UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

MARIA ELIANDRA SOUSA MACIEL

O PRINCÍPIO DA CASA DOS POMBOS E O PRINCÍPIO DA INVARIÂNCIA EM PROBLEMAS OLÍMPICOS

FORTALEZA-CE

2021

MARIA ELIANDRA SOUSA MACIEL

O PRINCÍPIO DA CASA DOS POMBOS E O PRINCÍPIO DA INVARIÂNCIA EM PROBLEMAS OLÍMPICOS

Dissertação apresentada ao Centro de Ciências do Departamento de Matemática em Matemática no Programa de Pós-Graduação Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. José Ederson Melo Braga

FORTALEZA-CE

2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

M139p Maciel, Maria Eliandra Sousa.
O principio da Casa dos Pombos e o Principio da Invariância em problemas Olímpicos / Maria Eliandra Sousa Maciel. – 2021.
58 f. : il.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2021.
Orientação: Prof. Dr. José Ederson Melo Braga.

1. Invariância. 2. Princípio da Casa dos Pombos. 3. Olimpíadas. 4. Matemática. 5. Problemas. I. Título.

CDD 510

MARIA ELIANDRA SOUSA MACIEL

O PRINCÍPIO DA CASA DOS POMBOS E O PRINCÍPIO DA INVARIÂNCIA EM PROBLEMAS OLÍMPICOS

Dissertação apresentada ao Centro de Ciências do Departamento de Matemática em Matemática no Programa de Pós-Graduação Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. José Ederson Melo Braga

Aprovada em: ___/___/______.

BANCA EXAMINADORA

____
Prof. Dr. José Ederson Melo Braga (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

____
Prof. Dr. Diego Eloi Misquita Gomes
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE)

____
Prof. Dr. Leo Ivo da Silva Souza
Universidade Estadual do Ceará (UECE)

À minha mãe

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus que me proporcionou viver e experimentar diversas formas de felicidade e amor.

À minha família, em especial a minha amada mãe, Claudia Maria Sousa Maciel, que está comigo em todos os momentos da minha vida, me guiando pelos caminhos corretos e demonstrando a todo o momento o mais belo amor e carinho. Agradeço por sempre não medir esforços em buscar as melhores condições para eu estudar e por sempre me incentivar, não me deixando desistir dos meus sonhos.

Ao meu amado sobrinho Francisco Enzo Sousa dos Santos que me fez entender e sentir como é a pureza do amor de uma criança.

Aos meus queridos professores do PROFMAT da UFC.

Ao meu orientador, professor Dr. José Ederson Melo Braga por suas grandiosas contribuições, pela paciência, por sua empatia e confiança depositada em mim.

Ao professor Dr. Diego Eloi Misquita Gomes (IFCE) que esteve comigo desde a faculdade, incentivando sempre a progressão de meus estudos e dando contribuições valiosas para a produção deste trabalho.

Aos meus colegas da turma PROFMAT - UFC (ENA 2017), em especial a Lisandra Mayara dos Santos e George da Costa Euzébio pela parceria e amizade durante o curso.

Ao meu amigo Luiz Augustavo Almeida Feitosa que me incentivou a ingressar no curso e que me ajuda em vários aspectos da minha vida desde a faculdade.

Aos meus professores do Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE) - campus Canindé, em especial ao professor Me. Diego Ponciano de Oliveira Lima e à professora Me. Luciana de Oliveira Souza Mendonça.

Aos meus colegas de faculdade, Larissa Maria Sousa Cavalcante, Francisco de Assis Marques Uchoa, Halyson Rodrigo Tavares Nunes, Afrânio Soares da Silva e Luis Ricardo Marcolino de Sousa pela parceria e amizade que perdura desde a faculdade.

A Universidade Federal do Ceará (UFC).

RESUMO

O presente estudo teve como finalidade geral estudar o Princípio da Casa dos Pombos (PCP) e o Princípio da Invariância (PI) aplicados em problemas olímpicos, culminando em mais um material de apoio e treinamento a estudantes que estão se preparando para olimpíadas. Para tanto utilizou-se uma pesquisa do tipo descritiva. A pesquisa foi estruturada em quatro capítulos, no primeiro consta um breve contexto histórico das Olimpíadas de Matemática nacional e internacional; O segundo capítulo apresenta a teoria que envolve o princípio da casa dos pombos, demonstrações necessárias e as aplicações em problemas olímpicos com sugestões de resolução; O terceiro capítulo é similar ao segundo, mas utilizando o princípio da invariância e problemas olímpicos envolvendo o conteúdo; o quarto capítulo foi destinado a apresentação da solução dos problemas propostos no segundo e terceiro capítulo como apoio nos estudos dos leitores. Ou seja, ele trata da aplicabilidade tanto do PCP quanto do PI. Nele, as soluções são apresentadas com o objetivo de mitigar eventuais dificuldades do leitor com os temas abordados neste material. Os problemas do Princípio da Casa dos Pombos e Princípio da Invariância exigem para a sua resolução não apenas um raciocínio combinatório, mas criatividade e, sobretudo, conhecimentos de outras áreas da Matemática, pois como ambas as ferramentas não dispõem de fórmulas a serem utilizadas na resolução de problemas, estas exigem de quem se debruce sobre o assunto aprender a trabalhar de forma combinada estes princípios com argumentos aritméticos, algébricos, geométricos, etc. Os problemas olímpicos trabalhados ao longo desta pesquisa permitiram uma amplitude da riqueza de situações em que esses conhecimentos podem ser empregados, melhorando, assim, o raciocínio lógico-matemático, principalmente por se tratar de questões clássicas, com resoluções simples, claras e compreensíveis, que facilitam o entendimento do estudante.

Palavras-Chaves: Invariância. Princípio da Casa dos Pombos. Olimpíadas.

ABSTRACT

The present study had the general purpose of studying the Principle of the House of Pigeons (PCP) and the Invariance Principle (PI) applied to Olympic problems, culminating in yet another support and training material for students who are preparing for the Olympics. A descriptive research was used for this purpose. The research was structured in four chapters, in the first there is a brief historical context of the national and international Mathematics Olympics; The second chapter presents the theory that involves the principle of the pigeon house, necessary demonstrations and applications in Olympic problems with suggestions for resolution; The third chapter is similar to the second, but using the principle of invariance and Olympic problems involving the content; the fourth chapter was intended to present the solution of the problems proposed in the second and third chapter as support in the studies of the readers. That is, it deals with the applicability of both the PCP and the IP. In it, the solutions are presented with the objective of mitigating eventual difficulties of the reader with the themes covered in this material. The problems of the Principle of the House of Pigeons and Invariance Principle require, in order to solve them, not only a combinatorial reasoning, but creativity and, above all, knowledge of other areas of Mathematics, because as both tools do not have formulas to be used in the resolution of problems, these require those who study the subject to learn to work in a combined way with these principles with arithmetic, algebraic, geometric arguments, etc. The Olympic problems dealt with during this research allowed a wide range of situations in which this knowledge can be used, thus improving the logical-mathematical reasoning, mainly because they are classic questions, with simple, clear and understandable resolutions, which facilitate student understanding.

Keywords: Invariance. Principle of the House of Pigeons. Olympics.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A cada nova edição das principais olimpíadas de matemática, tanto a nível nacional quanto internacional, nos deparamos, cada vez mais, com problemas muito interessantes e instigantes. Muitas vezes uma ideia simples pode resolver de forma rápida um problema considerado de difícil resolução. No entanto, para que a capacidade de ter ideias simples para resolver questões difíceis e engenhosas faça parte da rotina de alguém, esse indivíduo, pode e deve trabalhar a resolução de variados problemas com características semelhantes.

Nessa perspectiva, essa dissertação descreve dois princípios básicos e relevantes na resolução de problemas olímpicos: o Princípio da Casa dos Pombos (PCP) e o Princípio da Invariância (PI). Apesar de ser um conteúdo simples, tem muitas aplicações na matemática.

Para Barbosa (2019) o crescimento exponencial das olimpíadas de matemática, tanto a Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM) quanto à Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) têm exigido referências confiáveis em língua portuguesa, disponíveis para alunos e professores desenvolverem técnicas avançadas em matemática e em argumentação matemática. O autor relata sua dificuldade em estudar os conteúdos, devido à pouca habilidade na língua inglesa.

Na primeira edição da OBMEP, realizada em 2005, houve 10,5 milhões de inscritos. Em 2009, apenas quatro anos depois, esse número cresceu para 19,2 milhões. Hoje, conforme dados da primeira fase da OBMEP em 2020, são aproximadamente 51,9 mil escolas participantes. Tal evento alcança cerca de 17,7 milhões de alunos e 99,84% dos municípios de nosso país. Assim, partindo desse pressuposto, o presente estudo levantou o seguinte questionamento: qual a eficácia do PCP e do PI na resolução de problemas Olímpicos?

Dessa forma, o objetivo geral desta dissertação é estudar o PCP e o PI aplicados a problemas olímpicos, culminando em mais um material de apoio e treinamento a estudantes que estão se preparando para olimpíadas. Um material escrito em língua portuguesa, contendo problemas resolvidos, poderá servir de auxílio para participantes de olimpíadas com o foco nos dois princípios aqui abordados. Para alguns alunos, quem sabe muitos, isto possibilitará novas experiências, técnicas e treinamento, visto que os problemas olímpicos, requerem estudo de técnicas, teoremas e principalmente resolução de diversos problemas, pois como diz o ditado popular, “a prática leva a perfeição”. A principal finalidade da olimpíada é estimular o estudo de Matemática de forma que haja contribuição para a melhoria da qualidade da Educação Básica, identificar talentos, jovens que estão nos anos finais do Ensino Fundamental e em todo Ensino Médio, promover inclusão social e incentivar o aperfeiçoamento dos professores da rede pública de ensino.

O PCP, também conhecido como o Princípio das Gavetas de Dirichlet, é uma importante e poderosa ferramenta matemática, apesar de simples tem o potencial de ser aplicável na resolução de uma gama enorme de problemas. Tal princípio foi usado pela primeira vez em 1834 pelo matemático alemão Gustav Lejeune Dirichlet.

A escolha pelo tema foi motivada pela necessidade de publicar conteúdos, que facilitem o estudo de alunos e professores em sua preparação para as provas de olimpíadas de matemática, sendo o PCP e o PI conteúdos de grande destaque na resolução de problemas e por não nos levarem a recorrer a fórmulas matemáticas ou técnicas complicadas, conforme mostram os exemplos apresentados neste trabalho, decidimos optar por estes dois temas a serem trabalhados nesta dissertação.

O Princípio da casa dos pombos tem base teórica na seguinte afirmação: “ Se $n + 1$ pombos são colocados em n gaiolas, então pelo menos uma gaiola deverá conter, pelo menos, dois pombos”. Se não queremos destruir nenhuma gaiola e não temos a pretensão de cortar nenhum pombo, então, neste caso $n + 1$ (pombos) e n (casas) são inteiros positivos e $n + 1 > n$. O exemplo mais comum deste princípio, que geralmente é encontrado em todos os estudos acerca do assunto é o que segue: em um grupo de 13 pessoas, pelo menos duas delas fazem aniversário no mesmo mês.

Agora, você já deve ter percebido que ao somarmos dois a um natural qualquer, sua paridade permanece a mesma. Este é um clássico exemplo de invariância, que se resume ao fato de uma propriedade relacionada a um problema não se alterar, mesmo após uma transformação.

A princípio são dois conteúdos de fácil compreensão, mas que possuem um vasto campo de aplicação. Veremos no decorrer da dissertação problemas que, de imediato, não imaginaríamos que poderiam ser solucionados utilizando o PCP e o PI.

O trabalho foi dividido em quatro capítulos. No primeiro consta um breve contexto histórico das Olimpíadas de Matemática nacional e internacional.

O segundo capítulo apresenta a teoria que envolve o PCP, demonstrações necessárias e as aplicações em problemas olímpicos com sugestões de resolução.

O terceiro capítulo é similar ao segundo, mas utilizando o PI e problemas olímpicos envolvendo o conteúdo também acompanhados de sugestões de resolução.

O quarto capítulo foi destinado a apresentação das soluções dos problemas sugeridos no segundo e terceiro capítulo, como apoio nos estudos dos leitores.

CAPÍTULO I

BREVE CONTEXTO HISTÓRICO DAS OLIMPÍADAS DE MATEMÁTICA NACIONAL E INTERNACIONAL

Este capítulo foi destinado a apresentação breve da história das Olimpíadas de Matemática no Brasil e no Mundo, tendo como destaque a Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM), a Olimpíada Brasileira de Matemática de Escolas Públicas (OBMEP) e a Olimpíada Internacional de Matemática (IMO).

Apesar da limitação de estudos que abordem as Olimpíadas de Matemática, focou-se em dissertações, artigos e documentos que contribuíram significativamente para esta pesquisa. Neste conjunto de informações destacamos significado, objetivos e contribuições das competições no cenário do ensino e aprendizagem de Matemática, baseado também nos sites das principais olimpíadas.

1.2 Origem do Termo Olimpíada

O termo Olimpíadas, remete-nos a ideia de competição esportiva, o que estamos mais habituados a ouvir no meio do senso comum. Esse termo surgiu devido aos jogos olímpicos, criado pelos gregos, por volta de 2500 a.C. Os gregos de várias cidades se reuniram no santuário na cidade de Olímpia, por isso surgiu o termo "Olimpíadas", com a finalidade de fazerem competições esportivas importantes.

