UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

ANA MARIA PINHEIRO

ABORDAGEM DAS FUNÇÕES EXPONENCIAL E LOGARÍTMICA NO ENSINO MÉDIO E SUPERIOR

FORTALEZA
2021

ANA MARIA PINHEIRO

ABORDAGEM DAS FUNÇÕES EXPONENCIAL E LOGARÍTMICA NO ENSINO MÉDIO E SUPERIOR

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática. Área de Concentração: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo

FORTALEZA

2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

P718a Pinheiro, Ana Maria.
Abordagem das funções exponencial e logarítmica no ensino médio e superior. / Ana Maria Pinheiro. – 2021.
72 f. : il.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2021.
Orientação: Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo.

1. Função Exponencial. Função Logarítmica. Ensino Médio. Ensino Superior.. I. Título.
CDD 510

ANA MARIA PINHEIRO

ABORDAGEM DAS FUNÇÕES EXPONENCIAL E LOGARÍTMICA NO ENSINO MÉDIO E SUPERIOR

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática. Área de Concentração: Matemática

Aprovada em: 30 de abril de 2021.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Marcos Ferreira de Melo
Universidade Federal de Ceará(UFC)

Prof. Dr. Angelo Papa Neto
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE)

À minha família, por sua capacidade de acreditar e investir em mim. Ao meu esposo, pela orientação e ajuda nas horas difíceis.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a Deus por ter me dado saúde e força para concluir os meus estudos.

Aos meus pais, Aneildo (*in memoriam*) e Rosilene, que sempre acreditaram no poder dos estudos e me incentivaram sempre neste caminho. Infelizmente meu pai não está aqui para ver minha conclusão; ofereço esta dissertação em homenagem a ele.

Ao meu esposo, Antonio Carlos, que teve uma participação enorme neste trabalho e por entender a minha ausência devido as muitas horas dedicadas aos estudos.

Ao meu irmão, Mateus, pelo incentivo e apoio.

Aos meus colegas de turma do PROFMAT pelas dificuldades compartilhadas e os momentos alegres vivenciados. Em especial ao Gleison, que me ajudou nas horas difíceis, pelo incentivo e apoio.

Aos meus colegas da EEFM Professora Adélia Brasil Feijó, que fazem parte do Núcleo Gestor, Cláudio, Ludemberg e Evanildo pela compreensão da minha ausência no trabalho.

Ao Prof. Dr. Marcelo Melo por me orientar e pela paciência em minha dissertação do mestrado.

A todos os professores do PROFMAT da UFC pelo aprendizado proporcionado.

Aos membros da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) que juntamente com as universidades conveniadas podem oferecer um mestrado nos moldes do PROFMAT, dando a milhares de professores deste país a oportunidade de realizar um curso de mestrado.

"A Matemática é a única linguagem que temos em comum com a natureza."

(HAWKING)

RESUMO

Esta dissertação tem como finalidade estudar uma abordagem metodológica das Funções Exponencial e Logarítmica numa perspectiva conceitual e gráfica no ensino médio e superior. Tendo como objetivo analisar as abordagens dessas funções feitas no ensino médio e superior. Primeiramente, mostraremos uma breve história sobre o surgimento das funções exponenciais e logarítmicas, criadas para simplificar os cálculos e para melhor entender suas aplicações. Em seguida, faremos um estudo das definições, propriedades, teoremas e demonstrações dessas funções no ensino médio e superior. Para finalizar este estudo, foram destacadas algumas aplicações sobre as funções exponenciais e logarítmicas.

Palavras-chave: função exponencial; função logarítmica; ensino médio; ensino superior.

ABSTRACT

This dissertation aims to study a methodological approach of Exponential and Logarithmic Functions in a conceptual and graphic perspective in secondary and higher education. Aiming to analyze the approaches made in secondary and higher education of exponential and logarithmic functions. First, we'll show a brief history of the emergence of exponential and logarithmic functions, created to simplify calculations and to better understand their applications. Then, we will study the definitions, properties, theorems and demonstrations of these functions in secondary and higher education. To finish this study, some applications on exponential and logarithmic functions were highlighted.

Keywords: exponential function; logarithmic function; high school; university education.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A proposta deste trabalho é analisar a abordagem feita no ensino médio e superior, sobre funções exponenciais e logarítmicas.

No capítulo 2, faremos um breve histórico sobre a origem dos exponenciais e logaritmos, que contribuíram para o desenvolvimento da matemática, citando alguns dos iniciadores desse processo: John Napier, Jost Burgi e outros responsáveis.

Já no capítulo 3, abordaremos o ensino das funções exponenciais e logaritmos no ensino médio. Iniciaremos com uma breve revisão de potências; em seguida, realizaremos um estudo sobre essas funções, suas definições,propriedades,gráficos, teoremas e algumas demonstrações.

No capítulo 4, abordaremos o ensino dessas funções no ensino superior. Iniciando com a definição de função logaritmo como integral definida. Serão exploradas definições, propriedades, teoremas e algumas demonstrações envolvendo funções logaritmos e exponenciais naturais (de base e) e geral(base a).

Concluindo, no capitulo 5, serão abordadas as aplicações clássicas que envolvem essas funções.

2 ABORDAGEM HISTÓRICA

As funções exponencial e logarítmica surgiram na época das grandes navegações com a necessidade de simplificação de cálculos aritméticos com multiplicação, divisão e potência com expoentes racionais. Neste capítulo será realizado um estudo do desenvolvimento histórico das funções logarítmica e exponencial, mas para isso primeiramente iniciaremos nosso estudo com uma breve abordagem histórica sobre função.

2.1 Um pouco de história: funções

Observando o trajeto histórico apresentado até aqui, vimos que a matemática teve sua evolução atrelada à de outras ciências. Nos séculos XVI e XVII, já na Idade Moderna, houve uma grande expansão de conhecimento cientifico e tecnológico de diversas áreas como geografia, cartografia, astronomia e física, que muito contribuiu para que conceitos e teorias matemáticas surgissem e fossem então estabelecidas.

Um desses conceitos,que sofreu uma grande evolução ao longo dos séculos, é o de função,consolidando-se como um dos mais importantes da matemática.

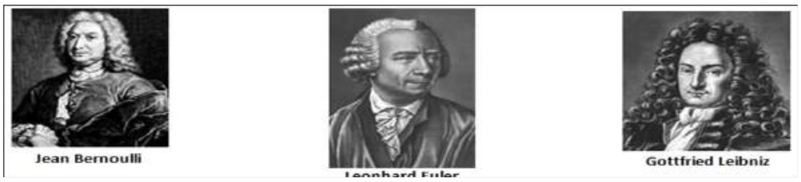
Esse conceito matemático surgiu no século XVII e está conectado com o desenvolvimento do cálculo. Foram com os trabalhos de Newton(1642-1722) e Leibniz(1646-1716) que surgiram as primeiras contribuições efetivas para o delineamento desse conceito.

O primeiro a citar o conceito foi o inglês Isaac Newton (1642-1727). Todavia, ele deu um nome um tanto quanto confuso para as suas ideias: ”fluente” e ”fluxões”. Newton também descrevia ”relatia quantias”, como a variável dependente e a ”genita”, como a quantidade obtida a partir de outras, utilizando as quatro operações fundamentais. De fato, o conceito apresentado por Newton era bem similar com o que usamos atualmente.

Apropriando-se das teorias de Newton, o matemático alemão Wilhelm von Leibniz (1646 - 1716), demonstrou pela primeira fez a aplicação do conceito de função, em 1673, no manuscrito, em latim, ”Methodus tangentium inversa, seu de fuctionibus”. Leibniz usou o termo apenas para designar, em termos gerais, a dependência de uma curva de quantidades geométricas, como as subtangentes e subnormais.Introduziu também a terminologia de constante, variável e parâmetro.

No século XVIII, Jean Bernoulli, matemático suíço (1667-1748) utilizou o termo função, assim designando os valores obtidos por operações entre variáveis e constantes. Ainda no século XVIII, Leonhard Euler (1707-1783) fez uso da notação atual, mas foi Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) quem criou o termo função.

Figura 1 – Figuras importantes na história matemática

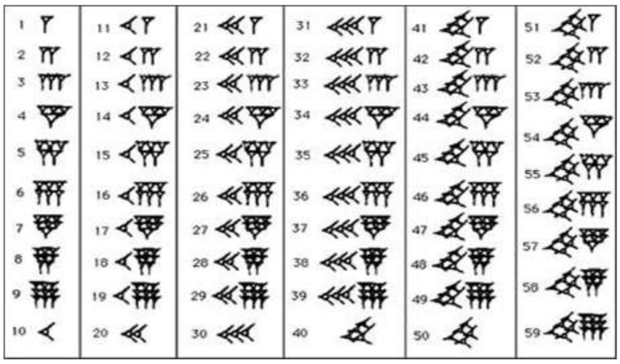


Fonte: https://www.infoescola.com/matematica/aspectos-historicos-sobre-funcao-matematica/

2.2 Função exponencial

A história das Funções Exponenciais inicia pelos Babilônicos, em função de deterem uma primeira forma de registro em tabletas de argila. Os babilônicos utilizavam um sistema sexagesimal, de base 60, e até hoje permanecem restos deste sistema como, por exemplo: as unidades de tempo e medida dos ângulos.

Figura 2 – Numeração Babilônica



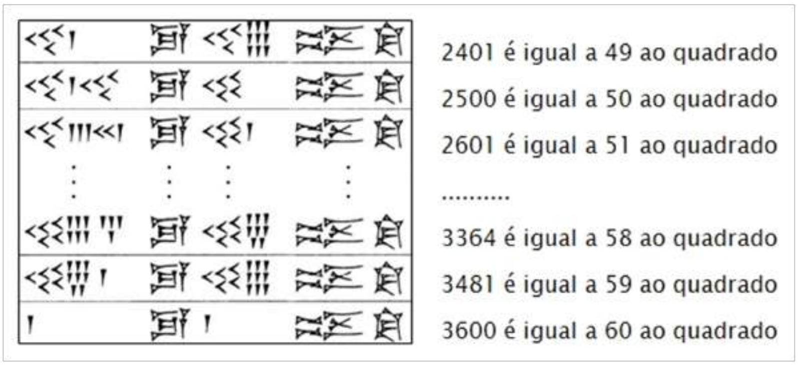
Fonte: https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/sistema-numeracao-babilonico.htm

De acordo com Eves (1953), muitas tabletas foram encontradas, sendo que cerca da metade eram tabletas matemáticas que envolviam multiplicação, inversos multiplicativos, quadrados, cubos e até mesmo exponenciais.

Na verdade, uma boa parte das tabletas encontradas são "textos tabelas". Entre as tabelas babilônicas encontram-se tabelas contendo potências sucessivas de um dado número, semelhante às nossas tabelas de logaritmos atuais. Essas potências podem ser conferidas em uma antiga tábua de argila conhecida como tabuinha de Larsa.

De acordo com Boyer (1994), tabelas exponenciais foram encontradas em que são dadas as dez primeiras potências para bases diferentes. Continha vários problemas escritos, um

Figura 3 – Placa de Larsa-Extraido de Fauvel,1987



Fonte: http://lianamatematica.blogspot.com/2013/05/potenciacao.html

desses problemas é: a que potencia se deve elevar certo número dado para que se obtenha um determinado número como base. O método que eles usaram é conhecido como interpolação linear, o que pode ser percebido num problema encontrado em uma tableta. O problema pergunta quanto tempo levaria certa quantia em dinheiro para dobrar, a 20% ao ano.

> A resposta dada é 3;47,13,20. Parece inteiramente claro que o escriba usou interpolação linear entre os valores para (1,12)3 e (1,12)4, usando a fórmula para juros compostos a = P.(1+ r)n , onde r é 20 por cento ou 12/60, e tirando valores de uma tabela exponencial com potências de 1;12. (BOYER, 1974, p.21).

É notado em seu sistema sexagesimal, o grande domínio dos babilônicos nas operações de equações exponenciais e logaritmos, apesar deles não terem constituídos.

Mas foi com Arquimedes de Siracusa (287 a.C-212a.C.), que as potenciações tiveram seus cálculos mais significativos. Na sua obra Psammites (O Contador de Grãos de Areia), criou um sistema de numeração especialmente destinado a exprimir números muito grandes, como o dos grãos de areia necessários a preencher uma esfera de raio igual à distância entre a Terra e o Sol.

> Arquimedes mencionou, muito incidentalmente, o princípio que mais tarde levou à invenção dos logaritmos - a adição das *ordens* dos números (o equivalente de seus expoentes quando a base é 100.000.000) corresponde a achar o produto dos números. (BOYER, 1974, p.86)

Foi em conexão com esse trabalho sobre números imensos que Arquimedes mencionou, muito acidentalmente, o princípio que mais tarde levou à invenção dos logaritmos- a adição das "ordens"dos números (o equivalente de seus expoentes quando a base é 100.000.000) corresponde a achar o produto dos números.

Na França, em 1484, uma obra de grande importância chamada Triparty en la science desnombres, de autoria de Nicolas Chuquet (1445-1488), fala da potência de quantidade desconhecida, uma notação exponencial de grande relevância, era representada por um expoente associado aos coeficientes dos termos. De modo que nossas expressões modernas 5x e $6x^2$ apareciam em Triparty como .5. e .6.^{2},respectivamente. E, expoentes zero e negativos, eram representados de forma que $9x^0$ ficava .9.^{0}. e $9x^{-2}$ era escrito como .9.^{2m}.

Chuquet escreveu, por exemplo, que $\frac{.72.^1}{.8.^3}$= .9.^{2m} ou em notação atual $\frac{72x}{8x^3}$=$9x^{-2}$

Chuquet também criou uma tabela como as potências de número dois, semelhante à tabela de logaritmos na base 2.

> Sua observação sobre relações entre as potências do número dois se relaciona com essas leis, os índices dessas potências sendo colocados em uma tabela de 0 a 20, em que as somas dos índices correspondem aos produtos das potências. Exceto por serem grandes as lacunas entre as colunas, isso seria uma tabela de logaritmos na base 2 em miniatura. Durante o século seguinte, observações semelhantes às de Chuquet seriam repetidas várias vezes, e certamente tiveram um papel na invenção dos logaritmos. (BOYER, 1974, p.190)

O matemático suíço Leonhard Euller(1707-1783) com seus estudos sobre o cálculo infinitesimal publicou Introductio in Analysin infinitorum , em 1748.É nessa obra que se encontram a famosa fórmula de Euler para a exponencial de um número imaginário puro, assim promovendo o desenvolvimento e consolidação das Funções Exponenciais.

2.3 Função logarítmica

Segundo Boyer (1994),um dos personagens mais importantes do século XVI, foi John Napier(1550-1617), que não era um matemático profissional.Era um proprietário escocês, barão de Murchiston, que administrava suas propriedades e escrevia sobre diversos assuntos. Napier só se interessava por certos assuntos da matemática, em especial, os que se referiam a cálculos numéricos e trigonometria.

Napier ficou conhecido como inventor do logaritmo quando, em 1614, em Edimburgo ,publicou o seu Mirifici logarithmorum canonis descriptio (Uma descrição da maravilhosa regra dos logaritmos-figura 1.4) que conteve uma descrição de logaritmos, um conjunto de tabelas, e regras para o uso dos mesmos.Ele trabalhou durante 20 anos no desenvolvimento desse conceito.

