

Adriano Tavares de Jesus

**A duplicação do cubo e a impossibilidade da  
solução clássica: uma proposta para ensino  
usando geometria analítica, descritiva e dinâmica**

Itabaiana -Sergipe

13 de agosto de 2021



Adriano Tavares de Jesus

**A duplicação do cubo e a impossibilidade da solução  
clássica: uma proposta para ensino usando geometria  
analítica, descritiva e dinâmica**

Dissertação submetida ao Corpo Docente do  
Programa de Mestrado Profissional em Ma-  
temática da Universidade Federal de Sergipe  
como requisito para a obtenção do título de  
Mestre em Matemática.

Universidade Federal de Sergipe - UFS

Orientador: Professor Dr. Alejandro Caicedo Roque

Itabaiana -Sergipe  
13 de agosto de 2021

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA PROFESSOR ALBERTO CARVALHO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

J58d

Jesus, Adriano Tavares de

A duplicação do cubo e a impossibilidade da solução clássica: uma proposta para ensino usando geometria analítica, descritiva e dinâmica / Adriano Tavares de Jesus ; orientação: Alejandro Caicedo Roque. – Itabaiana, 2021.

95 f.; il.

Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Sergipe, 2021.

1. Matemática. 2. Geometria não-Euclidiana 3. Geometria descritiva. 4. Geometria analítica. 5. Cubo. I. Roque, Alejandro Caicedo (org.). II. Título.

CDU 514.13



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE  
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

---

*Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.*

**A duplicação do cubo e a impossibilidade da  
solução clássica: uma proposta para ensino  
usando geometria analítica, descritiva e dinâmica**

*por*

*ADRIANO TAVARES DE JESUS*

Aprovada pela banca examinadora:

*Alejandro Caicedo Roque*

---

Professor. Dr. ALEJANDRO CAICEDO ROQUE - UFS  
Orientador

*Marcos Aurélio G. Monteiro*

---

Professor. Dr. MARCOS AURELIO GUIMARAES MONTEIRO -  
UFS  
Primeiro Examinador

*Wagner Ferreira Santos*

---

Professor. Me WAGNER FERREIRA SANTOS - UFS  
Segundo Examinador

Itabaiana, 13 de Agosto de 2021



*Dedico este trabalho a minha mãe Maria de Jesus e ao meu pai falecido Antônio Tavares de Jesus, pelos esforços que tiveram na minha educação com os poucos recursos que possuíam. Tendo uma vida muito humilde e sofrida, fizeram-me ser uma pessoa batalhadora e determinada pelos meus sonhos.*



# Agradecimentos

Mais um ciclo da minha vida está se concretizando com sucesso e ao longo dessa jornada curta e com muita intensidade, é preciso de um momento para agradecer às várias pessoas que contribuíram com esse feito como os meus pais, colegas de curso, os professores Dr. Alejandro Caicedo Roque, Dr. Éder Mateus de Souza, Dra. Marta Elid Amorim Mateus, Dr. Fabio Lima Santos, Dr. Mateus Alegri, Me. Samuel Brito Silva, Me. Wagner Ferreira Santos e Ma. Viviane de Jesus Lisboa Aquino.

Agraço também a Deus por essa oportunidade dando a mim saúde, perseverança por não desistir das dificuldades que passei principalmente o cansaço físico de conciliar trabalho e estudo, e lembrar-me que as vitórias são feitas de lutas e renúncias.

E um agradecimento muito significativo às seguintes instituições: **MEC/CAPES**, **PROFMAT**, **UFS - polo Itabaiana**, por essa realização pessoal que abrirá portas para o meu desenvolvimento profissional.

Agradecimentos a todos aqueles que contribuíram para que a produção de trabalhos acadêmicos conforme as normas ABNT e L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X fosse possível e aos novos voluntários que contribuíram e que ainda contribuirão para a evolução do abnT<sub>E</sub>X2.



# Resumo

Nesta dissertação estudamos o problema da duplicação do cubo, expondo algumas soluções não-euclidianas de matemáticos gregos e renascentistas. Exibiremos uma abordagem algébrica, para explicar a impossibilidade de duplicar um cubo usando como instrumentos a régua e compasso. Sugerimos duas maneiras de implementar o assunto através de dois tutoriais para construção de figuras geométricas relacionadas com a solução de Arquitas e a máquina de Platão usando GeoGebra.

Palavras-chaves: Duplicação do cubo. Impossibilidade. Régua e compasso.



# Abstract

In this dissertation we study the cube duplication problem, exposing some non-Euclidean solutions of Greek and Renaissance mathematicians. We will show an algebraic approach to explain the impossibility of duplicating a cube using the ruler and compass as instruments. We suggest two ways to implement the subject through two tutorials for construction of geometric figures related to Architas' solution and Plato's machine using GeoGebra.

**Keywords:** Duplication of the cube. Impossibility. ruler and compass.



# Lista de ilustrações

Figura 1 – Superfícies sem rotação . . . . .	22
Figura 2 – Cilindro circular . . . . .	23
Figura 3 – Cone . . . . .	24
Figura 4 – toro . . . . .	25
Figura 5 – Arquitas: Intersecção das Superfícies . . . . .	28
Figura 6 – Superfície sem rotação - Construção proposta por Eudoxo . . . . .	29
Figura 7 – Intersecção entre as parábolas $x^2 = ay$ e $y^2 = xb$ . . . . .	31
Figura 8 – Parábola $y = \frac{1}{4p}x^2$ . . . . .	33
Figura 9 – Intersecção entre as parábolas $y = \frac{1}{4p}x^2$ e $x = \frac{1}{4p}y^2$ . . . . .	34
Figura 10 – Máquina de Platão . . . . .	35
Figura 11 – Ângulos formados pela máquina de Platão . . . . .	35
Figura 12 – Dispositivo de Eratóstenes para solucionar a duplicação do cubo . . . . .	37
Figura 13 – Médias proporcionais através do dispositivo de Eratóstenes . . . . .	38
Figura 14 – Construção definida pela proposição 1.1 de Euclides . . . . .	40
Figura 15 – Proposta de Hipócrates para a Proposição 1.1 de Euclides . . . . .	41
Figura 16 – Construção para determinação do segmento adicionado . . . . .	43
Figura 17 – Concoide de Nicomedes . . . . .	44
Figura 18 – Sobreposição das construções de Apolônio, Herão e Filão . . . . .	47
Figura 19 – Construção de Apolônio - Herão - Filão . . . . .	47
Figura 20 – Resumo da Solução . . . . .	48
Figura 21 – Construção de Díocles - Cissoide . . . . .	51
Figura 22 – Construção Sporus e Pappus . . . . .	53
Figura 23 – Solução de Descartes . . . . .	57
Figura 24 – Construção de Newton . . . . .	59
Figura 25 – Ponto construível: $(-1, 0)$ . . . . .	64
Figura 26 – Ponto construível: $(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ e $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ . . . . .	64
Figura 27 – Construção de pontos construíveis . . . . .	66
Figura 28 – Janela de visualização 3D . . . . .	74
Figura 29 – Janela de visualização 3D . . . . .	75
Figura 30 – Cilindro gerado pela rotação de uma reta paralela ao eixo $Z$ . . . . .	76
Figura 31 – Cone gerado pela rotação de uma reta entorno do eixo $X$ . . . . .	77
Figura 32 – Toro gerado pela rotação de uma circunferência em torno do eixo $Z$ - Intersecção entre toro, cilindro e cone . . . . .	77
Figura 33 – Gráfico de Cúbica no Método de Cardano . . . . .	85
Figura 34 – Relação das raízes em uma circunferência de raio $2\alpha$ . . . . .	92



# Lista de abreviaturas e siglas

CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
IMPA	Instituto de Matemática Pura e Aplicada
PROFMAT	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
UFS	Universidade Federal de Sergipe
MEC	Ministério da Educação
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais



# Sumário

<b>1</b>	<b>ALGUMAS SOLUÇÕES DOS GREGOS</b>	<b>21</b>
1.1	A solução de Arquitas	21
1.2	A Solução de Eudoxo	28
1.3	A solução de Menêcmo	31
1.4	A solução de Platão	34
1.5	A solução de Eratóstenes	37
1.6	A solução de Nicomedes	39
1.7	As soluções de Apolônio de Perga, Herão de Alexandria e Filão de Bizâncio	46
1.8	A Solução de Díocles	50
1.9	As soluções de Esporo e Papo	53
<b>2</b>	<b>ALGUMAS SOLUÇÕES RENASCENTISTAS</b>	<b>57</b>
2.1	A solução de Descartes	57
2.2	A solução de Newton	58
<b>3</b>	<b>A IMPOSSIBILIDADE DA DUPLICAÇÃO À LUZ DA ÁLGEBRA</b>	<b>61</b>
3.1	Os antecedentes e o contexto histórico	61
3.2	Impossibilidade desde do ponto de vista algébrico	63
<b>4</b>	<b>ATIVIDADES PARA APERFEIÇOAMENTO DO CONHECIMENTO COM SUPERVISÃO DO PROFESSOR</b>	<b>73</b>
4.1	Tutorial de construção de superfícies de revolução no <i>software</i> GeoGebra	73
4.1.1	Construção do toro	77
4.1.2	Máquina de Platão	78
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>81</b>
	<b>APÊNDICES</b>	<b>83</b>
	<b>APÊNDICE A –</b>	<b>85</b>
A.1	Método de Cardano através de parâmetros	85



# Introdução

Na Grécia antiga, vários matemáticos que se mobilizaram entorno da solução de questões geométricas, como a duplicação do cubo, notaram a necessidade de expandir os conhecimentos adquiridos, como é o caso da junção entre a geometria e álgebra resultando na geometria analítica. Nesta direção Farago et al.(2003) defende-se que se deve compreender a historia dos conhecimentos matemáticos para entender o motivo pelo qual foram construídos. Assim, a história da matemática relata as diversas contribuições dos povos que foram aprimorando os conhecimentos científicos dessa ciência ao longo do tempo.

A História da Matemática (...) Permite compreender a origem das ideias que deram forma à nossa cultura e observar também os aspectos humanos do seu desenvolvimento: enxergar os homens que criaram essas ideias e estudar as circunstâncias em que elas se desenvolveram. Assim, esta História é um valioso instrumento para o ensino/aprendizado da própria Matemática. Podemos entender por que cada conceito foi introduzido nesta ciência e por que, no fundo, ele sempre era algo natural no seu momento. (FARAGO et al., 2003, p. 17)

As questões geométricas para os matemáticos gregos deveriam seguir alguns princípios: a reta servia para unir pontos, o compasso era para traçar circunferência, questões geométricas não poderiam ser resolvidas com ajuda da álgebra. O assunto envolvia obtenção de pontos construíveis no plano cartesiano, com coordenadas encontradas a partir de interseções de retas e circunferências. A prova desse impedimento construtivo nos leva à solução de uma equação cúbica que não é racional e não está na extensão quadrática dos racionais.

Esta dissertação obedecerá a seguinte ordem: no primeiro capítulo, estudaremos as soluções que alguns gregos fizeram para o problema proposto, o qual recai na determinação de uma média proporcional. Em particular, a resolução de Arquitas utilizou superfícies tridimensionais tais como: o cone, o toro e o cilindro, o que foi considerado um grande avanço para seu tempo. Já as soluções de Platão e Eratóstenes usaram mecanismos mecânicos. Houve necessidade de usar outras curvas além de retas e circunferências, como as cônicas no caso de Menêmo, a Concoide por Nicomedes e a Cissoide por Díocles.

No segundo capítulo mostraremos as construções geométricas feitas por Descartes e Newton, as quais possibilitam a determinação da aresta necessária para a duplicação o cubo.

No terceiro capítulo, trabalharemos com a teoria de grupos algébricos, brindando o suporte na demonstração sobre a impossibilidade da duplicação do cubo com régua não graduada e compasso.

No quarto capítulo propomos uma atividade orientada de construção das seguintes superfícies geométricas: cilindro, toro e cone, como também a máquina de Platão com utilização do *software* GeoGebra, com objetivo de consolidar o desenvolvimento cognitivo como relata Chaves e Setzer (1987)

[...] devemos nos preocupar com a questão da informática na educação porque as evidências disponíveis, embora não tão amplas e contundentes quanto se poderia desejar, desmontam que o contato regrado e orientado com o computador em uma situação de ensino/ aprendizagem contribui positivamente para a aceleração do desenvolvimento cognitivo e intelectual, em especial no que diz respeito ao raciocínio lógico e formal, à capacidade de pensar com rigor e de modo sistemático [...] (CHAVES; SETZER, 1987, p. 10)

## Origem do problema da duplicação do cubo

Existem duas versões para a origem do problema da duplicação do cubo. A primeira seria a construção de um túmulo feito para Glauco a pedido de Minos, que não ficou satisfeito com o comprimento de 30 metros nas três dimensões e solicitou a duplicação do mesmo.

A segunda versão conta o aparecimento de uma praga na ilha de Delos<sup>1</sup>, onde os moradores consultaram um oráculo com objetivo de eliminar esta situação ruim, mas este previu a construção de um altar, com o dobro do tamanho do existente para que a epidemia fosse extinta. Como os cidadãos não tinham ideia de como fazer a duplicação de um sólido, foram se aconselhar com Platão, que por sua vez, afirmou que essa tarefa não seria um pedido de Deus, e sim uma forma de envergonhar os gregos pelo descaso com a matemática e seu pouco-caso pela geometria.

---

<sup>1</sup> A ilha de Delos está localizada no centro do grupo de ilhas do mar Egeu

# 1 Algumas soluções dos Gregos

Neste capítulo veremos como alguns gregos resolveram o mencionado problema encontrando a média proporcional. Para as várias soluções, foram usados instrumentos mecânicos, algumas curvas como: as cônicas, a conoide, a cissoide e superfícies como: o toro, o cilindro e o cone.

De aqui para frente denotaremos um segmento que passa pelos pontos  $A$  e  $B$  por  $\overline{AB}$  e o comprimento desse segmento por  $\overleftarrow{AB}$ , e a reta que passa pelos pontos  $A$  e  $B$  será denotada por  $\overleftrightarrow{AB}$ .

## 1.1 A solução de Arquitas

Este propôs como resolução do problema de Delos a intersecção de três superfícies de revolução: o cilindro, o toro e o cone. O cruzamento das duas primeiras superfícies recebeu o nome de Curva de Arquitas<sup>1</sup>, e o encontro desta curva com o Cone resultou em quatro pontos de intersecção. Como as distâncias dos pontos até a origem ( $A$ ) são iguais, foi considerado o ponto do primeiro quadrante.

Essa prova foi grandiosa, por tratar-se de uma solução tridimensional no tempo em que aconteceu, como pode ser vista no comentário de Heath (1921):

A solução de Arquitas é a mais notável de todas, principalmente quando se considera sua data (primeira metade do século IV a.C.), pois não é uma construção no plano, mas sim uma construção arrojada em três dimensões, na qual é determinado um certo ponto como a intersecção de três superfícies de revolução, (1) cone reto, (2) um cilindro, (3) um toro com diâmetro nulo. (HEATH, 1921, p. 246)

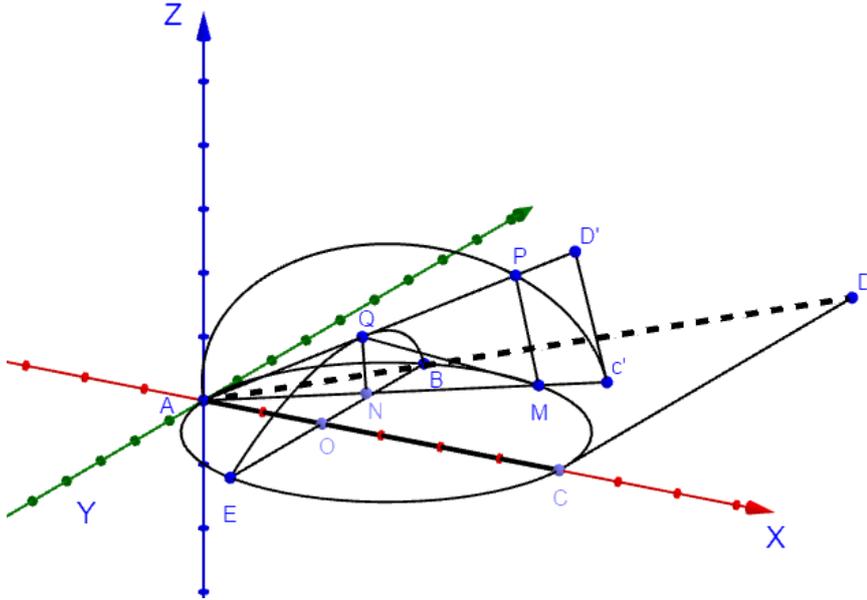
A seguir relataremos as etapas da construção descrita por Arquitas: consideremos um circunferência de diâmetro  $\overline{AC}$  com medida  $a$  coincidente com o eixo  $X$ , no plano  $ABC$ , dando origem ao semicilindro e seja  $b$  o comprimento  $\overline{AB}$  uma corda desse circunferência. Seja  $D$  o ponto de intersecção entre as retas  $\overleftrightarrow{AB}$  e a tangente à circunferência no ponto  $C$ . As semicircunferências de diâmetros  $\overline{BE}$  e  $\overline{AC'}$  igual a  $\overline{AC}$ , pertencem a um plano perpendicular ao plano  $ABC$ . O toro será gerado pela rotação da semicircunferência  $APC'$  em torno de um eixo perpendicular ao plano  $ABC$  passando por  $A$ .

O cone será determinado pela reta geratriz  $\overleftrightarrow{AD}$  e eixo de revolução  $AC$ . Finalmente o ponto  $P$  descreve o local do encontro entre as superfícies envolvidas. Os pontos  $N$  e

<sup>1</sup> Arquitas de Tarento foi um matemático pitagórico que viveu na primeira metade do quarto século 428–347a.c

$M$  serão as projeções de  $Q$  e  $P$ , sobre o diâmetro  $AC'$ , respectivamente. Além disso,  $N$  pertence a  $BE$ . Mostraremos que,  $\overline{AM}$  e  $\overline{AP}$  são duas médias proporcionais entre  $\overline{AC'}$  e  $\overline{AQ}$ .

Figura 1 – Superfícies sem rotação



Fonte: Adaptado de Heath (1921,p.247)

**Solução.** O ângulo  $E\hat{Q}B$  é reto, pois está inscrito em um semicircunferência e  $QN$  é perpendicular a  $BE$ , assim das relações métricas no triângulo  $EQB$ , temos

$$(\overline{QN})^2 = \overline{BN} \cdot \overline{EN}.$$

Utilizando o Teorema das cordas no segmentos  $BE$  e  $AM$ ,

$$\overline{BN} \cdot \overline{EN} = \overline{AN} \cdot \overline{NM},$$

resultando em

$$(\overline{QN})^2 = \overline{AN} \cdot \overline{NM}.$$

Notemos que  $A\hat{Q}M$  e  $A\hat{P}C'$  são ângulos retos, pois são ângulos inscritos nas semicircunferências  $AQM$  e  $APC'$ , respectivamente.

Como  $QM$  é paralelo  $PC'$ , então os triângulos  $APC'$ ,  $APM$  e  $AQM$  são semelhantes, pois  $P\hat{A}C' = P\hat{A}M = Q\hat{A}M$ ,  $A\hat{P}C' = A\hat{M}P = 90^\circ$ . Das relações entre os triângulos  $APC'$  e  $APM$ , temos

$$\frac{\overline{AC'}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{PC'}}{\overline{PM}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{AM}}, \quad (1.1)$$

e dos triângulos  $APM$  e  $AQM$ , segue que

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{AM}} = \frac{\overline{PM}}{\overline{QM}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{AQ}}. \quad (1.2)$$

Como o termo  $\frac{\overline{AP}}{\overline{AM}}$  é comum nas equações (1.1) e (1.2), obtemos

$$\frac{\overline{AC'}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{AM}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{AQ}}.$$

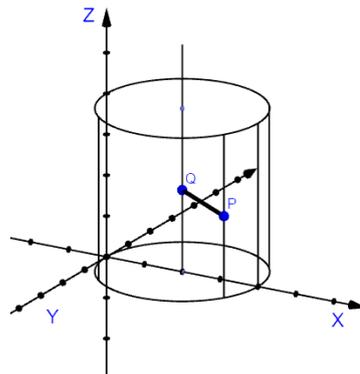
Concluindo daí que  $\overline{AM}$ ,  $\overline{AP}$  são duas médias proporcionais entre  $\overline{AC'}$  e  $\overline{AQ}$ .

Por outro lado, para uma resolução analítica, encontraremos primeiro as equações cartesianas das superfícies.

## Equação do cilindro

**Definição 1.1.** (REIS; SILVA, 1985, p. 133) *A superfície gerada pela rotação de uma reta  $r$  em torno de uma reta  $s$ , sendo  $r$  e  $s$  paralelas, é chamada cilindro de revolução ou cilindro circular.*

Figura 2 – Cilindro circular



Fonte: Autor, 2021

Consideremos como eixo de cilindro a reta  $s : x = \frac{a}{2}$  e uma reta  $r$  paralela a  $s$ . Seja  $\frac{a}{2}$  a distância entre  $r$  e  $s$ . Então, um ponto  $P(x, y, z)$  pertence ao cilindro se, e somente se,

$$d(P, s) = \frac{a}{2}.$$

Mas,  $d(P, s) = d(P, Q)$ , onde  $Q(\frac{a}{2}, 0, z)$ . Portanto, começaremos por  $d(P, Q) = d(P, s)$ ,

$$\sqrt{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + (y - 0)^2 + (z - z)^2} = \frac{a}{2}.$$

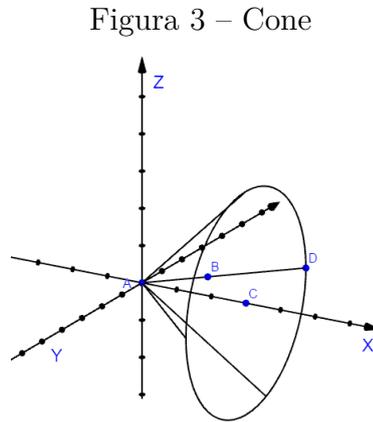
Assim, desenvolvendo a equação anterior, temos

$$x^2 - xa + \frac{a^2}{4} + y^2 = \frac{a^2}{4}, \quad \text{que equivale a, } x^2 + y^2 = xa. \quad (1.3)$$

A qual é a equação do cilindro que procurávamos.

## Equação do Cone

**Definição 1.2.** (REIS; SILVA, 1985, p. 132) Um cone é a superfície gerada pela rotação de uma reta em torno de outra que a intersecta.



Fonte: Autor, 2021

Na Figura, consideremos a reta  $\overleftrightarrow{AD}$  girando em torno da reta  $\overleftrightarrow{AC}$ . Seja  $A$  o ponto de interseção entre as retas  $\overleftrightarrow{AD}$  e  $\overleftrightarrow{AC}$ , chamaremos o ponto  $A$  o vértice do cone e a reta  $\overleftrightarrow{AC}$  eixo do cone.

Para deduzirmos a equação do cone vamos estabelecer um sistema de coordenadas, fazendo coincidir o eixo do cone  $s$  com o eixo  $X$ . Consideremos uma reta  $r$  no plano  $XY$  com equação dada por

$$y = mx, \quad z = 0,$$

onde  $m$  é a tangente do ângulo  $\theta$  formado pelas retas  $r$  e  $s$ .

Assim, da equação de  $r$ , tomemos

$$F(x, y) = y - mx = 0.$$

Observemos na figura 1, que o triângulo  $ABC$  é retângulo em  $B$ , pois está inscrito em uma semicircunferência. Note que,  $B\hat{A}C = D\hat{A}C = \theta$ . Consideremos  $\overline{AC} = a$  (hipotenusa),  $\overline{AB} = b$  (c. adjacente) e  $\overline{BC} = \sqrt{a^2 - b^2}$  (c. oposto), assim  $\tan(\theta) = m = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b}$ . Portanto

$$F(x, y) = y - \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b} \cdot x = 0.$$

Como a rotação é em torno do eixo  $X$ . Seja  $Q$  um ponto qualquer no eixo  $X$ , isto é  $Q(x, 0, 0)$ . Associado a  $x$  existe  $y_1$  no eixo  $y$  tal que  $y_1 - \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b}x = 0$ .

Seja  $P(x, y, z)$  um ponto arbitrário do cone e note que ao girar  $P$  ao redor do eixo  $X$  descreve uma circunferência de centro  $Q$  e raio  $y_1$ , assim  $d(P, Q) = d(R, Q)$ .