Bagatini (2010, p.12) esclarece um diferencial das olimpíadas nesta época, o que se assemelha bastante com as Olimpíadas de Matemática:

> Esporte disputado não requer do concorrente força e/ ou habilidades físicas que lhe garantam capacidades de obter bons resultados. Na verdade, é uma disputa de caráter intelectual entre jovens em que as forças resumem-se em inteligência, criatividade, imaginação e disciplina mental.

Normalmente, em toda competição olímpica existe o preparo físico, quando se trata de esporte, na modalidade em que será disputado. Já os atletas da Matemática preparam-se por meio da resolução de problemas, tanto de caráter coletivo como individual, tendo como objetivo principal a desenvolver habilidade lógica e a criatividade para resolução em menor tempo possível, por meio da organização de pensamento e trabalho.

1.3 As Primeiras Olimpíadas de Matemática no Mundo

De acordo com Bragança (2013, p.9-10) os historiadores encontraram evidências de que as origens das Olimpíadas de Matemática, ainda que não oficiais, podem ser encontradas nas competições entre famosos estudiosos, durante o Renascimento na Itália. O autor chega a destacar como seria esses encontros:

> Um encontro em praça pública anunciado por cartas bem escritas e um boca a boca tradicional. Um “estudioso" recebe um convite que logo toma a importância de uma convocação. Há então todo um preparo pessoal por parte dos competidores. Pessoas vindas de vários lugares com os mais diversos interesses aglomeram-se para assistir a tal disputa e esperar que alguém se sagre vencedor. Os dois “jogadores" chegam, após um certo tempo de preparação, cada um com suas técnicas e estratégias começam. Cada um desafia o outro dando-lhe um “problema" a ser resolvido e após alguns desafios de ambas as partes surge triunfante o vencedor, o que conseguiu resolver todos os problemas que lhe foram colocados e além disso conseguiu propor, ao seu adversário, um problema que este não conseguiu apresentar a solução.

O sentido de competição é mais remoto do que se pode imaginar. Na Matemática não é diferente, sempre existiu a divergência de pensamentos e teorias, pois como destaca Kuhn (1982. p.32, *caput* MARTINS, 2005)

> Nenhum período entre a antiguidade remota e o fim do século XVII exibiu uma única concepção da natureza da luz que fosse geralmente aceita. Em vez disso havia um bom número de escolas e subescolas em competição, a maioria das quais esposava uma ou outra variante das teorias de Epicuro, Aristóteles, ou Platão.

Pesquisas indicam que as competições, ainda que não oficiais já aconteciam entre os matemáticos, desde o século XVI, segundo Maciel (2009) os desafios entre os matemáticos, eram apostas em dinheiro, reputação ou cátedras[1] em universidades, visto que podia ter reconhecimento público, prestígio e principalmente uma condição econômica privilegiada, isso despertava o interesse dos jovens menos

---

[1] Do latim **cathedra** (que tem origem num vocábulo grego que **significa** “assento” ou “cadeira”), relacionado a uma instância acadêmica qual é desenvolvida mediante acordo de cooperação, tendo isso o objetivo de estimular atividades relacionadas ao ensino e também a pesquisa sobre um determinado assunto.

conhecidos. Ainda de acordo com o autor, muitos matemáticos dedicavam-se a resolução de problemas, que pudessem lhe render méritos, prestígios e/ou reconhecimento pela sociedade, de fato, muitas descobertas matemáticas, renderam prestígio, visto as muitas contribuições para a humanidade. Isso acontecia em forma de duelo, sendo o vencedor, àquele que resolvesse um maior número de problemas.

Para tanto, os problemas com resposta eram guardados “a sete chaves”, esperando o momento oportuno para apresentá-los e ganhar a notoriedade almejada. Maciel e Basso (2009), cita, por exemplo, que *Scipione Del Ferro* (1465-1526) deixou um dos seus mais importantes trabalhos em segredo, o método para a resolução de (equações) cúbicas escritas na forma $x^3 = px + q$**.** Após sua morte, um aluno continuou mantendo o problema em segredo até encontrar um desafio, que valesse a pena divulgar.

Em 1894, os matemáticos húngaros, organizam as primeiras competições de conhecimento matemático, chamadas “Eötvös”. Após a segunda guerra mundial passou a ser chamada apenas Kurshák, em homenagem a um famoso professor de Matemática, chamado Jósef Kürschákdo, membro da Academia de Ciência Húngara.

Essas competições matemáticas de “Eötvös”, foram precursoras do que hoje chamamos de Olimpíadas de Matemática, pois com o passar dos anos foram surgindo competições similares pelo leste Europeu, culminando na primeira Olimpíada Internacional de Matemática (IMO) em 1959 na cidade de Bucareste (Romênia). Desde então ocorre anualmente, com exceção apenas do ano de 1980, sendo os concorrentes, alunos do Ensino Médio, ou seja, menores de 20 anos.

Na última edição da Olimpíada Internacional de Matemática realizada em 2020, o Brasil, em 39 anos de disputa, conquistou um lugar privilegiado, o 10º, a melhor colocação, desde que o Brasil participa do torneio, sendo que nesta edição 105 países disputaram as provas.

Dos seis estudantes que alcançaram as medalhas, três são de Fortaleza, no Ceará, sendo uma medalha de ouro, também de Fortaleza-CE. Para alcançar essa conquista, passaram pela Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM), depois por três testes seletivos e treinamento.

1.4 Olimpíada Brasileira de Matemática

Em 1979 a Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) organizou a primeira Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM). Em 2019 houve a 41º edição, dividida em quatro níveis: ensino fundamental (6º e 7º ano), nível 2 (8º e 9º), o nível 3 que contempla os alunos do Ensino Médio e o nível universitário, que foi criado em 2001 com duas fases.

A OBM além de ter as competições organizadas pela SBM, tem a colaboração do IMPA. A finalidade do evento é utilizar competições matemáticas como base de projetos que têm como objetivos melhorar a qualidade do ensino de Matemática, tanto para alunos como para professores no país, representar o país nas olimpíadas internacionais, recepcionar e apoiar as diversas competições matemáticas, que acontecem no Brasil e descobrir talentos na área da Matemática.

Como principal meio de divulgação da OBM tem a revista EUREKA, a qual é editada três vezes por ano, disponível no site da OBM, contendo informações sobre as diversas competições de Olimpíadas de Matemática, além de disponibilizar artigos que servem como um material de apoio à preparação para as provas.

Essas competições têm ainda como finalidade estimular a busca pela Matemática, melhorar a capacidade escrita-científica por meio da motivação e competitividade regional, nacional e internacional, visto que podem contribuir com o desenvolvimento social, cultural e econômico das regiões, estados e países participantes, além disso ainda é possível perceber contribuições no intercâmbio curricular e avanço nas relações amistosas de cooperação.

As competições matemáticas buscam proporcionar um ambiente adequado para os estudantes da rede pública e privada a fim de que possam aperfeiçoar suas habilidades e aplicar seus conhecimentos, ter uma aproximação com o espaço acadêmico, motivando a uma formação, incentivando e desenvolvendo sua afeição pela matemática, e no que tange aos professores, são incentivados a buscar novos recursos, que possam enriquecer mais ainda suas aulas.

Devido ao atual momento em que mundo está passando, relativo a pandemia do COVID-19 houve mudanças para realização do evento. Devido às medidas de contenção de disseminação do COVID-19 o calendário da 42ª edição da OBM foi suspenso por tempo indeterminado. Após esse período de emergência o calendário será reavaliado, de modo que seja realizada a competição.

CAPÍTULO 2

INTRODUÇÃO TEÓRICA E PRÁTICA DO PRINCÍPIO DA CASA DOS POMBOS

Um problema clássico na área da Matemática e que aparece com diferentes formatos dentro de um mesmo e determinado princípio nos permite afirmar, com certeza matemática, que em um grupo de 13 pessoas, pelo menos duas delas fazem aniversário no mesmo mês.

Outra variação desse problema, que acreditamos ser uma espécie de extensão e que também é uma certeza matemática, diz que precisa haver 367 pessoas em uma sala de cinema para termos certeza de que pelo menos duas delas fazem aniversário no mesmo dia.

Ou ainda, se preferirmos, poderíamos dizer, com certeza matemática, que necessitaríamos de pelo menos 8 pessoas numa sala para podermos afirmar com certeza que pelo menos duas delas nasceram no mesmo dia da semana.

O princípio ao qual estamos nos referindo diz respeito ao Princípio da Casa dos Pombos, também conhecido como Princípio das Gavetas ou ainda Princípio de Dirichlet, fazendo parte da área Análise Combinatória na Matemática. Esse princípio foi usado pela primeira vez no ano de 1834 pelo matemático alemão Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859) sob o nome de "*Schubfachprinzip*" (princípio da "gaveta" ou "princípio de prateleira") e por essa razão também é chamado de Princípio da Caixa de Dirichlet, Princípio da Gaveta de Dirichlet ou apenas "Princípio de Dirichlet" (ZILIO, 2019), podendo ser usado em muitos problemas formais de Matemática, tanto em conjuntos finitos como em conjuntos com uma infinidade de elementos.

Apesar de ser simples, esse princípio tem forte aplicabilidade na resolução dos mais variados problemas dentro da Matemática, permitindo àquele oque o utilizar dispor de uma poderosa ferramenta que o ajudará a resolver problemas que provêm, em sua estrutura, da mesma essência.

Ainda de acordo com Zilio (2019, p. 61) "a frase 'princípio da casa dos pombos' foi usada primeiramente em um jornal de matemática sério pelo matemático Raphael M. Robinson (1911-1995) no ano de 1940".

O Princípio da Casa dos Pombos permite resolver variados problemas nos mais diferentes conteúdos de Matemática, tais como: análise combinatória, teoria dos números, divisibilidade, geometria, aritmética, dentre outros. Tornando-se, assim, um poderoso recurso matemático.

De acordo com Lima *et al* (2014, p. 11), temos que o Princípio da Casa dos Pombos pode ser compreendido em pelo menos duas perspectivas, a primeira está relacionada ao resultado matemático, e o segundo em relação ao método de prova. O primeiro é simples e intuitivo, podendo até parecer uma técnica com pouca aplicabilidade, e quando usado como um método de prova, torna-se uma ferramenta valiosa na resolução de problemas.

Assim, dependendo do contexto de sua aplicação (resultado matemático ou método de prova) o Princípio da Casa dos Pombos se mostra como um recurso matemático eficaz na resolução dos mais variados problemas nos mais variados conteúdos de Matemática.

Em termos puramente matemáticos, o Princípio da Casa dos Pombos se apresenta como um teorema matemático, podendo ser mostrado e demonstrado de muitas maneiras diferentes, todavia com a mesma ideia essencial. Vejamos:

Teorema 1. *Suponha que os números reais* $\alpha_1, ..., \alpha_m$ *são tais que o conjunto* $\{1, \alpha_1, ..., \alpha_m\}$ *é linearmente independente sobre* Q. *Então, existem infinitas* $(m + 1)$ *−uplas formadas por* $\{x_0, x_1, ..., x_m\}$ *tais que* $\left(x_1, ..., x_m\right) \neq (0, ..., 0)$ *e*

$$\left|x_0 + x_1\alpha_1 + ... + x_m\alpha_m\right| < \left(\left|x_j\right|\right)^{-m}$$

com $1 \leq j \leq m$.

Demonstração. (*Prova de Dirichlet*): Seja n um número natural e sejam $x_1, x_2, ..., x_m$ assumindo todos os $2n + 1$ valores $-n, -n + 1, ..., n - 1, n$. Isso nos dá $(2n + 1)^m$ partes fracionárias $\{x + 0 + x_1\alpha_1 + ... + x_m\alpha_m\}$ no intervalo unitário $[0, 1[$. Divida tal intervalo em $2n^m$ intervalos de medida igual a $2n^{-m}$. Então, dois desses pontos acima mencionados pertencem ao mesmo intervalo. Assim, formando as diferenças dos correspondentes Z combinações lineares, obtemos inteiros $x_0, ..., x_m$ tais que $x_1, x_2, ..., x_m$ têm valores absolutos de no máximo $2n$ todos diferentes de zero tais que

$$\left| x_0 + x_1 \alpha_1 + \ldots + x_m \alpha_m \right| < 2n^{-m}.$$

Como n é arbitrário o teorema está provado.

Como dissemos anteriormente, o teorema pode ser mostrado e demonstrado de maneiras diferentes, anunciaremos agora uma versão mais simples, onde o fazemos da seguinte forma:

Teorema 2. *Se $n + 1$ pombos são colocados em n gaiolas, assim podemos afirmar que pelo menos uma gaiola deverá conter, pelo menos, dois pombos*.

Demonstração: Considere dois conjuntos finitos N e M, onde N é o conjunto dos pombos e M o conjunto das gaiolas, como uma função *f* da seguinte forma,

$$f: N \rightarrow M \ com \ |N| = n > m = |M| \qquad (1)$$

Sabendo que n e m são duas quantidades, onde *n* representa a quantidade de pombos contidos em N e m representa a quantidade de gaiolas contidas em M. Esta função não é *injetiva*, pois o domínio *(N)* é maior que o contradomínio M, assim como explícito em (1).

