proposta é trabalhar a revisão e a aprendizagem de logaritmos a partir de atividades e resolução de problemas inspirados no romance matemático, com uma sequência didática fundamentada na Aprendizagem Baseada em Projetos (ABP), desmistificando a ideia da disciplina de Matemática como sendo cercada de cálculos e fórmulas, sem mais nada a oferecer ao aluno. As estratégias utilizadas para escrever este trabalho foram a pesquisa qualitativa com estudo de caso e a pesquisa bibliográfica. Espera-se que este trabalho contribua para as aulas de Matemática na busca de novos materiais e estratégias que instiguem a curiosidade, o espírito exploratório e o gosto pela leitura dos nossos alunos.

PALAVRAS CHAVE: Logaritmo, Aprendizagem baseada em projetos (ABP), proposta interdisciplinar.

ABSTRACT

This work emphasizes the contributions of the book *White rabbit red wolf: this story is life*, by Tom Pollock, in the approach to mathematical content, through an interdisciplinary project between Mathematics and Portuguese Language, carried out with students from the 3rd year of High School at Candide Portinari State School of Tapurah-MT. The proposal is to work on the revision and learning of logarithms from activities and problem solving inspired by the mathematical novel, with a didactic sequence based on Project Based Learning (PBL), demystifying the idea of the Mathematics discipline as being surrounded by calculations and formulas, with nothing else to offer the student. The strategies used to write this work were qualitative research with case study and bibliographical research. We hope that this work will contribute to Mathematics classes in the search for new materials and strategies that instigate curiosity, an exploratory spirit and a taste for reading in our students.

KEY WORDS: Logarithm, Project based learning (PBL), interdisciplinary proposal.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Características da ABP	24
Figura 2 – Principais etapas de um projeto de ABP.....	25
Figura 3 – Livro Alva lebre lobo avermelhado: esta história é falsa.....	45
Figura 4 – Escritor Tom Pollock	47
Figura 5 – Etapas do estudo de caso.....	Erro! Indicador não definido.
Figura 6 – Atividade 3 sobre propriedades operatórias da aluna G.D.....	79
Figura 7 – Resolução da situação problema do aluno M.S.	79
Figura 8 – Situação problema apresentada aos alunos	85
Figura 9 – Excerto da primeira tentativa de resolução da situação problema da aluna K.F. ..	86
Figura 10 – Excerto da primeira tentativa de resolução da situação problema da aluna G.D.	86
Figura 11 – Excerto da primeira tentativa de resolução da situação problema do aluno L.H.	86
Figura 12 – Excerto da atividade 1 sobre conceito de logaritmo da aluna E.C.....	88
Figura 13 – Excerto da atividade 1 sobre conceito de logaritmo do aluno C.F.	88
Figura 14 – Excerto da atividade 1 sobre conceito de logaritmo do aluno A.Q.	88
Figura 15 – Excerto da atividade 2 sobre conceito de logaritmo da aluna A.T.	89
Figura 16 – Excerto da atividade 2 sobre conceito de logaritmo do aluno A.Q.	89
Figura 17 – Excerto das atividades 3 e 4 sobre conceito de logaritmo do aluno A.Q.....	90
Figura 18 – Excerto das atividades 3 e 4 sobre conceito de logaritmo da aluna J.S.	90
Figura 19 – Excerto das atividades 3 e 4 sobre conceito de logaritmo da aluna E.C.....	91
Figura 20 – Excerto das atividades 5 e 6 sobre conceito de logaritmo da aluna E.C.....	92
Figura 21 – Excerto das atividades 5 e 6 sobre conceito de logaritmo do aluno L.H.	92
Figura 22 – Excerto da atividade 1 propriedades operatórias da aluna E.C.....	94
Figura 23 – Excerto da atividade 2 propriedades operatórias da aluna A.T.	94
Figura 24 – Excerto da atividade 2 propriedades operatórias da aluna A.B.	94
Figura 25 – Excerto da atividade 2 propriedades operatórias da aluna E.C.....	95
Figura 26 – Excerto das atividades 3 e 4 propriedades operatórias do aluno N.G.....	96
Figura 27 – Excerto da atividade 4 propriedades operatórias da aluna E.C.....	96
Figura 28 – Excerto das atividades 5 e 6 propriedades operatórias da aluna E.F.	97
Figura 29 – Excerto das atividades 5 e 6 propriedades operatórias do aluno L.H.	97
Figura 30 – Excerto das atividades 5 e 6 propriedades operatórias da aluna E.F.	97
Figura 31 – Excerto das atividades 5 e 6 propriedades operatórias da aluna J.S.	98

Figura 32 – Excerto da atividade 7 sobre mudança de base do aluno C.F.	99
Figura 33 – Excerto da atividade 8 sobre mudança de base da aluna I.C.	100
Figura 34 – Excerto da atividade 8 sobre mudança de base da aluna A.F.	100
Figura 35 – Excerto da atividade 1 sobre escala logarítmica do aluno C.F.	102
Figura 36 – Excerto da atividade 1 sobre escala logarítmica da aluna E.F.	102
Figura 37 – Excerto da atividade 2 sobre escala logarítmica do aluno L.H.	103
Figura 38 – Excerto da atividade 2 sobre escala logarítmica da aluna E.H.	103
Figura 39 – Excerto da atividade 3 sobre escala logarítmica da aluna G.D.	103
Figura 40 – Excerto da atividade 3 sobre escala logarítmica do aluno L.H.	104
Figura 41 – Excerto da resolução situação problema da aluna E.G.	105
Figura 42 – Excerto da resolução da situação problema da aluna E.C.	106
Figura 43 – Excerto da resolução da situação problema do aluno A.Q.	106
Figura 44 – Excerto da resolução da situação problema da aluna G.D.	107
Figura 45 – Conclusões e considerações finais da aluna A.T.	109
Figura 46 – Excerto das conclusões e considerações finais do aluno N.G.	110
Figura 47 – Excerto das conclusões e considerações finais da aluna I.C.	110
Figura 48 – Excerto das conclusões e considerações finais do aluno L.H.	110
Figura 49 – Excerto das conclusões e considerações finais da aluna A.B.	110
Figura 50 – Pergunta 1 da avaliação final	111
Figura 51 – Pergunta 2 da avaliação final	111
Figura 52 – Pergunta 3 da avaliação final	112
Figura 53 – Criptografando o Código de César	136
Figura 54 – Pontes de Köninsberg.	137
Figura 55 – Grafo do enigma de Königsberg	138
Figura 56 – Grafo do metrô de São Paulo	138
Figura 57 – Paradoxo do mentiroso	140
Figura 58 – Retângulo de ouro	142
Figura 59 – Espiral de Fibonacci.	143
Figura 60 – Resumo feito pelo aluno L.H.	152
Figura 61 – Resumo feito pela aluna E.F.	154

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Diferenças entre ensino convencional e ABP	21
Quadro 2 – Temas de Matemática presentes no livro	51
Quadro 3 - Quadrados perfeitos	56
Quadro 4 – Planejamento proposto aos alunos para execução do projeto	66
Quadro 5 – Atividades realizadas no projeto “Alva lebre lobo avermelhado”	80
Quadro 6 – Romances que podem ser usados na aula de Matemática no Ensino Médio	122
Quadro 7 – Associação entre PA e PG feita por Napier	159

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 – Conteúdos que os alunos do 3º ano “A” lembravam ter estudado	75
Gráfico 2 – Sobre a importância e aplicação de logaritmos	76
Gráfico 3 – Atitude dos alunos do 3º ano “A” no caso de dúvidas	76
Gráfico 4 – Função exponencial crescente (A) e decrescente (B).....	170
Gráfico 5 – Gráfico de $f(x) = a^x$ e das tangentes nos pontos A, B e C	170
Gráfico 6 – Gráfico de $f(x) = \log_a x$ para $a > 1$	179
Gráfico 7 – Gráfico de $f(x) = \log_a x$ para $0 < a < 1$	179
Gráfico 8 – Comparação das funções logarítmica e exponencial.....	180

SUMÁRIO

1	APRENDIZAGEM BASEADA EM PROJETOS.....	19
1.1	As categorias de projetos educacionais	19
1.2	Escolhendo projetos de aprendizagem	20
1.3	Características essenciais da ABP	22
1.4	As etapas de ensino na experiência de ABP	24
2	CONTRIBUIÇÕES DA LITERATURA PARA A AULA DE MATEMÁTICA	26
2.1	Temas transversais e contextualização	28
2.2	Significado aos símbolos matemáticos e desenvolvimento do vocabulário.....	30
2.3	Interpretação e resolução de problemas.....	32
2.4	Interdisciplinaridade	35
3	RECURSOS LITERÁRIOS PARA A AULA DE MATEMÁTICA	39
3.1	Livros paradidáticos	39
3.1.1	Paradidáticos que abordam o conteúdo a partir de narrativas ficcionais.....	40
3.1.2	Paradidáticos que abordam o conteúdo a partir da História da Matemática	40
3.1.3	Paradidáticos que abordam o conteúdo a partir de um contexto pragmático	41
3.2	Romances matemáticos	41
3.2.1	Obras sobre Matemática em estilo de romance ou aventura	42
3.2.2	Obras de Literatura concebidas com estruturas matemáticas.....	42
3.2.3	Obras de Matemática com características literárias	42
3.2.4	Produção literária envolvendo Matemática	43
3.2.5	Romance matemático	43
4	ALVA LEBRE LOBO AVERMELHADO: ESTA HISTÓRIA É FALSA	45
4.1	Sinopse	45
4.2	Informações adicionais	46
4.2.1	Sobre o Autor	46
4.2.2	Notas de conteúdo	47
4.2.3	Capa.....	48
4.2.4	Flashbacks	48
5	POTENCIALIDADES DO LIVRO	50
5.1	Sugestão de atividades.....	53
5.1.2	Código de César	53
5.1.3	Radiciação	56
5.1.4	Multiplicação, porcentagem e volume	58
5.1.5	Paradoxo do mentiroso	59
6	METODOLOGIA DA PESQUISA E ATIVIDADES DIDÁTICAS.....	62

6.1 Atividades didáticas.....	63
6.2 Planejamento das atividades.....	64
6.2.1 Primeira etapa.....	67
6.2.2 Segunda etapa.....	68
6.2.3 Terceira etapa.....	68
6.2.4 Quarta etapa.....	69
6.2.5 Quinta etapa.....	70
6.2.6 Sexta etapa.....	71
7 RELATO DAS ATIVIDADES E RESULTADOS.....	75
7.1 Perfil dos participantes.....	75
7.2 Coleta dos dados.....	77
7.3 Procedimentos e resultados.....	78
7.4 Realização das atividades em etapas.....	80
7.5 Relato, considerações e conclusões da aplicação do projeto.....	81
7.5.1 Primeira etapa.....	81
7.5.2 Segunda etapa.....	82
7.5.3 Terceira Etapa.....	84
7.5.4 Quarta etapa.....	107
7.5.5 Quinta etapa.....	113
8 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	114
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	117
APÊNDICES.....	121
APÊNDICE A – Sugestão de romances que podem ser usados no Ensino Médio.....	122
APÊNDICE B – Questionário para determinar o perfil do participante.....	126
APÊNDICE D – Vídeos e sites sugeridos aos alunos durante a execução do projeto.....	128
APÊNDICE E – Roteiro de aprendizado.....	129
APÊNDICE F – Código de César.....	136
APÊNDICE G – Estudo de Redes.....	137
APÊNDICE H – Paradoxo do Mentiroso.....	140
APÊNDICE I – Sequência de Fibonacci.....	142
APÊNDICE J – Resumo da obra Alva lebre lobo avermelhado: esta história é falsa.....	144
APÊNDICE K – Resumo feito pelos alunos L.H. e E.F.....	152
APÊNDICE L – Transcrição dos podcasts sobre o livro.....	156
APÊNDICE M – Logaritmo.....	159
ANEXO.....	181
ANEXO A – Competências específicas de Matemática para o Ensino Médio.....	182

INTRODUÇÃO

Sabemos que são inúmeras as formas de adquirir conhecimento, bem como também são diversas as ferramentas que facilitam essa aquisição. Diante desse contexto, proporcionar espaços e estratégias de aprendizagens que sejam relevantes para o aluno pode ser um desafio, principalmente quando se refere à área da Matemática. Uma estratégia que pode enriquecer o processo de ensino de Matemática é o uso da literatura em sala de aula, não só para dinamizar as aulas, mas para tentar criar um elo entre o saber adquirido e a formalização do conhecimento, uma vez que na grande maioria dos materiais pedagógicos os conhecimentos matemáticos já vêm formalizados e desprendidos da realidade, desconsiderando completamente os processos de construção do conhecimento.

Nesta pesquisa a proposta é o uso da literatura no ensino/aprendizagem de Matemática em sala de aula, com base na obra *Alva lebre lobo avermelhado: esta história é falsa*, do escritor Tom Pollock, a partir do estudo de caso com uma turma do 3º ano do Ensino Médio da Escola Estadual Cândido Portinari de Tapurah-MT, através de uma metodologia de aprendizagem ativa: a aprendizagem baseada em projetos (ABP).

No capítulo 2 há uma fundamentação teórica sobre Aprendizagem Baseada em Projetos (ABP) e suas etapas de aplicação. No capítulo 3 apresentamos algumas contribuições da Literatura para o ensino, bem como as relações e potencialidades entre Literatura e Matemática. No capítulo 4 descrevemos alguns dos recursos literários que podem ser usados na aula de Matemática entre eles o romance matemático. O capítulo 5 tem um resumo do livro em questão e potenciais contribuições deste para a aula. No capítulo 6 descrevemos a metodologia da pesquisa, o perfil dos estudantes e a sequência didática. O relato das atividades e os resultados obtidos estão no capítulo 8. Para finalizar, no capítulo 9 encontram-se as considerações finais.

A utilização de uma obra literária como recurso didático nas aulas de Matemática, não é um tema novo, mas pode tornar o processo de ensino aprendizagem mais atrativo e inovador para alunos e professores, pois permite trabalhar conceitos e conhecimentos matemáticos através dos personagens, dos enredos e das imagens contidas nas histórias. Como destacam as autoras Smole, Candido e Stancanelli (1999, p. 12) em atividades desse tipo os alunos exploram a matemática e a história ao mesmo tempo.

Ainda sobre o uso de obras literárias, Montoito (2011, p. 10) nos diz ser “mais uma alternativa para tornar as aulas agradáveis, motivadoras e desafiadoras da capacidade imaginativa do aluno, a fim de que surja uma outra atmosfera de ensino e diálogos sobre a disciplina”, visto que, os ambientes de aprendizagem que podem ser criados a partir da leitura

de um romance matemático baseiam-se na provocação de ideias e na comunicação, transformando assim a tão característica aula de Matemática limitada pelo silêncio e pela execução de exercícios repetitivos.

O presente trabalho também traz uma proposta de uso de metodologia ativa, alinhada com a nova Base Nacional Comum Curricular (BNCC) para a nova Educação Básica, no que se refere à Matemática e suas Tecnologias para o Ensino Médio. Neste sentido o uso de romances amplia a oferta de material didático na disciplina, os conteúdos são apresentados num contexto lúdico, permitindo abordar temas transversais e, principalmente, contextualizar os conceitos matemáticos.

O uso do livro *Alva lebre lobo avermelhado: esta história é falsa* também torna viável a integração de Matemática e Língua Portuguesa, apoiado no conceito de interdisciplinaridade proposto por Pombo (1992, p. 12), segundo ela a interdisciplinaridade pode ser entendida como “Qualquer forma de combinação entre duas ou mais disciplinas com vistas à compreensão de um objeto a partir da confluência de pontos de vistas diferentes e tendo como objetivo final a elaboração de uma síntese relativamente ao objeto comum.” Podemos dizer que o trabalho conjunto entre Matemática e Língua Portuguesa permite uma compreensão global dos conceitos matemáticos.

O conjunto de atividades que serão desenvolvidas a partir do livro, buscará influenciar os alunos a serem mais participativos, melhorar a capacidade de interpretação e resolução de problemas e interessar-se por assuntos relacionados à Matemática, buscando principalmente responder à questão: como a narrativa de *Alva lebre lobo avermelhado: esta história é falsa*, de autoria de Tom Pollock, pode provocar o estudo de conceitos matemáticos no Ensino Médio?

Para quem gosta de Matemática e sempre quis ser professora dessa disciplina, foi inevitável buscar alternativas para aprimorar o ensino-aprendizagem e práticas em sala de aula. Acreditamos que ao planejar situações problemáticas com sentido, isto é, que tenham significado para os estudantes, devemos escolher materiais que sirvam de apoio para o trabalho que será realizado nas aulas. Assim, a proposta do uso de um romance matemático fundamenta-se na perspectiva de tornar a prática pedagógica mais diversificada e dinâmica, transformando o aluno em protagonista do processo de ensino-aprendizagem.

O primeiro aspecto que consideramos, ao pensar na conexão entre a Matemática e a Literatura, foi a respeito da seleção do livro que pretendíamos utilizar. Diferente de um livro didático, o romance matemático não precisa definir um conceito ou apresentar um conteúdo em sua totalidade, o que teremos é um contexto favorável à resolução de problemas em paralelo ao envolvimento do aluno com a história, segundo Smole e Diniz (2001, p.75) sendo assim

estimulado a ouvir, ler, pensar e escrever sobre a Matemática. Por isso, buscávamos um romance em que a Matemática se fizesse presente, mas não passasse receitas.

Acabamos encontrando várias obras que podem ser usadas no Ensino Médio, observe o Apêndice A com alguns desses romances. O livro que selecionamos foi *Alva lebre lobo Avermelhado: esta história é falsa*, de Tom Pollock. Essa escolha se deu por várias razões, entre elas: o livro possui texto acessível, é contemporâneo, é adequado a idade dos alunos, permite a aquisição de conhecimentos e, principalmente, é ricamente integrado com matemática. Assim os alunos poderão mergulhar em um mundo lúdico que os favorecerá a aprender Matemática lendo, cujo enredo poderá alavancar uma discussão sobre conteúdos matemáticos, instigando o aluno a construir seu próprio conhecimento.

Outro importante motivo foi que na realização da pesquisa não nos deparamos com nenhum outro estudo que descrevesse o uso desse livro nas aulas de Matemática. Assim, usando trechos do próprio livro poderíamos criar uma sequência didática que oferecesse condições para o ensino aprendizagem das habilidades EM13MAT305 e EM13MAT403 sobre logaritmos, propostas pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Essas habilidades estão descritas no Apêndice M.

Em levantamentos prévios e não formalizados com os alunos da turma selecionada para a aplicação do projeto, constatamos que a maioria dos discentes lê apenas quatro livros por ano, justamente os livros solicitados pela disciplina de Língua Portuguesa. Deste modo a leitura de um romance na aula de Matemática se mostrou aceitável, baseada na ideia de incentivar a leitura na escola e pela aptidão que alguns alunos têm pelo ato de ler.

Entretanto, foram o acervo pessoal de romances matemáticos e o gosto pela leitura que criaram as condições necessárias para efetivar um projeto interdisciplinar com Língua Portuguesa, pois o binômio Literatura e Matemática abre espaço para a comunicação, contribui com a contextualização dos estudos matemáticos, melhora a capacidade de interpretação e resolução de problemas, além de despertar no aluno um olhar diferente com relação à disciplina, à medida que são apresentadas ideias e conteúdos que fogem do esquema definição-exemplos-generalizações-exercícios.

Portanto, a busca por assuntos atuais presentes no cotidiano e a necessidade de instigar os estudantes a ver a Matemática como algo construtivo e contextualizado com situações imaginárias e reais e, principalmente, tornar o ensino menos convencional, foram os principais fatores motivadores do presente estudo. Entendendo que se concebe a Língua Portuguesa e a Matemática como duas áreas fundamentais para a formação humana, social e intelectual.

Esperamos que ao final da aplicação do projeto os alunos possam estabelecer conexões entre temas matemáticos e outras áreas curriculares, melhorar a interpretação e a resolução de problemas, identificar tópicos de história da matemática e os conceitos matemáticos abordados no livro e reconhecer e aplicar os conceitos de logaritmos, além de desenvolver nos alunos o interesse pela leitura, despertando neles a capacidade de interpretação e consciência crítica.

1 APRENDIZAGEM BASEADA EM PROJETOS

Segundo Maximiano (1997, p. 20) todo projeto “é um empreendimento finito, com objetivos claramente definidos em função de um problema, oportunidade ou interesse de uma pessoa ou organização”. Na concepção de Moura e Barbosa um projeto é classificado como educacional quando ele é dado por:

[...] um empreendimento de duração finita, com objetivos claramente definidos em função de problemas, oportunidades, necessidades, desafios, ou interesses de um sistema educacional, de um educador ou grupo de educadores, com a finalidade de planejar, coordenar e executar ações voltadas para melhoria de processos educativos e de formação humana, em seus diferentes níveis e contextos. (MOURA; BARBOSA, 2017, p. 23)

1.1 As categorias de projetos educacionais

Podemos dizer, que além de diferentes em relação aos seus propósitos, os projetos também diferem em relação às suas características. Na concepção de Moura e Barbosa (2017), um projeto educacional tem duração finita, os objetivos são claramente definidos e ocorre em função das necessidades ou interesses educacionais. Esses autores ainda fazem a seguinte classificação para os vários tipos de projetos que ocorrem na área educacional:

- **Projetos de Intervenção:** São projetos desenvolvidos para promover uma intervenção, visando a introdução de modificações na estrutura e/ou na dinâmica da organização, ou contexto, afetando positivamente seu desempenho. Os projetos de intervenção visam a solução de problemas ou o atendimento de necessidades identificadas.
- **Projetos de Pesquisa:** São projetos que têm como principal finalidade a obtenção de conhecimentos sobre determinado problema, questão ou assunto, com garantia de verificação experimental. Existem diversos tipos de projetos de pesquisas, próprias dos setores acadêmicos e de instituições de pesquisa.
- **Projetos de Desenvolvimento (ou de Produto):** São projetos que ocorrem no âmbito de uma organização com a finalidade de produção de novos serviços, atividades ou produtos. Exemplos de projetos deste tipo são: desenvolvimento de novos materiais didáticos; desenvolvimento de nova organização curricular; desenvolvimento de um novo curso; criação de *softwares* educacionais; produção de livro didático, etc.

- **Projetos de Ensino:** São projetos elaborados em uma (ou mais) disciplina(s) ou conteúdo(s) curricular(es), destinados à melhoria do processo ensino-aprendizagem. Esta categoria de projeto é própria da área educacional e refere-se ao exercício das funções do professor. Exemplos deste tipo de projeto são: desenvolvimento de um método de ensino de Geometria utilizando animação gráfica e desenvolvimento de um *software* para apoiar o ensino de Eletricidade Básica.
- **Projetos de Aprendizagem:** São projetos desenvolvidos por alunos em uma (ou mais) disciplina(s) ou conteúdo(s) curricular(es), no contexto escolar, sob a orientação do professor, e têm por objetivo, a aprendizagem de conceitos e desenvolvimento de competências e habilidades específicas. A principal diferença entre esses dois últimos tipos é que, enquanto os projetos de ensino são desenvolvidos pelo professor, os projetos de aprendizagem são desenvolvidos pelos alunos sob orientação do professor.

Moura e Barbosa (2017) apontam também que as cinco categorias de projetos descritos acima não são excludentes, e que a atividade predominante é a que contribui para classificar o tipo de projeto. Afirmam que tal classificação apresentada é geral e pode ser desdobrada para incluir ou explicitar aspectos mais específicos da área educacional, criando-se subcategorias.

1.2 Escolhendo projetos de aprendizagem

Acreditamos que a educação deve ter como objetivo proporcionar ao aluno uma aprendizagem significativa, capaz de gerar competências e habilidades para a resolução de problemas e conduzir projetos nos seus diversos segmentos. Em conformidade com nossas crenças, Bender (2014, p. 09) define a aprendizagem baseada em projetos (ABP) como “um modelo de ensino que consiste em permitir que os alunos confrontem as questões e os problemas reais que consideram significativos, determinando como abordá-los e, então, agindo cooperativamente em busca de soluções.” Para nós, a ABP é uma das mais eficazes formas disponíveis de envolver os alunos com o conteúdo de aprendizagem.

De acordo com Barrel (2014, p. 32) duas vantagens se destacam na ABP: este tipo de projeto aumenta a motivação e o interesse dos alunos em executar o trabalho que lhes foi solicitado e melhora a atitude em relação a certas disciplinas como a Matemática.

Devemos destacar que a ABP possui características da aprendizagem significativa. Métodos de aprendizagem significativa permitem maior envolvimento do aluno com seu processo de aprendizagem. Nesse contexto, o aprendiz tem maior independência, o que possibilita identificar o material a estudar com os próprios objetivos, promove a criatividade, desenvolve autoconfiança e autocrítica, e a avaliação feita por outros têm importância secundária, ou seja, a aprendizagem é mais exploradora e durável.

Associada à aprendizagem significativa temos a aprendizagem ativa, onde os estudantes devem realizar algo mais do que simplesmente ouvir o professor em aulas expositivas para terem uma aprendizagem efetiva, os alunos devem aprender fazendo. Com essa estratégia de aprendizagem, ocorre maior interação do aluno com o assunto estudado. Em concordância com Moura e Barbosa (2017), o estudante constrói o conhecimento ao invés de recebê-lo passivamente. Nesse contexto, o professor atua como orientador, supervisor, facilitador do processo de aprendizagem, e não como fonte única de informação e conhecimento.

O Quadro 1 ilustra algumas diferenças entre o ensino convencional e o ensino baseado em projetos. Como se percebe são muitas as diferenças, as vantagens, da ABP em relação às metodologias convencionais. Em vista disso, utilizaremos o recurso da ABP para pôr em prática o uso de um romance na aula de Matemática. É relevante destacar que nosso objetivo não é substituir os modelos convencionais, mas agregar novas estratégias ao ensino.

Utilizaremos a ABP para estimular os alunos a participar de forma mais direta de seu processo de aprendizado, como protagonistas. A própria BNCC, em suas competências gerais da educação básica, afirma que devemos:

Valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhe possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade. (BRASIL, 2018, p. 9)

Além de propor:

[...] a superação da fragmentação radicalmente disciplinar do conhecimento, o estímulo à sua aplicação na vida real, a importância do contexto para dar sentido ao que se aprende e o protagonismo do estudante em sua aprendizagem e na construção de seu projeto de vida. (BRASIL, 2018, p. 15)

Aprendizagem convencional	Aprendizagem baseada em projetos
Tem origem no conteúdo	Tem origem na situação-geradora
Planejamento fixo	Planejamento dinâmico
Organizada em aulas expositivas	Organizada em problemas reais
Produtos previsíveis	Produtos incertos
Processos estáveis	Criação de novos processos
Conhecimento específico	Conhecimento multidisciplinar
Professor é a autoridade	Professor como orientador e consultor
Executa e mantém padrões	Altera e cria padrões
Atividade repetitiva	Atividade inovadora
Elevado nível de automação	Baixo nível de automação
Aprende antes de executar	Aprende durante a execução
Trabalho isolado	Trabalho em equipe
Tarefas muito detalhadas	Atividades pouco detalhadas
Avaliações somativas efetuadas apenas pelo professor	Equipes e membros avaliam com contribuições
Tem a avaliação como produto	Produto a ser avaliado

Fonte: Adaptado de Moura e Barbosa (2017)

1.3 Características essenciais da ABP

Escolhida a ABP, é preciso entender melhor essa metodologia de aprendizado. De acordo com Bender (2014) as características da ABP são:

- **Introdução de uma âncora:** devemos apresentar informações básicas aos alunos para preparar o terreno e gerar interesse pelo projeto. As âncoras podem ser simples narrativas de um ou dois parágrafos que descrevem um problema. Também pode ser um vídeo ou uma reportagem.
- **Questão motriz:** fornece a tarefa geral ou a meta. Deve chamar a atenção dos alunos, bem como focar seus esforços. A questão motriz permite que os alunos saibam quais informações eles precisam reunir e em qual profundidade.

- **Trabalho em equipe e cooperativo:** É essencial para as experiências de ABP. É uma das mais importantes habilidades que qualquer jovem pode desenvolver. Bender ainda acrescenta que:

Conforme os alunos ganham experiência em ensino na ABP, eles também tornam-se mais experientes no trabalho em grupo, pois estão acostumados a planejar atividades em conjunto, a especificar papéis para vários membros do grupo, a trabalhar em grupo para resolver problemas, a apoiar as ideias uns dos outros e oferecer, mutuamente, avaliações de colegas apropriadas e úteis. Procedimentos de ensino como a instrução cooperativa, a tutoria de colegas e o ensino recíproco frequentemente caracterizam o ensino da ABP. (BENDER, 2014, p. 49)

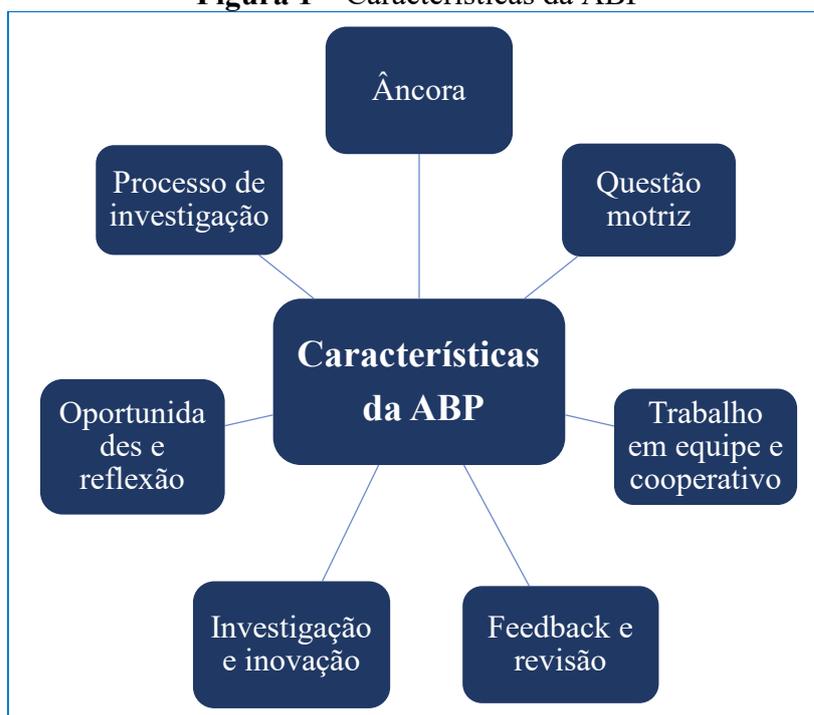
- **Feedback e revisão:** a assistência estruturada deve ser rotineiramente proporcionada pelo professor. O *feedback* pode ser baseado nas avaliações do professor, dos colegas ou autoavaliação. Pode ser formativo, isto é, a avaliação acontece durante o processo de ABP para ajudar os alunos a formar ou reorientar seus trabalhos; ou somativo, neste caso a avaliação acontece ao término do projeto.
- **Oportunidades e reflexão:** criar oportunidades para reflexão dos alunos é essencial na ABP e deve fazer parte de todas as etapas do projeto. Nas discussões em grupo todas as ideias devem ser respeitadas como sendo dignas de consideração.
- **Processo de investigação:** pode-se usar os seguintes procedimentos para a conclusão do projeto e geração de artefatos: ensino estruturado, *webquests*, vídeos de ensino, laboratórios e demonstrações, modelagem do aluno, modelagem do professor, mini lições, mapas semânticos, palestrantes convidados, avaliações dos colegas, discussões em grupo, registros em diários, pensar em voz alta.
- **Resultados apresentados publicamente:** os projetos de ABP pretendem ser exemplos autênticos de problemas que os alunos enfrentam no mundo real, de modo que algum tipo de apresentação pública dos resultados é fundamental. Algumas opções para a publicação dos artefatos de ABP são: jornais locais, apresentação de alunos em encontros, bibliotecas locais, reuniões de governança local, apresentação em clubes, cartas ao editor, canais de TV locais, *websites* de escolas, centros de mídia escolares, revistas locais e *blogs* da turma.

- **Voz e escolha do aluno:** os alunos devem ter voz em relação a alguns aspectos de como o projeto pode ser realizado, além de serem encorajados a fazer escolhas ao longo de sua execução. A escolha do aluno é o componente mais importante de um projeto de ABP, isso garante uma participação ativa do aluno na execução do projeto.

Os professores que estão começando o ensino na ABP podem se sentir mais confortáveis ao selecionar tanto a âncora do projeto quanto a questão motriz, certamente, não há nada de errado em exercer um pouco mais de controle sobre o projeto até se ter uma ideia melhor sobre o que é a ABP e se tenha acumulado um pouco de experiência com esse modelo de ensino, contanto que os alunos possam ter escolhas substantivas e significativas em relação a outros aspectos do projeto.

A seguir, na Figura 1, temos a representação das principais características da ABP em um diagrama.

Figura 1 – Características da ABP



Fonte: A autora

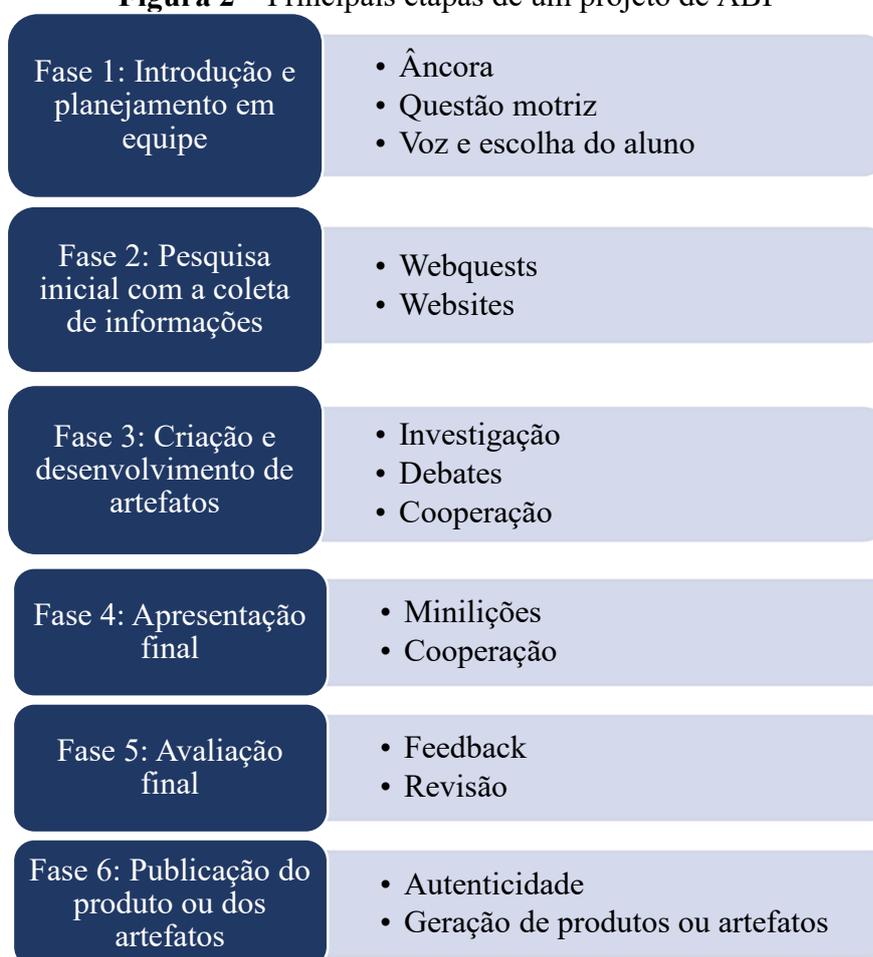
1.4 As etapas de ensino na experiência de ABP

Como é de sua característica, a ABP pode ser planejada de forma específica e individual por um único professor ou pode ser interdisciplinar onde um grupo de professores recebe a

colaboração dos colegas e de toda equipe pedagógica. Os professores também devem decidir se o projeto de ABP será um suplemento para uma ou mais unidades de ensino, ou se o projeto substituirá o ensino baseado em unidades por algum período.

Nosso projeto será interdisciplinar com Língua Portuguesa e substituirá o ensino convencional de Matemática do sexto bimestre na Escola Estadual Cândido Portinari de Tapurah-MT, também é nossa primeira experiência com projeto baseado em ABP, por isso criamos um roteiro que se encaixasse com a organização bimestral da unidade escolar e suas demais atividades, veja a Figura 2. Gostaríamos de pontuar que a estrutura do ABP é bem dinâmica e flexível e que este número de fases pode ser alterado durante a execução do projeto.

Figura 2 – Principais etapas de um projeto de ABP



Fonte: A autora

Essas etapas serão abordadas com mais detalhes no Capítulo 6 deste trabalho quando será planejada a sequência didática e as atividades do roteiro de aprendizado.

2 CONTRIBUIÇÕES DA LITERATURA PARA A AULA DE MATEMÁTICA

A literatura é, antes de tudo, uma manifestação de criatividade para representar o mundo, o homem e a vida através das palavras. Ler é uma maneira de comunicação que faz parte do cotidiano, tendo em vista que lemos não apenas letras, como também símbolos e imagens. Mas, como diz Coelho (2000, p. 27): “Literatura é uma linguagem específica que, como toda linguagem, expressa uma determinada experiência humana, e dificilmente poderá ser definida com exatidão”. Essa mesma autora aponta que:

A literatura tem poder de propor indagações ao leitor, estimular a curiosidade, instigar a produção de novos conhecimentos, apropriar-se de uma linguagem rica e variada, facilitando o uso de expressões adequadas para expor ideias e emoções, capacitando o ser humano a interagir no mundo de modo criativo e transformador. (COELHO, 2000, p.43)

Nesse sentido, a literatura pode ser um instrumento que contribui muito com o ensino de Matemática, pois visto como algo que fascina, que desenvolve o imaginário, a leitura possibilita que os estudantes possam adentrar em mundos diferentes, estruturando saberes; a capacidade de antecipação ou predição de conteúdos; ou propriedades dos textos, a localização de informações; a comparação destas; a generalização; a produção de inferências locais e globais; favorecendo ao aluno para criar hipóteses, dar sentido às coisas, além de ter liberdade imaginária que lhe permitirá desvendar mistérios, elaborar questionamentos e, finalmente, buscar as explicações que possam sanar suas inquietações.

Entretanto, para haver aprendizagem, é necessário, inicialmente, mobilizar o aluno para o conhecimento, ou seja, seu interesse precisa ser provocado. O professor, então, atento a esta característica, pode conferir a literatura um grande valor didático, pois a literatura desperta o interesse dos alunos, cria expectativas, envolvendo-os emocionalmente com a narrativa, possibilitando assim, uma aproximação mais harmoniosa e significativa do aluno com o conteúdo a ser desenvolvido. Nas palavras de Almeida:

Desta forma, a literatura, além de mobilizar o aluno para o conhecimento, desperta nele a imaginação e a criatividade, aspectos importantes não apenas para a compreensão de mundo e para elaboração de conceitos sobre o objeto a ser conhecido, mas também para a construção do pensamento científico, uma vez que o ser tem, em si, de maneira indissociável, a razão e a sensibilidade. (ALMEIDA, 2006, prefácio)

Campos e Montoito (2010, p.165) também destacam a importância da imaginação no ensino da Matemática, pois “em muitas passagens da História da Matemática, é inegável o uso

da imaginação para a tomada de decisões, investigações de teoremas e resolução de problemas”. Estes autores também asseguram que a Literatura é uma importante ferramenta no processo de aprendizagem de Matemática, haja visto que:

[...] ao se valorizar a imaginação do estudante, que desenvolverá um papel importante na construção das ideias à medida que a leitura avança, o professor, utilizando-se das ideias do autor que estará sendo trabalhado, tentará tirar o aluno da postura de passividade, tão característico do ensino receptivo. (CAMPOS; MONTOITO, 2010, p.165)

Dalcin acrescenta:

No ensino-aprendizagem da Matemática, particularmente, a imaginação exerce um papel fundamental nos processos de compreensão, reflexão e abstração, na medida em que possibilita a criação de situações específicas e a vinculação dessas situações com outras já conhecidas, o que nem sempre seria possível dentro das condições reais de existência. (DALCIN, 2002, p. 73-74)

Ao entrar nos mundos criados pela ficção, o aluno abrange dois campos: emocional e intelectual, e vive os conflitos da narrativa, expandindo seu conhecimento de mundo.

Entretanto, é ao professor que cabe o papel de fazer bom uso das histórias para ensinar Matemática. Ao escolher um livro ou história que apoie o que deve ser ensinado, o professor tem a abertura necessária para que o aluno perceba que a disciplina Matemática tem mais a oferecer que apenas cálculos e fórmulas, pois a literatura valoriza a imaginação e a criatividade do estudante.

Assim, quando o aluno vivencia experiências com a literatura em sala de aula, o enredo pode promover uma discussão sobre determinados conteúdos matemáticos, e com o trabalho dos assuntos matemáticos extraídos da leitura de livros, os alunos podem aprender com mais entusiasmo e dar significado ao conteúdo.

Além disso, também é importante que o educador tenha disposição para pesquisas, discussões, críticas, pois a utilização da literatura pode ser vista pela comunidade escolar como algo fora do contexto nos modelos mais convencionais de ensino. Entretanto, a recomendação do uso de recursos didáticos é feita em quase todas as propostas curriculares, e nesse contexto, o uso da literatura apresenta-se como uma prática pedagógica capaz de alterar a dinâmica da sala de aula, ao proporcionar aos alunos atividades diferenciadas das que eles estão acostumados, estimulando, assim, seus interesses.

2.1 Temas transversais e contextualização

Como diz Coelho (2000) a literatura é uma área de conhecimento que permite a formação e desenvolvimento humano, não somente pelo entretenimento que a ficção proporciona, mas por possibilitar aos leitores reflexão sobre as questões da realidade. Porque vivenciam situações que são da ficção, mas que tem inspiração na vida real das pessoas, ora utilizando apenas o realismo cotidiano, ora utilizando a fantasia.

Contamos assim com a oportunidade de combinar conhecimentos teoricamente sistematizados e os assuntos da vida real, visto que o uso da literatura é uma forma de integrar abertamente os temas transversais nas aulas de Matemática.

Os temas transversais transmitem princípios básicos da cidadania e da democracia, discutindo questões importantes para a sociedade contemporânea como a ética, o meio ambiente, a saúde, o trabalho e o consumo, a orientação sexual e a pluralidade cultural. Estes temas que transpõem todas as áreas do conhecimento, e estão sendo vivenciadas pela sociedade e pela comunidade escolar em seu dia a dia. Nesta perspectiva, os Parâmetros curriculares nacionais (PCNs) para o terceiro e quarto ciclo, afirma, na apresentação dos temas transversais, que:

A educação para a cidadania requer que questões sociais sejam apresentadas para a aprendizagem e a reflexão dos alunos, buscando um tratamento didático que contemple sua complexidade e sua dinâmica, dando-lhes a mesma importância das áreas convencionais. Com isso o currículo ganha em flexibilidade e abertura, uma vez que os temas podem ser priorizados e contextualizados de acordo com as diferentes realidades locais e regionais e que novos temas sempre podem ser incluídos. (BRASIL, 1998, p. 25)

Portanto, utilizar um romance na aula de Matemática permite a ligação entre os conteúdos com o cotidiano, estabelecendo uma ligação entre a teoria e a prática, ou seja, conseguiremos contextualizar a Matemática com situações fictícias ou reais. Como diz Vasconcellos:

[...] contextualizar é apresentar em sala de aula situações que deem sentido aos conhecimentos que desejamos que sejam aprendidos, por meio da problematização, resgatando os conhecimentos prévios e as informações que os alunos trazem, criando, dessa forma, um contexto que dará significado ao conteúdo, isto é, que o conduza à sua compreensão. (VASCONCELLOS, 2008, p. 49)

Concebendo a contextualização como um elo entre o conhecimento científico e o saber escolar, podemos utilizar a ficção dos romances para explorar contextos na construção de

conceitos matemáticos. As Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio tratam da contextualização como princípio pedagógico e consideram ser na

[...] dinâmica de contextualização/descontextualização que o aluno constrói conhecimento com significado, nisso se identificando com as situações que lhe são apresentadas, seja em seu contexto escolar, seja no exercício de sua plena cidadania. A contextualização não pode ser feita de maneira ingênua, visto que ela será fundamental para as aprendizagens a serem realizadas – o professor precisa antecipar os conteúdos que são objetos de aprendizagem. Em outras palavras, a contextualização aparece não como uma forma de “ilustrar” o enunciado de um problema, mas como uma maneira de dar sentido ao conhecimento matemático na escola. (BRASIL, 2006, p. 83).

Fica claro que o objetivo da contextualização é dar sentido ao conhecimento, ou seja, construir conhecimento com significado. O emprego da leitura nas aulas permite ao professor trabalhar diversos conteúdos de modo mais abrangente e com uma linguagem bem mais acessível ao aluno, dado que os personagens das histórias recorrem à Matemática para resolver problemas. Isso contextualiza e mostra a aplicação da Matemática.

Como descrito por Nacarato:

É importante proporcionar aos alunos situações que os levem a perceber que é possível encontrar, num simples texto de literatura infantil, situações matemáticas. Quando conseguem compreender essa relação, seu interesse pela leitura aumenta; além disso, sentem-se estimulados. Por esse motivo, as atividades realizadas passam a ter maior significado, num processo que acaba por constituir um conhecimento contextualizado. Além disso, essa prática abre espaço para a comunicação nas aulas de matemática, até então caracterizadas pelo silêncio e pela realização de atividades que promovem o método mecânico de cálculos. (NACARATO et al., 2015, p. 103)

O uso de literatura nas aulas de Matemática cria uma situação de ligação dos conteúdos e do cotidiano, ou com outros componentes curriculares, em situações reais ou imaginárias, fazendo uma ponte entre a teoria e a prática. Proporcionando assim a aprendizagem com mais significado, estimulando os alunos para o estudo e tornando a aula mais participativa.

Hahn et al, afirma que:

As relações entre Literatura e a Matemática, se corretamente articuladas, podem ser compreendidas como possibilidades para vincular o contexto cultural e social às aulas, fazendo uma ponte entre o concreto e o abstrato, aspecto fundamental para a contextualização de conteúdos matemáticos, podendo, inclusive, proporcionar ao estudante a capacidade de análise crítica sobre o mundo que o cerca, além de desenvolver a capacidade de argumentação, expressão e sistematização. (HAHN et al., 2012, p.19)

Entretanto, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) alertam para uma interpretação equivocada da ideia de contexto, ao se trabalhar apenas com o que se supõe fazer parte do dia a dia do aluno:

Embora as situações do cotidiano sejam fundamentais para conferir significados a muitos conteúdos a serem estudados, é importante considerar que esses significados podem ser explorados em outros contextos como as questões internas da própria Matemática e dos problemas históricos. Caso contrário, muitos conteúdos importantes serão descartados por serem julgados, sem uma análise adequada, que não são de interesse para os alunos porque não fazem parte de sua realidade ou não têm uma aplicação prática imediata. (BRASIL, 1998, p. 23)

Então, contextualizar a Matemática é mais que deixar clara sua participação e utilização nos mais variados campos da atuação humana, é valorizar o uso social e cultural da Matemática, relacionar as ideias matemáticas com os demais temas de outras disciplinas; reconhecer a relação entre os diferentes tópicos dessa matéria escolar; explorar problemas e descrever resultados; usar modelos, representações gráficas, numéricas, físicas e verbais.

No caso do uso de um romance a problemática enfrentada pelos personagens da história pode ser debatida pelos estudantes, gerando momentos em que os conceitos e símbolos da Matemática serão utilizados, assim os conteúdos podem ser introduzidos sem usar nomes complicados.

2.2 Significado aos símbolos matemáticos e desenvolvimento do vocabulário

Tratando-se da aquisição de conhecimentos sobre a escrita, podemos afirmar que a leitura das histórias, além de enriquecer extraordinariamente o vocabulário, também proporciona à criança uma outra descoberta: a de que os textos da linguagem escrita têm uma estrutura diferente da [estrutura] da linguagem falada. (MARIA, 2009, p. 55).

Quanto maior é o contato do estudante com a linguagem escrita, mais familiaridade ele adquire, passando, assim, a incorporá-lo em seu vocabulário e a fazer uso deste sistema de comunicação. Conseqüentemente o contato com a literatura é importante para o processo de desenvolvimento do aluno, pois além de proporcionar um alargamento do vocabulário, estimula a comunicação e este conseguirá argumentar com mais facilidade.

O nosso pensamento é concretizado em palavras, e não em símbolos. Um dos maiores estudiosos sobre essa habilidade humana foi o psicólogo Lev Vygotsky (1896-1934), que criou o conceito de pensamento verbal — capacidade humana de unir a linguagem ao pensamento para organizar a realidade. Desta forma, é necessário fazer o aluno exprimir a Matemática, tanto

de forma oral como escrita, para então chegar à linguagem simbólica. Pois, se os alunos tiverem dificuldade em ler e escrever matematicamente, isso os impedirá de compreender o que estão lendo e assim expressar o que sabem. Incentivando os discentes a se comunicar e debater suas descobertas, podemos levá-lo a desenvolver tanto a língua materna, quanto a linguagem matemática.