Daí, temos  $\sqrt{y^2 + z^2} = y_1$ . Logo,

$$y^2 + z^2 = y_1^2 = \left(\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b}\right)^2 x^2, \quad \text{que equivale a,} \quad y^2 + z^2 = y_1^2 = \left(\frac{a^2 + b^2}{b^2}\right) x^2.$$

Portanto

$$\begin{aligned} a^2 \cdot x^2 - b^2 \cdot x^2 &= b^2 \cdot (y^2 + z^2) \\ b^2 \cdot (x^2 + y^2 + z^2) &= a^2 \cdot x^2, \end{aligned}$$

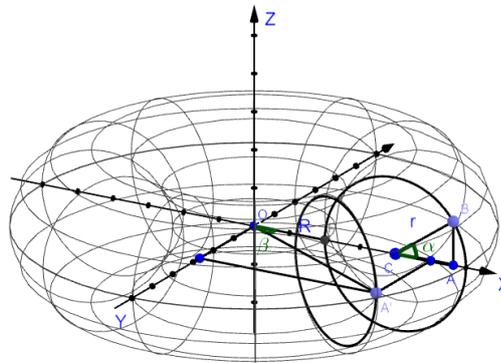
resultando na equação do cone procurada

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{a^2 \cdot x^2}{b^2}. \quad (1.4)$$

## Equação do toro

**Definição 1.3** (FRENSSEL, 1997, p. 203-204). *Diremos que um toro é o lugar geométrico no espaço gerado pela rotação de uma superfície circular plana de raio  $r$ , em torno de uma circunferência de raio  $R$ .*

Figura 4 – toro



Seja  $C$  um ponto sobre o eixo  $X$  a uma distância  $R$  da origem. Consideremos uma circunferência no plano  $XZ$  de raio  $r$  e centro  $C$ . Sejam  $B$  um ponto dessa circunferência e  $A$  sua projeção sobre o eixo  $X$ . Denotemos o ângulo  $B\hat{C}A = \alpha$ .

No triângulo retângulo  $BCA$ , calculamos os comprimentos dos lados  $CA$  e  $AB$  pelas relações de seno e cosseno, obtendo

$$\overline{CA} = r \cos \alpha \quad \text{e} \quad \overline{AB} = r \sin \alpha.$$

Agora, determinemos as coordenadas do ponto  $B$  com relação ao ângulo  $B\hat{O}A = \beta$ . Seja  $\overline{OA} = R + r \cos \alpha$  o comprimento do segmento  $OA$ . Consideremos o segmento  $OA$  girando em torno do eixo  $Z$ . As projeções do segmento  $OA$  sobre os eixos  $X$  e  $Y$  são determinadas

por  $\cos\beta = \frac{X}{OA}$ ,  $\sin\beta = \frac{y}{OA}$ , respectivamente e  $z$  não sofrerá alteração. Daí, temos as equações paramétricas do toro procuradas

$$X = (R + r\cos\alpha)\cos\beta, Y = (R + r\cos\alpha)\sin\beta, Z = r\sin\alpha.$$

Para determinarmos a equação cartesiana do toro, observemos que,

$$X^2 + Y^2 = ((R + r\cos\alpha)\cos\beta)^2 + ((R + r\cos\alpha)\sin\beta)^2.$$

Colocando em evidência e usando a relação fundamental resulta em

$$X^2 + Y^2 = (R + r\cos\alpha)^2(\cos^2\beta + \sin^2\beta) \quad e \quad X^2 + Y^2 = (R + r\cos\alpha)^2,$$

de onde, obtemos

$$\sqrt{X^2 + Y^2} = R + r\cos\alpha \tag{1.5}$$

como  $Z = r\sin\alpha$ , podemos substituir na relação fundamental da trigonometria, encontrando

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1 - \frac{z^2}{r^2}} = \pm\sqrt{\frac{r^2 - z^2}{r^2}} = \pm\frac{\sqrt{r^2 - z^2}}{r}$$

Como  $0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{2}$ , consideremos a raiz positiva e substituimos na equação (1.5)

$$\sqrt{X^2 + Y^2} = R + r \cdot \frac{\sqrt{r^2 - z^2}}{r}, \quad \text{que equivale a,} \quad \sqrt{X^2 + Y^2} - R = \sqrt{r^2 - Z^2}.$$

Elevando ao quadrado, obtemos

$$(\sqrt{X^2 + Y^2} - R)^2 = r^2 - Z^2, \quad \text{que equivale a,} \quad (\sqrt{X^2 + Y^2} - R)^2 + Z^2 = r^2.$$

Assim, quando a circunferência gira em torno do eixo  $Z$  encontramos a equação do toro. No caso particular de  $R = r = \frac{a}{2}$ , temos

$$X^2 + Y^2 - 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot (\sqrt{X^2 + Y^2}) + \frac{a^2}{4} + Z^2 = \frac{a^2}{4}.$$

Portanto

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = a \cdot \sqrt{X^2 + Y^2}. \tag{1.6}$$

Por outro lado, voltando na equação (1.3)

$$X^2 + Y^2 = aX$$

Agora, tomando o quadrado em ambos lados

$$(X^2 + Y^2)^2 = a^2 \cdot X^2. \quad (1.7)$$

Daí, substituindo a equação (1.7) na equação (1.4), temos

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = \frac{(X^2 + Y^2)^2}{b^2}.$$

Extraindo a raiz quadrada em ambos lados, obtemos

$$\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = \frac{X^2 + Y^2}{b},$$

de onde, segue que

$$\frac{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}{\sqrt{X^2 + Y^2}} = \frac{X^2 + Y^2}{b}, \quad (1.8)$$

Agora escrevemos a equação  $X^2 + Y^2 + Z^2 = a \cdot \sqrt{X^2 + Y^2}$  na forma de proporção, obtendo

$$\frac{a}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}} = \frac{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}{\sqrt{X^2 + Y^2}}. \quad (1.9)$$

Como o termo  $\frac{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}{\sqrt{X^2 + Y^2}}$  é comum nas equações (1.8) e (1.9), assim

$$\frac{a}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}} = \frac{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}{\sqrt{X^2 + Y^2}} = \frac{\sqrt{X^2 + Y^2}}{b},$$

que é equivalente a,

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{AM}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{AB}}.$$

Da primeira e a terceira razão, temos

$$\overline{AC} \cdot \overline{AB} = \overline{AP} \cdot \overline{AM} \quad (1.10)$$

Note que, a relação  $\frac{\overline{AP}}{\overline{AM}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{AB}}$  pode ser representada por

$$\overline{AM}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{AP} \quad (1.11)$$

A qual multiplicando por  $\overline{AM}$  resulta em

$$\overline{AM}^3 = \overline{AB} \cdot \overline{AP} \cdot \overline{AM} \quad (1.12)$$

Das equações (1.10) e (1.12), temos

$$\overline{AM}^3 = \overline{AB} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC} = \overline{AB}^2 \cdot \overline{AC}.$$

Note que,

$$\frac{\overline{AM}^3}{\overline{AB}^3} = \frac{\overline{AB}^2 \cdot \overline{AC}}{\overline{AB}^3} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \quad (1.13)$$

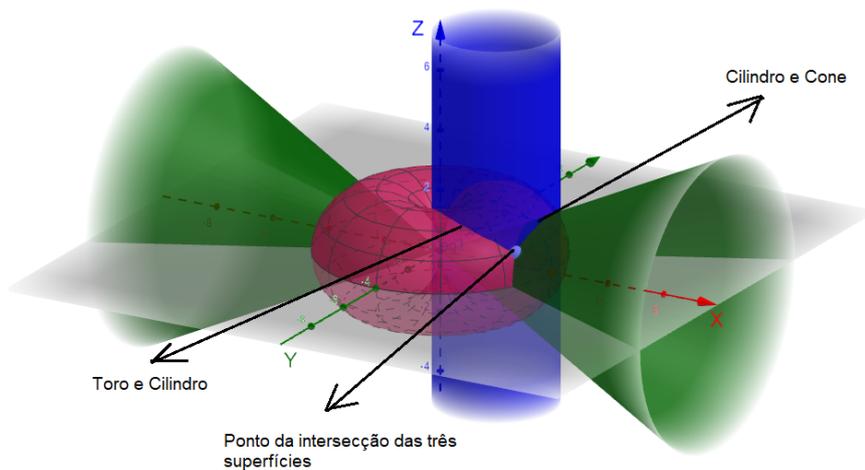
Finalmente, observe o caso específico,  $\overline{AC} = 2 \cdot \overline{AB}$ , o que resulta em

$$\overline{AM}^3 = 2 \cdot \overline{AB}^3.$$

Portanto, o cubo de lado  $\overline{AM}$  é igual ao dobro do cubo de lado  $\overline{AB}$ .

A figura abaixo mostra a intersecção das três superfícies

Figura 5 – Arquitas: Intersecção das Superfícies



Fonte: Autor, 2021

## 1.2 A Solução de Eudoxo

A narração de Eutócio<sup>2</sup> sobre a solução de Eudoxo<sup>3</sup> referente ao problema da duplicação do cubo usando linhas curvas, sendo que em sua prova tais curvas não foram

<sup>2</sup> Eutócio de Ascalon (480 a 520 d.C) fez relatos dos vários tratados de Arquimedes e as cônicas de Apolônio.

<sup>3</sup> Eudoxo de Cnido (entre 408 e 355 a.C) foi um navegante e geógrafo grego.

mostradas, e, além disso, cometeu um erro em tratar uma proporção discreta<sup>4</sup> como fosse uma proporção contínua.

Para Tannery<sup>5</sup>(1887, p. 53-61 apud Heath, 1921) há uma semelhança entre a solução de Eudoxo e com a de Arquitas.

Consideraremos a equação do toro (1.6)  $X^2 + Y^2 + Z^2 = a \cdot \sqrt{X^2 + Y^2}$ , a qual, pode ser rescrita  $Y^2 + Z^2 = a \cdot \sqrt{X^2 + Y^2} - X^2$ . Substituindo na equação do cone (1.4)  $X^2 + Y^2 + Z^2 = \frac{a^2 X^2}{b^2}$ , obtemos

$$X^2 + a\sqrt{X^2 + Y^2} - X^2 = \frac{a^2 X^2}{b^2}.$$

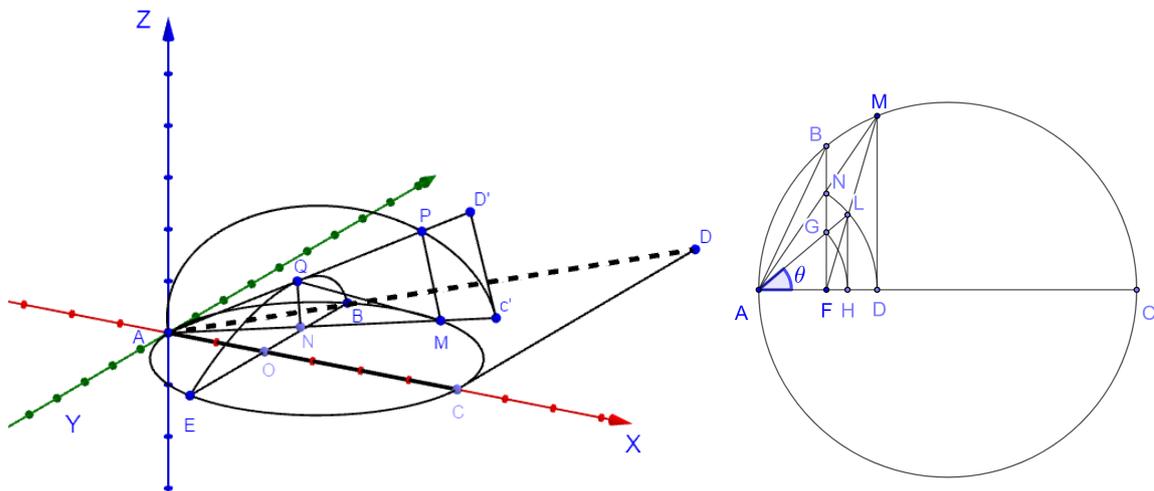
Segue daí que,

$$X^2 = \frac{b^2 \sqrt{X^2 + Y^2}}{a}, \quad (1.14)$$

é a projeção no plano  $ABC$ .

Para escrever a equação (1.14) em coordenadas polares, consideremos o segmento  $AC$  como o eixo polar e  $A$  o polo. Sejam  $ABC$  a circunferência de diâmetro  $AC$  e  $F$  a projeção de  $B$  sobre o diâmetro.  $N$  e  $G$  pertencem à reta  $\overleftrightarrow{BF}$ . Tome  $\widehat{GAF} = \theta$  de acordo com a figura 6.

Figura 6 – Superfície sem rotação - Construção proposta por Eudoxo



Fonte: Adaptados de Heath (1921, p.250)

No triângulo retângulo  $AFG$  aplicando a relação  $\cos\theta = \frac{\overline{AF}}{\overline{AG}}$  e depois  $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{\overline{AG}}{\overline{AF}}$ , obtemos

<sup>4</sup> Uma proporção discreta é uma proporção que os meios não são iguais, opondo-se a proporção contínua(média proporcional ou média geométrica ).

<sup>5</sup> Paul Tannery foi um matemático e historiador das ciências francesas (1843 a 1904).

$$\overline{AG} = \overline{AF} \sec \theta \quad (1.15)$$

Como  $\hat{A}BC$  é reto, das relações métricas obtemos,

$$\overline{AB}^2 = \overline{AF} \cdot \overline{AC}.$$

Substituindo  $\overline{AC} = a$  e  $\overline{AB} = b$

$$\overline{AF} = \frac{b^2}{a} \quad (1.16)$$

Denotemos por  $H$  a intersecção entre a reta  $\overleftrightarrow{AC}$  e a circunferência de centro em  $A$  e raio  $\overline{AG}$ . Tracemos a perpendicular por  $H$  encontrando a reta  $\overleftrightarrow{AG}$  em  $L$ . Sejam  $N$  e  $D$  os pontos de intersecção entre a circunferência de centro em  $A$  e raio  $\overline{AL}$  com os segmentos  $BF$  e  $AC$ , respectivamente.

Pelo mesmo raciocínio anterior, usando a equação (1.15), temos

$$\overline{AL} = \overline{AH} \sec \theta = \overline{AG} \sec \theta = \overline{AF} \sec^2 \theta$$

Denotando  $\rho = \overline{AL}$  e substituindo na equação anterior

$$\rho = \frac{b^2}{a} \sec^2 \theta.$$

Por  $D$ , traçamos uma perpendicular a  $AC$  intersectando a circunferência em  $M$ , que satisfaz a equação (1.14). Tomando  $\hat{N}AD = \alpha$ , obtemos

$$\overline{AN} = \overline{AF} \cdot \sec \alpha \quad e \quad \overline{AB}^2 = \overline{AF} \cdot \overline{AC}$$

Assim  $\overline{AM} = \overline{AD} \cdot \sec \alpha$  e desde que  $AD = AN$ , segue após substituição do resultado anterior que

$$\overline{AM} = \overline{AF} \cdot \sec^2 \alpha \quad ou \quad \overline{AM} = \frac{b^2}{a} \sec^2 \alpha$$

Da relação do triângulo retângulo  $AMC$ , temos

$$\overline{AM}^2 = \overline{AD} \cdot \overline{AC} = \overline{AN} \cdot \overline{AC} = \overline{AF} \cdot \overline{AC} \sec \alpha.$$

Portanto, a média proporcional  $\overline{AM}$  obedece a equação da curva (1.14)

Observe que a relação  $\overline{AM}^2 = \overline{AF} \cdot \overline{AB}$  envolve as duas médias proporcionais, uma no plano  $ABC$  e a outra dada pela prova de Arquitas.

Na opinião de Heath (1921, p. 251):

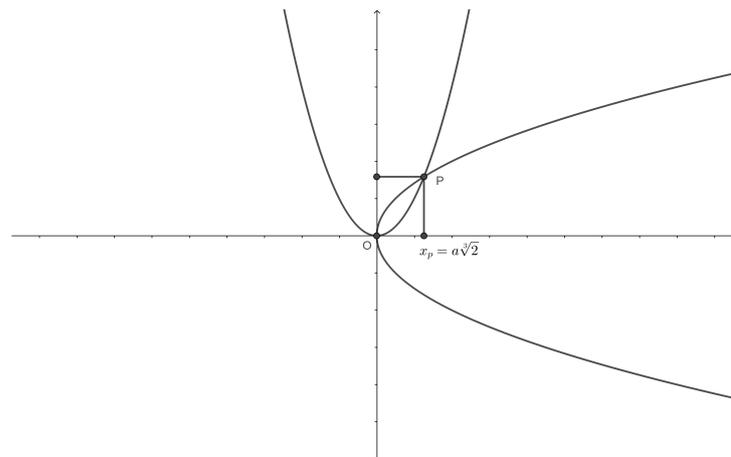
Deve-se admitir que a sugestão de Tannery quanto ao método de Eudoxo é atraente; mas é claro que é apenas uma conjectura. Em minha opinião, a objeção a isso é que é uma adaptação muito próxima das ideias de

Arquitas. Eudoxo foi, é verdade, um aluno de Arquitas, e há uma boa dose de semelhança de caráter entre a construção da curva da dupla curvatura por Arquitas e a construção de Eudoxo da lemniscata esférica por meio da revolução de esferas concêntricas; mas Eudoxo era, eu acho, um matemático muito original para se contentar com uma mera adaptação do método de Arquitas de solução.

### 1.3 A solução de Menêmo

Segundo Heath (1921, p. 251) Eutócio descreveu as soluções de Menêmo<sup>6</sup> para o problema em termos de encontrar duas médias proporcionais, o que consistiu em determinar um certo ponto como a interseção entre duas cônicas. Ele apresentou duas soluções, sendo a primeira a interseção de duas parábolas e a segunda a interseção entre uma parábola e uma hipérbole retangular<sup>7</sup>. Muitos estudiosos daquela época como Proclo<sup>8</sup>, Amiclas de Herecleia, amigo de Platão, e com Dinóstrato<sup>9</sup>, admitiam que Menêmo deixou mais perfeita toda a geometria.

Figura 7 – Intersecção entre as parábolas  $x^2 = ay$  e  $y^2 = xb$



Fonte: Autor, 2021

#### Solução 1

A representação de duas médias proporcionais  $x, y$  entre  $a$  e  $b$  é dada por

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b},$$

de onde temos as seguintes afirmações. Da primeira e a segunda razão, temos a parábola

$$x^2 = ay \quad \text{ou seja,} \quad y = \frac{x^2}{a}, \quad (1.17)$$

<sup>6</sup> Menêmo foi um matemático da Grécia antiga e discípulo de Eudoxo de Cnido.

<sup>7</sup> Uma hipérbole retangular é quando suas assíntotas se intersectam em ângulos retos.

<sup>8</sup> Proclo Lício foi um filósofo grego do século V.

<sup>9</sup> Dinóstrato era irmão de Menêmo que trabalhou na solução da quadratura do círculo.

Agora, da primeira e a terceira razão, obtemos a hipérbole

$$x \cdot y = a \cdot b, \quad (1.18)$$

e, finalmente da segunda e a terceira razão, obtemos a parábola

$$y^2 = x \cdot b \quad (1.19)$$

Calcularemos a intersecção entre as duas parábolas para o caso  $b = 2a$ . Das equações (1.17) e (1.19), temos que

$$\left(\frac{x^2}{a}\right)^2 = 2ax, \quad \text{que é equivalente a,} \quad x^4 - 2a^3x = 0.$$

Fatorando  $x$ , obtemos

$$x(x^3 - 2a^3) = 0$$

Assim as soluções são  $x = 0$  e  $x = a\sqrt[3]{2}$ , as quais retratam o lado do cubo que sofreu a duplicação.

## Solução 2

Suponhamos que os segmentos  $AO$  e  $OB$  são perpendiculares em  $O$ , com  $\overline{AO} > \overline{OB}$  e que  $\overline{OM}$  e  $\overline{ON}$  são as duas médias proporcionais, sendo  $OM$  e  $ON$  segmentos nos prolongamentos de  $OB$  e  $AO$ , respectivamente.

$$\frac{\overline{AO}}{\overline{OM}} = \frac{\overline{OM}}{\overline{ON}} = \frac{\overline{ON}}{\overline{OB}} \quad (1.20)$$

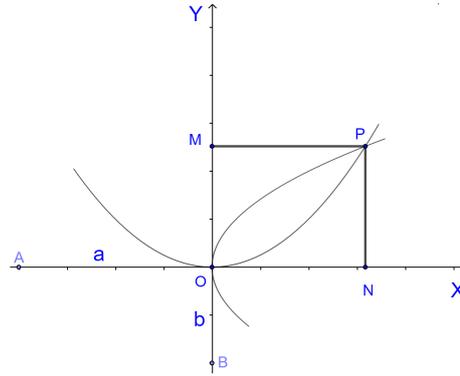
Das duas últimas razões de (1.20) com  $\overline{ON} = \overline{PM}$ , temos

$$\overline{OB} \cdot \overline{OM} = \overline{ON}^2 = \overline{PM}^2 \quad (1.21)$$

Mostraremos, a partir da equação (1.21), que  $P$  é um ponto em uma parábola de vértice na origem e eixo  $OY$ .



Figura 9 – Interseção entre as parábolas  $y = \frac{1}{4p}x^2$  e  $x = \frac{1}{4p}y^2$



Fonte: Adaptado de Heath (1921, p. 254)

Por outro lado, das duas primeiras razões de (1.20), segue

$$\overline{AO} \cdot \overline{ON} = \overline{OM}^2 = \overline{PN}^2, \quad \text{com} \quad \overline{OM} = \overline{PN}. \quad (1.23)$$

Analogamente, consideremos  $P = (\overline{ON}, \overline{PN})$  que satisfaz a equação da parábola  $4px = y^2$ , com vértice na origem e distância entre o vértice e o foco igual a  $p$ , assim

$$\overline{PN}^2 = 4p \cdot \overline{ON} \quad (1.24)$$

Portanto, das equações (1.23) e (1.24), concluímos que  $\overline{AO} = 4p$  é o latus rectum.

## 1.4 A solução de Platão

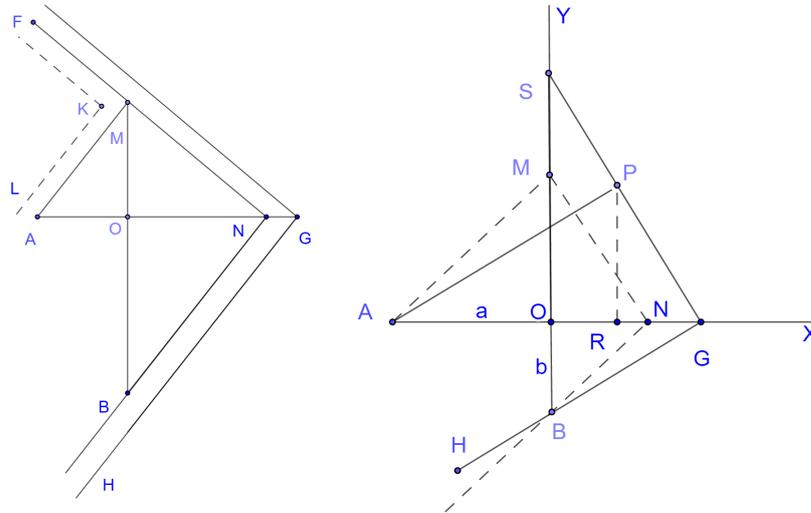
Existe uma certa desconfiança com relação a autoria de Platão<sup>11</sup> desta prova, pois se trata de uma resolução mecânica sendo este contrário a tal recurso (Plutarco, Livro 8, p.718 apud Heath, 1921, p. 256). A prova apresentada a seguir tem uma proximidade com a de Menêmo, pois os segmentos usados  $AO, OB, OM$  e  $ON$  estão na mesma média proporcional.

O objeto que será usado para a resolução tem um formato de um esquadro de madeira, com uma parte rígida sendo as ripas  $FG, GH$ , com  $F\hat{G}H = 90^\circ$  e a ripa  $KL$  móvel, sendo deslocada paralelamente a ripa  $GH$ .

Colocando este instrumento em um sistema de eixos cartesianos  $AOM$ , de maneira que a ripa  $KL$  intersecta os pontos  $A$  e  $M$ , a ripa  $FG$  intercepta os pontos  $M$  e  $N$  e a ripa  $GH$  os pontos  $N$  e  $B$  de modo que o ponto de intersecção das ripas  $FG$  e  $KL$  não pertença ao eixo  $OM$ , para isso devemos movimentar a extremidade  $G$  sobre o eixo  $OA$ .

<sup>11</sup> Platão foi um filósofo e matemático da Grécia Antiga-428/427 a 348/347 a.C.

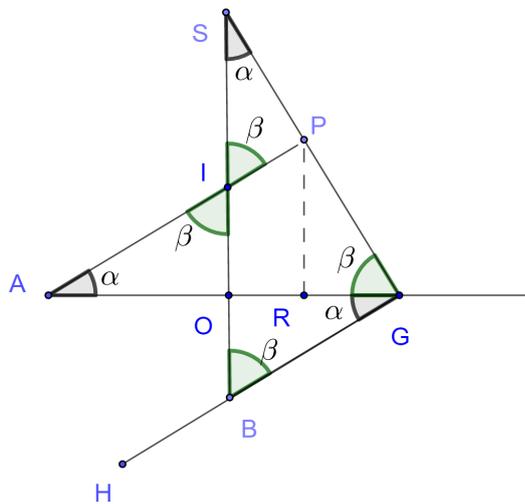
Figura 10 – Máquina de Platão



Fonte: Adaptado de Heath (1921, p. 256)

De acordo com a figura seguinte consideremos  $\overline{AO} = a$ ,  $\overline{OB} = b$ ,  $\overline{OG} = c$ ,  $\overline{PR} = y$  e  $\overline{OR} = x$ .