Desta forma existem pelo menos dois pombos diferentes em N que serão conduzidos para a mesma gaiola em M. Considerando a função inversa f^{-1} , notamos que f^{-1} não é injetora. Isso significa que existe pelo menos uma gaiola $\alpha \in M$ com

$$\left| f^{-1}(\alpha) \right| \geq 2$$

Isso significa que existe uma gaiola com pelo menos dois pombos.

Como o conteúdo de funções é um dos principais conteúdos em Matemática, pois o “conceito de ‘função, que é a ideia básica subjacente a quase todas as relações matemáticas e físicas, não importando como são expressas” (ANTON;

BIVENS; DAVIS, 2007, p. 1) é a porta de entrada para diversas ramificações em que se fundamenta a Matemática, tem-se naturalmente que o princípio é empregado em inúmeros problemas que se revistam desse conteúdo, fazendo, assim, uma perfeita sintonia entre o princípio e o conceito.

Mas quando usar esse princípio? De acordo com Shine (2010, p. 1), temos que:

> Note que, implicitamente, o que fazemos ao colocar os objetos nas gavetas? Há vários aspectos a considerar:
> • Primeiro, note ao supor a existência de objetos e gavetas, estamos considerando dois tipos de entidades. Então podemos considerar dois conjuntos: o conjunto A dos objetos e o conjunto B das gavetas.
> • Segundo, ao colocar cada objeto em uma gaveta, estamos associando a cada objeto uma única gaveta, ou seja, estamos associando a cada x ∈ A um único y ∈ B. Que tipo de associação é essa? Pensando um pouco, a resposta é clara: casa dos pombos é um resultado sobre funções.

2.1 Universalidade do Princípio da Casa dos Pombos

De forma mais geral, o Princípio da Casa dos Pombos pode ser enunciado da seguinte maneira:

Teorema 3 *(Generalização). Se n gaiolas são ocupadas por $n.k + 1$ pombos, então pelo menos uma gaiola deverá conter pelo menos $k + 1$ pombos.*

Demonstração. Se temos n gaiolas e cada gaiola contiver no máximo k pombos, então teremos nk pombos distribuídos. Como temos $nk + 1$ pombos, então pelo menos uma gaiola conterá pelo menos, $k + 1$ pombos.

2.2 Breve revisão de literatura acerca do tema "Princípio da Casa dos Pombos"

A seguir, nos propomos a apresentar uma breve Revisão de Literatura acerca do tema "Princípio da Casa dos Pombos" feita através de pesquisas na internet em trabalhos que abordassem esse assunto. Nosso intuito aqui é percebermos a abordagem do Princípio da Casa dos Pombos a fim de termos uma ideia de sua aplicabilidade frente aos problemas que buscam nesse recurso uma forma de resolução.

Assim, iniciamos por Zilio (2019) que traz como objetivos do seu trabalho abordar a Análise Combinatória e o Princípio da Casa dos Pombos para a resolução de problemas olímpicos, tanto de cunho nacional como internacional. O mesmo argumenta que mesmos que esses conteúdos sejam trabalhados muito pouco quando em salas de aula de nível superior, mesmo assim, eles são muito cobrados em provas olímpicas, tanto dentro como fora do país.

Especificamente acerca do Princípio da Casa dos Pombos, Zilio (2019, p. 24) expõe que "nas olimpíadas, o uso deste princípio é considerado como uma regra de ouro, e os competidores devem sempre estar atentos na possível existência de uma maneira de aplicá-lo".

Após explanar sobre Análise Combinatória, expondo problemas olímpicos onde esse conteúdo é empregado para a resolução, os teoremas e proposições emanadas desse assunto, faz também da mesma forma com o Princípio da Casa dos Pombos, sempre com foco nas Olimpíadas de Matemática.

Como resultados/conclusões da pesquisa, relata que a busca por problemas olímpicos com o tema apresentado foi algo incrível e desafiador e que a quantidade de problemas, teoremas e exercícios dentro do assunto de sua pesquisa era algo gigantesco. Contudo o que foi apresentado durante a pesquisa deu uma ideia àqueles que lessem seu trabalho sobre o que iriam encontrar de problemas olímpicos de matemática envolvendo Análise Combinatória e Princípio da Casa dos Pombos e, assim, a partir das referências bibliográficas do trabalho, um aprofundamento maior poderia ser feito.

Martins (2019), por sua vez, apresenta uma sugestão de atividade que aborda o Princípio da Casa dos Pombos através da Resolução de Problemas no Ensino Fundamental. Assim, busca como objetivo geral deste trabalho mostrar como um dos conteúdos estudados no Mestrado Profissional de Matemática pode ser aplicado no Ensino Fundamental, visando trazer benefícios para as aulas e consequentemente para o aprendizado dos alunos.

Ao justificar o porquê de ter elaborado proposta para o Ensino Fundamental em decorrência de sempre atuar nesse nível da Educação, bem como enfatizar que em virtude da complexidade de alguns conteúdos isto impede sua abordagem na Educação Básica, explica que escolheu o Princípio da Casa dos Pombos haja vista que este "pode ser facilmente compreendido e tem potencial de estimular o raciocínio lógico, aguçar a curiosidade e, com isso, despertar o gosto pela matemática" (MARTINS, 2019, p. 6).

Martins (2019, p. 7) ainda enfatiza o conteúdo dizendo o seguinte:

> [...] a simplicidade de seu conteúdo. O fato de não possuir fórmulas, ser de fácil compreensão ao mesmo tempo em que pode ser utilizado para a resolução de problemas muito complexos faz com que o Princípio da Casa dos Pombos tenha um charme especial.

Após explicar o conceito do Princípio da Casa dos Pombos e expor alguns exercícios com suas soluções, e ainda de apresentar teoricamente a Resolução de Problemas como estratégia de ensino, apresenta como metodologia de pesquisa a proposta de aplicação de três atividades com alunos do nono ano do Ensino Fundamental em uma escola municipal de Porto Alegre/RS, onde traz o Princípio da Casa dos Pombos através da Resolução de Problemas.

A primeira atividade envolve resolver problemas que envolvam a lógica do Princípio da Casa dos Pombos sem o rigor matemático e partir de materiais concretos; a segunda atividade não mais envolve material concreto, mas sim situações que envolvam a realidade dos alunos e que exigem abstração, como datas de nascimento e dias da semana; e a terceira atividade envolve uma questão mais complexa do Princípio da Casa dos Pombos, exigindo dos alunos abstração e compreensão desse princípio.

Após explanar como cada questão foi desenvolvida e os resultados encontrados, apresenta como resultados/conclusões da pesquisa que diante das atividades os alunos se empenharam na resolução das questões propostas, haja vista estarem se sentindo desafiados frente aos conteúdos, melhora na autoestima dos alunos participantes, mudança de postura, e que, mesmo diante das dificuldades apresentadas pelos alunos na resolução das atividades, considerou que a atividade da proposta foi muito positiva, que ela atingiu os objetivos propostos e que é digna de ser replicada em virtude do ensino e aprendizagem alcançados nos alunos.

De acordo com Nascimento (2018) o Princípio da Casa dos Pombos pode ser utilizado, tanto como um resultado matemático, como um método de uma prova.

Explicita que, como um resultado matemático, aparentemente o princípio é bastante simples e intuitivo, levando a supor que tenha pouca aplicação na resolução de problemas matemáticos.

Por sua vez, como método de prova, ele se torna uma valiosa ferramenta na resolução de diversos problemas. Como objetivo geral do seu trabalho, busca demonstrar a relação do Princípio da Casa dos Pombos com questões lógicas e intuitivas do dia-a-dia, bem como com outros conteúdos da Matemática, isso através de demonstrações e exercícios resolvidos.

Nascimento (2018, p. 9-10), enfatiza que o Princípio da Casa dos Pombos, é uma ferramenta cada vez mais utilizada para resolver problemas, sem que precise recorrer exatamente a uma fórmula matemática ou técnicas mais complexas, esse princípio é útil para resolver questões, tanto de caráter simples, como complexo, possibilitando um raciocínio gradual de diferentes situações, fazendo uso de um pensamento criativo.

Para tanto, faz-se necessário trabalhar a análise e exploração dos problemas, quando o estudante é habituado a estudar, estimulado a pensar, refletir em cada situação, o único risco, é formar pessoas capazes de analisar problemas partindo de um princípio, de que se trata de um conteúdo de fácil compreensão, mas que requer habilidades, que podem ser conquistadas com a prática.

Após a apresentação das demonstrações do teorema matemático “Princípio das Gavetas de Dirichlet” e de exercícios resolvidos, encerra seu trabalho, não apresentando conclusões.

Zonta (2019) traz o enfoque do Princípio da Casa dos Pombos aplicado ao ensino de Matemática sob o ponto de vista da metodologia ativa de aula invertida, tendo realizado uma pesquisa com quatorze salas de aulas do segundo e terceiro anos do Ensino Médio em três escolas públicas de Araçatuba/SP.

Em sua pesquisa, no período de três meses, utilizou os métodos: sala de aula invertida de ensino e sala de aula tradicional de ensino, comparando-os ao final da pesquisa.

Os estudantes do método sala de aula invertida de ensino foram submetidos a duas etapas, sendo elas: 1º) virtual, com videoaulas e interação online entre alunos; 2º) presencial, com discussões e exercícios.

Os alunos do método sala de aula tradicional de ensino, por sua vez, tiveram aulas expositivas sobre os conceitos do princípio matemático abordado (Princípio da

Casa dos Pombos), com listas de exercícios resolvidas em grupos de estudo supervisionados pelo professor.

Para avaliação dos resultados o pesquisador comparou os métodos utilizados através de duas avaliações num intervalo de tempo de dois meses entre elas, sendo os dados analisados estatisticamente.

O pesquisador tinha a intenção de mostrar que ao utilizar a metodologia ativa de aula invertida o professor trabalharia mais as dificuldades dos alunos do que em relação às aulas tradicionais.

Após explanar como cada questão foi desenvolvida e os resultados encontrados, apresenta como conclusões da pesquisa que diante das atividades feitas com os alunos, embora o método sala invertida tenha, estatisticamente, ficado abaixo dos resultados estatísticos do método tradicional, não desconsidera que este possa ser utilizado pelos professores para trabalhar com os conceitos abordados e que é o professor quem deve escolher as metodologias e as ferramentas que melhor se aplicam a seus alunos, a partir de suas necessidades e condições.

Aguiar (2013), por conseguinte, aborda em seu trabalho o Princípio da Casa dos Pombos na perspectiva de uma abordagem diferenciada com Objetos de Aprendizagem (AO). Seu objetivo geral residiu em inferir se a utilização de Objetos de Aprendizagem facilita o processo de ensino-aprendizagem numa turma do segundo ano do Ensino Médio.

Como metodologia de pesquisa o mesmo utilizou uma amostra de 20 alunos, sendo divididos em dois grupos de 10 alunos de forma aleatória: grupo experimental e grupo de controle. No grupo de controle seria aplicada uma aula tradicional com o conteúdo Princípio da Casa dos Pombos; no segundo grupo, grupo experimental, seria aplicada uma aula diferenciada com o uso de computadores, acesso à internet, e um Objeto de Aprendizagem.

Como instrumentos de coleta de dados o mesmo utilizou questionário socioeconômico e um teste com questões sobre o Princípio da Casa dos Pombos, sendo os dados organizados e analisados numa planilha do Excel. Assim, o grupo de controle teve aula tradicional desse conteúdo e o grupo de controle teve uma aula diferenciada com o uso de Objetos de Aprendizagem, os quais são definidos “como uma entidade, digital ou não digital” (LOM, 2000, *apud* AGUIAR 2013, p. 17).

Precisamente acerca do Princípio da Casa dos Pombos, Aguiar (2013) afirma que o princípio da casa dos pombos, remete um enunciado simples, mas desperta o interesse por resultados intrigantes que são trazidos à tona a partir de sua aplicabilidade, todavia em muitos casos esse princípio não é apresentado aos alunos do ensino médio, por isso muitos perdem a oportunidade de resolver problemas com essa técnica, por desconhecer.

Como resultados/conclusões da pesquisa, o autor relata que o objetivo do estudo foi alcançado, concluindo que o grupo experimental obteve resultado superior ao grupo de controle, consolidando as OA´s como um eficaz meio no processo de ensino e aprendizagem, aqui especificamente, do Princípio da Casa dos Pombos.

Nesse contexto, conforme pudemos depreender das pesquisas relatadas, o Princípio da Casa dos Pombos se mostra como um recurso matemático capaz de instigar no aluno o raciocínio para a resolução de questões de Matemática que tenham em seu cerne este princípio como conteúdo basilar.

Seja no Ensino Fundamental, Ensino Médio ou em turmas preparatórias para as Olimpíadas de Matemática, o Princípio da Casa dos Pombos se coloca como um conteúdo imperativo. No que respeita especificamente acerca das Olimpíadas de Matemática, temos muitas questões cobradas quando essas olimpíadas acabam recorrendo a esse princípio matemático para a sua resolução/demonstração, necessitando ter o aluno que estudá-la a fundo.