Napier criou a palavra LOGARITMO. A princípio ele chamou seus índices de potências de números artificiais, mas mais tarde ele fez a composição de duas palavras gregas, LOGOS (ou razão) e ARITHMOS (ou número).

Os logaritmos surgiram no começo do século XVII. A ideia básica era substituir operações mais complicadas, como multiplicação e divisão, por operações mais simples, como

Figura 4 – Capa do livro Logarithmorum canonis descriptiode John Napier

Fonte: https://www.alamy.es/imagenes/john-napier.html

adição e subtração. Até o século XVI muitos cálculos eram realizados usando fórmulas trigonométricas ou construindo tabelas trigonométricas. Uma bem conhecida na época de Napier, que possivelmente foi predecessora da ideia:

$$2cos(A)cos(B) = cos(A+B) + cos(A-B)$$

Neste caso, o produto de dois números 2cos(A)cos(B) é substituído pela soma de dois números, cos(A+B) e cos(A-B). Pode-se facilmente estender esta fórmula para converter o produto de dois números quaisquer na soma de dois outros números.

Outras fórmulas semelhantes também usadas foram as seguintes:

$$2sen(A)cos(B) = sen(A+B) + sen(A-B)$$

$$2cos(A)sen(B) = sen(A+B) - sen(A-B)$$

$$2sen(A)sen(B) = cos(A-B) + cos(A+B)$$

Essas fórmulas foram usadas como método de conversão de produtos em somas e diferenças. O método tornou-se conhecido como prostaférese, palavra grega que significa ”adição e subtração”.

Para eliminar as longas multiplicações e divisões, Napier usou uma abordagem considerada diferente da prostaférese, baseada no fato que, associando aos termos de uma sequência $(b^1, b^2, b^3, b^4, .., b^n)$, aos termos da sequência de naturais (1, 2, 3 ,4,. . . , n),de forma que o produto de dois termos quaisquer da primeira sequência, por exemplo, $b^x.b^y = b^{x+y}$ estivesse associado à soma x+y dos termos da segunda sequência. A fim de que os números da progressão geométrica estivessem bem próximos, para ser possível usar interpolação e preencher as lacunas entre os termos na correspondência estabelecida, evitando erros muito grosseiros, Napier escolheu para razão o número

$b = 1 - \frac{1}{10^7} = 0,9999999,$

que é bem próximo de 1. Segundo Eves (2008), para evitar decimais, ele multiplicava cada potência por 10^7. Então, se

$N = 10^7(1 - \frac{1}{10^7})^L,$

ele chamava L de "logaritmo"do número N. Assim, o logaritmo de Napier de 10^7 é 0 e o de $10^7(1 - \frac{1}{10^7}) = 0,9999999$ é 1.

Mexendo nessa equação, temos :

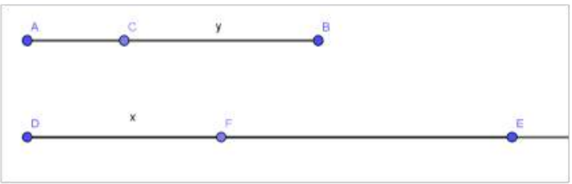
$\frac{N}{10^7} = (1 - \frac{1}{10^7})^L ou \frac{N}{10^7} = [(1 - \frac{1}{10^7})^{10^7}]^{\frac{L}{10^7}}$

e como (1-$\frac{1}{10^7})^{10^7}$ fica próximo de $\lim_{n\to\infty} = (1 + \frac{1}{n})^n = \frac{1}{e}$ e, teríamos no trabalho de Napier um sistema de logaritmos de base; $\frac{1}{e}$ se dividirmos o número e o logaritmo por 10^7.

De acordo com Boyer (1994), Napier não possuía o conceito de base de um sistema de logaritmos como atualmente, pois sua definição era diferente da atual, a ideia de Napier era geométrica como se segue:

Considere um segmento de reta AB e uma semirreta DE, de origem D, conforme a Figura .

Figura 5 – Segmento de reta AB e uma semirreta D



Fonte: Elaborada pela autora

Suponhamos que os pontos C e F se ponham em movimento simultaneamente a partir de A e D, respectivamente, ao longo dessas linhas, com a mesma velocidade inicial. Admitamos que C se mova com uma velocidade numericamente sempre igual à distância CB, e que F se mova com velocidade uniforme. Napier definiu então DF como o logaritmo de CB. Isto é, pondo $DF = x$ e $CB = y$. Para evitar o incômodo das frações, Napier tomou o comprimento de AB como 10^7, pois as melhores tábuas de senos de que dispunha estendiam-se até sete casas (EVES, 2008, p.180).

$x = Naplogy$.

Os logaritmos neperianos decrescem conforme os números crescem e nos logaritmos naturais acontece o inverso, portanto, os dois logaritmos não são iguais como muitas vezes se afirma. Na notação atual, o logaritmo neperiano possui a base $\frac{1}{e}$ e não e.

Segundo Eves (2008), Napier publicou sua abordagem dos logaritmos em 1614 num texto intitulado Mirifici logarithmorum canonis descriptio, obra citada no começo do texto. Sendo que, Descriptio despertou interesse imediato e amplo, sendo que no ano seguinte à sua publicação,Henry Briggs (1561-1631),um professor de geometria do Gresham College de Londres e posteriormente professor de Oxford, segundo Maor (2008) ficou tão impressionado com os Logaritmos de Napier que viajou até Edimburgo para dar o tributo de seu reconhecimento ao grande inventor dos logaritmos.

Nesse encontro, Briggs sugeriu a Napier mudanças em suas tabelas para torná-las mais convenientes, são elas:

1- Tornar o logaritmo de 1 igual a zero ao invés de 10^7;

2- Ter o logaritmo de 10 igual a uma potência apropriada de 10.

Os dois juntos então decidiram que $\log 10 = 1 = 10^7$. Estava criando o logaritmo briggsiano ou logaritmo comum que, na notação moderna, significa dizer que se um número positivo N for escrito como $N = 10^L$

Então L é o logaritmo briggsiano ou comum de N, escritos como $\log_{10} N$ ou $\log N$, que são essencialmente os logaritmos de base 10.

Briggs continuou com o trabalho, em 1624 publicou Arithmetica logarítmica, que continha uma tábua de logaritmos comuns, com quartoze casas decimais, dos números 1 a 20000 e de 90000 a 100000. De acordo com Eves(2008), a lacuna entre 2000 e 90000 foi preenchida com a ajuda de Adrien Vlacq(1600-1660), com a segunda edição de Arithmetica logarítmica, se tornando padrão por mais de 3 séculos.

A descoberta dos logaritmos realmente se espalhou na comunidade científica e segundo Boyer (1994), em 1616 uma tradução para o inglês do primeiro trabalho de Napier sobre logaritmos, a Descriptio, feita por Edward Wright(1559-1615) foi publicada em Londres.

Mas, somente com Leonhard Euler(1707-1783) os logaritmos foram tratados como expoentes, assumindo a definição apresentada atualmente. Como foi abordado no contexto histórico de função, função exponencial e função logarítmica, foi na obra de Euler, Introductio que ele investigou a função exponencial, enfatizando o desenvolvimento em séries infinito. É também devido a ele o tratamento dado aos logaritmos como expoentes. Ainda, ele introduziu a notação f(x) para funções e a notação *e* para designar a base dos logaritmos naturais. Calculou também os logaritmos naturais dos inteiros de 2 a 10.

Usando propriedades de logaritmos e exponenciais, trigonometria e números complexos, Euler mostrou que um único número real negativo produz uma infinidade de logaritmos, mas nenhum deles é real. Então, ele afirmou não ser possível que um logaritmo de um número negativo produza um número real. Euler concluiu: Está claro que cada número positivo tem apenas um logaritmo real, e que todos os seus infinitos logaritmos são imaginários. Os logaritmos de todas as quantidades negativas e imaginárias são números imaginários porque nenhum valor real do logaritmo corresponde a essas quantidades.O logaritmo foi moldado pelas ideias de vários matemáticos que queriam tomar parte em facilitar cálculos, porém foi Euler o primeiro a descobrir a relação inversa entre o logaritmo natural e a função exponencial e^x.

Analisando o contexto histórico sobre funções exponenciais e logarítmicas, foi observado que a ideia básica inicial se concentrava essencialmente em simplificar cálculos, evoluiu ao longo da civilização. A evolução dessas funções se tornou decisiva no desenvolvimento de várias áreas do conhecimento humano.

Essa busca por conhecimento fez com que o homem desenvolvesse artefatos mecânicos, eletrônicos e digitais que passaram a substituir as tábuas logarítmicas como instrumento de calculo, o mesmo acontecendo com outras tabelas matemáticas. Segundo, Elon (2009):

> Mas o estudo dos logaritmos ainda é e continuara a ser de central importância.Com efeito, embora eles tenham sido inventados somente como acessório para facilitar operações aritméticas, o desenvolvimento da matemática e das ciências em geral veio mostrar que diversas leis matemáticas e vários fenômenos físicos, químicos, biológicos e econômicos são estreitamente relacionados com os logaritmos. (LIMA, 2009)

Observando a abordagem feita nos livros de Ensino Médio e Ensino Superior, sobre as funções exponenciais e logaritmos, há uma diferença na forma de ensinar essas funções.

No Ensino Médio, a função exponencial vem antes da função logarítmica. Sempre iniciando com uma breve revisão de potenciação. No Ensino Superior, a função exponencial vem depois da função logarítmica. Após essa observação, nos fez levantar dois questionamentos:

1. O que deve vir primeiro no ensino dessas funções?;

2. Discutir as vantagens e as desvantagens de se começar pela exponencial ou pelo logaritmo.

Trataremos nos próximos capítulos essa abordagem das funções, tanto no ensino médio quanto no superior, com o intuito de sanar esses questionamentos.

3 ABORDAGEM DAS FUNÇÕES EXPONENCIAIS E LOGARÍTMICAS NO ENSINO MÉDIO

Neste capítulo iremos introduzir os logaritmos de forma similar àquela introduzida no Ensino Médio e para tanto devemos começar pela definição de exponenciais. O uso de logaritmos em sala de aula, nos dias atuais, ocorre inicialmente no 1º ano do Ensino Médio. Essas funções são estudadas sob o ponto de vista elementar. Para este capítulo foi utilizado o livro *Números e funções reais, coleção Profmat- Elon Lages Lima*. Serão exploradas definições, propriedades, teoremas e algumas demostrações envolvendo exponenciais e logaritmos. Começa com uma revisão sobre propriedades de potenciação, com finalidade de relembrar tais conteúdos trabalhados em ensinos anteriores, pois serve como base para muitos dos cálculos que se apresentam na sequência.

3.1 Potências de expoente racional

3.1.1 Potências com expoente natural

Dado um número real positivo a . Para todo $n \in \mathbb{N}$, diferente de zero, chama-se potencia de base a e expoente n, a potência a^n que é igual ao produto de n fatores igual a a:

$$a^n = \underbrace{a.\ldots.a}_{\text{n vezes}}$$

Como não há produto com um único fator, definimos que para $n = 1, a^1 = a$. A definição por recorrência de a^n é:

$$a^1 = a$$

e

$$a^{n+1} = a.a^n$$

Assim,

$$a^n.a^m = \underbrace{a.\ldots.a}_{\text{n vezes}}.\underbrace{a.\ldots.a}_{\text{m vezes}} = a^{n+m}$$

em que m,n $\in \mathbb{N}$, pois em ambos os membros desta igualdade temos o produto de m + n fatores iguais a a. Segue então que, para m_1,m_2,...,m_j quaisquer, vale:

$$a^{m_1}.a^{m_2}.\ldots.a^{m_j} = a^{m_1+m_2+\cdots+m_j}$$

.

No caso particular, se $m_1 = m_2 = \ldots = m_j = m$, temos:

$$(a^m)^j = a^{mj}.$$

Caso seja $a > 1$ então, multiplicando ambos os membros desta desigualdade por a^n, obtemos

$$a^{n+1} > a^n$$

Portanto, se

$$a > 1$$

então

$$1 < a < a^2 < \ldots < a^n < a^{n+1} < \ldots.$$

Alem disso, caso

$$0 < a < 1$$

Então

$$1 > a > a^2 > \ldots > a^n > a^{n+1} > \ldots$$

como se vê, multiplicando ambos os membros da desigualdade $a < 1$ pelo número positivo a^n . Portanto, a sequência cujo n-ésimo termo a^n é crescente quando $a > 1$ e é decrescente quando $0 < a < 1$.
Agora quando $a = 1$, esta sequência será constante, com todos os seus termos iguais a 1.

Se $a > 1$, a sequencia formada pelas potencias a^n, n $\in \mathbb{N}$ é ilimitada superiormente, isto é, fixado um número real $c > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a^{n_0} > c$.

Como $a > 1$,basta escrever $a = 1 + d, d > 0$.Pela desigualdade de Bernoulli temos que:

$$a^n = (1+d)^n > 1 + n.d$$

para um n grande.
Logo, dado $c > 0$ e tomando

$$n_0 > \frac{c-1}{d}$$

obtemos que

$$a^n > 1 + n_0 d > c.$$

Portanto mostramos que a sequência é ilimitada superiormente.

Se $0 < a < 1$ então as potências de a^n decrescem abaixo de qualquer cota positiva. Ou seja, fixado $c > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a^{n_0} < c$.

Escrevendo $b = \frac{1}{a}$ teremos $b > 1$. Pelo Lema 2.1.1 existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$b^{n_0} < \frac{1}{c},$$

ou seja,

$$\frac{1}{n_0} > \frac{1}{c}$$

Daí,

$$n_0 < c$$

3.1.2 Potências com expoente inteiro

Dado um número real positivo a . Para todo $n \in \mathbb{Z}$, que pode ser negativo ou igual a zero, chama-se potência de base a e expoente n, a potência a^n que é igual ao produto de n fatores igual a a:

Mantendo a regra fundamental

$$a^n.a^m = a^{n+m}$$

Como a igualdade

$$a^1.a^0 = a^{1+0},$$

então

$$a^0 = 1.$$

Dado qualquer $n \in \mathbb{N}$ temos

$$a^{-n}.a^n = a^{-n+n} = a^0 = 1,$$

logo

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

A função $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^+$, dada por $f(n) = a^n$, $n \in \mathbb{Z}$, além de cumprir a igualdade fundamental

$$f(m+n) = f(m).f(n),$$

é ainda crescente quando $a > 1$ e decrescente quando $0 < a < 1$.

Segue-se em particular que, para $a > 1$ e $n \in \mathbb{N}$, tem-se

$$a^{-n} < 1 < a^n$$

e, para

$$0 < a < 1,$$

tem-se

$$a^n < 1 < a^{-n}$$

pois

$$-n < 0 < n$$

e

$$a^0 = 1.$$

A partir de $a^n.a^m = a^{n+m}$ segue-se que $(a^m)^n = a^{mn}$ ainda quando $(a^m)^n = a^{mn}$

3.1.3 Potências com expoente racional

Seja a^r, onde $r = \frac{m}{n}$ é um número racional (com $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{Z}^*$), uma potência de expoente racional. A regra $a^r.a^s = a^{r+s}$ continua válida para r e s números racionais.

Então,para $r = \frac{m}{n}$, temos que

$$(a^r)^n = a^r.a^r.....a^r.a^r = a^{n.r} = a^{n.\frac{m}{n}} = a^m$$

Portanto,

$$a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

$a^r.a^s = a^{r+s}$ sendo $r,s \in \mathbb{Q}$.