Neste sentido Souza e Carneiro apontam que a literatura nas aulas de matemática:

[...] propicia circunstâncias que mostram ao aluno a importância e a utilidade da linguagem e o simbolismo matemático, bem como o uso apropriado desses símbolos e da terminologia matemática; e permite também o desenvolvimento da comunicação matemática, podendo levar o aluno a compreender conteúdos matemáticos e a linguagem matemática. (SOUZA; CARNEIRO, 2015, p. 398).

Ao contrário da língua materna, com a qual os estudantes têm contato desde muito cedo, a linguagem matemática é apresentada muito mais tarde na escola e de maneira distante da realidade, o que torna a linguagem matemática formal e abstrata. Sobre isso Lorenzato diz que:

Nos dias atuais, a linguagem matemática caracteriza-se por ser resumida e precisa, além de possuir expressões, regras vocábulos e símbolos próprios. Exemplos disso são as fórmulas matemáticas que se tornam estigmas para muitos; elas são resultado de processos históricos e o significado de cada um de seus símbolos precisa ser conhecido para que possam ser compreendidas e empregadas corretamente. Cada fórmula representa uma síntese final de um processo e, por isso mesmo, pode ser enigmática para aqueles que tentam começar seus estudos por ela, tornando-se um convite à memorização sem nexos. (LORENZATO, 2010, p. 44).

A Matemática não é apenas um sistema de símbolos e processos de cálculo, ela constitui também uma linguagem. Para que os processos estudados em sala de aula tenham sentido, o significado dos símbolos precisa ser compartilhado. Por tanto tempo a escola separou o conhecimento em disciplinas, que hoje pode causar estranhamento pensar em aprender Matemática através da Literatura, mas como diz Smole:

Todos os dias nos jornais, nas revistas, na TV e em outras situações comuns à vida das pessoas, usa-se uma linguagem mista. Parece mesmo que é a escola que se encarrega de estabelecer um distanciamento entre estas duas formas de linguagem, de tal modo que cria uma barreira quase intransponível entre elas. Nos parece que a literatura infantil pode ser um dos recursos a ser utilizado pelo professor para diminuir este distanciamento. (SMOLE, 1993, p.3-4).

Em outras palavras, a possibilidade de aproximar, não só a Literatura e a Matemática infantil, mas a Literatura e Matemática do Ensino Médio, está na oralidade que a Matemática “pega emprestada” da língua materna, para compartilhar os significados de seus símbolos.

A construção da linguagem matemática perpassa a própria história da humanidade, sendo originária de diversas culturas como forma de mensurar número, forma e as ideias fundamentais desta disciplina. Quando os significados historicamente construídos para os símbolos matemáticos não são compartilhados, até é possível operar, porém, torna-se um processo mecânico.

Machado (2011) destaca que a linguagem matemática e a língua materna estabelecem uma relação de complementaridade, pois a Matemática não possui oralidade própria; sendo assim, não é possível ocorrer uma comunicação por via oral, separada da escrita, o que acarreta uma impregnação mútua entre a Matemática e a língua materna. A língua materna, segundo Machado (2011), além de auxiliar na compreensão de enunciados, é fundamental na construção de conceitos, na estruturação da argumentação e na elaboração e desenvolvimento da própria linguagem matemática.

Até mesmo as crianças quando chegam na idade escolar podem já ter ouvido palavras como metro, quadrado, segundo, infinito, mas, de acordo com Vygotsky (1998), isso não quer dizer que saberão utilizá-las. Primeiro as crianças precisam passar pelo processo de compreensão do conceito para poder entender o significado de tais palavras. Por isso, quando o conceito for elaborado, depois das experiências da criança ou de diálogos sobre o assunto, a palavra estará disponível como se ela sempre a conhecesse, de repente, a palavra faz sentido.

As histórias podem atuar neste processo de compreensão dos conceitos, podem disparar a troca de ideias entre alunos e professores, nas palavras de Smole:

Sendo assim, através da conexão entre a literatura e a matemática, o professor pode criar situações na sala de aula que encorajem os alunos a compreenderem e se familiarizarem mais com a linguagem matemática, estabelecendo ligações cognitivas entre a língua materna, conceitos da vida real e a linguagem matemática formal, dando oportunidades para eles escreverem e falarem sobre o vocabulário matemático (...) enquanto desenvolvem noções e conceitos matemáticos. (SMOLE, 1993, p.3).

2.3 Interpretação e resolução de problemas

A linguagem matemática só se torna realmente significativa se puder ser usada para resolução de alguma situação ou problema. Os parâmetros curriculares nacionais (PCNs) trazem o seguinte sobre resolução de problemas:

Fazer matemática é expor ideias próprias, escutar as dos outros, formular e comunicar procedimentos de resolução de problemas, confrontar, argumentar e procurar validar seu ponto de vista, antecipar resultados de experiências não realizadas, aceitar erros, buscar dados que faltam para resolver problemas, entre outras coisas. Dessa forma as

crianças poderão tomar decisões, agindo como produtoras de conhecimentos e não apenas executoras de instruções. Portanto, o trabalho com matemática pode contribuir para a formação de cidadãos autônomos, capazes de pensar por conta própria, sabendo resolver problemas (BRASIL, 1998, p. 207)

Às vezes os alunos não conseguem retirar do enunciado dos problemas matemáticos informações para a sua resolução ou não conseguem constatar qual é o questionamento do problema. Uma das causas dessa dificuldade de interpretação está diretamente ligada a capacidade de ler, por isso, um aluno que possui um hábito regular de leitura terá uma facilidade maior em compreender um problema matemático.

A dificuldade que os alunos encontram em ler e compreender textos de problemas, podem estar relacionados com:

O estilo no qual os problemas são escritos, a falta de compreensão de um conceito envolvido no problema, o uso de termos específicos da matemática e que não fazem parte do cotidiano do aluno e, até mesmo palavras que têm significados diferentes na matemática e fora dela – como total, diferença, ímpar, média, volume, produto – podem constituir-se em obstáculos para que ocorra a compreensão. (SMOLÉ; DINIZ, 2001, p. 72)

Consideramos que interpretar um texto não é uma tarefa fácil, envolve decodificação, análise, síntese, seleção e antecipação do que foi lido. Se há o objetivo de que o aluno aprenda através da leitura, não basta simplesmente pedirmos para ele ler, nem é suficiente deixar a leitura restrita às aulas de língua materna. O educador exerce um papel fundamental, apresentando questões que favoreçam a ligação da Matemática à realidade, estimulando a discussão e a partilha de ideias. Contudo, cabe ao professor acompanhar cada etapa do trabalho, incentivando e indicando os caminhos, pois para o aluno construir seu próprio conhecimento, essa construção tem que ser planejada e organizada.

Outro ponto relevante é o conhecimento prévio dos alunos, tanto o linguístico como o matemático. Visto que ao realizar a leitura do problema, o aluno a faz baseado na sua experiência, na sua vivência dentro e fora da escola, para conseguir interpretar os enunciados e escolher os procedimentos mais adequados à resolução dos problemas propostos.

Ao escolher um romance que pretenda apresentar aos alunos, o professor deve refletir se os assuntos que ele aborda têm ligação com os interesses e a realidade do aluno. No tocante à Matemática, o professor pode selecionar um livro tanto porque ele apresenta alguma noção matemática específica, ou, porque ele proporciona um contexto propício à resolução de problemas.

Smole e Diniz (2001) acrescentam que muitos livros trazem a Matemática inserida ao próprio texto, outros servirão para relacionar a Matemática com outras áreas do currículo. Há aqueles que envolvem determinadas habilidades matemáticas que deseja desenvolver e outros, ainda providenciam uma motivação para uso de materiais didáticos com elementos “garimpados” nas entrelinhas dos textos que podem gerar problemas matemáticos interessantes e, ao mesmo tempo, em que o aluno se envolve com a história, sendo assim estimulado a ouvir, ler, pensar e escrever sobre a Matemática.

Para as autoras, seja qual for a forma pela qual se leve a literatura para as aulas de Matemática, é bom lembrarmos que:

[...] a impressão fundamental da história não deve ser distorcida por uma ênfase indevida em um aspecto matemático. Também não devemos esquecer que uma exploração do texto literário não deve ser colocada em um segundo plano, sob pena de tornar ingênua ou falsa a interpretação e a leitura do texto literário. Após uma leitura, há muito o que discutir, o que analisar, o que fazer para a criança perceber e opinar criticamente. (SMOLE; DINIZ, 2001, p. 76)

Essa reflexão é de grande relevância para o trabalho apresentado, pelo fato de não considerar importante apenas os aspectos matemáticos dos textos literários, pois, deste modo, não se estaria trabalhando Literatura e Matemática, mas apenas a Matemática fragmentada em textos literários, embora tenha sido esse um dos critérios utilizados para a seleção do livro utilizado na pesquisa.

Utilizar a literatura nas aulas de Matemática proporciona aos alunos a oportunidade de interação de duas disciplinas, familiarizando-os com a linguagem matemática contida nas obras literárias, permitindo que o aluno possa estabelecer relações cognitivas entre a língua materna, conceitos da realidade e a linguagem da Matemática formal.

Quanto a resolução de problemas, entendemos ser uma metodologia pela qual o discente terá oportunidade de utilizar conhecimentos matemáticos já adquiridos em novos contextos de forma que consiga resolver a questão proposta. Para que uma dada situação seja classificada como um problema, deverá provocar em um processo de reflexão e de tomada de decisões quanto ao caminho a ser utilizado para a sua resolução. Dante (1988) também faz esta diferenciação, para o qual, “o exercício serve para exercitar, para praticar um determinado algoritmo ou processo” e problema “é a descrição de uma situação onde se procura algo desconhecido e não temos previamente nenhum algoritmo que garanta a sua solução”.

Quanto a importância da resolução de problemas, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) para o Ensino Médio, estabelece uma competência específica para isso em Matemática e suas tecnologias:

Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos, em seus campos — Aritmética, Álgebra, Grandezas e Medidas, Geometria, Probabilidade e Estatística —, para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente. (BNCC, 2018, p. 527)

Fiorentini faz um comparativo sobre o ensino convencional e o uso de situações problemas pelos professores:

[...] o professor que concebe a Matemática como uma ciência exata, logicamente organizada e a-histórica ou pronta e acabada, certamente terá uma prática pedagógica diferente daquele que a concebe como uma ciência viva, dinâmica e historicamente sendo construída pelos homens, atendendo a determinados interesses e necessidades sociais. Da mesma forma, o professor que acredita que o aluno aprende Matemática através da memorização de fatos, regras ou princípios transmitidos pelo professor ou pela repetição exaustiva de exercícios, também terá uma prática diferenciada daquele que entende que o aluno aprende construindo os conceitos a partir de ações reflexivas sobre materiais e atividades, ou a partir de situações-problema e problematizações do saber matemático. (FIORENTINI, 1998, p.4-5)

Com base nessa reflexão reforçamos a utilização da literatura nas aulas de Matemática como um recurso pedagógico que pode abrir espaço para a comunicação, despertando a curiosidade dos alunos, transformando a típica aula definida pelo silêncio e pela aplicação de exercícios. Permitir ao estudante a possibilidade de comunicar o que pensa e explicar seu raciocínio, retomando o que leu ou tentando prever o que acontecerá, é fundamental para a resolução de um problema matemático, pois possibilita que o aluno reflita sobre suas hipóteses e, por vezes, as reformule, chegando a um conhecimento mais elaborado.

Esta comunicação oportunizada pela leitura de um romance matemático precisa possibilitar diferentes interpretações do texto trabalhado, onde a visão do professor não seja obrigatoriamente correta, permitindo, dessa maneira, que as respostas dos alunos, que provavelmente seriam consideradas erradas, possam se tornar aceitáveis. Além disso, é preciso ressaltar a influência do espaço para o aluno relatar seus pensamentos e suas reflexões durante as atividades, pois isso colabora para tornar a Matemática mais próxima da realidade dos alunos.

2.4 Interdisciplinaridade

Outra questão importante do trabalho com literatura é a possibilidade de um ensino interdisciplinar. Muitas vezes os conteúdos matemáticos são estudados isoladamente e finalizados num único momento. Quando acontece de serem retomados, geralmente utilizando os mesmos recursos, é apenas para utilizá-los como ferramentas para a aprendizagem de novos conceitos. Ao que tudo indica, para que o estudante possa consolidar e ampliar um conceito, ele deve ver novas representações ou conexões com outros conceitos.

O enredo de uma história pode despertar o interesse para vários componentes curriculares ao mesmo tempo, envolvendo os estudantes, promovendo a investigação e a pesquisa de diversos conteúdos e temas de forma interligada. Como já afirmou Abramovich:

É através duma história que se podem descobrir outros lugares, outros tempos, outros jeitos de agir e de ser, outra ética, outra ótica... É ficar sabendo História, Geografia, Filosofia, Política, Sociologia, sem precisar saber o nome disso tudo e muito menos achar que tem cara de aula... Porque, se tiver, deixa de ser literatura, deixa de ser prazer e passa a ser Didática, que é outro departamento (não tão preocupado em abrir as portas da compreensão do mundo). (ABRAMOVICH, 1997, p. 17)

Diante disso, compreendemos o interdisciplinar como um método que se contrapõe ao ensino organizado em disciplinas separadas. A interdisciplinaridade destaca a interação e a cooperação entre duas ou mais disciplinas, sendo que cada uma delas traz consigo seus próprios esquemas conceituais, a maneira de definir os problemas e seus métodos de investigação.

Lück (1994, p. 54), expõe que a interdisciplinaridade é equivocadamente confundida com “trabalho cooperativo e em equipe; visão comum do trabalho, pelos participantes de uma equipe; integração de funções; cultura geral; justaposição de conteúdos; adoção de um único método de trabalho por várias disciplinas.” Apesar dessas noções estarem ligadas à interdisciplinaridade, não podem ser considerados como o sistema todo, pois do ponto de vista dessa mesma autora, a prática da interdisciplinaridade:

[...] no contexto da aula, implica na vivência do espírito de parceria, de integração entre teoria e prática, conteúdo e realidade, objetividade e subjetividade, ensino e avaliação, meios e fins, tempo e espaço, professor e aluno, reflexão e ação, dentre muitos dos múltiplos fatores interagentes do processo pedagógico. (LÜCK, 1994, p. 54)

Aspirando uma proposta interdisciplinar, o uso de um romance na aula de Matemática funciona como um eixo de ligação, possibilitando que as disciplinas de Língua Portuguesa e Matemática compartilhem e correlacionem as informações. Ao optar pela interdisciplinaridade, não planejamos que o professor se transforme num colecionador de especialidades, o que

buscamos é aprimorar a contextualização e a articulação dessas áreas de conhecimento, incentivando os alunos a pensar e buscar significado para o que é ensinado.

Conforme os PCNs (1998) a partir do momento que o aluno percebe que conceitos vistos em uma disciplina complementam ou são complementados em outras, esse conhecimento pode vir a tornar-se significativo. Nos PCNs para o terceiro e quarto ciclo encontraremos o seguinte esclarecimento:

Logo, estabelecer relação entre a literatura e a matemática pode contribuir para que o ensino de Matemática seja feito de uma forma diferente da que estamos habituados, com conceitos definidos pelo professor e repetição de exercícios para a fixação desses conceitos. Em vista disso, com a literatura, podemos incentivar a imaginação, a criatividade e a reflexão dos alunos, tornando as atividades de matemática mais dinâmicas e atrativas, e conseguimos mostrar que a Matemática não é uma disciplina isolada e que ela está presente em outras áreas do currículo e no cotidiano. Desta forma, também podemos mostrar que o saber matemático nos auxilia a compreender outros saberes presentes na vida dentro e fora da escola (BRASIL, 1998, p. 88).

A cerca disso, os PCNs de matemática também afirmam que:

A aprendizagem em Matemática está ligada à compreensão, isto é, à apreensão do significado; apreender o significado de um objeto ou acontecimento pressupõe vê-lo em suas relações com outros objetos e acontecimentos. Assim, o tratamento dos conteúdos em compartimentos estanques e numa rígida sucessão linear deve dar lugar a uma abordagem em que as conexões sejam favorecidas e destacadas. O significado da Matemática para o aluno resulta das conexões que ele estabelece entre ela e as demais disciplinas, entre ela e seu cotidiano e das conexões que ele estabelece entre os diferentes temas matemáticos. (BRASIL, 1997, p.19-20)

Por isso, promover um ensino que separa a disciplina de Língua Portuguesa da Matemática, não contribui, em nada, para essa necessária conexão de saberes. A Matemática fornece à Língua Portuguesa, e em particular à literatura, estruturação de pensamento, organização lógica e articulação do discurso. Já a Língua Portuguesa fornece à Matemática capacidades comunicativas, como a leitura e interpretação de texto e também capacidades de expressão escrita e oral. Zapico descreve que:

Tanto os poetas e escritores como os matemáticos desenvolvem sua atividade intelectual, seu talento, sua imaginação, capacidade criadora e intuição; portanto, não deve estranhar-nos que uma mesma pessoa tenha as condições necessárias para interessar-se por ambas as atividades. (ZAPICO, 2006, p. 51)

Em suma, a Literatura pode sim, ser usada como um recurso para o ensino de conceitos matemáticos, pois, amplia a possibilidade de associação das diferentes dimensões do conhecimento, desperta a curiosidade, melhora a oralidade, a capacidade de argumentação e

estruturação do pensamento, e, sem dúvida aumenta a capacidade de interpretação das mais variadas situações, sejam elas matemáticas ou não. Mas, o ato de ler tem que ser algo prazeroso, o estudante não deve ser forçado. Diante disso, é necessário que os professores saibam introduzir a leitura nas aulas de Matemática como algo agradável, algo lúdico, que traga para o cotidiano da sala de aula um momento de descontração e de troca de conhecimento.

3 RECURSOS LITERÁRIOS PARA A AULA DE MATEMÁTICA

Usar histórias para motivação em sala de aula não é um recurso novo. Como descreve Tahan *apud* Dalcin:

A criança e o adulto, o rico e o pobre, o sábio e o ignorante, todos, enfim, ouvem com prazer histórias – uma vez que essas histórias sejam interessantes, tenham vida e possam cativar a atenção. A história narrada, lida, filmada, dramatizada, circula em todos os meridianos, vive em todos os climas. Não existe povo algum que não se orgulhe de suas histórias, de suas lendas e de seus contos característicos. (TAHAN, 2000, p. 15 *apud* DALCIN, 2002, p. 73)

A partir das histórias podemos construir conhecimentos, especialmente na infância, mas como diz Farias (2006, p. 56) “o que normalmente se faz nas escolas são recreações com [elas], sem utilizá-las em conjunto com conteúdos disciplinares. É necessário utilizá-las para além das recreações, aproveitando toda a sua reserva cognitiva”.

A leitura de jornais, revistas, charges e memes até fazem parte das aulas de diversas disciplinas, como Língua Portuguesa e História, porém na Matemática, infelizmente, o uso de literatura é bem menor e normalmente restringe-se a tabelas e gráficos para abordar conteúdos como estatística e funções.

Na visão de Campos e Montoito:

Isso ocorre porque se tem considerado os textos apenas pelo conteúdo que especificamente encerram, numa visão pontual e limitada, sem se levar em conta que estes podem ser articulados com diversos conceitos e conteúdos distintos. Além disso, há um aspecto bastante importante que tem passado despercebido: o valor da imaginação e da afetividade na construção de ideias, conceitos e visões de mundo e, portanto, de ciência. (CAMPOS; MONTOITO, 2010, p. 159)

Entre os recursos literários que podem ser utilizados para complementar as atividades matemáticas, temos os livros paradidáticos e os romances, que definiremos e classificaremos em seguida.

3.1 Livros paradidáticos

Não há um consenso sobre o conceito de paradidático, muitos autores e editoras identificam essa categoria de literatura como livros de apoio didático ou de caráter pedagógico. Adotaremos o conceito de livro paradidático dado por Dalcin (2002), segundo ela, são livros temáticos que têm a declarada intenção de ensinar, porém, ensinar de forma lúdica. Tais livros

podem ser utilizados paralelamente ao livro didático ou mesmo vir a substituí-lo em alguns momentos.

A classificação dos livros paradidáticos que abordam o conteúdo matemático, de acordo com Dalcin (2002) é a seguinte: a partir de narrativas ficcionais, a partir da história da Matemática e a partir de um contexto pragmático.

3.1.1 Paradidáticos que abordam o conteúdo a partir de narrativas ficcionais

A história é baseada na ficção e os personagens enfrentam eventos que os levam a enxergar a Matemática. Com relação à narrativa, Dalcin (2002, p. 78) nos diz que as situações e diálogos propostos são semelhantes aos da sala de aula. Mesmo quando se desloca o cenário para ilhas ou sítios existe uma relação hierárquica entre quem ensina e quem aprende, onde o professor explica e o aluno aprende. As coleções “A Descoberta da Matemática” e “Vivendo a Matemática” são bons exemplo deste grupo de livros paradidáticos.

Para a autora as imagens podem ter diferentes funções, como contextualizar as cenas narradas, ajudar na visualização do desenvolvimento de cálculos e criar um elo entre a linguagem verbal e a simbologia matemática. Sobre a simbologia Dalcin (2002, p. 105) acrescenta que “[..] o texto escrito enuncia ou escreve em palavras, o que será escrito por meio de símbolos matemáticos, logo em seguida. É uma forma de buscar significados para os símbolos matemáticos ou vice-versa.”

3.1.2 Paradidáticos que abordam o conteúdo a partir da História da Matemática

Neste grupo as obras tem o objetivo de apresentar o conteúdo matemático fundamentado no seu percurso histórico, apresentando algum procedimento de cálculo utilizado por povos antigos ou a contribuição de um personagem histórico. Predomina a ordem cronológica dos clássicos de História da Matemática.

Alguns autores com o objetivo de tornar a história mais interessante, criam enredos com exagerada fantasia, tornando a história um conto de fadas, transformando os personagens em heróis e a Matemática acaba surgindo como uma ideia brilhante. Citamos como exemplo a coleção “O Contador de Histórias da Matemática” de Egidio Trambaiolli Neto, a coleção “Caio Zip – o viajante do tempo” de Regina Gonçalves e a coleção “Contando a História da Matemática” de Oscar Guelli.

Como descrito por Dalcin (2002) os paradidáticos que trazem essa abordagem histórica contêm muitas ilustrações. As ilustrações de contextualização visam estimular a imaginação e não exercem função no processo de ensino-aprendizagem, mas é por meio delas que se evidencia a presença de elementos históricos. Há imagens ornamentais que ocupam espaços ociosos nas obras e muitas vezes apoiam crenças inadequadas a respeito da Matemática e seu ensino. Mas algumas ilustrações são do tipo imbricadas e conseguem articular o texto escrito com a simbologia matemática e ajudam na compreensão dos conteúdos. Também há as ilustrações de visualização, que mostram o passo a passo de algum procedimento.

3.1.3 Paradidáticos que abordam o conteúdo a partir de um contexto pragmático

Nesta categoria, os livros enfatizam alguma aplicação ou curiosidade do conteúdo matemático. A ilustração é fundamental neste grupo de livros, pois a ausência de uma imagem pode comprometer a interpretação do texto. O recurso das histórias em quadrinhos é usado com frequência para dialogar com o leitor. A simbologia matemática perpassa o texto escrito, que destaca os símbolos e os procedimentos de cálculos envolvidos.

Em Dalcin encontramos o esclarecimento:

Nesses textos, o autor discute algum aspecto do conteúdo matemático em questão, relacionando-o a uma aplicação em situações cotidianas ou em alguma prática científica, algumas vezes apresentando reflexões históricas ou filosóficas; apresenta comentários ou atividades relacionadas ao uso de calculadoras e microcomputadores, nas quais elementos de história da Matemática aparecem imbricados ao texto; muitas vezes de forma sutil, apresenta uma demonstração ou comprovação de alguma propriedade matemática relacionada ao tema ou propõe ‘curiosidades’ envolvendo o tema. (DALCIN, 2002, p. 167)

Compõem esta categoria de paradidáticos a coleção “Pra que serve Matemática?”, a coleção “Saber horrível” e alguns títulos da coleção “Vivendo a Matemática”.

3.2 Romances matemáticos

De acordo Melo (2016), encontraremos a seguinte classificação para os livros que contêm Matemática: obras sobre Matemática em estilo romance ou aventura, obras de literatura concebidas com estruturas matemáticas, obras de Matemática com características literárias e produção literária envolvendo Matemática.

3.2.1 Obras sobre Matemática em estilo de romance ou aventura

Como caracteriza Melo (2016, p.03) as obras deste grupo são escritas em gênero de romance ou aventura para apresentar os conceitos matemáticos ou aspectos da história da Matemática.

Como exemplo desse gênero “O homem que calculava” de Malba Tahan, “O teorema do papagaio” de Denis Guedj, “Matemática e mistério em Baker Street” de Lázaro Coutinho, “A geometria dos mares” de Scipione Di Pierro Netto e “O diabo dos números” de Hans Magnus Enzensberger.

3.2.2 Obras de Literatura concebidas com estruturas matemáticas

Melo (2016, p. 04) afirma que neste grupo os autores utilizam estruturas e conceitos matemáticos, implícita ou explicitamente, para organizar suas ideias e o desenvolvimento da narrativa de ficção.

Como exemplo dessa categoria temos “A divina comédia” de Dante Alighieri, que apresenta estruturas da Aritmética, Probabilidade, Lógica e Geometria. As obras “A biblioteca de Babel”, “A morte e a bússola”, “O livro de areia” e “O Aleph” de Jorge Luiz Borges tem a presença de categorias matemáticas na sua estrutura narrativa ou poética. A obra “A vida modo de usar” de Georges Perec também usa estruturas matemáticas.

Há, ainda, obras que se encaixam tanto no primeiro quanto no segundo grupo. Por exemplo: “Alice no País das Maravilhas” de Lewis Carroll, onde a Matemática é abordada por Carroll de forma romaneada e a narrativa segue uma estrutura da Lógica. O mesmo acontece em “O Código Da Vinci” de Dan Brown, pois o livro relata uma trama de intrigas e mistérios que para serem revelados e envolve mensagens cifradas com série de Fibonacci e número de ouro.

3.2.3 Obras de Matemática com características literárias

Melo (2016, p.05) nos diz que neste caso a obra apresenta diversos elementos literários, apresentando deliberadamente uma narrativa romaneada, mas o foco está nas questões matemáticas. Ou seja, as obras de Matemática não se caracterizam como ficção, apesar de apresentarem características textuais. Faz parte desse grupo o trabalho de Blaise Pascal, com a presença de diversos gêneros literários e elementos como retórica e drama.

3.2.4 Produção literária envolvendo Matemática

Como caracteriza Melo (2016, p.05), este grupo traz a Matemática como um elemento importante na vida do autor ou dos personagens, exibindo observações e experiências pessoais que demonstram sentimento de amor, ódio ou indiferença pela Matemática. A poesia e a crônica são os gêneros mais utilizados para esse fim.

“O Crime do Professor de Matemática” de Clarisse Lispector e “Os Melhores Contos” de Malba Tahan “Poesia Matemática” de Millôr Fernandes e “Armada” de Ernest Cline, são exemplos de produções literárias que trazem a Matemática na vivência do autor e dos personagens.

3.2.5 Romance matemático

Tivemos a ousadia de acrescentar a definição de romance matemático, como caracteriza Montoito (2011, contracapa) “Um romance matemático é uma literatura onde se pode constatar a existência de passagens que, implícita ou explicitamente, se utilizam da matemática para contar suas histórias”. Assim, podemos dizer que os livros que trabalham conceitos da disciplina, mas mantêm a sua riqueza estética, artística e linguística caracterizam um romance matemático.

Observe que o romance matemático não precisa definir um conceito ou apresentar um conteúdo em sua totalidade. No entanto, é preciso ter cuidado na escolha dos livros, quando se trabalha com Literatura e Matemática, para que esta conexão faça sentido, pois não se resume apenas a escolher um livro e inventar atividades, os aspectos literários que permitem a interpretação, a imaginação e todo jogo ficcional precisam ser mantidos.

Reconhecendo nos romances matemáticos seu valor cognitivo, eles vêm, em primeira instância, apresentar aos alunos-leitores as ideias iniciais de algum conteúdo matemático através da leitura. A compreensão passa primeiro pelas informações adquiridas e interpretadas da língua materna, visto que ela é mais próxima do leitor do que a linguagem matemática. Depois deste primeiro contato, ao qual são acrescentadas outras passagens da história ou atividades elaboradas pelo professor, os alunos chegam à generalização das ideias e elaboração do conhecimento.

Como exemplo desse gênero “O estranho caso do cachorro morto” de Mark Haddon, “Alva lebre lobo avermelhado: esta história é falsa” de Tom Pollock, “Perdido em Marte” de

Andy Weir, “Interestelar” de Jonathan Nolan, “O pequeno príncipe” de Antoine de Saint-Exupéry e “Contato” de Carl Sagan.

Fundamentado nisso, utilizaremos um trecho do romance matemático *Alva lebre lobo avermelhado: esta história é falsa* do escritor Tom Pollock, componente de estudo desta análise, para expor aos alunos as ideias iniciais de logaritmo, já a generalização e contextualização do assunto se dará por meio da resolução de atividades elaboradas pela professora.

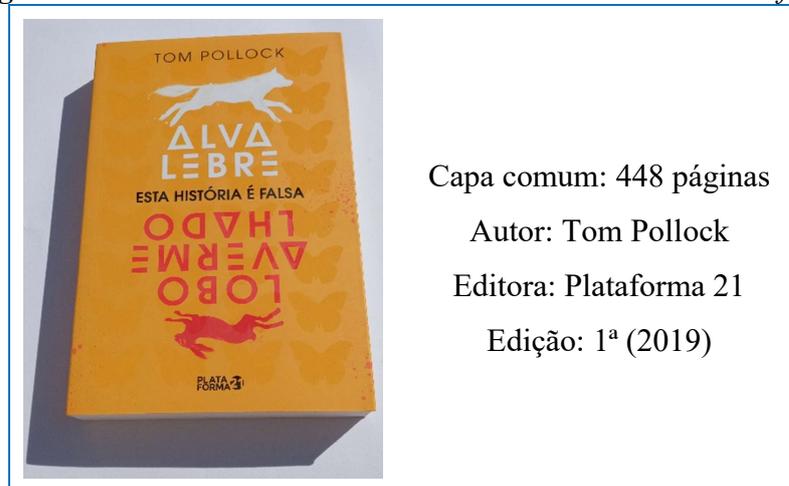
4 ALVA LEBRE LOBO AVERMELHADO: ESTA HISTÓRIA É FALSA

O livro *Alva lebre lobo avermelhado: esta história é falsa* é classificado como um *thriller* psicológico YA. *Thriller* psicológico é um gênero que combina suspense e ficção psicológica em uma trama emocionante. Frequentemente, é contado através do ponto de vista de personagens psicologicamente estressados, revelando suas percepções mentais e focando nos relacionamentos complexos entre personagens.

No gênero *Young Adults* (YA) — jovens adultos — os protagonistas são, na maior parte dos casos, jovens que se deparam com as mais extraordinárias dificuldades. Os enredos tanto podem ser fantasiosos, distópicos ou realistas, mas centram-se quase sempre em problemas com os quais esta faixa etária pode se identificar: a adaptação a novos grupos e situações, as dificuldades relacionais, os perigos de substâncias como álcool e drogas, *bullying*, sexualidade, racismo, depressão, morte. São livros sobre problemas sérios escritos de forma simples.

Na Figura 3 vemos uma imagem da capa do livro *Alva lebre lobo avermelhado: esta história é falsa*.

Figura 3 – Livro *Alva lebre lobo avermelhado: esta história é falsa*



Fonte: A autora.

4.1 Sinopse

O livro conta a história de Peter Blankman, um garoto de 17 anos, prodígio em Matemática. É o raciocínio analítico que o ajuda a manter a vida em ordem, porque ele sofre com graves crises de pânico. Peter sempre viveu a sombra de sua corajosa irmã gêmea, Anabel, seu oposto perfeito, que apesar de ser oito minutos mais velha, é quem exerce o papel de

proteção sobre o irmão. No colégio Peter tem uma única amiga, Ingrid, ela divide com Peter a paixão pela Matemática e os problemas com ansiedade.

Certo dia, a mãe do Peter, uma famosa cientista, é convidada para um evento onde receberia um prêmio por um de seus projetos de pesquisa. Apesar de receoso de ter uma crise de pânico no meio da festa, Peter decide ir para prestigiar sua mãe, juntamente com Anabel. Peter realmente tem uma crise e sai às pressas do local, e, enquanto a mãe corria para socorrê-lo, é brutalmente ferida por uma facada. Ninguém viu o autor do atentado, as câmeras de segurança foram propositadamente danificadas, e no meio da confusão que se instala, Anabel desaparece.

Peter é arrastado para um mundo de espionagem e violência onde os segredos da sua família vão sendo revelados. Mistério, matemática e saúde mental misturam-se numa equação que desafia o leitor, e o resultado é uma leitura envolvente cheia de reviravoltas. A questão que fica após ler a história é: será que nós realmente podemos ser programados para agir de uma determinada maneira?

O resumo completo da obra está no Apêndice J.

4.2 Informações adicionais

Algumas informações são adicionadas nesta seção com o objetivo de conhecer melhor a obra e a intenção do autor.

4.2.1 Sobre o Autor

Tom Pollock, Figura 4, é autor de outros cinco livros (*The City's Son*, *Heartstream*, *The Glass Republic*, *The Gilded Tarot Deck* e *The Rising: Journeys in the Wake of Global Warming*) ainda não traduzidos para o português. O autor mora e trabalha em Londres, Inglaterra.

Tom Pollock é embaixador da *TalkLife*, uma rede de apoio à saúde mental voltada para jovens. O aplicativo *TalkLife* conecta você com pessoas reais que desejam ouvi-lo e apoiá-lo em todo o mundo. Sem julgamento. Como parte dessa iniciativa, Pollock mantém um *blog*, onde escreve sobre suas experiências com a depressão, a ansiedade e a bulimia. Inspirado por tais experiências, *Alva Lebre Lobo Avermelhado: esta história é falsa* é seu primeiro *thriller* para jovens adultos.

Figura 4 – Escritor Tom Pollock

Fonte: <https://milesstottagency.co.uk/author/tom-pollock/>. Acesso em 09/05/2021

4.2.2 Notas de conteúdo

Este romance requer notas de conteúdo para ataques de ansiedade, transtornos alimentares, saúde mental, paranoia, violência doméstica, abuso emocional, *bullying*, assassinato e tortura.

Tom Pollock confronta a saúde mental sem rodeios, abordando-a de frente e mostrando a realidade de viver com um cérebro problemático. O romance basicamente abre bem no meio de um ataque de pânico, mostrando ao leitor a realidade da ansiedade e dos transtornos alimentares. É uma batalha constante para o Peter não ceder ao pânico e nem sempre consegue. A cada revelação chocante do enredo, o pânico é acionado.

O autor descreve a doença mental como só pode alguém que já lutou contra ela, retratando a força da doença mental e a realidade de como lidar com ela. Se você vive com ansiedade, mesmo que seus sintomas e gatilhos individuais sejam diferentes, sua mente cria uma narrativa não confiável sobre o seu mundo. E para as pessoas que sofrem com ansiedade, este livro não é uma mentira (como o título faz acreditar), este livro é importante.

Peter é um personagem “quebrado”, mas não é consertado magicamente, ele aprende a conviver com seus problemas e ter uma vida apesar deles. A melhor amiga de Peter no livro, Ingrid, também tem Transtorno Obsessivo Compulsivo (TOC), em várias cenas observamos a descrição do pânico que ela sente quando lava compulsivamente suas mãos.

A história não trata apenas de questões de saúde mental, mas também de relações familiares complicadas e violência doméstica no limite. Ao mesmo tempo, você nunca tem certeza em quem confiar, existem muitos personagens secundários sinistros e sombrios também. Bel se revela uma assassina em série, torturando e matando pessoas.

4.2.3 Capa

A capa, na Figura 3, com a alva lebre (em vermelho) e o lobo avermelhado (em branco), com imagem espelhada, indicam uma justaposição e simbolismo do lobo e do coelho, sendo quase impossível definir quem é o vilão da história. As percepções dos personagens e do enredo mudam constantemente conforme são reveladas novas informações ou informações antigas são mostradas sob uma luz diferente. Este é um daqueles livros onde você nunca pode ficar muito confortável com quem você acredita ser um personagem porque eles podem mudar a qualquer segundo.

Também observamos na capa borboletas transparentes e brilhantes em alto-relevo, que só entendemos quando a personagem “borboleta breu” aparece na história. A capa contém respingos de sangue indicando que o enredo do livro será bem emocionante com cenas não recomendadas para crianças.

O subtítulo “esta história é falsa”, não está ali na capa por acaso. É de se supor que não podemos confiar em tudo o que o interlocutor nos conta, mas o que é exatamente falso? O subtítulo é uma analogia ao paradoxo do mentiroso: “Esta afirmação é uma mentira. Você não pode provar, porque provar que é verdade prova que é falso.” (página 237). Revelando mentira após mentira, percebemos que ninguém é confiável nesta história.

Existem também os códigos entre os capítulos, dividindo o livro em três partes: encriptação, inversão e iteração. Fazendo uma analogia com o Teorema da Incompletude¹ de Gödel, que utilizou essas mesmas três etapas na sua demonstração. O objetivo do autor era transformar o livro em uma equação indemonstrável, ou seja, uma história que não se pode determinar se é verdadeira ou falsa.

4.2.4 Flashbacks

Contada da perspectiva de Peter no presente e no passado — com capítulos intitulados Recursão — a leitura realmente criou a impressão de como era na mente de Peter, não linear. Conseguimos observar o que trouxe Peter ao que está acontecendo agora e como revisou suas velhas memórias para juntar as peças do quebra-cabeça. Nos *flashbacks* os segredos dos personagens vão vindo à tona e as ações do passado se refletem no presente.

¹ Primeiro Teorema da Incompletude: Qualquer teoria axiomática recursivamente enumerável e capaz de expressar algumas verdades básicas de aritmética não pode ser, ao mesmo tempo, completa e consistente. Ou seja, em uma teoria consistente, sempre há proposições que não podem ser demonstradas nem verdadeiras, nem falsas.

Esses *flashbacks* vão sendo expostos de forma cronológica desde cinco anos atrás até o momento em que ambos os tempos se coincidem quase no final do livro. Talvez demore um pouco a se acostumar com essa forma de escrita no começo, mas aí você perceber como é pensado cada capítulo, cada conexão.

5 POTENCIALIDADES DO LIVRO

A Literatura, se bem articulada com a Matemática, consegue ser um grande instrumento de apoio no ensino, por isso, a escolha do trecho do livro que será trabalhado em sala de aula não é tarefa fácil. Buscando algo adequado à faixa etária e à série dos alunos, que permitisse a possibilidade de generalização do tema, proporcionasse a elaboração de atividades interessantes que facilitassem a articulação do conteúdo com o conhecimento do aluno, além de ser um texto que trouxesse diversidade de ideias e promovesse a reflexão, foi selecionada, portanto, uma passagem sobre logaritmos:

Bem-vindo à Claglada.

A Classificação Logarítmica Linear Ajustável para Graduação da Loucura Aleatória, Desvairada e Alucinada (Claglada) é calculada da seguinte forma:

$$GC \text{ (Grau de Cagada}^2\text{)} = \text{Log}10(T) + \text{Log}10(D) - \text{Log}10(P)$$

Onde T representa o tempo que o episódio durou; D, o valor monetário ou sentimental de qualquer coisa ou pessoa que você tenha acidentalmente quebrado ou ateadado fogo, e P, a proximidade em relação às pessoas que podem ajudar.

(...) a Claglada mede o grau de dificuldade para você sair da lona. A gente se baseou na escala Richter: tremores violentos, abalos sísmicos secundários e estragos. (POLLOCK, 2019, p. 32)

A partir deste trecho criamos um roteiro de atividades para trabalhar o conceito de logaritmo com os alunos, nos Capítulos 6 e 7 descrevemos como ocorreu a aplicação das atividades e nossas análises sobre o aprendizado dos alunos. Gostaríamos de explorar outros temas, mas devido ao tempo disponível para a aplicação do projeto, optamos por trabalhar apenas esse assunto, pois logaritmo é um conteúdo da matriz curricular do Ensino Médio.

Também teríamos a oportunidade de potencializar o ensino aprendizagem das habilidades EM13MAT305 e EM13MAT403 sobre logaritmos, propostas pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Essas habilidades estão descritas no Apêndice M. Assim estaríamos agregando valor ao conteúdo de logaritmo sem ter prejuízo no currículo dos alunos.

Entretanto, o livro possui mais de quarenta trechos que se relacionam com matemática implícita ou explicitamente. Selecionamos algumas passagens que também podem ser utilizadas em sala de aula, observemos no Quadro 2.

² Como a escala se chama “Claglada” o uso da expressão “cagada” foi uma maneira bem humorada do personagem do livro se referir as suas próprias crises de ansiedade.

Quadro 2 – Temas de Matemática presentes no livro
Alva lebre lobo avermelhado: esta história é falsa

Conteúdo	Páginas	Trecho
Raiz quadrada	17 e 162	– Passei dos números inteiros para raiz quadrada. Ela fica só me olhando. – Quantas casas decimais? – pergunta, por fim. – Seis.
Código de César e encriptação	28, 140 e 262	Para fazer uma, é só escrever o alfabeto, de A a Z, depois escolher uma frase secreta – tipo, sei lá, “Que merda, Brutus” – e escrever embaixo das primeiras letras do alfabeto, cortando as letras repetidas. Depois, é só completar com o resto do alfabeto, na ordem.
Matemáticos	37 e 168	Dez séculos de matemáticos extraordinários olham para mim: Cantor, Hilbert, Turing. “Estamos todos torcendo por você na enésima potência, Pete”, dizem.
Potência e porcentagem	42, 192 e 310	Rasgo a lateral da embalagem de papelão do sanduíche, dobro no meio, dobro de novo, dobro mais uma vez. A cada dobra, a pressão contra os meus dedos se eleva ao quadrado. É um origami exponencial.
Sistema de medidas	42, 84 e 410	O que derrota minha própria natureza é uma estratégia de milímetros – dez por centímetro, setecentos e sessenta por passo, um milhão por quilômetro. Continua andando e não para. Haja o que houver, não para.
Volume	51	Esta galeria tem sessenta e quatro \times vinte e oito \times trinta metros. Mesmo descontando as paredes internas, a escadaria e o arco do teto, ainda sobram mais de cinquenta mil metros cúbicos do negócio.
Números primos	53	O esqueleto do dinossauro tem vinte e três ossos; vinte e três é um número primo; primordial; esses ossos são os números primos do velho lagarto, indestrutíveis e irredutíveis.
Adição	82	– Você é bom de quê? – pergunta. Não respondo. – De matemática, certo? Até onde sei, é uma verdadeira calculadora ambulante. Então, aqui vai uma pergunta: quanto é um mais dois?
Sequência de Fibonacci	146	– A sequência de Fibonacci? – É, cada termo é a soma dos dois anteriores. É a fórmula recursiva mais simples que conheço.

Continua

Quadro 1 – Temas de Matemática presentes no livro
Alva lebre lobo avermelhado: esta história é falsa
Parte final

Conteúdo	Páginas	Trecho
Paradoxo	175	Com letras maiúsculas, em negrito, estava escrito: ESTA AFIRMAÇÃO É FALSA. – Humpf... – murmurei. – O paradoxo do mentiroso. Não pode ser verdadeira sem ser falsa, e não pode ser falsa sem ser verdadeira.
Teorema da incompletude	176	Eu acreditava que não havia nenhuma pergunta que a matemática não fosse capaz de responder, desde que eu entendesse a pergunta direito. – Soltei o ar com força. – Só que eu estava enganado. A matemática é incompleta. Existem perguntas, perguntas a respeito de números, até que ela não é capaz de responder.
Probabilidade	201 e 382	Foi a primeira vez que estudei isso, e adorei: “As chances de dois acontecimentos isolados ocorrerem por mero acaso é igual a probabilidade de um vezes a probabilidade do outro, sendo que a probabilidade dos dois juntos é menor do que a de cada um isoladamente”.
Números complexos	252	São invenções necessárias, que garantem o funcionamento de todo o resto, igual à raiz quadrada de menos um – o suposto número imaginário que os matemáticos apelidaram de “i”.
Números racionais	291 e 315	Os homens da Inglaterra têm uma expectativa média de vida de setenta e nove anos. Ou seja: a cada minuto que passa, nos aproximamos lentamente da morte, tipo um quarenta e dois avos de milionésimo.
Subtração	334	A diferença entre quatrocentos e noventa e cinco e seiscentos e vinte nanômetros no comprimento de onda da luz é a diferença entre o azul e o vermelho.
Estudo de redes	408	O teorema do Euler demonstra que qualquer ponto do labirinto pode ser alcançado, vindo de qualquer outro ponto, sem mapa, em um período finito de tempo, desde que nunca, jamais, repita determinado trajeto.

Fonte: A autora

O livro *Alva lebre lobo avermelhado: esta história é falsa* possui várias passagens com conteúdo matemático, esperamos que as passagens aqui apresentadas instiguem os educadores para que possam assim agregar ainda mais sentidos às práticas de leitura na escola, de modo a potencializarem o aprendizado nas aulas de Matemática.

5.1. Sugestão de atividades

Nesta seção apresentaremos a sugestão de algumas atividades que podem ser trabalhadas com alunos do Ensino Médio a partir do romance *Alva lebre lobo avermelhado: esta história é falsa*.

5.1.2. Código de César

Criptografia é a ciência que oculta o significado de uma mensagem. O ato de cifrar consiste em transformar um texto normal em texto secreto, e o ato de decodificar é a operação inversa, consiste em transformar um texto cifrado em texto normal. A criptografia utilizada por Júlio Cesar era feita substituindo cada letra da mensagem original por outra que estivesse duas casas a frente no mesmo alfabeto, para mais detalhe veja o Apêndice F.

Já Peter e Bel tinham a seguinte estratégia:

Como a Bel não tinha minha cabeça boa para códigos numéricos, trocávamos mensagens em cifra de César. A cifra de César deve ser a criptografia mais fácil que existe – perfeita para um imperador romano com muitos segredos, mas pouco tempo. Para fazer uma, é só escrever o alfabeto, de A a Z, depois escolher uma frase secreta – tipo, sei lá, “Que merda, Brutus” – e escrever embaixo das primeiras letras do alfabeto, cortando as letras repetidas. Depois, é só completar com o resto do alfabeto, na ordem, e o resultado é algo assim:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
Q	U	E	M	R	D	A	B	T	S	C	F	G	H	I	J	K	L	N	O	P	V	W	X	Y	Z

Depois, é só escrever a mensagem, substituindo cada letra pela que está embaixo e, bum, sua mensagem está a salvo dos olhos curiosos de professores, pais e visigodos saqueadores. Infelizmente, como só é preciso adivinhar a palavra-chave, esse tipo de criptografia pode ser decifrada com a mesma facilidade com que eu tenho uma crise nervosa, até mais. (POLLOCK, 2019, p. 28)

De acordo com Peter e Bel devemos trocar cada letra da mensagem original por outra que esteja na coluna da letra correspondente. Assim trocamos a letra “A” por “G”, a letra “B” por “U”, a letra “C” por “E” e assim por diante como ilustra a tabela acima. Com base na criptografia da criada pelo Peter, responda as questões a seguir:

1) Qual a mensagem que Peter mandou com a palavra “GQORGQOTEQ”?

2) Criptografe a palavra “LEGAL”.

3) Agora traduza as seguintes frases:

a) QHNTRMQMR ORG OLQOQGRHOI.

b) VIER HQI RNOQ NIZTHBI.

c) RNOQ OPMI URG HQI ORL EIHOLIFR MR OPMI.

4) Vamos cifrar as mensagens abaixo:

a) Você é especial.

b) Você é capaz de superar a ansiedade.

c) Não precisa resolver tudo agora.

5) Considere que no país da Matemática existem apenas três letras: A, B e C.

a) Quais são as possibilidades de criptografar mensagens utilizando as três letras? Para ajudá-lo a descrever todas as possibilidades complete os quadros a seguir trocando a ordem das letras.

1	2	3	1	3	2	2	1	3	2	3	1	3	1	2	3	2	1
A	B	C															

b) Dessas formas, qual delas não codifica nada?

c) Sem listar, como poderíamos calcular que existem 6 maneiras de criptografar mensagens? E se fossem n letras?

6) Considere agora que o país da Matemática utilize quatro letras: A, B, C e D.

a) Quantas palavras existem utilizando as quatro letras?

b) Descreva as 24 palavras.