Por fim, o Princípio da Casa dos Pombos, conforme pudemos compreender, é um daqueles conteúdos de Matemática que leva o aluno a descobrir o que de melhor essa ciência tem a oferecer e se bem aproveitado, poderá tornar os estudantes que se prontificaram a aprendê-lo, bons alunos olímpicos na área da Matemática.

2.3 O Princípio da Casa dos Pombos e sua aplicação em problemas relacionados às Olimpíadas de Matemática

Como, ao nosso ver, a maneira mais didática para esclarecer qualquer teorema ou resultado matemático seja exemplificando sua aplicabilidade, passaremos agora a expor alguns exemplos de problemas de Olimpíadas envolvendo o Princípio da Casa dos Pombos, acompanhados de dicas e sugestões de resolução. Caso o leitor deseje tentar solucionar os problemas abaixo apresentados, no quarto capítulo veremos a solução de cada um deles.

Problema 2.2.1 (OBMEP 2017). *Uma caixa contém 10 bolas verdes, 10 bolas amarelas, 10 bolas azuis e 10 bolas vermelhas. Joãozinho quer retirar uma certa quantidade de bolas dessa caixa, sem olhar, para ter a certeza de que, entre elas, haja um grupo de 7 bolas com 3 cores diferentes, sendo três bolas de uma cor, duas bolas de uma segunda cor e duas bolas de uma terceira cor. Qual é o número mínimo de bolas que Joãozinho deve retirar da caixa?*

Sugestões/Dicas de Resolução: Convém pensar inicialmente na pior das situações possíveis, ou seja, tentar encontrar o número máximo de tentativas que Joãozinho efetuará para que ele tenha certeza de que conseguirá esse subgrupo pretendido de sete bolas, sendo três de uma cor, duas de outra cor e mais duas de outra cor. Inicie então supondo, por exemplo, que Joãozinho tirou uma sequência de 10 bolas de cores iguais (1ª cor), depois outra sequência de 10 bolas também de cores iguais (2ª cor) e analise as próximas possíveis retiradas. Lembre-se sempre de pensar na pior situação possível com o intuito de adiar o máximo a retirada de bolas que satisfaçam o que a questão pede.

Problema 2.2.2 (IMO 1972). *Prove que, de qualquer conjunto de dez números naturais distintos de dois dígitos, podemos escolher dois subconjuntos A e B (disjuntos) cuja soma dos elementos é a mesma em ambos*.

Sugestões/Dicas de Resolução: Para a solução deste problema, inicialmente devemos ter conhecimentos básicos sobre noções de conjuntos (conjuntos, subconjuntos, conjunto das partes, conjuntos disjuntos, operações com conjuntos (soma, subtração, interseção, etc.)). Agora, pense na soma máxima que pode resultar de um conjunto desses (formado por 10 números naturais distintos de dois dígitos). Em seguida, pense no conjunto das partes desse conjunto inicial. Uma dica é pensar na cardinalidade desses conjuntos.

Problema 2.2.3 (OBM). *Mostre que existe um número da forma 199...91 (com pelo menos três noves) que é múltiplo de 1991*.

Sugestões/Dicas de Resolução: em variados problemas que envolvem o Princípio da Casa dos Pombos, ajuda na resolução do problema reconhecer inicialmente quem são as casas e quem são os pombos no problema em questão, já que os argumentos lógicos matemáticos que serão utilizados (aritméticos, algébricos, geométricos, etc.) tem esse reconhecimento como ponto de partida e, premissa básica. Aqui, especificamente, os 1992 números da forma 199...91 que serão levados em conta, representam os pombos e os 1991 restos da divisão de qualquer número inteiro por 1991, que são: 0,1, 2, ...,1990, são as casas.

Problema 2.2.4 (OBM 2008). Vamos chamar de garboso o número que possui um múltiplo cujas quatro primeiras casas de sua representação decimal são 2008. Por exemplo, 7 é garboso pois 200858 é múltiplo de 7 e começa com 2008. Observe que 200858 = 28694 x 7. Mostre que todos os inteiros positivos são garbosos.

Sugestões/Dicas de Resolução: Esse problema é semelhante ao problema anterior, com poucas diferenças. Considere n um inteiro positivo e $b = 2008.$ Perceba que os $n + 1$ números inteiros da forma b,bb,...,b...b são os pombos e os possíveis restos por n, ou seja, $0,1,..., n - 1$, são as casas. Aqui serão cobrados conhecimentos acerca de divisibilidade entre conjuntos de números finitos.

Problema 2.2.5 (IMO). Mostre que existem infinitos múltiplos de 1991 da forma 19999...99991.

Sugestões/Dicas de Resolução: Esse problema é semelhante ao **problema 2.2.3**. Então, aqui também precisamos ver que os infinitos números da forma 19999...99991 são os pombos e o resto da divisão de qualquer número inteiro por 1991, que é um dos números 0,1, 2, ...1990, são as casas. Atente para o fato que aqui devemos provar que há infinitos números da forma 1999...9991 satisfazendo a questão, e não apenas 1.

Problema 2.2.6 (Longlist IMO 1977 – Romênia). Dados 37 pontos no espaço com coordenadas inteiras, prove que pelo menos um dos triângulos formados por três destes pontos possui o baricentro com coordenadas inteiras.

Sugestões/Dicas de Resolução: Aplique o Princípio da Casa dos Pombos por etapas nas coordenadas do problema.

Problema 2.2.7 (OBM). Uma caixa contém 100 bolas de cores distintas. Destas, 30 são vermelhas, 30 são verdes, 30 são azuis e entre as 10 restantes, algumas são brancas e outras são pretas. Determine o menor número de bolas que devemos tirar da caixa, sem lhes ver a cor, para termos a certeza de haver pelo menos 10 bolas da mesma cor.

Sugestões/Dicas de Resolução: Aqui sugerimos o uso do mesmo raciocínio explicitado no **problema 2.2.1**, com as devidas modificações, claro.

Problema 2.2.8 (OBM). Qual é a maior quantidade de números do conjunto $\{1, 2, \ldots, 20\}$ que podemos escolher de modo que nenhum deles seja o dobro do outro?

Sugestões/Dicas de Resolução: Noções básicas de conjunto são muito importantes para a resolução desse problema. Considere $S = \{1, 2, \ldots, 20\}$ e forme subconjuntos de S, onde os elementos de cada subconjunto são o dobro do outro. Em seguida, tente tomar o máximo de elementos possíveis de cada subconjunto que não são o dobro um do outro.

CAPÍTULO 3

AS INVARIANTES

As invariantes são muito presentes na matemática, portanto, na vida diária de todo ser humano. Antes de explorar o conceito do Princípio de invariância é importante trazer uma prévia do que seja as invariantes e assim compreendê-la em sua totalidade, a fim de facilitar o entendimento sobre o princípio e utilizá-lo em problemas matemáticos, especialmente aqueles que são colocados nas Olimpíadas de Matemática.

Como o nome sugere, invariantes são coisas que não mudam, ou seja, trata-se de uma busca por algo que se mantém constante, quando uma operação permitida é realizada. Lopes (2012) faz uma analogia bastante compreensível, relativo às invariantes, o autor destaca que:

> Como o próprio nome sugere, este material fala sobre coisas que não mudam. Essa frase foi muito vaga, mas a matéria é bem vasta e ampla mesmo, pois a matemática apresenta muitas invariantes. Um exemplo óbvio é o bom e velho fato de que a ordem das parcelas não altera a soma (isso pode ser considerada uma invariante, pois mudamos as parcelas de lugar na hora de fazer a soma, mas o resultado final deu o mesmo). O mesmo pode ser dito quando falamos que a ordem dos fatores não altera o produto. Na geometria, as invariantes são ainda mais evidentes: quando você recorta uma figura em vários pedaços, a soma das áreas desses pedaços permanece constante, e é igual á área da figura inicial. Podemos dizer o mesmo sobre um cubo que foi dividido em vários cubinhos, por exemplo, ou então quando tomamos uma corda e montamos figuras diferentes com ela (neste caso, o perímetro das figuras é a invariante, pois ele é igual ao comprimento da corda).

Tal analogia aparenta uma ideia simples, mas que é altamente relevante na resolução de problemas, de diferentes níveis, já que para resolução de problemas olímpicos a busca por invariantes é uma das principais estratégias na resolução.

Apesar de ser um conteúdo simples, não é trivial encontrar as invariantes, pois elas mudam de problema a problema. Isso quer dizer, que a cada questão deparamos com um desafio, que envolve uma invariante. É frustrante informar, mas não existe uma fórmula, um teorema milagroso, que resolva todos os problemas relativo a invariantes, mas para resolver esse tipo de problema requer muita inspiração, e muita, muita prática, por isso, é fundamental resolver diversos problemas e assim adquirir técnicas que permitem detectar as invariantes e resolver problemas difíceis.

A literatura ainda é bastante limitada, no que tange os estudos relacionados ao princípio da invariância, ao investigar sobre a temática, logo depara-se com o princípio da invariância de LaSalle, sua maior característica é a capacidade de fornecer meios de estudar a instabilidade de um sistema sem que seja necessário conhecer as soluções das equações diferenciais. Para tanto, utiliza-se sua função auxiliar, denominada de Função de Liapunov. A versão original do Princípio de Invariância de LaSalle pode ser representada pela seguinte equação diferencial autônoma:

$$\dot{x} = f(x). \qquad (1)$$

Sejam V: $R^n \to R^n$ e f: $R^n \to R^n$ funções de classe C^1. Seja L uma constante real tal que $W_L = \{x \in R^n; V(x) < L\}$ seja limitado. Admita que $\dot{V}(x) > 0$, $\forall\, x \in W_L$ e defina $E = \{x \in W_L; \dot{V}(x) = 0\}$. Seja B o maior conjunto invariante contido em E. Então, toda solução de (1) iniciando em W_L converge para B quando $t \to 0$. (RODRIGUES, ALBERTO, BRETAS, 2002). Mas nosso trabalho não é voltado para o Princípio da Invariância de LaSalle, vamos seguir.

3.1 O Princípio da Invariância

Assim como o Princípio da Casa dos Pombos trabalhado anteriormente, aqui também, no Princípio da Invariância, não se utiliza de uma fórmula específica para ser aplicada na resolução das questões que envolvam esse assunto, resumindo-se também, sua resolução, há argumentos lógico-matemáticos que muitas vezes utilizam de conhecimentos aritméticos, algébricos, geométricos, etc., que são utilizados para melhor expor a resolução e dar-lhe confiabilidade matemática.

Em geral, visualizamos a aplicabilidade deste princípio quando nos deparamos com problemas que, dada uma transformação, existe uma propriedade associada que não se modifica, mesmo após várias transformações. Basicamente é isso, mas esses conceitos ficarão mais claros a partir de exemplificação.

Com isso, iniciaremos com um problema sobre invariantes que não caiu necessariamente numa olimpíada de matemática, expondo em seguida sua resolução de forma integral a fim de termos uma ideia de como podemos proceder na tentativa de resolução dos problemas que aparecerem em olimpíadas de matemática que contiverem esse assunto. Vejamos:

Problema 3.1.1: (Problema usando Paridade como Invariante) No reino da Frutilândia, existe uma árvore mágica que possui 2005 maçãs e 2006 tomates. Todo dia um garoto sobe na árvore e come duas frutas. Quando ele como duas frutas iguais, nasce um tomate na árvore; quando ele come duas frutas diferentes, nasce uma maçã. Após alguns dias, restará apenas uma fruta na árvore. Que fruta será? (HOLANDA, 2019, p. 1).

Solução: Inicialmente temos que entender que se ele está comendo todo dia duas frutas iguais ou duas frutas diferentes e só está nascendo uma fruta (maçã ou tomate), então o número de frutas está sempre diminuindo até um dia chegar ao ponto de só ter apenas uma fruta na árvore. Então, a questão central é: qual a última fruta que resta? Ao utilizarmos Paridade como Invariante neste problema, inicialmente vamos analisar que, a cada momento, o que acontece com a quantidade de maçãs e com a quantidade de tomates? Vamos supor a seguinte ordem que o garoto seguiu ao comer as frutas:

Quadro 1: Dados do problema

DIAS	FRUTAS COMIDAS	MAÇÃS	TOMATES
1º	(Maçã, Maçã)	-2	+1
2º	(Tomate, Tomate)	0	-1
3º	(Maçã, Tomate)	0	-1

Explicando o quadro: Vamos analisar a cada momento o que que acontece com a quantidade de maçãs e com a quantidade de tomates, compreendido? Por exemplo, vamos supor que o garoto chegou no primeiro dia, subiu na árvore e disse que iria comer duas maçãs. Então o que aconteceu com a quantidade de maçãs e com a quantidade de tomates da árvore?

Então, nesse caso, o número de maçãs diminuirá em duas unidades e o número de tomates aumenta em uma unidade, isso pela regra do jogo (lembrando: come duas frutas iguais = nasce um tomate; come duas frutas diferentes = nasce uma maçã).