Figura 11 – Ângulos formados pela máquina de Platão



Fonte: Autor, 2021

Seja  $R$  a projeção ortogonal de  $P$  sobre  $AG$ . No triângulo  $APG$  consideramos a relação métrica  $\overline{AR} \cdot \overline{RG} = \overline{PR}^2$  substituindo pelos valores denotados acima, temos

$$(a + x) \cdot (c - x) = y^2. \quad (1.25)$$

Daí, obtemos

$$a \cdot c - a \cdot x + x \cdot c - x^2 = y^2, \quad \text{de onde, temos} \quad c = \frac{x^2 + y^2 + a \cdot x}{a + x}. \quad (1.26)$$

Agora mostraremos que os triângulos  $AIO$  e  $BOG$  são semelhantes. De fato, o lado  $AI$  é paralelo a  $BG$ , então as retas transversais  $\overleftrightarrow{BS}$  e  $\overleftrightarrow{AG}$  produzem ângulos alternos internos,

$$I\hat{A}O = B\hat{G}O = \alpha \quad \text{e} \quad O\hat{B}G = A\hat{I}O = \beta.$$

Como o ângulo  $A\hat{O}I = B\hat{O}G = 90^\circ$ , assim  $\alpha + \beta = 90^\circ$ . Os triângulos  $RGP$  e  $BOG$  são semelhantes, pois são triângulos retângulos e  $O\hat{B}G = R\hat{G}P$ .

E, por último, os triângulo  $GPR$  e  $GSO$  são semelhantes por possuírem um lado paralelo, que produz ângulos correspondentes.

Agora, dos triângulos  $OGS$ ,  $RGP$  e  $OBG$  obtemos as seguintes proporções. Dos primeiros dois triângulos, temos

$$\frac{\overline{PR}}{\overline{SO}} = \frac{\overline{RG}}{\overline{OG}}, \quad \text{que é equivalente a,} \quad \frac{\overline{PR}}{\overline{RG}} = \frac{\overline{SO}}{\overline{OG}}. \quad (1.27)$$

Do primeiro e terceiro triângulo, segue que

$$\frac{\overline{SO}}{\overline{OG}} = \frac{\overline{OG}}{\overline{OB}}. \quad (1.28)$$

Assim das equações (1.27) e (1.28), obtemos

$$\frac{\overline{PR}}{\overline{RG}} = \frac{\overline{SO}}{\overline{OG}} = \frac{\overline{OG}}{\overline{OB}}.$$

Substituindo pelos valores denotados inicialmente nas duas razões das extremidades da proporção anterior

$$\frac{y}{c-x} = \frac{c}{b}. \quad (1.29)$$

Multiplicando as equações (1.25) e (1.29) membro a membro, temos

$$(a+x) \cdot (c-x) \cdot \frac{y}{c-x} = y^2 \cdot \frac{c}{b}.$$

Simplificando e substituindo  $c = \frac{x^2+y^2+ax}{a+x}$ , temos

$$\begin{aligned} (a+x) \cdot y \cdot b &= c \cdot y^2, \\ (a+x) \cdot y \cdot b &= \left( \frac{x^2+y^2+ax}{a+x} \right) \cdot y^2, \\ (a+x)^2 \cdot y \cdot b &= (x^2+y^2+ax) \cdot y^2, \\ (a+x)^2 \cdot b &= (x^2+y^2+ax) \cdot y. \end{aligned}$$

Denotamos  $\overline{OM} = y$ , temos

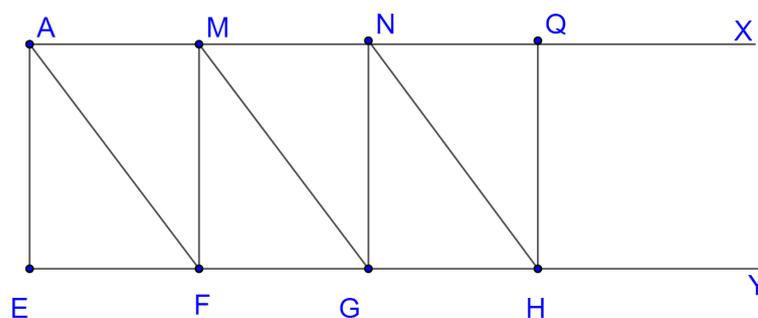
$$(a+0)^2 \cdot b = (0^2 + \overline{OM}^2 + a \cdot 0) \cdot \overline{OM}, \quad \text{que equivale a,} \quad \overline{OM}^3 = a^2 \cdot b.$$

Se tomarmos  $b = 2 \cdot a$ , temos  $\overline{OM}^3 = 2 \cdot a^3$ . Portanto,  $\overline{OM}$  representa o lado do cubo, o qual duplica o cubo de lado  $a$ . Desta forma, concluímos a solução de Platão.

## 1.5 A solução de Eratóstenes

A solução de Eratóstenes<sup>12</sup> é do tipo mecânica e envolve três triângulos retângulos iguais os quais se deslocam entre duas retas paralelas  $\overleftrightarrow{AX}$  e  $\overleftrightarrow{EY}$  similares a um dispositivo de trilhos. Segundo Heath (1921, p. 258), Pappus trabalhou com triângulos para solucionar o problema, enquanto Eutócio utilizou paralelogramos com diagonais desenhadas. Para entendermos o processo, consideremos os triângulos  $AMF$ ,  $MNG$  e  $NQH$  de acordo com a seguinte figura

Figura 12 – Dispositivo de Eratóstenes para solucionar a duplicação do cubo



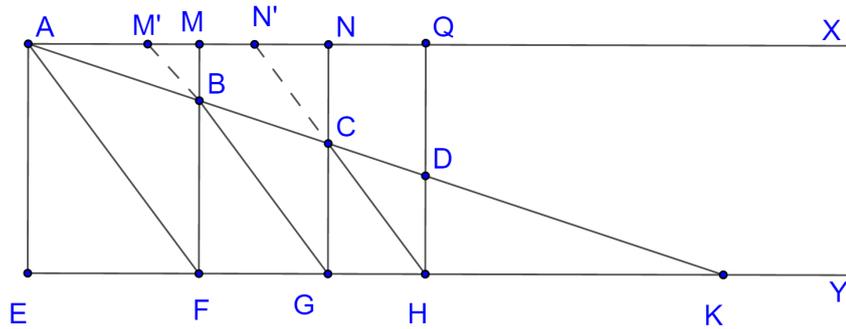
Fonte: Adaptado de Heath (1921, p. 258)

Deixando fixo o triângulo  $AMF$  e deslocando os vértices  $M$  e  $N$  dos triângulos  $MNG$  e  $NQH$  para esquerda de modo que o vértice  $M$  se torna  $M'$  e o vértice  $N$  passa a ser  $N'$ .

Sejam  $B$  a interseção entre os lados  $MF$  e  $M'G$ , e o ponto  $C$  a interseção entre os lados  $N'H$  e  $NG$ . Os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  precisam pertencer à mesma reta que intersecta o lado  $QH$  em  $D$  e  $EH$  em  $K$ , como mostra a figura a seguir

<sup>12</sup> Eratóstenes de Cirene foi um grande estudioso da Grécia antiga que trabalhou com várias áreas do conhecimento como matemática, gramática, poesia, geografia, bibliotecário e astronomia- 276 a 194 a.C.

Figura 13 – Médias proporcionais através do dispositivo de Eratóstenes



Fonte: Adaptado de Heath (1921, p. 259)

**Solução.** Os casos de semelhanças de triângulos nessa prova são para o caso de possuírem um lado paralelo e um ângulo em comum e com isso, os dois ângulos restantes em cada triângulo em análise são correspondentes. Vejamos as seguintes semelhanças de triângulos

Dos triângulos  $AEK$  e  $BFK$ ,  $BFK$  e  $CGK$ ,  $AFK$  e  $BGK$ , obtemos respectivamente

$$\frac{\overline{EK}}{\overline{KF}} = \frac{\overline{AK}}{\overline{KB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{BF}}, \quad (1.30)$$

$$\frac{\overline{FK}}{\overline{KG}} = \frac{\overline{BF}}{\overline{CG}}, \quad (1.31)$$

$$\frac{\overline{FK}}{\overline{KG}} = \frac{\overline{AK}}{\overline{KB}}. \quad (1.32)$$

Como  $\frac{\overline{AK}}{\overline{KB}}$  é comum nas equações (1.30) e (1.32), temos que

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{BF}} = \frac{\overline{FK}}{\overline{KG}}. \quad (1.33)$$

Segue-se das equações (1.31) e (1.33)

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{BF}} = \frac{\overline{BF}}{\overline{CG}}. \quad (1.34)$$

Por outro lado, dos triângulos  $BFK$  e  $CGK$ , obtemos

$$\frac{\overline{BK}}{\overline{CK}} = \frac{\overline{BF}}{\overline{CG}} = \frac{\overline{FK}}{\overline{CK}}, \quad (1.35)$$

similarmente dos triângulos  $CGK$  e  $DHK$ , segue,

$$\frac{\overline{GK}}{\overline{HK}} = \frac{\overline{CG}}{\overline{DH}}. \quad (1.36)$$

Também dos triângulos  $BGK$  e  $CHK$ , obtemos

$$\frac{\overline{BK}}{\overline{CK}} = \frac{\overline{GK}}{\overline{HK}}. \quad (1.37)$$

Dado que  $\frac{\overline{BK}}{\overline{CK}}$  é comum nas equações (1.35) e (1.37), resulta

$$\frac{\overline{BF}}{\overline{CG}} = \frac{\overline{GK}}{\overline{HK}}. \quad (1.38)$$

Da mesma forma, como  $\frac{\overline{GK}}{\overline{HK}}$  é comum nas equações (1.36) e (1.38), obtemos

$$\frac{\overline{BF}}{\overline{CG}} = \frac{\overline{CG}}{\overline{DH}}. \quad (1.39)$$

E das equações (1.34) e (1.39), obtemos

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{BF}} = \frac{\overline{BF}}{\overline{CG}} = \frac{\overline{CG}}{\overline{DH}}. \quad (1.40)$$

Portanto  $\overline{BF}$  e  $\overline{CG}$  são duas médias proporcionais entre  $\overline{AE}$  e  $\overline{DH}$ . Assim, concluímos a solução de Eratóstenes.

No Epigrama de Eratóstenes, descreve-se como encontrar duas médias proporcionais entre duas retas convergentes, o que soluciona a duplicação do cubo e nos orienta a não seguir o método de Arquitas e Menêmo.

”Se, bom amigo, você se importa em obter de um pequeno (cubo) um cubo duplo dele, e devidamente transformar qualquer figura sólida em outro, isso está em seu poder; você pode encontrar a medida de uma dobra, um poço ou a ampla bacia de um poço oco, por este método, é, se tu (assim) pegar entre duas réguas (dois) meios com suas extremidades convergentes. - Não procures para fazer o difícil negócio dos cilindros de Arquitas, ou para cortar o cone nas tríades de Menêmo, ou para contornar tal forma de linhas como é descrito pelo temente a Deus Eudoxo. Não, você poderia, nessas tabuinhas, encontrar facilmente uma miríade de meios, começando de uma pequena base. Feliz és tu, Ptolomeu, em que, como um pai igual a seu filho no vigor da juventude, tu mesmo lhe deste tudo o que é caro às musas e reis, e que ele no futuro, Zeus, Deus do céu, também receba o cetro em tuas mãos. Assim pode ser, e que qualquer um que vir esta oferta diga "Este é o presente de Eratóstenes de Cirene". (HEATH, 1921, p.260 )

## 1.6 A solução de Nicomedes

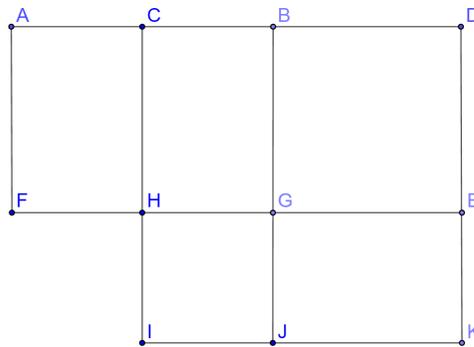
Para apresentar a solução de Nicomedes<sup>13</sup>, vamos precisar da proposição 6 do livro II de Euclides.

<sup>13</sup> Nicomedes foi um matemático grego do século II a.C, que descobriu a curva Concoide.

**Proposição 1.1.** (*HEATH et al., 1956, p. 385 – 388*) *Se uma reta for cortada ao meio e uma reta for adicionada a ela na mesma direção, o retângulo contido pelo todo com a reta adicionada e a reta adicionada juntas ao quadrado na metade é igual ao quadrado na reta composta pela metade e pela reta adicionada linha.*

Em outras palavras esta proposição nos diz que dado um segmento  $AB$ , com ponto médio  $C$ , prolonguemos  $AB$  até  $D$  e desenhemos o retângulo  $ADEF$  com  $AD$  sendo a base e  $\overline{DE}$  igual a  $\overline{BD}$  sua altura. Consideremos o quadrado  $HGJI$  de medida  $\overline{HG}$  igual a  $\overline{CB}$  sob  $FG$ , tracemos o quadrado  $CDKI$ .

Figura 14 – Construção definida pela proposição 1.1 de Euclides



Fonte: Adaptado de Heath et al. (1956, p. 386)

*Demonstração.* Observemos que,

$$A(ACHF) = A(CBGH) = A(GEKJ), \quad (1.41)$$

pois  $\overline{AC} = \overline{CB} = \overline{HG} = \overline{GJ}$  (segmento médio) e  $\overline{AF} = \overline{BG} = \overline{DE}$  (altura do retângulo  $ADEF$ ).

Notemos que, a área do quadrado  $CDKI$  é igual

$$A(CDKI) = A(CBGH) + A(BDEG) + A(GEKJ) + A(HGJI). \quad (1.42)$$

E a área do retângulo  $ADEF$  é igual

$$A(ADEF) = A(ACHF) + A(CBGH) + A(BDEG). \quad (1.43)$$

Agora, substituindo a equação (1.41) na equação (1.43), temos

$$A(ADEF) = A(GEKJ) + A(CBGH) + A(BDEG). \quad (1.44)$$

Analogamente, substituindo a equação (1.44) em (1.42)

$$A(CDKI) = A(ADEF) + A(HGJI)$$

Assim, podemos escrever a igualdade anterior como uma equação, obtendo

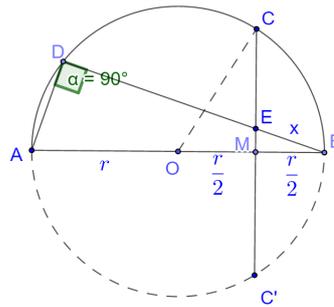
$$\overline{AD} \cdot \overline{DE} + \overline{HG}^2 = \overline{CD}^2,$$

e como  $\overline{DE} = \overline{BD}$ ,  $\overline{HG} = \overline{CB}$ , obtemos

$$\overline{AD} \cdot \overline{BD} + \overline{CB}^2 = \overline{CD}^2$$

A seguir, apresentaremos uma aplicação da Proposição anterior, proposta por Hipócrates<sup>14</sup>. Consideremos a semicircunferência  $ADB$ , com diâmetro  $\overline{AB}$  e centro  $O$ . Seja  $M$  o ponto médio de  $OB$ . Tracemos a mediatriz de  $OB$  e vemos que intersecta a semicircunferência nos pontos  $C$  e  $C'$ . Notemos que  $ABD$  é triângulo retângulo e  $D \neq C$ . Seja  $E$  o ponto de intersecção entre a reta  $\overleftrightarrow{BD}$  e  $\overleftrightarrow{CC'}$ , mediatriz de  $OB$ .

Figura 15 – Proposta de Hipócrates para a Proposição 1.1 de Euclides



Fonte: Autor, 2021.

Considerando o comprimento do diâmetro  $\overline{AB}$  sendo  $2r$  e aplicando o Teorema de Pitágoras nos triângulos  $OMC$  e  $EBM$  temos

$$\overline{OC}^2 = \overline{OM}^2 + \overline{CM}^2 \quad \text{e} \quad \overline{BE}^2 = \overline{BM}^2 + \overline{EM}^2,$$

que é equivalente a,  $r^2 = \left(\frac{r}{2}\right)^2 + \overline{CM}^2$  e  $x^2 = \left(\frac{r}{2}\right)^2 + \overline{EM}^2$ .

Daí, temos que

$$\overline{CM}^2 = \frac{3r^2}{4} \quad \text{e} \quad \overline{EM}^2 = \frac{4x^2 - r^2}{4},$$

extraíndo a raiz, obtemos

$$\overline{CM} = r \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{e} \quad \overline{EM} = \frac{\sqrt{4x^2 - r^2}}{2}.$$

<sup>14</sup> Hipócrates de Quios foi um matemático geometa - 470 a 410 a.C.

Sendo  $C'$  o ponto simétrico de  $C$  com relação a reta  $\overleftrightarrow{AB}$ , aplicamos as leis das cordas na circunferência  $ABC'$  para obter

$$\begin{aligned}\overline{DE} \cdot \overline{EB} &= \overline{CE} \cdot \overline{EC'}, \\ \overline{DE} \cdot x &= (\overline{CM} - \overline{ME}) (\overline{CM} + \overline{ME}) \\ &= \overline{CM}^2 - \overline{ME}^2 \\ &= \frac{3r^2}{4} - \left( \frac{4x^2 - r^2}{4} \right),\end{aligned}$$

que é equivalente a

$$\overline{DE} \cdot x = r^2 - x^2 \quad \text{ou seja,} \quad \overline{DE} \cdot x + x^2 = r^2 \quad (1.45)$$

Uma descrição em palavras da equação (1.45) seria: a área do retângulo de lados  $DE$  e  $EB$  somado com a área do quadrado de lado  $ME$  é igual a área do quadrado de lado  $CM$ .

Sabemos pelo Teorema de Pitágoras que a diagonal de um quadrado de lado  $a$  é  $a \cdot \sqrt{2}$ . Se o lado fosse  $\overline{CM} = r \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$ , sua diagonal valeria

$$r \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{2} = r \cdot \frac{\sqrt{6}}{2} = r \cdot \sqrt{\frac{6}{4}} = r \cdot \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Assim, dado  $\overline{DE} = r \cdot \sqrt{\frac{3}{2}}$ , a equação (1.45) fica

$$r \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot x + x^2 = r^2.$$

Agora, mostraremos uma maneira de calcular o comprimento do segmento adicionado da Proposição 1.1 do livro II de Euclides.

Desenhemos  $BC$  perpendicular a  $AB$  de comprimento  $y$ , juntemos  $C$  e  $M$ , com centro em  $M$  e raio  $\overline{CM}$  descreve um corte circular  $AB$  produzido em  $D$ . Assim, o comprimento adicionado  $\overline{BD}$  com medida  $z$  é encontrado. Da Proposição 1.1 de Euclides sabemos que a área do retângulo  $ADEF$  somado com a área do quadrado  $HGJI$  é igual a área do quadrado  $MDKI$ , com  $DM$  igual a  $CM$  que pelo Teorema de Pitágoras é igual a soma dos quadrados de  $\overline{BC}$  e  $\overline{BM}$ .

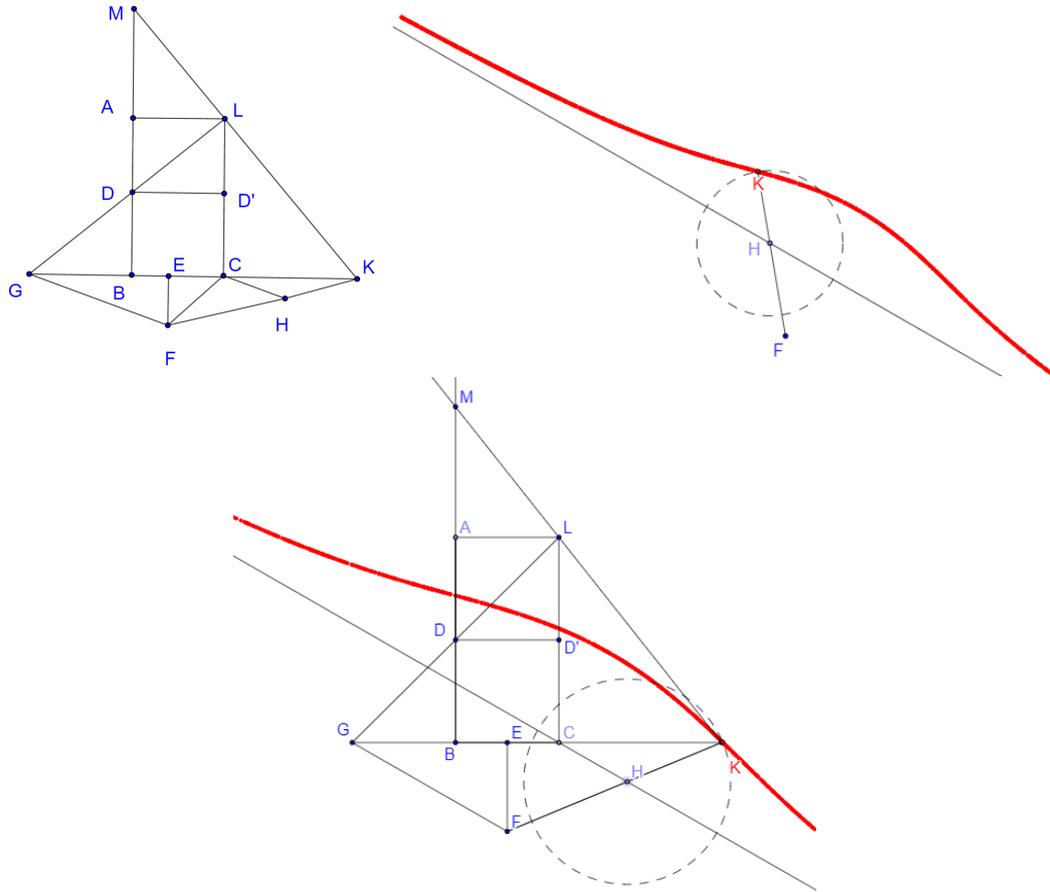
Portanto,

$$\overline{DM}^2 = \overline{CM}^2 = \overline{BM}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AD} \times \overline{BD} + \overline{BC}^2. \quad (1.46)$$

Assim,  $\overline{AD} \times \overline{BD} = \overline{BC}^2$ .



Figura 17 – Concoide de Nicomedes



Fonte: Autor, 2021

Observe que, pelo Teorema de Pitágoras, temos  $\overline{EC}^2 + \overline{EF}^2 = \overline{CF}^2$  e  $\overline{EK}^2 + \overline{EF}^2 = \overline{FK}^2$ . Assim, substituindo na equação (1.47), temos

$$\overline{BK} \cdot \overline{CK} + \overline{CF}^2 = \overline{FK}^2. \quad (1.48)$$

As semelhanças dos triângulos utilizados nessa solução se resumem ao caso exposto na solução de Eratóstenes, isto é, da semelhança dos triângulos  $AML$  e  $LCK$ , concluímos

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{LC}} = \frac{\overline{ML}}{\overline{LK}} = \frac{\overline{AL}}{\overline{CK}}.$$

Como  $\overline{AL} = \overline{BC}$  e  $\overline{LC} = \overline{AB}$ , temos

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{ML}}{\overline{LK}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{CK}}. \quad (1.49)$$

Seja  $D'$  a interseção dos segmentos perpendiculares  $DD'$  e  $LC$ , notemos que,  $\overline{DD'} = \overline{BC}$  e  $\overline{LC} = 2 \cdot \overline{LD'}$ . Assim, da semelhança dos triângulos  $LGC$  e  $LDD'$ , temos

$$\frac{\overline{DD'}}{\overline{GC}} = \frac{\overline{LD'}}{\overline{LC}}, \quad \text{que equivale a} \quad \frac{\overline{BC}}{\overline{GC}} = \frac{\overline{LD'}}{2 \cdot \overline{LD'}}.$$

Segue-se  $\overline{BC} = \frac{1}{2}\overline{CG}$ . Como  $\overline{AB} = 2 \cdot \overline{AD}$ , substituímos na equação (1.49) e obtemos

$$\frac{\overline{MA}}{2 \cdot \overline{AD}} = \frac{\overline{GC}}{2 \cdot \overline{CK}}, \quad \text{que equivale a} \quad \frac{\overline{MA}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{GC}}{\overline{CK}}. \quad (1.50)$$

Por outro lado, aplicando o Teorema de Tales nos triângulos semelhantes  $GFK$  e  $CHK$ ,

$$\frac{\overline{GC}}{\overline{CK}} = \frac{\overline{FH}}{\overline{HK}}. \quad (1.51)$$

Das equações (1.50) e (1.51), segue

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{GC}}{\overline{CK}} = \frac{\overline{FH}}{\overline{HK}}. \quad (1.52)$$

Agora, aplicando as propriedades das proporções nas razões das extremidades de (1.52) temos

$$\frac{\overline{MA} + \overline{AD}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{FH} + \overline{HK}}{\overline{HK}}.$$

Notemos que,  $\overline{MA} + \overline{AD} = \overline{MD}$  e  $\overline{FH} + \overline{HK} = \overline{FK}$ , assim

$$\frac{\overline{MD}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{FK}}{\overline{HK}},$$

Daí,  $\overline{MD} = \overline{FK}$ , pois sabemos por construção, que  $\overline{HK} = \overline{AD}$ . Por outro lado, aplicando a Proposição de Euclides nos segmentos  $AB$  e com  $MA$ , sendo  $A$  entre  $M$  e  $B$ , obtemos

$$\overline{MB} \cdot \overline{MA} + \overline{AD}^2 = \overline{MD}^2, \quad (1.53)$$

que é equivalente,

$$\overline{MB} \cdot \overline{MA} + \overline{AD}^2 = \overline{FK}^2. \quad (1.54)$$

Assim, das equações (1.48) e (1.54) temos

$$\overline{MB} \cdot \overline{MA} = \overline{BK} \cdot \overline{CK}.$$

Escrevendo como proporção

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{BK}} = \frac{\overline{CK}}{\overline{MA}} \quad (1.55)$$

Da semelhança dos triângulos  $MBK$ ,  $MAL$  e  $LCK$ , segue-se dos dois primeiros triângulos,

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MA}} = \frac{\overline{BK}}{\overline{AL}} = \frac{\overline{MK}}{\overline{ML}},$$

daí, reescrevendo a primeira igualdade para obter

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{BK}} = \frac{\overline{MA}}{\overline{AL}}. \quad (1.56)$$

Similarmente, dos dois últimos triângulos, temos

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{LC}} = \frac{\overline{AL}}{\overline{CK}} = \frac{\overline{ML}}{\overline{LK}},$$

Analogamente, da primeira igualdade obtemos

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{AL}} = \frac{\overline{LC}}{\overline{CK}} \quad (1.57)$$

Como  $\frac{\overline{MA}}{\overline{AL}}$  é comum nas proporções (1.56) e (1.57), temos

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{BK}} = \frac{\overline{MA}}{\overline{AL}} = \frac{\overline{LC}}{\overline{CK}}. \quad (1.58)$$

Observemos que, as equações (1.55) e (1.58) têm em comum  $\frac{\overline{MB}}{\overline{BK}}$ , daí

$$\frac{\overline{LC}}{\overline{CK}} = \frac{\overline{CK}}{\overline{MA}} = \frac{\overline{MA}}{\overline{AL}}.$$

Notemos que,  $\overline{LC} = \overline{AB}$  e  $\overline{AL} = \overline{BC}$ , assim finalizamos

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CK}} = \frac{\overline{CK}}{\overline{MA}} = \frac{\overline{MA}}{\overline{BC}} \quad (1.59)$$

Portanto,  $\overline{CK}$  e  $\overline{MA}$  são as duas médias proporcionais entre  $\overline{AB}$  e  $\overline{BC}$ . Desta forma concluímos a solução de Nicomedes.