1	2	3	4	1	3	2	4	1	4	2	3	2	1	3	4
A	B	C	D												

1	2	4	3	1	3	4	2	1	4	3	2	2	1	4	3

2	3	1	4

3	1	2	4

3	4	1	2

4	2	1	3

2	3	4	1

3	1	4	2

3	4	2	1

4	2	3	1

2	4	1	3

3	2	1	4

4	1	2	3

4	3	1	2

2	4	3	1

3	2	4	1

4	1	3	2

4	3	2	1

c) E se fossem 26 letras, quantas possibilidades de criptografar mensagens existem?

Respostas:

1) Matemática

2) FRAQF

3. a) Ansiedade tem tratamento.

3. b) Você não está sozinho.

3. c) Está tudo bem não ter controle sobre tudo.

4. a) VIER R RNJRETQF.

4. b) VIER R EQJQZ MR NPJRLQL Q QHNTRMQMR.

4.c) QHI JLRETNQ LRNIFVRL OPMI QAILQ.

5.a) ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA

5. b) A forma ABC, é igual ao original então não codifica nada.

5. c) Podemos usar o princípio multiplicativo, assim temos $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ possibilidades.

Ou podemos utilizar fatorial. Como são três letras teremos $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

Para n letras teremos $n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1$

6. a) Teremos $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ palavras

6. b) ABCD, ABDC, ACBD, ACDB, ADBC, ADCB, BACD, BADC, BCAD, BCDA, BDAC, BDCA, CABD, CADB, CBAD, CBDA, CDAB, CDBA, DABC, DACB, DBAC, DBCA, DCAB, DCBA

6. c) $26! = 4,03 \times 10^{26}$ possibilidades

5.1.3. Radiciação

Os números quadrados perfeitos são aqueles cuja raiz quadrada é um número natural. Os números naturais que não são quadrados perfeitos não possuem raízes quadradas exatas. Nesses casos, podemos calcular a raiz quadrada aproximada desses números.

Peter, o personagem principal do livro *Alva lebre lobo avermelhado*: está história é falsa, costumava contar raízes quadradas aproximadas quando tinha crises de ansiedade. No trecho a seguir, podemos ver algumas raízes com seis casas decimais:

– Passei dos números inteiros para raiz quadrada.
Ela fica só me olhando.
– Quantas casas decimais? – pergunta, por fim.
– Seis.
A minha mãe se encolhe toda.
– 2,828427; 3; 3,162278; 3,316... – Eu gaguejava, as sílabas pareciam bolinhas de gude dentro da minha boca, o suor empapava minhas mãos e entre os meus ombros.
Tentei de novo: – 3,316...
Mas não adiantou: fiquei sem números.
(POLOCK, 2019, p. 17)

Veja como podemos calcular, por meio de tentativas, o valor aproximado de $\sqrt{71}$.

Inicialmente, verificamos entre quais números quadrados perfeitos o número 71 se encontra. Para isso, construímos o Quadro 3 com os quadrados dos números naturais de 1 a 10.

Quadro 3 – Quadrados perfeitos

a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a^2	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

Fonte: A autora

Note que 71 está entre 8^2 e 9^2 , isto é, $64 < 71 < 81$.

Assim, a raiz quadrada de 71 está entre 8 e 9. Dessa forma, calculamos o quadrado de alguns números entre 8 e 9 até obtermos um número maior do que 71.

$$(8,1)^2 = 65,61$$

$$(8,2)^2 = 67,24$$

$$(8,3)^2 = 68,89$$

$$(8,4)^2 = 70,56$$

$$(8,5)^2 = 72,25 \rightarrow \text{o resultado é maior que 71}$$

Note que $8,4 < \sqrt{71} < 8,5$. Como $(8,4)^2$ está mais próximo de 71 temos: $\sqrt{71} \cong 8,4$.

Nesse caso, $\sqrt{71}$ está com aproximação de uma casa decimal. Se quisermos calcular a raiz quadrada aproximada com duas casas decimais, procedemos de maneira parecida à apresentada, calculando o quadrado de alguns números entre 8,4 e 8,5 até obtermos um número maior do que 71.

$$(8,41)^2 = 70,7281$$

$$(8,42)^2 = 70,8964$$

$$(8,43)^2 = 71,0649 \rightarrow \text{o resultado é maior que 71}$$

Como que $8,42 < \sqrt{71} < 8,43$ e $(8,43)^2$ está mais próximo de 71 temos: $\sqrt{71} \cong 8,43$.

Agora, sem utilizar calculadora, determine $\sqrt{11}$ com aproximação de seis casas decimais.

Resposta:

$9 < 11 < 16 \Rightarrow 3^2 < 11 < 4^2$, isso implica que $\sqrt{11}$ está entre 3 e 4. Por tentativa, temos:

$$(3,1)^2 = 9,61$$

$$(3,2)^2 = 10,24$$

$$(3,3)^2 = 10,89$$

$$(3,4)^2 = 11,56 \rightarrow \text{o resultado é maior que 11}$$

Assim vamos calcular o quadrado dos números entre 3,3 e 3,4:

$$(3,31)^2 = 10,9561$$

$$(3,32)^2 = 11,0224 \rightarrow \text{o resultado é maior que 11}$$

Agora vamos calcular o quadrado dos números entre 3,31 e 3,32:

$$(3,311)^2 = 10,962721$$

$$(3,312)^2 = 10,969344$$

$$(3,313)^2 = 10,975969$$

$$(3,314)^2 = 10,982596$$

$$(3,315)^2 = 10,989225$$

$$(3,316)^2 = 10,995856$$

$$(3,317)^2 = 11,002489 \rightarrow \text{o resultado é maior que 11}$$

Nesta etapa vamos calcular o quadrado dos números entre 3,316 e 3,317:

$$(3,3161)^2 = 10,99651921$$

$$(3,3162)^2 = 10,99718244$$

$$(3,3163)^2 = 10,99784569$$

$$(3,3164)^2 = 10,99850896$$

$$(3,3165)^2 = 10,99917225$$

$$(3,3166)^2 = 10,99983556$$

$$(3,3167)^2 = 11,00049889 \rightarrow \text{o resultado é maior que 11}$$

Assim vamos calcular os quadrados entre 3,3166 e 3,3167:

$$(3,31661)^2 = 10,9999018921$$

$$(3,31662)^2 = 10,9999682244$$

$$(3,31663)^2 = 11,0000345569 \rightarrow \text{o resultado é maior que 11}$$

Para finalizar temos que calcular os quadrados entre 3,31662 e 3,31663:

$$(3,316621)^2 = 10,999974857641$$

$$(3,316622)^2 = 10,999981490884$$

$$(3,316623)^2 = 10,999988124129$$

$$(3,316624)^2 = 10,999994757376$$

$$(3,316625)^2 = 11,000001390625 \rightarrow \text{o resultado é maior que 11}$$

Logo, $\sqrt{11} = 3,316624$.

5.1.4. Multiplicação, porcentagem e volume

1) Leia o texto a seguir:

“Pelo menos trinta mil pessoas por ano são levadas compulsoriamente por causa da Lei de Saúde Mental. Aí vêm a ambulância, o hospital e a chave que tranca a porta. Depois disso, o Estado assume o controle: decide quando a pessoa vai comer, quando vai dormir, quando vai tomar banho. (...)”

Trinta mil. No cômputo geral, até que não é muito. Menos de dois milésimos da população do país. Mas vão se somando. Ao longo da minha vida, serão mais de dois milhões.”

Fonte: *Alva lebre lobo avermelhado esta história é falsa* de Tom Pollock, p. 315.

Sabendo que os homens da Inglaterra têm uma expectativa média de vida de setenta e nove anos, quantas pessoas exatamente são levadas compulsoriamente para instituições de saúde mental?

2) A partir das informações contidas a seguir determine a quantidade de urânio que entrou fissão em Hiroshima.

“A coisa mais rápida do universo – a luz dentro do vácuo – se desloca a 299.792.458 metros por segundo. É um número bem grande, mas ainda é preciso elevá-lo ao quadrado para

obter a energia contida em um único quilo de urânio quando se despedaça, no pânico da fissão nuclear. Havia sessenta e quatro desses quilos na Little Boy, a bomba atômica que foi detonada sobre o céu de Hiroshima em uma segunda-feira nublada do mês de agosto de 1945. Apenas 1,38 por cento disso entrou em fissão. Mas, ainda assim, a explosão assolou prédios de concreto e causou uma tempestade de fogo que se estendeu por três quilômetros e meio e matou mais de sessenta e seis mil homens, mulheres e crianças instantaneamente. E tudo começou com a divisão de um único núcleo de um único átomo com menos de quatorze milésimos de um milionésimo de milionésimo de metro de largura.”

Fonte: *Alva lebre lobo avermelhado: esta história é falsa* de Tom Pollock, p. 42.

3) O Museu de História Natural de Londres, inaugurado em 1881 é famoso pelos esqueletos de dinossauros e arquitetura romântica, abriga cerca de 80 milhões de espécies e tem seus itens divididos em cinco coleções: botânica, entomologia, mineralogia, paleontologia e zoologia.

Entre as coleções mais valiosas estão as espécies coletadas por Charles Darwin.

No livro *Alva lebre lobo avermelhado: esta história é falsa* o personagem Peter se perdeu em uma sala desse museu. Leia um trecho do episódio:

“Aqui não tem ar, dizem os meus pulmões.

Que bobagem, pulmões, parem de fazer drama.

Esta galeria tem sessenta e quatro × vinte e oito × trinta metros. Mesmo descontando as paredes internas, a escadaria e o arco do teto, ainda sobram mais de cinquenta mil metros cúbicos do negócio. Mais do que eu poderia respirar em um ano, mesmo se o lugar estivesse hermeticamente fechado.”

Fonte: *Alva lebre lobo avermelhado: esta história é falsa* de Tom Pollock, p. 51.

Agora responda: qual o volume de ar na sala do museu em que o Peter se perdeu?

Respostas:

$$1) 30000 \cdot 79 = 2.370.00 \text{ pessoas}$$

$$2) 1,38\% \text{ de } 64 \text{ kg} = 0,0138 \times 64 = 0,8882 \text{ kg}$$

$$3) 64 \times 28 \times 30 = 53.760 \text{ m}^3$$

5.1.5. Paradoxo do mentiroso

“Meio relutante, fui para o índice remissivo. A maioria das remissões eram para algo denominado ‘Teoremas da Incompletude: pp. 8, 36, 141-146, 210’. Fui para a página 141.

Com letras maiúsculas, em negrito, estava escrito:

ESTA AFIRMAÇÃO É FALSA.

– Humpf... – murmurei. – O paradoxo do mentiroso.

Não pode ser verdadeira sem ser falsa, e não pode ser falsa sem ser verdadeira. Tipo o clichê mais batido de toda a história da filosofia. Sempre me pareceu uma cilada linguística sem sentido. Além disso, ‘verdade’ é um conceito nebuloso, na melhor das hipóteses.”

Fonte: Alva lebre lobo avermelhado: esta história é falsa de Tom Pollock, p. 175.

Paradoxos são declarações aparentemente verdadeiras, mas contém em si uma contradição lógica, uma incoerência. O paradoxo mais conhecido é o do mentiroso, que abrange afirmações como “*estou mentindo agora*” ou “*esta afirmação é falsa*”. Analisando a frase de “esta afirmação é falsa” percebemos que se for verdadeira, então a frase é falsa, mas então se “esta afirmação é falsa” for falsa, então a frase é verdadeira, e assim temos uma contradição.

Entre os paradoxos mais conhecidos temos o paradoxo do sanduiche de mortadela: “*O que é melhor: a felicidade eterna ou um sanduíche de mortadela?*”

Embora pareça que a felicidade eterna seja melhor, isso não é verdade. A prova é bastante simples: Partindo do princípio que "nada é melhor que a felicidade eterna" e lembrando que "um sanduíche de mortadela é melhor que nada", temos que "um sanduiche de mortadela é melhor que a felicidade eterna".

Outro paradoxo conhecido é o do queijo, sabemos que o queijo suíço tem buracos, assim, quanto mais queijo, mais buracos. Porém quanto mais buracos, menos queijo. Logo, quanto mais queijo, menos queijo!

Agora vamos responder algumas perguntas sobre paradoxos:

1) O Paradoxo do Pinóquio é o resultado gerado por um conflito de lógica baseado na história infantil do boneco Pinóquio, cujo nariz cresce sempre que ele conta uma mentira. Imagine o Pinóquio dizendo a frase: "*Meu nariz vai crescer agora.*" Duas hipóteses podem acontecer: o nariz do Pinóquio não cresce ou o nariz do Pinóquio cresce.

a) Considerando que o nariz do Pinóquio não cresce. Então ele disse uma verdade ou uma mentira? E quando o Pinóquio diz uma mentira o que acontece com seu nariz?

b) Considerando agora que o nariz do Pinóquio cresce, então ele disse uma verdade ou uma mentira? E quando o Pinóquio diz uma verdade o que acontece com seu nariz?

c) Por que temos uma contradição nas respostas anteriores?

2) No livro *Dom Quixote de la Mancha* escrito por Miguel de Cervantes, o personagem Sancho Pança, o fiel escudeiro de Dom Quixote, torna-se governador de uma ilha com uma lei muito curiosa. O guardião da ilha deveria perguntar a cada visitante o motivo da visita. Se o visitante responder a verdade, tudo certo. Mas caso mentisse, o visitante seria enforcado.

O problema é que num belo dia apareceu um visitante que respondeu que visitava a ilha para ser enforcado! E agora? O visitante deveria ou não ser enforcado?

- a) Se não enforcarem o visitante ele teria mentido, e nesse caso ele deveria ser enforcado?
- b) Se enforcarem o visitante ele teria falado a verdade. E se ele falou a verdade deveria ser enforcado?
- c) Essa situação representa um paradoxo? Por quê?
- d) Na história de Cervantes, liberta o visitante. Você concorda com essa decisão?

3) Tom Pollock escreveu um romance com o título: “*Alva lebre lobo avermelhado: esta história é falsa*”. Esse título contém um paradoxo. Faça uma análise desse paradoxo.

Respostas:

1. a) Se não crescer o nariz então a afirmação do Pinóquio é uma mentira. Quando o Pinóquio diz uma mentira o nariz deveria crescer.

1. b) Se o nariz cresce então o Pinóquio disse uma verdade. Quando o Pinóquio diz a verdade seu nariz não cresce.

1. c) Em ambos os casos temos uma contradição, pois, se o nariz cresce, ele não deveria ter crescido e, se não cresce, deveria ter crescido. Este é o paradoxo.

2. a) Sim.

2. b) Não.

2. c) Sim temos um paradoxo. Porque temos uma contradição, pois se não enforcarem o visitante significa que ele mentiu e daí devia ser enforcado, por outro lado se enforcarem o visitante significa que ele falou a verdade e nesse caso deveria ser libertado e não enforcado.

2. d) Resposta pessoal.

3) Se a afirmação do título for verdadeira a história contada no livro é falsa, mas se a afirmação do título for falsa, a história contada no livro é verdadeira.

6 METODOLOGIA DA PESQUISA E ATIVIDADES DIDÁTICAS

No esforço de responder à questão norteadora dessa pesquisa, procuramos utilizar o método mais adequado que permitisse o entendimento do problema compreendido por esse estudo. Para isso fizemos o uso da pesquisa qualitativa, conforme Gerhart e Silveira (2009, p. 31): “A pesquisa qualitativa não se preocupa com representatividade numérica, mas, sim, com o aprofundamento da compreensão de um grupo social, de uma organização, etc.” Ainda:

Os pesquisadores que utilizam os métodos qualitativos buscam explicar o porquê das coisas, exprimindo o que convém ser feito, mas não quantificam os valores e as trocas simbólicas nem se submetem à prova de fatos, pois os dados analisados são não-métricos (suscitados e de interação) e se valem de diferentes abordagens. (GERHART; SILVEIRA, 2009, p. 32)

Denzin e Lincoln *apud* Flick abordam a maneira de como trabalhar um problema de investigação na forma de pesquisa qualitativa:

A pesquisa qualitativa é uma atividade situada que posiciona o observador no mundo. Ela consiste em um conjunto de práticas interpretativas e matérias que tornam o mundo visível. Essas práticas transformam o mundo, fazendo dele uma série de representações, incluindo notas de campo, entrevistas, conversas, fotografias, gravações e anotações pessoais. Nesse nível, a pesquisa qualitativa envolve a postura interpretativa e naturalística do mundo. Isso significa que os pesquisadores desse campo estudam as coisas em seus contextos naturais, tentando entender ou interpretar os fenômenos em termos dos sentidos que as pessoas lhes atribuem. (DENZIN; LINCOLN, 2005, *apud* FLICK, 2006, p. 16)

Como a pesquisa qualitativa utiliza diversas modalidades de investigação selecionamos o estudo de caso como metodologia da pesquisa. Neste método teremos a explicação ou descrição de uma situação real bem-sucedida ou fracassada e a intenção é destacar as práticas, técnicas ou comportamentos que foram bem aplicados ou foram pouco funcionais.

Creswell (2007, p. 183 e 184) define o estudo de caso³ como uma metodologia de pesquisa, de abordagem qualitativa, onde o investigador explora um sistema limitado ou vários sistemas limitados (um ou mais casos), ao longo do tempo e através de coleta de dados detalhada e completa, que utiliza múltiplas fontes de informação (observação, entrevistas, documentos e relatórios, entre outros), relatando a descrição de um caso e dos temas a ele relacionados.

³ O estudo de caso é um método de pesquisa que utiliza, geralmente, dados qualitativos, coletados a partir de eventos reais, com o objetivo de explicar, explorar ou descrever fenômenos atuais inseridos em seu próprio contexto. Caracteriza-se por ser um estudo detalhado e exaustivo de poucos, ou mesmo de um único objeto, fornecendo conhecimentos profundos. (EISENHARDT, 1989, *apud* YIN, 2005, p.32)

Esse mesmo autor acrescenta que, a pesquisa qualitativa ocorre em um cenário natural, ou seja, o pesquisador qualitativo sempre vai ao local onde o participante está. Isso permite ao pesquisador observar um número maior de detalhes sobre a pessoa ou sobre o local e envolver-se nas experiências reais dos participantes. Além disso, o eu pesquisador torna-se inseparável do eu pessoal, o que significa que toda investigação é carregada de valores pessoais.

6.1 Atividades didáticas

De acordo com Farias (2019) roteiro de aprendizagem é um instrumento elaborado de forma intencional e planejada pelo professor a fim de orientar o estudo dos alunos. Os roteiros favorecem o engajamento e autonomia dos estudantes, além de contribuir para que os mesmos desenvolvam estratégias de sistematização de estudo para alcançar os objetivos de aprendizagem propostos pelo professor. Este produto educacional tem por objetivo auxiliar professores a planejar, elaborar e aplicar roteiros de aprendizagem com seus estudantes a fim de maximizar a apreensão do conteúdo, direcionar os estudantes na resolução de tarefas e fazê-los progredir na leitura e aprofundamento do estudo dentro e fora da sala de aula.

Em outras palavras, é um conjunto de atividades e estratégias planejadas passo a passo pelo professor para que os alunos possam entender o conteúdo proposto, de forma que leve o estudante a uma evolução no conhecimento, através do aprofundamento dos estudos sobre o tema. Assim, elaboramos uma sequência de atividades, que chamamos de roteiro de aprendizado (veja Apêndice E), envolvendo logaritmos e diálogos sobre o livro *Alva lebre lobo avermelhado: esta história é falsa*, para promover a aprendizagem dos alunos.

Após a construção das atividades, temos a fase de experimentação, que é o momento de se colocar em prática toda a sequência de atividades elaborada. Após a experimentação temos a análise dos dados obtidos. A análise posterior fundamenta-se no conjunto de dados recolhidos durante a experimentação e as observações realizadas durante a aula ou as produções dos alunos durante as atividades. Essas informações podem ser completadas por dados obtidos pela utilização de metodologias externas: questionários, entrevistas, vídeos, fotografias, portfólios, entre outros. O conjunto de resultados que serão obtidos na análise posterior contribuirão para a melhoria dos conhecimentos didáticos sobre as condições na transmissão do saber.

Assim, as análises e avaliações posteriores dependem das ferramentas técnicas e teóricas utilizadas com as quais a coleta dos dados permitirá a construção dos resultados da pesquisa. Os resultados serão avaliados pelo professor-pesquisador e as informações resultantes serão confrontadas com a análise prévia realizada. O escopo é relacionar as observações com os

objetivos definidos previamente e concluir se houve a aprendizagem dos alunos referente ao assunto abordado na sequência didática.

Nota-se que neste tipo de metodologia utilizada, a validação dos resultados obtidos ocorre apenas com o confronto das hipóteses envolvidas na investigação e os resultados da experimentação. Não é realizada uma comparação com grupos de alunos externos ou com experiências didáticas realizadas em outra ocasião. A análise e a validação ocorrem entre os elementos envolvidos na sequência de atividades proposta.

6.2 Planejamento das atividades

A pesquisa foi planejada para ser realizada na Escola Estadual Cândido Portinari em Tapurah, interior de Mato Grosso, onde a professora ensina. Os participantes são os alunos matriculados no 3º ano “A” do Ensino Médio, de 2021, em um total de 32 alunos, distribuídos em 12 *online* e 20 apostilados⁴. Entretanto, a pesquisa contou com a participação de 16 alunos. Consistindo em uma turma heterogênea no que se refere à formação.

Buscamos a participação dos estudantes em atividades planejadas e orientadas para que proporcionassem o entendimento sobre logaritmo. Além disso, sempre visamos ao cumprimento da matriz curricular, para que não houvesse nenhum prejuízo no conteúdo programático dos alunos.

Caso houvesse algum estudante que não estivesse disposto a fazer parte da pesquisa, o mesmo participaria normalmente de todas as atividades, incluindo os trabalhos propostos. Neste caso, as participações destes alunos não seriam consideradas para a análise dos dados e resultados da pesquisa. Estes alunos não seriam dispensados das atividades, visto que, todo cronograma do estudo de caso corresponde ao programa curricular da escola em relação ao conteúdo. A coordenação pedagógica da instituição concordou com a proposta da pesquisa em seu ambiente, fato este que, formalizamos junto à direção da escola.

Planejamos debates e questionamentos sobre pontos importantes no que se refere à contextualização e a aplicação de logaritmos. As atividades também foram planejadas para encontros a serem realizados nos horários de aula e duas tarefas de casa, de tal forma que, os alunos não precisassem alterar as suas rotinas diárias, nem mesmo buscar disponibilidade em

⁴ Termo coloquial que se refere ao método de ensino aprendizagem remoto com o uso de apostilas elaboradas pelos professores da instituição de ensino dos referidos alunos.

outros turnos. Projetamos muitas atividades para serem realizadas individualmente, já que a modalidade de ensino é remota.

O primeiro encontro tem por objetivo a promoção ou propaganda do livro *Alva lebre lobo avermelhado: esta história é falsa* de Tom Pollock, e para explanação do roteiro das atividades didáticas. Como a proposta é a aprendizagem baseada em projetos (ABP), nesse encontro, os alunos terão a oportunidade de escolher algumas atividades que serão realizadas.

A problematização do estudo de logaritmos, será introduzida através de uma “tarefa de casa”: assistir alguns vídeos e pesquisar sobre terremotos. Com intuito de aproximar o conteúdo escolar a um contexto em que o estudante se sentisse interessado, os vídeos contemplam a ocorrência de terremotos e da escala logarítmica. Nesse período, entre o primeiro e o segundo encontro, os alunos também devem ler o livro de Tom Pollock até a página 37.

No terceiro momento, a partir de uma situação problema inspirada no livro *Alva lebre lobo avermelhado: esta história é falsa*, projetamos algumas atividades para trabalhar e desenvolver o conceito e as propriedades de logaritmo.

O quarto momento foi projetado para ser em conjunto com a disciplina de Língua Portuguesa, para isso organizamos um debate não formal, voltado ao tema transversal saúde, especificamente ataques de pânico e ansiedade, pois é um dos assuntos abordados no livro *Alva lebre lobo avermelhado: esta história é falsa*. Também idealizamos falar sobre o enredo da obra e fazer um resumo da história. Devido ao horário da aula, o resumo do livro deverá ser concluído como “tarefa de casa”.

Para o encerramento do projeto programamos abrir espaço para diálogo, depoimentos e para contemplar a curiosidade dos alunos com os diversos temas matemáticos abordados no livro. Ainda conduziremos uma pesquisa, no modelo *Jigsaw*, sobre os matemáticos citados no romance. Para finalizar teremos a avaliação do projeto.

Essas atividades foram projetadas para seis momentos e/ou etapas, com a duração mínima uma (1) hora de aula e no máximo três (3) horas de aulas com os estudantes, totalizando 12 horas de aula, conforme o Quadro 4.

Durante os encontros, utilizamos atividades complementares, debates, pesquisa na *internet* e a leitura do livro *Alva lebre lobo avermelhado: esta história é falsa*. Nesses encontros, o foco foi trazer situações e informações que possibilitassem aproximar o contexto de logaritmos à vida dos estudantes, criando um elo entre escola e a atividade extraescolar.

O distanciamento entre os encontros foi decorrente de dois motivos: primeiro o horário das aulas estabelecido pela escola, e segundo para dar tempo para os alunos lerem o livro *Alva*

lebre lobo avermelhado: está história é falsa. Todas as atividades que foram propostas estão nos apêndices deste trabalho.

Quadro 4 – Planejamento proposto aos alunos para execução do projeto

Etapa	Data da etapa	Tempo	Ideia central da atividade planejada	Objetivos da atividade
1ª	11/06	1 hora aula	Apresentação do cronograma do projeto e planejamento das atividades	Estimular o interesse pelo projeto e pela leitura do livro
2ª	12/06 a 01/07	3 horas aula	Tarefa de casa com leitura do livro e visualização de vídeos para a problematização da situação a ser estudada	Preparação prévia para o aprendizado de logaritmo
3ª	02/07	3 horas aula	Explicação sobre conceito de logaritmo e execução do roteiro de aprendizagem	Aprendizado sobre os conceitos e propriedades logarítmicas e dar sentido a situação e contexto
4ª	09/07	2 horas aula	Debate sobre o tema transversal ataque de ansiedade	Socialização das ideias, trabalhar de maneira interdisciplinar
5ª	10 a 11/07	1 hora aula	Resumo do livro	Fazer as próprias considerações sobre o livro
6ª	12/07	2 horas aula	Debate sobre temas matemáticos do livro e avaliação	Dar significado aos conteúdos, estimular a discussão, socialização de ideias e verificar as aprendizagens

Fonte: A autora

Com a intenção de esclarecer nossas ideias, a seguir, detalhamos o planejamento resumido no Quadro 4. É importante destacarmos que o relato e análise do que foi aplicado em aula encontra-se no próximo capítulo deste trabalho, agora será delineada a proposta das atividades didáticas que apresentaremos aos alunos.

6.2.1 Primeira etapa

Este encontro, foi planejado para ser a introdução de uma âncora, como caracterizamos no Capítulo 2. Através da apresentação de informações básicas problematizaremos o contexto, visando despertar o interesse do estudante.

Com a disciplina de Língua Portuguesa os alunos do Ensino Médio da Escola Estadual Cândido Portinari de Tapurah tem como objetivo a leitura de um livro por bimestre. Nossa proposta é que esse livro será indicado pela professora de Matemática. O livro selecionado foi *Alva lebre lobo avermelhado: esta história é falsa*, de Tom Pollock. Assim, será entregue um exemplar do livro para cada um dos 16 alunos *online* da turma e solicitaremos a leitura até a página 37 da obra.

Após essa explanação mostraremos o cronograma das atividades em *Power point* para que os alunos possam visualizar a proposta e decidir o que será realizado, garantindo assim a integração e envolvimento deles desde o início do projeto de ABP. Dessa maneira deixaremos claro os objetivos, a situação problema e as atividades que serão realizadas e daremos aos estudantes a oportunidade de opinarem, darem sugestões, além de terem a oportunidade de gerenciarem seu tempo, garantindo, dessa maneira, que os alunos tenham voz e escolha no ABP. Entende-se que é muito importante não sobrecarregar a rotina do estudante, a leitura do livro deve ser algo prazeroso, e a melhor maneira de garantir isso é conversar com os próprios alunos.

Nesse momento deixaremos claro que a questão motriz do projeto é aprender logaritmo a partir do romance *Alva lebre lobo avermelhado: esta história é falsa*.

Na sequência da aula realizaremos uma pesquisa, pelo *Google forms*, sobre o conhecimento prévio dos alunos. O questionário completo está no Apêndice B e os resultados serão apresentados no próximo capítulo deste trabalho. De acordo com Ausubel (2003), o que o aluno já sabe é a ponte para a construção de um novo conhecimento por meio da reconfiguração das estruturas mentais existentes ou da elaboração de outras novas. Para Ausubel (2003), quando alguém atribui significados a um conhecimento a partir da interação com seus conhecimentos prévios, estabelece a aprendizagem significativa.

O conhecimento prévio possibilita a relação do aluno com o que será ensinado e deve ser aproveitado pelo professor, no decorrer do processo. De nada adianta coletar informações se elas não servirem como guia para orientar atividades.

Para encerrar essa aula, será entregue um termo de consentimento para o uso de imagem. O texto dessa autorização de uso de imagem está no Apêndice C. Esse termo é obrigatório

quando a imagem do participante for utilizada por algum meio (fotografia ou vídeo) mesmo que sejam utilizados meios de preservação de identidade como tarja preta sobre os olhos. Também é obrigatório quando trechos de depoimentos serão transcritos em trabalhos ou apresentações.

6.2.2 Segunda etapa

Essa etapa foi planejada como “tarefa de casa”, ou seja, será dado um dever ao aluno para ser feito em sua casa, fora do horário de aula, cabendo ao aluno escolher o melhor momento para a sua realização. Essa fase do projeto corresponde ao processo de investigação da ABP.

Terão duas tarefas: a primeira será a leitura até a página 37 do exemplar de *Alva lebre lobo avermelhado: esta história é falsa*. A segunda será assistir alguns vídeos sobre terremotos, escala logarítmica e conceito de logaritmos. Também recomendaremos uma pesquisa na *internet* a respeito de terremotos ocorridos no mundo e na região. Planejamos buscar informações como magnitude, danos, localidade, força, duração e escala Richter.

Esta etapa será de grande importância, pois pretendemos fornecer subsídios para que o aluno se interesse pelo assunto e esteja preparado para a execução das atividades propostas no roteiro de aprendizado do próximo encontro.

6.2.3 Terceira etapa

Na terceira etapa será apresentada uma situação problema sobre logaritmos, inspirada no livro *Alva lebre lobo avermelhado: esta história é falsa*. O trecho é sobre a “escala Clagada” e já foi citado na página 47. A situação problema será abordada com mais detalhes no próximo capítulo deste trabalho, mas podemos encontrá-la no Apêndice E junto com o roteiro de aprendizado elaborado pela professora.

Segundo os PCN's de Matemática (BRASIL, 1998), a resolução de problemas possibilita aos alunos mobilizar conhecimentos e desenvolver a capacidade para gerenciar informações que estão ao seu alcance. Assim, os alunos terão oportunidade de ampliar seus conhecimentos acerca de conceitos e procedimentos matemáticos bem como ampliar a visão que têm dos problemas, da Matemática, do mundo em geral e desenvolver sua autoconfiança.

Para Dante (1998, p. 10) “problema é qualquer situação que exija a maneira matemática de pensar e conhecimentos específicos para solucioná-la”. De acordo com esse autor, um bom

problema desafia o aluno, é real, é interessante, a resposta não é evidente e tem um nível adequado de dificuldade. A partir da leitura e interpretação dos problemas, é possível o envolvimento do aluno na busca por estratégias de resolução; na persistência em encontrar uma solução, na ampliação e na ressignificação de conceitos e ideias que ele já conhece. Por este motivo, vários autores evidenciaram a importância do uso desta metodologia nas aulas.

Segundo o esquema de Polya, são quatro as principais etapas para a resolução de um problema:

Primeiro, temos que compreender o problema, temos que perceber claramente o que é necessário. Segundo, temos que ver como os diversos itens estão inter-relacionados, como a incógnita está ligada aos dados, para a ideia da resolução, para estabelecermos um plano. Terceiro, executamos o nosso plano. Quarto, fazemos um retrospecto da resolução completa, revendo-a e discutindo-a. (POLYA, 1995, p. 3-4)

Assim, o papel de professor, nesta modalidade aula será de: incentivador, facilitador, mediador das ideias apresentadas pelos alunos, os levando a pensarem e a gerarem seus próprios conhecimentos.

Nesse encontro, partindo da situação problema e das informações adquiridas pelos estudantes durante a leitura do livro e das pesquisas na *internet* sobre terremotos, teremos um debate e a explanação sobre o que é logaritmo, aplicações, notação e terminologia. Também será proposto um roteiro de aprendizado para a resolução da situação problema, contendo conceito de logaritmo, restrições do conceito, propriedades operatórias, mudança de base, logaritmo decimal, escala logarítmica, escala Richter e “escala Claglada”. O roteiro completo encontra-se no Apêndice E.

Ao final do processo, espera-se que os alunos sejam capazes de resolver a situação problema. Incentivaremos os estudantes a produzir um registro escrito com suas respostas e soluções, além de apresentar os resultados para a turma. Ao socializar os resultados e discutir os caminhos necessários ao desenvolvimento, visamos à interação entre os alunos, para eles poderem alcançar resultados significativos acerca da aprendizagem de logaritmo.

Nessa dinâmica algumas características essenciais da ABP serão trabalhadas, como processo de investigação, trabalho cooperativo, reflexão e *feedback*.

6.2.4 Quarta etapa

Neste encontro a aula deverá ser ministrada pela professora Patrícia Rodrigues de Língua Portuguesa, e contar com a participação da respectiva professora de Matemática.

Será proposta a explanação de depoimentos sobre o enredo do livro, seguido da produção de um debate não formal sobre os temas polêmicos do livro, em especial, o assunto sobre ataque de ansiedade em adolescentes.

Com relação ao debate, este é um gênero oral que faz parte do campo midiático. Ele se desenvolve em torno de temas polêmicos que dividem opinião. É caracterizado pela presença de debatedores com opiniões contrárias sobre o tema e um moderador. Tratar de assuntos polêmicos na escola não significa simplesmente “bater um papo”. É uma conversa dirigida, organizada por moderadores que conhecem aquele tema e sabem ajustar o seu discurso para cada uma das fases da vida de um adolescente.

Então, a ideia desse embate será apresentar o assunto de forma que os estudantes construam a sua percepção sobre a saúde mental de jovens, tanto por iniciativa própria quanto pelo contato com outros alunos, em uma “mesa-redonda” com a moderação do professor. Essa atividade tem por objetivo romper a timidez dos alunos e exercitar o respeito. Espera-se que o debate e os depoimentos permitam que alguns objetivos do ABP sejam alcançados, como trabalho cooperativo e reflexão.

Seguindo o horário das aulas estabelecido pela escola, a elaboração do resumo do livro, que demanda algum tempo para ser desenvolvido ficará para ser trabalhada como “tarefa de casa”. O resumo será utilizado como critério avaliativo tanto em Matemática quanto em Língua Portuguesa.

6.2.5 Quinta etapa

Nas aulas de Língua Portuguesa, após a leitura de um livro, os alunos do Ensino Médio da Escola Estadual Cândido Portinari costumam escrever um resumo ou uma resenha desse livro. Optamos por fazer um resumo, pois as opiniões já serão ouvidas durante os depoimentos e discussões em aula.

Nesta fase os alunos que redigirão, como “tarefa de casa”, um resumo do livro *Alva lebre lobo avermelhado: esta história é falsa*. Essa será uma das maneiras de apresentar publicamente os resultados do nosso projeto. Bender (2014) afirma que alguma forma de publicação ou apresentação pública dos resultados é uma ênfase crucial dentro da ABP. A apresentação do trabalho de sala de aula a outras pessoas da comunidade é uma maneira de mostrar o valor do mesmo.

6.2.6 Sexta etapa

A proposta para essa aula é promover uma conversa e instigar depoimentos sobre os assuntos matemáticos abordados no livro, que forem de interesse dos alunos. Haverá argumentação oral aberta, cujo objetivo será trocar ideias, apresentar argumentos e ouvir opiniões diferentes. Mas, principalmente, será o momento de os alunos demonstrarem seus interesses, realizarem suas próprias descobertas e falarem sobre o que acharam mais curioso e relevante na leitura do romance.

Lembrando que os principais conteúdos abordados no livro são: código de César; números imaginários; axiomas; radiciação; sequência de Fibonacci; paradoxos; função exponencial; probabilidade; estudo de redes e Teorema da Incompletude.

Para os temas que forem de interesse dos alunos nossa proposta é realizar as chamadas mini lições da ABP. De acordo com Bender (2014) uma mini lição é uma lição em tópicos, bastante curta onde um professor ou grupo de alunos apresenta uma instrução específica e direta sobre informações que todos os grupos de ABP poderiam necessitar para completar seus projetos. As minis lições sobre tópicos específicos devem ser realizadas quando e se os alunos requisitarem. Embora os professores possam encorajar os grupos de alunos, estes não devem ser coagidos a fazê-lo, já que a voz e escolha devem ser respeitadas ao longo de todo o processo.

As minis lições devem ser poucas, devem ser altamente focadas em um tópico e muito curtas, não ocupando mais do que 10 ou 15 minutos. Também, deve-se realizar todos os esforços para que a apresentação não seja parecida com a aula expositiva ou a discussão protagonizada pelo professor. O uso de um quadro interativo é recomendado se houver um disponível.

Nossa proposta para a mini lição consiste em formar grupos, usar a *internet* para pesquisar o tema proposto e deixar os alunos apresentarem o material pesquisado. Como será a primeira experiência da turma com ABP, a orientação da professora terá que ser efetiva. Outro ponto a ser trabalhado é cooperação. O trabalho cooperativo é essencial dentro da ABP e vemos as minis lições como uma maneira de pôr em prática o trabalho em grupo.

Bender (2014, p. 27) diz que o professor pode criar um grupo heterogêneo para atividades diferenciadas, com cada grupo incluindo um aluno que leia bem, um que escreva bem, outro que tenha facilidade para lidar com tecnologia e um que seja organizado o suficiente para liderar. Dessa maneira cada membro do grupo conseguiria usar seus pontos fortes para cumprir a meta do grupo ao mesmo tempo em que aprenderia com o resto dos membros.

Encontraremos o seguinte esclarecimento com Bender (2014, p.49) “Saber trabalhar coletivamente na resolução de problemas é, de muitas maneiras, uma das mais importantes habilidades que qualquer jovem pode desenvolver, já que se trata de uma habilidade crucial para praticamente todos os trabalhos do século XXI.

Outra proposta para implementar o trabalho em grupo será utilizar a estratégia de aprendizagem cooperativa *Jigsaw*, onde os estudantes devem formar grupos de pesquisa sobre os seguintes matemáticos citados no romance: Gödel, Galois, Cantor, Hilbert, Turing, Gauss. A estratégia *Jigsaw*, ou estratégia de quebra-cabeças, consiste na organização e condução de atividades a serem desenvolvidas em sala de aula através da divisão de tarefas, realizadas em pequenos grupos, para a resolução de problemas que possuem objetivos de aprendizagens comuns, enfatizando a interação entre os componentes dos grupos. Organizaremos a atividade em dez passos:

Passo 1: os estudantes são divididos em grupos de quatro componentes.

Passo 2: um estudante de cada grupo é escolhido para ser o líder.

Passo 3: divide-se o material a ser estudado entre os componentes do grupo, de modo que cada um fique com uma parte, ou seja, fique com um matemático.

Passo 4: cada componente de cada grupo recebe como tarefa de leitura e aprendizagem uma das partes em que foi dividido o assunto.

Passo 5: os estudantes realizam anotações com as principais ideias sobre o material lido.

Passo 6: os “grupos de especialistas” temporários são formados. Por exemplo: os alunos que ficarem com Gödel se reúnem e discutem entre si, de modo a aprofundar o máximo que puderem esse tópico.

Passo 7: ocorre o retorno aos grupos de origem.

Passo 8: cada estudante apresenta sua parte ao grupo *Jigsaw* enquanto os outros componentes fazem perguntas para que o assunto fique completamente compreendido.

Passo 9: o professor precisa estar observando todo o processo e, sempre que necessário, realizar as intervenções adequadas.

Passo 10: ao final da aula, aplica-se um teste rápido sobre o assunto, de modo que contemple todas as partes, para que os estudantes compreendam o intuito da estratégia cooperativa.

A distribuição não deverá seguir nenhum critério dado pela professora, os alunos poderão se juntar por afinidade e familiaridade em executar trabalho com os demais colegas.

Concluída essa etapa de trabalho em grupo, pensamos na apresentação pública dos resultados, pois os projetos de ABP precisam ter os resultados expostos para toda a comunidade

escolar, então nossa sugestão aos alunos será a gravação de *podcasts* sobre o livro *Alva lebre lobo avermelhado: esta história é falsa* utilizando o aplicativo *Anchor*.

Podcast, basicamente, é um programa de rádio que pode ser ouvido pela *internet* a qualquer hora, por meio do celular ou do computador. Com temas e duração variadas, o ouvinte pode acessar conteúdos em áudio para se informar, para estudar ou para passar o tempo.

Do ponto de vista de quem ouve, há a facilidade de acesso e autonomia, o ouvinte pode escutar o que quiser, onde e quando quiser sem estar preso a uma grade de horário do rádio. Do ponto de vista de quem produz, também pode ser considerado democrático porque é possível produzir um *podcast* sem custo nenhum.

Ao considerar os veículos para publicação, consideramos o nível de exposição dos alunos, visto que a segurança dos alunos é uma preocupação essencial e, sob hipótese alguma, nomes, informações pessoais ou endereços devem ser fornecidos pelo trabalho publicado.

Como o uso de tecnologia é bastante frequente nos projetos de ABP, como *wikis*, *blogs*, redes sociais, *websites* e *webquests*; essas tecnologias de ensino moderno representam mais que simples formas de fornecer informações aos alunos, Bender (2014, p. 37) diz que “em vez de consumidores passivos de conhecimento, os alunos que participam de projetos de ABP tornam-se produtores de conhecimento, já que seus artefatos baseados em tecnologia são publicados na *web*.”

Para muitos alunos as opções de publicação do seu trabalho na internet são bastante atrativas de um ponto de vista motivacional. É claro que os professores precisarão adquirir certo grau de fluência no uso dessas ferramentas de ensino para permitir que esse tipo de publicação seja, ao mesmo tempo, possível e significativo como uma experiência de aprendizagem, pois os projetos de ABP devem desenvolver habilidades em tecnologia, assim como habilidades de colaboração e trabalho em equipe.

Para finalizar o projeto será realizado uma avaliação. Uma opção muito adequada para a avaliação final dos estudantes é a estratégia *One Minute Paper*. Esta tem por objetivo, verificar rapidamente a compreensão dos estudantes acerca de algum objetivo de aprendizagem específico. O professor efetua uma pergunta e os estudantes têm um minuto para escrever suas respostas. As questões propostas são:

- 1 – Qual foi o conceito mais importante que você aprendeu durante o projeto?
- 2 – Que pergunta importante permanece sem resposta?
- 3 – Qual foi o exemplo mais significativo ou informação mais surpreendente?

Entretanto, vale ressaltar que a avaliação será efetuada de forma contínua, mediante a observação e análise:

- das interações sociais e cooperativas entre os estudantes e as equipes;
- a aproximação da língua materna com a linguagem matemática;
- da análise de dados, além da interpretação dos resultados visando solucionar os problemas;
- percepção da contextualização do conhecimento matemático;
- da escrita, elaboração, organização e coerência demonstrada nos questionários individuais.

Note que nesta sexta etapa teremos várias características da ABP presentes, como voz e escolha do aluno, *feedback* e revisão, oportunidades e reflexão, processo de investigação e trabalho em equipe.

7 RELATO DAS ATIVIDADES E RESULTADOS

7.1 Perfil dos participantes

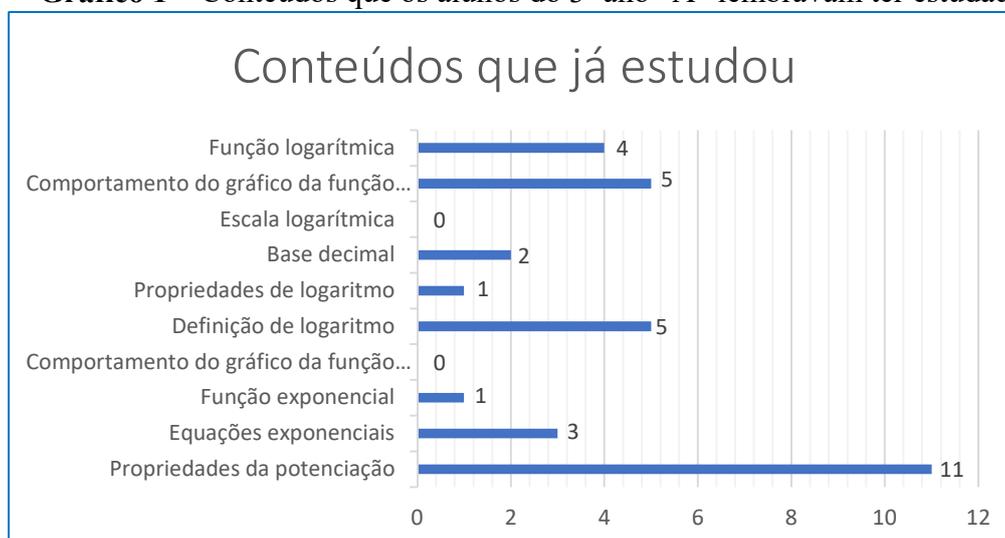
A pesquisa teve a participação de 16 alunos, online, matriculados no 3º ano “A” da Escola Estadual Cândido Portinari em Tapurah-MT. Antes do desenvolvimento da sequência de atividades, foi aplicado um questionário aos alunos, utilizando a ferramenta *Google forms*, para levantamento do conhecimento prévio dos mesmos e determinar o perfil dos participantes do projeto. O questionário continha perguntas sobre a idade dos alunos, dificuldade com relação à disciplina de Matemática, aprendizado prévio sobre logaritmos e postura do aluno diante das dificuldades de aprendizado. O questionário na íntegra encontra-se no Apêndice B deste trabalho.

Os resultados da enquete foram os seguintes:

- Apenas um aluno tem 18 anos, os demais têm 17 anos.
- 68,8% dos alunos disseram ter dificuldade com Matemática, entretanto 100% acham Matemática importante para a vida.
- 62,5% dos alunos nunca estudou logaritmo no Ensino Médio.

Também foi solicitado que os estudantes selecionassem os conteúdos que eles lembravam ter aprendido em relação ao estudo das funções exponenciais e logarítmicas, sendo facultada a escolha de mais de uma alternativa. Pode-se analisar as respostas dos estudantes na representação no Gráfico 1.

Gráfico 1 – Conteúdos que os alunos do 3º ano “A” lembravam ter estudado

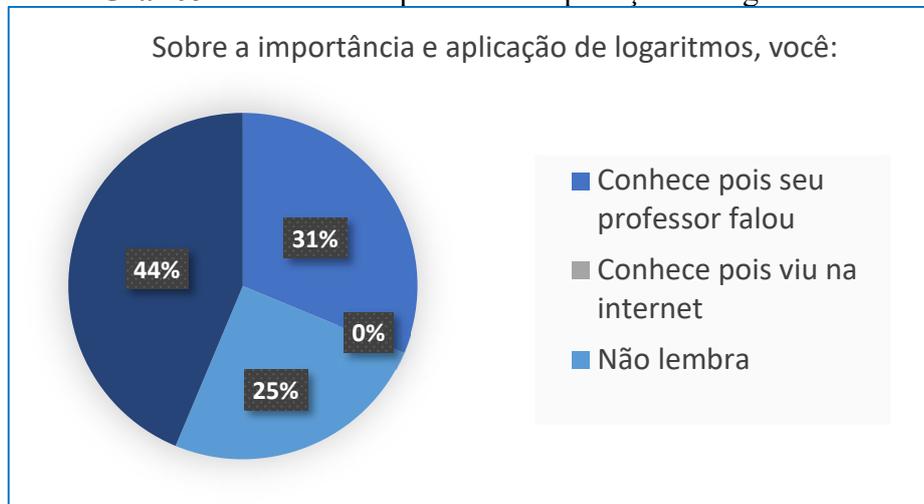


Fonte: A autora

Sobre a importância e aplicações práticas dos logaritmos, observe o Gráfico 2, nenhum aluno se interessou em pesquisar o assunto na *internet* e o conhecimento que possuem provém dos professores em sala de aula. Isso deixa implícito que os alunos dessa turma têm pouco interesse pelos assuntos da Matemática, tornando o horário das aulas um importante momento para o professor instigar a curiosidade dos estudantes.