Num segundo dia, olhando para os outros casos de maneira análoga, vemos que acontece o seguinte: ele, nesse dia, resolve comer duas tomates, então, nada acontecerá com a quantidade de maçãs, e, como ele comeu duas tomates, ele perderá a tomate ganha no primeiro dia e ainda perderá um tomate do total, ficando, assim, com menos uma unidade no número dos tomates. Finalmente, no terceiro dia, o garoto resolve comer uma maçã e um tomate resultando em ganho de uma unidade da fruta maçã, pois a maçã que o garoto comeu é compensada pela maçã que ele ganhou neste terceiro dia, já que comeu duas frutas diferentes (pela regra do jogo), ficando as maçãs com quantidade inalterada. Já com relação aos tomates, neste dia o garoto perde uma unidade, já que comeu uma maçã e um tomate. Então, temos essas três possibilidades para a mudança dos números de frutas. Compreendido?

Conclusão: Observe inicialmente a tabela acima. Na coluna do número de maçãs, todos os resultados são pares, ou seja, ou o número de maçãs diminui duas unidades ou permanece inalterado (zero = número par)... E aqui cabe um parêntese para explicar o seguinte: Abrindo um parêntese: nos conceitos de paridade, temos o seguinte:

Quadro 2: dados do problema

Paridade		
Todo número inteiro é par ou ímpar.		
Número par	$2n,\ n \in Z$	Ex.: (..., -4,-2,0,2,4,6...)
Número ímpar	$2n + 1,\ n \in Z$	Ex.: (..., -3,-1,1,3, 5, ...)
Paridade: propriedades que os inteiros têm de ser pares ou ímpares.		
1º Propriedade:	PAR + PAR =	PAR
2º Propriedade:	ÍMPAR + PAR =	ÍMPAR
3º Propriedade:	PAR + ÍMPAR =	ÍMPAR
4º Propriedade:	ÍMPAR + ÍMPAR =	PAR

Chamamos a atenção para a primeira e segunda propriedades que dizem que se somarmos um número par a um número inicial, sendo esse número inicial par ou ímpar, tanto faz, então, a paridade do número inicial permanece a mesma. Compreendido? Fechemos aqui o parêntese e voltemos ao problema. Então, para finalizar a resolução, temos o seguinte: ... como nós vimos no quadro acima que explicita Paridade, se nós diminuirmos a quantidade de maçãs de uma quantidade par, a paridade do número de maçãs é invariante, ou seja, permanece inalterada. Então, vejamos, se no início ela é ímpar (2005 maçãs), segue que a quantidade de maçãs é sempre ímpar, portanto, essa quantidade de maçãs é sempre ímpar. Ora, mas para que houvesse algum momento que tivéssemos um número par de maçãs eu precisaria de um número inicial par de maçãs, e nós não podemos, porque esse número é sempre ímpar, em outras palavras, nós nunca teremos zero maçãs. Assim, ao final, tem que sobrar uma maçã.

Com a exposição e explicação minuciosa desse problema, acreditamos que a compreensão dos conceitos de invariantes possa ter se tornado mais intuitiva. Além disso, podemos perceber como pode ser eficaz utilizar a estratégia de encontrar uma invariante em um problema dado.

Outro exemplo clássico, utilizando o Princípio da Invariância, é o das rãs nos degraus . Veja:

Problema 3.1.2: (Olimpíada de Maio 1999) Em cada um dos 10 degraus de uma escada existe uma rã. Cada rã pode, de um pulo, colocar-se em outro degrau, mas quando uma rã faz isso, ao mesmo tempo, uma outra rã pulará a mesma quantidade de degraus em sentido contrário: uma sobe e outra desce. Conseguirão as rãs colocar-se todas juntas num mesmo degrau?

Veremos à frente a solução deste problema.

Nesses tipos de problemas, em que é dado uma condição inicial e um conjunto de operações na tentativa de procurar o que não muda, independente dos movimentos utilizados, encontrar uma invariante é uma boa estratégia, que pode resolver várias questões, inclusive de níveis difíceis.

Dessa forma vale mostrar como esse tipo de problema se comporta. Vejamos que há problemas que envolve um conjunto S de estado e regras, os quais pode passar de um estado para outro, mas o fato é que como podemos provar, que dado um estado inicial $s_0 \in S$ e seguindo as regras, nunca será possível atingir um estado final $s_n \in S$.

Dessa forma, para provar tal afirmação o método utilizado com frequência é o seguinte: supondo que $f(s)$ é uma função definida para todos os $s \in S$. Suponha também que, se de $s_1 \in S$ passamos, de acordo com as regras, para $s_2 \in S$, então $f\left(s_1\right) = f\left(s_2\right)$para qualquer escolha de s_1. Quando essas condições são satisfatórias, sendo $f\left(s_0\right) \neq f(s_n)$ conclui-se de forma imediata, que partindo de s_0 nunca se pode chegar a s_n seguindo as regras.

Para encontrar a função f de tal invariante, algumas vezes é imediato, inclusive pode ser, por exemplo, a paridade de uma característica do sistema. Outras vezes, no entanto, requer um pouco mais de esforço e raciocínio.

Observação. A ideia de paridade é um conteúdo simples, mas combinado de imaginação torna-se uma ferramenta importante na resolução de problemas matemáticos, envolvendo números inteiros, especialmente em problemas que pedem a demonstração de impossibilidade de resultado, relativo a um determinado valor. Por definição, diz-se que dois inteiros têm a mesma paridade, quando ambos forem par ou ímpar. Assim, a invariância de uma paridade, tem a finalidade de provar que o resultado de uma certa contagem não pode ter um certo valor, ou seja, mostrar a incompatibilidade.

3.2 O Princípio da Invariância e sua aplicação em problemas relacionados às Olimpíadas de Matemática

Assim como na seção 2.3, apresentaremos agora problemas de Olimpíadas que envolvem o Princípio da Invariância, acompanhados de dicas e sugestões de resolução. Caso o leitor deseje tentar solucionar os problemas abaixo apresentados, no quarto capítulo veremos a solução de cada um deles.

Problema 3.2.1 (Olimpíada de Maio 1999). Em cada um dos 10 degraus de uma escada existe uma rã. Cada rã pode, de um pulo, colocar-se em outro degrau, mas quando uma rã faz isso, ao mesmo tempo, uma outra rã pulará a mesma quantidade de degraus em sentido contrário: uma sobe e outra desce. Conseguirão as rãs colocar-se todas juntas num mesmo degrau?

Sugestões/Dicas de Resolução: numere os degraus da escada de 1 a 10 e atribua valor às rãs de acordo com a posição de cada uma nos degraus. Veja que a soma dos valores de cada rã não se altera, mesmo após mudanças de posição. Após encontrar algo que não muda, olhe para a indagação: é possível as rãs colocarem-se juntas num mesmo degrau? Suponha possível e pense no que acontecerá com a soma dos valores de cada rã.

Problema 3.2.2 (Torneio das Cidades 1985). Na ilha de Camelot vivem 13 camaleões roxos, 15 verdes e 17 amarelos. Quando dois de cores distintas se encontram, mudam simultaneamente para a terceira cor. Poderia dar-se a situação na qual todos tenham a mesma cor?

Sugestões/Dicas de Resolução: Considere a, b e c a quantidade de camaleões na cor roxo, verde e amarelo respectivamente. Note que a partir dos dados do enunciado a tripla (a,b,c) se transforma em $(a - 1, b - 1, c + 2)$, $(a - 1, b + 2, c - 1)$ ou $(a + 2, b - 1, c - 1)$ dependendo da cor inicial dos dois camaleões que se encontram. Faça a diferença em quaisquer duas coordenadas da tripla e compare com a diferença entre as mesmas coordenadas da tripla inicial. Veja se algo permanece invariante.

Problema 3.2.3 (Torneio das Cidades 1987). Uma máquina dá cinco fichas vermelhas quando alguém insere uma ficha azul e dá cinco fichas azuis quando alguém insere uma ficha vermelha. Pedro possui apenas uma ficha azul e deseja obter a mesma quantidade de fichas azuis e vermelhas usando essa máquina. É possível fazer isso?

Sugestões/Dicas de Resolução: Tente supor alguns casos possíveis. Em seguida, pense na soma das fichas que Pedro possui. Observe que há algo nesta soma que não se altera, mesmo após Pedro inserir mais fichas na máquina e receber outras. Após identificar o invariante pense no que ocorre caso seja possível Pedro obter a mesma quantidade de fichas azuis e vermelhas.

Problema 3.2.4 (Leningrado 1990) Paula comprou um caderno com 96 folhas, com páginas numeradas de 1 a 192. Nicolas arrancou 25 folhas aleatórias e somou todos os 50 números escritos nestas folhas. É possível que esta soma seja 1990?

Sugestões/Dicas de Resolução: Observe que em cada folha há dois números com paridades distintas. Então a paridade da soma dos números escritos em uma folha qualquer é sempre a mesma. A partir disso, pense na paridade da soma dos números escritos nas 25 folhas arrancadas. Ao final, compare essa paridade com a paridade do número 1990.

Problema 3.2.5 (Leningrado 1987). As moedas dos países Dillia e Dallia são o diller e o daller, respectivamente. Podemos trocar um diller por dez dallers e um daller por dez dillers. Zequinha possui um diller e deseja obter a mesma quantidade de dillers e dallers usando essas operações. É possível que isso ocorra?

Sugestões/Dicas de Resolução: Este problema tem solução semelhante a do **problema 3.2.3.** Então tente supor alguns casos possíveis. Em seguida, pense na soma dos Dillers e Dallers que Zequinha possui. Observe que há algo nesta soma que não se altera, mesmo após Zequinha trocar Dallers por Dillers ou Dillers por Dallers. Após identificar o invariante pense no que ocorre caso seja possível Zequinha ter a mesma quantidade de Dillers e Dallers.

CAPÍTULO 4

PROBLEMAS OLÍMPICOS SOBRE O PRINCÍPIO DA CASA DOS POMBOS E O PRINCÍPIO DA INVARIÂNCIA: SUGESTÕES DE RESOLUÇÃO

4.1 O Princípio da Casa dos Pombos e o Princípio da Invariância na área de Combinatória

A Matemática, estruturalmente falando, é composta por quatro grandes áreas (Álgebra, Combinatória, Geometria e Teoria dos Números) e cada uma contém seus próprios problemas e linguagens específicas para a resolução deles (SHINE, 2010).

Assim, a partir daquilo que pudemos depreender dessa pesquisa, restou evidenciado que o Princípio da Casa dos Pombos e o Princípio da Invariância (os invariantes) são tópicos que pertencem à área da Combinatória em Matemática, onde essa área abrange, ainda, outros assuntos, tais como: Paridade, Contagem, Jogos, Probabilidade, Poliminós, dentre outros, os quais podemos chamar de métodos de resolução para determinados problemas matemáticos que se apresentam dentro desta área da Combinatória e exigem raciocínio combinatório.

Mas o que é Análise Combinatória ou simplesmente Combinatória? De acordo com Morgado et al. (1991, p. 1), temos que:

> A maior parte dos alunos do 2º grau responderia que ela é o estudo das combinações, arranjos e permutações. Isso no entanto é uma resposta parcial pois, embora combinações, arranjos e permutações façam parte da Análise Combinatória, são conceitos que permitem resolver um tipo de problemas de Análise Combinatória: os de contagem de certos tipos de subconjuntos de um conjunto finito, sem que seja necessário enumerar seus elementos. No entanto, a Análise Combinatória trata de vários outros tipos de problemas e dispõe, além das combinações, arranjos e permutações, de outras técnicas para atacá-los: o princípio da inclusão-exclusão, o princípio das gavetas de Dirichlet, as funções geradoras, a teoria de Ramsey são exemplos de técnicas poderosas de Análise Combinatória. [...] De maneira mais geral, podemos dizer que a Análise Combinatória é a parte da Matemática que analisa estruturas e relações discretas.

Acerca da origem da Análise Combinatória, temos a dizer que, de acordo com Vasconcelos e Rocha (2019, p. 5):

> A origem da Análise Combinatória se remete a problemas relacionados a quadrados mágicos. Ela é decorrente da ampliação de técnicas que permitem contar, de forma direta ou indireta, o número de elementos de um dado conjunto, sendo esses agrupados sob determinadas condições.

E qual o objetivo da Análise Combinatória em Matemática? De acordo com Hazan (1977, p. 1-E):

> A análise combinatória visa desenvolver métodos que permitam contar o número de elementos de um conjunto, sendo estes elementos, agrupamentos formados sob certas condições. À primeira vista pode parecer desnecessária a existência destes métodos. Isto de fato é verdade, se o número de elementos que queremos contar for pequeno. Entretanto, se o número de elementos a serem contados for grande, esse trabalho torna-se quase que impossível sem o uso de métodos especiais.

Todavia, de acordo com Viana (2013), a Análise Combinatória está no topo de uma lista que envolve outros assuntos em Matemática como também Binômio de Newton, Probabilidade, Trigonometria e Geometria considerados como assuntos/tópicos da Matemática que os professores sentem mais dificuldade em ensinar. E por quê? Porque, segundo Morgado et al. (1991, p. 2):

> Embora a Análise Combinatória disponha de técnicas gerais que permitem atacar certos tipos de problemas, é verdade que a solução de um problema combinatório exige quase sempre engenhosidade e a compreensão plena da situação descrita pelo problema. Esse é um dos encantos desta parte da matemática, em que problemas fáceis de enunciar, revelam-se por vezes difíceis, exigindo uma alta dose de criatividade para sua solução.