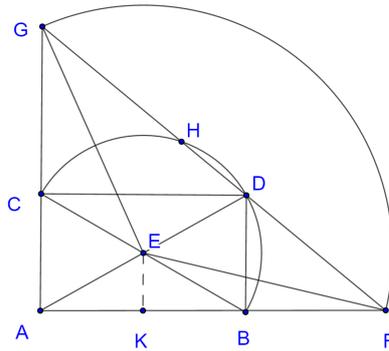
## 1.7 As soluções de Apolônio de Perga, Herão de Alexandria e Filão de Bizâncio

As soluções de Apolônio, Herão e Filão são muito parecidas, portanto, tentaremos apresentá-las de forma a ressaltar suas particularidades. Sejam  $AB$  e  $AC$  lados do retângulo  $ABDC$  e  $E$  o ponto de interseção entre suas diagonais. Consideremos a circunferência circunscrita de raio  $\overline{EB}$  ao retângulo  $ABDC$ .

Como conclusão geral, os três conseguiram traçar uma reta passando pelo ponto  $D$  e intersectando a semicircunferência  $CDB$  em  $H$  e as retas  $\overleftrightarrow{AB}$  e  $\overleftrightarrow{AC}$  em  $F$  e  $G$ , respectivamente. Nas três soluções descritas em Heath (1921, p. 262 - 264) as construções não ficam claras, pois dá a impressão de serem construções por ensaio e erro. Mesmo assim com ajuda de GeoGebra, conseguimos achar uma construção usando a Cissoide<sup>15</sup> (LOCKWOOD, 1961, p. 130 - 131). A seguir apresentamos cada uma das construções e, no final, explicaremos como a Cissoide completaria as três soluções.

<sup>15</sup> Sejam  $S$  e  $S'$  duas curvas quaisquer e seja  $A$  um ponto fixo. Diremos que, o locus de  $P$  é chamado de Cissoide de  $S$  e  $S'$  em relação a  $A$ , se traçando uma reta por  $A$  que intersecte  $S$  e  $S'$  em  $Q$  e  $R$  respectivamente, o ponto  $P$  é encontrado na reta tal que  $\overline{AP} = \overline{QR}$  (os comprimentos medidos na direção  $A$  a  $R$ , indicada pela ordem das letras Lockwood).

Figura 18 – Sobreposição das construções de Apolônio, Herão e Filão



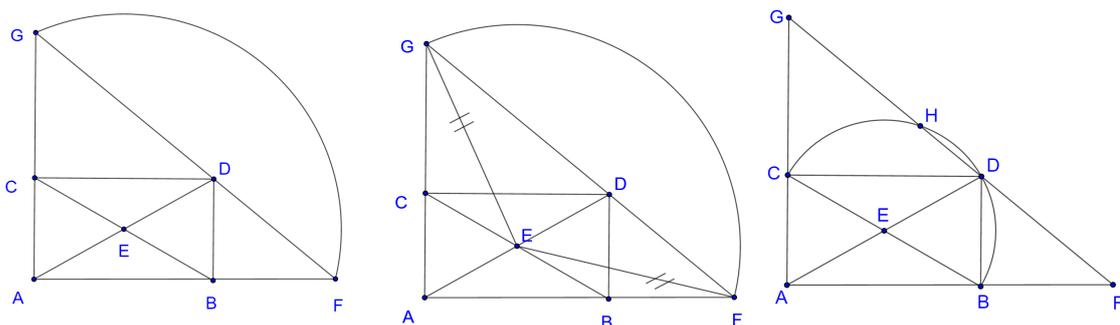
Fonte: Adaptado de Heath (1921, p. 262)

Assim, Apolônio<sup>16</sup> desenhou uma circunferência com centro em  $E$  intersectando  $\overleftrightarrow{AB}$  e  $\overleftrightarrow{AC}$  em  $F$  e  $G$ , respectivamente, sendo que  $B$  está entre  $A$  e  $F$  e  $C$ , o ponto entre  $A$  e  $G$ , com condição que  $G$ ,  $D$  e  $F$  sejam colineares.

No caso de Herão,<sup>17</sup> este encontrou os pontos  $F$  e  $G$  colocando uma régua sobre o ponto  $D$ , de tal forma que  $F$  e  $G$  estejam à mesma distância do ponto  $E$ .

Por outro lado, na solução de Filão<sup>18</sup>, considerou-se uma circunferência de centro em  $E$  e raio  $\overline{EB}$ . E consistiu em girar uma régua em torno do ponto  $D$ , a qual intersecta a circunferência no ponto  $H$ , tal que  $F$ ,  $D$ ,  $H$  e  $G$  sejam pontos colineares e  $\overline{FD}$  igual a  $\overline{HG}$ .

Figura 19 – Construção de Apolônio - Herão - Filão



Fonte: Autor, 2021

Observe que nos pontos chaves das construções representadas na Figura 1.7, vemos no caso de Apolônio foi a colinearidade dos pontos; no caso de Herão foi a condição  $\overline{GE} = \overline{EF}$  e, finalmente, no caso de Filão, a condição  $\overline{GH} = \overline{DF}$ , no entanto as construções

<sup>16</sup> Apolônio de Perga foi um matemático e astrônomo grego da escola alexandrina- 262 a 194 a.C.

<sup>17</sup> Herão de Alexandria foi um matemático e mecânico grego-10 a 80 d.C.

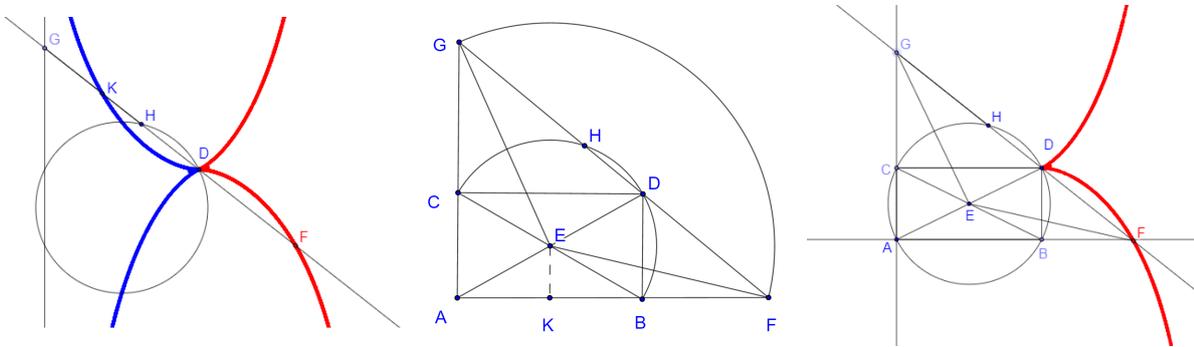
<sup>18</sup> Filão de Bizâncio foi um engenheiro grego - 280 a 220 a.C.

não ficaram bem justificadas. Por tal motivo, fazendo uso do GeoGebra e de considerar a Cissoide “simétrica”, conseguimos determinar o ponto  $F$ , que esclarece as três construções.

O que chamamos de Cissoide simétrica? Pela definição dada no rodapé 15, é o lugar geométrico na direção oposta aos pontos  $A$  e  $R$ . Assim para complementar as construções, a Cissoide simétrica é determinada considerando as seguintes curvas: a circunferência de centro em  $E$  e raio  $\overline{EB}$  junto com a reta  $\overleftrightarrow{AC}$  e tomando como ponto fixo o ponto  $D$ .

A seguinte figura mostra a sobreposição das três construções enunciadas acima, a Cissoide simétrica em relação a  $D$  e, por último, a superposição entre as construções e Cissoide.

Figura 20 – Resumo da Solução



Fonte: Autor, 2021

## Solução

Nas construções de Apolônio e Herão, utilizaremos a Proposição 1.1 de Euclides. No lado  $AB$  com  $K$  seu ponto médio, tem-se

$$\overline{AF} \cdot \overline{BF} + \overline{KB}^2 = \overline{KF}^2. \quad (1.60)$$

Adicionando  $\overline{EK}^2$  em ambos os lados da equação (1.60)

$$\overline{AF} \cdot \overline{BF} + \overline{KB}^2 + \overline{EK}^2 = \overline{KF}^2 + \overline{EK}^2.$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras nos triângulos  $EKB$  e  $EKF$  achamos

$$\overline{KB}^2 + \overline{EK}^2 = \overline{EB}^2 \quad e \quad \overline{KF}^2 + \overline{EK}^2 = \overline{EF}^2.$$

Substituindo na equação anterior, temos

$$\overline{AF} \cdot \overline{BF} + \overline{EB}^2 = \overline{EF}^2. \quad (1.61)$$

Nos lados  $CA$  e  $GC$ , sendo  $P$  seu o ponto médio  $AC$ , pela Proposição 1.1 de Euclides, temos

$$\overline{GA} \cdot \overline{GC} + \overline{CP}^2 = \overline{GP}^2$$

Adicionando  $\overline{PE}^2$  em ambos os lados,

$$\overline{GA} \cdot \overline{GC} + \overline{CP}^2 + \overline{PE}^2 = \overline{GP}^2 + \overline{PE}^2$$

Nos triângulos  $PEC$  e  $PEG$ , pelo Teorema de Pitágoras obtemos  $\overline{PE}^2 + \overline{CP}^2 = \overline{EC}^2$  e  $\overline{PE}^2 + \overline{GP}^2 = \overline{GE}^2$ , daí

$$\overline{GA} \cdot \overline{GC} + \overline{EC}^2 = \overline{GE}^2. \quad (1.62)$$

Sabemos da construção feita por Apolônio, Herão e Filão, que  $\overline{EB} = \overline{EC}$  e  $\overline{EF} = \overline{EG}$ . Então, substituindo nas equações (1.60) e (1.61), segue que

$$\overline{AF} \cdot \overline{BF} = \overline{GA} \cdot \overline{GC}, \quad \text{como queria-se provar.}$$

Por outro lado, na solução de Filão percebe-se que  $\overline{GD} = \overline{GF} - \overline{DF}$ ,  $\overline{HF} = \overline{GF} - \overline{GH}$  e como  $\overline{GH} = \overline{DF}$ , assim  $\overline{GD} = \overline{HF}$ . Com isso, das duas equações anteriores tem-se

$$\overline{HF} \cdot \overline{DF} = \overline{GD} \cdot \overline{GH} \quad (1.63)$$

Como as cordas  $\overline{HD}$  e  $\overline{AB}$  da circunferência  $BDHCA$  se intersectam em  $F$ , da relação de dois segmentos secantes a uma circunferência partindo de um mesmo ponto (NETO, 2013, p. 164), temos

$$\overline{HF} \cdot \overline{FD} = \overline{AF} \cdot \overline{FB} \quad (1.64)$$

$$\overline{DG} \cdot \overline{GH} = \overline{AG} \cdot \overline{GC} \quad (1.65)$$

Das equações (1.63) e (1.64), obtemos

$$\overline{AF} \cdot \overline{FB} = \overline{DG} \cdot \overline{GH}, \quad (1.66)$$

Analogamente, das equações (1.65) e (1.66), obtemos o que queria se provar

$$\overline{AF} \cdot \overline{FB} = \overline{GA} \cdot \overline{GC} \quad \text{o qual equivale a} \quad \frac{\overline{AF}}{\overline{GA}} = \frac{\overline{GC}}{\overline{BF}} \quad (1.67)$$

Por outro lado, das semelhanças dos triângulos  $GCD$ ,  $GAF$  e  $DBF$ , obtemos entre os dois primeiros triângulos,

$$\frac{\overline{GC}}{\overline{GA}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{AF}}, \quad \text{que equivale a} \quad \frac{\overline{AF}}{\overline{GA}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{GC}}. \quad (1.68)$$

também entre o primeiro e o terceiro triângulo, temos

$$\frac{\overline{GC}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{BF}}, \quad \text{que equivale a} \quad \frac{\overline{BF}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{GC}}. \quad (1.69)$$

Como as equações (1.68) e (1.69) tem em comum  $\frac{\overline{CD}}{\overline{GC}}$ , resulta

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{GA}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{GC}} = \frac{\overline{BF}}{\overline{BD}}. \quad (1.70)$$

Analogamente, as equações (1.68) e (1.70) tem em comum  $\frac{\overline{AF}}{\overline{GA}}$ , resultando em

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{GC}} = \frac{\overline{GC}}{\overline{BF}} = \frac{\overline{BF}}{\overline{BD}} \quad (1.71)$$

Sabemos que,  $\overline{CD} = \overline{AB}$  e  $\overline{BD} = \overline{AC}$ , portanto a equação (1.71) fica

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{GC}} = \frac{\overline{GC}}{\overline{BF}} = \frac{\overline{BF}}{\overline{AC}},$$

mostrando que  $\overline{GC}$  e  $\overline{BF}$  são médias proporcionais entre  $\overline{AB}$  e  $\overline{AC}$ .

Observe que existe uma relação a solução de Menêmo, isto é, se

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b},$$

obtemos as parábolas  $x^2 = ay$ ,  $y^2 = bx$  e  $xy = ab$ .

Assim somando as duas parábolas e completando os quadrados, segue

$$x^2 + y^2 - bx - ay = 0, \quad \text{isto é,} \quad \left(x - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{4}, \quad (1.72)$$

a qual é a equação de uma circunferência com centro  $\left(\frac{b}{2}, \frac{a}{2}\right)$  e raio igual  $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$ . Esta circunferência passa pelos pontos de interseção entre as duas parábolas.

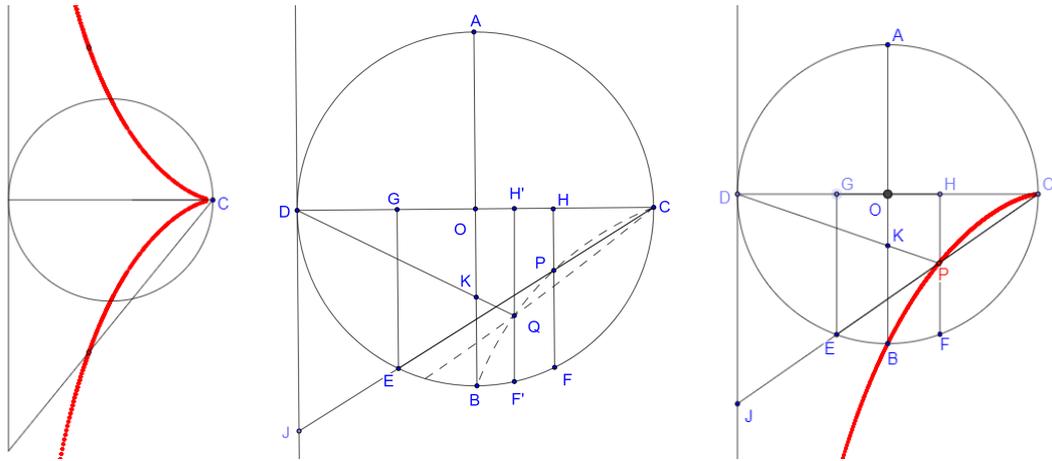
Observe que, se  $AF$  e  $GA$  são os eixos coordenados, a equação (1.72) é a circunferência  $BDHC$  e  $xy = ab$  é a hipérbole retangular de assíntotas  $\overleftrightarrow{AF}$  e  $\overleftrightarrow{GA}$ . Tal hipérbole passa pelo ponto  $D$  e intersecta de novo a circunferência (1.72) em  $H$ , satisfazendo  $\overline{FD} = \overline{HG}$ .

## 1.8 A Solução de Díocles

Apresentaremos a seguir uma solução dada por Díocles para o problema das duas médias proporcionais por meio da Cissoide (HEATH, 1921, p. 264). Consideremos uma circunferência com diâmetros  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$  perpendiculares entre si em  $O$ . Sejam  $E$  e  $F$  pontos nos terceiro e quarto quadrantes, tal que os arcos satisfazem  $\widehat{EB} = \widehat{BF}$ , sejam  $G$  e  $H$  os pés das perpendiculares baixadas desde  $E$  e  $F$ , respetivamente. Daí os segmentos  $EG$ ,  $FH$  são paralelos e podem se mover com relação  $BO$  mantendo a mesma distância deste e permanecendo nos terceiro e quarto quadrantes, respetivamente. Tracemos  $EC$ , que intersecta  $FH$  em  $P$ .

Neste caso, para determinar a Cissoide, consideramos as curvas seguintes: uma circunferência de centro  $O$  e raio  $\frac{\overline{DC}}{2}$ , e a reta tangente a circunferência no ponto  $D$ . O ponto fixo  $C$  seria a cúspide da cissoide. Um ponto  $P$  pertence a cissoide quando satisfaz  $\overline{EJ}$  igual a  $\overline{CP}$ . Como está ilustrado na figura abaixo

Figura 21 – Construção de Díocles - Cissoide



Fonte: Autor, 2021

### Solução

Na solução do problema por Díocles<sup>19</sup> provou-se que,  $\overline{HF}$  e  $\overline{HC}$  são duas médias em proporção contínua entre  $\overline{DH}$  e  $\overline{HP}$ . De fato, da construção sabemos que  $\overline{GE} = \overline{HF}$ ,  $\overline{DG} = \overline{HC}$ , logo os triângulos  $DGE$  e  $CHF$  são congruentes. Em particular, semelhantes. Daí,  $GCE$  e  $HDF$  são semelhantes, portanto,

$$\frac{\overline{GC}}{\overline{GE}} \equiv \frac{\overline{DH}}{\overline{HF}}. \quad (1.73)$$

Notemos que  $DFC$  é um triângulo retângulo em  $F$  e, das relações métricas, temos

$$\overline{HF}^2 = \overline{DH} \cdot \overline{HC} \quad \text{que equivale a} \quad \frac{\overline{HF}}{\overline{CH}} = \frac{\overline{DH}}{\overline{HF}} \quad (1.74)$$

Por outro lado, da semelhança entre os triângulos  $CGE$  e  $CHP$ , temos

$$\frac{\overline{CG}}{\overline{CH}} = \frac{\overline{GE}}{\overline{HP}} \quad \text{que é equivalente a} \quad \frac{\overline{CG}}{\overline{GE}} = \frac{\overline{CH}}{\overline{HP}} \quad (1.75)$$

Como as equações (1.73) e (1.74), tem em comum a razão  $\frac{\overline{DH}}{\overline{HF}}$ , segue

$$\frac{\overline{DH}}{\overline{HF}} = \frac{\overline{HF}}{\overline{CH}} = \frac{\overline{CG}}{\overline{GE}} \quad (1.76)$$

e, das equações (1.75) e (1.76), as quais tem em comum a razão  $\frac{\overline{CG}}{\overline{GE}}$ , obtemos

$$\frac{\overline{DH}}{\overline{HF}} = \frac{\overline{HF}}{\overline{CH}} = \frac{\overline{CH}}{\overline{HP}}. \quad (1.77)$$

Portanto,  $\overline{HF}$  e  $\overline{CH}$  são duas médias proporcionais entre  $\overline{DH}$  e  $\overline{HP}$ . Agora vamos determinar a equação cartesiana da Cissoide. Das duas primeiras razões de (1.77), obtemos

$$\overline{HF}^2 = \overline{DH} \cdot \overline{HC} \quad \text{que equivale a} \quad \overline{HF}^2 = (\overline{DO} + \overline{OH}) \cdot (\overline{OC} - \overline{OH}).$$

<sup>19</sup> Díocles foi um matemático grego que trabalhou com a curva Cissoide - 240 a 180 a.C.

Consideramos  $OC$  e  $OB$  como eixos coordenados. Seja  $a$  o raio da circunferência e denotamos por  $\overline{OH} = x$  e  $\overline{HP} = y$ . Logo,

$$\overline{HF}^2 = (a + x) \cdot (a - x) \quad \text{é equivalente a} \quad \overline{HF} = \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Segue-se, da segunda e terceira razão na equação (1.77),

$$\frac{\overline{DH}}{\overline{HF}} = \frac{\overline{CH}}{\overline{HP}} \quad \text{o qual é equivalente a} \quad \overline{DH} \cdot \overline{HP} = \overline{HF} \cdot \overline{CH}.$$

Substituindo os valores na equação anterior, temos

$$(a + x)y = \sqrt{a^2 - x^2}(a - x).$$

Elevando ao quadrado ambos os membros, fatorando e simplificando as equações, segue-se

$$\begin{aligned} (a + x)^2 y^2 &= (a^2 - x^2)(a - x)^2 \\ (a + x)^2 y^2 &= (a + x)(a - x)(a - x)^2 \\ (a + x)y^2 &= (a - x)^3. \end{aligned}$$

Suponhamos que a Cissoide desenhada tenha sido como mostra a linha pontilhada na Figura 1.8, desejamos encontrar duas médias proporcionais entre duas retas  $a$  e  $b$ .

Depois tomemos um ponto  $K$  em  $OB$  tal que  $\frac{\overline{DO}}{\overline{OK}} = \frac{a}{b}$ . Consideremos o ponto de interseção  $Q$  entre a reta  $DK$  e a Cissoide. Por  $Q$  desenhemos a reta perpendicular  $H'F'$  a  $DC$ . Para que o ponto  $Q$  pertença a Cissoide deve satisfazer a propriedade da proporção (1.77), isto é

$$\frac{\overline{DH'}}{\overline{H'F'}} = \frac{\overline{H'F'}}{\overline{H'C}} = \frac{\overline{H'C}}{\overline{H'Q}}.$$

Portanto,  $\overline{F'H'}$  e  $\overline{H'C}$  são duas médias proporcionais entre  $\overline{DH'}$  e  $\overline{H'Q}$ . Percebamos, que os triângulos  $DQH'$  e  $DKO$  são semelhantes. Com isso, obtemos

$$\frac{\overline{OK}}{\overline{H'Q}} = \frac{\overline{DO}}{\overline{DH'}} \quad \text{o que equivalente a} \quad \frac{\overline{DO}}{\overline{OK}} = \frac{\overline{DH'}}{\overline{H'Q}} = \frac{a}{b}$$

Assim, para obter duas médias proporcionais entre  $a$  e  $b$ , devemos pegar segmentos que tenham a mesma razão para  $\overline{DH'}$ ,  $\overline{H'F'}$ ,  $\overline{H'C}$  e  $\overline{H'Q}$ , isto é,

$$\frac{\overline{DH'}}{\overline{H'F'}} = \frac{\overline{H'F'}}{\overline{H'C}} = \frac{\overline{H'C}}{\overline{H'Q}}.$$

Daí, as duas médias proporcionais são encontradas tomando os extremos  $\overline{DH'} = a$  e  $\overline{H'Q} = b$ .