Sejam $r = \frac{p}{q}$ e $s = \frac{u}{v}$ números racionais com $q > 0$ e $v > 0$. Por definição:

$$(a^r)^q = (\sqrt[q]{a^p})^q = a^p$$

e

$$(a^s)^v = a^u.$$

Logo,

$$(a^r.a^s)^{qv} = (a^r)^{qv}.(a^s)^{qv} = a^{rqv}.a^{sqv} = a^{pv}.a^{uq} = a^{pv+uq}$$

Vemos que $a^r.a^s$ é o número cuja qv-ésima potência vale a^{pv+uq}. isto que dizer que:

$$a^r.a^s = a^{\frac{(pv+uq)}{qv}}$$

Como

$$\frac{(pv+uq)}{qv} = \frac{p}{q} + \frac{u}{v} = r+s,$$

temos

$$a^r.a^s = a^{r+s}.$$

Se $a > 1$ e $r < s$ com $r,s \in \mathbb{Q}$, então $a^r < a^s$.

Sejam $r = \frac{p}{q}$ e $s = \frac{m}{n}$ números racionais com $q > 0$ e $n > 0$. Temos que, $r < s$ se e somente se $pn < qm$. Por definição $(a^r)^{n.q=a^{pn}}$. Como $pn < qm$ e $qm \in \mathbb{Q}$ temos que $a^{pn} < a^{qm}$, ou seja, $(a^r)^{n.q} < (a^s)^{n.q}$. Portanto, $a^r < a^s$.

Se $0 < a < 1$ e $r < s$ com $r,s \in \mathbb{Q}$, então $a^r > a^s$.

Sejam $r = \frac{p}{q}$ e $s = \frac{m}{n}$ números racionais com $q > 0$ e $n > 0$. Temos que, $r < s$ se e somente se $pn < qm$. Como $pn < qm$ e $qm \in \mathbb{Z}$ temos que $a^{pn} > a^{qm}$, ou seja, $(a^r)^{n.q} > (a^s)^{n.q}$. Portanto $a^r > a^s$.

Fixado o número real positivo $a \neq 1$, em todo intervalo não degenerado de $\mathbb{R}^+$ existe alguma potência a^r, com $r \in \mathbb{Q}$. Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$, $0 < \alpha < \beta$, devemos achar $r \in \mathbb{Q}$ tal que a potência a^r pertença ao intervalo $[\alpha, \beta]$, isto é, $\alpha \leq a^r \leq \beta$. Por simplicidade, suporemos a e α maiores do que 1. Os demais casos podem ser tratados de modo análogo. Como as potências de expoente natural de números maiores do que 1, crescem acima de qualquer cota pré-fixada, podemos obter números naturais M e n, tais que

$$\alpha < \beta < a^M$$

e

$$0 < a < (1 + \frac{\beta - \alpha}{a^M})^n.$$

Na última relação decorrem sucessivamente

$$1 < a^{\frac{1}{n}} < 1 + \frac{\beta - \alpha}{a^M}$$

e consequentemente

$$0 < a^M(a^{\frac{1}{n}} - 1) < \beta - \alpha.$$

Logo, se $m \in \mathbb{N}$ é tal que $\frac{m}{n} \leq M$ então

$$0 < a^{\frac{m}{n}}(a^{\frac{1}{n}} - 1) < \beta - \alpha \leftrightarrow a^{\frac{m+1}{n}} - a^{\frac{m}{n}} < \beta - \alpha.$$

Assim, as potências

$$a^0 = 1, a^{\frac{1}{n}}, a^{\frac{1}{n}}, ..., a^M$$

são extremos de intervalos consecutivos, todos de comprimento menor do que o comprimento $\alpha - \beta$ do intervalo $[\alpha, \beta]$. Como $[\alpha, \beta] \subset [1, a^M]$,pelo menos um desses extremos, digamos $a^{\frac{m}{n}}$, está contido no intervalo $[\alpha, \beta]$.

3.2 A Função exponencial

Dado um número real a, com $a > 0$ e $a \neq 1$, chamamos de função exponencial de base a a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ dada por $f(x) = a^x$,deve ser definida de modo a ter as seguintes propriedades, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$:

(P1) $a^x.a^y = a^{x+y}$;

(P2) $a^1 = a$

(P3) $x < y \Rightarrow a^x < a^y$ quando $a > 1$ e

$x < y \Rightarrow a^y < a^x$ quando $0 < a < 1$.

Se uma função tem a propriedade (P1), isto é, $f(x+y) = f(x).f(y)$, então a função não pode assumir o valor 0, a menos que seja identicamente nula. Com efeito, se existir algum

$x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) = 0$ então, pata todo $x \in \mathbb{R}$ teremos

$$f(x) = f(x_0 + (x - x_0)) = f(x_0).f(x - x_0) = 0.f(x - x_0) = 0,$$

logo f será identicamente nula.

Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tem a propriedade (P1) e não é identicamente nula, então $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, pois

$$f(x) = f(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}) = f(\frac{x}{2}).f(\frac{x}{2}) = f([\frac{x}{2}])^2 > 0.$$

Se uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tem as propriedades (P1) e (P2) então, para todo $n \in \mathbb{N}$ tem-se

$$s(n) = f(1 + 1 + ... + 1) = f(1).f(1).....f(1) = a.a.....a = a^n.$$

Para todo número racional $r = \frac{m}{n}$, com $n \in \mathbb{N}$, deve ter $f(r) = a^r = \sqrt[n]{m}$.

Portanto $f(r) = a^r$ é a única função $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}^+$ tal que $f(r + s) = f(r).f(s)$ para quaisquer $r, s \in \mathbb{Q}$ e $f(1) = a$.

A (P3), nos mostra que a função exponencial $f(r) = a^r$ para $r \in \mathbb{Q}$ é crescente quando $a > 1$ e decrescente quando $0 < a < 1$. Daí resulta que existe única maneira de definir o valor $f(x) = a^x$ quando x é irracional.Suponha que $a > 1$, então $y = a^x$ tem a seguinte propriedade:

$$r < x < s,$$

com

$$r, s \in \mathbb{Q} \Rightarrow a^r < y < a^s.$$

Não podem existir dois números reais diferentes, digamos$A < B$, para assumir o valor de a^x, com a propriedade acima. Se existissem tais A e B teríamos

$$r < x < s, r, s \in \mathbb{Q} \Rightarrow a^r < A < B < a^s.$$

e então o intervalo $[A, B]$ não conteria nenhuma potência de a com expoente racional, contrariando o Lema 2.1.3.

Definindo a^x para todo $x \in \mathbb{R}$, não há maiores dificuldades para verificar que, de fato, são válidas as propriedades $(P1), (P2), (P3)$. Além disso, tem-se ainda

(P4) A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = a^x$, é ilimitada superiormente.

Com efeito, todo intervalo em $\mathbb{R}^+$ contém valores $f(r) = a^r$ segundo o Lema 2.1.3.

(P5) A função exponencial é contínua.

Isto significa que, dado $x_0 \in \mathbb{R}$, é possível tornar a diferença $|a^x - a^{x_0}|$ tão pequena que se deseja, desde que x seja tomado suficientemente próximo de x_0.Dito de outro modo:o limite de a^x quando x tende a x_0 ´igual a a^{x_0}. Em símbolos: $\lim_{x\to x_0} a^x = a^{x_0}$. Esta afirmação pode ser provada assim: escrevemos $x = x_0 + h$, logo $x - x_0 = h$ e então $|a^x - a^{x_0}| = a^{x_0}|a^h - 1|$. Ora, pode-se mostrar que a^h pode ser tornado tão próximo de 1 quanto desejemos, desde que tomemos h suficientemente pequeno. Como a^{x_0} é constante, podemos fazer o produto$a^{x_0}|a^h - 1|$ tão pequeno quanto o queiramos. Isto implica que $\lim_{x\to x_0} |a^x - a^{x_0}| = 0$, ou seja,$\lim_{x\to x_0} a^x = a^{x_0}$.

(P6) A função exponencial $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, f(x) = a^x, a \neq 1$, é sobrejetiva.

Esta afirmação quer dizer que para todo número real $b > 0$ existe algum $x \in \mathbb{R}$ tal que $a^x = b$. Para prová-la, escolhemos, para cada $n \in \mathbb{N}$, uma potência a^{r_n}, com $r_n \in \mathbb{Q}$, no intervalo$(b - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n})$, de modo que $|b - a^{r_n}| < \frac{1}{n}$.

Portanto, $\lim_{n\to\infty} a^{r_n} = b$.Para fixar as ideais, supomos $a > 1$.Escolhemos as potências a^{r_n} sucessivamente, tais que

$$a^{r_1} < a^{r_2} < ... < a^{r_n} < ... < b.$$

Certamente, podemos fixar $s \in \mathbb{Q}$ tal que $b < a^s$. Então a monotonicidade da função a^x nos assegura que $r_1 < r_2 < ... < r_n < ... < s$.

Assim, r_n é uma sequência monótona, limitada superiormente por s. A completude de $\mathbb{R}$ garante então que os elementos da sequência r_n são valores aproximados por falta de um número real x, ou seja,$\exists x \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{n\to\infty} r_n = x$. A função exponencial sendo contínua garante que $a^x = \lim_{n\to\infty} a^{r_n} = b$.

[h!]

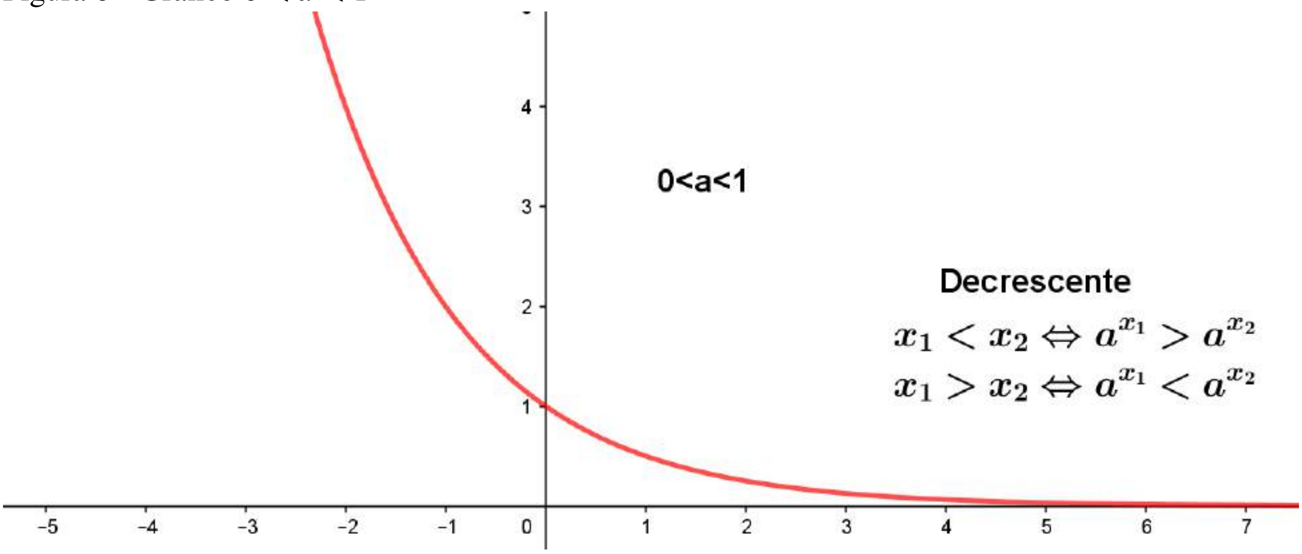
Com relação ao gráfico da função $f(x) = a^x$, podemos dizer que:

1. A curva está toda acima do eixo dos x, pois $y = a^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
2. Corta o eixo y no ponto de ordenada 1.
3. Se $a > 1$ é uma função crescente e se $0 < a < 1$ é uma função decrescente.

3.2.1 Caracterização da função exponencial

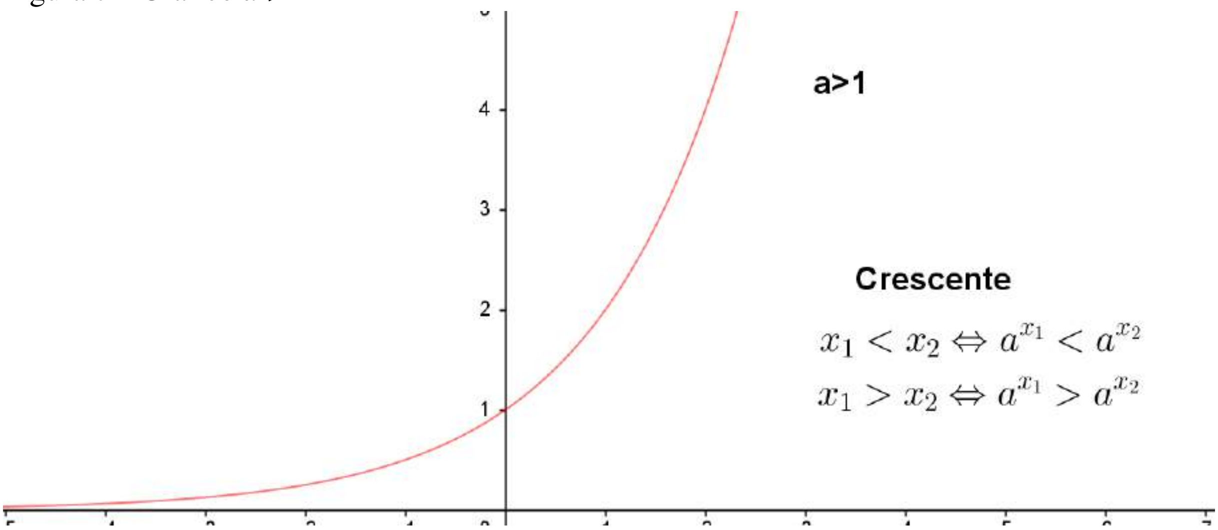
As funções exponenciais, funções afins e as funções quadráticas são os modelos matemáticos mais utilizados na resolução de problemas elementares. A maior parte das dúvidas surge na escolha correta de qual modelo apropriado deve ser escolhido para a resolução do

Figura 6 – Gráfico $0 < a < 1$



Fonte: Elaborada pela autora

Figura 7 – Gráfico $a > 1$



Fonte: Elaborada pela autora

problema proposto.Para que a escolha seja feita de maneira correta é necessário saber quais são as propriedades características de cada função.

A caracterização da função exponencial segue abaixo: [Caracterização da Função Exponencial]

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$uma função monótona injetiva (isto é, crescente ou decrescente). As seguintes afirmações são equivalentes:

(1) $f(nx) = f(x)^n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ e todo $x \in \mathbb{R}$;

(2) $f(x) = a^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, onde $a = f(1)$;

(3) $f(x+y) = f(x).f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

Provaremos as implicações $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1)$.