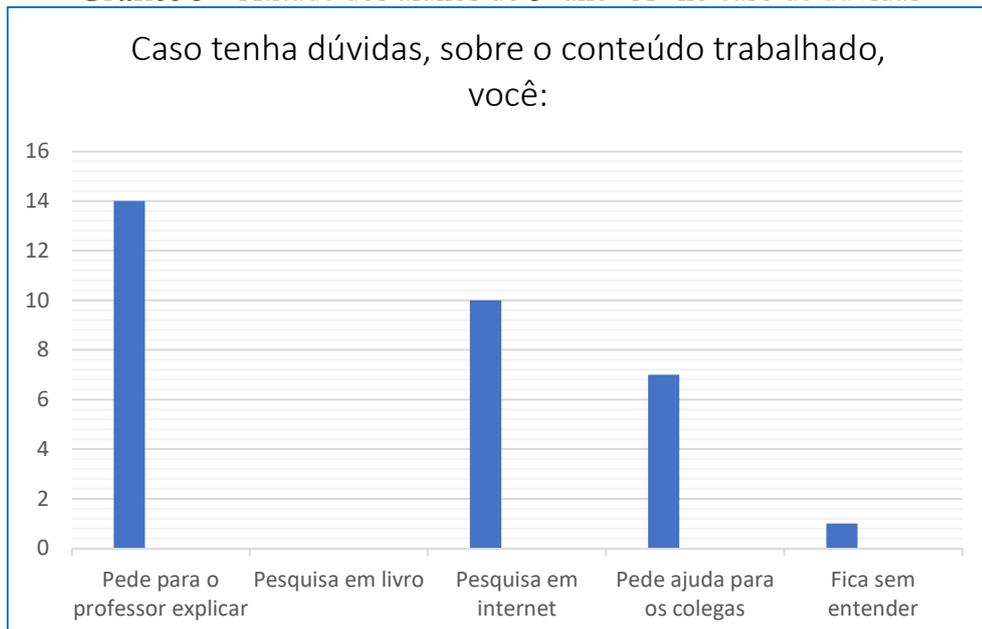
Os alunos foram questionados sobre como agem quando possuem dúvidas na aula de Matemática. Nesta questão havia a possibilidade de marcar mais de uma alternativa. Veja as respostas desta questão no Gráfico 3.

Gráfico 2 – Sobre a importância e aplicação de logaritmos



Fonte: A autora

Gráfico 3 – Atitude dos alunos do 3º ano “A” no caso de dúvidas



Fonte: A autora

De maneira geral, verificou-se que grande parte da turma apresentava muitas dificuldades em conteúdos de Matemática, o que comprometeria a aprendizagem de novos conceitos. Por isso, para evitar futuras dificuldades, alguns conteúdos deverão ser retomados com o objetivo de evitar falha no processo de aprendizagem futuro.

7.2 Coleta dos dados

Iniciamos as atividades com a turma do 3º ano “A” em 11/06/2021 e finalizamos em 15/07/2021 totalizando cinco etapas que somaram 12 horas/aula. As aulas foram online utilizando a ferramenta *Google Meet*. As atividades foram todas elaboradas em formato PDF e postadas na ferramenta *Google sala de aula* e no aplicativo *Whatsapp*. Os exemplares do livro *Alva lebre lobo avermelhado: está história é falsa* foram deixados na coordenação da escola, dessa maneira os alunos residentes na cidade de Tapurah foram até a escola retirar o livro, enquanto os alunos residentes no interior do município, que participaram do projeto, tiveram os exemplares entregues pelo motorista do ônibus escolar.

O material manuscrito produzido pelos alunos foi entregue pelo aplicativo *Whatsapp* e as aulas foram gravadas para que as discussões ficassem registradas para análise futura. Destacamos que apesar das aulas não serem presenciais, os estudantes empenharam-se na execução das tarefas propostas e realizaram todas as leituras, pesquisas e debates indicados. Isso demonstra que as atividades desenvolvidas, no decorrer da sequência didática, despertaram o interesse, a curiosidade e a vontade de aprender o conteúdo.

Devido ao grande volume de material produzido pelos alunos ao longo da aplicação da sequência de atividades, nos restringimos a alguns recortes de atividades. Também consideramos a fala dos discentes, durante a realização das atividades, muito importante, pois é a maneira encontrada pelos alunos para manifestar suas considerações, opiniões e hipóteses sobre o assunto que estava sendo abordado.

Em nosso projeto as atividades estavam relacionadas, primeiramente, a leitura da obra *Alva lebre lobo avermelhado: esta história é falsa* e compreensão da escala Richter para medir magnitude de terremotos. Em um segundo momento, o enfoque dos procedimentos foi sobre logaritmos, nos quais, modelos matemáticos serviram como instrumentos, tanto para que, os estudantes pudessem significar e compreender o logaritmo, quanto para atribuir significados aos abalos sísmicos e a “escala Claglada”, além da possibilidade de generalizar resultados e propriedades logarítmicas. Depois ampliamos as discussões para assuntos matemáticos e não

matemáticos abordados pelo livro em atividades interdisciplinares, finalizando com a redação de um resumo da obra e produção de um *podcast*.

O relato da realização das atividades encontra-se neste capítulo, onde também apresentamos a nossa análise a partir de reflexões sobre as informações geradas pelos encontros. O que desejamos mostrar neste capítulo é que durante toda a aplicação das atividades ocorreu a apropriação de determinados conceitos matemáticos, desde o primeiro até o último encontro.

7.3 Procedimentos e resultados

Os resultados foram apresentados a partir de duas perspectivas: o de professora e o de pesquisadora. Em alguns momentos, como pesquisadora por nos orientarmos mediante um objetivo e uma questão norteadora, em outra ocasião, como professora da turma. Seja sob a interpretação de pesquisadora ou de professora, procuramos os elementos necessários para promover experiências educativas.

A análise sobre a realização das atividades é proveniente das atividades, relatórios, diálogos, lembranças e gravações realizados. Como o projeto tinha o enfoque em uma educação voltada ao estudante, as atividades proporcionaram muitas discussões. As falas, que apresentamos são referentes à realização das atividades.

Para exemplificar, o seguinte recorte, a respeito de terremotos, expressa o que foi percorrido pela professora e o conhecimento demonstrado por alguns estudantes da turma. Indicamos os alunos pela inicial do nome.

Professora: O que vocês encontraram sobre logaritmo?

A.T.: Professora, eu encontrei que foram criados para simplificar os cálculos.

Professora: Alguém mais. Alguma informação a mais?

G.D.: É o valor que se deve elevar a um número da base para se obter outro número.

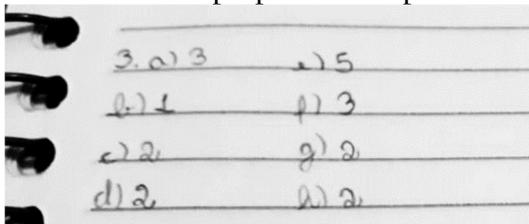
De certa forma, estas reconstruções acabam sendo reafirmadas nos exercícios e relatórios desenvolvidos pelos estudantes, quando averiguado no segundo momento da análise.

Também usamos recortes das atividades apresentadas pelos alunos. Nem todos os alunos terão excertos de atividades expostas neste trabalho, não houve privilégio para alguns ou detrimento de outros, porém algumas respostas ficaram mais didáticas e representativas.

Vejamos as respostas na Figura 6, estão corretas, mas a compreensão do processo de resolução utilizado pelos alunos não é clara e a falta de um enunciado prejudica o entendimento do contexto. Na figura 7, temos letra pouco legível, rasuras e resolução singular do problema,

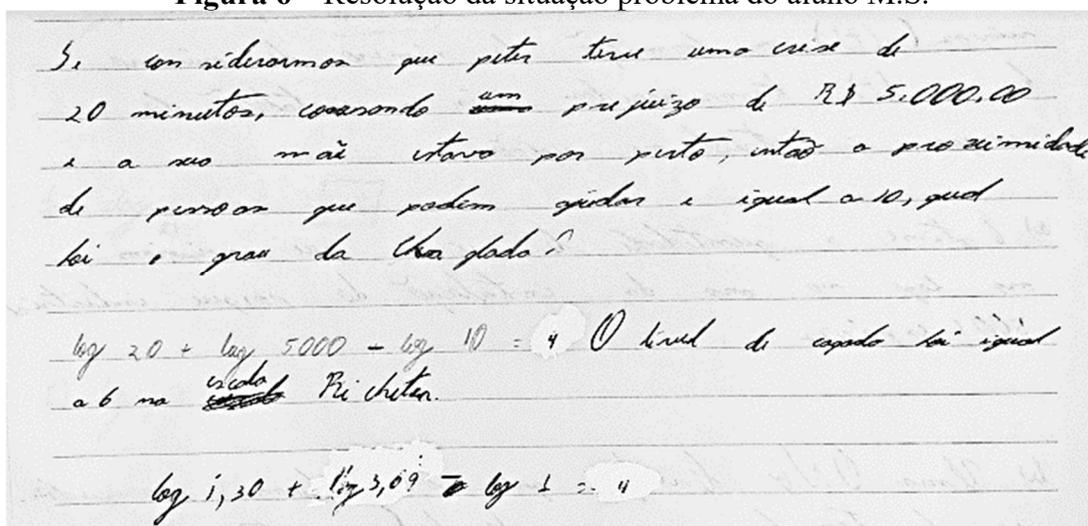
o que pode dificultar o entendimento do leitor. Além disso, foram os próprios alunos que tiraram as fotos das suas respostas e postaram no *Whatsapp*, como nem todos possuem Smartphones de última geração, e, ou habilidades fotográficas então nem todas as imagens ficaram legíveis.

Figura 5 – Atividade 3 sobre propriedades operatórias da aluna G.D.



Fonte: Registro dos alunos

Figura 6 – Resolução da situação problema do aluno M.S.



Fonte: Registro dos alunos

O segundo momento da análise envolveu a categorização dos dados através dos relatórios e exercícios. Todo o procedimento tendeu para as seguintes habilidades: entendimento do aluno, nas relações criadas com outros conceitos e situações e na forma de traduzir números; uso do que foi aprendido em outras situaçõesentendimento e no uso de modelos para a Escala de Richter, fórmulas, logaritmo como expoente, representação em forma de base, equação exponencial, resolução de logaritmo, mudança de base e utilização de propriedades logarítmicas.

O percurso até aqui foi planejado e preparado pelo professor. O livro, os materiais e os alunos foram escolhidos. Mas daqui em diante o que interessaria e influenciaria os alunos não era previsível. Analisar as filmagens, os alunos e os registros das atividades não dariam conta de tudo que resultou das nossas aulas. Porque os resultados não são apenas os acima descritos, pois tem muito mais: o que aconteceu entre os alunos e o livro; entre o livro e as atividades;

entre os alunos e seus registros; e foi além, criando saberes e questionamentos que não estavam nos planos, mas são igualmente valiosos.

7.4 Realização das atividades em etapas

Do planejamento à realização, visamos definir o aluno como foco das atividades em aula, pois nos posicionamos de forma favorável ao desenvolvimento de metodologias ativas de aprendizagem.

No planejamento inicial constavam seis etapas, entretanto a realização das atividades implicou em cinco etapas, ou seja, na comparação entre a Quadro 4, do planejamento, e o Quadro 5, da realização das atividades, há uma diferença de um encontro. Tal fato ocorreu devido à abertura característica do ABP em que os alunos são ouvidos e podem fazer escolhas sobre o desenvolvimento do projeto.

Quadro 5 – Atividades realizadas no projeto “Alva lebre lobo avermelhado”

Etapa	Data da etapa	Tempo	Ideia central da atividade planejada	Objetivo da atividade
1ª	11/06	1 hora aula	Apresentação do cronograma e planejamento das atividades	Estimular o interesse pelo projeto e pela leitura do livro.
2ª	12/06 a 01/07	3 horas aula	Leitura do livro e pesquisa sobre terremotos	Preparação prévia para o aprendizado de logaritmo.
3ª	02/07	4 horas aula	Problematização da situação a ser estudada, explicação sobre conceito de logaritmo e aplicações, execução do roteiro de estudo sobre logaritmos	Aprendizado sobre os conceitos e propriedades logarítmicas.
4ª	09/07	2 horas aula	Debate sobre temas matemáticos do livro e do tema transversal ataque de ansiedade e Avaliação	Significado aos conteúdos matemáticos. Estimular a discussão e socialização de ideias. Verificação a respeito das aprendizagens.
5ª	15/07	2 horas aula	Resumo do livro e gravação de <i>podcasts</i>	Divulgação dos resultados

Fonte: A autora

7.5 Relato, considerações e conclusões da aplicação do projeto

Até o momento, explicitamos os procedimentos da realização de nossa análise. A partir da desta seção, apresentaremos os resultados da pesquisa no contexto da realização das atividades. Nesta análise fomos conduzidos pelo objetivo da pesquisa que consiste em aprender sobre logaritmos através do romance matemático *Alva lebre lobo avermelhado: esta história é falsa* de Tom Pollock.

7.5.1 Primeira etapa

Em aula *online*, anunciamos que iríamos realizar um projeto interdisciplinar com Língua Portuguesa. Neste programa iríamos ler um livro de romance e a partir desse livro tentaríamos resolver problemas sobre logaritmos. Também contaríamos com a participação da professora Patrícia Rodrigues, ela é regente de Língua Portuguesa e atuou em debates, na redação do resumo do livro e na gravação de *podcasts*. Na oportunidade, também comunicamos aos estudantes que a professora Maria Luiza Favero, estaria iniciando a pesquisa de mestrado. Até aquele momento ninguém fez questionamentos.

Também avisamos que as aulas seriam gravadas para análises futuras. Os alunos portaram-se de modo muito positivo, não demonstrando nenhuma alteração de comportamento por ter a aula gravada.

O encontro foi projetado para problematizar o contexto, visando despertar o interesse dos estudantes, por isso, começamos explicando que em Língua Portuguesa já precisavam ler um livro por bimestre e que no sexto bimestre, tanto a professora de Matemática, quanto a professora de Língua Portuguesa, sugeriam a leitura da obra *Alva lebre lobo avermelhado: esta história é falsa* do escritor Tom Pollock. Os livros já estavam à disposição na biblioteca e os alunos deveriam ir até à escola pegar os exemplares. Vale comentar que os alunos já teriam que ir até à escola pegar as apostilas do sexto bimestre, então não demandaria nenhum trabalho extra essa tarefa.

Fizemos uma apresentação em *Power point* para expor os objetivos e as etapas do projeto, servindo como âncora da aprendizagem baseada em projetos (ABP), para que os alunos pudessem ter uma visão geral, ter voz nas etapas do projeto e saber o que buscar nas pesquisas e atividades.

Devido à falta de experiência com a ABP elaboramos a questão motriz, a partir da questão norteadora, sendo essa a pergunta que os discentes deveriam responder ao final do

projeto. Ficou assim: É possível aprender sobre logaritmos a partir do livro *Alva lebre, lobo avermelhado: esta história é falsa?*

Entretanto, os alunos precisam ter voz no projeto de ABP, por isso foi dado a eles o poder de decidir o título do nosso projeto que ficou assim: “Alva lebre, lobo avermelhado”, então foi assim que nos referimos ao mesmo. Eles decidiram os prazos para a leitura do livro, concordaram com nossa orientação de que para a aula de Matemática no dia 02/07 deveriam ler até a página 37 do livro. Porém, quando solicitamos a leitura do livro todo para a aula de Língua Portuguesa no dia 15/07, alguns alunos argumentaram que já haviam programado a leitura de clássicos da literatura brasileira para se preparar para o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) e incluir mais um livro nessa tarefa sobrecarregaria seu tempo.

Assim ficou decidido que seria facultativa a leitura do livro todo. Sinceramente, pensamos em contra-argumentar, mas precisávamos ser abertas e aceitar que em ABP nem tudo depende da professora, apesar de termos uma proposta, os alunos têm que participar do planejamento. Como a leitura do livro até a página 37 não comprometeria a finalização do projeto, pois até essa página já há muitas citações de assuntos matemáticos e temas polêmicos que podem gerar debates e depoimentos, aceitamos os argumentos deles.

A outra mudança da proposta inicial foi juntar a etapa quatro e cinco, assim os debates e depoimentos ocorreriam depois da leitura do livro.

Nesse momento, fizemos uma sinopse do enredo do livro e passamos um pequeno vídeo enaltecendo a obra *Alva lebre lobo avermelhado: esta história é falsa* com o objetivo de instigar a leitura do romance. O link do vídeo encontra-se no Apêndice D. Na sequência aplicamos um questionário diagnóstico para avaliar o conhecimento prévio dos alunos sobre o conteúdo de logaritmos. Para o questionário foi utilizada a ferramenta *Google forms*. Lembrando que o questionário completo, encontra-se no Apêndice B. Para finalizar lemos, explicamos e enviamos o termo de consentimento de uso de imagem. Uma cópia do termo de consentimento encontra-se no Apêndice C.

7.5.2 Segunda etapa

A segunda etapa consistia em ler até a página 37 do livro *Alva lebre lobo avermelhado: esta história é falsa* e pesquisar sobre terremotos. Como já foi apresentado no capítulo 7, esta atividade foi recomendada como “tarefa de casa”, encaminhada no dia 11/06 e socializada dia 02/07, ou seja, os alunos tiveram duas semanas para se preparem e pesquisarem.

Reforçamos que as pesquisas eram etapas importantes no protagonismo da construção do próprio conhecimento e formação de opiniões. Também sugerimos a visualização de dois vídeos, cujos links se encontram no Apêndice D.

Para manter os alunos motivados postamos mensagens de incentivo no *Whatsapp* ao longo dessas duas semanas. Enquanto aguardávamos a aula do dia 02/07, questionamo-nos em alguns momentos sobre o que pretendíamos com o projeto “Alva lebre lobo avermelhado”, no entanto, possuíamos um objetivo, pois, conforme as ideias desenvolvidas no Capítulo 2, é preciso contribuir de forma significativa para um aprendizado voltado à experiência do aluno.

No encontro do dia 02/07, perguntamos aos estudantes o que eles conheciam sobre os terremotos e se eles escutaram alguma notícia sobre o assunto. A partir deste questionamento, alguns alunos comentaram sobre o vídeo apresentado, expressando seus entendimentos sobre as causas que acarretam o abalo sísmico, e informações a respeito da forma de se medir um terremoto. Outros mencionaram que já houve terremotos no Brasil. Como educadoras, escutamos e intervimos em alguns momentos para esclarecer informações desconhecidas e expostas pelos estudantes, por exemplo, comparando maremoto com terremoto.

Naquele momento, existiam duas sensações distintas: a de professora envolvida no movimento da turma em aula e a de pesquisadora no encadeamento da pesquisa. Tivemos a preocupação, no que diz respeito a pesquisa, em articular estas informações da melhor forma possível, buscando trabalhar com as experiências dos estudantes, para sustentar um processo educativo participativo e voltado ao estudante. Como educadora, por mais estranho que pareça, a preocupação estava em como falar sobre todas essas informações e, inevitavelmente, tentávamos projetar isso convergindo aos logaritmos.

A seguir, temos alguns dos questionamentos:

Professora: E sobre a medida do terremoto, alguma informação?

E.F.: Existe uma escala de Richter!

A.B.: Tem um aparelho para medir!

Professora: Quem elaborou essa escala de magnitude?

G.D.: Richter, é uma escala de Richter!

M.S.: É uma escala que vai de 1 a 9.

Professora: A escala só vai de 1 a 9?

A.T.: Não, não tem limite de magnitude, o maior terremoto registrado foi de 9,5 graus no Chile ... e também existe a escala de Mercalli que mede de 1 a 12.

Professora: Sabiam que essa escala é uma escala logarítmica?

Turma: (Silêncio)

Professora: Vocês sabem o que é logaritmo?

Turma: (Silêncio)

A reconstrução do debate mostra que não iniciamos com o roteiro tradicional de uma aula de Matemática que implica em contas, números e fórmulas. Como afirma Dewey (1959, p. 135) “Durante a investigação, existe um momento em que a significação é apenas sugerida: temo-la em suspenso, como possibilidade, mais do que a aceitamos como realidade. Nessa transição, a significação é uma ideia.”. Dessa forma, acreditamos que os estudantes viram a situação como possibilidade de ser algo, porém longe de um significado verdadeiro para eles.

Poderíamos ter aproveitado o questionamento do aluno A.Q. para problematizar o contexto pretendido sobre logaritmo, mas preferimos formar expectativas de relacionar o livro com logaritmo. Como afirma Dewey (2010, p. 78) “É, portanto, tarefa do educador selecionar coisas que, no âmbito das experiências existentes, possuam a potencialidade de apresentar novos problemas que, ao estimular novas formas de observação e julgamento, ampliarão a área para experiências futuras.”

Desse modo, optamos por proporcionar a turma a integração do livro na construção do conceito de logaritmo, por isso, a iniciamos uma discussão sobre a obra *Alva lebre lobo avermelhado: esta história é falsa*. Todos os alunos haviam lido até a página proposta. Nesse momento obteve-se uma grande vitória com o projeto, porque o maior desafio do projeto era a leitura do livro.

Houve poucos comentários sobre o livro, até ficamos preocupados de não terem gostado da história, mas, tomamos cuidado para não dar *spoiler* e não revelar o desfecho do enredo antes do tempo. Então, a aluna A.T. comentou que leu o livro todo e gostou muito, que precisava muito falar conosco sobre o final do livro. Foi a melhor propaganda para incentivar os colegas a lerem a obra completa.

Nesse momento o aluno L.H. pediu como funciona o código de César, não entendeu essa parte. A pergunta do aluno nos surpreendeu, esperávamos falar dos temas matemáticos trazidos pelo livro apenas na quinta etapa, mas aproveitamos a curiosidade do aluno e saímos do cronograma. A transcrição do que foi explicado aos alunos está no Apêndice F.

7.5.3 Terceira Etapa

Observe o diálogo:

Professora: Outra situação descrita no livro foi a escala Claglada. Vocês lembram desse trecho do livro?

A.T.: O Peter e a Ingrid usavam para medir suas crises.

Professora: Eles comparavam as crises de ansiedade com terremotos. Por que será que faziam isso?

Turma: (Silêncio)

L.H.: As crises causam estragos na vida parecido com os estragos de um terremoto.
 C.F.: É uma brincadeira, Peter usa o humor para lidar com os próprios medos.

Nesse momento introduzimos a situação problema, que está representada na Figura 8:

Figura 7 – Situação problema apresentada aos alunos

O texto abaixo é um trecho do livro *Alva lebre lobo avermelhado: esta história é falsa* de Tom Pollock.

“Bem-vindo à Claglada. A Classificação Logarítmica Linear Ajustável para Graduação da Loucura Aleatória, Desvairada e Alucinada (Claglada) é calculada da seguinte forma:

$$GC \text{ (Grau de Cagada)} = \text{Log}_{10}(T) + \text{Log}_{10}(D) - \text{Log}_{10}(P)$$

Onde T representa o tempo que o episódio durou; D, o valor monetário ou sentimental de qualquer coisa ou pessoa que você tenha acidentalmente quebrado ou ateado fogo, e P, a proximidade em relação às pessoas que podem ajudar.

Se algum dia, a Claglada for adotada como procedimento científico padrão, não vamos deixar ninguém mudar a sigla. Como meu sobrenome é Blanckman, e o da Ingrid, Immargroenberg, poderíamos ter batizado de Big Claglada, mas acabamos decidindo que só Claglada era a alternativa mais classuda. Quando o seu próprio estilo de loucura te dá um soco na cara, a Claglada mede o grau de dificuldade para você sair da lona. A gente se baseou na escala Richter: tremores violentos, abalos sísmicos secundários e estragos. As crises de pânico são nossa forma específica de terremoto.”

Se considerarmos que Peter teve uma crise de 20 minutos, causando um prejuízo de R\$ 5.000,00 e a sua mãe estava por perto, então a proximidade de pessoas que podem ajudar é igual a 10, qual foi o grau da Claglada?

Fonte: A autora

Após dar um tempo para a tarefa, socializamos as respostas. Veja algumas das soluções apresentadas pelos alunos nas Figuras 9, 10 e 11. O registro das respostas foi proposto não apenas para análises futuras dos êxitos e dificuldades dos alunos, mas por consideramos que o registro auxilia no desenvolvimento da aprendizagem. Com diz Grandó e Moreira (2013) *apud* Lopes (2009) “o registro apresenta diversas contribuições para o processo de aprendizagem dos alunos, pois ele possibilita a construção de significados por parte do aluno”, pois os alunos podem expressar seu pensamento, suas descobertas e escrever de acordo com seus conhecimentos.

Figura 8 – Excerto da primeira tentativa de resolução da situação problema da aluna K.F.

$$GC = 20 + 5000 - 10$$

$$GC = 5.010$$

Fonte: Registro dos alunos

Figura 9 – Excerto da primeira tentativa de resolução da situação problema da aluna G.D.

$$GC = \log_{10}(T) + \log_{10}(D) - \log_{10}(P)$$

$$GC = 20 + 5000 - 10$$

$$GC = 10,2 + 9,7 - 10,$$

$$GC = 9,9$$

Fonte: Registro dos alunos

Figura 10 – Excerto da primeira tentativa de resolução da situação problema do aluno L.H.

RESPOSTA:

$$GC \text{ (grau da cagada)} = \log_{10}(T) + \log_{10}(D) - \log_{10}(P)$$

$$GC \text{ (grau da cagada)} = \log_{10} 20 + \log_{10} 5000 - \log_{10} 10$$

$$GC \text{ (grau da cagada)} = 2 + 5000 - 1$$

$$GC \text{ (grau da cagada)} = \boxed{501 \text{ grau}}$$

Fonte: Registro dos alunos

O mérito está na tentativa de encontrar uma solução ao problema. Como diz D'Ambrósio (2009, p. 76) “erros e acertos são extremamente importantes para motivar explicações”. Apesar de todos demonstrarem conhecimento matemático, ninguém acertou a resolução do problema. Observe que a sequência de passos é coerente, há domínio da representação semiótica e a identificação das variáveis ocorreu sem dificuldade, entretanto, apesar de os alunos terem noção do uso de modelos, pois substituíram as informações numéricas no lugar certo da fórmula, não souberam calcular os logaritmos. A dificuldade foi com o cálculo envolvendo logaritmo.

Com a exposição das soluções, já começávamos a planejar formas para discutir a resolução de logaritmo. Mas nessa fase inicial da aula ainda era necessário um processo de investigação para implementar a ABP, então para que os estudantes coletassem informações e

pudessem construir seu próprio conhecimento, solicitamos que realizassem uma pesquisa rápida na *internet*, de 10 (dez) minutos, sobre logaritmos.

Ao compartilharem suas descobertas, curiosa e inesperadamente, uma das alunas trouxe a informação de que os logaritmos surgiram para facilitar os cálculos. Usamos essa contribuição da estudante para fazer uma breve explanação sobre a história do logaritmo, ressaltando a afirmação feita por ela e citando algumas aplicações práticas do logaritmo como na escala Richter. Acompanhe no Apêndice M os detalhes sobre a história e as aplicações dos logaritmos.

Outro aluno indagou sobre quando iríamos fazer algum cálculo sobre logaritmo, porque não havia entendido como determinar logaritmos. Entendemos as indagações, dúvidas e inquietudes em torno de logaritmos, como uma procura por parte dos estudantes pelo significado e aplicação sobre os mesmos. Pensando neste fato, à luz das ideias de Dewey (2010), remetemos ao conceito de interesse. Para se interessar por algo, é preciso passar por uma experiência, em que o envolvimento em uma situação gera inquietude.

Formalizamos o conceito de logaritmo com aula expositiva. Omitiremos a explanação, porém toda formalização do conceito de logaritmo e demonstração de suas propriedades encontra-se no Apêndice M. Como já havíamos analisado o questionário diagnóstico aplicado na aula anterior, sabíamos haver deficiências no aprendizado de propriedades de potenciação e resolução de equações exponenciais usando a técnica de igualar as bases, então iniciamos a explicação revisando esses conceitos antes de formalizar o conceito de logaritmo.

Entretanto, para elaborar a resolução do logaritmo, houve um momento de improvisação, uma aluna pediu mais exemplos, que prontamente atendemos. Nos preocupamos de que pudesse estar automatizando as estratégias dos estudantes, visto que estávamos utilizando a expressão $\log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a$ como um modelo para a resolução de logaritmos. Não queríamos que a resolução de logaritmos ocorresse a partir da repetição de exercícios sem nenhum significado ou relação com outros assuntos.

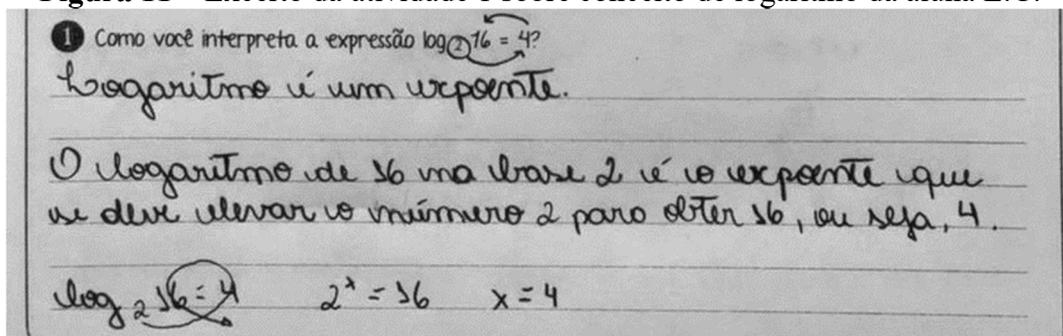
Tivemos a pretensão de trabalhar com significação, entendendo que o estudante deveria construir algo, ou seja, estratégias, relações, comparações, entre outras ações que o fizesse resolver as atividades. Disso decorreu a iniciativa de montar um roteiro de aprendizado, que se encontra no Apêndice D, para que os estudantes pudessem explorar as restrições do conceito de logaritmo, as propriedades operatórias e a escala logarítmica e assim entrar na fase de criação e desenvolvimento da ABP em que é necessário investigação e inovação.

A forma de organizar e trabalhar com as resoluções das atividades propostas no roteiro de aprendizado, foi fundamental, não só para dar respostas, como também subsidiar a ideia de

atribuir significados para o logaritmo. É importante esclarecer que o roteiro de estudo é nossa forma de aplicar uma *webquest* da ABP.

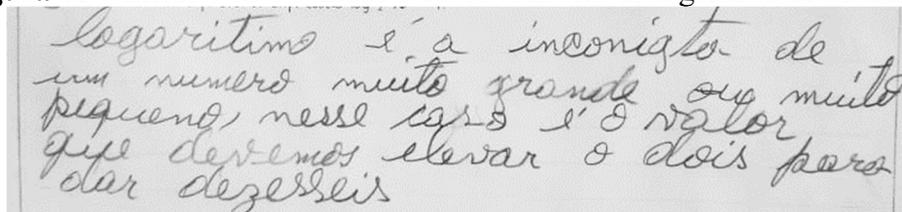
Observamos que os estudantes usaram estas representações como fórmulas para a resolução das questões. Isso expressa como os estudantes caracterizam um modelo, ou seja, uma fórmula para seguir. Mas também atribuíram significado ao conceito de logaritmo. Veja algumas respostas, nas Figuras 12, 13 e 14, dadas pelos alunos à pergunta: como você interpreta a expressão $\log_2 16 = 4$?

Figura 11 – Excerto da atividade 1 sobre conceito de logaritmo da aluna E.C.



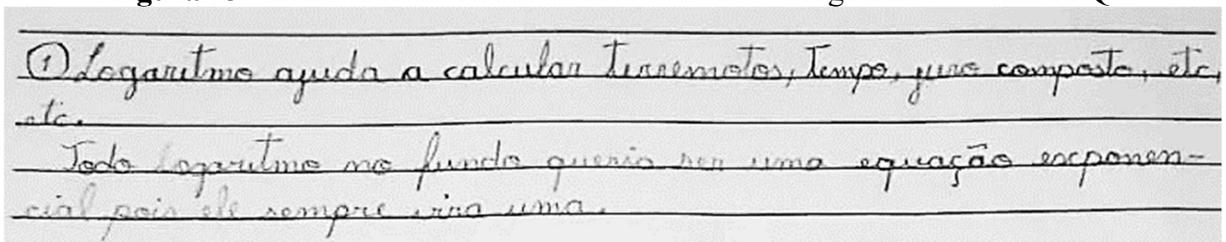
Fonte: Registro dos alunos

Figura 12 – Excerto da atividade 1 sobre conceito de logaritmo do aluno C.F.



Fonte: Registro dos alunos

Figura 13 – Excerto da atividade 1 sobre conceito de logaritmo do aluno A.Q.



Fonte: Registro dos alunos

Ao analisar estas respostas junto às reconstruções das discussões, observamos a presença do significado das exponenciais. Muito provável que, a aluna E.C., Figura 12, somente agora, estudando logaritmo, encontrou um significado para as exponenciais, se não, o seu uso como forma de operação logarítmica. A aluna teve a oportunidade de relacionar logaritmo e equação exponencial. O estudante C.F, Figura 13, também escreveu a respeito de conceitos das

exponenciais, além disso, o aluno A.Q., Figura 14, significou aos logaritmos a função de facilitador, ou seja, que se refere à abordagem histórica que desenvolvemos no início da aula. Percebemos que essas informações são significativas, os estudantes enunciaram uma ideia, evidenciando o significado para modelo organizado, baseado em relações.

Quanto a atividade 2, era para utilizar a definição de logaritmo e calcular o valor de x . Vide algumas respostas nas Figuras 15 e 16. Como era de se esperar, alguns alunos não conseguiram desenvolver adequadamente a operação, os erros cometidos foram acarretados por falhas no desenvolvimento matemático das equações exponenciais e uso de propriedades de potenciação. Para corrigir falhas, voltamos às correções usando o que os estudantes elaboraram para a resolução de logaritmo.

Figura 14 – Excerto da atividade 2 sobre conceito de logaritmo da aluna A.T.

2 Utilizando a definição de logaritmo, calcule o valor de x .

a) $\log_7 49 = x$ $49|7$
 $7^x = 49$ $\rightarrow 7/7^2$
 $7^x = 7^2$
 $x = 2$

b) $\log_x 25 = 2$ $25|5$
 $x^2 = 25$ $5|5/5$
 $x^2 = 5^2$
 $x = 5$

c) $\log_4 x = -3$
 $4^{-3} = x$
 $x = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}$

Fonte: Registro dos alunos

Figura 15 – Excerto da atividade 2 sobre conceito de logaritmo do aluno A.Q.

2. a) $\log_7 49 = x$ b) $\log_x 25 = 2$

$7^x = 49$ $x^2 = 25$
 $7^x = 7^2$ $x^2 = 5^2$
 $x = 2$ $x = 5$

c) $\log_4 x = -3$
 $4^{-3} = x$
 $\frac{1}{4^3} = x$ d) $0,25 = x$
 $\frac{1}{4} = x$

Fonte: Registro dos alunos

No desenvolvimento deste encontro, apresentamos a condição de existência para logaritmo. O objetivo era desenvolver, com os estudantes, as possibilidades numéricas para as variáveis utilizadas por eles na resolução de logaritmo. Acompanhe o diálogo:

Professora: Tendo a representação que vocês construíram, quais são os valores que podemos atribuir para as variáveis a, b e x?

Turma: (silêncio)

C.F.: Professora, como assim?

Professora: Se o valor de a for diminuindo 0, -1, -2, e assim sucessivamente, o que acontece com o logaritmo?

Para que os alunos pudessem responder essa questão, efetuaram as atividades 3 e 4, onde tinham que calcular logaritmos nos quais o logaritmando não era positivo. Veja algumas respostas nas Figuras 17, 18 e 19:

Figura 16 – Excerto das atividades 3 e 4 sobre conceito de logaritmo do aluno A.Q.

③ a) $\log_2 (-8) = x$
 $2^x = -8$
 $2^x = (-2)^3$ ① x não existe.
 (nenhum número elevado ao 2 dá -8)

b) $\log_3 0 = x$
 $3^x = 0$ ① x não existe.
 (nenhum número elevado ao 3 dá 0)

Fonte: Registro dos alunos

Figura 17 – Excerto das atividades 3 e 4 sobre conceito de logaritmo da aluna J.S.

a) $\log_2 (-8) = x$ b) $\log_3 0 = x$
 $2^x = -8$ $3^x = 0$
 $2^x = (-2)^3$ $3 \neq 0$
 $2 \neq -2$

① Não sempre existe logaritmo apenas números positivos no logaritmo tem número real.
 No letra a o número da base é positivo e todas potências de número positivo são dos resultados positivos.
 No letra b para dos resultados 0 tem que seja base 0.

Fonte: Registro dos alunos

Figura 18 – Excerto das atividades 3 e 4 sobre conceito de logaritmo da aluna E.C.

3 Agora, considere os logaritmos, nos quais o logaritmando não é positivo, e use definição para tentar calcular o valor de x :

a) $\log_2(-8) = x$

$$2^x = (-8)$$

$$2^x = (-2^3)$$

$$x = 3$$

$$2^3 = -8 \quad 2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8 \rightarrow x = \cancel{3}$$

b) $\log_3 0 = x$

$$3^x = 0$$

$$x = \cancel{0}$$

4 Que conclusão você chega observando os logaritmos da questão anterior?

Nem sempre existe logaritmo, apenas números positivos no logaritmando tem logaritmo real.

Fonte: Registro dos alunos

Mesmo com uso da palavra logaritmando no enunciado da questão 3 houve questionamento sobre como se chama o “número maior” do logaritmo. A maioria montou e equação exponencial e não fez mais nada, deixou em branco por não saber como continuar os cálculos. Quando pediam ajuda tentávamos orientá-los. Segue a transcrição de um diálogo:

Professora: Vamos lembrar das propriedades da potenciação. Quando a base é positiva, o resultado é sempre positivo. Concorda?

L.H.: Sim.

Professora: Repare no item a, repare que a base é positiva. Então, é possível encontrar um expoente que elevado a base 2, dê um resultado negativo?

L.H.: Como assim?

Professora: Ao calcularmos 2^2 , 2^1 , 2^0 , 2^{-1} , 2^{-2} , algum resultado fica negativo?

L.H.: Não.

Professora: É possível resolver essa equação? É possível o logaritmando ser negativo?

L.H.: Não.

Professora: Por quê?

L.H.: O valor do logaritmando seria sempre positivo com base positiva.

Professora: Temos então uma condição para o logaritmando. Qual é?

L.H.: O logaritmando tem que ser positivo.

L.H.: Se a base fosse negativa aí o expoente teria que ser número ímpar, né?

Professora: Se a base pudesse ser negativa, sim, com expoente ímpar teríamos solução.

Professora: E para o caso do logaritmando ser zero, será que encontramos o valor do logaritmo? Tente fazer a letra b. aguardo sua resposta.

L.H.: Três elevado a qualquer expoente nunca vai dar zero

Professora: e a base fosse 5,6 ou 7, o logaritmando poderia ser zero?

L.H.: Não, pra dar zero a base teria que ser zero

Professora: Isso mesmo! Note que não é possível determinar o logaritmo quando o logaritmando é zero. Temos então, outra condição para o logaritmando. Qual é?

L.H.: O logaritmando não pode ser zero.

Vale ressaltar que estamos trabalhando no conjunto dos números reais e Lima (2012, p. 205) demonstra que números reais negativos tem logaritmo complexo. Omitiremos a demonstração, mas pode ser encontrada no livro “Meu professor de matemática e outras histórias” de Elon Lages Lima.

Nas atividades 5 e 6 solicitamos que calculassem logaritmos com base negativa, com base zero e com base 1 e depois generalizassem o resultado. Com base nas respostas das atividades anteriores a resolução destas perguntas foi mais rápida e a generalização mais direta, acredita-se que ao responder às questões 3 e 4 perceberam o que deveriam observar nas questões 5 e 6. Acompanhe as resoluções nas Figuras 20 e 21.

Figura 19 – Excerto das atividades 5 e 6 sobre conceito de logaritmo da aluna E.C.

5) Considere agora logaritmos com base negativa, 0 e 1, tente calcular o valor de x:

a) $\log_{-2} 8 = x$ b) $\log_0 7 = x$ c) $\log_1 5 = x$

~~A~~ ~~A~~ ~~A~~

Não é possível resolver porque a base tem que ser maior que 0 e diferente de 1.

Fonte: Registro dos alunos

Figura 20 – Excerto das atividades 5 e 6 sobre conceito de logaritmo do aluno L.H.

5) Considere agora logaritmos com base negativa, 0 e 1, tente calcular o valor de x:

a) $\log_{-2} 8 = x$ b) $\log_0 7 = x$ c) $\log_1 5 = x$

$(-2)^x = 8$ $0^x = 7$ $1^x = 5$

$(-2)^x = 2^3$ $0 \neq 7$ $1 \neq 5$

$-2 \neq 2$

6) Analisando os resultados da questão anterior, quais suas conclusões?

Nem sempre existe logaritmo, a base deve ser um número positivo e diferente de 1.

Na primeira conta a base é negativa então nem sempre tem solução porque pra dá resultado positivo pra o expoente for par. Na letra b zero elevado a qualquer expoente dá zero e não 7.

Na letra c um elevado a qualquer expoente dá 1 e não 5

Propriedades de logaritmos

Fonte: Registro dos alunos

Juntamente com os alunos, encontramos a condição de existência, porém questionamos e refletimos até que ponto foi significativa essa construção, pois não houve rigor matemático, apenas fizemos um exemplo e concluímos que a situação era suficiente para generalizar. Caso seja necessário, a demonstração correta encontra-se no capítulo 6 deste trabalho.

Além disso, a resolução dos exercícios 4 e 6 exigiu domínio de conceitos, concentração e interpretação por parte dos estudantes. Através das experiências de experimentação de alguns exemplos nos exercícios 3 e 5, os alunos tiveram a oportunidade de criar um conjunto de ideias e hipóteses que deram sustentação para a compreensão dos conceitos matemáticos.

Ainda na aula, discutimos sobre o porquê de não ter bases negativas ou de valor 1 (um). Com base na discussão como professora em aula e sob as concepções de educação de Dewey (2010), percebemos que não foi algo transmitido, foi algo construído e exigiu diálogo, atenção e reflexão. A análise mostra que os estudantes tiveram uma participação ativa, pois eles foram imersos no processo de experimentação. Além disso, foi significativa o compartilhamento de ideias com os estudantes ao construir uma definição com eles.

No diálogo sobre logaritmando e base do logaritmo, pudemos observar que os estudantes usam uma linguagem simples, manifestando o seu entendimento sobre a situação, como, por exemplo, ao dizer que “são números positivos” ou “que não pode ser um”, expressões que poderiam ser substituídas $b > 0$ e $b \neq 1$. O importante não é dificuldade dos alunos em extrair representações semióticas, mas o fato de terem conseguido compreender o significado dessas palavras.

Ao fim dessa construção de significado para logaritmo, reiteramos o que havíamos construído ao longo deste encontro, usando uma linguagem mais precisa, de acordo com as variáveis atribuídas por eles:

- Base: $b > 0$ e $b \neq 1$;
- Logaritmando: $a > 0$;
- Logaritmo: $x \in \mathbb{R}$.

Dando sequência a aula começamos a explorar as propriedades operatórias de logaritmos. Na primeira atividade dessa seção os alunos deveriam calcular a soma e o produto de alguns logaritmos. Na Figura 22 vemos uma representação das respostas dados pelos alunos. Observe que na resolução dos itens d e h, a aluna omitiu o símbolo de logaritmo, isso não caracteriza erro, mas apenas uma desatenção na hora de transcrever a expressão.

Figura 21 – Excerto da atividade 1 propriedades operatórias da aluna E.C.

1 Resolva as questões abaixo:

a) $\log_2 8 = 3$	a) $2^x = 8$ $2^x = 2^3$ $x = 3$	b) $2^x = 4$ $2^x = 2^2$ $x = 2$	c) $3 + 2 = 5$ $x = 5$	d) $2(3^2) = x$ $2^x = 3^2$ $2^x = 2^5$ $x = 5$
b) $\log_2 4 = 2$				
c) $\log_2 8 + \log_2 4 = 5$				
d) $\log_2 (8 \cdot 4) = 5$				

e) $\log_3 9 = 2$	e) $3^x = 9$ $3^x = 3^2$ $x = 2$	f) $3^x = 81$ $3^x = 3^4$ $x = 4$	g) $2 + 4 = 6$ $x = 6$	h) $3(729) = x$ $3^x = 3^6$ $x = 6$
f) $\log_3 81 = 4$				
g) $\log_3 9 + \log_3 81 = 6$				
h) $\log_3 (9 \cdot 81) = 6$				

Fonte: Registro dos alunos

Após os cálculos com os logaritmos, chegou a hora de analisar os resultados e generalizá-los. Generalização é a ação de considerar para todos os casos uma propriedade observada em alguns casos particulares. Novamente, não elaboraremos uma demonstração formal das propriedades operatórias de logaritmos, vamos apenas observar alguns casos particulares e considerar as propriedades como verdadeiras para todos os casos, o que é aceitável para esta etapa escolar dos alunos e corresponde com os objetivos de aprendizado destas questões. A demonstração correta dessas propriedades operatórias encontra-se no Apêndice M.

Veja algumas respostas nas Figuras 23, 24 e 25:

Figura 22 – Excerto da atividade 2 propriedades operatórias da aluna A.T.

2 Vocês repararam que o resultado do item d é igual ao resultado do item c, e que o resultado do item g é igual ao item h? Tente fazer uma generalização.

Sempre que tiver a mesma base e os mesmos logaritmandos os resultados serão iguais

Fonte: Registro dos alunos

Figura 23 – Excerto da atividade 2 propriedades operatórias da aluna A.B.

2 O logaritmo de uma multiplicação é igual a soma dos logaritmos

Fonte: Registro dos alunos

Figura 24 – Excerto da atividade 2 propriedades operatórias da aluna E.C.

$$\log_b(8.4) = \log_b 8 + \log_b 4$$

$$\log_b(a.c) = \log_b a + \log_b C$$

Fonte: Registro dos alunos

Ao analisar a figura 25 vemos a associação que a aluna E.C. fez com o exemplo atribuindo a mesma letra aos números iguais. Também demonstra que para ocorrer a confirmação da hipótese considerada (o logaritmo do produto é igual a soma entre os logaritmos) houve a necessidade de utilizar uma representação expressa por um cálculo para justificar o raciocínio. A elaboração desse esquema não é tarefa trivial, pois deve-se extrair da representação os elementos necessários para elaborar a generalização. Isso demonstra a capacidade da aluna em converter as informações dadas em estruturas organizadas e matematicamente corretas. Essa representação acabou servindo como referência para os outros alunos nos exercícios que se seguiram.

Ao questionarmos se valia para qualquer logaritmo, de um logaritmando expresso como produto, os estudantes acreditaram que sim, mas ainda permanecia uma dúvida, mas pelos juízos tomados em casos particulares, estabelecemos certa confiança na veracidade da propriedade. De acordo com Iezzi et al. (2004, p. 63) “Em qualquer base a ($0 < a \neq 1$), o logaritmo do produto de tais fatores reais positivos, é igual à soma dos logaritmos dos fatores.”

$$\text{Se } 0 < a \neq 1, b > 0 \text{ e } c > 0 \rightarrow \log_a(b.c) = \log_a b + \log_a c$$

A demonstração na íntegra encontra-se no Apêndice M deste trabalho. De tudo, interpretamos que os benefícios, como consequências destas generalizações que realizamos com os alunos, foi adequada ao nível escolar deles e serão significativamente importantes para futuras experiências, seja por uma experiência com inclinações intelectuais ou por experiências que usam a investigação como meio de associações para a generalização.

A partir disto, fizemos o mesmo desenvolvimento para logaritmo de um quociente, que foi mais perceptível e sem alongar discussões, devido à experiência vivenciada em logaritmo de um produto. As Figuras 26 e 27, abaixo, sintetizam bem as respostas dadas pelos alunos:

Figura 25 – Excerto das atividades 3 e 4 propriedades operatórias do aluno N.G.

c) $\log_{10}(10000)$
 $10^x = 10000$
 $10^x = 10^4$
 $x = 4$

b) $\log_{10}(10)$
 $10^x = 10$
 $x = 1$

d) $\log_{10}(10000) = 10$
 $\log_{10}(1000)$
 $10^x = 1000$
 $10^x = 10^3$
 $x = 3$

e) $\log_3(243)$
 $3^x = 243$
 $3^x = 3^5$
 $x = 5$

f) $\log_3(27)$
 $3^x = 27$
 $3^x = 3^3$
 $x = 3$

g) $\log_3(243) - \log_3(27)$
 $5 - 3 = 2$

h) $\log_3(243 : 27)$
 $\log_3(9)$
 $3^x = 9$
 $3^x = 3^2$
 $x = 2$

④ O resultado da letra d é igual ao da letra c. E o resultado da letra g é igual ao da letra h. O logaritmo de uma divisão é igual a subtração de um logaritmo pelo outro. A conta da letra c foi bem mais fácil que da letra d.