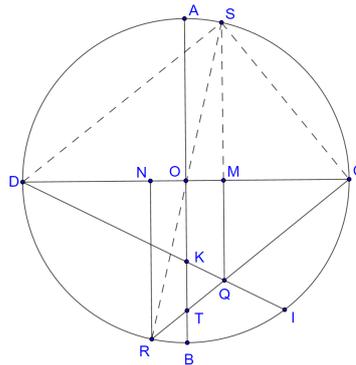
## 1.9 As soluções de Esporo e Papo

As soluções de Esporo e de Papo têm aproximações com a Díocles, porém, ao invés de usar a Cissoide giraram uma régua em torno de uma extremidade diametral até esta intersectar os três segmentos.

Na solução de Esporo (Eutócio apud Heath, 1921, p. 266) também consideramos dois diâmetros perpendiculares  $AB$  e  $DC$  que se intersectam em  $O$ , como na construção de Díocles, em particular os segmentos dados  $DO$  e  $OK$  são tomados perpendiculares entre si.

Consideremos uma circunferência  $\Gamma$  de centro em  $O$  e raio  $\overline{DO}$ . Seja  $I$  a interseção entre a circunferência e a reta  $\overleftrightarrow{DK}$ . Agora, com uma régua que passa por  $C$ , giremos em torno deste ponto, até intersectar as retas  $\overleftrightarrow{DI}$ ,  $\overleftrightarrow{OB}$  e a circunferência  $\Gamma$  nos pontos  $Q$ ,  $T$  e  $R$ , respectivamente, de tal forma que  $\overline{RT}$  igual a  $\overline{TQ}$ . Tracemos os segmentos  $NR$  e  $MQ$  perpendiculares ao segmento  $DC$ .

Figura 22 – Construção Sporus e Pappus



Fonte: Adaptado de Heath (1921, p. 267)

### Solução

Como  $\overline{QT} = \overline{TR}$ ,  $\overline{MO} = \overline{ON}$ , e  $\overline{MQ}$ ,  $\overline{NR}$  são equidistantes de  $OB$ , portanto  $Q$  pertence a Cissoide de Díocles e a prova é similar resultando em

$$\frac{\overline{DM}}{\overline{RN}} = \frac{\overline{RN}}{\overline{MC}} = \frac{\overline{MC}}{\overline{MQ}},$$

e temos duas médias entre  $DM$ ,  $\overline{MQ}$ , de modo que se pode construir as duas médias entre  $\overline{DO}$ ,  $\overline{OK}$ . Esporo provou que a primeira das duas médias entre  $\overline{DO}$  e  $\overline{OK}$  é  $\overline{OT}$ . Isto se segue da relação anterior, porque

$$\frac{\overline{RN}}{\overline{OT}} = \frac{\overline{CN}}{\overline{CO}} = \frac{\overline{DM}}{\overline{DO}} = \frac{\overline{MQ}}{\overline{OK}}$$

resultando num início de prova, mas confuso. Já a resolução de Pappus é melhor e tem como objetivo a duplicação do cubo. Provaremos que  $\frac{\overline{DO}}{\overline{OK}} = \frac{\overline{DO}^3}{\overline{OT}^3}$ . De fato, prolonguemos  $RO$  até

intersectar  $\Gamma$  em  $S$ , considerando os segmentos  $DS$  e  $SC$ . Seja  $\overleftrightarrow{SQ}$  a reta perpendicular à  $\overleftrightarrow{DC}$  em  $M$ .

Como  $Q$  pertence a cissoide da relação (1.77), temos

$$\frac{\overline{DM}}{\overline{NR}} = \frac{\overline{NR}}{\overline{MC}} = \frac{\overline{MC}}{\overline{MQ}}$$

Da semelhança entre os triângulos  $NCR$  e  $OCT$ ;  $DMQ$  e  $DOK$ , seguem-se

$$\frac{\overline{NR}}{\overline{OT}} = \frac{\overline{NC}}{\overline{OC}} \quad \text{e} \quad \frac{\overline{DM}}{\overline{DO}} = \frac{\overline{MQ}}{\overline{OK}}$$

Como  $\overline{DO} = \overline{OC}$  e  $\overline{CM} = \overline{DN}$ , então

$$\frac{\overline{NR}}{\overline{OT}} = \frac{\overline{NC}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{DM}}{\overline{DO}} = \frac{\overline{MQ}}{\overline{OK}}.$$

Observemos que os triângulos  $SDC$  e  $SQC$  são retângulos, pois são ângulos inscritos nas semicircunferências de diâmetros  $DC$  e  $SR$ , respectivamente. As relações métricas nos triângulos retângulos citados a cima, produzem

$$\overline{SM}^2 = \overline{DM} \cdot \overline{MC} \quad \text{e} \quad \overline{MC}^2 = \overline{SM} \cdot \overline{MQ},$$

que são equivalentes a

$$\overline{DM} = \frac{\overline{SM}^2}{\overline{MC}} \quad \text{e} \quad \overline{SM} = \frac{\overline{MC}^2}{\overline{MQ}}, \quad (1.78)$$

elevando ao quadrado a segunda equação de (1.78), temos

$$\overline{SM}^2 = \frac{\overline{MC}^4}{\overline{MQ}^2}. \quad (1.79)$$

Da equação de (1.78), determinamos

$$\frac{\overline{DM}}{\overline{MC}} = \frac{\overline{SM}^2}{\overline{MC}^2} \quad \text{o qual equivale a} \quad \frac{\overline{DM}}{\overline{MC}} = \frac{\overline{SM}^2}{\overline{MC}^2}. \quad (1.80)$$

Substituindo a equação (1.79) na equação (1.80), temos

$$\frac{\overline{DM}}{\overline{MC}} = \frac{\overline{SM}^2}{\overline{MC}^2} = \frac{\overline{MC}^4}{\overline{MC}^2 \overline{MQ}^2} \quad \text{que é equivalente a} \quad \frac{\overline{DM}}{\overline{MC}} = \frac{\overline{SM}^2}{\overline{MC}^2} = \frac{\overline{MC}^2}{\overline{MQ}^2}. \quad (1.81)$$

Agora multiplicando as duas razões dos extremos da equação (1.81) por  $\frac{\overline{MC}}{\overline{MQ}}$ , obtemos

$$\frac{\overline{DM}}{\overline{MC}} \cdot \frac{\overline{MC}}{\overline{MQ}} = \frac{\overline{MC}^2}{\overline{MQ}^2} \cdot \frac{\overline{MC}}{\overline{MQ}}, \quad \text{ou seja,} \quad \frac{\overline{DM}}{\overline{MQ}} = \frac{\overline{MC}^3}{\overline{MQ}^3}. \quad (1.82)$$

Por outro lado, da semelhança entre os triângulos  $DMQ$  e  $DOK$ , temos

$$\frac{\overline{DM}}{\overline{DO}} = \frac{\overline{MQ}}{\overline{OK}}, \quad \text{o qual é equivalente a,} \quad \frac{\overline{DM}}{\overline{MQ}} = \frac{\overline{DO}}{\overline{OK}} \quad (1.83)$$

Analogamente, da semelhança entre os triângulos  $OTC$  e  $MQC$ , segue-se

$$\frac{\overline{MC}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{MQ}}{\overline{OT}}, \quad \text{é dizer,} \quad \frac{\overline{MC}}{\overline{MQ}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{OT}} \quad (1.84)$$

Desta forma, substituindo as equações (1.82) e (1.84) na equação (1.83), temos

$$\frac{\overline{DO}}{\overline{OK}} = \frac{\overline{DM}}{\overline{MQ}} = \frac{\overline{MC}^3}{\overline{MQ}^3} = \frac{\overline{OC}^3}{\overline{OT}^3} = \frac{\overline{DO}^3}{\overline{OT}^3},$$

sendo  $\overline{CO} = \overline{DO}$ , concluímos o que desejávamos provar.

$$\frac{\overline{DO}}{\overline{OK}} = \frac{\overline{DO}^3}{\overline{OT}^3}$$

Observemos que, o caso quando a razão  $\frac{\overline{DO}}{\overline{OK}} = 2$ , teríamos  $\overline{DO}^3 = 2\overline{OT}^3$ , ou seja, dado um cubo de aresta  $\overline{OT}$  pode ser duplicado por um cubo de aresta  $\overline{DO}$ , assim  $\overline{OT}$  é uma média proporcional.



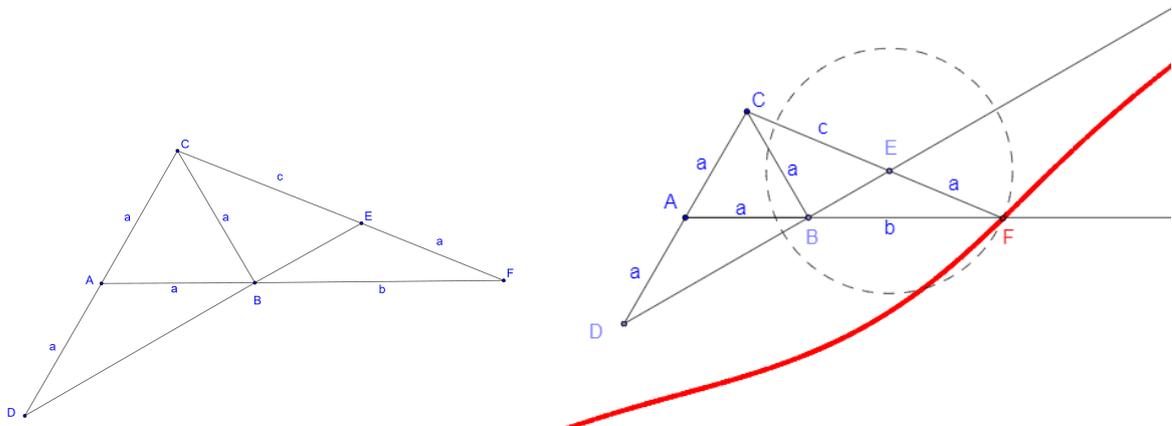
## 2 Algumas soluções renascentistas

Neste capítulo, veremos como Descartes e Newton solucionaram o problema em questão através de construções envolvendo triângulos. A solução de Descartes que apresentaremos aqui será a (DÖRRIE, 2013, p. 171) e no caso da solução de Newton a de (BURTON, 2011, p. 129).

### 2.1 A solução de Descartes

Para estudar a solução dada por Descartes<sup>1</sup> consideremos um triângulo equilátero  $ABC$  de comprimento de seus lados  $a$ . Prolonguemos  $CA$  até  $D$  com  $\overline{AD} = a$ . Tracemos a reta  $\overleftrightarrow{DB}$ . O ponto  $F$  é a interseção entre as retas  $\overleftrightarrow{AB}$  e  $\overleftrightarrow{CE}$ , e deve ser um ponto satisfazendo que  $\overline{CB} = \overline{EF} = a$ . A forma de determinar o ponto  $F$  é usando a concoide de polo em  $C$ , reta  $\overleftrightarrow{DB}$  e distância  $\overline{EF} = \overline{AB} = a$ , isto é,  $F$  é a interseção entre a reta  $\overleftrightarrow{AB}$  com a concoide.

Figura 23 – Solução de Descartes



Fonte: Adaptado de Dörrie (2013, p. 171) - autor, 2021

Na figura denotemos  $\overline{CE} = c$ ,  $\overline{BF} = b$ . Aplicando a lei dos cossenos no triângulo  $CAF$ , temos

$$\overline{CF}^2 = \overline{CA}^2 + \overline{AF}^2 - 2 \cdot \overline{CA} \cdot \overline{AF} \cdot \cos(\widehat{CAF}).$$

Substituindo os valores segundo a figura, segue que

$$(c + a)^2 = a^2 + (a + b)^2 - 2 \cdot a \cdot (a + b) \cdot \cos 60^\circ.$$

Desenvolvendo e simplificando a equação acima, temos

<sup>1</sup> Rene Descartes foi um filósofo, físico e matemático francês-1596 a 1650

$$\begin{aligned}c^2 + 2ac + a^2 &= a^2 + a^2 + 2ab + b^2 - a(a + b) \\c^2 + 2ac &= b^2 + ab.\end{aligned}\tag{2.1}$$

Aplicando o Teorema de Menelau no triângulo  $CAF$ , com segmento transversal  $DE$ , temos

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EF}} \cdot \frac{\overline{FB}}{\overline{BA}} = 1,$$

de acordo com a figura, temos

$$\frac{a}{2a} \cdot \frac{c}{a} \cdot \frac{b}{a} = 1, \quad \text{isto é,} \quad 2a^2 = bc, \quad \text{logo} \quad b = \frac{2a^2}{c}.\tag{2.2}$$

Agora, das equações (2.2) e (2.1), e depois multiplicando a expressão por  $c^2$ , segue-se

$$\begin{aligned}c^2 + 2ac &= \left(\frac{2a^2}{c}\right)^2 + a \cdot \frac{2a^2}{c} \\c^4 + 2ac^3 &= 4a^4 + 2a^3c.\end{aligned}$$

Assim, fatorando e simplificando, obtemos

$$c^3(c + 2a) = 2a^3(2a + c), \quad \text{que equivale a,} \quad c^3 = 2a^3.$$

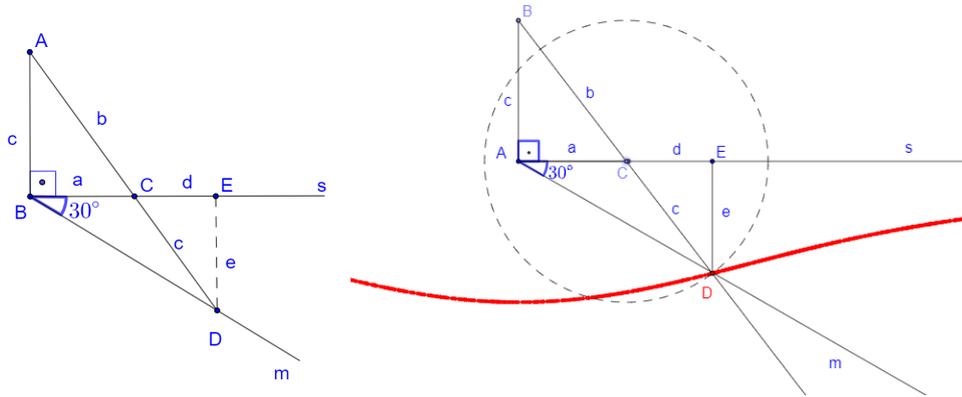
Então, obtemos  $c = a\sqrt[3]{2}$ . Desta forma, vemos que para duplicar um cubo de aresta  $a$ , a nova aresta deve ter medida  $a\sqrt[3]{2}$ .

## 2.2 A solução de Newton

Em Burton (2011, p. 129) vemos que Newton<sup>2</sup> sugeriu a seguinte construção para a duplicação do cubo: consideremos um segmento  $AB$  e construamos uma reta  $s$  perpendicular a ele. Por  $B$ , tracemos uma reta  $m$ , fazendo ângulo de  $30^\circ$  com a reta  $s$ . Seja  $D$  um ponto em  $m$  tal que, se a reta  $AD$  intersecta  $s$  em  $C$ , então  $\overline{CD} = \overline{AB}$ . A dificuldade nesta construção é poder determinar o ponto  $D$  em  $m$  satisfazendo essa condição. O ponto  $D$  pode ser determinado como a interseção entre a reta  $m$  e a Concoide, de polo em  $A$ , e distância  $\overline{CD} = \overline{AB} = c$ . Seja  $E$  o pé da perpendicular baixada desde  $D$  sobre a reta  $s$ . Denotemos por  $\overline{AC} = b$ ,  $\overline{CE} = d$  e  $\overline{DE} = e$ .

<sup>2</sup> Sir Isaac Newton foi um matemático, físico, astrônomo, teólogo inglês - 1643 a 1727

Figura 24 – Construção de Newton



Fonte: Adaptado de Burton (2011, p. 129) - autor, 2021

Observe que, os triângulos  $ABC$  e  $DEC$  são semelhantes, pois  $\widehat{BCA} = \widehat{ECD}$  (ângulos opostos pelo vértice) e  $\widehat{ABC} = \widehat{DEC} = 90^\circ$ , assim

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CD}}.$$

Substituindo os valores como na figura, obtemos a relação

$$\frac{c}{e} = \frac{a}{d} = \frac{b}{c}. \quad (2.3)$$

Das duas razões nos extremos e das duas últimas razões, seguem, respectivamente

$$\frac{c}{e} = \frac{b}{c} \quad \text{e} \quad \frac{a}{d} = \frac{b}{c}$$

Segundo a propriedade das proporções, temos

$$\begin{aligned} e &= \frac{c^2}{b} & \text{e} & \quad \frac{a}{a+d} = \frac{b}{b+c}, \\ e &= \frac{c^2}{b} & \text{e} & \quad a+d = a \frac{(b+c)}{b}. \end{aligned}$$

Agora fazendo a razão entre as duas equações anteriores, temos

$$\frac{e}{a+d} = \frac{\frac{c^2}{b}}{a \frac{(b+c)}{b}} = \frac{c^2}{a(b+c)} \quad (2.4)$$

Por outro lado, no triângulo  $BED$ ,  $\tan 30^\circ = \frac{\overline{DE}}{\overline{EB}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ .

Como  $\overline{DE} = e$  e  $\overline{EB} = a+d$ , assim

$$\frac{e}{a+d} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad (2.5)$$

Das equações (2.4) e (2.5), temos

$$\frac{c^2}{a(b+c)} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \text{ou seja,} \quad 3c^2 = a\sqrt{3}(b+c).$$

Daí, elevando ambos os membros ao quadrado, temos

$$9c^4 = 3a^2 \cdot (b + c)^2, \quad \text{é dizer,} \quad 3c^4 = a^2(b + c)^2. \quad (2.6)$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo  $ABC$ , segue que  $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$ , isto é,  $b^2 = a^2 + c^2$ , que equivale a,  $a^2 = b^2 - c^2$ .

Substituindo a última equação em (2.6) temos

$$\begin{aligned} 3c^4 &= (b^2 - c^2)(b + c)^2 \\ &= (b^2 - c^2)(b^2 + 2bc + c^2) \\ &= b^4 + 2b^3c + b^2c^2 - c^2b^2 - 2bc^3 - c^4 \end{aligned}$$

Simplificando, temos

$$\begin{aligned} 4c^4 + 2c^3b &= b^4 + 2b^3c \\ 2c^3(2c + b) &= b^3(b + 2c) \\ b^3 &= 2c^3 \end{aligned}$$

Assim, concluímos que  $b = \overline{AC}$  é o lado do cubo que é o dobro do cubo com o lado  $\overline{AB} = c$ .

## 3 A impossibilidade da duplicação à luz da álgebra

Nessa parte da dissertação mostraremos com ajuda da álgebra a impossibilidade da construção com régua (não graduada) e compasso do problema estudado. Utilizaremos para isso a teoria de corpo numérico e a definição de pontos construíveis no plano cartesiano e será obtida uma relação entre a solução da equação cúbica. A descrição da inviabilidade será exposto desde o ponto de vista histórico e algébrico.

### 3.1 Os antecedentes e o contexto histórico

As informações sobre como os gregos abordaram e trataram a impossibilidade das soluções com régua não graduada e compasso para a duplicação do cubo e a trissecção de um ângulo vieram dos escritos de Pappus, e a necessidade de formalizar uma prova para este fato partiu de Descartes.

Segundo Lützen<sup>1</sup>(2010, p. 5) e Bos<sup>2</sup> (2001, p. 380) possivelmente Descartes foi o primeiro a tentar mostrar a impossibilidade da prova dos dois problemas gregos utilizando régua e compasso. Cabe destacar que na matemática existem vários teoremas que abordam o tema impossibilidade, tais como: O último Teorema de Fermat, O Teorema Gödels e o Postulado das Paralelas.

Gauss<sup>3</sup> elaborou uma construção algébrica equivalente à construção com régua e compasso, a qual depois foi usada por Wantzel<sup>4</sup> Lützen (2010, p. 5). A matemática do século XVII e XVIII na Europa, tinha como principal interesse a prática de resolução de problemas. Lagrange<sup>5</sup> desenvolveu uma teoria sobre a quintica, que mostra como determinar as raízes de polinômios de quinto grau com uso de radicais e não chegou a propor nenhum método algébrico relacionado à prova da impossibilidade(LÜTZEN, 2010, p. 6).

Na resolução de problemas, Descartes defendia que a abordagem fosse a mais simples e no caso de uma construção plana era inaceitável utilizar outros meios. Segundo Mancosu<sup>6</sup>(1996 , p. 100-102 apud Lutzen, 2010, p. 8) para muitos matemáticos, incluindo Descartes, provas indiretas eram inferiores comparadas a uma prova direta. A rejeição das

<sup>1</sup> Jesper Lutzen é um historiador da matemática e da ciência dinamarquês-1951

<sup>2</sup> Henk Jan Maarten Bos é um historiador da matemática holandês. 1940 -

<sup>3</sup> Carl Friedrich Gauss foi um matemático, astrônomo e físico alemão que contribuiu muito em diversas áreas da ciência.1777 a 1855

<sup>4</sup> Pierre Laurent Wantzel foi um matemático francês.1814 a 1848

<sup>5</sup> Joseph Louis Lagrange foi um matemático italiano.1736 a 1813

<sup>6</sup> Paolo Mancosu é um professor de filosofia. 1960 -

provas indiretas foi um forte argumento para os novos métodos infinitesimais, tornando assim as provas do teoremas de impossibilidade difíceis de fornecer, pois, em geral, são do tipo indireto.

Segundo Montucla <sup>7</sup>(1754, p. 274–75 apud Lützen, 2010, p. 9) , a solução dos dois problemas gregos necessitava de curvas além das já conhecidas por estes, tais como: circunferência, retas e também de outras ferramentas distintas de régua e compasso. E classificou de enganosa a tentativa de esclarecer a duplicação do cubo com uso da geometria plana, pois precisava de uma teoria superior e ferramentas específicas.

Essa impossibilidade para determinar um comprimento fugiu das operações básicas como: somar, subtrair, multiplicar, dividir e extrair raízes quadradas. Além disso, não era aceitável para os primeiros matemáticos modernos utilizar a álgebra para resolver um problema geométrico. Para Coolidge<sup>8</sup>(1940, p. 53 apud Lützen, 2010, p.9) a geometria analítica criou alternativas para tratar as várias formas geométricas. Conforme Lützen (2010) Montucla também descreve que a teoria das equações e das curvas geométricas dão fundamentos para a impossibilidade geométrica nos dois problemas gregos.

A abordagem de Wantzel, para esse assunto, foi utilizar uma metodologia que liga-se à montagem da construção do problema com a teoria algébrica. Por definição,  $x$  e  $y$  são duas médias proporcionais entre os comprimentos  $a$  e  $b$  de dois segmentos retos, quando obedece a seguinte proporção,

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b},$$

resultando em  $x^3 = a^2b$ , caso  $b = 2a$  teríamos  $x^3 = 2a^3$ . Daí a média proporcional  $x$ , é a raiz de uma equação cúbica.

Assim, Descartes achou as seguintes equações quando empregou a média proporcional:  $x^2 = ay$ ;  $y^2 = bx$  e  $xy = ab$ , as duas primeiras são equações que receberam o nome de parábola cartesiana e a última de hipérbole. Somando membro a membro os termos das duas parábolas resulta na equação de uma circunferência:  $x^2 - bx + y^2 - ay = 0$ . Portanto, a solução para o enigma é dada pela intersecção entre a circunferência e as parábolas. De acordo com Descartes um problema geométrico poderia ser resolvido com uso de figuras planas como circunferências e retas. Então, o valor desconhecido pode ser vinculado a uma equação quadrática. Desta forma, um problema era considerado plano, quando recai em um polinômio quadrático com coeficientes racionais, ou também, se um polinômio for de grau superior a dois e possa ser fatorado em fatores de primeiro grau, ou seja, tenha raízes que possibilitem reescrevê-lo de forma reduzida; caso não seja possível tal processo a questão era classificada como sólida ou de maior complexidade.

<sup>7</sup> Jean-Étienne Montucla foi um matemático e escritor francês.1725 a 1799

<sup>8</sup> Julian Coolidge foi um matemático estadunidense.1873 a 1954

Desta forma não era construível com régua e compasso. Segundo Lutzen (2010), com a teoria desenvolvida por Descartes sobre a redução de polinômios, não pode ser considerada uma prova para a impossibilidades dos problemas gregos, sendo uma justificativa oposta à impossibilidade dos problemas grego, conseguindo provar sobre a não construíbilidade com régua e compasso para equações cúbicas e biquadráticas.

O tema sobre a impossibilidade dos problemas gregos parou de ser analisado pela academia de ciências por volta de 1775 depois de ter a convicção da construção com régua e compasso ser impossível. E a primeira prova moderna sobre a impossibilidade foi dada por Wantzel (LÜTZEN, 2010).

## 3.2 Impossibilidade desde do ponto de vista algébrico

Existem várias lendas sobre o problema da duplicação do cubo ou também conhecido como problema de Delos. Martin (2012, p. 29) relata que os gregos conseguiram solucionar o problema por diferentes métodos, mas não usando régua e compasso. Logo suspeitaram que não tinha solução e muitos séculos depois constatou-se com ajuda da álgebra a prova desse fato. Para mostrar esta impossibilidade seguiremos o trabalho de Martin.