(a) $(1) \Rightarrow (2)$

Observa-se que a hipótese (1) acarreta que, para todo número racional $r = \frac{m}{n}$ com $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$ tem-se $f(rx) = f(x)^r$. Com efeito, como $nr = m$, assim pode-se escrever$f(rx)^n = f(nxr) = f(mx) = f(x)^m$, logo

$$f(rx) = f(x)^{m/n} = f(x)^r.$$

Assim se pusermos $f(1) = a$, teremos $f(r) = f(r.1) = f(1)^r = a^r$ para todo $r\mathbb{Q}$.Para completar a demonstração de que $(1) \Rightarrow (2)$ suponhamos, a fim de fixar as ideias, que f seja crescente, logo $1 = f(0) < f(1) = a$. vamos admitir, por absurdo,que exista um $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \neq a^x$.Digamos, por exemplo, que seja $f(x) < a^x$, então todo o intervalo $\mathbb{R}^+$ existe uma potência a^r com r racional tal que $f(x) < a^r < a^x$, ou seja, $f(x) < f(r) < a^x$. Como f é crescente, tendo $f(x) < f(r)$ concluímos que $x < r$. Por outro lado, temos também $a^r < a^x$, logo $r < x$. Esta contradição completa a prova de que $(1) \Rightarrow (2)$.

(b) $(2) \Rightarrow (3)$

Tem-se $f(x+y) = a^{x+y} = a^x.a^y = f(x).f(y)$.

(c) $(3) \Rightarrow (1)$

$f(nx) = f(x + ... + x) = f(x).f(x)...f(x) = f(x)^n$

Uma função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é do tipo exponencial quando se tem $g(x) = ba^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$ onde a e b são constantes positivas. Se $a > 1$, g é crescente e se $0 < a < 1$, g é decrescente.

Se a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é do tipo exponencial, então, para quaisquer $x, h \in \mathbb{R}$ os quocientes

$$\frac{g(x+h)}{g(x)} = a^h$$

e

$$\frac{g(x+h) - g(x)}{g(x)} = a^h - 1.$$

Dependem apenas de h, mas não de x.

O próximo teorema caracteriza uma função do tipo exponencial.

Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ uma função monótona injetiva (isto é, crescente ou decrescente) tal que, para $x, h \in \mathbb{R}$ quaisquer, o acréscimo relativo $[g(x+h) - g(x)]/g(x)$ dependa apenas de h, mas não de x. Então, se $b = g(0)$ e $a = g(1)/g(0)$, tem-se $g(x) = ba^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Como vimos acima, a hipótese feita equivale a supor que $g(h) = g(x+h)/g(x)$ independe de x. Substituindo, se necessário, $g(x)$ por $f(x) = g(x)/b$, onde $b = g(0)$, obtemos $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ monótona injetiva, com $f(x+h)/f(x)$ independente de x e, agora, com $f(0) = 1$. Então, pondo $x = 0$ na relação $f(h) = f(x+h)/f(x)$, obtemos $g(h) = f(h)$ para todo $h \in \mathbb{R}$. Vemos assim que a função monótona injetiva f cumpre $f(x+h) = f(x).f(h)$, ou seja, $f(x+y) = f(x).f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$ Segue-se então do teorema anterior que $f(x) = a^x$, logo; $g(x) = b.f(x) = b.a^x$.

3.2.2 Funções exponenciais e progressões

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ba^x$, uma função de tipo exponencial. Se $x_1, x_2 ..., x_n, ...$ é uma progressão aritmética de razão h, isto é, $x_{n+1} = x_n + h$, então os valores,

$$f(x_1) = ba^{x_1}, f(x_2) = ba^{x_2} .., f(x_n) = ba^{x_n}, ...,$$

formam uma progressão geométrica de razão a^h pois

$$f(x_{n+1}) = ba^{x_{n+1}} = ba^{x_n+h} = (ba^{x_n}).a^h = f(x_n).a^h.$$

Como o $(n+1)$-ésimo termo da progressão aritmética dada é $x_{n+1} = x_1 + nh$, segue-se que $f(x_{n+1}) = f(x_1).A^n$, onde $A = a^h$. Em particular, se $x_1 = 0$ então $f(x_1) = b$ logo $f(x_{n+1}) = b.A^n$. Se um capital inicial c_0 é aplicado a juros fixos então, depois de decorrido um tempo t, o capital existente é dado por $c(t) = c_0.a^t$.

Se tirarmos extratos da conta nos tempos $0, h, 2h, 3h, ...$ teremos $c(0) = c_0, c(h) = c_0 A, c(2h) = c_0.A^2, c(3h) = c_0.A^3, ...$ onde $A = a^h$. Portanto, a evolução do saldo, quando calculado em intervalos iguais de h unidades de tempo, é dada pela progressão geométrica:

$$c_0, c_0.A, c_0.A^2, c_0.A^3, ...$$

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função monótona injetiva (isto é, crescente ou decrescente) que transforma toda progressão aritmética $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ numa progressão geométrica $y_1, y_2, ..., y_n, ...$, $y_n = f(x_n)$. Se pusermos $b = f(0)$ e $a = f(1)/f(0)$ teremos $f(x) = ba^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Seja $b = f(0)$. A função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, definida por $g(x) = f(x)/b$, é monótona injetiva, continua transformando progressões aritméticas em progressões geométricas e agora tem-se $g(0) = 1$. Dado $x \in \mathbb{R}$ qualquer, a sequência $x, 0, -x$ é uma progressão aritmética, logo $g(x), 1, -g(x)$ é uma progressão geométrica de razão $g(-x)$. Segue-se $g(-x) = 1/g(x)$. Sejam agora $n \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}$ A sequência $0, x, 2x, ..., nx$ é uma progressão aritmética, logo $1, g(x), g(2x), ..., g(nx)$ é uma progressão geométrica, cuja razão evidentemente é $g(x)$. Então seu $(n+1)$-ésimo termo é $g(nx) = g(x)^n$. Se $-n$ é um inteiro negativo então $g(-nx) = 1/g(nx) = 1/g(x)^n = g(x)^{-n}$. Portanto, vale $g(nx) = g(x)^n$ para quaisquer $n \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}$. Segue-se do Teorema de Caracterização 2.2.1 , pondo $a = g(1) = f(1)/f(0)$, tem-se $g(x) = a^x$, ou seja, $f(x) = ba^x$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

3.3 Função inversa

Diz-se que a função $g : Y \to X$ é a inversa da função $f : X \to Y$ quando se tem $g(f(x)) = x$ e $f(g(y)) = y$ para quaisquer $x \in X$e $y \in Y$. Evidentemente, g é inversa de f se, e somente se, f é inversa de g.

Quando g é a inversa de f, tem-se $g(y) = x$ se, e somente se, $f(x) = y$.

Se a função $f : X \to Y$ possui inversa então f é injetiva e sobrejetiva, ou seja, é uma correspondência biunívoca entre X e Y.

Existe uma função $g : Y \to X$ tal que $g(f(x)) = x$ e $f(g(y)) = y$ para quaisquer $x \in X$ e $y \in Y$. A função f é injetiva, pois

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Por sua vez, a igualdade $f(g(y)) = y$, valendo para todo $y \in Y$, implica que f é sobrejetiva pois, dado $y \in Y$ arbitrário, tomamos $x = g(y) \in X$e temos $f(x) = y$.

Se $f : X \to Y$ é uma correspondência biunívoca entre X e Y então f possui uma inversa $g : Y \to X$.

Para definir g, notamos que, sendo f sobrejetiva, para todo $y \in Y$ existe algum $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Além disso, como f é injetiva, este x é único. Pomos então $g(y) = x$. Assim, $g : Y \to X$ é a função que associa a cada $y \in Y$o único $x \in X$ tal que $f(x) = y$. É imediato que $g(f(x)) = x$ e $f(g(y)) = y$ para $x \in X$ e $y \in Y$.

3.4 Função logarítmica

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, a função exponencial dada por $f(x) = a^x$, onde $a \neq 1$ é um número real positivo. Sabemos que a função exponencial é bijetiva conforme demonstramos na seção anterior deste capítulo, portanto a função exponencial admite uma inversa $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$. A esta função daremos o nome de função logarítmica. Denotada da seguinte forma: $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, tal que $g(x) = \log_a x$, onde $a \neq 1$ é um número real positivo. Chamamos a imagem de cada elemento $x \in \mathbb{R}^+$ de logaritmo de x na base a.

Observemos que $\log_a x = y$ se, e somente se, $g(x) = y$. Por outro lado, $g(x) = y$ se, e somente se, $f(y) = x$,ou seja, $a^y = x$.Com isso mostramos que,

$$\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$$

Propriedades imediatas:

(1) $\log_a a = 1$

(2) $\log_a 1 = 0$

(3) $\log_a a^y = y$

(4) $a^{\log_a b} = b$

Utilizaremos esta equivalência para demonstrar algumas propriedades do logaritmo.

[Multiplicação.]

Sejam x e y números reais positivos e $a \neq 1$ um número real positivo. Então:

$$\log(xy) = \log_a x + \log_a y$$

Sejam $\log_a x = k$ e $\log_a y = z$,com $k, z \in \mathbb{R}$. Logo, $x = a^k$ e $y = a^z$. Portanto temos que:

$$xy = a^k.a^z = a^{k+z}.$$

Assim, $\log_a(xy) = k + z$. Substituindo os valores de k e z temos que:

$$\log(xy) = \log_a x + \log_a y.$$

[Divisão.]

Sejam x e y números reais positivos e $a \neq 1$ um número real positivo. Então:

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

Sejam $\log_a x = k$ e $\log_a y = z$,com $k, z \in \mathbb{R}$. Logo, $x = a^k$ e $y = a^z$. Portanto temos que:

$$\frac{x}{y} = \frac{a^k}{a^z} = a^{k-z}.$$

Assim, $\log_a \frac{x}{y} = k - z$.Substituindo os valores de k e z temos que:

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y.$$

[Potência.]

Seja x um número real positivo, $a \neq 1$ um número real positivo e $m \in \mathbb{R}$.Então:

$$\log_a x^m = m. \log_a x.$$

Seja $\log_a x = k$, então $a^k = x$. Elevando ambos membros desta última igualdade a m tem-se $(a^k)^m \Leftrightarrow a^{km} = x^m$. Utilizando o logaritmo de base a em ambos membros desta equação, vem que $\log_a a^{km} = log_a x^m$. Portanto, $km = \log_a x^m$. Substituindo o valor de k, temos:

$$\log_a x^m = m. \log_a x.$$

[Mudança de base.]

Sejam a e b números reais positivos e $a, b \neq 1$ e m um número real qualquer. Então:

$$\log_a b = \frac{\log_m b}{\log_m a}.$$

Seja $y = \log_a b$, então $a^y = b$. Agora, suponha que exista um número x tal que $x = \log_m b$. Da mesma forma, $m^x = b$. Temos que:

$$a^y = m^x \Leftrightarrow \log_m a^y = x \Leftrightarrow y. \log_m a = x.$$

Substituindo os valores de x e y na última equação acima concluímos que:

$$\log_a b. \log_m a = \log_m b.$$

Como $\log_m a \leq 0$. Então dividindo ambos membros da equação vemos que:

$$\log_a b = \frac{\log_m b}{\log_m a}.$$

Além disso,

1. A função logarítmica $\log_a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ é crescente quando $a > 1$ e decrescente quando $0 < a < 1$.
2. Somente números positivos possuem logaritmo real pois a função $x \mapsto a^x$ somente assume valores positivos.
3. $y = \log_a x$ é uma função ilimitada, tanto superiormente quanto inferiormente. Isso acontece porque $\log_a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ é uma correspondência biunívoca portanto sobrejetiva, ou mais precisamente para $a > 1$:

$$\lim_{x\to\infty} \log_a x = +\infty$$

e

$$\lim_{x\to\infty} \log_a x = -\infty.$$

A primeira destas igualdades significa que se pode dar a $\log_a x$ um valor tão grande quanto se queira, desde que x seja tomado suficientemente grande.

A segunda quer dizer que, dado arbitrariamente $A > 0$, tem-se $\log_a x < -A$ desde que x seja um número positivo suficientemente pequeno.

Ao contrário da função exponencial, que cresce rapidamente,$log_a x$ tende a $+\infty$ muito lentamente quando $x \to +\infty$. Esse crescimento lento do logaritmo, que contrasta com o crescimento rápido da exponencial, é bem ilustrado pelos gráficos das funções $y = a^X$ e $y = \log_a x$.

3.4.1 Caracterização da Função Logarítmica

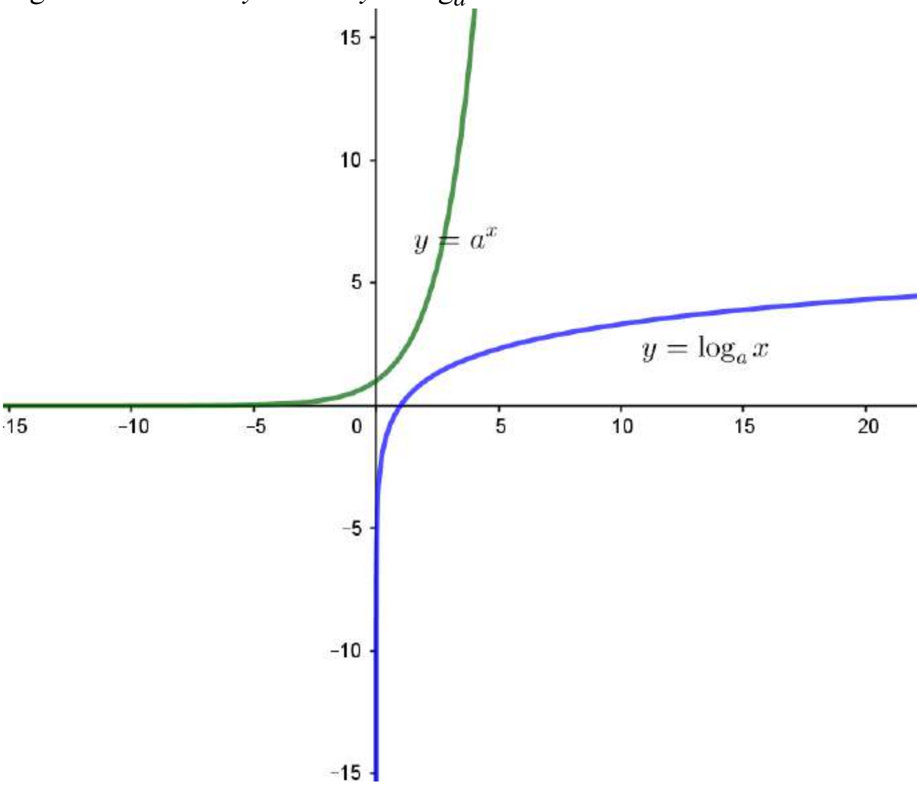
Demonstraremos a seguir que, entre as funções monótonas injetivas $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, somente as funções logarítmicas têm a propriedade de transformar produtos em somas.

[Caracterização das Funções Logarítmicas.]

Seja $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$,uma função monótona injetiva (isto é, crescente ou decrescente) tal que $f(xy) = f(x) + f(y)$, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^+$.Então, existe $a > 0$ tal que $f(x) = \log_a x$,para todo $x \in \mathbb{R}^+$.