Em outras palavras, em um mundo contemporâneo em que temos a facilidade dos alunos obterem o que querem a partir de um clique, ou seja, uma moderna tecnologia maciçamente presente na vida de todos. No entanto, aqueles que estão prontos a estudar a Matemática, aqui de modo especial a Análise Combinatória, precisam saber que irá lhes ser exigido aquilo que será mais utilizado por todos e que é o mais importante: o raciocínio.

Assim, por exemplo, de acordo com Morgado et al. (1991, p. 1-2) temos dois tipos de problemas que ocorrem com muita frequência em Combinatória, que são: 1) Demonstrar a existência de subconjuntos de elementos de um conjunto finito dado e que satisfazem certas condições; e, 2) Contar ou classificar os subconjuntos de um conjunto finito e que satisfazem certas condições dadas. Assim, para o item dois em que será necessário contar ou classificar os subconjuntos de um conjunto finito dado e que esses subconjuntos satisfaçam certas condições iniciais dadas, os assuntos de combinações, arranjos e permutações dados em um curso introdutória de Análise Combinatória se mostram inicialmente eficazes e, para eles, temos fórmulas matemáticas a serem empregadas a determinados casos, ou seja, uma fórmula se o problema for de combinação, uma fórmula se ele for um arranjo, uma fórmula se ele for uma permutação, e assim sucessivamente. Mas isso não é o principal. O principal, ou seja, aquilo que é mais importante do que saber como usar tal fórmula para resolver aquele problema é saber quando usar aquela determinada fórmula, por isso, em Matemática, o mais importante é o raciocínio, a inteira compreensão do problema dado.

E ainda tem um porém, digamos assim: nem todos os tipos de assuntos vistos em Combinatória tem uma fórmula pronta que possa ser utilizada para o problema estudado, por exemplo, o Princípio da Casa dos Pombos e o Princípio da Invariância, onde, aquele que se debruçar nos problemas desses conteúdos, se valerá inicialmente do seu raciocínio, isso de forma geral, e do raciocínio lógico-matemático, de forma particular.

Estamos enaltecendo, assim, o raciocínio porque acreditamos que será a principal ferramenta que o aluno irá dispor para tentar resolver os problemas que se apresentarem nesses dois assuntos, e olha que não estamos falando nem da criatividade ainda, outra importante ferramenta, pois em alguns problemas apresentados, além do raciocínio lógico-matemático de que irá precisar o aluno, este também ainda deve buscar um pouco de criatividade para a tentativa da resolução das questões.

Em suma, ao falarmos dos problemas dentro do conteúdo Princípio da Casa dos Pombos e Princípio da Invariância, ambos da área de Combinatória, é subentendemos que para ter êxito na tentativa de suas soluções, deve o aluno raciocinar bastante e ter ainda criatividade, pois, do contrário, terá grandes dificuldades em seus estudos.

Esse é, portanto, o contexto em que se assentam os problemas de Análise Combinatória referentes ao Princípio da Casa dos Pombos e o Princípio de

Invariância. A seguir, serão apresentadas soluções para os problemas olímpicos propostos anteriormente.

4.2 O Princípio da Casa dos Pombos / Soluções

É importante destacar que não existe uma fórmula pronta para ser utilizada na resolução das questões que envolvem o Princípio da Casa dos Pombos, o que há são argumentos matemáticos, sejam eles aritméticos, algébricos, etc., que dão uma maior clareza na exposição da resolução.

Vamos rever os problemas:

Problema 2.2.1 (OBMEP 2017). *Uma caixa contém 10 bolas verdes, 10 bolas amarelas, 10 bolas azuis e 10 bolas vermelhas. Joãozinho quer retirar uma certa quantidade de bolas dessa caixa, sem olhar, para ter a certeza de que, entre elas, haja um grupo de 7 bolas com 3 cores diferentes, sendo três bolas de uma cor, duas bolas de uma segunda cor e duas bolas de uma terceira cor. Qual é o número mínimo de bolas que Joãozinho deve retirar da caixa?*

A situação ideal é que Joãozinho retire inicialmente, por exemplo, três bolas verdes, mais duas bolas amarelas e, por fim, mais duas bolas vermelhas, então teríamos, assim, sete bolas com três cores diferentes, sendo três de uma cor, duas de outra cor e mais duas de uma terceira cor, atendendo integralmente o que pede o problema. Isso seria, sim, o ideal, mas não é fácil isso acontecer de primeira no mundo real. Compreendido? Essa possibilidade seria, então, o ideal. Então o que o problema está pedindo de fato? Está pedindo que sejam esgotadas todas as possibilidades possíveis para que, ao final da resolução, não haja nenhuma possibilidade de não se conseguir nenhuma dessas bolas dentro dessas condições pedidas. Então, para iniciarmos um raciocínio certo na resolução desse problema, aqui, convém pensar inicialmente na pior das situações possíveis, ou seja, tentar encontrar o número máximo de tentativas que Joãozinho efetuará para que ele tenha certeza de que conseguirá esse subgrupo pretendido de sete bolas, sendo três de uma cor, duas de outra cor e mais duas de outra cor.

Solução 1: Percebemos que Joãozinho pode escolher 22 bolas sem que nenhum grupo de 7 delas satisfaça as condições do enunciado; Devemos pensar sempre na pior possibilidade, então ele pode escolher 10 bolas verdes, 10 amarelas, 1 azul e 1 amarela. Por outro lado, se ele escolher 23 bolas haverá, necessariamente, um grupo de 7 delas que satisfará a condição do enunciado. Podemos ver isso como segue: ao escolher 23 bolas, pelo menos 6 delas serão de uma mesma 1ª cor. De fato, caso contrário, então haveria no máximo 5 bolas de cada cor, ou seja, Joãozinho teria escolhido no máximo 5 + 5 + 5 + 5 = 20 bolas, o que não é o caso, já que estamos supondo que ele escolheu 23. O maior número possível de bolas dessa 1ª cor entre as escolhidas é 10; sobram, então, no mínimo 23 - 10 = 13 bolas para as outras três cores. O mesmo raciocínio aqui mostra que há pelo menos 5 bolas de uma 2ª cor e que sobram no mínimo 13 - 10 = 3 bolas para as duas cores restantes; finalmente, outra vez o mesmo raciocínio mostra que há pelo menos 2 bolas de uma 3ª cor. Mostramos, assim, que, se Joãozinho escolher 23 bolas, entre elas haverá um grupo de 13 bolas com 6 de uma 1ª cor, 5 de uma 2ª cor e 2 de uma 3ª cor; em particular, entre essas bolas aparecerão 3 da 1ª cor, 2 da 2ª e 2 da 3ª. Segue que 23 é o menor número de bolas que ele deve escolher para garantir a condição do enunciado.

Solução 2: Vamos supor que Joãozinho retirou 10 bolas verdes num primeiro momento e mais 10 bolas amarelas num segundo momento. Se Joãozinho retirar essas 20 bolas, então restarão na caixa apenas 20 bolas, sendo 10 bolas azuis e 10 bolas vermelhas. E agora? Bem, como não tem um número limite de retiradas de bolas da caixa, Joãozinho continua retirando e, dessa vez, ele tira mais duas bolas que podem ser: uma azul e uma vermelha, ou duas azuis ou ainda duas vermelhas. Mas devemos sempre pensar no pior caso, então devemos supor que ele retire uma bola azul e uma vermelha. Tendo em vista que se ele tirar as duas de uma mesma cor (azul ou vermelho), não teríamos visto o máximo de retiradas possíveis até não ter mais saída. E aí, tirando essas duas bolas e somando com as 20 bolas já tiradas, Joãozinho já soma 22 bolas tiradas, então, na próxima tentativa, saindo uma bola de qualquer cor (uma azul ou uma vermelha) ele então poderá somar com a azul ou a vermelha tirada e, assim, terá cumprido o que está pedindo o problema, totalizando, assim, um mínimo de 23 bolas tiradas para atingir o subgrupo nas condições pedidas.

Problema 2.2.2 (IMO 1972). *Prove que, de qualquer conjunto de dez números naturais distintos de dois dígitos, podemos escolher dois subconjuntos A e B (disjuntos) cuja soma dos elementos é a mesma em ambos*.

Solução: Seja *T* um conjunto com 10 números naturais de dois dígitos e distintos. A soma de todos os elementos de *T* pode ser no máximo 945, no caso em que *T* $= \{90, 91, ..., 99\}$. Agora, considere o conjunto das partes de *T*, ou seja, o conjunto formado por todos os subconjuntos de *T*. Este conjunto possui 2^{10} elementos, sendo um deles o conjunto vazio. Defina $C = \{1, 2, ..., 945\}$ e P como o conjunto das partes de *T* menos o conjunto vazio. Desta forma P possui $2^{10} - 1 = 1023$ elementos. Atente para o fato de que um elemento de P é um subconjunto de *T* e que a soma dos elementos de um elemento de P será um número que pertence a C.

Pelo princípio da casa dos pombos, como temos mais elementos em P do que em C, pelo menos dois elementos de *P* possuem a mesma soma. Suponha que *A* e *B* são esses elementos. Se eles forem disjuntos, acabou. Se não, considere $A_0 = A - A\cap B$ e $B_0 = B - A\cap B$. Logo, os conjuntos A_0 e B_0 são disjuntos e a soma dos seus elementos é a mesma.

Problema 2.2.3 (OBM 1991). *Mostre que existe um número da forma 199...91 (com pelo menos três noves) que é múltiplo de 1991*.

Solução: Considere todos os infinitos números da forma 199...91 e tomemos 1992 números que obedecem a esse formato. Sejam eles

$$a_1 = 19991$$
$$a_2 = 199991$$
$$\vdots$$
$$a_{1992} = 19999...9991$$

Na divisão por 1991 há somente 1991 restos possíveis, que são eles: $\{0, 1, 2, 3..., 1990\}$ e como temos 1992 números, faremos da seguinte forma:

- Pombos: os 1992 números a_1, a_2,...,a_{1992}.
- Gaiolas: os 1991 restos da divisão por 1991

Então, pelo Princípio da Casa dos Pombos, existirá pelo menos dois números que quando divididos por 1991 deixarão o mesmo resto. Sejam eles,

$$a_k = 1999...991$$
$$a_j = 1999...991$$

com com $k > j \Rightarrow \exists\, n \in N\,;\, k = n + j$

Como a_k e a_j possuem restos iguais, podemos escrevê-los da seguinte forma:

$$a_k = 1991p + r$$
$$a_j = 1991q + r$$

Fazendo a subtração entre a_k e a_j, obtemos que

$$a_k - a_j = 1991(p - q).$$

Logo, a subtração desses dois números é um múltiplo de 1991. Agora, vamos buscar descobrir o formato de $a_k - a_j$.

$$a_k - a_j = 1999...999...91 - 1999...991 = 1991(p - q)$$
$$\Rightarrow a_k - a_j = 1999...9800...0 = 1991(p - q)$$
$$\Rightarrow a_k - a_j = 1999...98.\,10^{j+3} = 1991(p - q).$$

Com isso,

$$a_k - a_j = 1999...98000.10^j = 1991(p - q)$$

Como $mdc\left(10^j,\ 1991\right) = 1$, então $10^j | (p - q)$. Temos então que existe um *h* inteiro, tal que $(p - q) = 10^j.h.$ Dessa forma,

$$a_k - a_j = 1999...98000.10^j = 1991.10^j.h$$
$$\Rightarrow a_k - a_j = 1999...98000 = 1991.h$$

Somando 1991 em ambos os lados, resulta que

$$1999...9991 = 1991(h + 1).$$

Problema 2.2.4 (OBM 2008). Vamos chamar de garboso o número que possui um múltiplo cujas quatro primeiras casas de sua representação decimal são 2008. Por exemplo, 7 é garboso pois 200858 é múltiplo de 7 e começa com 2008. Observe que 200858 = 28694 x 7. Mostre que todos os inteiros os inteiros positivos são garbosos.

Solução: Este problema é semelhante ao anterior. Considere n um inteiro positivo e denote $b = 2008$. Em seguida, considere os $n + 1$ números inteiros $b,\ bb,\ bbb,\ ...,\ bbbb..bb$, onde $bb = 20082008$ e assim por diante. Na divisão por n os restos possíveis são $0,\ 1,\ ...,\ n - 1$. Vamos considerar,

- Pombos: os *n + 1* inteiros $b,\ bb,\ bbb,\ ...,\ bbbb..bb$;
- Gaiolas: os *n* possíveis restos na divisão por *n*

Agora, observe que o número de pombos é maior do que o número de gaiolas, então pelo Princípio da Casa dos Pombos existem dois números, digamos $\underbrace{bb...bb}_{k}$ e $\underbrace{bb...bb}_{l}$, com $k < l$ que têm o mesmo resto na divisão por n. Logo, podemos escrevê-los da seguinte forma,

$$\underbrace{bb...bb}_{k} = n.q + \mathrm{r}$$

$$\underbrace{bb...bb}_{l} = n.p + \mathrm{r}$$

Com isso,

$$\underbrace{b...b}_{l} - \underbrace{b...b}_{k} = n.(p - q)$$

Portanto, o número $\underbrace{b...b}_{l} - \underbrace{b...b}_{k}$ é múltiplo de *n* e satisfaz a condição desejada.