$\log_3(243 : 27) = \log_3 243 - \log_3 27$

$\log_x(a : b) = \log_x a - \log_x b$

Fonte: Registro dos alunos

Figura 26 – Excerto da atividade 4 propriedades operatórias da aluna E.C.

④ O que você observa na questão anterior? É possível generalizar esses resultados?

Observa-se que a letra C e D tiveram os mesmos resultados e letra G e H também, e sim, é possível generalizar esses resultados pois não é coincidência.

Fonte: Registro dos alunos

A resolução do aluno N.G., Figura 26, chamou atenção pela organização e clareza na exposição das ideias e demonstra que entendeu bem as discussões anteriores. Destaca-se ainda a necessidade desse aluno, e de outros na turma, em recorrer à equação exponencial $10^x = 10$ para calcular o valor $\log_{10}10$. Como não exploramos as consequências da definição de logaritmos (ver Apêndice M) não foi intuitivo que $\log_{10}10 = 1$.

Para desenvolver a propriedade da potência também usamos exemplos para compor nossas experimentações e conseqüente generalização. Seguem algumas das estratégias utilizadas pelos alunos para calcular os logaritmos. A aluna E.F., na Figura 28, considerou a potência como multiplicação de fatores iguais e depois transformou a multiplicação em soma

de logaritmos. Já o aluno L.H., Figura 29, calculou a potência e depois usou o conceito de logaritmo para escrever a equação exponencial correspondente e poder calcular o logaritmo.

Figura 27 – Excerto das atividades 5 e 6 propriedades operatórias da aluna E.F.

* ⑤ Agora calcule os logaritmos abaixo:
 a) $\log_5 25 = 2$
 b) $\log_5 (25)^2 = \log_5 25 \cdot 25 = \log_5 25 + \log_5 25 = 2 + 2 = 4$
 c) $2 \cdot \log_5 25 = 2 \cdot 2 = 4$
 d) $\log_2 32 = 5$
 e) $\log_2 (32)^3 = \log_2 32 \cdot 32 \cdot 32 = \log_2 32 + \log_2 32 + \log_2 32 = 5 + 5 + 5 = 15$
 f) $3 \cdot \log_2 32 = 3 \cdot 5 = 15$

Fonte: Registro dos alunos

Figura 28 – Excerto das atividades 5 e 6 propriedades operatórias do aluno L.H.

a) $\log_5 25 = 2$
 b) $\log_5 (25)^2 = \log_5 625 = 4$
 c) $2 \cdot \log_5 25 = 2 \cdot 2 = 4$
 d) $\log_2 32 = 5$
 e) $\log_2 (32)^3 = \log_2 32 \cdot 32 \cdot 32 = 15$
 f) $3 \cdot \log_2 32 = 3 \cdot 5 = 15$

a) $\log_5 25 = x$
 $5^x = 25$
 $5^x = 5^2$
 $x = 5$

b) $\log_5 625 = x$
 $5^x = 625$
 $5^x = 5^4$
 $x = 4$

d) $\log_2 32 = x$
 $2^x = 32$
 $2^x = 2^5$
 $x = 5$

c) $\log_2 32 \cdot 32 \cdot 32 = x$
 $2^x = 32 \cdot 32 \cdot 32$
 $2^x = 2^{15}$
 $x = 15$

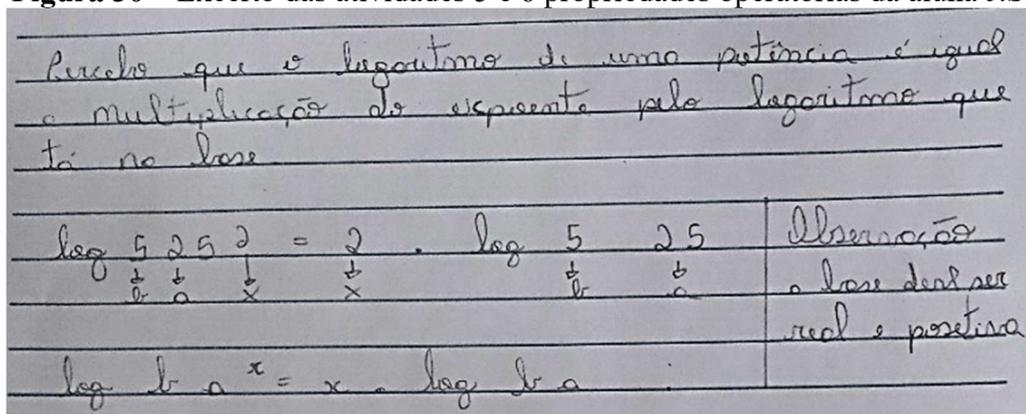
Fonte: Registro dos alunos

A seguir temos dois fragmentos, nas Figuras 30 e 31, contendo a generalização dos alunos antes e depois das discussões, respectivamente:

Figura 29 – Excerto das atividades 5 e 6 propriedades operatórias da aluna E.F.

⑥ Analizando os resultados da questão anterior o que você percebe? Tente generalizar os resultados.
 O resultado da letra b e da letra c são iguais e foi muito fácil fazer a conta do jeito da c. O resultado da letra e e da f também são iguais e também foi muito mais rápido de fazer a conta na letra f.

Fonte: Registro dos alunos

Figura 30 – Excerto das atividades 5 e 6 propriedades operatórias da aluna J.S.

Fonte: Registro dos alunos

Durante as discussões sobre as propriedades operatórias de logaritmos, houve uma pergunta interessante sobre números negativos. Acompanhe a transcrição do diálogo:

Professora: Verificada a igualdade?

Turma: Sim.

Professora: Será que dá certo para outros exemplos?

J.F.: Acho que sim.

Professora: Escolham outros exemplos.

Turma: Logaritmo de 7 e 10.

A.T.: A não professora... faz com negativo!

Professora: Ok. Escolhe um.

A.T.: Pode ser o -1.

Professora: Primeiro o logaritmando não pode ser negativo, já vimos isso. Mas podemos ter a seguinte situação:

$$\begin{aligned} \log(10^{-1} \cdot 10^8) &= \log 10^{-1} + \log 10^8 \\ \log(10^7) &= -1 + 8 \\ 7 &= 7 \end{aligned}$$

Professora: Então, a propriedade da potência vale pra todos?

Turma: Sim.

Professora: Então temos uma propriedade.

Essa sequência de atividades do roteiro de aprendizagem tinha o objetivo de fazer os alunos explorarem algumas contas e para perceber regularidades nas respostas, dessa maneira os alunos conseguiriam construir o próprio conhecimento acerca das propriedades operatórias de logaritmos. Assim cumprimos o nosso papel de confrontar o aluno com situações diferenciadas que propiciam a formulação de respostas próprias, como articula D'Ambrósio (2009, p. 80) “o novo papel do professor é de gerenciar, de facilitar o processo de aprendizagem e, naturalmente, de interagir com o aluno na produção crítica de novos conhecimentos”.

As construções que fizemos tiveram um nível de exigência significativa no que se refere à concentração dos estudantes, a participação, empenho, entendimento e conhecimento em relação a outros conceitos matemáticos. As propriedades que desenvolvemos até o momento,

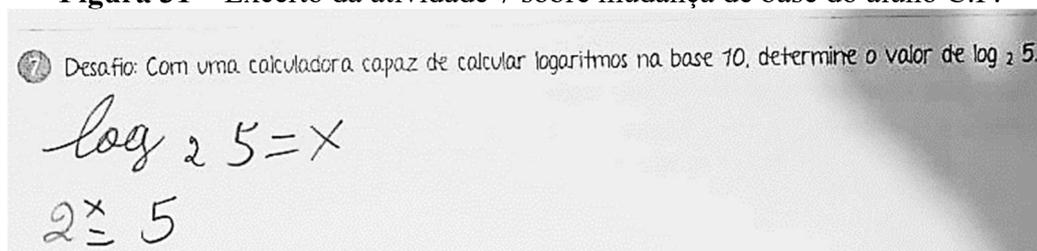
nos proporcionaram experiências que sempre nos farão refletir e amenizar as dificuldades que podem existir em um processo de ensino e aprendizagem.

Antes desta experiência, não percebíamos a real dificuldade que existe em operacionalizar as propriedades logarítmicas. Este processo de discutir e desenvolver as propriedades viabilizou essa reflexão. Melhor que a percepção de nossa prática foi observar na resolução da situação problema que parte dos alunos utilizaram as propriedades para resolver o exercício, ou seja, fizeram uso daquilo que eles desenvolveram na resolução das atividades. Isso difere de algo que é imposto para ser usado. Em síntese, sentimos satisfação com as atividades, devido às conquistas e à participação da turma no desenvolvimento das propriedades.

O momento de socialização das respostas foi fundamental, com vários alunos expondo seus resultados, pois houve confronto das ideias e possibilitou aos alunos organizar sua aprendizagem, rever as possibilidades, estudar casos não pensados ainda e até reavaliar suas ideias caso fosse necessário e assim conseguir se apropriar dos conceitos matemáticos envolvidos.

Na resolução da atividade sobre mudança de base os alunos sentiram muita dificuldade, alguns não fizeram, outros apenas iniciaram a resposta usando a definição de logaritmo para montar uma equação exponencial, mas como não deu para igualar as bases a resolução ficou incompleta. Note como a resolução ficou incompleta na Figura 32.

Figura 31 – Excerto da atividade 7 sobre mudança de base do aluno C.F.



Fonte: Registro dos alunos

Nesse ponto recebemos vários pedidos de ajuda.

C.F.: Faz o que agora?

Professora: Aplica logaritmo dos dois lados da equação.

C.F.: Como assim professora?

Como vários alunos tiveram a mesma dificuldade, fizemos a resolução com eles.

$$\log_2 5 = x$$

$$2^x = 5$$

$$\log 2^x = \log 5$$

$$x \cdot \log 2 = \log 5$$

Considerando $\log 2 = 0,30$ e $\log 5 = 0,69$, teremos:

$$x \cdot 0,30 = 0,69$$

$$x = \frac{0,69}{0,30}$$

$$x = 2,3$$

Apresentamos uma estratégia de solução que eles ainda não conheciam. É claro que dominavam a resolução de equação aplicando a mesma operação nos dois lados da equação, mas nunca empregaram esse conceito ao logaritmo. Aqui os alunos viram o logaritmo como uma operação matemática.

Após as considerações acerca da resolução da questão 7, os alunos fizeram uma generalização. Encontramos exemplos dessa generalização nas Figuras 33 e 34.

Figura 32 – Excerto da atividade 8 sobre mudança de base da aluna I.C.

8 - Começamos com logaritmo de 5 na base 2 e terminamos com logaritmo de 5 na base 10 dividido por logaritmo de 2 na base 10, então se tivermos logaritmo de a na base b faz logaritmo de b na nova base dividido por logaritmo de b na nova base

Fonte: Registro dos alunos

Figura 33 – Excerto da atividade 8 sobre mudança de base da aluna A.F.

$$7) \log_2 5 = \frac{\log_{10} 5}{\log_{10} 2} \rightarrow \log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$$

Fonte: Registro dos alunos

Os alunos também precisaram de dicas e orientação para generalizar a propriedade da mudança de base. Destacamos que a compreensão desse tipo de raciocínio envolve a combinação de vários conceitos e teoremas, onde a conversão e tratamento da informação ocorre depois da formação de algumas representações semióticas sobre o assunto.

Aprender e compreender a situação vai muito além de resolver uma equação ou um exercício qualquer. Implica o quanto você se relaciona conscientemente com a situação em questão, possibilitando atribuir significados. Como pesquisadores, poderíamos até mesmo não alcançar nosso objetivo de pesquisa, porém, os diálogos e as generalizações que os alunos elaboraram forneceram indícios significativos para observarmos a relação entre estudante e conteúdo de forma diferenciada.

A construção dessas propriedades foi satisfatória, tendo em vista o conceito de educação que apresentamos. Afinal, não poderíamos almejar resultado diferente disso, levando em conta que os estudantes não figuraram o papel de apenas ouvintes nesse processo, mas, sim, participaram significativamente na construção de ideias sobre propriedades operatórias de logaritmo e mudança de base.

Também percebemos o quanto somos penalizados com apenas duas horas de aula, posto que se torna inviável a abordagem sobre as propriedades da potência, produto e quociente para logaritmos com tão pouco tempo. As demais atividades do roteiro de aprendizagem foram além do horário previsto para a aula.

Em relação à escala logarítmica iniciamos a discussão lembrando a pesquisa que os alunos conduziram, na segunda etapa do projeto, sobre os terremotos, para então abordar o modelo de Richter (escala) visando o uso da escala logarítmica.

Alguns questionamentos e dúvidas dos estudantes estão exemplificados:

Professora: Quais são os valores que representam a magnitude na escala Richter?

M.S.: São os valores da reta: 1, 2, 3, 4!

Professora: Existe magnitude maior que 9?

G.D.: Sim, quanto maior o terremoto, maior a magnitude.

Professora: Ok, então eu pergunto, existe magnitude negativa?

Turma: (silêncio)

Professora: Pessoal, como pesquisamos, e vocês trouxeram que a escala de Richter é uma escala logarítmica, então os logaritmos nessa escala estão representando que valores?

A.T.: O valor da magnitude!

A.Q.: É o valor de x !

Professora: Então, se o resultado do logaritmo é a magnitude existe magnitude negativa?

Turma: (silêncio)

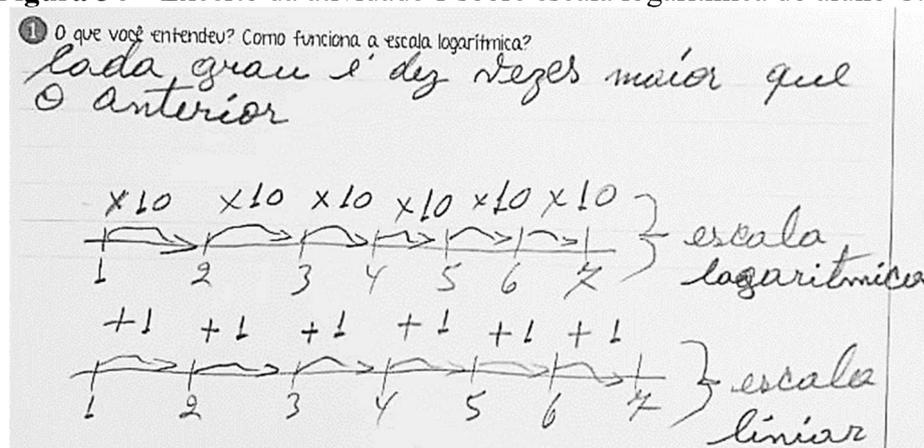
G.D.: Sim, existe.

Para entender o que é uma escala logarítmica foram sugeridos dois vídeos, veja Apêndice D, que os alunos assistiram. Um dos alunos da turma chamou mais a atenção. Este possuía significativas dificuldades em Matemática e pouco interesse em participar da aula. Porém, ao responder à pergunta sobre o que entenderam sobre escala logarítmica, ele prontamente mandou foto com informações sobre essa escala, observe a Figura 35. Durante os

questionamentos sobre a medida de um sismo, esse aluno manifestou a ideia de que: de um pulo para o outro na escala, vale 10 vezes mais que antes.

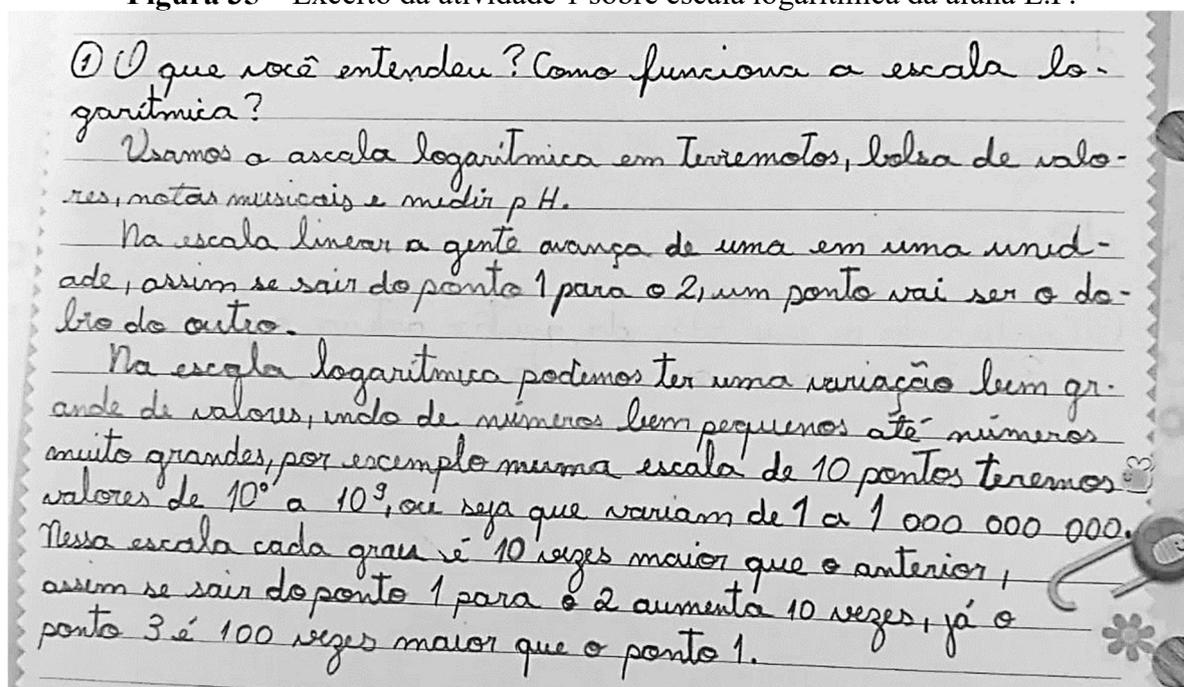
De maneira geral, todos os alunos apresentaram um entendimento satisfatório sobre o que é uma escala logarítmica, com destaque para a aluna E.F., Figura 36, ela apresentou uma resposta bem detalhada e mostra a diferença entre a escala linear e a escala logarítmica.

Figura 34 – Excerto da atividade 1 sobre escala logarítmica do aluno C.F.



Fonte: Registro dos alunos

Figura 35 – Excerto da atividade 1 sobre escala logarítmica da aluna E.F.

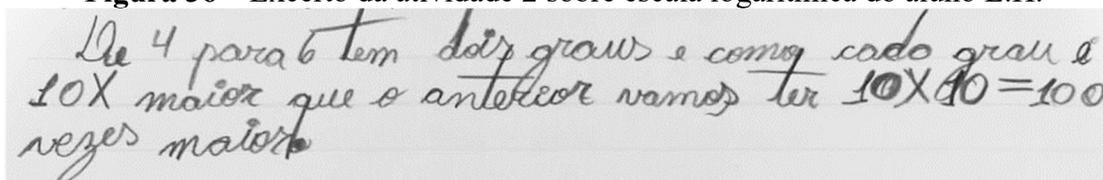


Fonte: Registro dos alunos

As próximas duas perguntas não tinham muito a contribuir com a aula de Matemática, tinham apenas o objetivo de fazer uma ponte entre o assunto de terremoto com o livro *Alva*

lebre lobo avermelhado: esta história é falsa. A intenção da pergunta 2 era fazer uma associação da magnitude dos terremotos com a magnitude das crises de ansiedade, sabendo que Peter teve uma crise de magnitude 4 e Ingrid 6, a crise de Ingrid foi quantas vezes maior que a crise de Peter. Nas Figuras 37 e 38 vemos algumas das respostas dadas para essa pergunta.

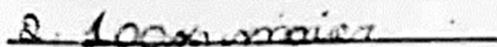
Figura 36 – Excerto da atividade 2 sobre escala logarítmica do aluno L.H.



De 4 para 6 tem dois graus e como cada grau é 10x maior que o anterior vamos ter $10 \times 10 = 100$ vezes maior.

Fonte: Registro dos alunos

Figura 37 – Excerto da atividade 2 sobre escala logarítmica da aluna E.H.

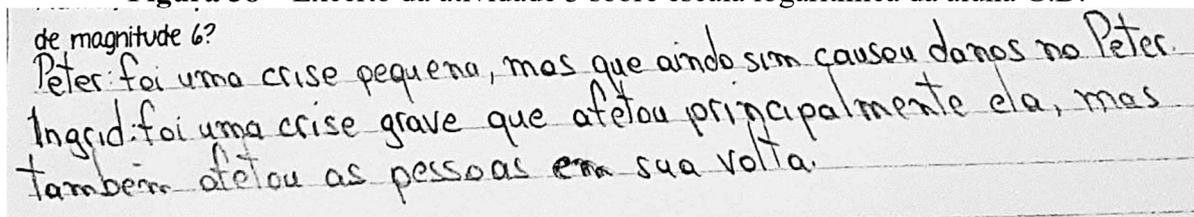


100x maior

Fonte: Registro dos alunos

Já na pergunta 3 os alunos teriam que associar os estragos das crises na escala Claglada com os estragos causados por terremotos na escala Richter e interpretar o significado de uma de magnitude 4 e de uma de magnitude 6. As figuras 39, 40 e 41 contêm respostas dadas para a pergunta 3.

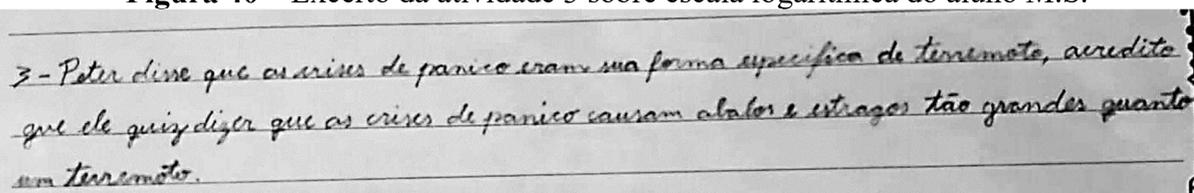
Figura 38 – Excerto da atividade 3 sobre escala logarítmica da aluna G.D.



de magnitude 6?
Peter: foi uma crise pequena, mas que ainda sim causou danos no Peter.
Ingrid: foi uma crise grave que afetou principalmente ela, mas também afetou as pessoas em sua volta.

Fonte: Registro dos alunos

Figura 40 – Excerto da atividade 3 sobre escala logarítmica do aluno M.S.



3 - Peter disse que as crises de pânico eram uma forma específica de terremoto, acredito que ele quis dizer que as crises de pânico causam abalos e estragos tão grandes quanto um terremoto.

Fonte: Registro dos alunos

Figura 39 – Excerto da atividade 3 sobre escala logarítmica do aluno L.H.

de magnitude 6?
 Com terremotos de intensidade 4 frequentemente não se sente, mas pode causar pequenos danos, então se Peter teve uma crise de intensidade 4 os outros não, então não nada, mas para o Peter teve pequenos danos como martelar um pedaço de porcelana e bagunçar a cozinha. Nos terremotos de intensidade 6 tem pequenos danos imprevisíveis então a crise da Inglaterra foi bem forte e afetou as coisas a sua volta.

Fonte: Registro dos alunos

Os alunos souberam classificar a intensidade das crises de pânico conforme o que foi estabelecido pela escala Richter. Veja figura da questão 2 sobre escala logarítmica no Apêndice E. Para relacionar a intensidade das crises de pânico com a intensidade de um terremoto, percebemos que já estava formado o conceito de ordenação pelos alunos, pois eles deveriam classificar as crises observando a reta que contém as magnitudes dos terremotos, que estão em ordem crescente.

Nesse ponto, voltamos a situação problema, que é uma situação didática em que se propõe ao aluno uma tarefa que ele não pode realizar sem efetuar uma aprendizagem. Nesse sentido, Meirieu aponta as principais características que a situação problema deve apresentar:

Propõe-se aos sujeitos a realização de uma tarefa. A tarefa só pode ser executada se o obstáculo for transposto. A transposição do obstáculo deve representar um patamar no desenvolvimento cognitivo do sujeito. O obstáculo deve apresentar um sistema de restrições a fim de que os sujeitos não executem o projeto sem enfrentar os obstáculos. Deve ser fornecido aos sujeitos um sistema de recursos (materiais e instruções) para que eles possam vencer o obstáculo. (MEIRIEU, 1998, p.173)

Ou seja, toda situação problema deve apresentar: um contexto (e este deve ser interessante para o estudante); um obstáculo (que precisa ser transposto, sendo este movimento de superação o real objetivo da situação problema); um sistema de restrição (instalado na própria situação problema, para evitar que respostas que não superem o obstáculo sejam fornecidas); e, por fim, um sistema de recursos, que consiste em algum material físico ou digital, instruções-alvo ou atividades dialógicas em sala de aula), que forneçam as condições para construção de conhecimento e resolução da situação problema.

Como já havíamos passado por essas etapas da resolução de uma situação problema, pois dava para perceber notoriamente que os alunos já entendiam o conceito de logaritmo e suas

restrições, conheciam as propriedades operatórias dos logaritmos e conseguiram utilizar essas propriedades, compreendiam uma escala logarítmica e tinham uma boa interpretação da associação que o nosso personagem Peter elaborou entre terremotos e a “escala Claglada”, então os alunos estavam prontos para tentar resolver a situação problema novamente.

Ao reler o enunciado do problema percebemos que o roteiro de aprendizado fez com que explorássemos algumas palavras e conceitos, ampliando o entendimento do enunciado da questão e até do próprio enredo do livro. A presença de um personagem conhecido, Peter, foi um fator determinante para que os alunos tivessem afinidade com a situação problema. Depois de todas as discussões, em que se explorou com mais detalhes o problema, os alunos conseguiram mobilizar as estruturas cognitivas necessárias para elaborar a solução do mesmo.

Não fizemos exercícios para explorar as propriedades operatórias de logaritmos, então, ao resolver a situação problema utilizando essas propriedades, os alunos demonstraram que realmente houve aprendizado, pois essa resolução demonstra que souberam manipular as representações semióticas criadas por ele ao generalizarmos as propriedades operatórias. Veja a seguir algumas respostas encontradas pelos alunos.

Figura 40 – Excerto da resolução situação problema da aluna E.G.

$$\begin{aligned}
 GC &= \log_{10}(T) + \log_{10}(B) - \log_{10}(P), \\
 GC &= \log_{10} 20 + \log_{10} 5000 - \log_{10} 10 \\
 GC &= \log_{10} (20 \cdot 5000 \div 10) \\
 GC &= \log_{10} 10000 \\
 10^x &= 10.000 \\
 10^x &= 10^4 \\
 x &= 4
 \end{aligned}$$

Fonte: Registro dos alunos

No fragmento da Figura 42 temos a resposta da aluna E.G., nota-se que ela usou as propriedades operatórias para iniciar o cálculo, transformou a soma de dois logaritmos em um produto e a subtração em uma divisão, depois reduziu o logaritmando a um único termo efetuando a multiplicação e a divisão. Para terminar aplicou o conceito transformando o logaritmo em uma equação exponencial, chegando à solução correta. Para a resolução, a estudante usou o modelo elaborado em sala e as propriedades operatórias de logaritmos, ou seja, usou conhecimentos adquiridos nos encontros.

A aluna E.C. começou encontrando um produto no logaritmando e depois transformou esse produto em soma de logaritmos. Com auxílio de uma calculadora calculou os logaritmos decimais de 2 e de 5. Também usou o conceito de logaritmo escrevendo as equações exponenciais correspondentes para calcular os logaritmos decimais de 10 e de 1000 e assim chegar à solução correta. Confira na Figura 43.

Figura 41 – Excerto da resolução da situação problema da aluna E.C.

$$\begin{aligned}
 GC &= \log T + \log D - \log P \\
 GC &= \log 20 + \log 5.000 - \log 10 \\
 GC &= \log 2 \cdot 10 + \log 5 \cdot 1000 - \log 10 \\
 GC &= \log 2 + \log 10 + \log 5 + \log 1000 - \log 10 \\
 GC &= 0,3 + 1 + 0,7 + 3 - 1 \\
 GC &= 4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 * \log 2 &\approx 0,3 \\
 * \log 5 &\approx 0,7 \\
 \log_{10} 10 &= x \\
 10^x &= 10^1 \\
 x &= 1 \\
 \log_{10} 1000 &= x \\
 10^x &= 1000 \\
 10^x &= 10^3 \\
 x &= 3
 \end{aligned}$$

Fonte: Registro dos alunos

Neste terceiro recorte da situação problema, Figura 44, com a resolução da aluna E.F., vemos que ela começou determinando produtos no logaritmando, mas fragmentou a expressão em fatores decimais, em seguida usou as propriedades operatórias dos logaritmos e escreveu o produto como uma soma dos mesmos, finalizou com o auxílio de uma calculadora determinando os logaritmos decimais de 2 e 5.

Figura 42 – Excerto da resolução da situação problema do aluno A.Q.

Resolvendo a situação problema:

$$\begin{aligned}
 GC &= \log_{10} T + \log_{10} D - \log_{10} P \\
 GC &= \log_{10} 20 + \log_{10} 5000 - \log_{10} 10 \\
 GC &= \log_{10} 10 \cdot 2 + \log_{10} 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 5 - \log_{10} 10 \\
 GC &= \log_{10} 10 + \log_{10} 2 + \log_{10} 10 + \log_{10} 10 + \log_{10} 10 + \log_{10} 10 + \\
 &\quad + \log_{10} 5 - \log_{10} 10 \\
 GC &= 1 + 0,3 + 1 + 1 + 1 + 0,7 - 1 \\
 GC &= 4
 \end{aligned}$$

Fonte: Registro dos alunos

Na Figura 45 a aluna G.D. simplesmente usou uma calculadora científica e anotou os valores de logaritmo decimal de 20, de 5000 e de 10. Usou aproximação de uma casa decimal, chegando na resposta 3,9. Podemos comparar a primeira tentativa de resolução dessa aluna, Figura 10, com sua resposta final. É notável o conhecimento a aluna adquiriu nesse processo. Na segunda tentativa, apesar de não podermos analisar se a aluna aprendeu o algoritmo de cálculo de logaritmo, fica evidente que aprendeu o conceito de logaritmo decimal e que sabe usar o logaritmo como operação matemática, apresentando uma solução rápida e objetiva.

Figura 43 – Excerto da resolução da situação problema da aluna G.D.

$$GC = \log_{10} 20 + \log_{10} 5.000 - \log_{10} 10$$

$$1.3 + 3.6 - 1$$

$$3.9$$

Fonte: Registro dos alunos

Percebemos a dificuldade que os estudantes demonstram quando é preciso expor o entendimento sobre algo, principalmente em algo relacionado às Ciências Exatas, pois nem sempre resolviam as atividades com rigor matemático. No entanto, ao refletir sobre nossa prática, verificamos que os encontros possibilitaram aos estudantes momentos em que foi possível trabalhar essa dificuldade, tanto em grupo, como individualmente. Os recortes apresentados das atividades dos estudantes servem para fornecer uma ideia do que foi construído, e as respostas escolhidas, são representativas das atividades dos estudantes participantes da pesquisa.

Como toda atividade em um sistema escolar, obtivemos erros e acertos. No entanto, houve uma amostra maior de acertos, deixando-nos satisfeitos com os resultados. Observamos que na busca de uma solução para a situação problema houve a apropriação do conceito de logaritmo, das propriedades operatórias e da escala logarítmica.

7.5.4 Quarta etapa

Primeiro devemos lembrar que a quarta e a quinta etapas foram realizadas de maneira diferente do que havia sido programado inicialmente, mas foi escolha dos alunos essa nova organização. Esta etapa foi idealizada e concretizada no horário de aula de Língua Portuguesa e contamos com a colaboração da professora Patrícia Rodrigues. Iniciamos a aula falando da

leitura do livro *Alva lebre lobo avermelhado: esta história é falsa* e dos 16 alunos que estavam participando do projeto, 8 leram a obra completa.

No início estavam tímidos com a presença de duas professoras, mas com o direcionamento para que cada aluno pudesse ter seu momento de explanação, eles começaram a interagir e questionar. Os alunos falaram abertamente sobre o livro, o que gostaram, o que entenderam, exprimiram suas opiniões e depoimentos. Foi bem significativo e relevante, as expectativas foram superadas.

Direcionamos a conversa para o assunto sobre ataques de ansiedade. Passamos dois pequenos vídeos informativos sobre ataque de ansiedade, o link está no Apêndice D, e falamos sobre o aplicativo *Talklife*, que é uma rede de apoio a pessoas com problemas de ansiedade e problemas psicológicos em geral, do qual o escritor Tom Pollock é embaixador.

Logo depois, perguntamos abertamente sobre os trechos de matemática do livro, se tinha algo que acharam interessante e que gostariam de mais detalhes. Houve pedidos de explicação sobre labirinto, paradoxo do mentiroso e sequência de Fibonacci. O que motivou a curiosidade dos alunos sobre labirintos foi o fato do Peter, o personagem principal do livro, ter usado a Matemática para resolver um problema que ele estava enfrentando. Já o paradoxo do mentiroso e a sequência de Fibonacci deixaram os alunos confusos pela maneira que foram abordados no livro.

O que nos causou surpresa foi que não houve questionamentos sobre o teorema da Incompletude, pois o romance de Tom Pollock tem um capítulo inteiro dedicado a esse tema. Mas como o objetivo era explorar a curiosidade dos alunos para ensinar Matemática, passamos mini lições apenas com os temas que eles demonstraram interesse.

A tarefa era formar 3 grupos, e realizar uma rápida pesquisa direcionada por assunto na *internet* (20 minutos), procurar um site para compartilhar com a turma. O grupo 1 ficou com “estudo de redes” e o resumo da sua apresentação está no Apêndice G. O grupo 2 apresentou sobre o “paradoxo do mentiroso”; no Apêndice H temos um resumo desse trabalho. Já o grupo 3 pesquisou sobre a “sequência de Fibonacci” e o resumo dessa mini lição encontra-se no Apêndice I.

Foi a primeira apresentação de pesquisa, portanto essa atividade gerou insegurança sendo marcada pela leitura dos sites escolhidos pelos grupos, também houve a necessidade de complementação, correções e explicações. Como ponto positivo, a escolha dos sites foi bem produtiva e incluiu vídeos e jogo *online*.

Essa experiência com mini lições, colocou em discussão a crença de que a Matemática precisa estar diretamente ligada com a realidade e o cotidiano dos alunos para que a

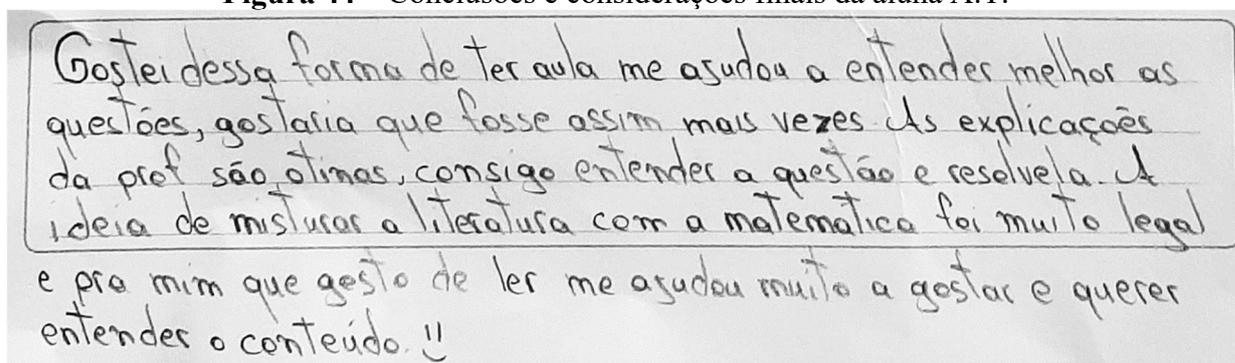
aprendizagem aconteça, pois, por meio da fantasia exposta pela narrativa do romance escolhido, os alunos descobriram a matemática por trás do estudo de redes, do paradoxo do mentiroso e da sequência de Fibonacci. Com essas minis lições pudemos brincar com a Matemática, porém sem o compromisso de ter que aprender Matemática.

Após a apresentação dos grupos tivemos que cancelar a pesquisa no modelo *Jigsaw* sobre os matemáticos citados no livro, devido ao horário, visto que a aula estava encerrando. Percebemos que o livro *Alva lebre lobo avermelhado: esta história é falsa* é muito rico e requer muito tempo para ser apreciado, precisaríamos de mais tempo para descobrir a Matemática por trás do enredo dessa obra. Como a quinta etapa seria exclusiva de Língua Portuguesa, concluímos essa etapa com avaliação.

Ressaltamos que uma boa avaliação deve ser diagnóstica, formativa e somativa e não considerar apenas uma nota, mas a evolução do aprendizado, a atenção, o interesse, a capacidade do aluno trabalhar em grupo, a assiduidade, as tarefas de casas, a participação nos debates e a entrega das atividades. Valorizar mais o processo e a maneira com que o aluno resolve os problemas e não apenas o resultado.

Entretanto, o foco era a avaliação dos alunos em relação ao projeto, por isso questionamos a turma sobre o que eles pensavam a respeito do trabalho até aquele momento. Foram positivas as respostas dos estudantes em relação ao projeto e depois dos comentários e da exposição de ideias por parte dos estudantes, eles entregaram por escrito suas considerações e opiniões. Os pareceres sobre o uso da Literatura na aula de Matemática, foi convergente. Nas Figuras 46, 47, 48, 49 e 50 temos algumas dessas avaliações articuladas pelos alunos.

Figura 44 – Conclusões e considerações finais da aluna A.T.



Fonte: Registro dos alunos

Figura 45 – Excerto das conclusões e considerações finais do aluno N.G.

Fiquei surpreso com quantas coisas a gente fez na aula, o livro deu pra matemática a criatividade que faltava na aula. Gostei muito mais de aprender desse jeito. Até agora não decidi se a Ingrid existe.

Fonte: Registro dos alunos

Figura 46 – Excerto das conclusões e considerações finais da aluna I.C.

Eu tô a 2 anos fugindo de logaritmo por nunca ter entendido direito e não gosto de ler, quando a prof falou em juntar livro com logaritmo pensei que seria a pior aula de todas, mais te dou um like explicou do jeito que eu precisava

Fonte: Registro dos alunos

Figura 47 – Excerto das conclusões e considerações finais do aluno L.H.

Da primeira vez eu tinha errado a conta, mas depois da aula eu consegui fazer. Também acredito que finalmente consegui aprender logaritmo. 😊

Fonte: Registro dos alunos

Figura 48 – Excerto das conclusões e considerações finais da aluna A.B.

Aprendi muito foi uma surpresa as professoras Maria Luiza e Patricia na mesma aula, acho que descobri o que é debater um livro.

Fonte: Registro dos alunos

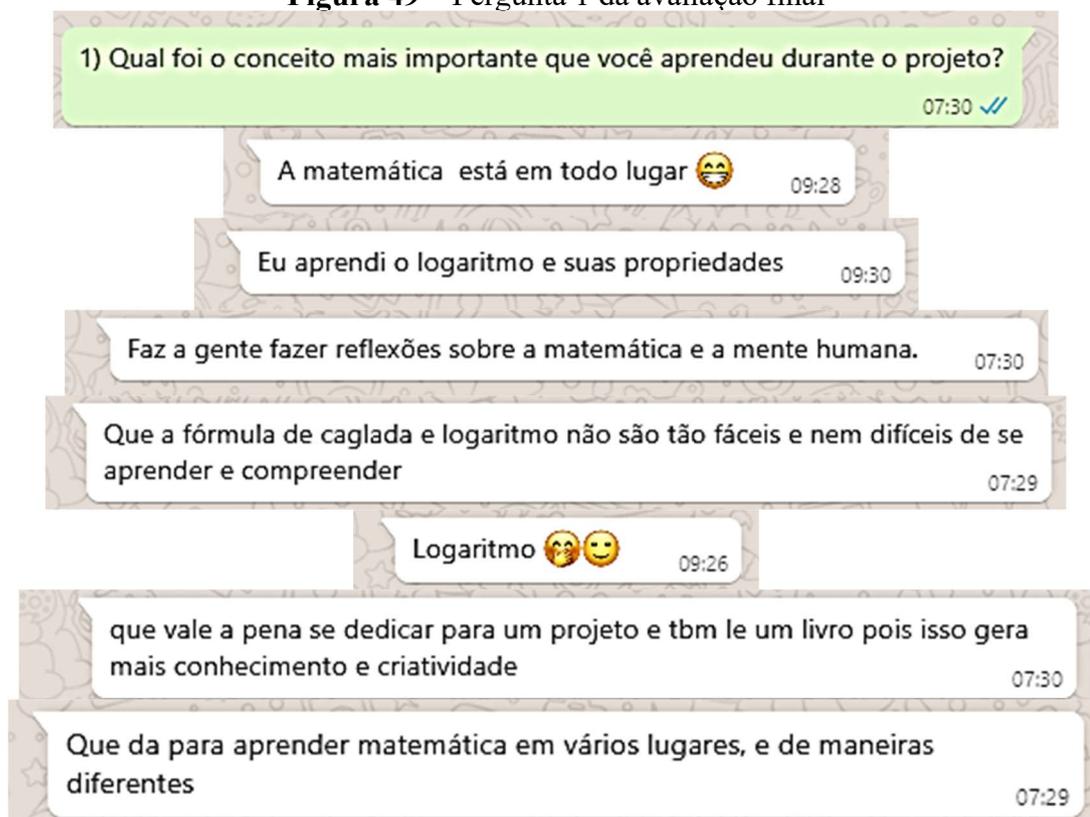
A avaliação final dos estudantes foi efetuada através da estratégia *One Minute Paper*, onde a professora fez uma pergunta no *Whatsapp* e os estudantes tiveram um minuto para escrever suas respostas. A primeira questão e algumas das respectivas respostas encontram-se nas figuras 50.

As respostas, sobre o conceito mais significativo que aprenderam durante o projeto, foram heterogêneas, muitos disseram que o mais importante foi aprender sobre logaritmos, mas

também tivemos respostas dizendo que o mais marcante foi perceber a presença da matemática em situações cotidianas.

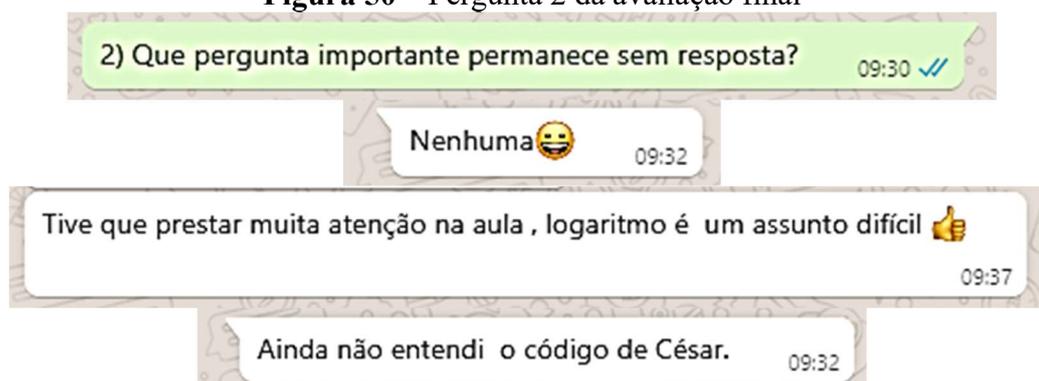
A segunda pergunta é sobre as dúvidas que ainda não foram sanadas, veja as respostas na Figura 51. Percebe-se dúvidas não só em Matemática, mas com relação ao enredo do livro. Se tínhamos alguma dúvida do envolvimento que o enredo de uma história pode trazer, a dúvida foi sanada, pois os comentários comprovam que é positivo para a aula de Matemática.

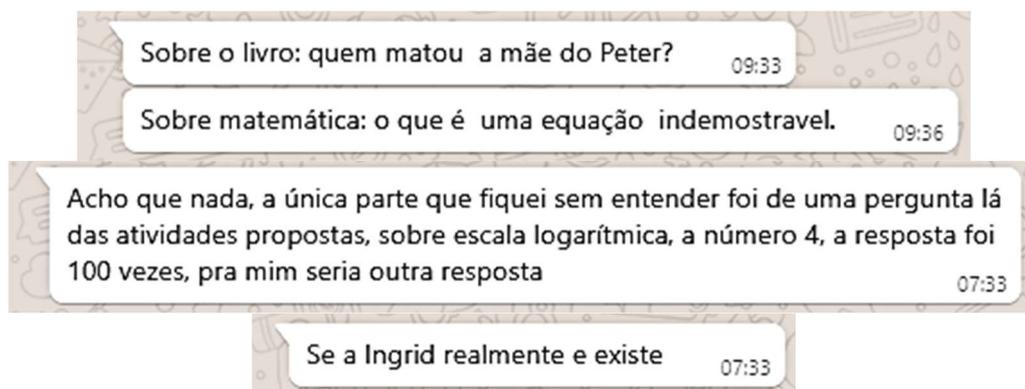
Figura 49 – Pergunta 1 da avaliação final



Fonte: A autora

Figura 50 – Pergunta 2 da avaliação final

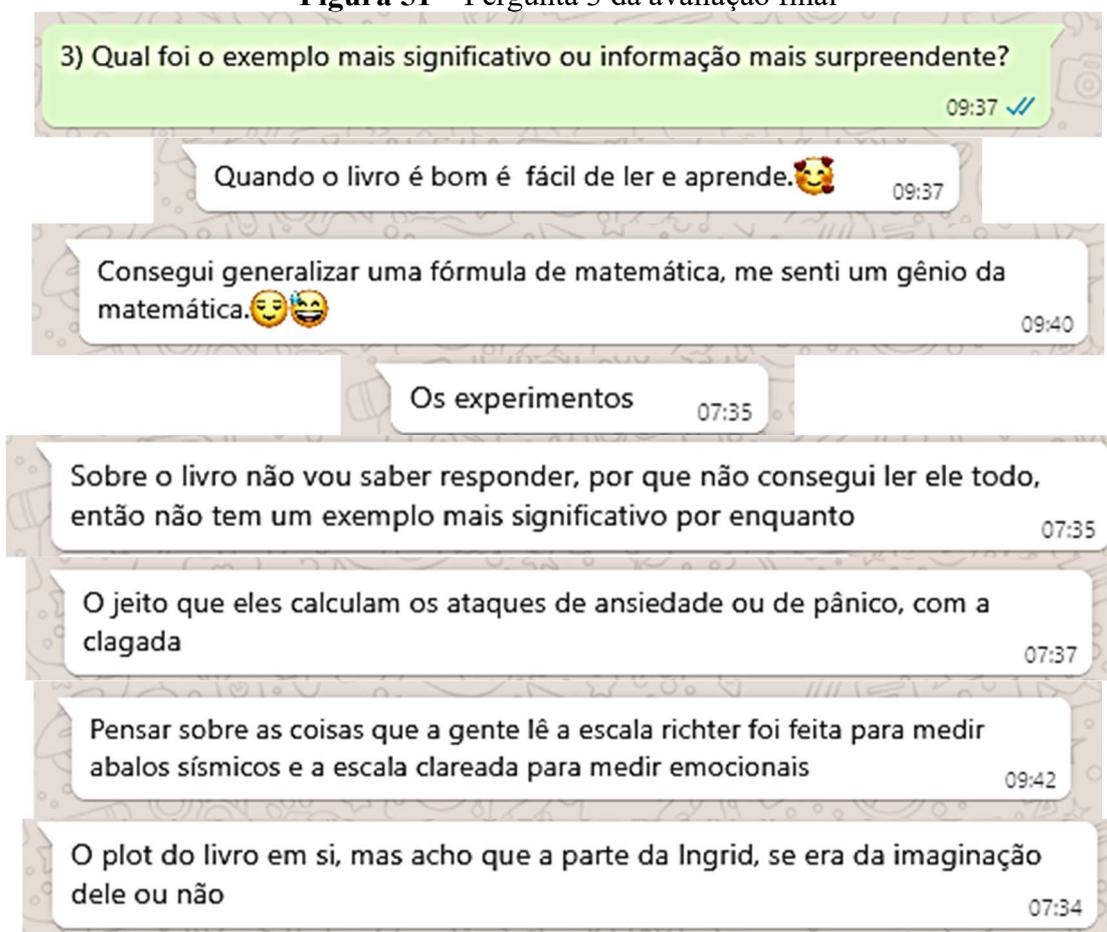




Fonte: A autora

Também pedimos qual foi o exemplo mais significativo ou informação mais surpreendente, as respostas foram bem heterogêneas, veja a Figura 52, a maioria falou sobre o livro, o que demonstra que trazer um romance para a aula de Matemática chamou a atenção dos alunos. Não só os cálculos produziram conhecimento, mas o enredo do livro também, pois “deu o que pensar”.