Suponhamos f crescente. O outro caso é tratado da mesma maneira. Podemos dizer que $f(1) = f(1.1) = f(1) + f(1)$. Logo,$f(1) = 0$. Suponhamos que exista um número real a

Figura 8 – Gráfico $y = a^X$ e $y = \log_a x$



Fonte: Elaborada pela autora

positivo tal que $f(a) = 1$. Sendo f crescente, como $f(a) = 1 > 0 = f(1)$, temos $a > 1$. Para todo $m \in \mathbb{N}$ vale:

$$f(a^m) = f(\underbrace{a.\ldots.a}_{\text{m vezes}}).$$

Daí,

$$f(a^m) = \underbrace{f(a) + \ldots + f(a)}_{\text{m vezes}}.$$

Portanto concluímos que, $f(a^m) = m.f(a) = m$. Pois $f(a) = 1$.(1)

Seja $m \in \mathbb{N}$.Podemos dizer que:

$$0 = f(1) = f(a^m.a^{-m}) = f(a^m) + f(a^{-m}) = m + f(a^{-m}).$$

Logo, $f(a^{-m}) = -m$.(2)

Seja $r = \frac{m}{n}$, $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$. Assim,

$$f(a^m) = f(a^{rn}) = f((a^r)^n) = f(\underbrace{a^r.\ldots.a^r}_{\text{n vezes}}).$$

Daí,tem-se que:

$$f(a^m) = \underbrace{f(a^r) + \ldots + f(a^r)}_{\text{n vezes}}).$$

Portanto concluímos que $m = f(a^m) = nf(a^r); f(a^r) = \frac{m}{n} = r.$(3)

Se $x \in \mathbb{R}$ é irracional então tomemos r e s racionais tais que:

$$r < s < a \Rightarrow a^r < a^x < a^s \Rightarrow f(a^r) < f(a^x) < f(a^s) \Rightarrow r < f(a^x) < s.$$

Assim,todo número racional r, menor do que x,é também menor do que $f(a^x)$ e todo número racional s maior do que x é também maior do que $f(a^x)$.Sejam (r_n)e (r_n) sequências de números racionais tais que $r_n < x, n \in \mathbb{N}$, $\lim r_n = x, s_n > x, n \in \mathbb{N}$ e $\lim s_n = x$.Desse modo, $r_n < x < s_n$ e como mostramos anteriormente, $r_n < f(a^x) < s_n$. Assim, tomando o limite quando tende ao infinito em ambos lados temos,

$$x \leq f(a^x) \leq x$$

Logo, $f(a^x) = x.$(4)

Portanto, por (8),(9),(10),(11),temos $f(a^x) = x$, para todo $x \in \mathbb{R}$.Logo f é a função inversa de $h(x) = a^x$ daí, $f(y) = log_a y$para todo $y > 0$.

Consideraremos agora o caso geral, em que se tem uma função crescente $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,tal que:

$$g(xy) = g(x) + g(y)$$

Devemos mostrar que existe um número real a positivo sem a hipótese de $g(a) = 1$. Como $g(1) = 0$ e $1 < 2$. Então,$g(2) = b > 0$. Considere $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$,definida por $h(x) = \frac{g(x)}{b}$, h é crescente, transforma somas em produtos e temos que $h(2) = \frac{g(2)}{b} = 1$. Logo, pela primeira parte da demonstração, tem-se $h(x) = \log_2 x$ para todo $x > 0$. Assim $g(x) = b.h(x) = b.log_2 x$.Tomemos, $a = 2^{\frac{1}{b}}$.Dessa forma,

$$g(a) = b.\log_2 a = b.\log_2 2^{\frac{1}{b}} = 1.$$

3.4.2 Logaritmos Naturais

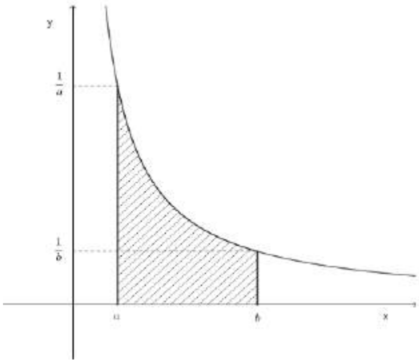
Esta abordagem de logaritmo é umas das mais simples de conceituação técnica e recorre a um auxílio geométrico no que se refere a área de figuras planas.

Introduziremos a definição de área de uma faixa de hipérbole, utilizando o sistema de coordenadas cartesianas. Por simplicidade diremos ponto (x,y) em vez de par ordenado cujas coordenadas são x e y. Seja H o ramo positivo do gráfico da função $y=\frac{1}{x}$.Portanto, H é um subconjunto do plano constituído pelos pontos da forma $(x,\frac{1}{x})$ com x real positivo. Ou seja,

$$H=(x,y);x>0,y=\frac{1}{x}$$

Um ponto (x,y) pertence ao conjunto H se, e somente se, $x>0$ e $xy=1$. Uma faixa de hipérbole(figura 9) é obtida quando fixamos dois números reais positivos a,b e tomamos a região do plano limitada pelas retas verticais $x=a$,$x=b$, a hipérbole H e o eixo das abscissas. Indicaremos essa região pelo símbolo H_b^a.

Figura 9 – Gráfico Faixa de hipérbole



Fonte: Elaborada pela autora

Vamos definir a seguinte função $g(a,b)$ que indica a área orientada de H_b^a.

$$g(a,b)=\begin{cases} areaH_b^a, \text{ se } a<b. \\ -areaH_b^a, \text{ se } a>b. \\ 0, se\ a=b. \end{cases}$$

Sejam a,b,c números reais positivos, então:

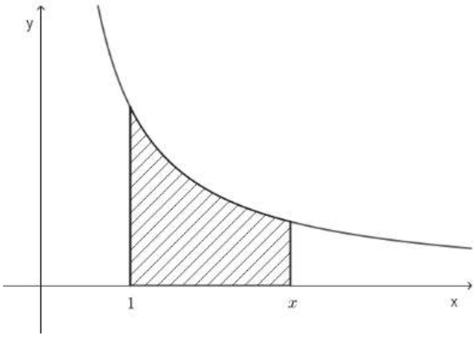
$$g(a,b)=g(a,c)+g(b,c)$$

Mostraremos para $a<b<c$.Os outros casos são análogos.Suponhamos primeiramente, $a<b<c$.Então, $g(a,b)=areaH_b^a, g(a,c)=areaH_c^a eg(b,c)=-areaH_c^b$.Temos que $areaH_b^a+areaH_c^b=areaH_c^a$.Então, $g(a,b)--g(c,b)=g(a,c)$.Logo,$g(a,b)=g(c,b)+g(a,c)$. E assim concluímos a demonstração.

Para a definição de logaritmos como a área abaixo de uma curva, usaremos a mesma ideia da faixa de hipérbole, porém teremos $b=x$ como variável e fixaremos $a=1$ Seja x um número real positivo.Então, $g(a,b) = \begin{cases} areaH_1^x \text{ , } x > 1. \\ -areaH_1^x \text{ , } 0 < x < 1. \\ 0, \; x = 1. \end{cases}$

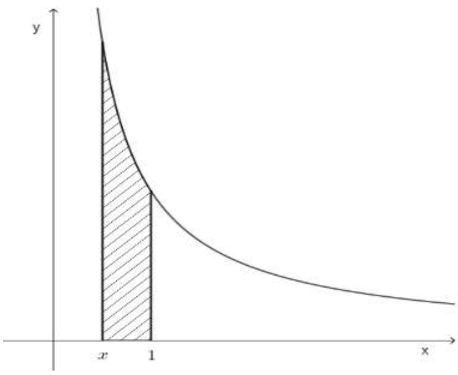
Observemos que $g(1,x) = f(x), x \in \mathbb{R}^+$.

Figura 10 – Faixa de hipérbole de 1 a x



Fonte: Elaborada pela autora

Figura 11 – Faixa de hipérbole de x a 1



Fonte: Elaborada pela autora

A função $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$,definida anteriormente é logarítmica.

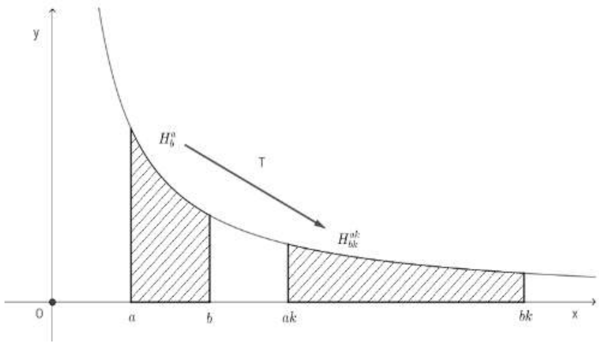
Devemos mostrar que f satisfaz a duas seguintes condições:

1. f é uma função crescente.
2. $f(xy) = f(x) + f(y)$,para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^+$.

Iremos demonstrar primeiramente (2).

Sejam $x, y \in \mathbb{R}^+$,tais que $x < y$, e g.Assim pela proposição, $g(1,xy) = g(1,y) + g(y,xy)$.Para a demonstração do item (2),precisamos mostrar que $g(y,xy) = g(1,x)$.Para isso precisamos analisar uma transformação geométrica que se revela útil para os nossos propósitos. Segundo Lima (2009), para cada número $k > 0$, definimos a transformação $T = T_k : \mathbb{R}^{\nvDash} \to \mathbb{R}^{\nvDash}$ que associa a cada ponto $(x,y) \in \mathbb{R}^{\nvDash}$ o ponto $T(x,y) = (kx, y/k)$ um retângulo X de lados paralelos aos eixos, com base medindo b e altura medindo a, é transformado por T num retângulo $X' = T(X)$, ainda com lados paralelos aos eixos, porém com base kb e altura a/k. Portanto $XeX' = T(X)$ têm áreas iguais. Mais geralmente, T transforma toda figura F do plano numa figura , cujas dimensões em relação a F são alteradas pelo fator k na horizontal e $1/k$ na vertical. Logo, F e F' têm a mesma área.Em particular a transformação $T = T_k : \mathbb{R}^{\nvDash} \to \mathbb{R}^{\nvDash}$ leva a faixa H_b^a na faixa $H_b^{ak}k$,cujas áreas são iguais, conforme representa a figura a seguir.

Figura 12 – Transformação T que leva a faixa H_a^b na faixaH_{ak}^{bk}



Fonte: Elaborada pela autora

Portanto, $g(y,xy) = g(1,x)$.Assim, $g(1,xy) = g(1,y) + g(1,x)$, como $g(1,x) = f(x)$,concluímos que $f(xy) = f(x) + f(y)$.

Provaremos (2).

Seja $x,y \in \mathbb{R}^+$;tal que $x < y$.Logo existe um número real $a > 1$ tal que $y = ax$,então $f(y) = f(ax) = f(a) + f(x)$.Como $a > 1$ temos $f(a) < 0$. Daí, concluímos que $f(x) < f(y)$.

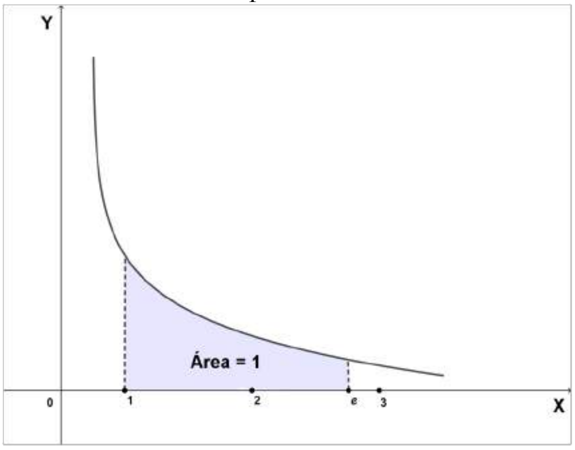
Pelo Teorema de Caracterização das funções logarítmicas, existe um número real positivo, que chamaremos de e, tal que $f(x) = \log_e x$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$.

Escreveremos $\ln x$ em vez de $\log_e x$ e chamaremos o número lnx de logaritmo natural de x.

O número e, base dos logaritmos naturais, é caracterizado pelo fato de que seu logaritmo natural é igual a 1, ou seja $area\ H_1^e = 1$.Usualmente, o número e é apresentado como:

$$e = lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n.$$

Figura 13 – Área $H_1^e = 1$



Fonte: Elaborada pela autora

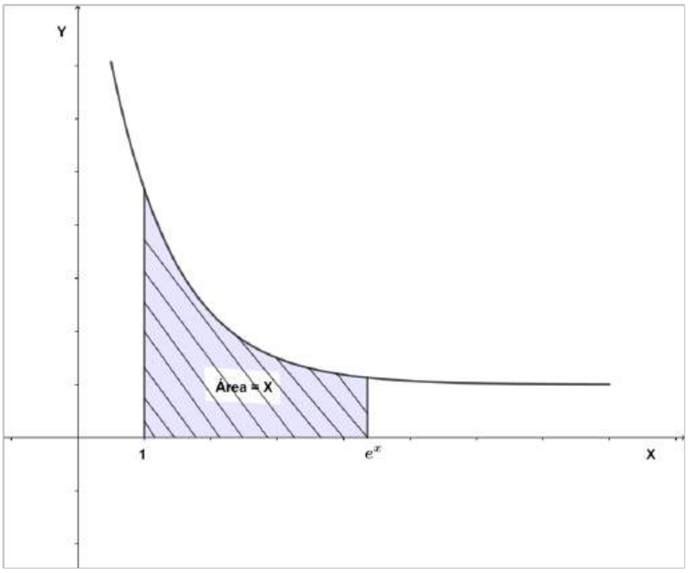
Segundo Lima(2009), alguns autores definem o logaritmo cuja base é o número e como logaritmo neperiano.

3.4.3 A função Exponencial de Base e

Dado o número real x, e^x é o único número positivo cujo logaritmo natural é x.

Geometricamente $y = e^x$ é a abscissa que devemos tomar para que a faixa da hipérbole H_y^1 tenha área x.

Figura 14 – Área $H^{e^x}{}_1 - x$



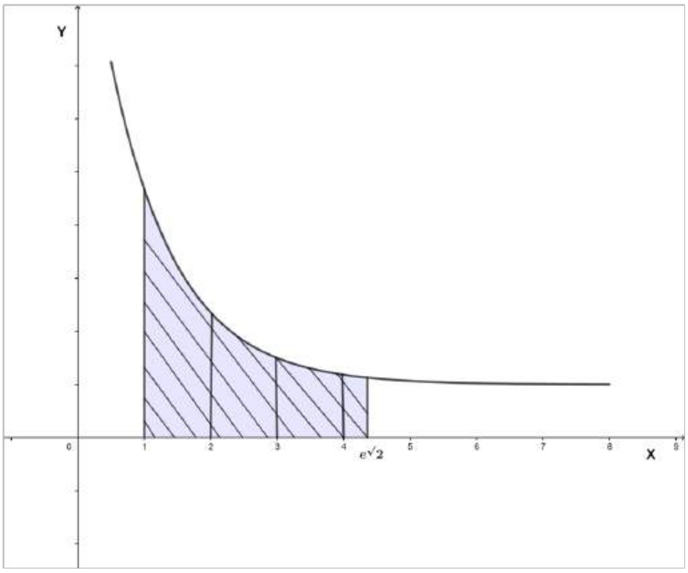
Fonte: Elaborada pela autora

Temos que $e^x > 0$ para todo x,que $e^x > 1, \forall\, x > 0$ que $e^x < 1, \forall\, x < 0$. A equivalência abaixo é a definição de e^x:

$$y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y.$$

Podemos, agora, tomar e^x mesmo com x irracional. Por exemplo,$e^{\sqrt{2}}$ é simplesmente o número $y > 0$ tal que a área de H_1^y vale $\sqrt{2}$(ver figura 13.)

Figura 15 – Área $H^{e^{\sqrt{2}}}_{1}$ – $\sqrt{2}$



Fonte: Elaborada pela autora

Enquanto $\ln x$ tem sentido apenas para $x > 0$, e^x é definido para todo valor real de x.A correspondência $x \mapsto e^x$ define uma função cujo domínio contém todos os números reais. Esta é a função exponencial.