Problema 2.2.5 (IMO 1991). Prove que existem infinitos números da forma 19999...99991 que são múltiplos de 1991.

Solução: Este problema é similar ao **problema 2.2.3**. Observe que 1991 é um desses números que satisfaz os dados do problema. Agora, considere todos os infinitos números da forma 199...91, com mais de três noves e observe que os restos possíveis na divisão por 1991 são 0,1, 2, ...,1990. Assim, podemos considerar

- Pombos: os infinitos números da forma 199...91

- Gaiolas: os 1991 restos da divisão por 1991

Então existem dois números distintos da forma 199...91 que deixam o mesmo resto na divisão por 1991. Se subtrairmos esses números obtemos um número múltiplo de 1991 (os restos se cancelam). Assim, existem k e l tais que

$$199...\underbrace{9}_{l}1 - 199...\underbrace{9}_{k}1 = 199...9800...0 = 1991.q$$

Podemos cortar os zeros à direita e o número continua múltiplo de 1991, mas devemos manter três deles:

$$199...98000 = 1991.p$$

Somando 1991 Em ambos os lados obtemos,

$$199...98000 + 1991 = 199...99991 = 1991(p + 1)$$

É fácil ver que esse número tem pelo menos três noves. Agora, suponha que esse número tem t noves e considere os infinitos números da forma $19...91$, com mais de $t + 1$ noves. Seguindo a mesma estratégia acima encontramos um múltiplo de 1991 com pelo menos $t + 1$ noves. Esse raciocínio pode ser continuado para a obtenção do resultado.

Problema 2.2.6 (Longlist IMO 1977 – Romênia). Dados 37 pontos no espaço com coordenadas inteiras, prove que pelo menos um dos triângulos formados por três destes pontos possui o baricentro com coordenadas inteiras.

Solução: Sejam $P_k = \left(x_k, y_k, z_k\right)$, $k = 1, 2, ..., 37$ os pontos. O baricentro do triângulo $\Delta P_iP_jP_k$ é o ponto

$$\left(\frac{x_i+x_j+x_k}{3}, \frac{y_i+y_j+y_k}{3}, \frac{z_i+z_j+z_k}{3}\right).$$

Então, precisamos mostrar que existem 3 pontos $P_iP_jP_k$ tais que as somas $x_i + x_j + x_k$, $y_i + y_j + y_k$ e $z_i + z_j + z_k$ sejam múltiplos de 3. Para isto, vamos aplicar o Princípio da Casa dos Pombos por etapas. Olhemos inicialmente para a primeira coordenada. Lembre que há 3 restos possíveis na divisão por 3, são eles: 0, 1 e 2. Como 37 = 3 x 12 + 1, podemos obter um conjunto com 13 pontos tais que em todos a primeira coordenada deixa o mesmo resto na divisão por 3. De modo similar, olhemos para a segunda coordenada. Como 13 = 3 x 4 + 1 podemos obter um conjunto de 5 pontos, tais que em todos a segunda coordenada também deixa um mesmo resto na divisão por 3. Assim, ao tomarmos quaisquer 3 desses pontos, as duas primeiras coordenadas do baricentro serão inteiras. Agora olhemos para a terceira coordenada. Como $5 = 3 \times 2 + 1$ podemos obter um conjunto de 3 pontos, tais que em todos a terceira coordenada também deixa um mesmo resto na divisão por 3.

Problema 2.2.7 (OBM). Uma caixa contém 100 bolas de cores distintas. Destas, 30 são vermelhas, 30 são verdes, 30 são azuis e entre as 10 restantes, algumas são brancas e outras são pretas. Determine o menor número de bolas que devemos tirar da caixa, sem lhes ver a cor, para termos a certeza de haver pelo menos 10 bolas da mesma cor.

Solução: A solução deste problema é semelhante a do **problema 2.2.1**. Claramente, 37 bolas não são suficientes uma vez que entre elas podem estar as 10 bolas brancas e pretas e 9 de cada uma das outras. Por outro lado, 38 bolas garantem que temos pelo menos 28 bolas que não são nem brancas e nem pretas e uma vez que $28 = 3 \times 9 + 1$ pelo Princípio da Casa dos Pombos temos certamente 10 bolas da mesma cor. Então, em uma pequena recapitulação, temos que, uma caixa contém 100 bolas de cores diferentes, sendo que 30 bolas são vermelhas, 30 são verdes e 30 são azuis e as 10 restantes, uma parte é branca e outra parte é preta. O cenário ideal, logicamente, é que as primeiras dez bolas retiradas sejam da mesma cor e estaria resolvido o problema, mas sabemos que no mundo real o ideal não costuma acontecer com frequência, então, vamos pensar diferente. Pensemos no pior cenário possível, ou seja, tiraríamos 9 bolas vermelhas, mais 9 bolas verdes, mais 9 bolas azuis, só aqui, teríamos 27 bolas tiradas e não teríamos conseguido atender ao que foi pedido no problema. Na sequência de ações, tiraríamos mais 10 bolas, sendo que desta vez, seriam as 10 bolas restantes que possuem cores diferentes, ou seja, brancas e pretas. Estas, somadas às já 27 existentes, dariam um total de 37 bolas tiradas sem o atendimento do problema. Então, na próxima bola retirada, seja ela vermelha, verde ou azul, aí sim conseguiríamos atender ao pedido do problema, chegando ao total de 10 bolas da mesma cor. Portanto, o número mínimo é 38 bolas tiradas para termos certeza matemática de que pelo menos 10 bolas possuirão a mesma cor.

Problema 2.2.8 (OBM). Qual é a maior quantidade de números do conjunto {1, 2, 3, ..., 20} que podemos escolher de modo que nenhum deles seja o dobro do outro?

Solução: Considere *S* = {1, 2, 3, … , 20}. Vamos formar subconjuntos de *S* tais que cada elemento seja o dobro do anterior. Sejam eles os subconjuntos $A = \{1,\ 2,\ 4,\ \ 8,\ 16\}$, $B = \{3,\ 6,\ 12\}$, $C = \{5,\ 10,\ 20\}$, $D = \{7,\ 14\}$, $E = \{9,\ 18\}$ e $F = \{11,\ 13,\ 15,\ 17,\ 19\}$. A fim de gastar todas as possibilidades até atingir o resultado esperado, tome os três elementos (1, 4 ,16) de *A*,, os dois elementos (5, 20) de *B*, os dois elementos (3, 12) de *C,* o elemento (7) de D $(\text{poderia ser o } 14)$, o elemento (9) de E $(\text{poderia ser o } 18)$ e todos os cinco elementos de F. Um total de $3 + 2 + 2 + 1 + 1 + 5 = 14$ elementos. Se tomarmos o $15°$ elemento, ele será o dobro de algum dos números já escolhido.

Conforme pudemos ver ao longo desses problemas, não existe uma fórmula ou uma única maneira de resolvê-los, onde em diversos momentos os conhecimentos de aritmética, álgebra, geometria, combinatória, foram cobrados sobremaneira, o que exige de quem se debruce sobre eles para tentar resolvê-los, aprendendo, assim, sua resolução, esses conhecimentos que reputamos básicos.

O Princípio da Casa dos Pombos é um tipo de raciocínio poderoso que permite resolver problemas dos mais variados na Matemática. Os problemas olímpicos trabalhados ao longo deste subcapítulo foram expostos no capítulo dois com dicas de resolução. Esperamos que o estudo desses problemas, tanto a resolução integral, nesta seção, quanto as dicas do segundo capítulo, possam instigar o gosto daqueles que pretendem se lançar em diversos problemas olímpicos de matemática cujo pano de fundo seja esse princípio matemático.

4.3 O Princípio da Invariância / soluções

Neste subcapítulo, especificamente, apresentaremos a solução dos problemas propostos na **seção 3.2** que envolvem o Princípio da Invariância, princípio este que foi devidamente explicitado no capítulo três deste trabalho.

Problema 3.2.1 (Olimpíada de Maio 1999). Em cada um dos 10 degraus de uma escada existe uma rã. Cada rã pode, de um pulo, colocar-se em outro degrau, mas quando uma rã faz isso, ao mesmo tempo, uma outra rã pulará a mesma quantidade de degraus em sentido contrário: uma sobe e outra desce. Conseguirão as rãs colocar-se todas juntas num mesmo degrau?

Solução: Vamos dar valor às rãs de acordo com a posição ocupada por cada uma nos degraus da escada. Então, vamos numerar os degraus de 1 a 10 e fazer: a rã que está no primeiro degrau tem valor 1; a rã que ocupa o segundo degrau tem valor 2; a rã que ocupa o terceiro degrau tem valor 3 e assim por diante, até termos que a rã que ocupa o décimo degrau tem valor 10. Ao somarmos o valor de cada rã obtemos,

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55$$

Agora, perceba que o valor total das rãs não se altera, mesmo que elas mudem de posição, pois se uma rã sobe uma posição, outra rã desce uma posição ou se uma rã sobre 3 posições, outra rã desce 3 posições. O problema quer saber se é possível que as rãs fiquem no mesmo degrau. Para isso, seria necessário que o valor das rãs fosse o mesmo. Ou seja, considerando x o valor das rãs (estando todas no mesmo grau x), deveríamos ter

$$10x = 55$$

Mas esta não é uma solução inteira, portanto é impossível que todas as rãs ocupem um mesmo degrau.

Problema 3.2.2 (Torneio das Cidades 1985). Na ilha de Camelot vivem 13 camaleões roxos, 15 verdes e 17 amarelos. Quando dois de cores distintas se encontram, mudam simultaneamente para a terceira cor. Poderia dar-se a situação na qual todos tenham a mesma cor?

Solução: Considere a, b e c o número de camaleões, respectivamente, roxos, verdes e amarelos. A partir do enunciado podemos inferir que a tripla (a,b,c) se transforma em $(a - 1, b - 1, c + 2)$, $(a - 1, b + 2, c - 1)$ ou $(a + 2, b - 1, c - 1)$ a depender da cor inicial dos camaleões aos se encontrarem. Vamos supor que a tripla (a, b, c) se transformou em ($a - 1, b - 1, c + 2$). Fazendo a diferença entre quaisquer duas coordenadas desta tripla, obtemos

- $(a - 1) - (b - 1) = (a - b)$
- $(a - 1) - (c + 2) = (a - c) - 3$
- $(b - 1) - (a - 1) = (b - a)$
- $(b - 1) - (c + 2) = (b - c) - 3$
- $(c + 2) - (a - 1) = (c - a) + 3$
- $(c + 2) - (b - 1) = (c - b) + 3$

Com isso, podemos perceber que ao fazermos a diferença entre quaisquer coordenadas dessa tripa (o mesmo ocorre para as outras triplas), não muda em nada, ou aumenta 3 ou diminui 3, na subtração das mesmas coordenadas da tripla inicial. Isso nos mostra que, se fizermos a divisão dessas diferenças por 3 (nas coordenadas da tripa inicial e nas mesmas coordenadas da tripla após modificada) o resto também não muda. Agora que encontramos algo invariante, podemos prosseguir usando o seguinte raciocínio: inicialmente,

$$a - b = 13 - 15 = -2.$$

Agora, vamos supor que é possível que todos tenham a mesma cor, e eles tenham ficado todos na cor amarela. Neste caso, teríamos

$$a - b = 0 - 0 = 0$$

Entretanto, os números -2 e 0 possuem restos diferentes quando divididos por 3. Logo, não é possível que todos tenham a cor amarela simultaneamente. Agora, vamos ver o caso em que todos os camaleões ficam verdes. Originalmente

$$a - c = 13 - 17 = -4$$

Se todos ficassem verdes, teríamos

$$a - c = 0 - 0 = 0$$

Mas, os números – 4 e 0 deixam restos distintos ao serem divididos por 3, logo não é possível que todos os camaleões fiquem na cor verde simultaneamente. O caso em que todos os camaleões ficam roxos é análogo aos anteriores.

Problema 3.2.3 (Torneio das Cidades 1987). Uma máquina dá cinco fichas vermelhas quando alguém insere uma ficha azul e dá cinco fichas azuis quando alguém insere uma ficha vermelha. Pedro possui apenas uma ficha azul e deseja obter a mesma quantidade de fichas azuis e vermelhas usando essa máquina. É possível fazer isso?

Solução: Inicialmente, Pedro tem 1 ficha azul e 0 fichas vermelhas. O primeiro passo que ele pode fazer é inserir a sua ficha azul na máquina e receber em troca 5 fichas vermelhas. Após isso, Pedro fica com 0 fichas azuis e 5 fichas vermelhas. Vamos chamar de *S* a soma das fichas que Pedro possui. Inicialmente,

$$S = 1 + 0 = 1$$

Após o 1° passo, Pedro obteve

$$S' = 0 + 5 = 5$$

Agora, como Pedro possui 5 fichas vermelhas e 0 azuis, ele pode prosseguir da seguinte forma: inserir uma quantidade x de fichas vermelhas e receber uma quantidade $5x$ de fichas azuis. Fazendo isso, ele obterá

$$S'' = (0 + 5x) + (5 - x) = 4x + 5$$

Agora, note que, independente da quantidade x escolhida por Pedro ser par ou ímpar, temos que $4x$ é sempre par. E como a soma de um número ímpar com um número par é sempre ímpar, temos que a paridade de S é sempre ímpar, ou seja, é invariante. O problema quer saber se é possível obter a mesma quantidade de fichas azuis e vermelhas. Para isto ser possível, é necessário que a soma das fichas de Pedro seja par, entretanto isso não é possível, já que S é sempre ímpar.