Figura 51 – Pergunta 3 da avaliação final



Fonte: A autora

7.5.5 Quinta etapa

Foi uma aula exclusiva de Língua Portuguesa onde os alunos que leram o livro *Alva lebre lobo avermelhado: esta história é falsa* puderam fazer um resumo da história. No Apêndice K têm exemplos de resumos elaborados pelos alunos.

Assim como tivemos uma aula apenas de Matemática para explorar o conceito de logaritmo, esse foi o momento que a professora de Língua Portuguesa teve para trabalhar a interpretação e escrita de resumo de um livro, pois esse é um projeto interdisciplinar e todas as disciplinas envolvidas podem contribuir com o aprendizado dos alunos.

Depois da redação do resumo os alunos gravaram um *podcast*. Os *podcasts* foram gravados no aplicativo *Anchor* e repassados para a professora responsável pelo projeto. No Apêndice L há o *link* para acesso a esse material e a transcrição dos *podcasts*.

O texto dos *podcasts* e o roteiro do programa foi criação dos próprios alunos, a professora de Língua Portuguesa apenas ensinou a utilizar o aplicativo e deu dicas de como criar um roteiro para a gravação. A professora de Matemática contribuiu gravando o episódio piloto como amostra para os alunos.

Nos episódios gravados todos citaram a Matemática sob algum aspecto, foi produtivo ver os alunos gerando informação, utilizando novos recursos e apps e, perceberem que a Matemática tem mais a oferecer do que cálculos.

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Iniciamos esta pesquisa em 2020 e a encerramos no primeiro semestre do ano de 2021. Durante esse processo, ocorreram muitas idas e vindas no desenvolvimento de uma sequência didática que permitisse ao aluno a construção do próprio conhecimento e facilitasse a contextualização dos conteúdos matemáticos. A pesquisa decorreu da insatisfação pessoal do ensino a respeito da atual relação inconsistente entre conteúdo e situações da vida e também pela busca de novos recursos didáticos para as aulas de Matemática.

No primeiro capítulo desse trabalho apresentamos a questão norteadora para a presente pesquisa: Como a narrativa de *Alva lebre, lobo avermelhado: esta história é falsa*, de autoria de Tom Pollock, pode provocar o estudo de conceitos matemáticos no Ensino Médio? Em busca de uma resposta, positiva ou não, para a questão norteadora, elaboramos uma sequência didática, segundo a aprendizagem baseada em projetos (ABP), aplicada e analisada nessa dissertação.

Para definir e alinhar as nossas considerações sobre os resultados da pesquisa, é preciso lembrar que o objetivo era utilizar o livro em questão, para que o estudante desenvolvesse a sua compreensão a respeito de logaritmo, como um estímulo para discussões, pois romance matemático não é livro didático, assim a leitura da obra seria necessária para instigar a curiosidade sobre o tema e motivar a pesquisa e a investigação. Quanto a esse objetivo, desde as discussões nos encontros iniciais até finalizar a última etapa do projeto, obtivemos resultados positivos.

Rememoramos que, em nossa análise das discussões, os estudantes se mostraram inseguros e incomodados com a ideia de ler um livro de romance na aula de Matemática. Isso, segundo os conceitos de Dewey (1959), representa a fase denominada transitória, ou seja, expressa o momento em que o estudante produz ideias acerca da situação, para depois buscar algum significado para a mesma. Avalia-se que essa inicialização foi muito significativa, pois, a partir daquele instante, pôde-se questionar e elaborar expectativas para os assuntos seguintes.

Apesar disso, conseguimos pôr em prática a aprendizagem baseada em projetos (ABP). Seguimos as etapas de introduzir uma âncora, elaborar a questão motriz, dar voz aos alunos e poder de escolha das tarefas, pois foram ouvidos durante toda a execução do projeto “Alva lebre, lobo avermelhado”, ademais participaram ativamente do processo de investigação, com leitura do romance, pesquisa na *internet*, mini lições e generalizações de propriedades no roteiro de aprendizagem. Houve trabalho cooperativo, *feedback*, oportunidade de reflexão e aplicação

do que foi aprendido e finalizaram o projeto com apresentação pública de seus resultados com resumos e a gravação de *podcasts*.

No desenvolvimento da segunda etapa, detalhada no capítulo 7, pudemos perceber que os estudantes, inicialmente, não apresentavam nenhum subsídio para utilizar logaritmo para resolver a situação problema com “escala Claglada” e associar essa escala com terremotos. Percebemos que tanto o assunto, quanto o contexto não expressavam significados aos estudantes, tão pouco, alguma relação entre ambos.

À vista disso, justamente através da capacidade de comunicação que a leitura de um livro proporciona, usamos o roteiro de aprendizado para que o aluno possa construir seu conhecimento através de pesquisas na *internet* e resolução das atividades investigativas de modo a generalizar conceitos e propriedades sobre logaritmos e dessa maneira estarem aptos a resolver a situação problema. Esse modelo de sequência didática permitiu relacionar o conteúdo de logaritmo com a “escala Claglada”, que, mesmo fictícia, permitiu a associação com abalos sísmicos, o que caracteriza contextualização do conhecimento na vida dos estudantes.

Constatamos que os discentes utilizaram a construção $b^x = a$ para desenvolver as propriedades exponenciais necessárias para encontrar o valor de logaritmo. É perceptível que, não só os modelos logarítmicos, mas também essa representação elaborada pelos estudantes, serviram de instrumentos para que percebessem ou atribuíssem um significado para logaritmo.

Em relação às propriedades do logaritmo, observamos que a experimentação, generalização de resultados, tentativas e erros ocasionados, serviram para que os estudantes significassem e compreendessem a construção das propriedades operatórias em logaritmo.

Observamos que os diálogos eram significativos e, com isso sentimos estar alcançando o objetivo de tornar o aprendizado mais participativo. A nossa percepção sobre os encontros foi satisfatória, porque as atividades que aplicamos envolviam pesquisas, isso permitiu que o próprio aluno buscasse significados sobre o tema que devia aprender. Além disso, ao socializar as respostas os discentes puderam evidenciar, confrontar, justificar, complementar as suas hipóteses individuais e construir os registros, agregando significados ao assunto explorado.

Foi importante oferecer aos alunos leitores um livro que ampliou as discussões e a possibilidade de debater assuntos envolvendo diferentes áreas de conhecimento, ou seja, a Matemática não foi explorada isoladamente, pudemos explorar assuntos como crise de ansiedade trazendo o tema transversal saúde para as aulas. Além disso, as ideias não estavam prontas para serem memorizadas, os saberes sobre logaritmos tiveram que ser construídos.

Da articulação entre Matemática e Literatura adquirimos experiências, que influenciaram a maneira como os alunos do 3º ano “A” se relacionam com a disciplina. Depois

do que leram, discutiram e registraram, eles descobriram uma nova maneira de aprender Matemática. A Literatura não trouxe uma aprendizagem imediata e direta, mas abriu espaço para a exploração e discussão de conceitos matemáticos.

Entre os aspectos positivos podemos acrescentar a disponibilidade da escola para a execução do projeto, a participação integral dos alunos *online* nas atividades propostas, as discussões acerca do romance que também proporcionaram aos alunos uma visão mais ampla da importância do estudo de logaritmos.

Quanto aos aspectos negativos é importante destacar que o número de aulas de Matemática deveria ser maior, pois ser mediador para o aluno construir o seu conhecimento demanda muito tempo. O tempo para análise do livro também foi curto, por se tratar de uma história repleta de Matemática, precisaríamos mais tempo para interpretar e descobrir essa Matemática contida na obra. Além disso, a interação entre os alunos durante a realização das atividades foi reduzida. A interação ocorreu, mas apenas na socialização dos resultados da etapa 3, pois não houve diálogo na execução das tarefas. Na etapa 4 houve interação apenas para dividir as tarefas no grupo com as minis lições e foi uma atividade rápida.

Contemplando, de modo geral, as etapas do projeto, conclui-se, enquanto professora da turma, que são nítidas as vantagens da utilização de um romance na aula de Matemática, pois ampliou muito a forma de planejar intervenções e projetos. A dinâmica de envolver os alunos com a leitura do livro como também nas pesquisas e investigações orientou toda a nossa atuação como mediadoras do conhecimento, conduzindo o aluno durante seu processo de aprendizagem, evidenciando os principais elementos matemáticos que deveriam ser extraídos da situação problema. Pessoalmente o projeto contribui para deixar de lado os maus hábitos que o tempo propicia e dar voz aos alunos. Profissionalmente, percebemos que o estudo valoriza e promove novos recursos didáticos.

Dessa forma, esperamos que essa pesquisa venha a contribuir com a educação matemática, no sentido de proporcionar aos colegas professores uma alternativa para o ensino de logaritmos. Finalmente, destacamos que a proposta de atividades aqui apresentadas não constitui um material pronto e acabado, é apenas um modelo de proposta. O livro *Alva lebre lobo avermelhado: está história é falsa* tem muitas outras situações que podem ser exploradas nas aulas, tanto em Matemática quanto em outras disciplinas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMOULOUD, Saddo Ag; COUTINHO, Cileda D. Q. E. S. **Engenharia Didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no GT-19/ANPEd**. REVMAT: Revista Eletrônica de Educação Matemática, Florianópolis/SC, 2008, v. 3, p. 62-77. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2008v3n1p62/12137>. Acesso em: 27 jul. 2021.

ARTIGUE, Michelle. **Engenharia didáctica**. Lisboa: Instituto Piaget, 1996.

AUSUBEL, David P. **Aquisição e retenção de conhecimentos**. Lisboa: Plátano Edições Técnicas, 2003.

BAKER, S.; BAKER, K. E. **Project management**. New York: Alpha Books, 1998.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2017. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_20dez_site.pdf. Acesso em: 27 jul. 2021.

BRASIL. **Parâmetros curriculares nacionais: terceiro e quarto ciclos: apresentação dos temas transversais** / Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998. Disponível: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ttransversais.pdf>. Acesso em: 28 jul. 2021.

BRASIL. **Parâmetros curriculares nacionais: matemática** /Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1997. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf>. Acesso em: 28 jul. 2021.

BRASIL. **Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996**. Diretrizes e Bases da Educação Nacional. Brasília: DF, 1996. Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/19394.htm. Acesso em: 27 jul. 2021.

BENDER, William N. **Aprendizagem baseada em projetos: educação diferenciada para o século XXI**. Porto Alegre: Penso, 2014.

BOYER, Carl B. **História da matemática**. São Paulo: Blucher, 2010.

CAMPOS, Raquel Sanzovo Pires; MONTOITO, Rafael. **O texto alternativo ao livro didático como proposta interdisciplinar do ensino de ciências e matemática**. Ensino de ciências e matemática, IV: temas de investigação, Nelson Antonio Pirola (org.). São Paulo: Cultura acadêmica, 2010. Disponível em: file:///C:/Users/Maria/AppData/Local/Temp/ENSINO_DE_CINCIAIS_E_MATEMTICA_IV_-_Nelson_Pirola_Org.pdf. Acesso em: 8 dez. 2020.

COELHO, Nelly Novaes. **Literatura Infantil: teoria, análise, didática**. São Paulo: Moderna, 2000.

CRESWELL, John W. **Projeto de pesquisa: métodos qualitativo, quantitativo e misto**. Porto Alegre: Artmed, 2007.

CUNHA, Aline Vieira. **Literatura Infantil e Matemática: a construção do conceito de número a partir da contação de histórias**. Artigo. XXI EBRAPEM – Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática. Pelotas: UFPel, 2017. Disponível em: https://wp.ufpel.edu.br/xxiebrapem/files/2018/07/GD1_Aline_Cunha.pdf. Acesso: 28 jul. 2021.

DALCIN, Andreia. **Um olhar sobre o paradidático de Matemática**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2002. Disponível em: <http://repositorio.unicamp.br/jspui/handle/REPOSIP/253381>. Acesso: 27 jul. 2021.

DANTE, Luiz Roberto. **Didática da Resolução de Problemas de Matemática**. 2ªed. São Paulo: Ática, 1998.

DEWEY, John. **Como pensamos**. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1959. Coleção Atualidades Pedagógicas, v. 2.

DEWEY. **Experiência e educação**. Rio de Janeiro: Editora Vozes, 2010.

EISENHARDT, K.M. **Building theories form case study research**. Academy of Management Review, Vol. 14, No. 4 (Oct., 1989), pp. 532-550. Disponível em: <https://www.uio.no/studier/emner/matnat/ifi/INF5571/v15/timeplan/ar-docs/eisenhardt-1989.pdf>. Acesso em: 27 jul. 2021.

FACHIN, Odília. **Fundamentos da Metodologia Científica: noções básicas em pesquisa científica**. 6 ed. São Paulo: Saraiva, 2017.

FARIAS, Carlos Aldemir. **Alfabetos da alma: histórias da tradição na escola**. Porto Alegre: Sulina, 2006.

FARIAS, Marcella Sarah Filgueiras de. **Design thinking na elaboração de um produto educacional: roteiro de aprendizagem – estruturação e orientações**. Dissertação de mestrado - Instituto Federal do Amazonas, Manaus, 2019. Disponível em: <http://repositorio.ifam.edu.br/jspui/handle/4321/334>. Acesso em: 01 nov. de 2021.

FLICK, Uwe. **Desenho da pesquisa qualitativa**. Porto Alegre: Artmed, 2009.

GERHARD, Tatiana Engel. SILVEIRA, Denise Tolfo. **Métodos de pesquisa**. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2009.

GRANELL, C. G. **A aquisição da linguagem matemática: símbolo e significado**. In: TEBEROSKY, Ana; TOLCHINSKY, Liliana (Org.). Além da alfabetização: a aprendizagem fonológica, ortográfica, textual e matemática. São Paulo: Ática, 2003.

HAHN, Clairiane Terezinha; HOLLAS, Justiani; ANDREIS, Rosemari Ferrari. **Matemática e Literatura: Novas concepções pedagógicas na construção significativa de conhecimentos matemáticos**. Florianópolis: Revemat, 2012.

IEZZI, Gelson. DOLCE, Osvaldo. MURAKAMI, Carlos. **Fundamentos de Matemática Elementar 2: Logaritmos**. 9 ed. São Paulo: Atual, 2004.

LIMA, Elon Lages. **Números e funções reais**. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

LIMA. **Meu professor de matemática e outras histórias**. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

LIMA, Donizete Franco. **A importância da sequência didática como metodologia no ensino da disciplina de física moderna no ensino médio**. Artigo. Revista Triângulo. Uberaba-MG, v. 11, n.1, p. 151-162, jan-abr 2018. Disponível em: <file:///C:/Users/Maria/AppData/Local/Temp/2664-14210-1-PB.pdf>. Acesso em: 08 dez. 2020.

LÜCK, Heloísa. **Pedagogia interdisciplinar: fundamentos teórico-metodológicos**. 10. ed. Petrópolis: Vozes, 2002.

MARIA, Luzia de. **O clube do livro: ser leitor – que diferença faz?** São Paulo: Globo, 2009.

MAXIMIANO, A. C. A. **Administração de projetos: transformando ideias em resultados**. São Paulo: Atlas, 1997.

MEIRIEU, P. **Aprender... sim, mas como?** Porto Alegre: Artmed, 1998.

MELO, Severino Barros de. **Matemática, Literatura e Contemporaneidade: desafios e possibilidades de uma prática interdisciplinar**. XII Encontro Nacional de Educação Matemática, 2016. São Paulo. Anais. São Paulo: SBEM, 2016. Disponível em: http://www.sbembrasil.org.br/enem2016/anais/pdf/7758_3377_ID.pdf. Acesso em: 27 jul. 2021.

MONTOITO, Rafael. **Chá com Lewis Carrol: a matemática por trás da literatura**. Jundiaí: Paco Editorial, 2011.

MOREIRA, Marco Antonio; MASINI, Elcie F Salzano. **Aprendizagem Significativa - A Teoria de David Ausubel**. São Paulo: Centauro, 2006.

MOREIRA, Katia Gabriela; GRANDO, Regina Célia. Artigo: **O registro nas aulas de matemática possibilitando a comunicação dos procedimentos e estratégias de resolução de problemas de crianças pequenas**. Anais do XI ENEM – Encontro Nacional de Educação Matemática. Curitiba, 2013. Disponível em: http://sbem.iuri0094.hospedagemdesites.ws/anais/XIENEM/pdf/2205_1340_ID.pdf. Acesso: 02 ago. 2021.

MOURA, Dácio G.; BARBOSA, Eduardo F. **Trabalhando com projetos: Planejamento e Gestão de Projetos Educacionais**. Petrópolis: Vozes, 2017.

NACARATO, Adair Mendes; MENGALI, Brenda Leme da Silva; PASSOS, Cármen Lúcia Brancaglioni. **A matemática nos anos iniciais do ensino fundamental: tecendo fios do ensinar e do aprender**. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2015.

POLLOCK, Tom. **Alva lebre lobo avermelhado: esta história é falsa**. São Paulo: Plataforma 21, 2019.

POLYA, George. **A arte de Resolver Problemas**. Tradução: Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

POMBO, Olga. **A interdisciplinaridade: reflexão e experiência**. Lisboa: Texto, 1992.

RIBEIRO A.; PRATES E.; VERGASTA E.; DOMINGUEZ G.; FREIRE I.; BORGES L.; MASCARENHAS M. **Função exponencial e logarítmica: uma razão para logaritmos**. Fund198, UFBA, apostilas. Disponível em: <http://www.fund198.ufba.br/expo/razao.pdf>. Acesso em: 09 ago. 2021.

SMOLE, Kátia C. Stocco (Org.). **Era uma vez na Matemática: uma conexão com a literatura infantil**. São Paulo: IME/USP, 1998.

SMOLE, Kátia C. Stocco; CÂNDIDO, Patrícia T.; STANCANELLI, Renata. **Matemática e Literatura Infantil**. 4. ed. Belo Horizonte: Editora Lê, 1999.

SMOLE, Kátia C. Stocco; DINIZ, Maria Ignez. (Org.). **Ler, escrever e resolver problemas: habilidades Básicas para aprender matemática**. Porto Alegre: Artmed, 2001.

SOUZA, Ana Paula Gestoso de; CARNEIRO, Reginaldo Fernando. **Um ensaio teórico sobre literatura infantil e matemática: práticas de sala de aula**. Educação Matemática e Pesquisa. São Paulo, v.17, n.2, 2015. Disponível em: <file:///C:/Users/Maria/AppData/Local/Temp/17171-66908-1-PB.pdf>. Acesso em: 8 dez. 2020.

TEIXEIRA, Rafael Montoito. **Uma visita ao universo matemático de Lewis Carroll e um (re) encontro com sua lógica do nonsense**. Dissertação (Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Educação) – Centro de Ciências Sociais Aplicadas, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2007. Disponível em: <http://livros01.livrosgratis.com.br/cp062251.pdf>. Acesso em: 02 ago. 2021.

UOL. **Michaelis Online**, 2021. Literatura. Disponível em: <https://michaelis.uol.com.br/moderno-portugues/busca/portugues-brasileiro/literatura/>. Acesso: 01 ago. 2021.

VASCONCELOS, M. B. F. **A contextualização e o ensino de matemática: Um estudo de caso**. Dissertação de Mestrado. João Pessoa: Universidade Federal da Paraíba, 2008.

VIGOTSKY, Lev Semenovich. **Pensamento e Linguagem**. São Paulo: Martins Fontes, 1998.

YIN. R. K. **Estudo de caso: planejamento e métodos**. Porto Alegre: Bookman, 2005.

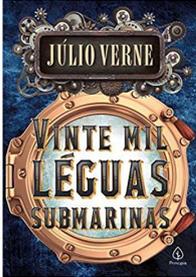
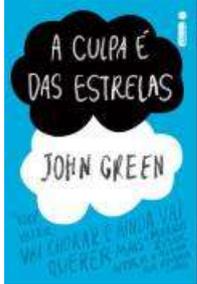
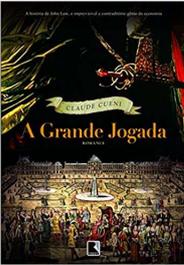
ZABALA, Antoni. **A prática educativa: como ensinar**. Porto Alegre: Editora Artes Médicas Sul Ltda., 2011.

ZAPICO, Irene (ORG.). **Matemática en su salsa: historia, arte e juegos**. Buenos Aires: Lugar Editorial, 2006.

APÉNDICES

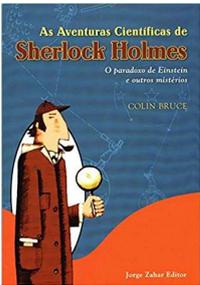
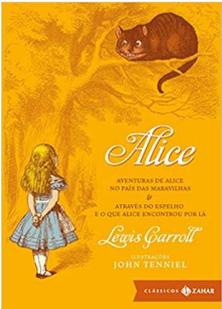
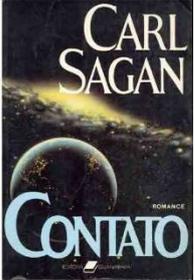
APÊNDICE A – Sugestão de romances que podem ser usados no Ensino Médio

Quadro 6 – Romances que podem ser usados na aula de Matemática no Ensino Médio

<p>20.000 LÉGUAS SUBMARINAS</p>  <p>Autor: Júlio Verne Editora: Principis</p>	<p>A CULPA É DAS ESTRELAS</p>  <p>Autor: John Green Editora: Intrínseca</p>
<p>A FÓRMULA DO AMOR</p>  <p>Autora: Alex Rovira e Francesc Miralles Editora: Asa</p>	<p>A FÓRMULA PREFERIDA DO PROFESSOR</p>  <p>Autora: Yoko Ogawa Editora: Estação Liberdade</p>
<p>A GRANDE JOGADA</p>  <p>Autor: Claude Cueni Editora: Record</p>	<p>A MÁQUINA DO TEMPO</p>  <p>Autor: H. G. Wells Editora: Alfabeta</p>
<p>A MATEMÁTICA DA ETERNIDADE E DOS ENCONTROS</p>  <p>Autor: Fernando Luiz dos Santos Chaves Editora: Simplíssimo</p>	<p>A PROBABILIDADE ESTATÍSTICA DO AMOR À PRIMEIRA VISTA</p>  <p>Autora: Jennifer E. Smith Editora: Galera Record</p>

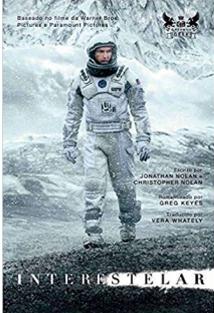
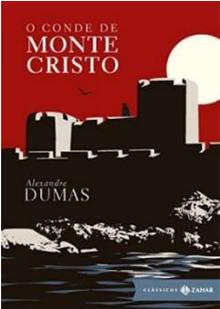
Continua

Quadro 6 – Romances que podem ser usados na aula de Matemática no Ensino Médio
 Continuação

<p>AS AVENTURAS CIENTÍFICAS DE SHERLOCK HOLMES</p>  <p>Autor: Bruce, Colin Editora: Jorge Zahar</p>	<p>AS MENINAS DA PRAÇA ALFÂNDEGA</p>  <p>Autor: Sérgio Capparelli Editora: L&PM</p>
<p>AS VIAGENS DE GULLIVER</p>  <p>Autor: Jonathan Swift Editora: L&PM</p>	<p>ALICE ATRAVÉS DO ESPELHO</p>  <p>Autor: Lewis Carrol Editora: L&PM</p>
<p>ALICE NO PAÍS DAS MARAVILHAS</p>  <p>Autor: Lewis Carol Editora: Martin Claret</p>	<p>ALICE NO PAÍS DOS NÚMEROS</p>  <p>Autor: Carlo Frabetti Editora: Ática</p>
<p>ALVA LEBRE, LOBO AVERMELHADO – ESTA HISTÓRIA É FALSA</p>  <p>Autor: Tom Pollock Editora: Plataforma 21</p>	<p>CONTATO</p>  <p>Autor: Carl Sagan Editora: Guanabara</p>

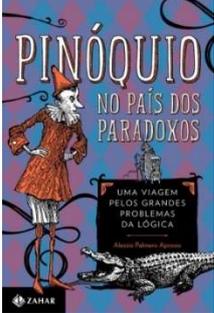
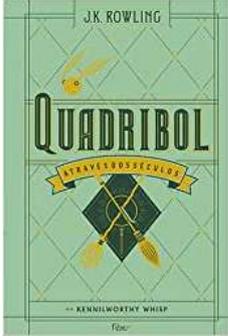
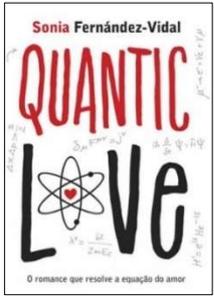
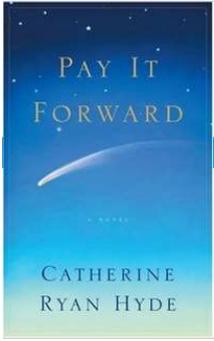
Continua

Quadro 6 – Romances que podem ser usados na aula de Matemática no Ensino Médio
 Continuação

<p>INTERESTELAR</p>  <p>Autor: Christopher Nolan e Jonathan Nolan Editora: Gryphus Geek</p>	<p>O CÓDIGO DA VINCI</p>  <p>Autor: Dan Brown Editora: Sextante</p>
<p>O CONDE DE MONTE CRISTO</p>  <p>Autor: Alexandre Dumas Editora: Zahar</p>	<p>O ESTRANHO CASO DO CACHORRO MORTO</p>  <p>Autor: Mark Haddon Editora: Record</p>
<p>O PEQUENO PRÍNCIPE</p>  <p>Autor: Antoine de Saint-Exupéry Editora: HarperCollins</p>	<p>O PLANETA DOS MACACOS</p>  <p>Autor: Pierre Boulle Editora: Aleph</p>
<p>O TESOURO DE BRESA</p>  <p>Autor: Malba Tahan Editora: Galera Record</p>	<p>PERDIDO EM MARTE</p>  <p>Autor: Andy Weir Editora: Arqueiro</p>

Continua

Quadro 6 – Romances que podem ser usados na aula de Matemática no Ensino Médio
Parte final

<p>PINÓQUIO NO PAÍS DOS PARADOXOS</p>  <p>Autor: Alessio Palmero Aprosio Editora: Zahar</p>	<p>QUADRIBOL ATRAVÉS DOS SÉCULOS</p>  <p>Autora: J. K. Rowling Editora: Rocco</p>
<p>QUANTIC LOVE</p>  <p>Autora: Sonia Fernández-Vidal Editora: Rocco</p>	<p>RESTA UM</p>  <p>Autora: Isabela Noronha Editora: Companhia das Letras</p>
<p>TRIBUTO AO AMOR</p>  <p>Autora: Catherine Ryan Editora: Mercury</p>	<p>UMA MENTE BRILHANTE</p>  <p>Autora: Sylvia Nasar Editora: BetsBolso</p>

Fonte: A autora.

Imagens: <https://www.amazon.com.br/>

APÊNDICE B – Questionário para determinar o perfil do participante**PERFIL DO PARTICIPANTE**

Link: <https://forms.gle/sueBg9SqaWdqToc4A>

- 1) Qual seu nome?
- 2) Qual sua idade?
- 3) Você tem dificuldade em matemática no Ensino Médio?
 - a) Sim
 - b) Não
- 4) Você viu o conteúdo de logaritmo no Ensino Médio?
 - a) Sim
 - b) Não
- 5) Com relação ao conteúdo de logaritmo:
 - a) Aprendeu sobre as propriedades de potenciação.
 - b) Aprendeu a resolver equações exponenciais.
 - c) Aprendeu sobre função exponencial.
 - d) Aprendeu sobre o comportamento do gráfico da função exponencial.
 - e) Aprendeu sobre a definição de logaritmo.
 - f) Aprendeu sobre as propriedades de logaritmo.
 - g) Aprendeu sobre base decimal.
 - h) Aprendeu sobre o comportamento do gráfico da função logarítmica.
- 6) Sobre a importância e aplicação de logaritmos, você:
 - a) Conhece, pois seu professor falou.
 - b) Conhece, pois viu na internet.
 - c) Não lembra.
 - d) Nunca ouviu falar.
- 7) Caso tenha dúvidas, sobre conteúdos trabalhados em aula, você:
 - a) Pede ao professor para explicar esse conteúdo.
 - b) Pesquisa em livro.
 - c) Pesquisa em internet.
 - d) Pede ajuda para os colegas.
 - e) Fica sem entender.
- 8) Você considera matemática importante para a sua vida?
 - a) Sim
 - b) Não
- 9) Você vai ler o livro Alva lebre, lobo avermelhado (até a página 37)?
 - a) Sim
 - b) Não

APÊNDICE C – Termo de consentimento de uso de imagem

TERMO DE CONSENTIMENTO

Eu, _____, R.G. _____, responsável pelo(a) aluno(a) _____, da turma 2º/3º ano A, declaro por meio deste termo, que concordei em que o(a) aluno(a) participe da pesquisa intitulada “APRENDENDO MATEMÁTICA ATRAVÉS DO ROMANCE ALVA LEBRE LOBO AVERMELHADO: ESTA HISTÓRIA É FALSA - UMA PROPOSTA INTERDISCIPLINAR COM LÍNGUA PORTUGUESA” desenvolvida pela professora Maria Luiza Favero. Fui informado(a), ainda, de que a pesquisa é coordenada/orientada por Dr. Emivan Ferreira da Silva e conta com a participação da professora Patrícia Rodrigues.

Tenho ciência de que a participação do(a) aluno(a) não envolve nenhuma forma de incentivo financeiro, sendo a única finalidade desta participação a contribuição para o sucesso da pesquisa. Fui informado(a) dos objetivos estritamente acadêmicos do estudo, que, em linhas gerais são:

- Aprender sobre logaritmos;
- Investigar as possibilidades de articulação entre literatura e matemática;
- Planejar e aplicar atividades com uma turma de terceiro ano do Ensino Médio, da Escola Estadual Cândido Portinari de Tapurah, a partir da leitura do romance Alva lebre, lobo avermelhado – esta história é falsa, do escritor Tom Pollock.

Fui esclarecido(a) de que os usos das informações oferecidas pelo(a) aluno(a) será apenas em situações acadêmicas (artigos científicos, palestras, seminários, dissertações, etc.) identificadas apenas pela letra inicial do seu nome e pela idade. No caso de fotos e vídeos obtidos durante a realização do projeto, que também serão utilizadas apenas em situações acadêmicas, o rosto dos(as) alunos(as) serão protegidos.

A colaboração do(a) aluno(a) se fará através de sua participação oral nas atividades, brincadeiras e leituras realizadas, e de seus registros de atividades individuais ou em grupo, em que ele (ela) será observado(a) e sua produção analisada. A colaboração do(a) aluno(a) se iniciará apenas a partir da entrega desse documento por mim assinado.

Estou ciente de que, em caso de dúvida, ou me sinta prejudicado(a), poderei contatar a professora Maria Luiza Favero pelo telefone (66) 99997-9079 ou pelo e-mail malu.favero@hotmail.com, e a escola pelo telefone (66) 3547-1114 ou (66) 99973-5781.

Fui ainda informado(a) de que o(a) aluno(a) pode se retirar dessa pesquisa a qualquer momento, sem sofrer nenhuma sanção ou constrangimento.

Tapurah-MT, _____ de junho de 2021.

Assinatura do Responsável: _____

Assinatura da professora: _____

APÊNDICE D – Vídeos e sites sugeridos aos alunos durante a execução do projeto

LINK DOS VÍDEOS E SITES SUGERIDOS AOS ALUNOS DURANTE A EXECUÇÃO DO PROJETO “ALVA LEBRE LOBO AVERMELHADO”

Etapa 1

Vídeos que enaltecem a leitura do livro *Alva lebre lobo avermelhado: esta história é falsa*:

<https://www.youtube.com/watch?v=OVD5fD1lwSc>

https://www.youtube.com/watch?v=Xwa_h-o6VnE

Livro *Alva lebre lobo avermelhado: esta história é falsa* em PDF:

<https://drive.google.com/file/d/1oQM4KD6zVzD3RGwJRyhddiTBU2khMf2A/view?usp=sharing>

Etapa 2

Terremoto:

https://www.youtube.com/watch?v=Q6c_LR8-qqg

Escala Richter:

https://www.youtube.com/watch?v=34kFHq-_2aU

Etapa 3

Escala logarítmica:

https://www.youtube.com/watch?v=bXzgwH_M0Kw

<https://www.youtube.com/watch?v=OUo6XrHpoY0&t=614s>

Etapa 4

Crises de ansiedade:

<https://www.youtube.com/watch?v=389W6t1cwA4>

<https://www.youtube.com/watch?v=u0bDTLKuudE>

Talklife:

https://play.google.com/store/apps/details?id=com.bearpty.talklife&hl=pt_BR&gl=US

Etapa 5

Anchor:

https://anchor.fm/login?return_to=%2Fdashboard%2Fepisode%2Fnew%2Frecord

APÊNDICE E – Roteiro de aprendizado



PROJETO ALVA LEBRE LOBO AVERMELHADO

Aluno(a): _____

Série: _____ Data: ___ / ___ / ___

Professora: Maria Luiza Favero

SITUAÇÃO PROBLEMA

O texto abaixo é um trecho do livro *Alva lebre lobo avermelhado: esta história é falsa* de Tom Pollock.

“Bem-vindo à Claglada. A Classificação Logarítmica Linear Ajustável para Graduação da Loucura Aleatória, Desvairada e Alucinada (Claglada) é calculada da seguinte forma:

$$GC \text{ (Grau de Cagada)} = \text{Log}_{10}(T) + \text{Log}_{10}(D) - \text{Log}_{10}(P)$$

Onde T representa o tempo que o episódio durou; D, o valor monetário ou sentimental de qualquer coisa ou pessoa que você tenha acidentalmente quebrado ou ateado fogo, e P, a proximidade em relação às pessoas que podem ajudar.

Se algum dia, a Claglada for adotada como procedimento científico padrão, não vamos deixar ninguém mudar a sigla. Como meu sobrenome é Blanckman, e o da Ingrid, Immar-Groenberg, poderíamos ter batizado de Big Claglada, mas acabamos decidindo que só Claglada era a alternativa mais classuda. Quando o seu próprio estilo de loucura te dá um soco na cara, a Claglada mede o grau de dificuldade para você sair da lona. A gente se baseou na escala Richter: tremores violentos, abalos sísmicos secundários e estragos. As crises de pânico são nossa forma específica de terremoto.”

Se considerarmos que Peter teve uma crise de 20 minutos, causando um prejuízo de R\$ 5.000,00 e a sua mãe estava por perto, então a proximidade de pessoas que podem ajudar é igual a 10, qual foi o grau da Claglada?

ROTEIRO DE APRENDIZADO

Conceito de logaritmo

1 Como você interpreta a expressão $\log_2 16 = 4$?

2 Utilizando a definição de logaritmo, calcule o valor de x:

a) $\log_7 49 = x$

b) $\log_x 25 = 2$

c) $\log_4 x = -3$

3 Agora, considere os logaritmos, nos quais o logaritmando não é positivo, e use definição para tentar calcular o valor de x:

a) $\log_2 (-8) = x$

b) $\log_3 0 = x$

4 Qual a conclusão que você chega observando os logaritmos da questão anterior?

- 5 Considere agora logaritmos com base negativa, 0 e 1, tente calcular o valor de x:
 a) $\log_{-2} 8 = x$ b) $\log_0 7 = x$ c) $\log_1 5 = x$

- 6 Analisando os resultados da questão anterior, quais suas conclusões?

Propriedades de logaritmos

- 1 Resolva as questões abaixo:

- a) $\log_2 8 =$
 b) $\log_2 4 =$
 c) $\log_2 8 + \log_2 4 =$
 d) $\log_2 (8 \cdot 4) =$

- e) $\log_3 9 =$
 f) $\log_3 81 =$
 g) $\log_3 9 + \log_3 81 =$
 h) $\log_3 (9 \cdot 81) =$

- 2 Vocês repararam que o resultado do item d é igual ao resultado do item c, e que o resultado do item g é igual ao item h? Tente fazer uma generalização.

3 Calcule os seguintes logaritmos:

a) $\log_{10} 10000 =$

b) $\log_{10} 10 =$

c) $\log_{10} 10000 - \log_{10} 10 =$

d) $\log_{10} (10000 : 10) =$

e) $\log_3 243 =$

f) $\log_3 27 =$

g) $\log_3 243 - \log_3 27 =$

h) $\log_3 (243 : 27) =$

4 O que você observa na questão anterior? É possível generalizar esses resultados?

5 Agora, calcule os logaritmos abaixo:

a) $\log_5 25 =$

b) $\log_5 (25)^2 =$

c) $2 \cdot \log_5 25 =$

d) $\log_2 32 =$

e) $\log_2 (32)^3 =$

f) $3 \cdot \log_2 32 =$

6 Analisando os resultados da questão anterior o que você percebe? Tente generalizar os resultados.

7 Desafio: Com uma calculadora capaz de calcular logaritmos na base 10, determine o valor de $\log_2 5$.

8 De uma forma geral, os cálculos que fizemos no desafio da questão 7, tratam da propriedade conhecida como mudança de base. Generalize o resultado encontrado.

Escala logarítmica

Assista o vídeo sobre escala logarítmica da Khan Academy, no link abaixo, depois responda as perguntas.

<https://pt.khanacademy.org/math/algebra2/exponential-and-logarithmic-functions/logarithmic-scale/v/logarithmic-scale>

1 O que você entendeu? Como funciona a escala logarítmica?

2 No livro “Alva lebre, lobo avermelhado”, Peter e Ingrid criaram uma escala logarítmica para medir a intensidade de suas crises: a “Claglada”. Sabendo que Peter teve uma crise de magnitude 4 e Ingrid de magnitude 6, a crise de Ingrid foi quantas vezes maior que a crise de Peter?

3 A Escala Richter mede a magnitude de um terremoto. Os terremotos originam-se dos movimentos das placas tectônicas. O atrito de uma placa contra outra forma ondas que são responsáveis pelas vibrações que causam o terremoto. O sismógrafo é um aparelho que mede a amplitude e a frequência destas vibrações, utilizando uma escala logarítmica podemos calcular a intensidade do terremoto.



Figura 1 – Escala Richter

Fonte: <https://www.sanarmed.com/escala-richter-em-foco-columnistas>. Acesso 02/03/21.

O maior terremoto já registrado em solo brasileiro ocorreu em Mato Grosso, há exatos 60 anos. O tremor de terra, de magnitude 6,2 na escala Richter, foi na Serra do Tombador, região Norte do estado, a 100 km da cidade de Porto dos Gaúchos, no dia 31 de janeiro de 1955.

Associando os estragos das crises na escala Claglada com os estragos causados por terremotos na escala Richter, como podemos interpretar a crise de Peter, que foi de magnitude 4? E a crise de Ingrid, que foi de magnitude 6?

Resolvendo a situação problema

O texto abaixo é um trecho do livro *Alva lebre lobo avermelhado: esta história é falsa* de Tom Pollocck.

“Bem-vindo à Claglada. A Classificação Logarítmica Linear Ajustável para Graduação da Loucura Aleatória, Desvairada e Alucinada (Claglada) é calculada da seguinte forma:

$$GC \text{ (Grau de Cagada)} = \text{Log}_{10}(T) + \text{Log}_{10}(D) - \text{Log}_{10}(P)$$

Onde T representa o tempo que o episódio durou; D, o valor monetário ou sentimental de qualquer coisa ou pessoa que você tenha acidentalmente quebrado ou ateado fogo, e P, a proximidade em relação às pessoas que podem ajudar.

Se algum dia, a Claglada for adotada como procedimento científico padrão, não vamos deixar ninguém mudar a sigla. Como meu sobrenome é Blanckman, e o da Ingrid, Immar-Groenberg, poderíamos ter batizado de Big Claglada, mas acabamos decidindo que só Claglada era a alternativa mais classuda. Quando o seu próprio estilo de loucura te dá um soco na cara, a Claglada mede o grau de dificuldade para você sair da lona. A gente se baseou na escala Richter: tremores violentos, abalos sísmicos secundários e estragos. As crises de pânico são nossa forma específica de terremoto.”

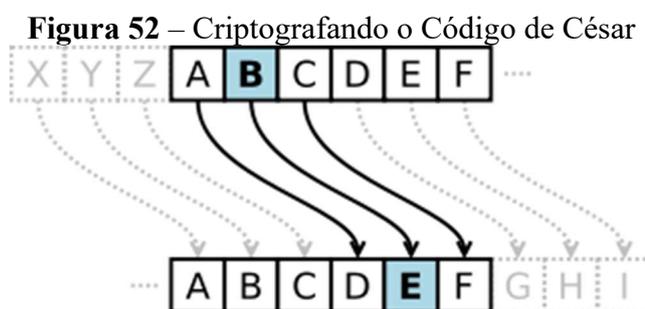
Se considerarmos que Peter teve uma crise de 20 minutos, causando um prejuízo de R\$ 5.000,00 e a sua mãe estava por perto, então a proximidade de pessoas que

CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES FINAIS

APÊNDICE F – Código de César

De acordo com a página da *Wikipédia* – A enciclopédia livre – o código de César ou cifra de César é uma das mais simples e conhecidas técnicas de criptografia, baseada na substituição de cada letra do texto por outra, que se apresenta no alfabeto abaixo dela um número fixo de vezes. O nome do método é em homenagem ao imperador romano Júlio César, que o usava para se comunicar com seus generais. A transformação pode ser representada alinhando-se dois alfabetos; deslocando o alfabeto cifrado um determinado número de posições. Por exemplo, aqui está uma cifra de César usando uma rotação à esquerda de três posições:

Observe a Figura 54, que mostra o deslocamento das letras:



Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Cifra_de_C%C3%A9sar. Acesso em 19/07/21.

Ficando assim:

Normal: ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ
 Cifrado: DEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZABC

Para mandar uma mensagem, deve-se simplesmente observar cada letra da mensagem na linha "Normal" e escrever a letra correspondente na linha "Cifrado". Para descriptografar, deve-se fazer o contrário. Por exemplo:

Normal: Eu gosto de estudar.
 Cifrado: HX JRVWR GH HVWXGDU.

No endereço eletrônico <https://rot13.com/> é possível cifrar e decodificar mensagens.

APÊNDICE G – Estudo de Redes

Apresentado pelos alunos: K.F., G.D., E.C., A.T. e M.S.

Sites: <https://www.bbc.com/portuguese/geral-44157282>

https://repositorio.ufsc.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/96608/Dyan_Carlo.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Jogo online: <https://apps.univesp.br/repositorio/o-labirinto-de-konigsberg/>

Resumo da apresentação:

Enquanto trabalhava em São Petersburgo, o matemático suíço Leonard Euler tomou conhecimento do enigma das sete pontes de Königsberg. A cidade prussiana de Königsberg estava dividida em quatro regiões diferentes banhadas pelo rio Pregel. Sete pontes conectavam essas quatro áreas e, na época de Euler, um passatempo comum entre os residentes era tentar encontrar uma maneira de cruzar todas as pontes apenas uma vez e voltar ao ponto de partida. Na figura 55 temos o mapa das pontes de Königsberg.

Figura 53 – Pontes de Köninsberg

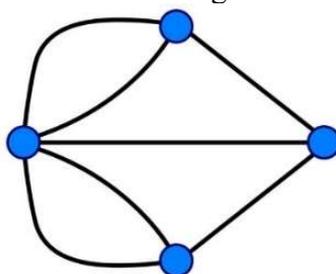


Fonte: <https://www.bbc.com/portuguese/geral-44157282>. Acesso em 01/08/21.

Em vez de caminhar interminavelmente pela cidade, testando diferentes rotas, Euler criou uma nova “geometria de posição”, pela qual medidas como longitude e ângulo são irrelevantes. O que importa é verificar como as coisas estão conectadas. Euler decidiu pensar nas diferentes regiões de terra separadas pelo rio como pontos, e as pontes que as unem, como linhas que conectam os pontos. A Figura 56 ilustra o grafo feito por Euler para representar o desafio das pontes de Königsberg.

Euler descobriu o seguinte: para que uma viagem de ida e volta (sem retornar pelo mesmo caminho) seja possível, cada ponto — com exceção do ponto de partida e do ponto final — deve ter um número par de linhas entrando e saindo. A vantagem da regra de Euler é que ela funciona para qualquer situação.

Figura 54 – Grafo do enigma de Königsberg



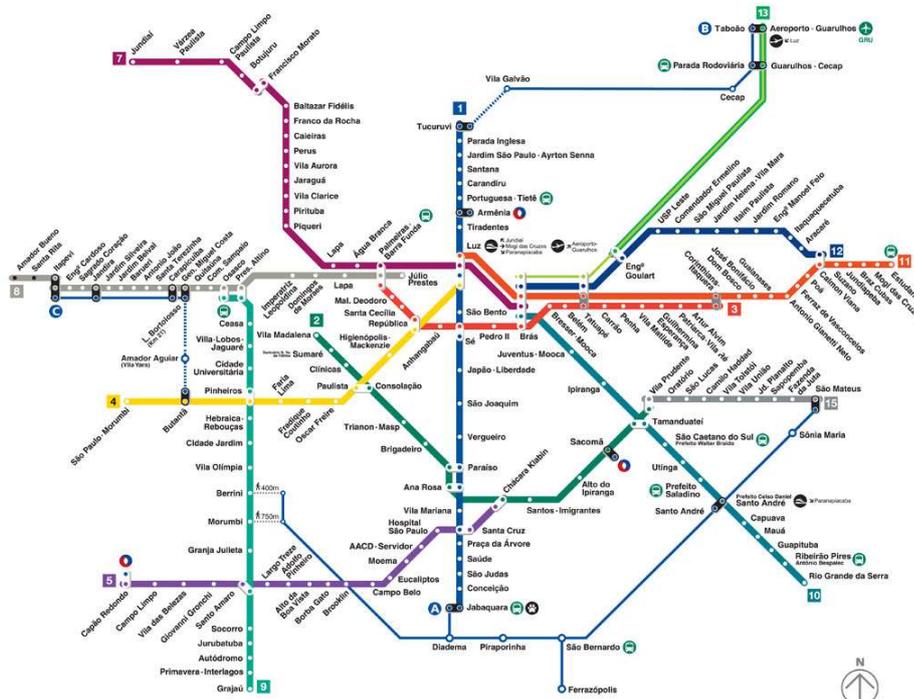
Fonte: <https://www.bbc.com/portuguese/geral-44157282>. Acesso em 01/08/21.

Quando analisou o mapa das sete pontes de Königsberg dessa maneira, o matemático descobriu que cada ponto, ou pedaço de terra, tinha um número ímpar de linhas ou pontes que emergiam delas. Assim, sem ter que caminhar pela cidade, Euler descobriu matematicamente que era impossível andar por toda a cidade cruzando cada ponte apenas uma vez.

Nesse ponto os alunos nos direcionaram para um jogo *online* chamado Labirinto de Königsberg, para podermos compreender a solução dada por Euler.

Uma clássica utilização dos grafos está em descobrir o menor trajeto de um ponto para outro, utilizando as arestas como ruas ou trilhos, por exemplo, e os cruzamentos como vértices. Dessa forma, através da observação do grafo desenhado, surge a possibilidade de redefinir malhas viárias ou desenvolver rotas mais rápidas. Observe a Figura 57 com a representação do metrô de São Paulo usando grafos.

Figura 55 – Grafo do metrô de São Paulo



Fonte: <https://www.metrocptm.com.br/veja-o-mapa-de-estacoes-do-metro-e-cptm/>. Acesso 01/08/21.

A solução matemática ao enigma de Königsberg também é utilizada em uma das redes mais importantes do século XXI: a *internet*, que conecta milhões de computadores em todo o mundo e move dados digitais entre eles numa velocidade incrível. Uma possibilidade de utilização dos grafos é a representação de relações pessoais, simbolizando as pessoas por vértices e a ligação entre elas por arestas, assim as conexões do Facebook, por exemplo, e a maneira como as sugestões de amizade surgem podem ser facilmente representadas um grafo. Usando um grafo, a plataforma consegue descobrir qual sugestão está mais conectada às pessoas que já fazem parte da sua rede de amizade e, assim, potencializar as chances de você aceitar essa sugestão.

Outra aplicação da teoria de grafos é na solução de Labirintos, descobrindo uma maneira de como encontrar a saída de um labirinto a partir de uma entrada, ou caso estarmos dentro do labirinto, estabelecer um método que nos leve a uma saída. O mais conhecido, antigo e simples é o método de "seguir a parede". Resumidamente, você põe a mão na parede e começa a andar, sempre mantendo contato entre elas. Caso você não comece ou termine no centro do labirinto, eventualmente você conseguirá sair.