A função exponencial $y = e^x$ é a função inversa da função logaritmo natural. Isto quer dizer que as igualdades abaixo são válidas para todo x real e todo $y > 0$:

$$\ln(e^x) = x; e^{\ln y} = y.$$

Dado qualquer r racional tem-se que $\exp r = e^r$. O número e é definido pela igualdade $\exp 1 = e$. Vemos que

$$\exp n = \exp(\underbrace{1 + \ldots + 1}_{\text{n vezes}}) = \underbrace{\exp 1 \ldots . \exp 1}_{\text{n vezes}} = e^n,$$

se $n > 0$ é inteiro. Ainda neste caso, vemos que $\exp(-n) = (\exp n)^{-1} = (e^n)^{-1} = e^{-n}$. Se $r = \frac{p}{q}$ com p e $q > 0$ inteiros, então $(\exp r)^q = \exp(p) = e^p$; extraindo a raiz $q - esima$ de ambos os membros, temos que $\exp r = e^r$.

Assim, se a função exponencial transforma o número real x no número real positivo e^x, a função logarítmica natural transforma e^x de volta em x.Reciprocamente, a função exponencial leva $\ln y$ em y.

4 ABORDAGEM DAS FINCÕES EXPONENCIAIS E LOGARÍTMICAS NO ENSINO SUPERIOR

Neste capítulo, a abordagem feita das funções exponenciais e logarítmicas será da forma que é utilizada no ensino superior, na disciplina de Cálculo 1. Os livros utilizados serão: *O Cálculo com Geometria Analítica, 3ª edição, Louis Leithold e Cálculo-Volume 1, 7ª edição, James Stewart.* Serão exploradas definições, propriedades, teoremas e algumas demonstrações envolvendo funções logarítmicas e exponenciais naturais(base e) e geral(base a).

4.1 Logaritmo natural

Define-se o logaritmo natural de um número positivo x como:

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}dt, x > 0.$$

Vamos mostrar que a função logarítmica natural satisfaz as mesmas propriedades do logaritmo:

$\ln 1 = 0$

Se $x = 1$ ***na definição 3.1.1***,

$$\ln 1 = \int_1^1 \frac{1}{t}dt$$

O segundo membro acima é zero, pela definição da integral definida que diz: Se $f(a)$ existe,entãoo: $\int_a^a f(x)dx = 0$.Assim,

$$\ln 1 = 0.$$

$\ln a^r = r\ln a$

Como

$$\ln'(x^r) = \frac{1}{x^r}rx^{r-1} = \frac{r}{x} = (r\ln(x))',$$

segue que

$$ln(x^r) = r\ln(x) + C$$

Mas,para $x = 1$,temos $C = 0$.Assim,

$$ln(a^r) = r\ln(a).$$

$\ln(ab) = \ln a + \ln b$

Observe que

$$\ln'(xb) = \frac{1}{xb}(xb)' = \frac{1}{x} = ln'(x).$$

Portanto, $\ln(xb) = \ln(x) + C$. Para $x = 1$,temos $\ln(b) = C$. Assim, $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$.

$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$

Como $a = (\frac{a}{b}).b, \ln a = \ln(\frac{a}{b}.b)$. Aplicando a propriedade 3.1.3 ao segundo membro da igualdade acima, obtemos

$$\ln(a) = \ln(\frac{a}{b}) + \ln(b)$$

. Manipulando a igualdade, temos

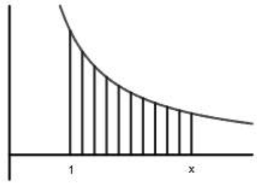
$$\ln(\frac{a}{b}) = \ln(a) - \ln(b).$$

O domínio da função logarítmica natural é o conjunto de todos os números positivos. Lê-se $\ln x$ como o "logaritmo natural de x".

Geometricamente,isto significa que quando $x > 1$ o logaritmo natural de x é igual ao valor da área da região plana limitada pela curva $y = \frac{1}{t}$,pelo eixo das abscissas e pelas retas $t = 1$ e $t = x$ (veja a figura 14).

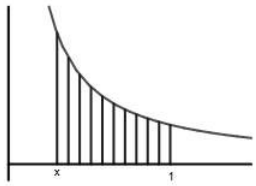
Quando $0 < x < 1$,como $\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}dt = -\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}dt$,temos que $\ln(x) = -A(x)$,onde $A(x)$ é a área da região limitada pelo gráfico da curva $y = \frac{1}{t}$,pelo eixo das abscissas e pelas retas $t = 1$ e $t = x$ (veja a figura 15).

Figura 16 – Área da região plana quando $x > 1$



Fonte: Elaborada pela autora

Figura 17 – Área da região plana limitada quando $0 < x < 1$



Fonte: Elaborada pela autora

Pelo teorema fundamental do cálculo temos,imediatamente,que

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}$$

Além disso, a função logarítmica natural é uma função crescente, pois $\ln(x) = \frac{1}{x} > 0$, para $x > 0$.Temos,também,que $-\ln''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ para todo $x > 0$.

Vamos determinar agora o comportamento da função logarítmica natural para grandes valores de x, considerando $\lim_{x\to+\infty} \ln x$. Como já foi mencionado que a função é crescente, se n for qualquer número positivo, tal que $x > 2^n$.

Se $x > 2^n$ então $\ln x > \ln 2^n$ (*), pela propriedade 3.1.2, $\ln 2^n = n \ln 2$ (**). Substituindo (**) em (*) teremos:

$$x > 2^n \Rightarrow \ln x > n \ln 2.$$

Precisaremos usar o fato de $\ln 2 \geq \frac{1}{2}$, valores numéricos aproximados de $\ln 2$ usando a equação $\ln(2) = \int_1^2 \frac{1}{t} dt$, pelo teorema da integral definida, obtivemos como resultado $\ln 2 \geq \frac{1}{2}$.

Então como $\ln 2 \geq \frac{1}{2}$, temos, do estabelecido acima, que

$$x > 2^n \Rightarrow \ln x > \frac{1}{2}n.$$

Tomando $n = 2p$, onde $p > 0$, temos que se $x > 2^{2^p}$ então $\ln x > n$. Dessa afirmação, tomando $N = 2^{2^p}$, para qualquer $p > 0$. Como $x > N$ então $\ln x > n$. Assim, podemos concluir que

$$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty.$$

Para determinar o comportamento da função logarítmica natural para valores de x próximos de zeros, vamos investigar $\lim_{x \to 0^+} \ln x$. Como $\ln x = \ln[x^{-1}]^{-1}$, $\ln x = -\ln \frac{1}{x}$. A expressão ”$x \to 0^+$” é equivalente a "$\frac{1}{x} \to +\infty$"Dessa forma, podemos escrever

$$\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\lim_{\frac{1}{x} \to +\infty} \ln \frac{1}{x}$$

Por $\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$, temos $\lim_{\frac{1}{x} \to +\infty} \ln \frac{1}{x} = +\infty$.Logo,

$$\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty.$$

Com estas informações é possível esboçar o gráfico de $y = \ln(x)$

Vejamos o cálculo da derivada de $y = \ln(x)$, $\frac{d}{dx}(\ln|x|) = \frac{d}{dx}(\ln\sqrt{x^2}) = \frac{1}{\sqrt{x^2}}.\frac{d}{dx}(\sqrt{x^2}) = \frac{1}{\sqrt{x^2}}.\frac{x}{\sqrt{x^2}} = \frac{1}{x}$, pela definição $x > 0$, entao $|x| = \sqrt{x^2}$

Dessa forma, obtemos o teorema a seguir:

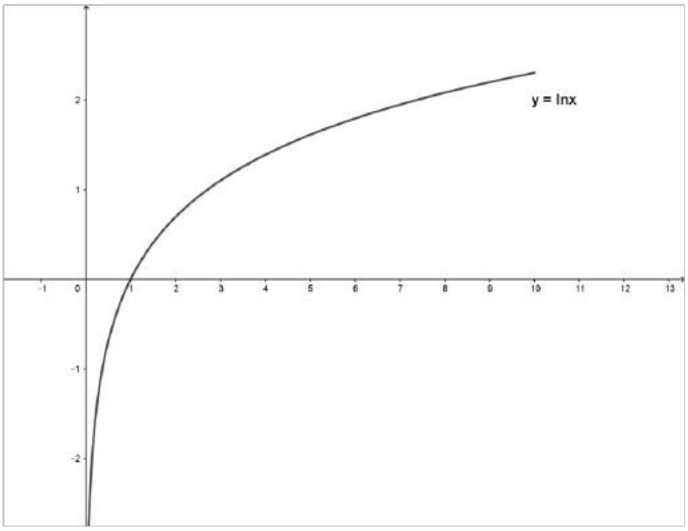
Se u for uma função de x, diferenciável, $\frac{d}{dx}(\ln|x|) = \frac{1}{u}\frac{d}{dx}(u)$

4.2 A Função Exponencial Natural.

Define-se a função exponencial $y = \exp(x)$ como sendo a inversa da função logaritmo, isto é,

$$y = \exp(x) \Leftrightarrow x = \ln(y).$$

Figura 18 – Gráfico de $y = \ln(x)$



Fonte: Elaborada pela autora

A notação $\exp(x)$ deve ser entendida como "o valor da função exponencial natural em x". Da definição acima podemos concluir que o domínio da função exponencial é toda a reta real e a imagem é o intervalo aberto $(0,+\infty)$.

Como as funções logarítmica e exponencial naturais são inversa uma da outra, pelo teorema das funções inversas, que diz $f^{-1}(f(x)) = x$ e $f(f^{-1}(x)) = x$.Assim, $\ln(\exp(x)) = x$ e $\exp(\ln(x)) = x$.

Usando definição de exponencial, temos que a^x, onde a é um número positivo e x é um número real.Considerando um caso específico a^r, onde $a > 0$ e r é um número racional, substituindo na equação $\exp(\ln(x)) = x$, no lugar de x, temos $a^r = \exp(\ln a^{[}r])(*)$, aplicando a ***propriedade 3.1.2*** que diz, $\ln a^r = r \ln a$. Assim, obtemos $\exp(r\ln(a)) = a^r$.
Por este fato, chegamos nessa definição.

Se a for um número positivo qualquer e x for um número real qualquer, definimos

$$a^x = \exp(x \ln a).$$

De acordo com o capítulo 1, onde foi feita uma breve abordagem histórica de logaritmo e exponencial, surgiu uma importante constante, denotado por e, em homenagem ao matemático suíço Leonhard Euler(1707-1783), um dos primeiros a estudar as propriedades desse número. O valor de e com sete casas decimais.

$$e = 2,7182818.$$

Veremos, no decorrer desta seção, sua importância. Esta constante é definida por O número "e"é definido pela fórmula

$$e = \exp 1.$$

Usando o fato de $e = \exp 1$, definindo na definição anterior e pela definição da função exponencial natural, vista no início dessa seção, temos que:

$$\ln e = 1.$$

A função definida anteriormente como $y = \exp(x)$ é a função exponencial na base e. Para todos os valores de x,

$$\exp(x) = e^x.$$

Pela definição 3.2.1,$a^x = \exp(x \ln a)$om $a = e$, então $e^x = \exp(x \ln e)(*)$. Como $\ln e = 1$ e substituindo em (*), obtemos

$$e^x = \exp(x).$$

No decorrer deste capítulo, usaremos e^x em vez de $\exp(x)$. Assim,

1. $e^x = y \Leftrightarrow x = \ln y$;
2. $\ln e^x = x$ e $e^{\ln x} = x$;
3. $a^x = e^{x \ln a}$, para todo $a > 0$.

Vamos estabelecer algumas propriedades da função exponencial natural:

Para todos os números reais x e y vale que

$$e^x.e^y = e^{x+y}.$$

Pela ***propriedade 3.1.3***, $\ln(ab) = ln(a) + ln(b)$, sendo $a = e^x$ e $b = e^y$, então: $\ln(e^x.e^y) = \ln(e^x) + \ln(e^y)$.

De acordo com a Definição 3.2.1, $y = e^x \Leftrightarrow x = \ln(y)$, temos

$$\ln(e^x.e^y) = x + y \Rightarrow e^x.e^y = e^{x+y}.$$

Para todos os números reais x e y vale que

$$\frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}.$$

Pela propriedade 3.1.4, $\ln(\frac{a}{b}) = ln(a) - ln(b)$, sendo $a = e^x$ e $b = e^y$, então: $\ln(\frac{e^x}{e^y}) = \ln(e^x) - \ln(e^y)$.

De acordo com a ***Definição 3.2.1***, $y = e^x \Leftrightarrow x = \ln(y)$, temos

$$\ln(\frac{e^x}{e^y}) = x - y \Rightarrow \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}.$$

Para todos os números reais x e y vale que

$$(e^x)^y = e^{xy}$$

Usando o fato de $a = e^{lna}$, seja $a = (e^x)^y$, temos

$$(e^x)^y = e^{ln(e^x)^y}.(*)$$

Aplicando a ***propriedade 3.1.2*** no expoente do segundo membro da igualdade $(*)$, obteremos

$$(e^x)^y = e^{yln(e^x)}.$$

Mas $\ln e^x = x$, e portanto,

$$(e^x)^y = e^{xy}.$$

Para todo número real,

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x}.$$

Pela ***propriedade 3.1.1***, $\ln 1 = 0$, portanto $e^0 = 1$, assim:

$$e^{-x}.e^x = 1 \Rightarrow e^{-x+x} = e^0 = 1.$$

Como a função exponencial natural é a inversa da função logarítmica natural, pelo teorema da função inversa, que diz:"A derivada da função inversa f^{-1}, definida por $x = f^{-1}(y)$ será dada por $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$".Pela definição 3.2.1, $y = e^x \Leftrightarrow x = \ln(y)$. Vamos derivar $x = \ln(y)$ em relação a x, obtemos:

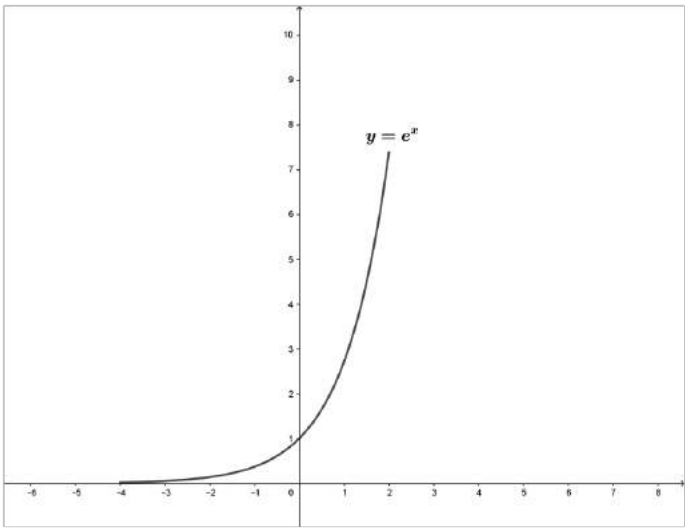
$$1 = \frac{1}{y}.\frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = y.$$

Como $y = e^x$, substituindo temos $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$.

A derivada da função exponencial natural é ela própria. Com isso, concluímos que a função exponencial natural não se altera com a operação de derivação.

Pelo fato de a função exponencial ser a inversa da logarítmica natural,seu gráfico é obtido pela reflexão do gráfico do logaritmo. Como a imagem da função exponencial é o conjunto de todos os números positivos, segue que $e^x > 0$ para todos os valores de x. Assim o gráfico está totalmente acima do eixo x.