Problema 3.2.4 (Leningrado 1990) Paula comprou um caderno com 96 folhas, com páginas numeradas de 1 a 192. Nicolas arrancou 25 folhas aleatórias e somou todos os 50 números escritos nestas folhas. É possível que esta soma seja 1990?

Solução: Em cada folha do caderno de Paula há um número ímpar e um número par. Observe que se arrancarmos uma folha do caderno de Paula, a soma dos números escritos nesta folha é ímpar. Pois a soma entre um número par (P) e um número ímpar (I) resulta em um número ímpar. Com isso, podemos notar que a paridade da soma dos números de qualquer folha é a mesma (I). Se Nicolas arrancou 25 folhas aleatórias do caderno de Paula, então ele arrancou 25 folhas com paridade I, ou seja, a soma dos valores escritos nessas 25 folhas,

$$I + I + \ldots + I = 25.I$$

é impar. Vamos usar a questão da paridade dos números para ver se é possível a soma dos números escritos nas 25 páginas resultar em 1990. Observe que 1990 é par, e como vimos anteriormente, a soma dos números escritos nas 25 folhas arrancadas é ímpar, logo não é possível obter a soma de 1990.

Problema 3.2.5 (Leningrado 1987). As moedas dos países Dillia e Dallia são o diller e o daller, respectivamente. Podemos trocas um diller por dez dallers e um daller por dez dillers. Zequinha possui um diller e deseja obter a mesma quantidade de dillers e dallers usando essas operações. É possível que isso ocorra?

Solução: podemos raciocinar de forma semelhante a solução do **problema 3.2.3.** Primeiro, denotemos Diller por *DI* e Daller por *DA.* Inicialmente, Zequinha possui 1 *DI* e 0 *DA*. O primeiro passo que ele pode fazer trocar 1 *DI* por 10 *DA*. Após isso, Zequinha fica com 0 *DI* e 10 *DA*. Vamos chamar de *T* a soma dos *DI* e *DA* que zequinha possui. Inicialmente,

$$T = 1 + 0 = 1$$

Após o 1° passo, Zequinha obteve

$$T' = 0 + 10 = 10$$

Agora, como Zequinha possui 10 *DA* e 0 *DI*, ele pode prosseguir da seguinte forma: trocar uma quantidade x de *DA* por uma quantidade $10x$ de *DI*. Fazendo isso, ele obterá

$$T'' = (0 + 10x) + (10 – x) = 9x + 10$$

Agora, note que, independente da quantidade x escolhida por Zequinha ser par ou ímpar, temos que *ox* é sempre ímpar. E como a soma de um número ímpar com um número par (*9x + 10)* é sempre ímpar, temos que a paridade de T é sempre ímpar, ou seja, é invariante. O problema quer saber se é possível obter a mesma quantidade *DI* e *DA*. Para isto ser possível, é necessário que a soma dos *DA* e *DI* de Zequinha seja par, entretanto isso não é possível, já que T é sempre ímpar.

Como exposto inicialmente, os problemas do Princípio da Casa dos Pombos e Princípio da Invariância exigem para a sua resolução não apenas um raciocínio combinatório, mas criatividade e, sobretudo, conhecimentos de outras áreas da Matemática, pois não dispondo ambos de fórmulas para serem utilizadas na resolução, exigem de quem se debruce a aprender a resolvê-los domínios de argumentos aritméticos, algébricos, geométricos, etc.

Os problemas olímpicos trabalhados ao longo deste capítulo nos dão uma amplitude da riqueza de situações em que esses conhecimentos podem ser empregados, melhorando, assim, o raciocínio lógico-matemático.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo geral desta dissertação foi estudar o PCP e a invariância aplicados em problemas olímpicos, culminando em mais um material de apoio e treinamento a estudantes que estão se preparando para olimpíadas.

A literatura ainda tímida em relação ao número de estudos que tratam sobre a temática desta pesquisa, tendo como fonte principal de investigação os módulos de ensino da OBMEP.

Apesar do princípio da Casa dos Pombos e da Invariância apresentar-se como um conteúdo trivial, ainda assim foi possível identificar algumas habilidades que o estudante precisa ter para dominá-lo, ou pelo menos compreender para que de fato seja utilizado em variadas questões das olimpíadas de matemática. Exige uma capacidade dedutiva e intuitiva muito grande, o que de forma indireta faz a diferença no momento de resolver as questões, por mais simples que pareçam ser.

Tais princípios nos mostram que requer do estudante o trabalho da análise e exploração dos problemas, por isso, a ideia é formar pessoas capazes de analisar problemas partindo do pensamento de que se trata de um conteúdo de fácil compreensão, mas que precisa criar habilidades, que serão conquistadas com a prática, tornando-se um fator relevante para o estudante que está em busca de conteúdos, que possam contribuir com seus estudos para provas olímpicas, visto que a busca por invariantes é uma das principais estratégias na resolução.

Apesar de ser um conteúdo simples, é notório que encontrar as invariantes não é tarefa trivial, já que elas mudam de problema a problema, isso quer dizer, que a cada questão deparamos com um desafio, que envolve uma invariante, por isso a importância de praticar e resolver inúmeras questões.

Chegamos a uma consideração razoável de que para uns o fato de não existir uma fórmula, um teorema milagroso, que resolva todos os problemas relativo a invariantes é frustrante, mas para outros é isso que faz da matemática uma arte, resolver esse tipo de problema requer muita inspiração

Esse material é um ponto pé inicial para apoio aos que precisam criar a habilidade de pensar, refletir sobre um problema e a partir deste utilizar princípios que podem ser bastante úteis, ainda que pareçam simples, mas que exprimem uma utilidade na resolução de problemas olímpicos, pois além de conhecimento o estudante também precisa saber usar técnicas de resolução que permita o uso mínimo de tempo, só assim poderá resolver várias questões dentro do tempo disponível, é nessa perspectiva que esse trabalho foi estruturado, promover um diálogo com leitor capaz de levá-lo a refletir sobre a importância que o princípio das casa dos pombos e o princípio da invariância tem para a resolução de problemas matemáticos, que por vezes é destaque nas olimpíadas.

A partir desse material esperamos que outros estudos sejam promovidos, inclusive com novas propostas, questões e ideias de resolução, usando esses dois princípios, que ainda tem muito a ser explorado, para isso é necessário a criatividade, a reflexão, o raciocínio lógico e tanto outras habilidades para estruturar uma ideia, uma forma de pensar e resolver problemas, partindo dos problemas clássicos aqui apresentados.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AGUIAR, Thiago Pinheiro de. Princípio da Casa dos Pombos: uma abordagem diferenciada com objetos de aprendizagem. 2013. 57 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)). Centro de Ciências – Departamento de Matemática (Universidade Federal do Ceará – UFC). 2013. Disponível em:< https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=35146 > Acesso em: 14 Dez. 2020.
ANTON, Howard; BIVENS, Irl; DAVIS, Stephen. **Cálculo**. [Tradução por Claus Ivo Doering]. 8. ed. Porto Alegre: Bookman, 2007.

BAGATINI, Alessandro. Olimpíadas de Matemática, Altas Habilidades e Resolução de Problemas. Porto Alegre 2010. Disponível em: https://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/29144/000775916.pdf?...1 Acesso em 10/10/2020.

BRAGANÇA, B. Olimpíada de Matemática Para a Matemática Avançar. Viçosa: 2013, 107 p.

CAVALCANTE, Larissa Maria Sousa. **O Princípio da Casa dos Pombos e suas aplicações**. 2017. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Licenciatura em Matemática) – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará – IFCE – Campus Canindé.

FERNANDÉZ, Susana Frómeta. **Princípio da Casa dos Pombos**. Problemas Resolvidos – Nível 2. Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo. 2018. Disponível em: < https://poti.impa.br/uploads/material_teorico/7vbinhlnc0g80.pdf> Acesso em: 10 Dez. 2020.

HAZAN, Samuel. **Fundamentos de matemática elementar**: volume 5, Combinatória, Probabilidade. São Paulo: Atual, 1977.

HOLANDA, Bruno. **Polos Olímpicos de Matemática**: curso de combinatória – nível 1. 2019. Disponível em: < https://poti.impa.br/uploads/material_teorico/65suiubdebggo.pdf> Acesso em: 10 jan. 2021.

LASALLE, J. The extent of asymptotic stability.Proceedings of the National Aca-demy of Sciences, Washington, DC, v.46, n.3, p.363–365, 1960a. Disponível em: https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC222841/pdf/pnas00202-0099.pdf Acesso em 2/10/2020.

LASALLE, J. Some extensions of liapunov's second method.IRE Trans. on CircuitTheory, New York, NY, v.CT-7, p.520–527, 1960b. Disponível em: https://pdfs.semanticscholar.org/c46d/96ff782807c4650e030e063930dea563f294.pdf Acesso em 5/11/2020.

LIMA, Juliano Ferreira de; et al. **O Princípio das Gavetas de Dirichlet**. 2014. (Encontro de Ensino, Pesquisa e Extensão, Presidente Prudente, 20 a 23 de outubro de 2014). Colloquium Exactarum. Disponível em: <http://www.unoeste.br/site/enepe/2014/suplementos/area/Exactarum/Matem%C3%A1tica/O%20PRINCIPIO%20DAS%20GAVETAS%20DE%20DIRICHLET.pdf> Acesso em: 08 Dez. 2020.

MARTINS, Simone da Silva. **Uma abordagem para o Princípio da Casa dos Pombos no Ensino Fundamental através da Resolução de Problemas**. 2019. 59 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)). Centro de Ciências Naturais e Exatas (Universidade Federal de Santa Maria). 2019. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=170670427> Acesso em: 12 Dez. 2020.

MACIEL, M. V. M. BASSO, M. V. A. Olimpíada brasileira de matemática das escolas públicas (obmep): as origens de um projeto de qualificação do ensino de Matemática na Educação Básica. GT 03 –História da Trabalhos X EGEM X Encontro Gaúcho de Educação Matemática Comunicação Científica 02 a 05 de junho de 2009, Ijuí/RS. Disponível em: http://www.projetos.unijui.edu.br/matematica/cd_egem/fscommand/CC/CC_19.pdf Acesso em 20/10/2020.

MARTINS, J. C. G. Sobre revoluções científicas na Matemática / João Carlos Gilli Martins. – Rio Claro : [s.n.], 2005 175 f. Disponível em: http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/MATEMATICA/Tese_Gilli.pdf Acesso em 19/10/2020.

MORGADO, Augusto César et al. **Análise combinatória e probabilidade**. Rio de Janeiro: SBM, 1991.

NASCIMENTO, José Alberto da Silva. **Princípio das Gavetas e Aplicações**. 2018. 28 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Centro de Ciências Exatas e da Natureza – Departamento de Matemática) Universidade Federal da Paraíba. 2018. Disponível em: < https://repositorio.ufpb.br/jspui/bitstream/123456789/14987/1/JASN04072019.pdf> Acesso em: 11 Dez. 2020.

RODRIGUES, H. M. ALBERTO, L. F. C. BRETAS, N. G. Um princípio de invariância uniforme. robustez com relação à variação de parâmetros. Sba Controle & Automação vol.13 no.1 Campinas Jan./Apr. 2002. Disponível em: https://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0103-17592002000100007 Acesso em 10/10/2020.

SHINE, Carlos. **Princípio da Casa dos Pombos**. Programa Olímpico de Treinamento. Curso de Combinatória – Nível 3. Aula 7. 2010. Disponível em: <https://www.urantiagaia.org/educacional/matematica/combinatoria3/Aula07-Casa_dos_Pombos.pdf> Acesso em: 13 Dez. 2020.

STEFFENON, Rogério Ricardo. **Belos Problemas**: indução e Princípio das Gavetas de Dirichlet. Bienal de Matemática (Rio de Janeiro 2017). (Sociedade Brasileira de Matemática – SBM). Disponível em: <

http://www.im.ufrj.br/walcy/Bienal/textos/BELOS%20PROBLEMAS.pdf> Acesso em: 12 Dez. 2020.

VASCONCELOS, Cleiton Batista; ROCHA, Manoel Américo. **Análise Combinatória e Probabilidade**. 3. ed. Fortaleza/CE: Ed. UECE, 2019.

VIANA, Aline. Tópicos ruins de ensinar. **Cálculo: matemática para todos**, São Paulo, ano 3, n. 32, p. 32, setembro, 2013.

ZILIO, Anderson. **Resolução de problemas olímpicos através da Combinatória e o Princípio da Casa dos Pombos**. 2019. 97 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)) Universidade Federal de Santa Catarina. 2019. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/215100/PMTM-P0045-D.pdf?sequence=-1&isAllowed=y> Acesso em: 13 Dez. 2020.

ZONTA, Carlos Alberto. **O Princípio da Casa dos Pombos aplicado ao ensino de Matemática com a metodologia ativa de aula invertida**. 2019. 67 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)). Universidade Federal de Mato Grosso do Sul. 2019. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=160360591> Acesso em: 10 Dez. 2020.