**Definição 3.1.** (MARTIN, 2012, Cap. 2) *No plano cartesiano, um ponto é construível com régua e compasso se o ponto for o último de uma sequência finita de pontos  $P_1, P_2, \dots, P_n$ , de modo que cada ponto pertença ao conjunto  $\{(0, 0), (1, 0)\}$  ou é obtido de uma das seguintes maneiras:*

(i) *ou como a interseção de duas retas, cada uma das quais passa por dois pontos que aparecem anteriormente na sequência;*

(ii) *ou como a interseção entre uma reta e uma circunferência, sendo que a reta passa por dois pontos já na sequência e a circunferência com centro num ponto da sequência e passando por outro ponto da sequência;*

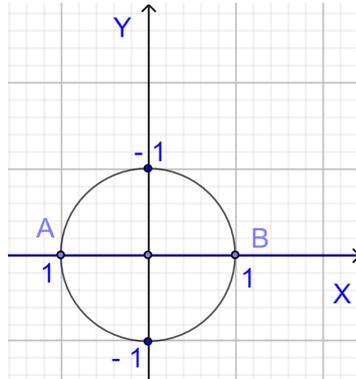
(iii) *ou como o ponto de intersecção entre duas circunferências, cada uma delas passa por um ponto já na sequência e seus centros já pertencem a sequência.*

Daqui para frente, utilizaremos a palavra “construível” para denotar o que é “construível com régua e compasso”. Assim, diremos que uma reta é construível se esta passa por dois pontos construíveis e no caso da circunferência, quando esta passa por um ponto e tem centro construíveis. Um número  $x$  é construível, se  $(x, 0)$  é um ponto construível.

A seguir exemplificaremos alguns pontos construíveis com régua e compasso geometricamente.

**Exemplo 3.1.** O ponto  $(-1, 0)$  pertence a intersecção entre a reta que passa pelos pontos  $(0, 0)$  e  $(1, 0)$  e da circunferência que tem centro  $(0, 0)$  e passa pelo ponto  $(1, 0)$ .

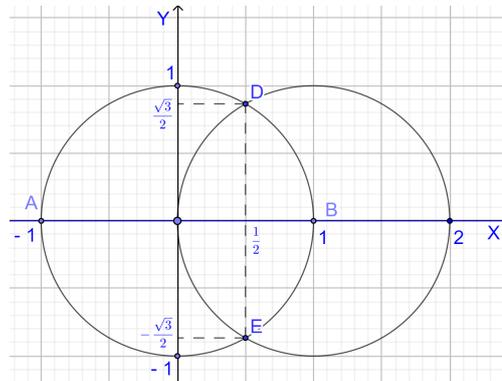
Figura 25 – Ponto construível:  $(-1, 0)$



Fonte: Autor, 2021

**Exemplo 3.2.** Os pontos  $(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$  e  $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$  que pertencem as intersecções das circunferências  $C_1$  e  $C_2$ . Sendo  $C_1$  a circunferência com centro em  $(0, 0)$  e que passa por  $(1, 0)$ , isto é  $x^2 + y^2 = 1$ ; e  $C_2$  a circunferência de centro em  $(1, 0)$  e que passa por  $(0, 0)$ , é dizer  $(X - 1)^2 + Y^2 = 1$ . Note que,  $(0, 0)$  e  $(1, 0)$  são pontos construíveis.

Figura 26 – Ponto construível:  $(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$  e  $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$



Fonte: Autor, 2021

**Definição 3.2.** .

- Um **corpo**  $\mathbb{E}$  é um subconjunto de números reais que contém 0 e 1, e tal que: dados  $p, q$  e  $r \neq 0$  pertencentes a  $\mathbb{E}$ , temos  $p + q$ ,  $p - q$ ,  $pq$  e  $\frac{p}{r}$  estão em  $\mathbb{E}$ .
- Denotaremos por  $\mathbb{Q}$  e  $\mathbb{R}$  os corpos dos números racionais e reais, respectivamente.
- O corpo no qual para todo  $y > 0$  que pertence a  $\mathbb{E}$  implica  $\sqrt{y} \in \mathbb{E}$  é denominado **Corpo Euclidiano**.

**Observação:** Os números pertencentes ao corpo dos números racionais  $\mathbb{Q}$  são números construíveis, mas nem todo número construível é racional.

**Teorema 3.1.** *Números construíveis formam um corpo.*

**Demonstração.** Consideremos os pontos construíveis  $A(a, 0)$  e  $B(b, 0)$ , sendo  $b > a > 0$ . Determinaremos os pontos construíveis  $F(a + b, 0)$  e  $G(b - a, 0)$  através das etapas. Devemos ver a figura seguinte, lado esquerdo: tracemos a circunferência  $\Gamma_1$  com centro no ponto  $A$  e passando pelo ponto  $B$ , analogamente tracemos a circunferência  $\Gamma_2$  com centro  $B$  e passando pelo ponto  $A$ , seja  $C$  o ponto de interseção entre as circunferências  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$ .

Depois, tracemos a circunferência  $\Gamma_3$  com centro  $A$  e passando pela origem. Seja  $D$  o ponto de interseção entre a circunferência  $\Gamma_3$  e a reta que passa pelos pontos  $A$  e  $C$  e sendo  $A$  entre  $D$  e  $C$ .

Seja  $\Gamma_4$  a circunferência com centro no ponto  $C$  e passando pelo ponto  $D$ , denotemos por  $E$  ao ponto de interseção entre a circunferência  $\Gamma_4$  e a reta que passa pelos pontos  $C$  e  $B$ , sendo  $B$  entre  $C$  e  $E$ .

Finalmente traçamos a circunferência  $\Gamma_5$  com centro no ponto  $B$  e passando pelo ponto  $E$ . Note que a circunferência  $\Gamma_5$  intersecta o eixo  $X$  nos pontos  $F(a + b, 0)$  e  $G(b - a, 0)$  procurados.

Agora, observemos a seguinte figura do lado direito. Determinaremos os pontos construíveis  $B'(\frac{a}{b}, 0)$  e  $C'(a \cdot b, 0)$  da seguinte maneira: sejam  $D'(-a, 0)$  e  $E'(0, -b)$  os pontos de interseções entre as circunferências de centro em  $(0, 0)$  e que passam pelos pontos  $A(a, 0)$  e  $B(b, 0)$ , respectivamente. Juntando os pontos  $D'$  e  $E'$ . Seja  $A'$  o ponto de interseção entre a circunferência de centro na origem passando pelo ponto  $(1, 0)$  e o eixo  $Y$ .

Por  $A'$ , tracemos um segmento paralelo ao segmento  $D'E'$ , que intersecta o eixo  $X$  no ponto  $B'$ . Por  $E'$ , tracemos um segmento paralelo ao segmento  $A'D'$  que intersecta o eixo  $X$  no ponto  $C'$ .

Assim, determinemos as coordenadas dos pontos  $B'$  e  $C'$ . Note que os triângulos  $A'OB'$  e  $D'OE'$  são semelhantes, pois os ângulos  $O\hat{A}'B'$  e  $D'\hat{E}'O$  são alternos internos e possuem um ângulo reto. Dai, temos as seguintes proporções

$$\frac{\overline{OB'}}{\overline{D'O}} = \frac{\overline{A'O}}{\overline{OE'}} \quad \text{que equivale a,} \quad \frac{\overline{OB'}}{a} = \frac{1}{b},$$

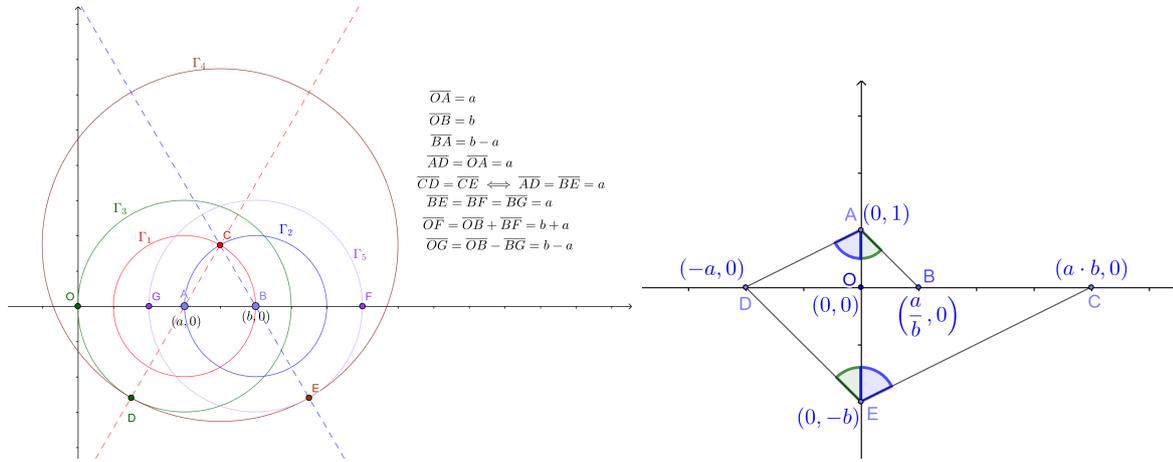
logo,  $\overline{OB'} = \frac{a}{b}$ , ou seja  $B'(\frac{a}{b}, 0)$ . De modo análogo os triângulos  $A'D'O$  e  $OE'C'$  são semelhantes, assim temos

$$\frac{\overline{D'O}}{\overline{OC'}} = \frac{\overline{A'O}}{\overline{OE'}} \quad \text{que equivale a,} \quad \frac{a}{\overline{OC'}} = \frac{1}{b},$$

Portanto,  $\overline{OC'} = a \cdot b$ , ou seja,  $C' (a \cdot b, 0)$ .

Com isso, os pontos construíveis obedecem a definição de corpo.

Figura 27 – Construção de pontos construíveis



Fonte: Autor, 2021

**Teorema 3.2.** *Números construíveis formam um corpo euclidiano.*

*Demonstração.* Sejam  $b > 0$  e  $(b, 0)$  um ponto construível, consideremos a reta  $x = b$  e a circunferência  $x^2 + y^2 - (b + 1)x = 0$  de raio  $\frac{b+1}{2}$  com centro  $(\frac{b+1}{2}, 0)$ . Observemos que, as intersecções entre as duas curvas anteriores são os seguintes pontos:  $(b, \sqrt{b})$  e  $(b, -\sqrt{b})$ . Daí, vemos que  $(b, \sqrt{b})$  e  $(b, -\sqrt{b})$  são construíveis, logo  $\sqrt{b}$  é construível. Portanto, o conjunto dos números construíveis é um corpo euclidiano.  $\square$

**Definição 3.3.** *Um número  $a \in \mathbb{E}$  é um quadrado em  $\mathbb{E}$  se, e somente se,  $\sqrt{a}$  pertence a  $\mathbb{E}$ . Assim o corpo é euclidiano.*

**Observação 3.1.** *O corpo dos números racionais  $\mathbb{Q}$  é um corpo não euclidiano, pois 3 pertence a  $\mathbb{Q}$ , mas  $\sqrt{3}$  não é racional.*

**Teorema 3.3.** *Se  $a, b$  e  $c > 0$  no corpo  $\mathbb{E}$ , com  $\sqrt{c} \notin \mathbb{E}$ , então o conjunto*

$$A = \{a + b\sqrt{c} : a, b \in \mathbb{E}\}$$

*é um corpo.*

*Demonstração.* Note que 0 e 1 pertencem a  $A$ , pois  $0 = 0 + 0\sqrt{c}$  e  $1 = 1 + 0\sqrt{c}$ . Dado  $a, b, d, f$  e  $c > 0$  pertencentes a  $\mathbb{E}$ , mas  $\sqrt{c}$  não está em  $\mathbb{E}$ , demonstraremos que a adição, subtração, multiplicação e divisão entre  $a + b\sqrt{c}$  e  $d + f\sqrt{c}$  pertence a  $\mathbb{E}$ .

Adição:

$$(a + b\sqrt{c}) + (d + f\sqrt{c}) = (a + d) + (b + f)\sqrt{c} = p + q\sqrt{c} \in A,$$

pois  $p = a + b$  e  $q = b + f$  pertencem a  $\mathbb{E}$ .

Multiplicação:

$$(a + b\sqrt{c}) \cdot (d + f\sqrt{c}) = (ad + bfc) + (af + bd)\sqrt{c} = g + h\sqrt{c} \in A,$$

dado que  $g = ad + bf$  e  $h = af + bd$  pertencem a  $\mathbb{E}$ .

Divisão: Consideremos  $(d + f\sqrt{c}) \neq 0$ , então

$$\frac{a + b\sqrt{c}}{d + f\sqrt{c}} = \frac{a + b\sqrt{c}}{d + f\sqrt{c}} \cdot \frac{d - f\sqrt{c}}{d - f\sqrt{c}} = \frac{ad - bfc}{d^2 - f^2c} + \frac{bd - af}{d^2 - f^2c}\sqrt{c} = m + n\sqrt{c} \in A,$$

desde que  $m = \frac{ad-bfc}{d^2-f^2c}$  e  $n = \frac{bd-af}{d^2-f^2c}$  pertencem a  $\mathbb{E}$ .

Logo, o conjunto  $\{a + b\sqrt{c} : a, b \in \mathbb{E}\}$  é um corpo.

**Definição 3.4.** .

1. Se  $c > 0$  está em  $\mathbb{E}$ , mas  $\sqrt{c} \notin \mathbb{E}$ , então  $\mathbb{E}(\sqrt{c})$  é um corpo e o denotamos por  $\{a + b\sqrt{c} \mid a, b \in \mathbb{E}\}$ . Chamaremos a  $\mathbb{E}(\sqrt{c})$  uma **extensão quadrática de  $\mathbb{E}$** .
2. Se  $\mathbb{E}_1 = \mathbb{E}(\sqrt{c_1})$ ,  $\mathbb{E}_2 = \mathbb{E}_1(\sqrt{c_2})$ ,  $\dots$ ,  $\mathbb{E}_n = \mathbb{E}_{n-1}(\sqrt{c_n})$ , então escrevemos

$$\mathbb{E}_n = \mathbb{E}(\sqrt{c_1}, \sqrt{c_2}, \dots, \sqrt{c_n})$$

e chamaremos cada um de  $\mathbb{E}, \mathbb{E}_1, \mathbb{E}_2, \dots, \mathbb{E}_n$  uma **extensão quadrática iterada de  $\mathbb{E}$** .

3.  $\mathbb{F}$  denotará a união de todas as extensões quadráticas iteradas do corpo  $\mathbb{Q}$ .

**Observação 3.2.** Um corpo euclidiano não tem extensões quadráticas. O corpo  $\mathbb{R}$  não tem extensões quadráticas, pois todo real positivo é um quadrado em  $\mathbb{R}$ . O menor corpo  $\mathbb{E}$  definido como uma extensão quadrática iterada de  $\mathbb{E}$ , não é uma extensão quadrática de  $\mathbb{E}$ , talvez seja estranho, mas acaba sendo conveniente.

**Teorema 3.4.** Se  $c$  está em  $\mathbb{F}$ , então  $c$  é construível.

**Observação 3.3.** Provaremos a recíproca deste teorema que exigirá a demonstração de quatro lemas. Começaremos com um conjunto de pontos e, em seguida, construiremos novos pontos construíveis. Esses novos pontos são obtidos como a interseção de retas e circunferências construíveis. A resolução algébrica das equações para encontrar as coordenadas desses pontos não requer mais do que as quatro operações aritméticas e a obtenção de raízes quadradas. Portanto, espera-se que as coordenadas de qualquer ponto construível esteja em uma extensão quadrática iterada dos racionais.

Vejamos o enunciado do teorema e os detalhes da sua prova.

**Teorema 3.5.** *As coordenadas dos pontos construíveis pertencem a uma extensão quadrática iterada no corpo dos racionais.*

**Lema 3.1.** *Dados dois pontos cujas coordenadas pertencem a  $\mathbb{E}$ , a equação da reta que passa por esses dois pontos tem coeficientes que em  $\mathbb{E}$ . E, se um dos pontos é o centro e o outro pertence a o circunferência, então a equação da circunferência tem coeficientes em  $\mathbb{E}$ .*

*Demonstração.* A equação da reta que passa pelos pontos  $A = (x_a, y_a)$  e  $B = (x_b, y_b)$  tem vetor direção  $\overrightarrow{AB} = (x_b - x_a, y_b - y_a)$ . Logo, sua equação paramétrica será  $(X, Y) = (x_a, y_a) + t(x_b - x_a, y_b - y_a)$ , com  $t \in \mathbb{R}$ . Seguem-se, daí

$$X = x_a + t(x_b - x_a) \quad \text{e} \quad Y = y_a + t(y_b - y_a)$$

Isolando o parâmetro  $t$  na primeira equação e substituindo-o na segunda equação, temos

$$t = \frac{X - x_a}{x_b - x_a}, \quad \text{logo} \quad Y = y_a + \frac{(X - x_a)}{(x_b - x_a)}(y_b - y_a).$$

Assim, temos  $(y_b - y_a)X + (x_a - x_b)Y + (x_b y_a - x_a y_b) = 0$ , o que prova a primeira afirmação.

Agora determinemos a circunferência de centro  $C = (x_c, y_c)$ , que passa pelo ponto  $A = (x_a, y_a)$ . Seja  $P$  um ponto arbitrário da circunferência, então a distância de  $C$  à  $P$  é a mesma de  $C$  à  $A$ , isto é

$$\sqrt{(X - x_c)^2 + (Y - y_c)^2} = \sqrt{(x_c - x_a)^2 + (y_c - y_a)^2}.$$

Elevando ao quadrado ambos lados, e desenvolvendo os quadrados da diferença, temos

$$(X - x_c)^2 + (Y - y_c)^2 = (x_c - x_a)^2 + (y_c - y_a)^2, \text{ o qual equivale a}$$

$$X^2 + Y^2 - 2x_c X - 2y_c Y + 2x_c x_a - x_a^2 + 2y_c y_a - y_a^2 = 0$$

Logo, os coeficientes da equação da circunferência pertencem ao corpo  $\mathbb{E}$ . □

**Lema 3.2.** *A interseção de duas retas com coeficientes em  $\mathbb{E}$  é um ponto cujas coordenadas pertencem a  $\mathbb{E}$ .*

*Demonstração.* Precisaremos determinar a intersecção das retas resolvendo um sistema linear com duas incógnitas. Sejam  $r : a_1 X + b_1 Y + c_1 = 0$  e  $s : a_2 X + b_2 Y + c_2 = 0$  as equações das retas. Aplicando a regra de Cramer ao sistema

$$S : \begin{cases} a_1 X + b_1 Y + c_1 = 0 \\ a_2 X + b_2 Y + c_2 = 0 \end{cases},$$

como  $r \cap s \neq \emptyset$ , então o sistema  $S$  tem solução, isto é

$$X = \frac{\begin{vmatrix} -c_1 & b_1 \\ -c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \quad \text{e} \quad Y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & -c_1 \\ a_2 & -c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}},$$

que equivalem, respetivamente, a  $X = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$  e  $Y = \frac{a_2c_1 - a_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}$ . Portanto, as coordenadas do ponto de interseção entre as duas retas foram obtidas por operações aritméticas definidas no corpo.  $\square$

**Lema 3.3.** *Se uma reta e uma circunferência têm coeficientes em  $\mathbb{E}$ , então os pontos de intersecções destes tem coordenadas pertencentes a  $\mathbb{E}$  ou em uma extensão quadrática de  $\mathbb{E}$ .*

*Demonstração.* Consideremos as equações gerais de uma reta  $aX + bY + c = 0$  e de uma circunferência  $X^2 + Y^2 + dX + eY + f = 0$ . Isolando  $Y$  na equação da reta,  $Y = -\frac{a}{b}X - \frac{c}{b}$  e substituindo na equação da circunferência temos

$$\begin{aligned} X^2 + \left(-\frac{a}{b} - \frac{c}{b}\right)^2 + dX + e\left(-\frac{a}{b} - \frac{c}{b}\right) + f &= 0 \\ X^2 + \frac{a^2}{b^2}X^2 + 2\frac{ac}{b^2}X + \frac{c^2}{b^2} + dX - \frac{ae}{b}X - \frac{ce}{b} + f &= 0 \quad \text{multiplicado por } (b^2) \\ (a^2 + b^2)X^2 + (2ac + b^2d - abe)X + c^2 - bce + b^2f &= 0 \end{aligned}$$

Calculando o discriminante da equação, segue que

$$\begin{aligned} \Delta &= (2ac + b^2d - abe)^2 - 4(a^2 + b^2)(c^2 - bce + b^2f) \\ &= 4a^2c^2 + 4ab^2cd - 4a^2bce + b^4d^2 - 2ab^3de + a^2b^2e^2 - 4a^2c^2 + 4a^2bce - 4a^2b^2f \\ &\quad - 4b^2c^2 + 4b^3ce - 4b^3f \\ &= b^2[(bd - ae)^2 + 4c(ad - c + be) - 4f(a^2 + b^2)] \\ &= b^2\alpha, \end{aligned}$$

sendo  $\alpha = (bd - ae)^2 + 4c(ad - c + be) - 4f(a^2 + b^2)$ . Assim da fórmula de Báskara, temos

$$X = X_0 = \frac{(abe - 2ac + db^2) \pm b\sqrt{\alpha}}{2(a^2 + b^2)}.$$

Finalmente, determinamos

$$Y = Y_0 = -\frac{a^2e + abd - 2bc \pm a\sqrt{\alpha}}{2(a^2 + b^2)}.$$

Assim, para  $X_0$  e  $Y_0$  serem determinados devem satisfazer  $\alpha \geq 0$ . Se  $\alpha$  é um quadrado em  $\mathbb{E}$ , então os pontos de interseção pertencem a  $\mathbb{E}$ . Mas, se  $\alpha$  não é um quadrado em  $\mathbb{E}$ , então pelo menos  $X_0$  ou  $Y_0$  não pertencem a  $\mathbb{E}$ , uma vez que, se  $a = 0$  e  $b \neq 0$ , então  $X_0$  não pertence a  $\mathbb{E}$  e  $Y_0$  está em  $\mathbb{E}$ . Por outro lado, se  $a \neq 0$  e  $b = 0$ , então  $X_0$  pertence a  $\mathbb{E}$  e  $Y_0$  não pertence a  $\mathbb{E}$ . Logo,  $X_0$  e  $Y_0$  pertencem a uma extensão quadrática em  $\mathbb{E}(\sqrt{\alpha})$ .  $\square$

**Lema 3.4.** *Dadas duas circunferências com coeficientes em  $\mathbb{E}$ , então os pontos de interseção entre elas têm coordenadas em  $\mathbb{E}$  ou pertencem a uma extensão quadrática de  $\mathbb{E}$ .*

*Demonstração.* Considerem as circunferências  $X^2 + Y^2 + aX + bY + c = 0$  e  $X^2 + Y^2 + dX + fY + g = 0$ . Subtraindo-as obtemos a reta

$$(d - a)X + (f - b)Y + g - c = 0 \quad (3.1)$$

Agora devemos resolver um sistema de equações entre a reta (3.1) e uma das circunferências dada, recaindo no lema anterior.  $\square$

*Demonstração.* do Teorema 3.5. Seja  $P$  um ponto construível. Da definição de ponto construível,  $P$  deve ser o último da sequência de pontos  $P_1, P_2, \dots, P_n$ , cada um dos quais é  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ , entre os quais podem ser encontrados pelos seguintes modos de interseções: duas retas, reta e circunferência ou entre duas circunferências. Pelos lemas anteriores, podemos associar  $P_1$  com os racionais e observar que cada  $P_i$ , para  $i > 1$  está associado com um corpo  $\mathbb{E}_i$  tal que as coordenadas de  $P_i$  pertencem a  $\mathbb{E}_i$  e tal que  $\mathbb{E}_i$  é igual a  $\mathbb{E}_{i-1}$  ou então é uma extensão quadrática de  $\mathbb{E}_{i-1}$ . Logo,  $\mathbb{E}_n$  é uma extensão quadrática iterada dos racionais, e as coordenadas de  $P$  pertencem a  $\mathbb{E}_n$ .  $\square$

**Corolário 1.** *O ponto  $P$  é construível se as coordenadas de  $P$  pertencem a  $\mathbb{F}$ . O número  $x$  é construível, se  $x$  pertencer ao corpo  $\mathbb{F}$ .*

Agora, para provar que o problema da duplicação do cubo é impossível com régua e compasso, precisamos apresentar os seguintes resultados.