Figura 19 – Gráfico de $y = e^x$



Fonte: Elaborada pela autora

Vamos observar outras propriedades:

1. $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$;
2. $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$;
3. $\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}} = e$.

4.3 Função exponencial de base a

Se a for um número positivo qualquer e x for um número real, então a função f definida por

$$f(x) = a^x.$$

Essa função também possui as mesmas propriedades da função exponencial natural.

Se x e y forem números reais e a for positivo, então: $a^x.a^y = a^{x+y}$

$a^x \div a^y = a^{x-y}$

$(a^x)^y = a^{xy}$

$(ab)^x = a^x b^x$

$a^0 = 1$

Vamos agora calcular a derivada dessa função exponencial,usando o fato de $a^x = e^{x\ln a}$.

$\frac{d}{dx}(a^x) = \frac{d}{dx}(e^{x\ln a}) = e^{x\ln a}(\frac{d}{dx}x\ln a) = a^x \ln a$

Assim sendo, temos os teoremas a seguir:

Se a for um número positivo qualquer e u for uma função diferenciável de x,

$$\frac{d}{dx}(a^u) = a^u \ln a \frac{d}{dx}(u)$$

Se a for qualquer número positivo diferente de 1,

$$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$$

4.4 Função logarítmica de base *a*

Se a for qualquer número positivo diferente de 1, a função logarítmica de base a será a inversa da exponencial de base a, assim

$$y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x$$

Sendo que y é qualquer número real. Se $a = e$, temos a função logarítmica de base e, ou seja, a função logarítmica natural. Portanto, a função logarítmica de base a tem as mesmas propriedades da logarítmica natural.

$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$.

$\log_a(x \div y) = \log_a(x) - \log_a(y)$

$\log_a(1) = 0$

$\log_a(x^y) = y \log_a(x)$

Vejamos a relação entre os logaritmos na base a e base e:

1. $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$;
2. $\log_a e = \frac{1}{\ln a}$.

Vamos agora calcular a derivada da função logarítmica de base a, $y = \log_a x$

$$\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{d}{dx}(\frac{\ln x}{\ln a}) = \frac{1}{\ln a}(\frac{d}{dx}\ln x) = \frac{1}{x \ln a} = \frac{\log_a e}{x}.$$

Aplicando a regra da cadeia e usando $\frac{\log_a e}{x}$, temos o seguinte teorema.

Se u for uma função diferenciável de x, $\frac{d}{dx}(\log_a u) = \frac{\log_a e}{u}.\frac{d}{dx}(u) \Leftrightarrow \frac{d}{dx}(\log_a u) = \frac{1}{u \ln a}.\frac{d}{dx}(u)$

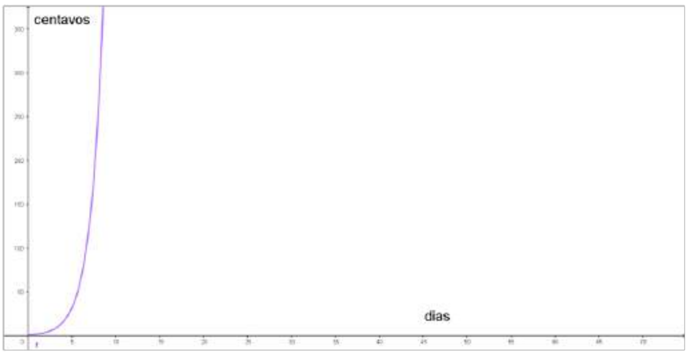
5 APLICAÇÕES

Neste capítulo, dedicamos um estudo de algumas aplicações clássicas que envolvem funções exponenciais e logarítmicas.Já vimos como essas funções são poderosas ferramentas para a simplificação de cálculos aritméticos como multiplicação, divisão e potenciação com expoentes racionais e como o advento dessas ferramentas ajudou a humanidade nas navegações e nos princípios da astronomia. Neste capítulo, veremos as inúmeras aplicações das funções exponenciais e logarítmicas na biologia, ciências sociais, fenômenos físicos, economia, química, entre outros, que mostram a necessidade de entender como essas funções se comportam, pois a partir da análise correta desses gráficos podemos prever, por exemplo, como a transmissão de um vírus se comporta, prevendo em qual período ocorrerá o pico de contaminação e quais medidas deverão ser tomadas para frear essa transmissão.

5.1 Pandemia

Nos últimos meses, em todos os lugares, escutamos falar da curva de transmissão do coronavírus e isso provoca muitos debates e dúvidas. Mas afinal, o que é essa curva de transmissão? A resposta é bem simples, mas primeiro precisamos entender o que é um crescimento exponencial e como isso, no caso de uma pandemia, pode ser perigoso. Para isso, vamos trazer uma questão. Paulo decidiu fazer doações durante o mês de janeiro (31 dias), da seguinte forma: no primeiro dia, ele vai doar 1 centavo, no segundo dia, ele vai doar 2 centavos; no terceiro, 4 centavos, no quarto, 8 centavos e assim sucessivamente, dobrando a doação do dia anterior até o o final do mês. Continuando assim, somente no dia 31 de janeiro, sem contabilizar todos os outros dias do mês, Paulo teria que desembolsar R$$10.737.418,24$. Esse número é o resultado de 2^{30}. Vamos ver como se comporta o gráfico desses valores no gráfico abaixo.

Figura 20 – Gráfico da doação



Fonte: Elaborada pelo autora

No gráfico acima, fica fácil ver como o valor da doação aumenta rapidamente com o passar dos dias.

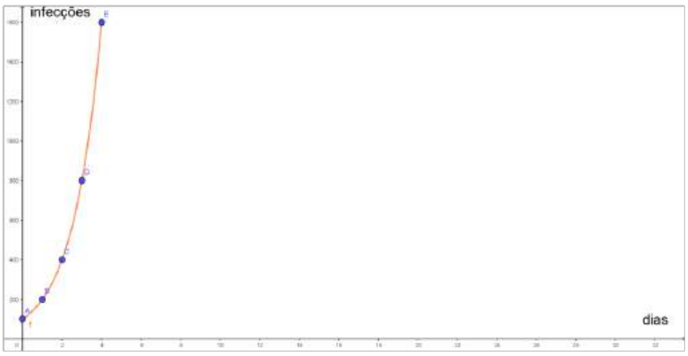
O exemplo acima é um exemplo de crescimento exponencial e a curva que o gráfico faz é similar à curva de transmissão do coronavírus. Podemos definir a função exponencial como sendo $f(x) = k.a^x$ onde k é uma constante e a um número real maior que zero e diferente de um.

No caso do exemplo temos $k = 1, a = 2$ e x variando entre $0 \leq x \leq 30$. Vamos supor uma situação onde $k = 100$ (número de pessoas infectadas), $a = 2$ (taxa de transmissão, isso significa que cada pessoa contaminada infecta mais duas) e x (dias) variando entre $0 \leq x \leq 4$. O que teremos.

1. Para $x = 0$,primeiro dia $0 = 100.2^0 = 100$
2. Para $x = 1$,segundo dia $1 = 100.2^1 = 200$
3. Para $x = 2$,terceiro dia $2 = 100.2^2 = 400$
4. $x = 3$,quarto dia $2 = 100.2^3 = 800$
5. $x = 4$,quinto dia $2 = 100.2^4 = 1600$

A curva de transmissão, para esse caso hipotético, seria representada pelo gráfico.

Figura 21 – Gráfico de transmissão



Fonte: Elaborada pela autora

5.2 Matemática financeira/Juros compostos

Em tempos em tempos, o Capitalismo vive uma crise, seja por conta da queda de uma bolsa de valores importante (1929), crise imobiliária (2008) ou mais recentemente a pandemia (2020). E sempre que essas crises acontecem é muito importante que você tenha uma reserva financeira para passar por esses momentos com menos turbulência. Sendo assim, devido a essas turbulências uma expressão vem a cada dia se tornando mais comum entre os brasileiros, que é a educação financeira, educação esta sendo cotada até para entrar no currículo fixo das escolas.

Uma boa definição para educação financeira seria:

> "O processo mediante o qual os indivíduos e as sociedades melhoram a sua compreensão em relação aos conceitos e produtos financeiros, de maneira que, com informação, formação e orientação, possam desenvolver os valores e as competências necessários para se tornarem mais conscientes das oportunidades e riscos neles envolvidos e, então, poderem fazer escolhas bem informadas, saber onde procurar ajuda e adotar outras ações que melhorem o seu bem-estar. Assim, podem contribuir de modo mais consistente para a formação de indivíduos e sociedades responsáveis, comprometidos com o futuro". (OCDE,2005)

Mas seria impossível falar em educação financeira sem entender o conceito de juros. Aqui vou me ater ao estudo dos juros compostos, mais especificamente à fórmula do montante M que é dado pela fórmula $M = C(1+i)^t$, onde C é o capital inicial, que será aplicado por um período t de unidades de tempo a uma taxa i, também por unidade de tempo.

Para demonstrarmos essa fórmula vamos considerar as seguintes informações:

1. Montante é $M = C(1+i)^t$.
2. Juros é $J = C.i$.
3. M_1 é o montante após um período.
4. M_2 é o montante após dois períodos.
5. M_3 é o montante após três períodos.

Sendo assim temos:

$$M_1 = C + C.i = C(1+i)$$

$$M_2 = M_1 + M_1.i = M_1(1+i) = C(1+i)^2$$

$$M_3 = M_2 + M_2.i = M_2(1+i) = C(1+i)^3$$

Daí segue que:

$$M = C(1+i)^t$$

Observe que a fórmula do montante é uma função exponencial em t, assim o gráfico da função M(t) será uma curva exponencial.

Vamos agora resolver dois problemas que mostram a relação existente entre juros compostos e as funções exponenciais e logarítmicas.

1. Um capital é aplicado em regime de juros compostos a uma taxa mensal de 2% a.m.Depois de quanto tempo este capital estará duplicado?

SOLUÇÃO:

Sabemos que $M = C.(1+i)^t$. Quando o capital inicial estiver duplicado teremos $M = 2C$. Substituindo, vem:

$$2C = C(1+0,02)^t.$$

Simplificando, fica $2 = 1,02^t$. Teremos então:

$$t = \log_{1,02} 2 = \frac{\log 2}{\log 1,02} = \frac{0,30103}{0,00860} = 35.$$

Portanto, o capital estaria duplicado após 35 meses, o que equivale a 2 anos e 11 meses.

2. Um capital de R$ 2000 mil é aplicado a juros compostos de 10%a.a. Calcule o montante após 4 anos.

SOLUÇÃO:

Como $M = C(1+i)^t$, substituindo os valores temos:

$$M = 2000.(1+0,1)^4$$

$$M = 2000.(1,1)^4$$

$$M = 2000.1,4641$$

$$M = 2928,20.$$

5.3 Meia-vida.

Em 1974 o antropólogo americano Donald Johanson e o na época estudante Tom Gray, descobriram em uma vila da Etiópia, Hadar, um fóssil de Australopithecus afarensis, considerado o fóssil humano mais antigo do mundo e batizado de Lucy, com idade estimada de 3,2 milhões de ano. Um fato interessante é que o nome Lucy foi escolhido porque em um rádio tocava a música Lucy in the Sky with Diamonds, do famoso quarteto de Liverpool (John Lennon, Paul Mccartney, George Harrison e Ringo Starr) os Beatles.

A dúvida sobre a origem do nome Lucy já foi respondida, mas outra questão importante é: como os cientistas determinaram a idade do fóssil? Essa pergunta pode ser respondida se entendermos o conceito de meia-vida de uma substância radioativa, que é o tempo necessário para que a massa de uma substância radioativa se reduza a metade. A seguir temos uma tabela com a meia-vida de alguns elementos.

Tabela 1 – Meia-vida

Elemento (Radioisótopo)	Meia-vida
Carbono - 15	2,4 segundos
Cloro - 38	37 minutos
Xenônio - 135	9 horas
Berílio - 7	53 dias
Sódio - 22	2,6 anos
Césio - 137	30,17 anos
Polônio - 209	103 anos
Carbono - 14	5730 anos
Plutônio - 239	24400 anos
Urânio - 235	4,5 bilhões de anos
Urânio - 238	5 bilhões de anos

Fonte: Elaboarda pela autora

Podemos calcular a meia-vida usando a fórmula $M = M_0.(\frac{1}{2})^x$, com $x = \frac{t}{p}$.

M = Massa no instante t.

M_0 = Quantidade inicial de massa

x = Número de períodos de meia-vida

t = Tempo decorrido

p = Meia-vida.

No caso da Lucy, o carbono 14 não é útil, pois ele é usado para amostras que tenham, no máximo, entre $50mil$ e $70mil$ anos. Mas vamos fazer uma aplicação usando o $C_(14)$ como parâmetro.

Sabemos que a meia-vida do carbono 14 é de 5730 anos. Qual o percentual da amostra desse isótopo existirá depois de 22920 anos?

Resolução:

Primeiro vamos calcular o número de períodos de meia-vida no período de 22920 anos.

$$x = \frac{t}{p} \Rightarrow x = \frac{22920}{5730} \Rightarrow x = 4$$

. Agora considerando $M_0 = 100\%$ temos,

$$M = M_0.(\frac{1}{2})^x$$

$$M = 100.(\frac{1}{2})^4$$

$$M = 100.\frac{1}{16} = 6,25\%$$

Assim podemos entender que se temos $6,25\%$ de material restante do isótopo carbono 14 de uma amostra é porque já se passaram aproximadamente 23 mil anos. Cálculo semelhante foi feito para determinar a idade de Lucy, sendo que com outro Radioisótopo.

5.4 Escalas sísmicas (Escala Richter)

A cidade de Valdivia, no Chile, virou notícia mundial quando em 22 de maio de 1960, um terremoto de magnitude $9,5M_W$ (magnitude de momento), até o hoje o maior já registrado cientificamente, $9M_L$ (magnitude local ou magnitude Richter) e intensidade XII na escala de Mercalli, devastou a cidade.

A escala de Mercalli é uma escala que determina a intensidade de um terremoto a partir de seus efeitos nas pessoas, estruturas e na natureza, ou seja, é uma escala qualitativa. A escala de magnitude de momento (MMS) é uma escala logarítmica onde para cada grau de diferença sua magnitude é multiplicada por trinta, isso quer dizer, por exemplo, que o grau 6 tem uma magnitude 900 vezes mais que o grau 4. A escala Richter, assim como a escala de magnitude de momento, também é uma escala logarítmica, sendo que nesse caso para cada grau de diferença temos um salto na magnitude de 10 vezes em relação ao grau anterior. Dependendo do grau registrado na escala Richter, podemos ter os seguintes resultados.

Tabela 2 – Escala Ritcher

MAGNITUDE	EFEITOS
Menores que 2 graus	Tremores captados apenas por sismógrafos
Entre 2 e 4 graus	Impacto semelhante à passagem de um veículo grande e pesado;
Entre 4 e 6 graus	Quebra vidros, provoca rachaduras nas paredes e desloca móveis;
Entre 6 e 7 graus	Danos em edifícios e destruição de construções frágeis
Entre 7 e 8 graus	Danos graves em edifícios e grandes rachaduras no solo
Entre 8 e 9 graus	Destruição de pontes, viadutos e quase todas as construções
Maior que 9 graus	Destruição total

Fonte: Elaborada pela autora

Apesar de atualmente a MMS ser mais utilizada para medição de sismos, a escala Richter é mais utilizada nos meios de comunicação para o grande público, e sua magnitude pode ser calculada usando a expressão $M = \frac{2}{3}.\log_{10}\frac{E}{E_0}$, onde E é a energia liberada no terremoto em KWh e $E_0 = 7.10^{-3}KWh$.