Aqui analisaremos o caso de estarmos dentro do labirinto sem termos ideia do formato ou tamanho do labirinto, mas com a condição de podermos fazer marcações nas paredes e no chão do labirinto, esse algoritmo é chamado: algoritmo de busca em profundidade para Labirintos. A ideia desse algoritmo é transformar os corredores do labirinto em arestas, e os cruzamentos em vértices, da seguinte maneira:

- i) Em cruzamentos é atribuído um vértice para o lugar onde os corredores se encontram e um vértice para cada um dos corredores ligados a esse cruzamento.
- ii) Caso tenhamos um corredor sem saída, adicione um vértice e um laço a esse corredor.

Executando-se essas associações, podemos utilizar o seguinte algoritmo para encontrar a saída do Labirinto: escolha um caminho de partida, nunca siga o mesmo caminho duas vezes; se você chegou a uma encruzilhada nova, não importa o caminho a seguir; se algum caminho leva a um cruzamento velho, ou um beco sem saída, você deve voltar à entrada do caminho; se um caminho velho leva a uma encruzilhada já passada, você deve escolher outro caminho. Seguindo essas regras, em algum momento você sairá do labirinto.

APÊNDICE H – Paradoxo do Mentiroso

Apresentado pelos alunos: L.H., C.F., E.F., J.S. e A.B.

Site: <https://divagacoesligeiras.blogs.sapo.pt/as-contradicoes-da-linguagem-o-616158>

Vídeo: <https://www.youtube.com/watch?v=am2FOdZsuok&t=299s>

Resumo da apresentação:

Paradoxos fascinam pela simplicidade, mas também pela intensidade dos abalos que produzem, estimulam o raciocínio e a criatividade. Um paradoxo surge quando um conjunto de premissas aparentemente inquestionáveis dá origem a conclusões inaceitáveis ou contraditórias. Deste modo, os paradoxos são sempre um desafio para o pensamento.

Um dos mais famosos paradoxos, que ainda é amplamente debatido até hoje, foi proposto pelo antigo filósofo grego Eubulides de Mileto, no século IV a.C., que propôs o seguinte:

“Um homem afirma que está mentindo. O que ele diz é verdadeiro ou falso?”

Não importa como a pessoa responda a essa pergunta, haverá problemas porque o resultado é sempre uma contradição. Se afirmarmos que o homem está falando a verdade, isso quer dizer que ele está mentindo, o que, então, significaria que a frase inicial dele é falsa. Se dissermos que a afirmação inicial dele é falsa, isso quer dizer que ele não está mentindo e, assim, o que ele afirmou é verdadeiro.

No entanto, não é possível haver uma frase que é simultaneamente verdadeira e falsa. Outro exemplo é dado na Figura 58.

Figura 56 – Paradoxo do mentiroso



Fonte: <https://joasejoanas.com/822-o-paradoxo-do-mentiroso/>. Acesso 01/08/21.

O paradoxo do mentiroso abrange afirmações como: Esta afirmação é falsa.

Se “esta frase é falsa” for verdadeiro, então a frase é falsa, mas então se “esta frase é falsa” for falso, então a frase é verdadeira, e assim por diante.

Uma análise do paradoxo mostra que a sentença não pode ser verdade (porque alega ser falsa), nem é falsa (porque seria verdadeira). No teorema da Incompletude, uma sentença de Gödel G para a teoria T conduz a uma alegação similar à alegação do mentiroso, mas com uma demonstrabilidade trocada: G diz “ G não é demonstrável na teoria T ”. A análise da verdade e demonstrabilidade de G é uma versão formalizada da análise da verdade da sentença do mentiroso.

O primeiro teorema da incompletude mostra que qualquer sistema formal consistente, que inclui o suficiente da teoria dos números naturais, é incompleto: existem afirmações verdadeiras expressáveis em sua linguagem que são indemonstráveis dentro do sistema. Então, nenhum sistema formal (satisfazendo as hipóteses dos teoremas), que visa a caracterizar os números naturais, pode realmente fazer isso, pois existirão afirmações verdadeiras que o sistema não pode provar.

APÊNDICE I – Sequência de Fibonacci

Apresentado pelos alunos: A.Q., E.G., I.C., N.G., A.F. e E.H.

Site: <https://www.todamateria.com.br/sequencia-de-fibonacci/>

Vídeo: <https://www.youtube.com/watch?v=NikJFjaWgi8>

Resumo da apresentação:

A sequência de Fibonacci é a sequência numérica proposta pelo matemático Leonardo Pisa, mais conhecido como Fibonacci, a partir de um problema criado por ele mesmo para descrever o crescimento de uma população de coelhos. A sequência é a seguinte:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \dots$$

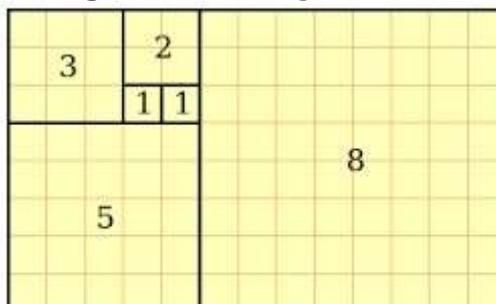
A sequência é definida mediante a seguinte fórmula: $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, sendo que F_1 e F_2 são iguais a 1. A sequência começa pelo número 1, sendo que este se repete e, posteriormente, a soma dos dois últimos numerais forma o próximo: $1 + 1 = 2$. Depois a sequência continua a somar-se: $1 + 2 = 3$; $2 + 3 = 5$; $3 + 5 = 8$; e assim infinitamente.

Esta sequência de números está, misteriosamente, interligada com diversos fenômenos da natureza. São exemplos disso as folhas das árvores, as pétalas das rosas, os frutos como o abacaxi, as conchas espiraladas dos caracóis, as galáxias, o rabo do camaleão e as sementes do girassol.

Fibonacci dividiu um número pelo anterior e constatou que todos os resultados convertem para 1,618, considerado o número de ouro. Curiosamente, o número de ouro também é chamado de Phi (Φ).

A partir da sequência de Fibonacci, pode ser construído um retângulo, chamado de Retângulo de Ouro. Veja na Figura 59.

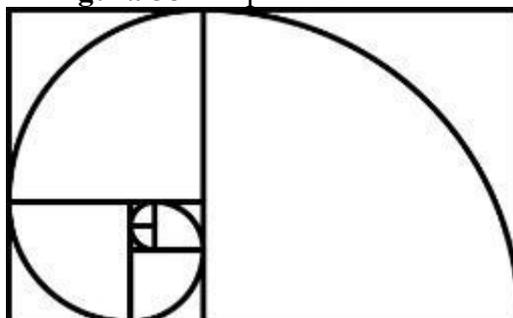
Figura 57 – Retângulo de ouro



Fonte: <https://www.todamateria.com.br/sequencia-de-fibonacci/>. Acesso 01/08/21.

Ao desenhar um arco dentro desse retângulo, obtemos, por sua vez, a Espiral de Fibonacci. A Figura 60 mostra essa espiral.

Figura 58 – Espiral de Fibonacci



Fonte: <https://www.todamateria.com.br/sequencia-de-fibonacci/>. Acesso 01/08/21.

APÊNDICE J – Resumo da obra *Alva lebre lobo avermelhado: esta história é falsa*

Primeira parte: Encriptação

Peter Blanckman é um jovem de 17 anos, muito inteligente, um prodígio da Matemática e mora em Londres. Ele também sofre com fortes crises de pânico e sente medo de tudo. Para conseguir conviver com as crises constantes de pânico, Peter se apoia na Matemática e segue alguns passos para se controlar: primeiro tem que se mexer, depois falar, em seguida tem que contar e, se nada resolver, tem que comer.

A história começa com Peter passando a noite acordado, preocupado com a cerimônia de premiação da sua mãe, a Dra. Blanckman, uma neurobiologista muito famosa. Ele estava com medo de ter uma crise lá e estragar tudo. Assim, acabou passando a noite em claro e tendo uma crise às quatro da manhã. Seguiu os passos para se controlar, mas dessa vez não deu certo e só parou depois de bagunçar a cozinha atrás de comida e mastigar um saleiro de porcelana.

Sua mãe, que estava acordada àquela hora, o ouviu e tirou os cacos de porcelana de sua boca. Quando sua mãe começou a limpar a cozinha, Peter disse que faria sozinho. Mas, Anabel, que também estava acordada às quatro da manhã, apareceu para ajudá-lo. Bel é a irmã gêmea de Peter, apenas oito minutos mais velha, mas para ela isso era tudo. Peter pensou em como ele e Bel formavam uma boa dupla, afinal, ela era seu axioma.

Peter sempre foi muito dependente da irmã. Lembrou de uma vez que Bel o defendeu dos valentões da escola e sua mãe foi chamada pela diretora. Peter estava com medo, mas Bel o acalmou passando uma mensagem secreta com o Código de César, a mais simples das formas de encriptação. O Código de César era o jeito que eles tinham de mostrar cumplicidade e afeto.

Na manhã seguinte Peter contou para a Ingrid, sua melhor amiga, sobre a crise que teve, que foi de nível 4 na “Escala Claglada”, a escala que eles inventaram, para quantificar suas crises, usando logaritmos. Peter passou o dia com a sensação de que iria estragar a cerimônia de premiação de sua mãe com uma de suas crises. Para se acalmar conversou com Bel, Ingrid e até com os matemáticos que estavam no pôster do seu quarto. Também tentou encontrar a Matemática de si mesmo escrevendo no seu caderno chamado ARIA (Algoritmos Recursivos Intuitivos e Autônomos).

Lembrou da vez que voltou para casa sem as calças quando foi comprar *donuts*. Tinha ficado tão apavorado que fantasiou ser o agente Blanckman, seu “alter ego” corajoso.

A caminho do Museu de História Natural, onde sua mãe seria homenageada, ele já sentia a crise se aproximando. A Dra. Blanckman bem que tentou acalmá-lo dizendo “nada que fizer

vai estragar esse momento”, pois só estava recebendo o prêmio devido a seus filhos. Peter realmente tentou se controlar. Mas, pouco antes da cerimônia, ele ficou totalmente em pânico e saiu correndo. Sua mãe e a Bel foram atrás dele.

Perdido no museu ele ouviu sua mãe pedir ajuda. Quando a encontrou, ela estava gravemente ferida, fora esfaqueada. Rita apareceu dizendo ser amiga de sua mãe e iriam levá-la para o hospital. Só quando Rita perguntou da Anabel é que Peter percebeu que sua irmã havia sumido.

Nesse momento, Peter se sentiu desesperadamente sozinho. A irmã e a mãe sempre o apoiaram e o amaram, agora era elas que precisavam de ajuda. Peter soube que deveria usar suas extraordinárias habilidades analíticas para encontrar sua irmã desaparecida e rastrear as pessoas que atacaram sua mãe. Mas, sua maior batalha seria contra o inimigo interno: o medo constante que ameaçava dominá-lo. Peter era alguém quebrado tentando ser corajoso.

Peter relembra de cinco anos atrás quando Bel estava tentando ensiná-lo a pular de um muro, de 3 metros de altura, no descampado atrás da escola. Aquele lugar era o segredo deles. Bel tentou convencer Peter a pular o muro usando a Matemática, mas ele acabou pulando foi para fugir de Ben Rigby, o valentão da escola e que o deixou sem calças no outro dia.

De volta ao agora, Peter deduziu que Rita estava mentindo e que não foi uma equipe médica que levou sua mãe. Rita também o chamou pelo codinome “alva lebre” e deu a entender que o “lobo” levou a Bel. Ele estava com muito medo quando foi levado para o 57. Parecia uma casa comum, mas havia uma passagem secreta que dava em um corredor com muitas entradas, como um labirinto. Assim, Peter soube que aquele lugar era uma agência secreta do governo e sua mãe era uma cientista que trabalhava para eles.

Ao se envolver com uma agência secreta Peter percebe que o que aconteceu com a mãe e a irmã é muito maior do que ele imaginava. As pessoas que estavam lá pareciam estar preocupadas com sua mãe e queriam ajudar a encontrar a Bel. O estranho é que aquelas pessoas pareciam saber mais da vida do Peter do que ele próprio. Também simulavam aleatoriedade, o que é uma coisa difícil de fazer.

No entanto, Peter sabia que só era bom em uma coisa neste mundo abençoado por Gödel: padrões. Ele só tinha que enxergar o padrão. Ao assistir às imagens das câmeras de segurança do museu percebeu que faziam uma parada aos nove, quatorze, dezessete e dois segundos exatamente depois do minuto. Também descobriu que o laboratório onde sua mãe trabalhava foi invadido às quatro da manhã e apagaram todos os arquivos dos *drives*. Foi assustador perceber que não estavam atrás apenas de sua mãe e de seu trabalho, estavam atrás dele e da Bel.

Na recursão, ele lembrou de uma aula de Matemática, a três anos atrás, com o professor Arthurson, seu professor cego, onde percebeu que a colega Ingrid estava fazendo o mesmo exercício extra de cálculo diferencial que ele. Assim, começaram trocar mensagens cifradas pela calculadora. Ele teve a sensação de estarem no mesmo comprimento de onda e aquilo era fantástico. Até combinaram de se encontrar no almoço, porém Ingrid não apareceu no refeitório. Ela ficou quarenta minutos no banheiro lavando as mãos.

As meninas que estavam lá no banheiro saíram apavoradas quando viram Peter, era como se seu próprio medo estivesse refletido nelas. Ingrid admitiu ter TOC — transtorno obsessivo compulsivo, e sentia medo do próprio pai. Às vezes, ter coragem é a mesma coisa que saber qual é o seu maior medo. Peter sabia que o único medo da Bel era que algo acontecesse com ele.

A Dra. Blanckman estava inconsciente depois da cirurgia, mas Frankie e Rita — agentes do 57 — levaram o Peter, até a sala improvisada de hospital, para ver a mãe. Elas pareciam amistosas, mas, na verdade, era um interrogatório sobre Bel, queriam saber onde Bel estava. Criaram uma história sobre como o pai de Peter devia ter envolvido Bel para conseguir informações sobre as pesquisas de sua mãe. Peter sabia que Bel não trairia a família.

Nesse momento, ele recordou do relógio da câmera de segurança do museu e percebeu ser uma mensagem da Bel, uma mensagem usando o Código de César com números. Significava: CORRE! Só que é tarde para correr. Peter foi capturado.

Relembrou de quando Ingrid foi até sua casa e viu os cadernos de ARIA pela primeira vez. Peter lhe explicou que a essência do que somos é a memória e a essência da memória é a recursão, então estava tentando uma demonstração matemática e irrefutável de quem somos e assim poder descobrir, através da Matemática, do que ele tinha tanto medo.

De volta ao presente, Peter acordou amarrado e recebeu alguns choques que deixaram seus pensamentos uma bagunça. Ele foi interrogado pela Ingrid. Sua melhor amiga estava interrogando-o. De alguma maneira ela estava verbalizando todos os seus pensamentos. Ela lhe contou que, na verdade, se chamava Ana Black e era um espelho. Ou seja, tinha 200% a mais de neurônios espelhados, assim, tudo o que Peter sentia, ela sentia e tudo o que Peter pensava, ela pensava.

Mas Peter não queria entregar a irmã e começou a contar raízes quadradas com seis casas decimais para se distrair, mas exausto, vê o lugar secreto deles, no descampado atrás da escola. Nesse momento também vê a Ingrid chorando e percebe que ela realmente é sua amiga. Aí eles inventaram que Bel está com um namorado para ganhar tempo com a agência 57.

Peter lembrou de uma das aulas extras de Matemática que teve com Arthurson, onde o professor lhe disse que ele parecia com o Gödel, o “senhor por quê”. Arthurson lhe deu o endereço de sua casa, para que Peter tivesse um refúgio, caso algum dia precisasse. Naquele dia, sua mãe se atrasou para buscá-lo na escola e Bel estava suspensa, então, Peter foi até a biblioteca pesquisar sobre Gödel e viu o teorema indemonstrável.

O seu ARIA dependia do pressuposto de que qualquer problema matemático podia ser demonstrado. E havia uma equação que não podia ser demonstrada. Suas esperanças foram destruídas. Sem o ARIA ele nunca saberia do que tinha tanto medo. Saiu da biblioteca chorando, na chuva, e encontrou Ben Rigby, o valentão da escola. Ben seguiu Peter pela escola até o telhado. Ben estava tão apavorado quanto Peter, mas mesmo assim mandou ele pular do telhado. Peter pulou.

No agora, Peter acordou em uma sala que mais parecia um armário. Ingrid levou comida para ele. Ela explicou que o pai dela era o diretor da agência e aceitou que fizessem experimentos com ela desde que nasceu. Confessa que sua missão nos últimos três anos era se aproximar de Peter. Juntos eles conseguem fugir do 57 e ir até o descampado atrás da escola para encontrar Bel.

Não tinha ninguém lá. Mas ele viu uma maçã ainda branca e soube que sua irmã esteve ali a pouco tempo. Então, ele se dá conta de como foi fácil escapar do 57 e diz, bem alto, que a Bel não está ali, para que o pessoal da agência secreta ouça e apareça. Eles aparecem, cercam Peter e Ingrid, mandam Peter se virar para o muro e não olhar para ninguém. Nisso Bel sai debaixo das folhas secas e mata três pessoas em três segundos, cortando o pescoço delas. Quando Peter vê a faca que Bel usou a reconhece do museu e percebe que foi Bel quem esfaqueou a própria mãe.

Peter quis saber como Bel acabou de matar agentes treinados. Bel diz que do mesmo jeito que ele aprendeu cálculo diferencial ela estudou e, quando dominou a teoria, praticou. Peter ficou assustado com Bel e quis saber por quê ela esfaqueou a própria mãe. A resposta foi: “ela me fez ficar furiosa”.

Peter percebe que o pai nunca esteve ali, foi uma manipulação da agência 57. Era da Bel que eles tinham medo. Bel era o “lobo avermelhado”. Mas eles precisavam sair dali antes que a agência mandasse reforços, então Bel foi para a escola, para despistá-los, e Peter segue com a Ingrid pelo bosque que tinha atrás da escola.

Segunda parte: Inversão

Peter e Ingrid acabaram voltando para a escola, ficaram escondidos lá até o dia seguinte, depois foram para a casa de uma colega que estava viajando com a família e havia deixado a casa vazia. Lá tiveram tempo de pesquisar sobre os crimes não resolvidos nos últimos dois anos para ver se encontravam um padrão, o padrão da Bel, afinal, ela disse que estudou e praticou assassinato. Peter pesquisou até perceber um padrão na aleatoriedade: a cada nove semanas um homem acusado de violência doméstica era morto. Mais ainda, Dominic Rigby, pai do Ben, se encaixava no perfil, e de alguma maneira sobreviveu ao ataque da Bel.

Peter recorda dele e sua irmã vendo um incêndio a noite. Também relembra quando Bel disse que foi atacada por um cara quando saiu do metrô, ao voltar de um show, e matou esse cara. Peter não fez muitas perguntas, normalmente ficaria com muito medo, mas não estava sozinho, estava com sua irmã, sua protetora. E quando estava com ela era invencível.

Bel apenas contou que nunca tinha ouvido falar da banda à qual foi ao *show*, foi lá para ver um cara. Peter a conhecia e sabia que ela queria falar mais uma coisa, mas não tinha coragem, então usou o Código de César com a chave “te amo Bel” e foi assim que ela confessou “matei uma pessoa”. Naquele momento era sua irmã que estava precisando de ajuda e ele ajudaria. Então, Peter planejou um incêndio para se livrarem do corpo.

Em outra memória, Bel explicou como ficou com dó dos sapos dissecados na aula de biologia, aí cortou a garganta de todos eles com um bisturi para que não sofressem mais e acabou sendo suspensa na escola. Ela se sentia culpada por ter sido suspensa e Peter ter se machucado ao pular do telhado, porque não estava lá para protegê-lo.

Voltando ao presente, Peter foi ao hospital ver Dominic Rigby. Ele contou que quando o filho deles, Ben, desapareceu, a Dra. Blanckman foi até a casa deles ameaçá-los para que parassem de procurar o filho. Rachel, a esposa dele, não quis se calar, por isso ele bateu na esposa e depois a internou em um hospital psiquiátrico. Contou também que foi Bel que o torturou, por causa da Rachel, e que ela lia um caderno preto enquanto o torturava. Peter também descobriu que Rita visitou Dominic. Ou seja, a agência 57 sabia o que Bel fez, sabiam que a pessoa que Bel matou era Ben Rigby.

Na recursão Peter lembrou de quando ficou bêbado e quis queimar seus cadernos do ARIA, mas foi seu quarto que pegou fogo. Sua mãe apagou o fogo e ficou furiosa. Mas quando ela viu os cadernos do Peter, o levou até a sua sala particular, onde tinha um monte de cadernos pretos, segundo ela, com erros. Disse também que Peter era extraordinário.

Então, Peter decidiu voltar até sua casa para olhar os cadernos da mãe, ver o que Bel leu naqueles cadernos pretos, para descobrir o que tinha na pesquisa da mãe que deixou Bel furiosa.

Repassando memórias, Peter recordou de quando acordou no hospital com a perna quebrada e a cabeça enfaixada. Disse para sua mãe que estava reconhecendo o terreno e escorregou do telhado da escola. Bel quis saber a verdade. Peter lhe disse que foi porque descobriu que existem problemas insolúveis na Matemática. Ele acreditava que não havia nenhuma pergunta que a Matemática não conseguisse responder, desde que entendesse a pergunta direito. Contudo, estava enganado, a Matemática era incompleta, existem equações que a Matemática não é capaz de determinar se são verdadeiras ou falsas. Gödel provou isso em 1930.

Para saber se algo na Matemática é verdadeiro tem que provar. Para demonstrar um teorema você tem que encontrar a cadeia lógica que demonstre que o teorema é derivado de axiomas (crenças que servem de base para tudo, que aceitamos sem exigir que sejam demonstradas). Entretanto, nem toda equação tem uma demonstração, e só precisou de um exemplo contrário.

Com a frase “Esta afirmação é falsa” temos um paradoxo, porque demonstrar que a afirmação é verdadeira é demonstrar que ela é falsa. E Gödel encontrou uma equação que disse isso. Ele fez em três etapas. Etapa um: encriptação. Criou um código que transformava as equações em números, transformando a demonstração em uma relação aritmética entre números. Etapa dois: inversão. Definiu o oposto dessa relação. A relação de “não pode ser demonstrado”. Criou uma equação hipotética que, quando codificada, estabelecia essa relação com todos os números: uma equação impossível de demonstrar. Etapa três: recursão, iteração. Ele definiu a equação indemonstrável como a equação que afirmava que essa equação indemonstrável não podia ser demonstrada.

Isso quer dizer que Matemática nem sempre funciona, por isso pulou do telhado. Nunca conseguiria descobrir matematicamente porque sentia tanto medo. Bel ficou irada, queria saber por que Peter quis abandoná-la. Ele lhe disse que estava cansado de ter medo, de fugir. Bel quis saber de quem Peter estava fugindo. Ela queria um responsável, alguém para pôr a culpa. Peter podia entender de Matemática, mas Bel entendia era de sangue e ossos. Quando Peter contou que estava fugindo de Ben Rigby, desejou que ele morresse.

De volta ao presente, Peter voltou para sua casa. Ao chegar, viu que na rua só havia um carro que ele nunca vira antes, com um homem dentro. Ingrid disse que agentes do 57 ficam sempre em duplas, então o parceiro devia estar na casa. Combinaram de Peter “cuidar” do homem no carro e Ingrid do que estava na casa. Enquanto Peter se aproximava do carro e pensava no medo que estava sentindo, lembrou do medo que as pessoas sentiam quando

olhavam para ele e soube que seu medo era contagioso. Então usou seu medo para deixar o agente no carro apavorado e inconsciente.

Dentro da casa ele arrombou a sala particular da sua mãe e achou três cadernos escondidos. O primeiro tinha o título Lobo Avermelhado. Ingrid leu alguns trechos e Peter percebeu que a Anabel foi projetada para sentir raiva e ser uma assassina. Peter sentiu alívio, a culpa não era da Bel, a química do cérebro dela foi tão manipulada que ela não conseguia controlar a raiva. Mais ainda, o medo para controlar essa raiva teria que ser introduzido de fora, então, Peter descobre porque sentiu sempre tanto medo, ele foi projetado para ser assim.

No segundo caderno o título era Alva lebre. Ingrid leu: “para que o sujeito estimule as tendências violentas de LA (lobo avermelhado) com máxima eficiência, AL (alva lebre) deve ser capaz tanto de aguentar quanto transmitir uma quantia significativa de medo. A relação entre LA e AL deve ser manipulada com cuidado para a fúria de LA não afugentar AL, o ideal é serem da mesma família para AL ver LA como uma protetora.”

No terceiro caderno estava escrito Borboleta Breu e tinha o desenho de uma borboleta com asas espelhadas. Ingrid não queria que Peter lesse o caderno, pois era sobre ela. No terceiro caderno tinha relatos de experiências para “limpar” as emoções da própria BB (borboleta breu), para que BB pudesse ser um espelho das emoções dos outros.

Então, Ingrid apontou uma arma para Peter. Ingrid o traiu, sempre trabalhou para a agência 57, só ajudou Peter a fugir para encontrarem a Bel, mas eles se separaram e Ingrid teve que continuar com o disfarce, porque sabia ser a melhor maneira de chegar até a Bel.

Para conseguir fugir Peter decidiu não reprimir seu medo, usou todo o seu pânico para deixar Ingrid em pânico.

Terceira parte: Iteração

Peter foi até a casa do professor Arthurson e encontrou Bel tentando matá-lo. Peter sabia que não era por acaso que seu professor de matemática era cego. Como o mesmo lhe ensinou na primeira aula que tiveram “as chances de dois acontecimentos isolados ocorrerem por mero acaso é igual à probabilidade de um vezes a probabilidade do outro, sendo que a probabilidade dos dois juntos é menor do que cada um isoladamente”. A chance de Peter ter um professor cego e cegueira ser a única coisa que protege alguém de ser contaminado com o medo do Peter, deixava óbvio que Arthurson trabalhava para a agência secreta. Apesar disso, Peter não deixa Bel matar o professor. Assim, ela saberia ser capaz de se controlar.

Peter e Anabel decidem ir atrás da Dra. Blanckman. Sem matar ninguém. Peter convenceu Bel a não matar ninguém na agência 57.

Peter relembra de Bel ajudando-o a limpar a cozinha depois do seu ataque de pânico, a cinco dias atrás. Eles formavam uma boa equipe. Depois pensou em si mesmo como o sujeito que estimula o lobo avermelhado com máxima eficiência, formando uma boa equipe.

Eles foram até a agência 57. Conseguiram entrar sem dificuldade. Com a Bel aparecendo toda coberta de sangue depois de “dar um jeito” nos atiradores que cuidavam a entrada, ninguém ficou no seu caminho. Nos corredores que mais pareciam um labirinto, Bel foi quebrando todas as câmeras de segurança, para deixar os agentes sem saber o que estava acontecendo. Depois, Peter atraiu os agentes e saiu correndo pelo labirinto, enquanto Bel foi atrás immobilizando os agentes.

Quando finalmente chegaram na porta principal da agência teve um tiroteio com Rita. Bel é atingida, mas continua dando cobertura para Peter, que vai atrás da mãe deles. Ele vê os agentes abandonando o local e deixando o caminho livre. Lembrou de sua mãe na cerimônia de premiação dizendo que o evento só estava acontecendo graças a ele a sua irmã, que Peter era extraordinário, e soube que a mãe achava os próprios experimentos extraordinários. A Dra. Blanckman tinha orgulho dos experimentos que realizou com os próprios filhos.

Peter sente-se feliz quando vê a mãe e aponta uma arma para ela. Peter disse que descobriu tudo, que a Ingrid leu os cadernos para ele. A Dra. Blanckman falou que a Ingrid não existia. Peter tentou lembrar de interações entre Ingrid e outras pessoas e não conseguiu. Perguntou a si mesmo se a Ingrid era uma invenção sua, como o número que os matemáticos inventaram e chamaram de i ? Ele não sabia o que fazer, em que acreditar.

Mas, a Ingrid apareceu e matou a Dra. Blanckman. Bel pensou que foi Peter que matou a mãe disse que fez a coisa certa, mas precisavam sair dali, pois colocou fogo no lugar para atrasar os policiais que chegavam ao local. Bel pulou a janela, Ingrid pulou em seguida e daí foi a vez de Peter. Quando deram as mãos para saírem dali, Peter quis perguntar se Ingrid realmente estava com eles, mas não teve coragem.

Foi tudo imaginação? Encrytação, inversão, iteração. Igualzinho à demonstração de Gödel. Uma equação que não se pode determinar se é verdadeira ou falsa.

APÊNDICE K – Resumo feito pelos alunos L.H. e E.F.

Figura 59 – Resumo feito pelo aluno L.H.

Calvo Tebre apesmelhado, está histérico e
 Peter é um nerd com muitos problemas, ele tem proble-
 -mas de ansiedade e sempre é atacado pelo valentão
 da escola, o Ben Regby. Peter tem uma irmã mais velha
 e a protetora de Peter. Sua mãe, a doutora Blankman,
 é uma cientista gênica que trabalha numa agência do
 governo. Peter só tem uma amiga, a Ingrid, que é nerd
 como ele.

Sua mãe foi indicada para receber um prêmio impor-
 -tante e os gêmeos estão na cerimônia com ela, aí Peter
 tem um ataque de pânico e sai correndo, a primeira
 coisa que ele lembra é que sua mãe foi esfaqueada e sua
 irmã desapareceu.

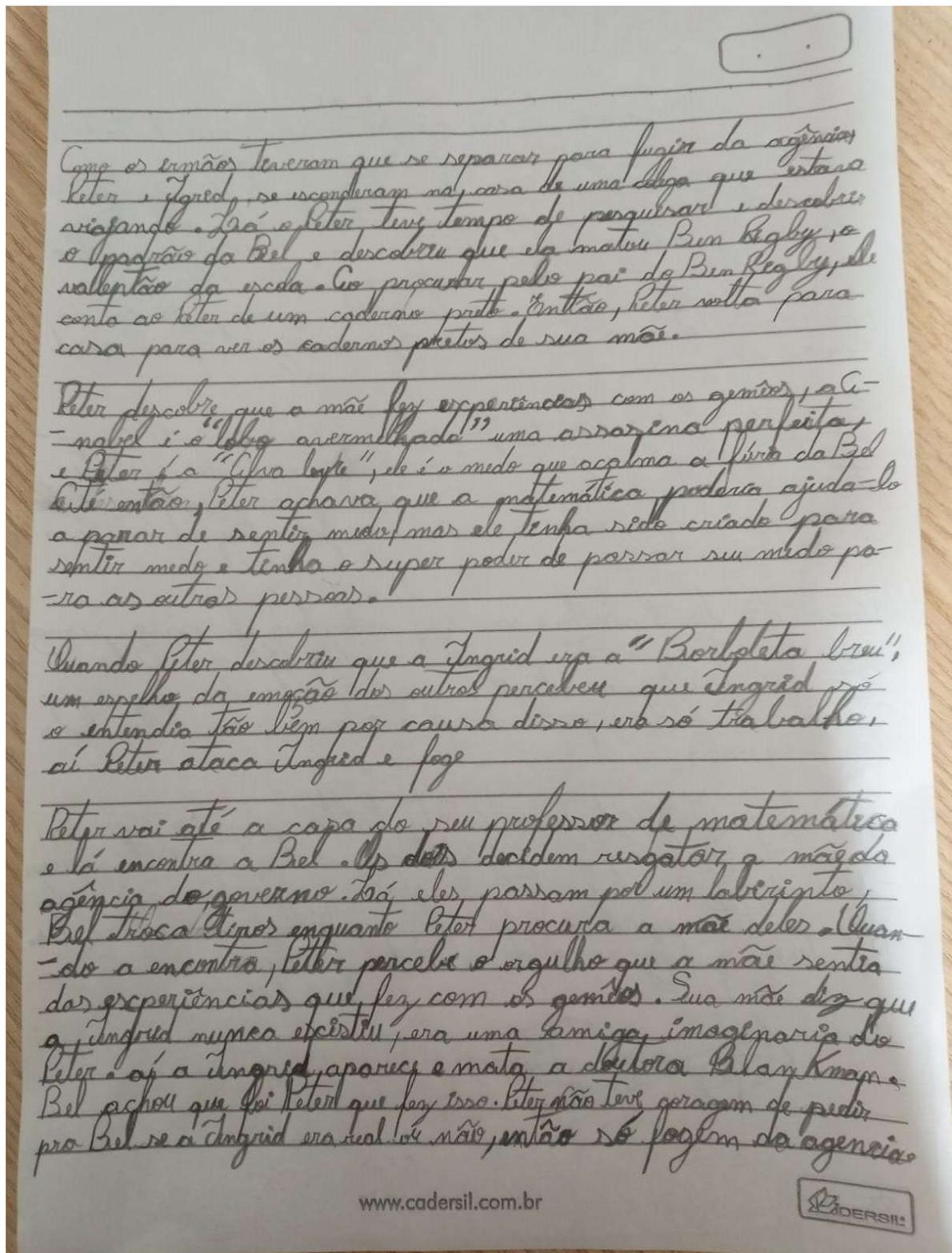
Uma dia ele trabalha com sua mãe, leva ele para uma
 agência e faz muitas perguntas sobre Bel e o Tido. Pi-
 -eter não confia em ninguém, mas decide descobrir o que es-
 -tá acontecendo e para isso vai usar suas habilidades
 com números.

Sua amiga Ingrid também trabalha para a agência
 do governo e o ajuda a fugir para encontrar Bel. quan-
 -do a encontram, Bel mata os agentes que tentam seguir
 eles, aí Peter percebe que foi o Bel que esfaqueou a mãe dele.
 Bel disse que fez isso porque estava furioso.

← pag Continuação

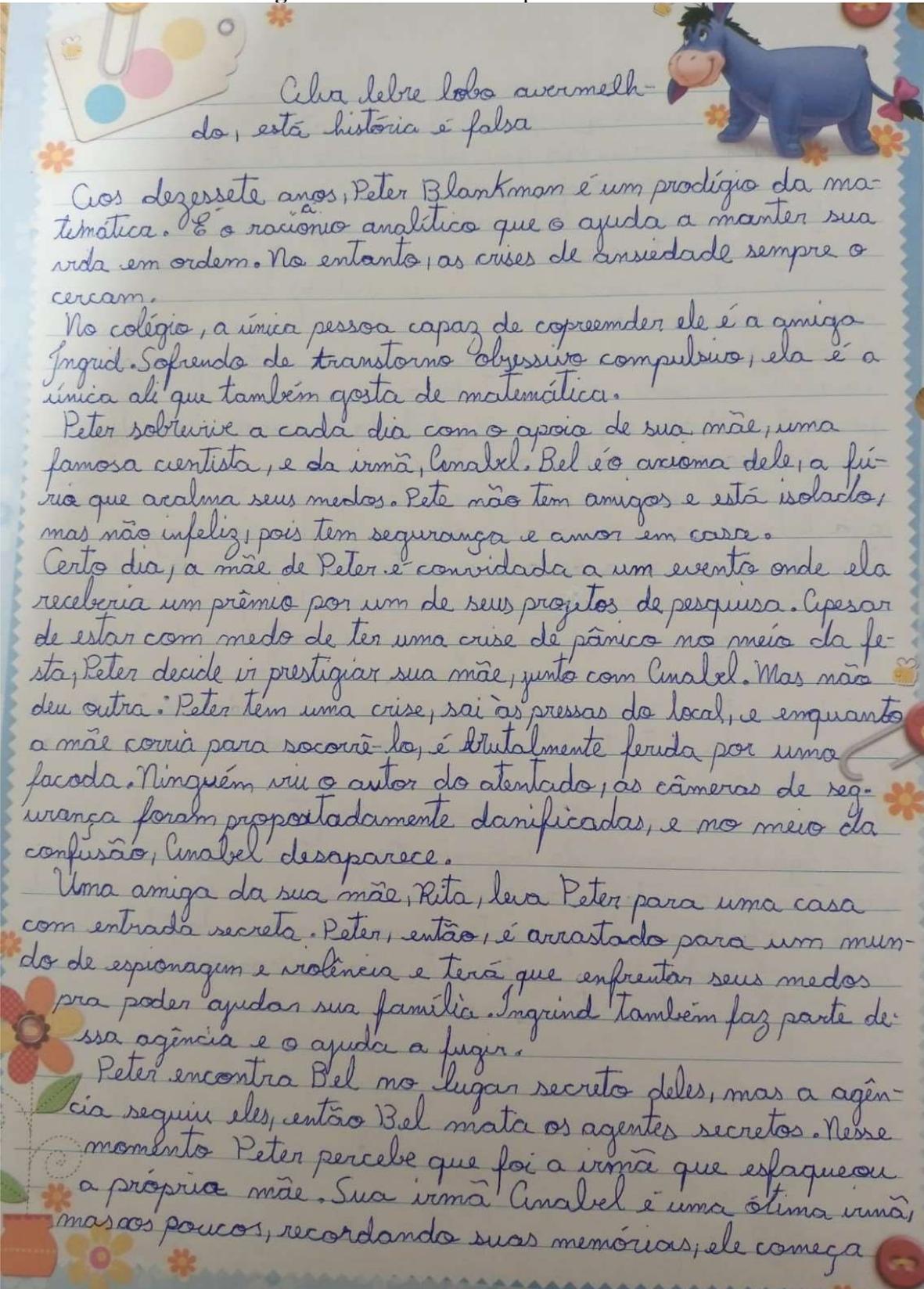
Continua

Figura 60 – Resumo feito pelo aluno L.H.
Parte final



Fonte: Registro dos alunos

Figura 60 – Resumo feito pela aluna E.F.



A lenda do lobo avermelhado, esta história é falsa

Com dezessete anos, Peter Blankman é um prodígio da matemática. É o raciocínio analítico que o ajuda a manter sua vida em ordem. No entanto, as crises de ansiedade sempre o cercam.

No colégio, a única pessoa capaz de compreender ele é a amiga Ingrid. Sofrendo de transtorno obsessivo compulsivo, ela é a única ali que também gosta de matemática.

Peter sobrevive a cada dia com o apoio de sua mãe, uma famosa cientista, e da irmã, Anabel. Bel é o axioma dele, a fúria que acalma seus medos. Pete não tem amigos e está isolado, mas não é infeliz, pois tem segurança e amor em casa.

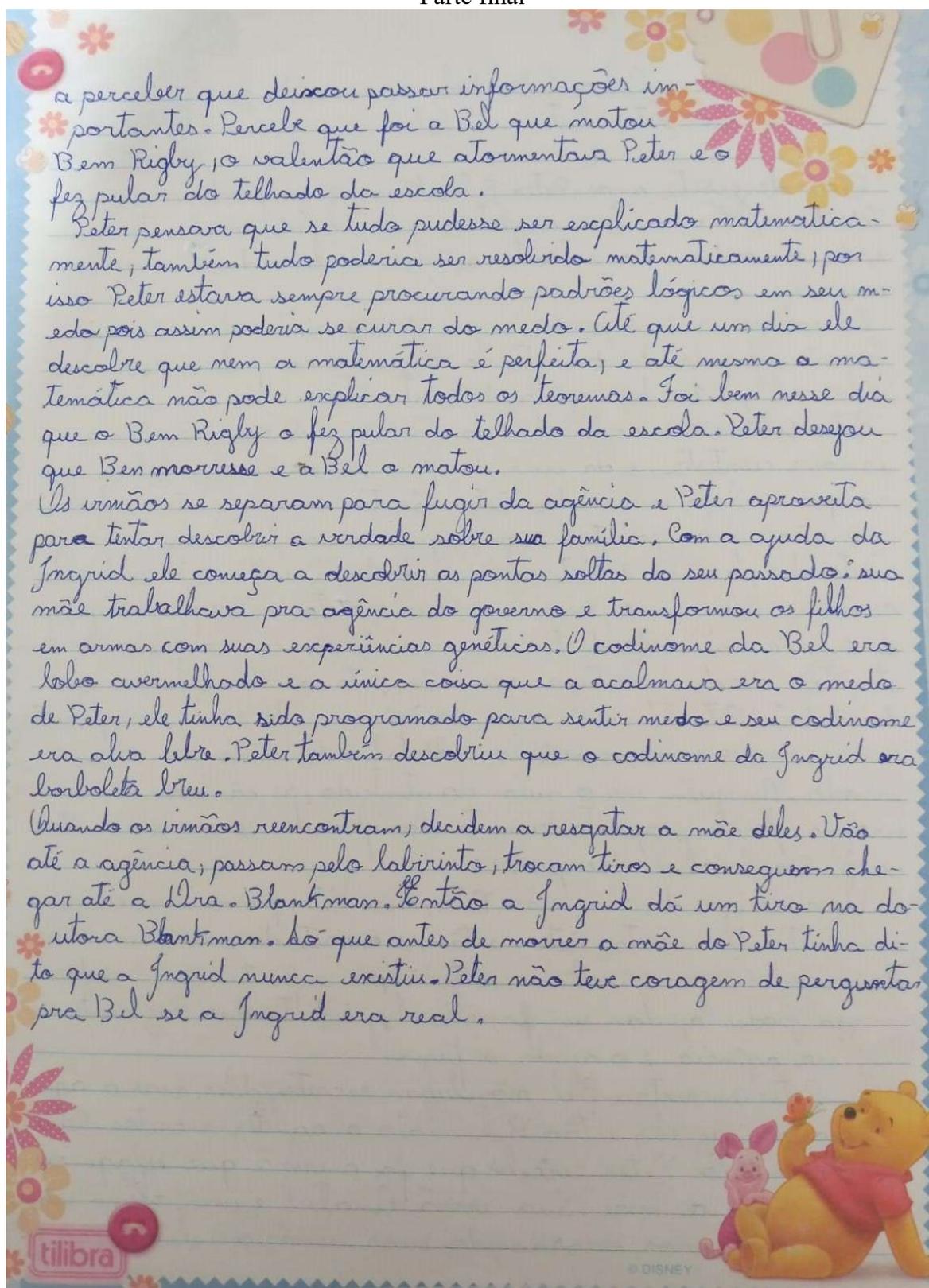
Certo dia, a mãe de Peter é convidada a um evento onde ela receberia um prêmio por um de seus projetos de pesquisa. Apesar de estar com medo de ter uma crise de pânico no meio da festa, Peter decide ir prestigiar sua mãe, junto com Anabel. Mas não deu outra: Peter tem uma crise, sai às pressas do local, e enquanto a mãe corria para socorrê-lo, é brutalmente ferida por uma facada. Ninguém viu o autor do atentado, as câmeras de segurança foram propositalmente danificadas, e no meio da confusão, Anabel desaparece.

Uma amiga da sua mãe, Rita, leva Peter para uma casa com entrada secreta. Peter, então, é arrastado para um mundo de espionagem e violência e terá que enfrentar seus medos pra poder ajudar sua família. Ingrid também faz parte dessa agência e o ajuda a fugir.

Peter encontra Bel no lugar secreto deles, mas a agência seguiu eles, então Bel mata os agentes secretos. Nesse momento Peter percebe que foi a irmã que esfaqueou a própria mãe. Sua irmã Anabel é uma ótima irmã, mas aos poucos, recordando suas memórias, ele começa

Continua

Figura 61 – Resumo feito pela aluna E.F.
Parte final



Fonte: Registro dos alunos

APÊNDICE L – Transcrição dos podcasts sobre o livro *Alva lebre lobo avermelhado: esta história é falsa*

Episódio piloto

Link: <https://anchor.fm/maria-luiza-favero2/episodes/Alva-lebre-lobo-avermelhado-e15hnji>

Transcrição:

Oi, eu me chamo Maria Luiza e vou falar um pouquinho do livro *Alva lebre lobo avermelhado* do escritor Tom Polock.

Este livro é sobre família, amor, saúde mental, traição e muito mais. Os personagens foram criados com um milhão de falhas e muitas qualidades também.

A matemática também é uma grande parte deste livro, mas eu não acho que tenha sido entediante, pelo contrário: você nunca está perdido. A maneira como Peter, o personagem principal, usa a matemática é bem interessante.

E o final é o melhor e o pior ao mesmo tempo.

Episódio 1

Link: <https://anchor.fm/alexandre-henrique638/episodes/Podcast-do-livro-alva-lebre-lobo-avermelhado--est-histria--falsa-e15hq15>

Transcrição:

Olá meu nome é A. e meu nome é E., estamos fazendo um podcast sobre o livro *Alva lebre lobo avermelhado: esta história é falsa*.

O livro é um thriller psicológico para jovens adultos e conta a história de Peter Blankman, um garoto de 17 anos gênio em matemática. Muito inteligente quando se trata de teoremas e padrões, mas muito medroso com todo o resto.

Quando conhecemos o Peter, ele está no fim de um ataque de pânico. A história gira em torno de uma tentativa de assassinato da mãe de Peter, uma cientista famosa, e o desaparecimento de sua irmã gêmea Bel. Com a ajuda de sua melhor amiga Ingrid, Peter deve tentar montar o quebra-cabeça e ajudar sua família.

É uma história de espionagem e ficção científica. Toda a história é contada a partir da perspectiva de Peter, dividida entre o agora e vários flashbacks do passado. Peter nunca sabe em quem confiar e é atingido por uma traição após outra.

É uma leitura incrível! Peter é um personagem muito adorável e engraçado.

Episódio 2

Link: <https://anchor.fm/adriany-rodrigues9>

Transcrição:

Teve ação, teve aventura, foi emocionante e assustador! Conforme a história se passa fica claro que Peter está cercado de mentiras, apenas sua irmã gêmea Bel realmente o entende.

Eu adivinhei algumas das reviravoltas, mas não deu de adivinhar todas. Me senti surpreso várias vezes, especialmente com o final. Acho que a intenção do autor era realmente essa, tornar a história um complicado cálculo matemático difícil de resolver e isso me empolgou.

Ainda há um enorme ponto de interrogação na minha cabeça sobre a Ingrid. Ingrid era real ou uma invenção da imaginação de Peter?

Episódio 3

Link: <https://anchor.fm/anna-bartoski>

Transcrição:

Olá pessoal! Quero falar sobre o livro *Alva lebre lobo avermelhado: esta história é falsa* do escritor Tom Pollock.

Todo o livro é sobre Peter tentando superar seus medos e tentando descobrir sobre quem realmente é sua mãe, sua irmã e ele mesmo.

Como Peter consegue usar a matemática para descobrir as coisas é simplesmente espantoso.

O medo de Peter é mostrado como um fardo e como um super poder. Eu mesma me senti uma vítima, cada página que lia via o pânico e o medo de Peter crescer em mim.

Ao mesmo tempo achei a história louca, mas não me admira que ter um pouco de verdade. A questão que fiquei me perguntando é: será que a gente realmente pode ser programado para agir de uma determinada maneira?

Episódio 4

Link: <https://anchor.fm/isabella-christ>

Transcrição:

Eu sou a I. e eu sou a E.

Gostei desse livro porque as coisas acontecem sem enrolação. Peter não tem preguiça de pensar e faz tiradas o tempo todo. Ele é um nerd divertido e conseguiu me fazer gostar de matemática.

Tem toneladas de reviravoltas na história.

Apesar de falhas de caráter, acreditem em mim, são muitas, eu estava torcendo pelo Peter, pela Bel e pela Ingrid.

Resumindo: você gosta e fica confuso ao mesmo tempo.

Fica a dica: leia esse livro!

Episódio 5

Link: <https://anchor.fm/maria-luiza-favero2/episodes/O-que-gostei-no-livro-e-14urn0>

Transcrição:

Oi, Bom dia! Meu nome é J. Tudo bem com vocês? Hoje vou falar o que gostei no livro Alva lebre, lobo avermelhado esta história é falsa:

Eu gostei do vaivém entre passado e presente, porque deu uma boa visão do que está acontecendo e vai explicando o porquê de certas ações dos personagens.

Também gostei da matemática. Peter podia fazer coisas incríveis com a matemática, como sair de labirintos e decifrar enigmas.

O subtítulo e a capa com alva lebre em vermelho e o lobo avermelhado em branco com as borboletas transparentes em alto relevo tem tudo a ver com a história.

Amei e duvidei dos personagens o tempo todo. Gostei da maneira como os personagens têm problemas e superam seus problemas para continuar ao longo da história.

O melhor é que nada é feito por acaso e tudo converge para um final surpreendente.

APÊNDICE M - Logaritmo

1 Logaritmos

Nesta seção iremos tratar de alguns aspectos históricos, educacionais e introduzir os logaritmos de forma similar àquela introduzida no Ensino Médio apresentando propriedades de potenciação e resolução de equações exponenciais.

1.1 História e aplicações dos logaritmos

Existem relatos do surgimento dos logaritmos na Antiguidade, desde que os babilônios entre os anos de 2000 a 1600 a.C., quando inventaram a multiplicação dos quadrados dos quartos para multiplicar dois números utilizando somente a adição, a subtração e uma tabela de quadrados dos quartos.