**Teorema 3.6.** *Se a equação  $a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0 = 0$  tem coeficientes inteiros e tem uma raiz racional  $\frac{p}{q}$ , com  $(p, q) = 1$ , então  $p$  divide  $a_0$  e  $q$  divide  $a_n$ .*

*Demonstração.* Como  $\frac{p}{q}$  é raiz da equação, deve satisfazer a equação, isto é

$$a_n \left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1} \left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \dots + a_{n-2} \left(\frac{p}{q}\right)^2 + a_1 \left(\frac{p}{q}\right) + a_0 = 0.$$

Multiplicando a equação por  $q^n$  e isolando o termo  $a_n p^n$ , obtemos

$$\begin{aligned} a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + a_{n-2} p^{n-2} q^2 + \dots + a_2 p^2 q^{n-2} + a_1 p q^{n-2} + a_0 q^n &= 0, \\ a_{n-1} p^{n-1} q + a_{n-2} p^{n-2} q^2 + \dots + a_2 p^2 q^{n-2} + a_1 p q^{n-2} + a_0 q^n &= -a_n p^n. \end{aligned}$$

Colocando em evidência  $q$ ,

$$q \left( a_{n-1} p^{n-1} + a_{n-2} p^{n-2} q + \dots + a_2 p^2 q^{n-3} + a_1 p q^{n-2} + a_0 q^{n-1} \right) = -a_n p^n$$

Observe que os termos no parênteses são inteiros, então  $a_n p^n$  é múltiplo de  $q$ , ou seja,  $a_n p^n = qk$ , sendo  $k$  um número inteiro. Assim  $k = \frac{a_n p^n}{q}$ , logo  $q$  tem que dividir  $a_n$ , pois  $p$

e  $q$  são primos entre si, e também entre  $p^n$  e  $q$ . De forma análoga, isolamos o termo  $a_0q^n$ , o qual será múltiplo de  $p$ . Como  $p$  não divide  $q$  e também não divide a  $q^n$ , concluímos que  $p$  tem que dividir  $a_0$ .  $\square$

**Teorema 3.7.** *Se uma equação cúbica com coeficientes racionais não tem raiz racional, então nenhuma de suas raízes são números construíveis.*

*Demonstração.* Sejam  $a, b$  e  $c$  números racionais e consideremos a equação  $X^3 + aX^2 + bX + c = 0$ , que não tem raiz racional, mas tem raiz construível. Então, essa raiz deve pertencer a uma extensão quadrática iterada finita de  $\mathbb{Q}$ . Tome  $E_0 = \mathbb{Q}$ . Portanto, há um menor inteiro positivo  $i$  de modo que a equação cúbica tenha raiz  $X'$  pertencente a uma extensão quadrática iterada finita  $\mathbb{E}_i$  dos racionais com  $\mathbb{E}_i = \mathbb{Q}(\sqrt{c_1}, \sqrt{c_2}, \dots, \sqrt{c_j})$ . Seja  $\mathbb{E}_j = \mathbb{Q}(\sqrt{c_1}, \sqrt{c_2}, \dots, \sqrt{c_j})$  para  $j = 1, 2, \dots, i-1$ , Logo  $\mathbb{E}_j$  é uma extensão quadrática de  $\mathbb{E}_{j-1}$  para  $j = 1, 2, \dots, i-1$ , isto é,  $\mathbb{E}_j = \mathbb{E}_{j-1}$ .

Daí, podemos supor que existem  $f$  e  $g$  em  $\mathbb{E}_{i-1}$  tal que  $X' = f + g\sqrt{c_i}$  com  $g \neq 0$ , senão  $X'$  estaria em  $\mathbb{Q}$ , assim  $i$  não seria mínimo. Afirmaremos que, se  $X' = f + g\sqrt{c_n}$  é raiz o mesmo acontece com  $X'' = f - g\sqrt{c_n}$ .

$$\begin{aligned} X'^3 + aX'^2 + bX' + c &= (f \pm g\sqrt{c_n})^3 + a(f \pm g\sqrt{c_n})^2 + b(f \pm g\sqrt{c_n}) + c \\ &= f^3 \pm 3f^2g\sqrt{c_n} + 3fg^2c_n \pm g^3c_n\sqrt{c_n} + a(f^2 \pm 2fg\sqrt{c_n} + g^2c_n) \\ &\quad + bf \pm bg\sqrt{c_n} + c \\ &= (f^3 + 3fg^2c_n + af^2 + ag^2c_n + bf + c) \\ &\quad \pm (3f^2g + g^3c_n + 2afg + bg)\sqrt{c_n} \end{aligned}$$

Notemos que para  $X' = f + g\sqrt{c_n}$  seja raiz teríamos

$$(f^3 + 3fg^2c_n + af^2 + ag^2c_n + bf + c) + (3f^2g + g^3c_n + 2afg + bg)\sqrt{c_n} = 0 + 0\sqrt{c_n}.$$

Assim  $(f^3 + 3fg^2c_n + af^2 + ag^2c_n + bf + c) = 0$  e  $(3f^2g + g^3c_n + 2afg + bg) = 0$ , para a sentença acima ser verdadeira, então esses mesmos valores aparece quando substituimos  $X$  por  $X'' = f - g\sqrt{c_n}$ , concluindo que  $X''$  é também raiz. Por outro lado, consideremos a seguinte fatoração, sendo  $v$  a terceira raiz da equação

$$\begin{aligned} X^3 + aX^2 + bX + c &= (X - v) \cdot (X - (f + g\sqrt{c_n})) \cdot (X - (f - g\sqrt{c_n})) \\ &= (X - v)(X^2 - Xf + g\sqrt{c_n}X - fX + f^2 - fg\sqrt{c_n} - g\sqrt{c_n}X \\ &\quad + fg\sqrt{c_n} - g^2\sqrt{c_n}) \\ &= (X - v)(X^2 - 2fX + f^2 - g^2\sqrt{c_n}) \\ &= X^3 - 2fX^2 + Xf^2 - g^2c_nX - vX^2 + 2fvX - vf^2 + vg^2c_n \\ &= X^3 + (-v - 2f)X^2 + (f^2 - g^2c_n + 2fv)X - vf^2 + vg^2c_n. \end{aligned}$$

Pela igualdade de polinômios, temos que

$$a = -v - 2f, \quad b = f^2 - g^2c_n + 2fv \quad \text{e} \quad c = -vf^2 + vg^2c_n,$$

ou seja,  $v = -a - 2f$ , com isso a terceira raiz é  $\mathbb{Q}$ , sendo uma contradição com a minimalidade de  $i$ , logo a nossa suposição inicial é falsa.  $\square$

**Teorema 3.8.** *O número  $\sqrt[3]{2}$  não é um construível.*

*Demonstração.* Notemos que a equação  $X^3 - 2 = 0$  tem uma raiz  $\sqrt[3]{2}$ . Caso essa equação tenha uma raiz racional pelo Teorema 3.6, seriam  $\{-2, -1, 1, 2\}$ , mas fazendo a verificação, constatou-se que nenhuma é raiz da equação, então pelo Teorema 3.7 esta equação não tem raiz construível.  $\square$

Observe que, o valor de  $X = \sqrt[3]{2}$  representa a aresta do cubo que duplica o cubo de aresta 1 unidade de comprimento.

## 4 Atividades para aperfeiçoamento do conhecimento com supervisão do professor

Nesse capítulo, serão sugeridas duas atividades de complementação para reforçar o conhecimento exposto na dissertação. A primeira, refere-se à construção das superfícies utilizadas por Arquitas; a segunda, à construção da máquina de Platão que disponibilizaremos em forma dinâmica na plataforma do GeoGebra junto às construções de Apolônio, Herão e Filão, que poderão ser acessadas através dos *hiperlinks* divulgados a seguir.

### 4.1 Tutorial de construção de superfícies de revolução no *software* GeoGebra

Com o objetivo de aprimorar os conhecimentos geométricos como rotação de curva, secções de planos, equações cartesianas e paramétricas das superfícies, coordenadas polares optamos por utilizar o *software* educacional GeoGebra, sendo uma meta defendida pelo PCN<sup>1</sup>.

Quanto aos softwares educacionais é fundamental que o professor aprenda a escolhê-los em função dos objetivos que pretende atingir e de sua própria concepção de conhecimento e de aprendizagem, distinguindo os que se prestam mais a um trabalho dirigido para testar conhecimentos, dos que procuram levar o aluno a interagir com o programa de forma a construir conhecimento (BRASIL, 1997, p. 35)

De acordo com o site<sup>2</sup>, define-se GeoGebra como um *software* de matemática dinâmica para todos os níveis de ensino que reúne geometria, álgebra, planilhas, gráficos, estatística e cálculo numa aplicação fácil de utilizar. GeoGebra é uma comunidade em rápida expansão de milhões de utilizadores localizados em praticamente todos os países, tornando-se líder no fornecimento de *software* de matemática dinâmica, apoiando a ciência, tecnologia, engenharia e matemática (STEM) educação e inovações no ensino e aprendizagem em todo o mundo. A versão a qual nos referiremos aqui é a clássica 6, que possui as seguintes ferramentas: Calculadora GeoGebra com Gráficos, Geometria, 3D, planilhas, CAS e mais.

Com o objetivo de dinamizar e incrementar a aprendizagem sobre as superfícies envolvidas na solução de Arquitas e as aulas de geometria, apresentaremos um tutorial usando o Geogebra, para mostrar a interseções entre as seguintes superfícies: toro, cilindro e cone.

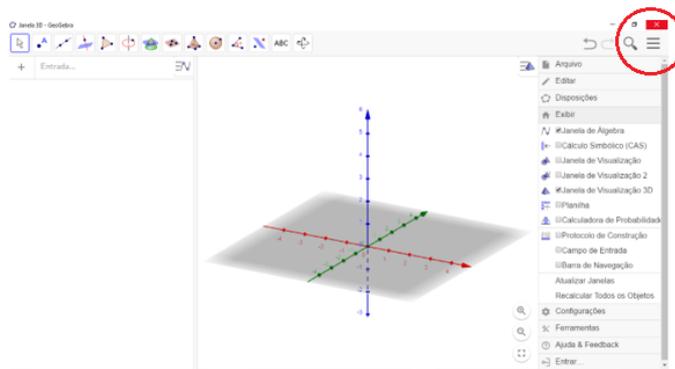
<sup>1</sup> Parâmetros Curriculares Nacionais, PCN.

<sup>2</sup> [GeoGebra](#)

Para baixar o GeoGebra, entremos no *site* <https://www.geogebra.org/download?lang=pt> e depois faça a instalação no seu computador.

1. Abramos o GeoGebra e escolhamos a *janela de visualização 3D*, que pode ser encontrada ao clicar no menu com três linhas no canto superior direito e depois *exibir > janela de visualização 3D*.

Figura 28 – Janela de visualização 3D

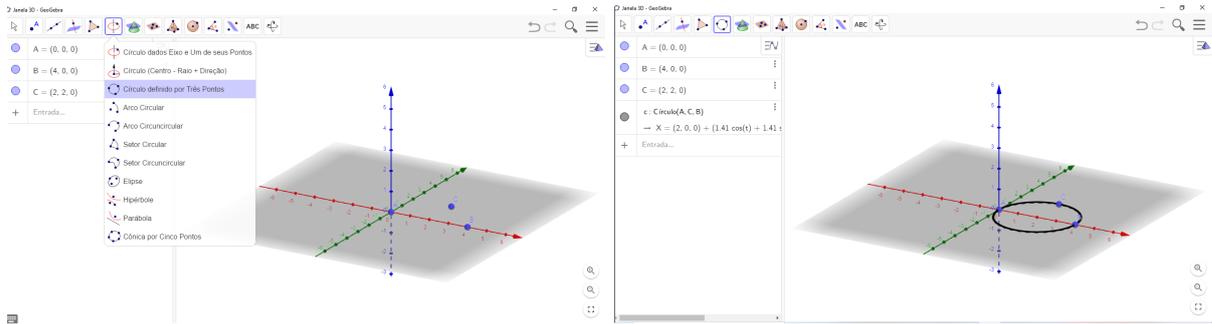


Fonte: GeoGebra Classic 6 e autor, 2021

## Construção do cilindro

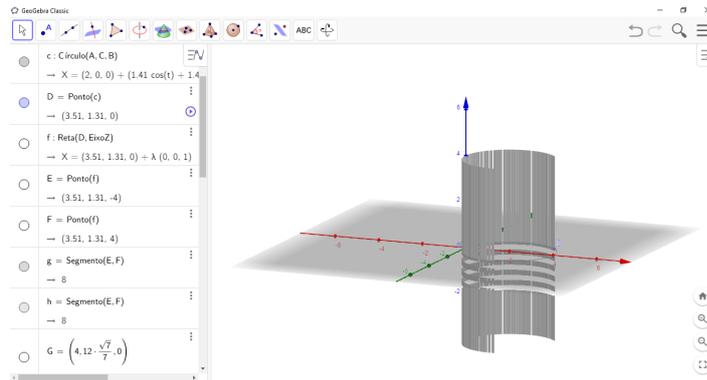
2. O cilindro será gerado quando um segmento de reta se desloca paralelamente sobre uma trajetória circular. Para isso construiremos uma circunferência com centro em  $(2, 0, 0)$  e passando pelos pontos  $(0, 0, 0)$ ,  $(2, 2, 0)$  e  $(4, 0, 0)$ .
  - a) Na *janela de álgebra* digitemos os pontos:  $(0, 0, 0)$ ,  $(2, 2, 0)$  e  $(4, 0, 0)$  um de cada vez, pois utilizando
    - i. No segundo botão, escolhamos o primeiro comando *ponto*.
    - ii. Cliquemos na *caixa de entrada* e digitemos  $(0, 0, 0)$ , dê *enter* no final.
    - iii. Repitamos o processo anterior para  $(2, 2, 0)$  e  $(4, 0, 0)$
  - b) Construamos uma circunferência passando pelos três pontos anteriores.
    - i. Seleccionemos no sexto botão da esquerda para direita o comando *círculo definido por três pontos*,
    - ii. depois clicamos nos três pontos criados nos passos anteriores.

Figura 29 – Janela de visualização 3D



Fonte: GeoGebra Classic 6 e autor, 2021

- c) Omitamos os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  no gráfico. Para isto; cliquemos em cada ponto no gráfico com o botão direito do mouse e desmarquemos *exibir objeto*, e *rótulo* de cada um. Ou na coluna de entrada do lado esquerdo e desmarquemos os três pontos.
- d) Construamos uma reta paralela ao eixo  $Z$ , passando por um ponto da circunferência que não pertença ao eixo  $X$ , através do comando *reta paralela* localizado no quarto botão da esquerda para direita. Seleccionemos primeiro um ponto no círculo e depois o eixo  $Z$ .
- e) Marquemos dois pontos sobre a reta paralela anterior, um deles na parte superior e outro na parte inferior ao plano  $XY$ . Movimentemos os pontos sobre a reta para que a ordenada  $z$  destes fiquem  $-4$  e  $4$ , respectivamente.
- f) Construamos um segmento de reta com extremidade nesses pontos, pois a movimentar o ponto que está na circunferência o segmento não sofrerá alteração de paralelismo com o eixo  $Z$ . Fixemos as extremidades do segmento para não alterar o comprimento deste e, para isto, fixemos os pontos clicando no comando *mover*, seleccionemos o ponto, dando clique no botão direito do mouse, *configurações* > *fixar objeto*. Depois, podemos omitir os pontos da extremidade do segmento e a reta paralela, clicando com o botão direito do mouse sobre cada objeto e desmarquemos a opção *exibir objeto*.
- g) Diminuímos o tamanho do ponto  $D$ , dando um clique no botão *direito do mouse*, *configurações* > *estilo* > *tamanho do ponto*. Ativemos o rastro do segmento; para colocar o *rastro em um objeto*, selecione-o, clique com o botão direito do mouse e marque *exibir rastro* e execute a animação do ponto  $D$ . A trajetória do ponto  $D$  ao longo da circunferência, irá confeccionado o cilindro.
- h) Para diminui o tamanho de um objeto, no comando que aparece no canto superior direito com um desenho de uma pirâmide com três linhas, clique no *símbolo da engrenagem* > *estilo* e regule o tamanho do objeto.

Figura 30 – Cilindro gerado pela rotação de uma reta paralela ao eixo  $Z$ 

Fonte: GeoGebra Classic 6 e autor, 2021

## Construção do cone

3. O cone será gerado pelo rastro de um segmento de reta girando em torno do eixo  $X$ .

a) Na *janela de álgebra* digitei os seguintes pontos:

$$(4, 12\sqrt{7}/7, 0), \quad (4, 0, 12\sqrt{7}/7) \quad \text{e} \quad (5, -12\sqrt{7}/7, 0)$$

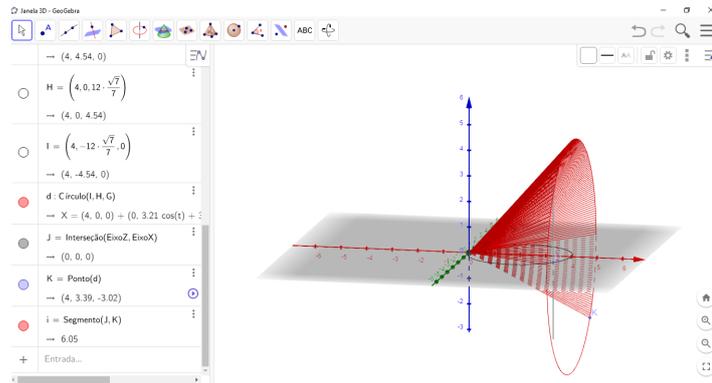
que aparecerá  $(4, \frac{12\sqrt{7}}{7}, 0)$ ,  $(4, 0, \frac{12\sqrt{7}}{7})$  e  $(5, -\frac{12\sqrt{7}}{7}, 0)$ .

b) Construiremos uma circunferência passando por esses três pontos e depois omitimos os pontos.

c) Construiremos um segmento de reta com extremos na origem e um ponto sobre a circunferência.

d) No segmento fazemos as seguintes ações: ativemos *o rastro* diminuímos a *espessura trocamos de cor*.

e) Sendo  $K$  o ponto de interseção entre o segmento e a circunferência acionamos a *animação do ponto K*, deslocando-o sobre a circunferência e o rastro do segmento criará o cone.

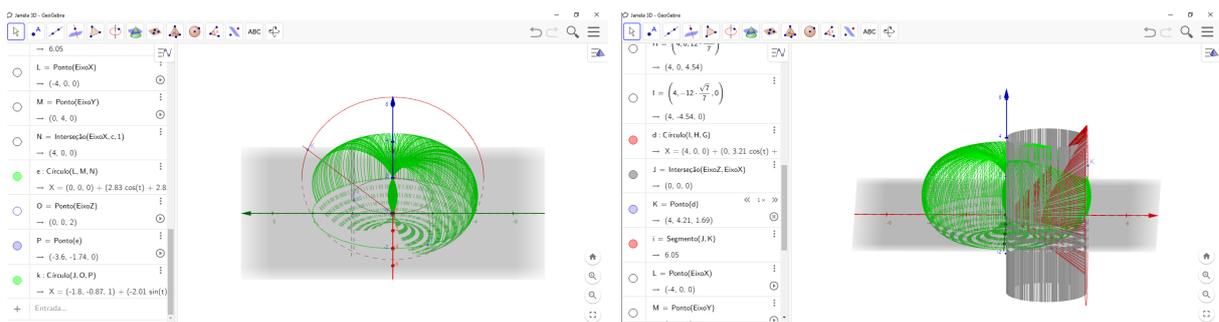
Figura 31 – Cone gerado pela rotação de uma reta entorno do eixo  $X$ 

Fonte: GeoGebra Classic 6 e autor, 2021

### 4.1.1 Construção do toro

4. O toro será gerado pela rotação de uma circunferência tangente ao eixo  $Z$ .

- Fazendo uso do comando *circunferência definido por três pontos*, clicamos nos pontos  $(-4, 0, 0)$ ,  $(0, 4, 0)$  e  $(4, 0, 0)$ , gerando a circunferência de centro na origem e raio 4.
- Similarmente com o comando *circunferência definido por três pontos*, clicamos nos pontos  $(0, 0, 0)$ ,  $(0, 0, 2)$  e um terceiro ponto pertencente à circunferência acima, com exceção de pontos sobre os eixos, geramos uma circunferência de centro  $(2, 0, 0)$ , raio 2.
- Finalmente ativamos o *rastro* da circunferência de raio 2, fazendo movimentar o ponto  $P$ , o qual pertence às duas circunferências. Desta forma, o rastro forma o toro.

Figura 32 – Toro gerado pela rotação de uma circunferência em torno do eixo  $Z$  - Interseção entre toro, cilindro e cone

Fonte: GeoGebra Classic 6 e autor, 2021

### 4.1.2 Máquina de Platão

1. Primeiro faremos a construção dos segmentos  $\overline{AO} = 2\overline{OB}$ ,  $\overline{ON} = \overline{OB}\sqrt[3]{2}$ ,  $\overline{OM} = \overline{OB}\sqrt[3]{4}$ , os quais irão satisfazer a propriedade da média proporcional e a duplicação do cubo. Os segmentos recebem nomes por exemplo  $\overline{AO} = a$ .
2. Consideremos os pontos  $A = (-\overline{AO}, 0)$ ,  $B = (0, -\overline{OB})$ ,  $N = (\overline{ON}, 0)$  e  $M = (0, \overline{OM})$ . Na *janela de álgebra* digitemos os seguintes segmentos com seus respectivos "nomes".
3. Marquemos um ponto  $G \neq N$  sobre o eixo  $OX$ , e depois movamos  $G$  até a posição  $N$ .
4. Tracemos uma semirreta  $b$  com origem em  $G$  e passando por  $B$ .
5. Tracemos uma reta  $c$  perpendicular a semirreta  $b$  passando por  $G$ .
6. Marquemos um ponto  $C$  sobre a reta  $c$  com ordenada positiva.
7. Na reta  $c$ , desmarquemos a opção de *exibir objeto* e tracemos uma semirreta  $d$  com origem em  $G$  e passando por  $C$ .
8. Tracemos uma reta  $f$  paralela a semirreta  $b$  passando por  $A$ , que intercepte  $d$  no ponto  $P$ .
9. Na reta  $f$ , desmarquemos a opção *exibir objeto* e tracemos uma semirreta  $g$  de origem em  $P$  passando por  $A$ .
10. Tracemos uma reta  $h$  perpendicular ao eixo  $OX$  passando por  $P$  e denotemos por  $R$  o pé desta perpendicular.
11. Para a reta  $h$ , desmarquemos *exibir objeto* e tracemos os segmentos  $OR$ ,  $PR$ ,  $AO$ ,  $OB$ ,  $ON$  e  $OM$ .
12. Agora colocaremos um botão de *iniciar e pausar*, da seguinte forma: na aba de *ferramentas*, que fica na parte superior do aplicativo, selecionemos a caixa *exibir/esconder objetos*. E na legenda demos um nome, por exemplo teste, que aparecerá na *janela de álgebra* como sendo uma letra minúscula por exemplo  $b$ .
13. Na sequência selecionemos a ferramenta *botão*. Preenchamos a legenda com *iniciar/pausar* e no código do GeoGebra digitemos o seguinte comando:  
`Se(b==true,DefinirValor(b,false),Definirvalor(b,true)),`  
 onde  $b$  corresponde a letra para exibir/esconder objetos dado no item anterior.

14. Sobre o botão feito no item anterior, cliquemos com botão *direito do mouse* e selecionemos *configuração*, na sequência *programação*, ao clicarmos e dentro da caixa digitemos o seguinte comando abaixo do primeiro comando:

IniciarAnimação(G,b).

1. Link de acesso da atividade dinâmica de Platão: [Dinâmica de Platão para a duplicação do cubo](#)
2. Link de acesso da atividade dinâmica de Apolônio, Herão e Filão: [Dinâmica de Apolônio, Herão e Filão para duplicação do cubo](#)



# Referências

- BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática**. Brasil: Brasília: MEC/sEF, 1997. 142 p.
- BURTON, D. M. **The history of mathematics: An introduction**. Mc Graw-Hill, 2011.
- CHAVES, E. O. C.; SETZER, V. W. **O uso de computadores em escolas: fundamentos e críticas**. São Paulo: Scipione Autores e Editores, 1987.
- DÖRRIE, H. **100 great problems of elementary mathematics**. New York: Courier Corporation, 2013.
- FARAGO, J. L. et al. **Do ensino da história da matemática à sua contextualização para uma aprendizagem significativa**. Florianópolis: Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico. Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção, 2003.
- HEATH, T. L. **A history of Greek mathematics**. Cambridge: Clarendon, 1921. v. 1.
- HEATH, T. L. et al. **The Thirteen Books of Euclid's Elements Translated from the Text of Heiberg with Introduction and Commentary**. Cambridge: Courier Corporation, 1956.
- LOCKWOOD, E. H. **A book of curves**. Cambridge: Cambridge University Press, 1961.
- LÜTZEN, J. **The Algebra of Geometric Impossibility: Descartes and Montucla on the Impossibility of the Duplication of the Cube and the Trisection of the Angle**. v. 52, n. 1, p. 4–37, 2010.
- MARTIN, G. E. **Geometric constructions**. New York: Springer Science & Business Media, 2012.
- NETO, A. C. M. **Geometria-Coleção Profmat**. Rio de Janeiro: SBM, 2013.
- REIS, G. dos; SILVA, V. da. **Geometria analítica**. Rio de Janeiro: LTC, 1985.



# Apêndices



# APÊNDICE A –

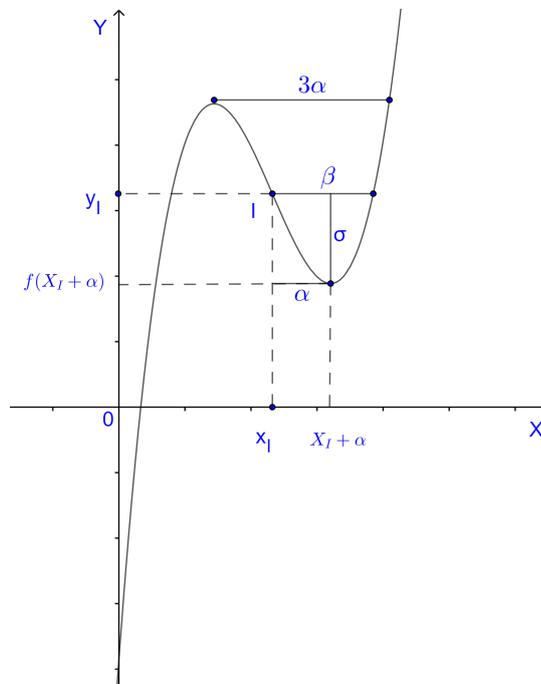
Neste apêndice, apresentaremos uma interpretação geométrica dos parâmetros de uma equação cúbica pelo método de Cardano.