(a) Qual a energia liberada num terremoto de magnitude 8 na escala Richter?

SOLUÇÃO:

Usando $M = \frac{2}{3}.\log_{10}\frac{E}{E_0}$, temos que:

$$8 = \frac{2}{3}.\log_{10}\frac{E}{7.10^{-3}}$$

$$12 = \log_{10}\frac{E}{7.10^{-3}}$$

$$10^{12} = \frac{E}{7.10^{-3}}$$

$$E = 7.10^{12}.10^{-13}$$

$$E = 7.10^{9}KHh$$

(b) Aumentando de uma unidade a magnitude do terremoto, por quanto fica multiplicada a energia liberada?

SOLUÇÃO:

Usando $M = \frac{2}{3}.\log_{10}\frac{E}{E_0}$ e $E^{'}$ como a energia liberada num terremoto de magnitude 9 temos:

$$9 = \frac{2}{3}.\log_{10}\frac{E'}{7.10^{-3}}$$

$$\frac{27}{2} = \log_{10}\frac{E'}{7.10^{-3}}$$

$$10^{\frac{27}{2}} = \frac{E'}{7.10^{-3}}$$

$$E' = 7.10^{\frac{21}{2}}KHh$$

Daí segue que:

$$K = \frac{E'}{E}$$

$$K = \frac{7.10^{9}}{7.10^{\frac{21}{2}}}$$

$$K = 10^{\frac{3}{2}}$$

Logo, a energia liberada fica aumentada $10^{\frac{3}{2}}$ vezes.

5.5 Altitude e a pressão atmosférica

Quando vamos preparar um prato, é comum consultarmos uma receita para não cometermos erros na hora do preparo da refeição. Algumas receitas, além dos ingredientes, também trazem o tempo de cozimento de alguns alimentos, mas esse tempo pode variar dependendo de qual cidade você mora. Por que isso acontece?

Um ponto focal no processo de cozimento de alimentos é a temperatura de ebulição da água, que sabemos que é de 100º C, mas esse valor é referente ao nível do mar onde a pressão atmosférica é de 1atm ou 760 mmHg. Quanto menor for a pressão atmosférica sobre a superfície da água,

menor será o seu ponto de ebulição, sendo assim, em lugares onde a pressão atmosférica é menor que 1 atm o ponto de ebulição da água será menor que 100°C, assim, aumentando o tempo necessário para o cozimento dos alimentos. Por exemplo, a água entra em ebulição a aproximadamente 70ºC no Monte Everest, onde a pressão atmosférica é de apenas 240 mmHg. Podemos dizer, em decorrência da lei de Boyle, que se a pressão atmosférica ao nível do mar é dada por p_0, então a pressão atmosférica a uma altitude h pode ser calculada a partir da função $p(h) = p_0.e^{-\alpha h}$, onde α é uma constante.
Com a utilização de uma barômetro podemos calcular a pressão atmosférica em determinado local, feito isso, fica fácil determinar a altitude h.
Usando: $p(h) = p_0.e^{-\alpha h}$, temos:

$$\frac{p}{p_0} = e^{-\alpha h}$$

Aplicando ln em ambos os membros da equação, segue que:

$$\ln \frac{p}{p_0} = -\alpha h$$

$$h = \frac{-\ln \frac{p}{p_0}}{\alpha}$$

$$h = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{p_0}{p}$$

Daí segue que a altitude h a uma determinada pressão atmosférica p será calculada pela expressão:

$$h(p) = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{p_0}{p}$$

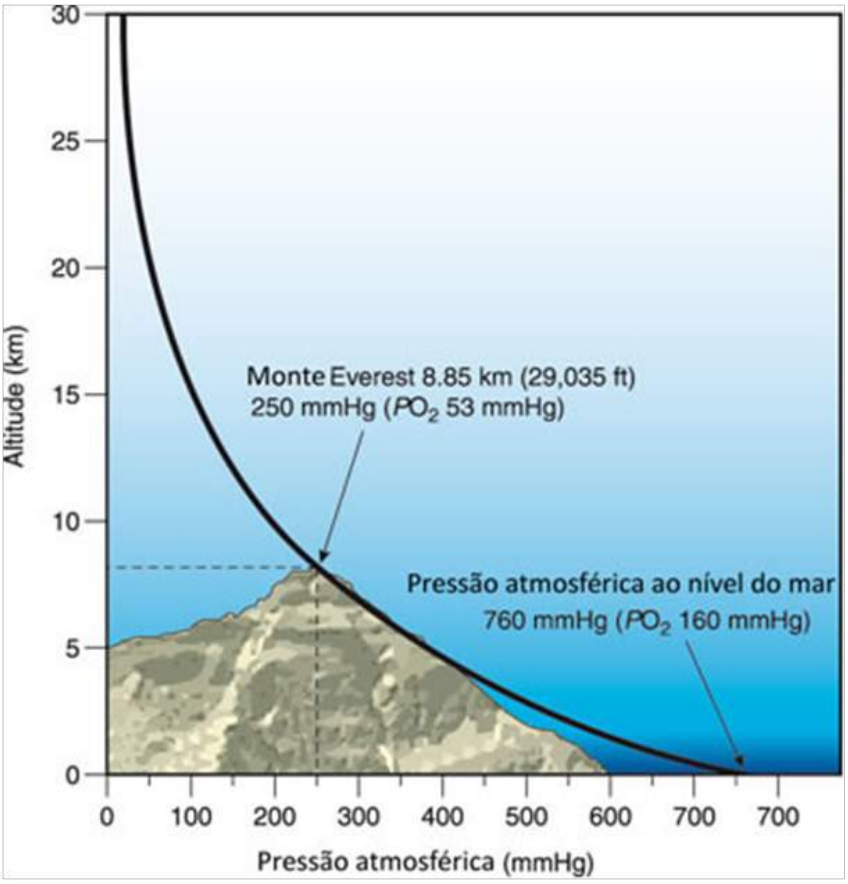
A imagem ilustra bem a relação entre a altitude h e a pressão atmosférica p.

5.6 Newton e o Resfriamento de corpos

Dentre as varias contribuições na física e na matemática feitas por Isaac Newton, podemos citar a ?Lei de resfriamento de Newton?, que diz que a taxa de variação de temperatura de um corpo é proporcional à diferença entre a temperatura do corpo e o meio que esse corpo esta inserido, ou seja, se T é a temperatura do corpo e T_m é a temperatura do meio, então a taxa de variação da temperatura em relação ao tempo $\frac{dT}{dt}$ será da pela expressão $\frac{dT}{dt} = K(T - T_m)$, onde K é uma constante de proporcionalidade.

Demonstração da fórmula do resfriamento.

Figura 22 – Gráfico Altitude x Pressão Atmosférica



Fonte: Elaborada pela autora

Como a equação $\frac{dT}{dt} = K(T - T_m)$ é uma equação diferencial ordinária de primeira ordem, usaremos o método de agrupamento de variáveis.

Se $\frac{dT}{dt} = K(T - T_m)$,então $\frac{dT}{(T - T_m)} = K.dt$

Integrando os dois membros da equação, temos:

$$\int \frac{dT}{(T - T_m)} = \int K.dt.$$

Daí segue que:

$$\ln |T - T_m| = K.t + C$$

$$e^{K.t+C} = T - T_m$$

Observação: Como estamos analisando somente o resfriamento, T sempre será maior T_m, logo podemos retirar o módulo. Agora fazendo $e^C = C$ teremos:

$$T = T_m + e^{K.t}$$

APLICAÇÃO:

Suponha que uma xícara que foi servida a 70º C e consequentemente é imensa em um ambiente cuja temperatura seja 30º C. Após 20 minutos a temperatura do chá passa a ser 40º C. Determine a temperatura do chá 50 minutos depois de ser servido e considerando que a temperatura ambiente permaneceu 30º C.

Para $t = 0$ temos,

$$70 = 30 + C.e^{K.0}$$

$$C = 40$$

Daí segue que para t=20 temos,

$$40 = 30 + C.e^{K.20}$$

$$e^{20K} = \frac{1}{4}$$

$$e^{10K} = \frac{1}{2}$$

Assim para depois de 50 minutos teremos,

$$T = 30 + 40.e^{K.50}$$

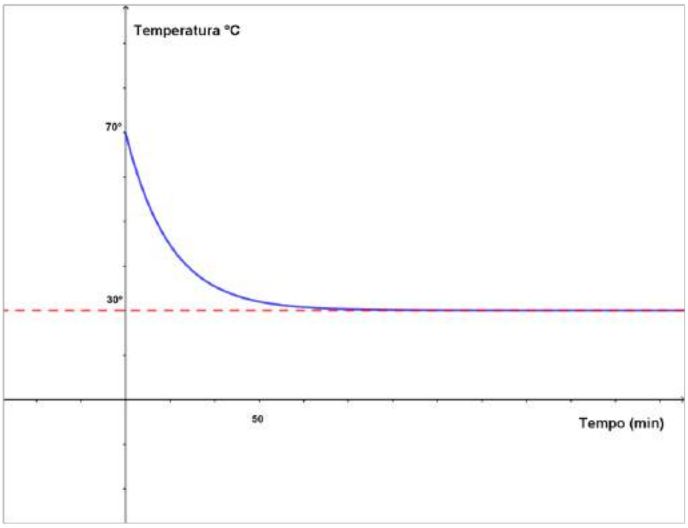
$$T = 30 + 40.e^{(K.10)5}$$

$$T = 30 + 40.(\frac{1}{2})^5$$

$$T = 31,25\,^{\circ}C$$

Esse resultado indica que com o passar do tempo teremos $T = T_m$, com a representação gráfica na figura abaixo.

Figura 23 – Gráfico do resfriamento da xícara.



Fonte: Elaborada pela autora

Observação: Caso seja necessário achar o valor da constante K basta aplicar ln nos dois membros da igualdade

$$e^{10K} = \ln\frac{1}{2}$$

$$10K = -0,0693$$

$$K = -0,0693$$

6 CONCLUSÃO

O presente trabalho teve como objetivo analisar as abordagens das funções exponenciais e logarítmicas nos ensinos médio e superior.Esse objetivo surgiu a partir das reflexões de como os livros adotam metodologias diferentes para a abordagem dessas funções e também a ordem que o conteúdo é mostrado.

O tema é considerado desafiador de ser apresentado, discutido e ensinado aos alunos.Os livros que foram usados neste trabalho, foi referente ao ensino médio e superior.

Durante a pesquisa foi observado maneiras diferentes de abordagem destas funções. Surgindo dois questionamentos:

1. O que deve vir primeiro no ensino dessas funções?;

2. Discutir as vantagens e as desvantagens de se começar pela exponencial ou pelo logaritmo.

No ensino médio, a ordem abordada é primeiro a função exponencial, em seguida a função logaritmos. Nos livros o assunto é iniciado com uma breve revisão de potenciação, com finalidade de relembrar tais conteúdos trabalhados nos ensinos anteriores. Em seguida, mostram definições, propriedades, teoremas e demonstrações das funções exponenciais e logaritmos. Nos livros o assunto é bastante resumida, direcionando o estudo apenas sob o enfoque algébrico-funcional.

Para o ensino médio o logaritmo vim primeiro é bem complicado, porque implica na construção prévia da função exponencial.

No ensino superior, a abordagem é diferente, já que os alunos possuem um vasto conhecimento vindo dos anos anteriores. É usado definição geométrica dos logaritmos, por possuir vantagem de simplicidade conceitual e técnica. Em alguns livros de cálculo o assunto é iniciado com definições de logarítmicos, suas propriedades, teoremas e demonstrações. Em seguida aborda as funções exponenciais como sendo a inversa dos logaritmos.

O modo de escolha do processo de apresentá los é apenas uma questão de escolha, vai de acordo com o nível do alunos e seus conhecimentos adquiridos nos anos anteriores.

REFERÊNCIAS

AVILA, G. Como é que se constrói uma tábua de logaritmos. **Revista do professor de Matemática**, São Paulo, n. 26, 2019. Disponível em: https://www.rpm.org.br/cdrpm/26/1.htm. Acesso: 21 dez. 2020.

BOYER, C. B. **História da matemática.** São Paulo: Edgard Blucher, 1994.

COSTA, G. A. T. F. da; GUERRA, F. **Cálculo 1**. 2. ed. Florianópolis: UFSC, 2009.

EDUCAÇÃO, M. **Sistema de numeração babilônico.** Disponível em: https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/sistema-numeracao-babilonico.htm . Acesso: 28 nov. 2020.

EUFRASIO, Maria Faustina. **Potenciação**. *In*: MATEMÁTICA faz parte!. [*S.l.*], 16 maio 2013. Disponível em:http://lianamatematica.blogspot.com/2013/05/potenciacao.html. Acesso: 29 nov. 2020.

EVES, H. **Introdução a história da matemática**. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.

GUIDORIZZI, H. L. **Um curso cálculo**. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2002. v. 1.

JOHN Napier Logarithmorum 1620. **1 fotografia digital**, 1333 x 1875 pixels, formato jpg. The History Collection / Alamy Stock Photo. Disponível em: https://www.alamy.es/foto-john-napier- logarithmorum-1620-140030197.html. Acesso em: 29 nov. 2020.

LEITHOLD, L. **O cálculo com geometria analítica.** São Paulo: Editora Harbra, 1994.

LIMA, E. L. **Logaritmos**. Rio de Janeiro: SBM, 2009.

LIMA, E. L. **Números e funções reais.** Rio de Janeiro: SBM, 2014.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, A. C. M. E. **A Matemática do ensino médio.** Rio de Janeiro: SBM, 2006. v. 1.

PEREIRA, J. G. de A. **Abordagem das funções exponencial e logarítmica numa perspectiva conceitual e gráfica no ensino médio**, 2010. 121 f . Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte. Disponível em: http://www.biblioteca.pucminas.br/teses/EnCiMat_PereiraJG_1.pdf. Acesso: 10 jan. 2021.

ROBALLO, M. S. **Aplicações de funções exponenciais e logarítmicas**.2014. 67 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Departamento de Matemática,Universidade de Brasília, Brasília, 2014. Disponível em: https://www.repositorio.unb.br/handle/10482/17315. Acesso: 02 jan. 2021.

SÁ, Robison. **Aspectos históricos sobre função matemática**. *In*: INFOESCOLA. Disponível em: https://www.infoescola.com/matematica/aspectos-historicos-sobre-funcao-matematica. Acesso: 28 nov. 2020.

SANTOS, A. T. C. dos. Funções exponenciais e logarítmicas: um estudo por meio de uma sequência didática. *In*: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 11.,2013 Curitiba. **[Anais]**. Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2013. Disponível em: http://sbem.iuri0094.hospedagemdesites.ws/anais/ XIENEM/pdf/3190_1368_ID.pdf. Acesso: 15 dez. 2020.

SOARES, E. C. **Uma investigação histórica sobre os logaritmos com sugestões didáticas para a sala de aula**. 2011. 142 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2011. Disponível em: https://repositorio.ufrn.br/jspui/handle/123456789/16070. Acesso: 10 jan. 2021.

STEWART, J. **Cálculo**. São Paulo: Thomson, 2006.