Com a expansão das navegações, nos séculos XV e XVI, foi necessário a criação de métodos mais rápidos e fáceis de cálculos. Antes dos logaritmos usava-se um processo de simplificação conhecido como prostaférese, que utiliza as identidades trigonométricas para transformar produto em soma e diferença. Mas, realizar multiplicações ou divisões entre números muito grandes era um processo bastante dispendioso, por isso, quando os logaritmos surgiram, o interesse foi imediato.

John Napier é considerado o inventor dos logaritmos. De acordo com Boyer (2010, p. 213), Napier trabalhou em sua invenção dos logaritmos durante vinte anos antes de publicar e suas ideias foram inspiradas pelas obras de Arquimedes sobre sequências de potências sucessivas de um dado número.

De maneira bem simples podemos exemplificar o raciocínio de Napier da seguinte maneira: associando aos termos de uma progressão geométrica $b, b^2, b^3, \dots, b^n, \dots$ os termos da progressão aritmética $1, 2, 3, \dots, n, \dots$, podemos associar ao produto de dois termos da primeira progressão $b^m \cdot b^p$ a soma $m + p$ dos termos correspondentes. Observe a correspondência feita entre progressão aritmética (PA) e progressão geométrica (PG) no Quadro 7.

Quadro 7 – Associação entre PA e PG feita por Napier

PA	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
PG	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192

Fonte: A autora

Dessa maneira, para efetuar, por exemplo, 256×16 , basta notar que:

- 256 na segunda linha corresponde a 8 na primeira;
- 16 na segunda linha corresponde a 4 na primeira;

Como $8 + 4 = 12$ e que 12 na primeira linha corresponde a 4096 na segunda, teremos, desta maneira, $256 \times 16 = 4096$. Resultado este encontrado por meio de uma simples operação de adição.

Mas uma sequência de potências inteiras de uma base, tal como dois, não podia ser usada para computações porque as grandes lacunas entre termos sucessivos tornavam a interpolação imprecisa.

Boyer (2010, p. 214) explica qual foi a chave da obra de Napier:

Para conservar próximos os termos de uma progressão geométrica de potências inteiras de um número dado, é necessário tomar o número dado muito próximo de um. Napier por isso escolheu como seu número dado $1 - 10^{-7}$ (ou 0,9999999). Assim os termos na progressão de potências crescentes ficam realmente próximos, próximos demais, na verdade. Para chegar a um equilíbrio e evitar decimais Napier multiplicou cada potência por 10^7 . Isto é, se $N = 10^7 \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^L$, então L é o “logaritmo” de Napier do número N . Assim seu logaritmo de 10^7 é 0, seu logaritmo de $10^7 \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)$ é 1, e assim por diante. Dividindo seus números e logaritmos por 10^7 teríamos um sistema de logaritmos de base $\frac{1}{e}$, pois $\left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^{10^7}$ fica próximo de $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$.

Como disse John Napier, do grego, “*logos*” = razão, e “*arithmos*” = número, ou “número de razão” o logaritmo de um número pode ser entendido de forma simplificada como sendo o expoente que uma dada base deve ter para produzir certa potência.

Para facilitar o trabalho de Napier, Henry Briggs professor de Geometria de Oxford, propôs a ele a mudança dos logaritmos para uma base decimal, ou seja, a utilização da potência de dez. Ambos concordaram que o logaritmo de 1 fosse 0 ($\log 1 = 0$) e o logaritmo de 10 fosse 1 (indicado com $\log 10 = 1$), nascendo assim os Logaritmos briggsianos ou comuns, que são os logaritmos decimais que usamos hoje.

Posteriormente, Napier e Briggs elaboraram uma tábua de logaritmos, que foi de extrema utilidade nas navegações e no comércio. Boyer (2010, p. 215) afirmou que “poucas vezes uma descoberta nova ‘pegou’ tão depressa quanto a invenção dos logaritmos, e o resultado foi o aparecimento imediato de tabelas de logaritmos que eram mais que suficientes para a época.”

A invenção dos logaritmos não foi obra de um só homem. Napier foi o primeiro a publicar, mas ideias muito semelhantes foram desenvolvidas de forma independente por Jobst

Burgi. Sendo Henri Briggs que construiu a primeira tabela de logaritmos decimais e John Speidell calculou os logaritmos naturais das funções trigonométricas.

Devido a propriedade dos logaritmos de transformarem produto em somas, quociente em diferenças, potências em produtos, permitindo que se efetuassem, com maior rapidez, operações complicadas como o produto de números muito grandes ou uma potenciação com expoente fracionário garante-lhes uma incontestável utilidade. Ultimamente, entretanto, com o advento dos computadores e das calculadoras de bolso, os logaritmos perderam sua importância como instrumento de cálculo aritmético. O manuseio das tábuas logarítmicas e o uso de termos como característica, mantissa, antilogaritmo, já fazem parte da História.

De acordo com Ribeiro et al (2007) hoje em dia a maior justificativa para o ensino do logaritmo reside em seu aspecto funcional, isto é, no fato de o mesmo ser uma função. As funções logarítmicas, juntamente com as suas inversas, as exponenciais, constituem modelos ideais para descrever matematicamente certos fenômenos de variação nos quais uma grandeza tem taxa de variação proporcional à quantidade daquela grandeza existente em cada instante. Exemplos deste tipo de variação, chamado variação exponencial, são encontrados em diversas áreas do conhecimento e podemos afirmar sem exageros, que enquanto houver Ciência haverá aplicações das funções logarítmicas e exponenciais.

A seguir destacamos algumas situações em que o uso dos logaritmos se faz presente de alguma maneira:

- Medição da intensidade de terremotos;
- Crescimento de plantas;
- Juro composto;
- pH para acidez;
- Índice de desenvolvimento humano (IDH);
- Pressão atmosférica;
- Expectativa de vida;
- Decaimento radioativo;
- Crescimento populacional;
- Intensidade luminosa;
- Risco de impacto de asteroides e meteoritos na Terra (escala de Palermo);
- Duração do efeito de um medicamento;
- Resfriamento de corpos;
- Teste de alcoolemia;

- Rendimento de um automóvel;
- Aumento de temperatura na Terra;
- Brilho de uma estrela;
- Intensidade sonora;
- Notas musicais;
- Entropia em termodinâmica;
- Variação percentual de preços em ações.

Nas escolas do Brasil os logaritmos normalmente são ensinados no primeiro ano do Ensino Médio. O ensino deste tema baseia-se nas funções logarítmicas que têm por seu objetivo modelar os fenômenos onde processo da variável dependente ocorre lentamente. Um grande passo para o ensino de logaritmos foi inclusão de duas habilidades, na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que tratam especificamente do aprendizado deste conteúdo.

A BNCC é um documento elaborado para orientar o ensino no Brasil, desde a Educação Infantil até o Ensino Médio. Não se trata, contudo, de um modelo curricular pronto, com normativas específicas, e sim de um guia orientador que estabelece os objetivos de aprendizagem correspondentes a cada etapa escolar, considerando igualmente as particularidades (metodológicas, sociais e regionais) de cada localidade. Desde que foi promulgada pelo Ministério da Educação em 2017, a BNCC tem sido o principal documento de orientação da educação no Brasil.

A BNCC para a área da Matemática e suas Tecnologias contém a indicação das habilidades EM13MAT305 e EM13MAT403 sobre logaritmos. A primeira habilidade é a seguinte:

Resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como abalos sísmicos, pH, radioatividade, Matemática Financeira, entre outros. (BNCC. 2017, p. 528)

A segunda habilidade, citada anteriormente, sobre logaritmos é:

Analisar e estabelecer relações, com ou sem apoio de tecnologias digitais, entre as representações de função exponencial e logarítmica expressas em tabelas e em plano cartesiano, para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento de cada função). (BNCC. 2017, p. 531)

A primeira habilidade envolve os conteúdos de logaritmo (decimal e natural), função logarítmica, variação entre grandezas, relação entre variação exponencial e logarítmica. Esta

habilidade refere-se à compreensão da função logarítmica como relação estabelecida entre o expoente e a potência para uma determinada base numa potenciação. Com foco na resolução de problemas e na interpretação de situações com contextos diversos, é essencial que o estudante se aproprie inicialmente do conceito de logaritmo para depois aprender os procedimentos e as diversas maneiras de expressar a variação logarítmica para finalmente ser capaz de interpretar e elaborar expressões algébricas e representações gráficas que relacionam variáveis pelo logaritmo. Como o conceito de logaritmo está associado a diferentes situações, essa habilidade está relacionada a diversas áreas do conhecimento.

Desenvolver essa habilidade implica em desenvolver a competência geral 3 da BNCC, veja a descrição detalhada no Anexo A. Essa competência, em essência, está relacionada ao chamado “fazer matemático”, ou seja, está intimamente ligada à essência da Matemática que é a ação de resolver situações-problemas, que é o centro da atividade matemática.

Fica claro que os conceitos e procedimentos matemáticos somente terão significado caso os estudantes possam utilizá-los para solucionar os desafios com que se deparam. É importante frisar que a referida competência não se restringe apenas à resolução de problemas, mas também trata de sua elaboração. Isso revela uma concepção da resolução de problemas além da mera aplicação de um conjunto de regras. Outro grande destaque refere-se à modelagem matemática como a construção de modelos matemáticos que sirvam para generalizar ideias ou para descrever situações semelhantes.

Essa competência tem estreita relação com a Competência Geral 2 da BNCC, no sentido da capacidade de formular e resolver problemas, e com a Competência Geral 4, que reforça a importância de saber utilizar as diferentes linguagens para expressar ideias e informações para a comunicação mútua.

Quanto a segunda habilidade citada, podemos destacar o estudo de funções exponencial e logarítmica, gráfico de funções a partir de transformações no plano, estudo do crescimento e análise do comportamento das funções exponencial e logarítmica em intervalos numéricos.

O objetivo é relatar através de um texto, tabela ou gráfico a variação de duas grandezas que se relacionam de modo exponencial, como o número de microrganismos sob condições propícias em relação ao tempo, ou decaimento de um material radioativo ao longo de um período. Mostrar através de uma tabela, gráfico e expressão algébrica a variação logarítmica de duas grandezas, como a energia liberada em terremotos de diferentes magnitudes. Comparar, com ou sem auxílio de software, gráficos de uma função exponencial e sua respectiva inversa (função logarítmica), expressando a relação entre potenciação e logaritmo de números reais de mesma base. Relacionar as escritas algébrica e gráfica de funções exponenciais e logarítmicas

por meio da análise de parâmetros numéricos na expressão algébrica e pontos do gráfico dessas funções.

Explorar situações de crescimento exponencial envolvendo microrganismos, cálculo do pH de substâncias químicas, concentração de soluções, decaimento radiativo de matérias e crescimento de juros compostos em diferentes representações (gráfica, algébrica, tabela, etc.) auxilia o estudante na compreensão das situações em estudo e das principais características envolvidas nas funções exponencial e logarítmica.

Por envolver cálculos repetitivos, essa habilidade favorece a aprendizagem do uso de recursos tecnológicos, como calculadoras, planilhas e softwares, de modo a auxiliar o estudante na identificação de características das diferentes representações dessas funções. A análise e comparação de gráficos e a modelagem de situações-problema por meio de representações distintas das funções presentes nessa habilidade são importantes para desenvolver processos ligados ao letramento matemático, tais como resolução de problemas, modelagem, argumentação e comunicação. Nesse sentido, no processo de desenvolvimento dessa habilidade, as Competências Gerais 2 e 5 também estão presentes.

As competências específicas da BNCC para a área da Matemática e suas Tecnologias estão no Anexo A.

1.2 Potências

Dados um número real positivo a e um número natural n diferente de zero, como caracteriza Iezzi et al, chama-se:

potência de base a e expoente n o número a^n tal que:

$$\begin{cases} a^0 = 1 \text{ para } a \neq 0 \\ a^n = a^{n-1} \cdot a, \forall n, n \geq 1 \end{cases}$$

Dessa definição decorre que:

$$a^1 = a^0 \cdot a = 1 \cdot a = a$$

$$a^2 = a^1 \cdot a = a \cdot a$$

$$a^3 = a^2 \cdot a = (a \cdot a) \cdot a = a \cdot a \cdot a$$

e de modo geral, para p natural e $p \geq 2$, temos que a^p é um produto de p fatores iguais a a . (IEZZI et al, 2004, p. 01)

Ou seja:

$$a^p = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{p \text{ fatores}}$$

As provas das propriedades que veremos a seguir, fazem uso do Princípio da Indução Finita. Vale lembrar que essas demonstrações não são apresentadas no Ensino Médio.

1.2.1 Propriedades de potências

Se $a \in \mathbb{R}$; $b \in \mathbb{R}$; $m \in \mathbb{N}$ e $n \in \mathbb{N}$, com $a \neq 0$, $b \neq 0$ ou $n \neq 0$ então valem as seguintes propriedades:

Propriedade 1. Multiplicação de potências de mesma base:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Demonstração: Demonstramos a propriedade por indução sobre n . Consideremos m fixo.

1º) se $n = 1$;

$$a^m \cdot a^1 = a^m \cdot a = a^{m+1} = a^{(m+1)}$$

Portanto a propriedade é verdadeira para $n = 1$.

2º) Vamos supor que a propriedade seja verdadeira para valores de n menores ou iguais a p , assim, $a^m \cdot a^p = a^{(m+p)}$ e provemos que vale para $n = p + 1$:

$$a^m \cdot a^{(p+1)} = a^m \cdot (a^p \cdot a^1) = (a^m \cdot a^p) \cdot a^1 = a^{(m+p)} \cdot a^1 = a^{(m+p+1)}$$

Logo a propriedade é verdadeira para $n = p + 1$. Portanto pelo Princípio da Indução Finita a propriedade é verdadeira. ■

Propriedade 2. Divisão de potências de mesma base: Para $a \neq 0$ e $m \geq n$, tem-se:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{(m-n)}$$

Demonstração: Vamos demonstrar a propriedade por indução sobre n . Consideremos m fixo.

1º) se $n = 1$

$$\frac{a^m}{a^1} = \frac{a^m}{a} = a^{m-1} = a^{(m-1)}$$

Portanto a propriedade é verdadeira para $n = 1$.

2º) Supondo que a propriedade seja verdadeira para valores de n menores ou iguais a p , temos:

$\frac{a^m}{a^p} = a^{(m-p)}$. Mostremos agora que vale para $n = p + 1$:

$$\frac{a^m}{a^{(p+1)}} = \frac{a^m}{a^p \cdot a^1} = \frac{a^{(m-p)}}{a^1} = a^{(m-p-1)} = a^{(m-(p+1))}$$

Logo a propriedade é verdadeira para $n = p + 1$. Portanto pelo Princípio da Indução Finita a propriedade é verdadeira. ■

Propriedade 3. Potência de potência:

$$(a^m)^n = a^{(m \cdot n)}$$

Demonstração: Novamente iremos usar indução sobre n . Consideremos m fixo.

1º) se $n = 1$

$$(a^m)^1 = a^m = a^{(m \cdot 1)}$$

Portanto a propriedade é verdadeira para $n = 1$.

2º) Vamos supor que a propriedade seja verdadeira para valores de n menores ou iguais a p , assim, $(a^m)^p = a^{(m \cdot p)}$ e vamos provar que vale para $n = p + 1$:

$$(a^m)^{p+1} = (a^m)^p \cdot (a^m)^1 = a^{(m \cdot p)} \cdot a^m = a^{(m \cdot p + m)} = a^{m(p+1)}$$

Logo a propriedade é verdadeira para $n = p + 1$. Portanto pelo Princípio da Indução Finita a propriedade é verdadeira. ■

Propriedade 4. Potência de um produto:

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

Demonstração: Vamos demonstrar a propriedade por indução sobre n .

1º) Se $n = 1$

$$(a \cdot b)^1 = (a \cdot b) = a \cdot b = a^1 \cdot b^1$$

Portanto a propriedade é verdadeira para $n = 1$.

2º) Vamos supor que a propriedade seja verdadeira para valores de n menores ou iguais a p , assim, $(a \cdot b)^p = a^p \cdot b^p$ e provemos que vale para $n = p + 1$.

$$(a \cdot b)^{(p+1)} = (a \cdot b)^p \cdot (a \cdot b) = a^p \cdot b^p \cdot a \cdot b = a^{(p+1)} \cdot b^{(p+1)}$$

Logo a propriedade é verdadeira para $n = p + 1$. Portanto pelo Princípio da Indução Finita a propriedade é verdadeira. ■

Propriedade 5. Potência de um quociente:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Demonstração: Demonstremos a propriedade por indução sobre n .

1º) Se $n = 1$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^1 = \left(\frac{a}{b}\right) = \frac{a}{b} = \frac{a^1}{b^1}$$

Portanto a propriedade é verdadeira para $n = 1$.

2º) Vamos supor que a propriedade seja verdadeira para valores de n menores ou iguais a p , assim, $\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$ e provemos vale para $n = p + 1$.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{(p+1)} = \left(\frac{a}{b}\right)^p \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^1 = \frac{a^p}{b^p} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a^p \cdot a^1}{b^p \cdot b^1} = \frac{a^{(p+1)}}{b^{(p+1)}}$$

Logo a propriedade é verdadeira para $n = p + 1$. Portanto pelo Princípio da Indução Finita a propriedade é verdadeira. ■

1.2.2 Potências com expoente inteiro

Para n inteiro e $a \neq 0$ deve ser mantida a regra fundamental $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

Como $a^0 \cdot a = a^{0+1} = a$, então $a^0 = 1$.

Dado qualquer $n \in \mathbb{N}$ temos:

$$a^{-n} \cdot a^n = a^{-n+n} = a^0 = 1.$$

Logo,

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

1.2.3 Potências com expoente racional

Seja a^r , onde $r = \frac{m}{n}$ é um número racional (com $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{Z}^*$), uma potência de expoente racional. A regra $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$ continua válida para r e s números racionais. Então, para $r = \frac{m}{n}$, temos que:

$$(a^r)^n = a^r \cdot a^r \cdot \dots \cdot a^r = a^{n \cdot r} = a^{n \cdot \frac{m}{n}} = a^m$$

Portanto,

$$a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

1.3 Definição de função exponencial

Em concordância com definição de logaritmo dada no Ensino Médio como sendo a inversa da função exponencial, definiremos essa função. Vale lembrar, que as demonstrações utilizadas aqui não são usadas na Educação Básica.

Dado um número real positivo a , que suporemos sempre diferente de 1. A função exponencial de base a , $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, indicada pela notação $f(x) = a^x$, deve ser definida de modo a ter as seguintes propriedades, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$:

Propriedade 1. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

Propriedade 2. $a^1 = a$

Propriedade 3. $x < y \Rightarrow a^x < a^y$ quando $a > 1$, e $x < y \Rightarrow a^y < a^x$ quando $0 < a < 1$.

É interessante observar que se uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tem a propriedade 1 acima, isto é, $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$, então f não pode assumir o valor 0, a menos que seja identicamente nula. Com efeito, se existir algum $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) = 0$ então para todo $x \in \mathbb{R}$ teremos:

$$f(x) = f(x_0 + (x - x_0)) = f(x_0) \cdot f(x - x_0) = 0 \cdot f(x - x_0) = 0,$$

logo f será identicamente nula.

Mais ainda: se $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tem a propriedade 1 e não é identicamente nula então $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, pois

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right) \cdot f\left(\frac{x}{2}\right) = \left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2 > 0.$$

Assim, diante das propriedades 1 e 2, temos que $D(f) = \mathbb{R}$, e a $Im(f) = \mathbb{R}^+$. Se uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ tem as propriedades 1 e 2 então, para todo $n \in \mathbb{R}$ tem-se

$$f(n) = f(1 + 1 + \dots + 1) = f(1) \cdot f(1) \cdot \dots \cdot f(1) = a \cdot a \cdot \dots \cdot a = a^n$$

Usando a propriedade 1, resulta daí, que, para todo número racional $r = \frac{m}{n}$, com $n \in \mathbb{N}$, deve-se ter $f(r) = a^r = \sqrt[n]{a^m}$.

Portanto, $f(r) = a^r$ é a única função $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}^+$ tal que $f(r+s) = f(r) \cdot f(s)$ para quaisquer $r, s \in \mathbb{Q}$ e $f(1) = a$.

A propriedade 3 diz que a função exponencial deve ser crescente quando $a > 1$ e decrescente quando $0 < a < 1$. Disto resultará que existe uma única maneira de definir o valor $f(x) = a^x$ quando x é irracional.

Supondo $a > 1$, então, a^x tem a seguinte propriedade:

$$r < x < s, \text{ com } r, s \in \mathbb{Q} \Rightarrow a^r < a^x < a^s.$$

Não podem existir dois números reais diferentes para assumir o valor de a^x , com a propriedade acima. Portanto, quando x é irracional, a^x é o (único) número real cujas aproximações por falta são as potências de a^r , com r racional menor do que x e cujas aproximações por excesso são as potências a^s , com s racional maior do que x .

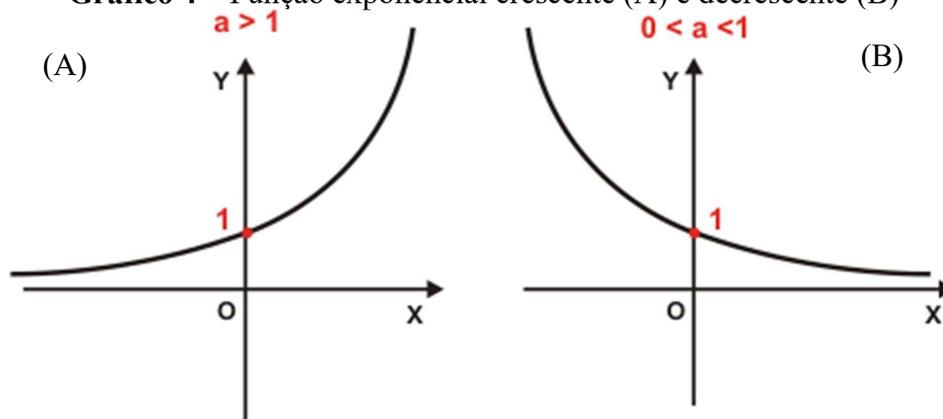
Lema 1. Sejam a um número real positivo, com $a \neq 1$, e $[b, c]$ um intervalo de \mathbb{R}^+ , então existe $r \in \mathbb{Q}/a^r \subset [b, c]$.

Propriedade 4. A função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = a^x$, é ilimitada superiormente. Mais precisamente, se $a > 1$ então, a^x cresce sem limites quando $x > 0$ é muito grande. E se $0 < a < 1$, então a^x torna-se arbitrariamente grande quando $x < 0$, tem valor absoluto grande.

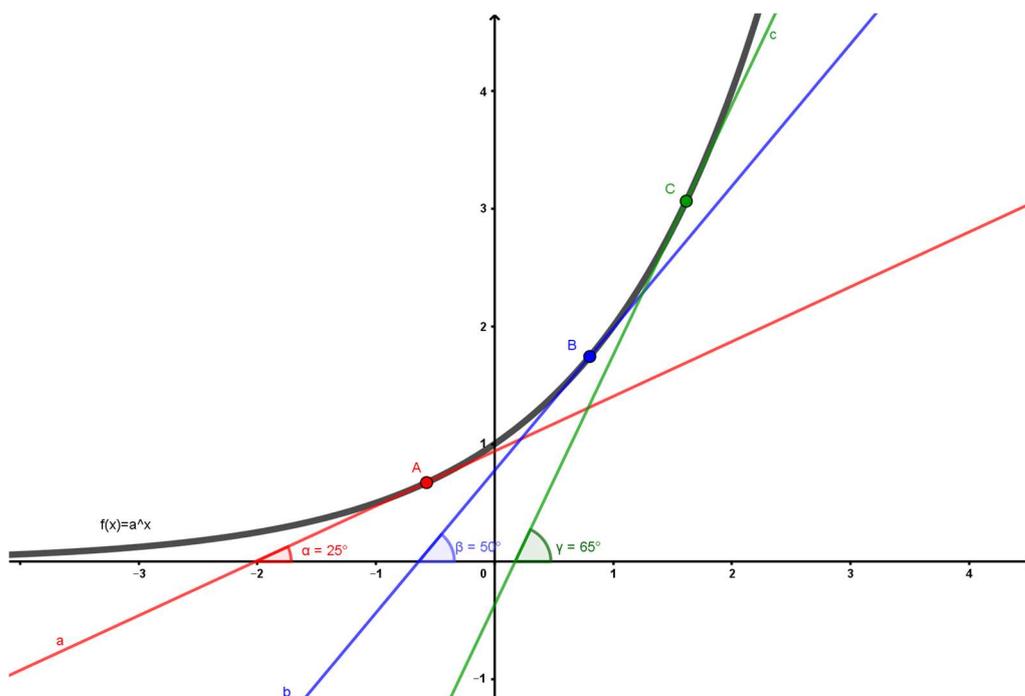
Propriedade 5. A função exponencial é contínua. Isto significa que, $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ arbitrário fixo, é possível tornar a diferença $|a^x - a^{x_0}|$ tão pequena quanto se deseje, desde que x seja tomado suficientemente próximo de x_0 .

Dito de outro modo, o limite de a^x quando x tende a x_0 é igual a a^{x_0} . Em símbolos: $\lim_{x \rightarrow x_0} a^x = a^{x_0}$. Esta é uma consequência das propriedades básicas 1, 2 e 3 da função exponencial.

O Gráfico 1 exibe os gráficos de $f(x) = a^x$ nos casos $a > 1$ e $0 < a < 1$. Quando $a > 1$, nota-se que, quando x varia da esquerda para a direita, a curva exponencial $y = a^x$ apresenta um crescimento bastante lento enquanto x é negativo. À medida que x é positivo e cresce o crescimento de y torna-se cada vez mais acelerado. Isto reflete na inclinação da reta tangente ao gráfico, veja o Gráfico 2, note que para valores positivos muito grandes de x , a tangente é quase vertical.

Gráfico 4 – Função exponencial crescente (A) e decrescente (B)

Fonte: <https://engenhariaexercicios.com.br/pre-calculo/funcoes/funcao-exponencial/>. Acesso 27/07/2021

Gráfico 5 – Gráfico de $f(x) = a^x$ e das tangentes nos pontos A, B e C

Fonte: A autora

1.3.1 Caracterização da função exponencial

As funções exponenciais são, juntamente com as funções afins e quadráticas, os modelos matemáticos mais utilizados para resolver problemas elementares. Ambas as funções se evidenciam com grande destaque nos três anos de duração do curso de Ensino Médio, em especial no 1º ano. Essas funções têm importância considerável em vestibulares e na universidade, bem como nas aplicações matemáticas em atividades científicas ou profissionais.

Em geral, as maiores dificuldades apresentadas pelos alunos de Ensino Médio, diante da resolução de um problema que envolve funções, parece estar na escolha do modelo matemático correto para a resolução de tal problema. Na maioria das vezes essa dificuldade em saber qual é o modelo correto para a resolução de um problema decorre da falta de conhecimento das propriedades características de cada modelo. Havendo o domínio de tais características a resolução do problema não oferece maiores dificuldades. A seguir evidenciamos, na forma de teoremas, algumas características das funções exponenciais.

Teorema 1. (Caracterização da função exponencial) Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ uma função monótona injetiva (isto é, crescente ou decrescente). As seguintes afirmações são equivalentes:

- (1) $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$;
- (2) $f(nx) = f(x)^n$, para todo $n \in \mathbb{Z}$ e todo $x \in \mathbb{R}$;
- (3) $f(x) = a^x$, para todo $x \in \mathbb{R}$, onde $a = f(1)$.

Demonstração: Provaremos as implicações $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1)$.

A fim de mostrar que $(1) \Rightarrow (2)$, mostraremos por indução em n . A igualdade é imediata para $n = 1$, pois $f(1 \cdot x) = f(x) = f(x)^1$. Supondo $f(nx) = f(x)^n$, vamos demonstrar que $f((n + 1)x) = f(x)^{n+1}$. De fato:

$$f((n + 1)x) = f(nx + x) \text{ por (1)}$$

temos:

$$f(nx + x) = f(nx) \cdot f(x) = f(x)^n \cdot f(x) = f(x)^{n+1}$$

Para provar que $(2) \Rightarrow (3)$ devemos observar inicialmente que a hipótese (2) acarreta que, para todo número racional $r = \frac{m}{n}$, (com $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$) tem-se $f(rx) = f(x)^r$. Com efeito $nr = m$, podemos escrever

$$f(rx)^n = f(nrx) = f(mx) = f(x)^m.$$

Logo,

$$f(rx) = f(x)^{\frac{m}{n}} = f(x)^r.$$

Assim, se pusermos $f(1) = a$, teremos $f(r) = f(r \cdot 1) = f(1)^r = a^r$ para todo $r \in \mathbb{Q}$. Para completar a demonstração de que $(2) \Rightarrow (3)$ suponhamos que f seja crescente, logo $1 = f(0) < f(1) = a$. Admitamos, por absurdo, que exista $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \neq a^x$. Digamos, por exemplo, que seja $f(x) < a^x$. (O caso $f(x) > a^x$ é análogo). Então, utilizando o Lema 1, ou

seja, $f(x) < f(r) < a^x$. Como f é crescente, tendo $f(x) < f(r)$ concluímos que $x < r$. Por outro lado, temos também $a^r < a^x$, logo $r < x$. Essa contradição completa a prova de que $(2) \Rightarrow (3)$.

Agora, mostraremos que $(3) \Rightarrow (1)$. Suponha $x, y \in \mathbb{R}$, onde $a = f(1)$. Assim, temos que:

$$f(x + y) = a^{x+y} = a^x \cdot a^y = f(x) \cdot f(y)$$

Ainda podemos observar que as funções exponenciais atendem

i) $f(0) = 1$ e ii) $f(-x) = \frac{1}{f(x)}$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Estas observações decorrem imediatamente das propriedades da potenciação analisadas anteriormente, ou melhor dizendo, são as mesmas propriedades utilizando a linguagem de funções exponenciais.

De fato,

i) Temos que: $f(0) = f(0 + 0) = f(0) \cdot f(0) \Rightarrow f(0) = f(0) \cdot f(0) \Rightarrow 1 = f(0)$;

ii) E ainda: $1 = f(0) = f(x + (-x)) = f(x) \cdot f(-x) \Rightarrow f(-x) = \frac{1}{f(x)}$

Dizemos que uma função $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é do tipo exponencial quando se tem $g(x) = ba^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, onde a e b são constantes positivas. Se $a > 1$, g é crescente e se $0 < a < 1$, g é decrescente.

Se a função $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é do tipo exponencial então, para quaisquer $x, h \in \mathbb{R}$, os quocientes

$$\frac{g(x+h) - g(x)}{g(x)} = a^h - 1$$

$$\frac{g(x+h)}{g(x)} = a^h$$

Dependem apenas de h , mas não de x . Também vale a recíproca.

Teorema 2. (Primeira Caracterização das Funções de Tipo Exponencial): Seja $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ uma função monótona injetiva tal que, para $x, h \in \mathbb{R}$ quaisquer, o acréscimo relativo $\frac{g(x+h)-g(x)}{g(x)}$ dependa apenas de h , mas não de x . Então, se $b = g(0)$ e $a = \frac{g(1)}{g(0)}$, tem-se $g(x) = ba^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

1.4 Equação exponencial

Como descrito em Iezzi et al (2004, p.39), equações exponenciais são equações com incógnitas no expoente. Existem dois métodos para a resolução de equações exponenciais, que veremos a seguir.

1.4.1 Resolvendo equações exponenciais com potências de mesma base

O método de redução a uma base comum, segundo Iezzi et al (2004, p. 39) é utilizado quando, ambos os membros da equação, com as devidas transformações baseadas nas propriedades de potências, forem redutíveis a potências de mesma base. Como a função exponencial $f(x) = a^x$ é injetiva, podemos concluir que potências iguais e de mesma base possuem expoentes iguais, ou seja,

$$a^{x_1} = a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2, (0 < a \neq 1)$$

1.4.2 Resolvendo equações exponenciais com potências de bases diferentes

Em concordância com o que foi apresentado por Iezzi et al (2004, p. 88) as equações exponenciais que não podem ser reduzidas a uma igualdade de potências de mesma base, pela simples aplicação das propriedades de potência, têm resolução baseada na definição de logaritmo, isto é, se $0 < a \neq 1$ e $b > 0$, temos que:

$$a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$$

O estudo de logaritmo será melhor definido nos próximos tópicos desse trabalho.

1.5 Conceito de logaritmo

Nesta seção apresentaremos a definição de logaritmo dada no Ensino Médio, como a inversa da função exponencial. Segundo Iezzi et al (2004, p. 57), sendo a e b números reais positivos, com $a \neq 1$, chama-se logaritmo de b na base a o expoente que se deve dar à base a de modo que a potência obtida seja igual a b . Em símbolos:

se $a, b \in \mathbb{R}, 0 < a \neq 1$ e $b > 0$, então

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$$

onde: a é a base; b é o logaritmando e x é o logaritmo.

Na formulação atual de logaritmo estruturada por Leonhard Euler, no século XVIII, e relaciona-se logaritmo com a função exponencial. Nesse conceito, o logaritmo de um número b em uma base a é o expoente x que se deve aplicar à base de tal forma que o resultado seja b . Dessa forma:

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$$

Desde que a e b sejam números reais positivos e a seja diferente de 1 ($a \neq 1, b > 0$ e $a > 0$).

Com relação ao valor da base, o logaritmo de base 10 ($b = 10$) é chamado de logaritmo comum (ou decimal), sendo muito utilizado na ciência e engenharia. Ao trabalharmos com logaritmos na base 10 normalmente a omitimos. Indicamos o logaritmo decimal pela notação $\log_{10}x$ ou simplesmente $\log x$.

O logaritmo natural (ou neperiano) tem a constante irracional e ($\approx 2,78$) como base. É utilizado na Matemática pura, principalmente em Cálculo Diferencial. O nome neperiano é em homenagem a John Napier, autor do primeiro trabalho publicado que sintetizava a teoria dos logaritmos. Indicamos o logaritmo natural pelas notações $\log_e x$ ou $\ln x$.

1.5.1 Consequências da definição

A seguir, são apresentadas algumas propriedades que decorrem da definição de Briggs para logaritmos:

- O logaritmo do número 1 em qualquer base a sempre será igual a 0.

$$\log_a 1 = 0, \text{ pois } a^0 = 1$$

- O logaritmo de qualquer número a na base a será igual a 1.

$$\log_a a = 1, \text{ pois } a^1 = a$$

- O logaritmo de uma potência da base é o expoente, em qualquer base.

$$\log_a a^m = m, \text{ pois } \log_a a^m = x, \text{ então } a^m = a^x \Leftrightarrow m = x$$

- A potência de base a e expoente $\log_a b$ é igual a b .

$$a^{\log_a b} = b, \text{ pois } \log_a b = x \Rightarrow a^x = b$$

1.5.2 Propriedades dos logaritmos

As propriedades a seguir facilitam o uso de logaritmos em cálculos.

Logaritmo do produto: Conforme diz Iezzi et al (2004, p. 63) “Em qualquer base a ($0 < a \neq 1$), o logaritmo do produto de tais fatores reais positivos e igual à soma dos logaritmos dos fatores.”

$$\text{Se } 0 < a \neq 1, b > 0 \text{ e } c > 0, \text{ então } \log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$$

Demonstração: Fazendo $\log_a b = x$, $\log_a c = y$ e $\log_a(b \cdot c) = z$, provaremos que $z = x + y$.

De fato:

$$\begin{aligned} \log_a b = x &\Rightarrow a^x = b \\ \log_a c = y &\Rightarrow a^y = c \\ \log_a(b \cdot c) = z &\Rightarrow a^z = b \cdot c \end{aligned}$$

Assim:

$$a^z = a^x \cdot a^y \Rightarrow a^z = a^{x+y} \Rightarrow z = x + y$$

Esta propriedade pode ser estendida para o caso do logaritmo do produto de n ($n \geq 2$) fatores reais e positivos, isto é:

Se $0 < a \neq 1$ e $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n \in \mathbb{R}_+^*$, então:

$$\log_a(b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot \dots \cdot b_n) = \log_a b_1 + \log_a b_2 + \log_a b_3 + \dots + \log_a b_n$$

Demonstração: Faremos a demonstração por indução sobre n .

i) Para $n = 2$, é verdadeira, isto é:

$$\log_a(b_1 \cdot b_2) = \log_a b_1 + \log_a b_2$$

Logo, a propriedade é válida para $n = 2$.

ii) Suponhamos que a propriedade é válida para $p \geq 2$ fatores, isto é, $\log_a(b_1 \cdot b_2 \cdot \dots \cdot b_p) = \log_a b_1 + \log_a b_2 + \dots + \log_a b_p$, mostraremos que a propriedade é válida para $(p + 1)$ fatores, ou seja: $\log_a(b_1 \cdot b_2 \cdot \dots \cdot b_p \cdot b_{p+1}) = \log_a b_1 + \log_a b_2 + \dots + \log_a b_p + \log_a b_{p+1}$.

Temos:

$$\begin{aligned} \log_a(b_1 \cdot b_2 \cdot \dots \cdot b_p \cdot b_{p+1}) &= \\ \log_a[(b_1 \cdot b_2 \cdot \dots \cdot b_p) \cdot b_{p+1}] &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log_a(b_1 \cdot b_2 \cdot \dots \cdot b_p) + \log_a b_{p+1} &= \\ \log_a b_1 + \log_a b_2 + \dots + \log_a b_p + \log_a b_{p+1} \end{aligned}$$

Logo a propriedade é verdadeira para $n = p + 1$. Portanto pelo Princípio da Indução Finita a propriedade é verdadeira. ■

Logaritmo do quociente: Iezzi et al (2004, p. 65) tem a seguinte definição “Em qualquer base a ($0 < a \neq 1$), o logaritmo do quociente de dois números reais positivos é igual a diferença entre o logaritmo do dividendo e o logaritmo do divisor.”

$$0 < a \neq 1, b > 0 \text{ e } c > 0 \rightarrow \log_a \left(\frac{b}{c} \right) = \log_a b - \log_a c$$

Demonstração: Fazendo $\log_a b = x$, $\log_a c = y$ e $\log_a \left(\frac{b}{c} \right) = z$, provaremos que $z = x - y$.

De fato:

$$\begin{aligned} \log_a b = x &\Rightarrow a^x = b \\ \log_a c = y &\Rightarrow a^y = c \\ \log_a \left(\frac{b}{c} \right) = z &\Rightarrow a^z = \frac{b}{c} \end{aligned}$$

Daí, segue que:

$$a^z = \frac{a^x}{a^y} \Rightarrow a^z = a^{x-y} \Rightarrow z = x - y$$

■

Logaritmo da potência: Conforme diz Iezzi et al (2004, p. 67) “Em qualquer base a ($0 < a \neq 1$), o logaritmo de uma potência de base real positiva e expoente real é igual ao produto do expoente pelo logaritmo da base da potência.” Em símbolos temos:

$$\text{Se } 0 < a \neq 1, b > 0 \text{ e } \alpha \in \mathbb{R}, \text{ então } \log_a b^\alpha = \alpha \cdot \log_a b.$$

Demonstração: Fazendo $\log_a b = x$ e $\log_a b^\alpha = y$, provaremos que $y = \alpha \cdot x$. De fato,

$$\begin{aligned} \log_a b = x &\Rightarrow a^x = b \\ \log_a b^\alpha = y &\Rightarrow a^y = b^\alpha \end{aligned}$$

O que implica em:

$$a^y = (a^x)^\alpha \Rightarrow a^y = a^{\alpha \cdot x} \Rightarrow y = \alpha \cdot x$$

■

Cologaritmo: É definido como o número real oposto de seu respectivo logaritmo. Dado um número b ($b \in \mathbb{R}$ e $b > 0$), numa base a ($a \in \mathbb{R}$ e $0 < a \neq 1$), o cologaritmo é o oposto do logaritmo de b na base a . Em símbolos:

$$0 < a \neq 1, b > 0 \rightarrow \text{colog}_a b = -\log_a b$$

■

1.5.3 Mudança de base

Para realizar as propriedades operatórias, dois logaritmos de bases diferentes precisam ser convertidos para uma única base. No caso, se a , b e c são números reais positivos e a e c diferentes de 1, então:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Demonstração: Consideremos $\log_a b = x$, $\log_c b = y$ e $\log_c a = z$. Note que $z \neq 0$, pois $a \neq$

1. Provaremos que $x = \frac{y}{z}$.

De fato:

$$\log_a b = x \Rightarrow a^x = b$$

$$\log_c b = y \Rightarrow c^y = b$$

$$\log_c a = z \Rightarrow c^z = a$$

Daí segue que:

$$(c^z)^x = a^x = b = c^y \Rightarrow zx = y \Rightarrow x = \frac{y}{z}$$

■

1.6 Função inversa

Demana et al (2009) nos diz que se f é uma função bijetiva com domínio A e imagem B , então a função inversa de f , denotada por f^{-1} , é a função com domínio B e imagem A definida por

$$f^{-1}(b) = a \Leftrightarrow f(a) = b$$

Segundo Demana et al (2009) uma função exponencial $f(x) = a^x$ tem uma inversa. Essa inversa é a função logarítmica de base a , denotada por $\log_a x$, isto é, se $f(x) = a^x$ com $0 < a \neq 1$, então $f^{-1}(x) = \log_a x$.

Demonstração: Considere a função $y = a^x$, denominada função exponencial, onde a base a é um número positivo e diferente de 1, definida para todo x real.

Observe que nestas condições, a^x é um número positivo, para todo $x \in \mathbb{R}$, onde \mathbb{R} é o conjunto dos números reais. Denotando o conjunto dos números reais positivos por \mathbb{R}_+^* , poderemos escrever a função exponencial como segue:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*; y = a^x, 0 < a \neq 1$$

Esta função é bijetiva, pois:

- a) é injetiva, ou seja: elementos distintos possuem imagens distintas.
- b) É sobrejetiva, pois o conjunto imagem coincide com o seu contradomínio.

Assim sendo, a função exponencial é bijetiva e, portanto, é uma função invertível, ou seja, admite uma função inversa. Vamos determinar a função inversa da função $y = a^x$, onde $0 < a \neq 1$.

Pela definição de função inversa, temos que:

$$y = a^x \Rightarrow \log_a y = \log_a a^x \Rightarrow \log_a y = x$$

Portanto, a inversa da função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ definida por $y = a^x$ é a função $f^{-1}: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f^{-1}(x) = \log_a x$. Denota-se f^{-1} de função logarítmica, cujo domínio é $D(f^{-1}) = \mathbb{R}_+^*$ e imagem $Im(f^{-1}) = \mathbb{R}$.

1.7 Função logarítmica

Como define Iezzi et al (2004, p. 80) “Dado um número real a ($0 < a \neq 1$), chamamos de função logarítmica de base a a função f de \mathbb{R}_+^* em \mathbb{R} que associa a cada x o número $\log_a x$.” Usando símbolos temos:

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}_+^* &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow \log_a x \end{aligned}$$

1.7.1 Domínio e imagem

O domínio de uma função logarítmica é o $D(f) =]0, +\infty[$.

Como caracteriza Iezzi et al (2004, p. 83), se $0 < a \neq 1$ então a função $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \log_a x$ admite a função inversa $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ definida por $g(x) = a^x$. Se f é bijetiva então f possui inversa, portanto, a imagem da função logarítmica é $Im(f) = \mathbb{R}$.

1.7.2 Crescimento e decrescimento

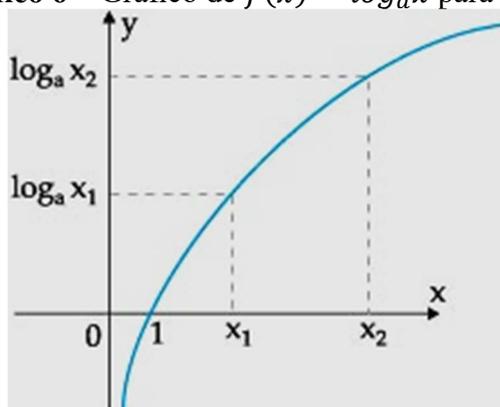
Seja $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ uma função definida por $f(x) = \log_a x$, segundo Iezzi et al (2004, p. 81):

- Quando $a > 1$, observa-se que $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+^*$ tem-se $x_1 < x_2$ se, e somente se, $\log_a x_1 < \log_a x_2$. A função será dita estritamente crescente, conforme mostra o Gráfico 6.

- Quando $0 < a < 1$, nota-se que $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+^*$ obtém-se $x_1 < x_2$ se, e somente se, $\log_a x_1 > \log_a x_2$. Isto é, a função será dita estritamente decrescente, conforme ilustrado no Gráfico 7.

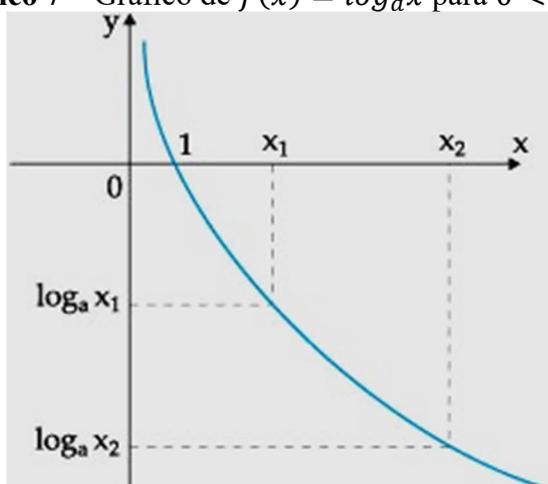
Mostramos no Gráfico 8, a comparação das funções exponencial ($y = a^x$) e logarítmica ($y = \log_a x$), para os casos $a > 1$ e $0 < a \neq 1$. Observe que, sendo as funções inversas, os seus gráficos são curvas simétricas em relação à bissetriz do primeiro e terceiro quadrantes, ou seja, simétricos em relação à reta $y = x$.

Gráfico 6 – Gráfico de $f(x) = \log_a x$ para $a > 1$



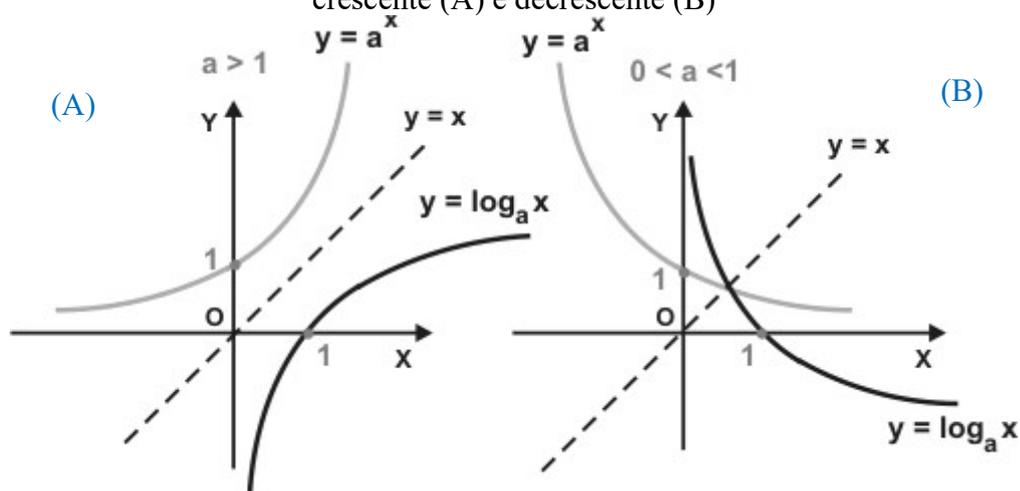
Fonte: <https://interna.coceducacao.com.br/ebook/pages/7661.htm>. Acesso em 17/07/2021.

Gráfico 7 – Gráfico de $f(x) = \log_a x$ para $0 < a < 1$



Fonte: <https://interna.coceducacao.com.br/ebook/pages/7661.htm>. Acesso em 17/07/2021.

Gráfico 8 – Comparação das funções logarítmica e exponencial crescente (A) e decrescente (B)



Fonte: <https://www.alfaconnection.pro.br/matematica/funcoes/funcao-logaritmica/funcao-logaritmica/>. Acesso em 27/07/2021.

Da simples observação dos gráficos acima, podemos concluir que:

- i) Para $a > 1$, as funções exponencial e logarítmica são crescentes.
- ii) Para $0 < a \neq 1$, as funções exponencial e logarítmica são decrescentes.
- iii) O domínio da função exponencial é igual ao conjunto imagem da função logarítmica e que o domínio da função logarítmica é igual ao conjunto imagem da função exponencial. Isto ocorre porque as funções são inversas uma da outra.

ANEXO

ANEXO A – Competências específicas de Matemática e suas tecnologias para o Ensino Médio

Conforme apresenta a BNCC (2018, p. 253), as cinco competências específicas de Matemática e suas tecnologias para o Ensino Médio, são:

1. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.

2. Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.

3. Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

4. Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.

5. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.