## A.1 Método de Cardano através de parâmetros

A seguir apresentaremos o método de Cardano através de parâmetros para solução de equações cúbicas completas. Em termos gerais, vimos que o tema sobre a duplicação do cubo recaiu na resolução de uma equação cúbica. Assim, mostraremos como encontrar uma solução para esse tipo de equação envolvendo radicais, utilizando o método desenvolvido por Cardano. Para tal efeito, utilizaremos cinco parâmetros cada um com uma interpretação geométrica.

A partir do seguinte gráfico de uma cúbica, chamaremos *ponto de inflexão* o ponto de simetria da cúbica  $I = (x_I, y_I)$ , isto é, um ponto sobre curva onde ocorre mudança de curvatura, de côncava para cima para concavidade para baixo, ou vice-versa.

Figura 33 – Gráfico de Cúbica no Método de Cardano



Fonte: Adaptado de Feynman (1993, p. 1)

Na equação  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ , faremos uma mudança de variável  $x = y + x_I$ ,

com o fim de estudar o coeficiente do termo de segundo grau,

$$a(y + x_I)^3 + b(y + x_I)^2 + c(y + x_I) + d = 0,$$

desenvolvendo os termos e reorganizando em potência decrescente de  $y$ , temos

$$\begin{aligned} a(y^3 + 3y^2x_I + 3yx_I^2 + x_I^3) + b(y^2 + 2yx_I + x_I^2) + cy + cx_I + d &= 0 \\ ay^3 + y^2(3ax_I + b) + y(3ax_I^2 + 2bx_I + c) + ax_I^3 + bx_I^2 + cx_I + d &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Assim, para que o coeficiente de  $y^2$  se anular, devemos ter

$$3ax_I + b = 0, \quad \text{que é equivalente a } x_I = \frac{-b}{3a}.$$

Consideremos a equação  $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  avaliada em  $x_I$ , daí temos

$$y_I = a\left(\frac{-b}{3a}\right)^3 + b\left(\frac{-b}{3a}\right)^2 + c \cdot \left(\frac{-b}{3a}\right) + d, \quad \text{ou seja, } y_I = -\frac{b^3}{27a^2} + \frac{b^3}{9a^2} - \frac{bc}{3a} + d,$$

simplificando, temos que

$$y_I = \frac{2b^3}{27a^2} - \frac{bc}{3a} + d$$

Se substituirmos  $x = x_I + \alpha$  na função  $y = f(x)$ , observamos na figura A.1 que

$$f(x_I + \alpha) = y_I - \sigma, \quad \text{isto é,}$$

$$a\left(\alpha - \frac{b}{3a}\right)^3 + b\left(\alpha - \frac{b}{3a}\right)^2 + c\left(\alpha - \frac{b}{3a}\right) + d = \frac{2b^3}{27a^2} - \frac{bc}{3a} + d - \sigma.$$

Desenvolvendo os termos e cancelando  $d$  em ambos membros, segue-se

$$a\left(\alpha^3 - \frac{b\alpha^2}{a} + \frac{b^2\alpha}{3a^2} - \frac{b^3}{27a^3}\right) + b\left(\alpha^2 - \frac{2b\alpha}{3a} + \frac{b^2}{9a^2}\right) + c\left(\alpha - \frac{b}{3a}\right) = \frac{2b^3}{27a^2} - \frac{bc}{3a} - \sigma.$$

Simplificando os termos do membro esquerdo, obtém-se

$$a\alpha^3 + \alpha\left(c - \frac{b^2}{3a}\right) + \frac{2b^3}{27a^2} - \frac{bc}{3a} = \frac{2b^3}{27a^2} - \frac{bc}{3a} - \sigma,$$

que equivale a

$$\sigma = \alpha\left(\frac{b^2}{3a} - c\right) - a\alpha^3. \quad (\text{A.2})$$

Similarmente, se substituirmos  $x = x_I + \beta$  na função  $y = f(x) = y_I$ , podemos observar na figura A.1 que  $f(x_I + \beta) = y_I$ , logo

$$a\left(\beta - \frac{b}{3a}\right)^3 + b\left(\beta - \frac{b}{3a}\right)^2 + c\left(\beta - \frac{b}{3a}\right) + d = \frac{2b^3}{27a^2} - \frac{bc}{3a} + d$$

Desenvolvendo os termos e deixando o membro esquerdo em potência decrescente de  $\beta$ , temos as seguintes equações

$$a \left( \beta^3 - \frac{b\beta^2}{a} + \frac{b^2\beta}{3a^2} - \frac{b^3}{27a^3} \right) + b \left( \beta^2 - \frac{2b\beta}{3a} + \frac{b^2}{9a^2} \right) + c \left( \beta - \frac{b}{3a} \right) = \frac{2b^3}{27a^2} - \frac{bc}{3a}.$$

$$a\beta^3 + \beta \left( c - \frac{b^2}{3a} \right) + \frac{2b^3}{27a^2} - \frac{bc}{3a} = \frac{2b^3}{27a^2} - \frac{bc}{3a}.$$

Segue daí

$$a\beta^3 + \beta \left( c - \frac{b^2}{3a} \right) = 0, \quad \text{que equivale a, } \beta \left( \beta^2 + c - \frac{b^2}{3a} \right) = 0,$$

assim,  $\beta = 0$  ou o  $\beta^2 + c - \frac{b^2}{3a} = 0$ . Portanto,

$$\beta^2 = \frac{b^2 - 3ac}{3a^2} = 3 \left( \frac{b^2 - 3ac}{9a^2} \right) = 3\alpha^2, \quad \text{ou seja, } \alpha^2 = \frac{b^2 - 3ac}{9a^2}$$

Reescrevendo (A.2) e substituindo  $\alpha^2$ , temos

$$\begin{aligned} \sigma &= \alpha \left( \frac{b^2}{3a} - c - a\alpha^2 \right) = \alpha \left( \frac{b^2}{3a} - c - a \cdot \frac{b^2 - 3ac}{9a^2} \right) = \alpha \left( \frac{3ab^2 - 9a^2c - ab^2 + 3a^2c}{9a^2} \right) \\ &= \alpha \left( \frac{2ab^2 - 6a^2c}{9a^2} \right) = 2a\alpha \left( \frac{b^2 - 3ac}{9a^2} \right). \end{aligned}$$

Resultando em

$$\sigma = 2a\alpha^3. \tag{A.3}$$

Calculando o quadrado de  $\sigma$  e substituindo o valor de  $\alpha^2$ , segue

$$\sigma^2 = (2a\alpha^3)^2 = 4a^2\alpha^6, \quad \text{que equivale a, } \sigma^2 = 4a^2 \left( \frac{b^2 - 3ac}{9a^2} \right)^3.$$

Desenvolvendo os termos

$$\sigma^2 = 4a^2 \left( \frac{b^6 - 9b^4ac + 27a^2b^2c^2 - 27a^3c^3}{729a^6} \right),$$

segue

$$\sigma^2 = \frac{4b^6}{729a^4} - \frac{4b^4c}{81a^3} + \frac{4b^2c^2}{27a^2} - \frac{4c^3}{27a}. \tag{A.4}$$

Desta forma, os parâmetros  $\beta$  e  $\sigma$  ficam em função de  $\alpha$ . Agora, consideramos a equação  $ax^3 + 3b_1x^2 + 3c_1x + d = 0$  e substituindo  $x = y - \frac{b_1}{a}$ , com o objetivo de anular  $y^2$ .

$$a \left( y - \frac{b_1}{a} \right)^3 + 3b_1 \left( y - \frac{b_1}{a} \right)^2 + 3c_1 \left( y - \frac{b_1}{a} \right) + d = 0,$$

desenvolvendo os termos em potência de  $y$ , temos

$$ay^3 + y \left( 3c_1 - \frac{3b_1^2}{a} \right) + \frac{2b_1^3}{a^2} - \frac{3b_1c_1}{a} + d = 0 \quad \text{que equivale a}$$

$$ay^3 + \frac{3y}{a} (ac_1 - b_1^2) + \frac{2b_1^3 - 3ab_1c_1 + a^2d}{a^2} = 0.$$

Tomando  $E = ac_1 - b_1^2$  e  $F = a^2d - 3ab_1c_1 + 2b_1^3$ , ainda podemos reescrever  $F$  por

$$F = a^2 \left( \frac{2b_1^3}{a^2} - \frac{3b_1c_1}{a} + d \right).$$

Comparando os termos de  $y_I$  com os de  $F$ , obtemos  $\frac{b^3}{27} = b_1^3$ , do qual seguem  $b_1 = \frac{b}{3}$  e  $c_1 = \frac{c}{3}$ . Substituindo esses valores em  $F$ , temos

$$F = a^2 \left( \frac{2b^3}{27a^2} - \frac{bc}{3a} + d \right) = a^2 y_I, \text{ de onde } F^2 = a^4 y_I^2.$$

Calculando o valor de  $E$ , em função de  $b$  e  $c$ , temos

$$E = a \cdot \frac{c}{3} - \left( \frac{b}{3} \right)^2 \text{ que equivale a } E = \frac{ac}{3} - \frac{b^2}{9}.$$

Daí,

$$E^3 = \left( \frac{ac}{3} - \frac{b^2}{9} \right)^3, \text{ ou seja, } E^3 = \frac{a^3c^3}{27} - \frac{a^2b^2c^2}{27} + \frac{ab^4c}{81} - \frac{b^6}{729}.$$

Determinando  $F^2 + 4E^3$  e fatorando  $a^4$ , temos as seguintes equações

$$\begin{aligned} F^2 + 4E^3 &= a^4 y_I^2 + \frac{4a^3c^3}{27} - \frac{4a^2b^2c^2}{27} + \frac{4ab^4c}{81} - \frac{4b^6}{729} \\ &= a^4 \left( y_I^2 + \frac{4c^3}{27a} - \frac{4b^2c^2}{27a^2} + \frac{4b^4c}{81a^3} - \frac{4b^6}{729a^4} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Substituindo a equação (A.5) na equação (A.4), obtemos

$$F^2 + 4E^3 = a^4 (y_I^2 - \sigma^2) \quad (\text{A.6})$$

Agora, substituindo o valor de  $x_I$  na equação (A.1)

$$ay^3 + y \left[ 3a \left( \frac{-b}{3a} \right)^2 + 2b \left( \frac{-b}{3a} \right) + c \right] + a \left( \frac{-b}{3a} \right)^3 + b \left( \frac{-b}{3a} \right)^2 + c \left( \frac{-b}{3a} \right) + d = 0,$$

simplificando e substituindo  $y_I$ , temos as seguintes equações:

$$ay^3 + y \left( -\frac{b^2}{3a} + c \right) + \frac{2b^3}{27a^2} - \frac{bc}{3a} + d = 0,$$

$$ay^3 + y \left( \frac{-b^2 + 3ac}{3a} \right) + y_I = 0, \text{ que equivale a } ay^3 - 3ay \left( \frac{-b^2 + 3ac}{9a^2} \right) + y_I = 0$$

Substituindo  $\alpha^2$ , obtemos

$$ay^3 - 3a\alpha^2 y + y_I = 0 \quad (\text{A.7})$$

Por outro lado, suponhamos que  $y = r + s$  seja a solução da equação (A.7), logo,

$$\begin{aligned} a(r+s)^3 - 3a\alpha^2(r+s) + y_I &= 0 \\ a(r^3 + 3r^2s + 3rs^2 + s^3) - 3a\alpha^2r - 3a\alpha^2s + y_I &= 0 \\ a(r^3 + s^3) + 3ars(r+s) - 3a\alpha^2(r+s) + y_I &= 0 \\ a(r^3 + s^3) + y_I + (r+s)(3ars - 3a\alpha^2) &= 0 \end{aligned}$$

Estudando a última equação, podemos ter as seguintes equações

$$a(r^3 + s^3) + y_I = 0 \quad \text{ou} \quad 3ars - 3a\alpha^2 = 0.$$

Daí, teremos

$$r^3 + s^3 = -\frac{y_I}{a} \quad \text{e} \quad rs = \alpha^2.$$

Elevando ao cubo ambos os membros da última equação temos  $r^3s^3 = \alpha^6$ . Observemos que, se  $r^3$  e  $s^3$  fossem as raízes de uma equação do segundo grau, então  $r^3 + s^3$  representa a soma das raízes e  $r^3s^3$  o produto. Denotamos por  $S$  a soma e  $P$  o produto das raízes, assim usando a equação do segundo grau escrita em função da soma e produto de raízes, temos

$$y^2 - Sy + P = 0.$$

Substituindo os valores da soma e produto e aplicando o processo de Baskara, temos

$$y^2 + \frac{y_I}{a}y + \alpha^6 = 0.$$

$$y = \frac{-\frac{y_I}{a} \pm \sqrt{\frac{y_I^2}{a^2} - 4 \cdot 1 \cdot \alpha^6}}{2 \cdot 1} = \frac{-y_I \pm \sqrt{y_I^2 - 4a^2\alpha^6}}{2a}.$$

Sabemos da equação (A.3), que o quadrado de  $\alpha$  é  $\sigma^2 = 4a^2\alpha^6$ . Substituindo  $\sigma^2$  e  $y = r^3$ , numa das soluções encontradas por Baskara, obtemos

$$r^3 = \frac{1}{2a} \left\{ -y_I + \sqrt{y_I^2 - \sigma^2} \right\}.$$

Segue daí,

$$r = \sqrt[3]{\frac{1}{2a} \left( -y_I + \sqrt{y_I^2 - \sigma^2} \right)}.$$

E, de modo análogo, para a outra solução

$$s = \sqrt[3]{\frac{1}{2a} \left( -y_I - \sqrt{y_I^2 - \sigma^2} \right)}.$$

Agora, substituindo os valores de  $r$  e  $s$  em  $y$ , obtemos

$$y = \sqrt[3]{\frac{1}{2a} \left( -y_I + \sqrt{y_I^2 - \sigma^2} \right)} + \sqrt[3]{\frac{1}{2a} \left( -y_I - \sqrt{y_I^2 - \sigma^2} \right)}$$

Por outro lado, suponhamos que  $x'$ ,  $x''$  e  $x'''$  sejam as raízes de  $f(x)$ , assim  $x' = y' + x_I$ ,  $x'' = y'' + x_I$  e  $x''' = y''' + x_I$ . Notemos que,  $\sqrt{y_I^2 - \sigma^2} = \sqrt{(y_I + \sigma)(y_I - \sigma)} = \sqrt{y_{v_1}y_{v_2}}$ , onde  $y_{v_1} = y_I + \sigma$  e  $y_{v_2} = y_I - \sigma$ , sendo as ordenadas do ponto onde muda a direção.

Observemos que,  $F = a^2y_I$ , de onde segue que  $y_I = \frac{F}{a^2}$ . Da equação (A.6), encontramos que  $y_I^2 - \sigma^2 = \frac{F^2 + 4E^3}{a^4}$ . Substituindo essas duas últimas expressões em  $y$ , temos

$$y = \frac{1}{2a} \left( -\frac{F}{a^2} \pm \sqrt{\frac{F^2 + 4E^3}{a^4}} \right) \quad \text{que equivale a} \quad y = \frac{1}{2a^3} \left( -F \pm \sqrt{F^2 + 4E^3} \right).$$

Assim, vemos que, o radicando da raiz quadrada pode ser escrito em função de  $y_I^2 - \sigma^2$  ou  $y_{v_1}y_{v_2}$  ou  $F^2 + 4E^3$ . Usaremos  $\delta_3 = (y_{v_1})(y_{v_2}) = y_I^2 - \alpha^2 = F^2 + 4E^3$  para denotar o discriminante da cúbica.

Voltando do ponto de vista geométrico da figura A.1 mostraremos que o resto da solução depende de sinal do discriminante assim:  $y_I^2 - \alpha^2 > 0$  uma raiz real,  $y_I^2 - \alpha^2 = 0$  três raízes reais (duas ou três iguais),  $y_I^2 - \alpha^2 < 0$  três raízes distintas. Analisaremos cada caso

- $y_I^2 > \sigma^2$  e também  $y_{v_1}y_{v_2} > 0$  ou  $F^2 + 4E^3 > 0$ , com isso a função tem uma raiz real, veja a figura A.1

Logo,  $x' = y + x_I$ , será

$$x' = x_I + \sqrt[3]{\frac{1}{2a} \left( -y_I + \sqrt{y_I^2 - \sigma^2} \right)} + \sqrt[3]{\frac{1}{2a} \left( -y_I - \sqrt{y_I^2 - \sigma^2} \right)}$$

- $y_I^2 = \sigma^2$  e também  $y_{v_1}y_{v_2} = 0$  ou  $F^2 + 4E^3 = 0$

Para  $\sigma \neq 0$ , a função tem duas raízes iguais  $x_I + \alpha$  e a terceira raiz sendo  $x_I - 2\alpha$ . Daí, as raízes são  $x_I + \alpha$ ,  $x_I + \alpha$  e  $x_I - 2\alpha$ . Substituindo  $x_I + \alpha$  em  $x'$ , e eliminando a raiz quadrada, temos

$$\alpha = -2\sqrt[3]{\frac{y_I}{2a}}.$$

Se  $\sigma = 0$ , então  $y_I = 0$ , logo  $\alpha = 0$ , assim  $x' = x_I$ , ou seja a função tem três raízes iguais.

- $y_I^2 < \sigma^2$  e também  $y_{v_1}y_{v_2} < 0$  ou  $F^2 + 4E^3 < 0$ .

É claro, da figura A.1, que existem três raízes reais distintas, neste caso.

Utilizando a trigonometria para auxiliar na resolução, pois devemos calcular raízes cúbicas de números complexos. Fazendo a substituição  $y = 2\alpha\cos\varphi$  em  $ay^3 - 3ay\alpha^2 + y_I = 0$ , e fatorando  $2a\alpha^3$ , temos as seguintes equações

$$a(2\alpha\cos\varphi)^3 - 3a \cdot 2\alpha\cos\varphi \cdot \alpha^2 + y_I = 0 \quad \text{e} \quad 2a\alpha^3 (4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi) + y_I = 0.$$

E sabendo que  $\sigma = 2a\alpha^3$  e  $\cos 3\varphi = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi$ , segue

$$y_I = -\sigma \cos 3\varphi.$$

Logo,

$$y_I^2 - \sigma^2 = (-\sigma \cos 3\varphi)^2 - \sigma^2 = \sigma^2 (\cos^2 3\varphi - 1) = \sigma^2 (-\sin^2 3\varphi) = -\sigma^2 \sin^2 3\varphi.$$

Substituindo  $y_I^2 - \sigma^2$  em  $x'$  e sabendo que  $i^2 = -1$ , obtemos

$$\begin{aligned} x' &= x_I + \sqrt[3]{\frac{1}{2a} \left( \sigma \cos 3\varphi + \sqrt{i^2 \sigma^2 \sin^2 3\varphi} \right)} + \sqrt[3]{\frac{1}{2a} \left( \sigma \cos 3\varphi - \sqrt{i^2 \sigma^2 \sin^2 3\varphi} \right)} \\ x' &= x_I + \sqrt[3]{\frac{1}{2a} (\sigma \cos 3\varphi + i\sigma \sin 3\varphi)} + \sqrt[3]{\frac{1}{2a} (\sigma \cos 3\varphi - i\sigma \sin 3\varphi)} \\ x' &= x_I + \sqrt[3]{\frac{\sigma}{2a} (\cos 3\varphi + i \sin 3\varphi)} + \sqrt[3]{\frac{\sigma}{2a} (\cos 3\varphi - i \sin 3\varphi)}. \end{aligned}$$

Substituindo  $\sigma = 2a\alpha^3$ , segue

$$x' = x_I + \sqrt[3]{\frac{2a\alpha^3}{2a} (\cos 3\varphi + i \sin 3\varphi)} + \sqrt[3]{\frac{2a\alpha^3}{2a} (\cos 3\varphi - i \sin 3\varphi)}.$$

ou seja,

$$x' = x_I + \alpha \sqrt[3]{\cos 3\varphi + i \sin 3\varphi} + \alpha \sqrt[3]{\cos 3\varphi - i \sin 3\varphi}.$$

Usando a fórmula de Moivre, obtemos

$$x' = x_I + \alpha \left( \cos \left( \frac{3\varphi + 2k\pi}{3} \right) + i \sin \left( \frac{3\varphi + 2k\pi}{3} \right) \right) + \alpha \left( \cos \left( \frac{3\varphi + 2k\pi}{3} \right) - i \sin \left( \frac{3\varphi + 2k\pi}{3} \right) \right)$$

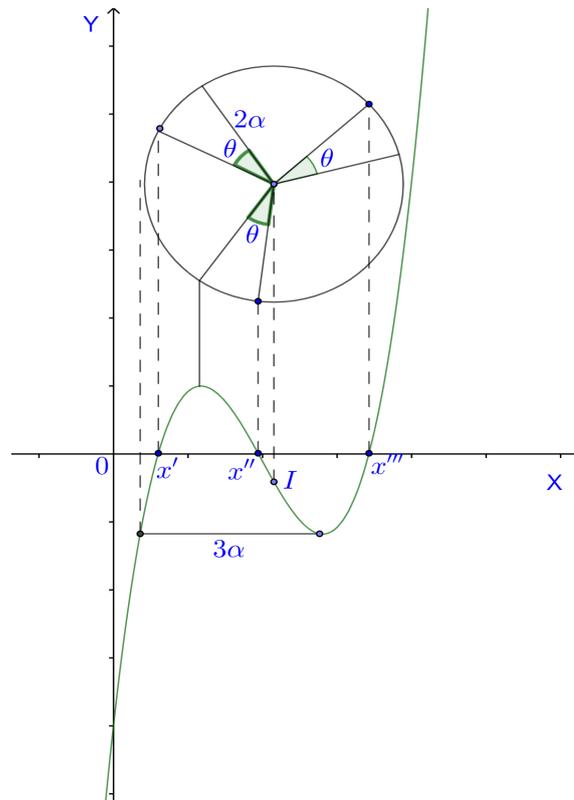
Com  $k = 0, 1, 2$ . Daí, para  $k = 0$ , temos

$$x' = x_I + \alpha (\cos \varphi + i \sin \varphi) + \alpha (\cos \varphi - i \sin \varphi) = x' = x_I + 2\alpha \cos \varphi.$$

Analogamente, para  $k = 1, 2$

$$x'' = x_I + 2\alpha \cos \left( \varphi + \frac{2\pi}{3} \right) \quad e \quad x''' = x_I + 2\alpha \cos \left( \varphi + \frac{4\pi}{3} \right)$$

As raízes são mostradas na figura A.1 em relação a uma circunferência de raio  $2\alpha$  e centrada acima do ponto  $N$ .

Figura 34 – Relação das raízes em uma circunferência de raio  $2\alpha$ 

Fonte: Adaptado de Feynman (1993, p.6)

Ilustraremos o método com o seguinte exemplo.

**Exemplo A.1.** *Determine as raízes da função  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ . Primeiro vamos determinar os parâmetros  $x_I$ ,  $y_I$ ,  $\alpha$  e  $\sigma$*

$$x_I = -\frac{b}{3a} = -\frac{(-6)}{3 \cdot 1} = 2 \quad e \quad y_I = f(x_I) = 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 11 \cdot 2 - 6 = 0.$$

Logo,  $x_I$  é uma raiz da função.

$$\alpha^2 = \frac{b^2 - 3ac}{9a^2} = \frac{(-6)^2 - 3 \cdot 11}{9 \cdot 1^2} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \quad \text{portanto,} \quad \alpha = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Determinando o valor de  $\sigma$

$$\sigma = 2a\alpha^3 = 2 \cdot 1 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3 = \frac{2\sqrt{3}}{9}$$

Por outro lado,

$$\cos 3\varphi = -\frac{y_I}{\sigma} = \frac{0}{\frac{2\sqrt{3}}{9}} = 0,$$

assim,  $3\varphi = \cos^{-1}(0) = 90^\circ$ , logo  $\varphi = 30^\circ$ . Daí, vemos que

$$x' = x_I + 2\alpha \cos \varphi = 2 + 2 \frac{\sqrt{3}}{3} \cos 30^\circ = 2 + 2 \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2 + 1 = 3.$$

Calculando  $x''$ ,

$$x'' = x_I + 2\alpha \cos(\varphi + 120^\circ) = 2 + 2\frac{\sqrt{3}}{3} \cos 150^\circ = 2 + 2\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot -\frac{\sqrt{3}}{2} = 2 - 1 = 1.$$

Finalmente, calculando  $x'''$ ,

$$x''' = x_I + 2\alpha \cos(\varphi + 240^\circ) = 2 + 2\frac{\sqrt{3}}{3} \cos 270^\circ = 2 + 2\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 0 = 2$$