UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Neiviton Silva da Paz

Propostas e análise de sequências didáticas para o ensino de áreas e volumes de figuras semelhantes.

RECIFE
2021

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Neiviton Silva da Paz

Propostas e análise de sequências didáticas para o ensino de áreas e volumes de figuras semelhantes.

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Eudes Mendes Barboza

RECIFE
2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal Rural de Pernambuco
Sistema Integrado de Bibliotecas
Gerada automaticamente, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

N417p Paz, Neiviton Silva da Paz
Propostas e análise de sequências didáticas para o ensino de áreas e volumes de figuras semelhantes / Neiviton Silva da Paz Paz. - 2021.
107 f. : il.

Orientador: Eudes Mendes Barbosa.
Inclui referências e anexo(s).

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Programa de Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT), Recife, 2021.

1. Semelhança de figuras. 2. Área. 3. Volume. 4. Sequência didática. I. Barbosa, Eudes Mendes, orient. II. Título

CDD 510

NEIVITON SILVA DA PAZ

Propostas e análise de sequências didáticas para o ensino de áreas e volumes de figuras semelhantes.

Trabalho apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT do Departamento de Matemática da UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Aprovado em 30/07/2021

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Eudes Mendes Barboza (Orientador)– UFRPE

Profa. Dra. Cláudia Ribeiro Santana– DMat/UESC-Ilhéus

Prof. Dr. Rodrigo Genuino Clemente– PROFMAT/UFRPE

Dedico este trabalho a todos os profissionais da educação.

Agradecimentos

Agradeço a todos aqueles que contribuíram direta ou indiretamente para tornar possível este momento, em especial à minha mãe Ivanilda que sempre me apoiou e me ajudou a alcançar meus objetivos. Agradeço também aos colegas de mestrado pelo companherismo que desenvolvemos durante esses dois anos, em especial aos amigos Jonas Santana, José Marcos e Paulo Ricardo, pelos momentos de aprendizado que pudemos partilhar no nosso grupo de estudo intitulado "grupo de cálculo".

A todo o corpo docente do PROFMAT-PE pelos momentos de apredizagem proporcionados ao longo destes dois anos, em especial ao meu orientador Dr. Eudes Mendes Barboza por me orientar desde a graduação, tornando-se, desde então, uma das minhas principais referências do âmbito educacional, além de me motivar a continuar meu aperfeiçoamento profissional, mostrando que o sonho do mestrado não era impossível. Agradeço também pela disponibilidade durante todo o desenvolvimento desta pesquisa, se mostrando presente sempre que necessário.

Agradeço também à CAPES, pois o presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

"Gigantes são os mestres nos ombros dos quais eu me elevei."

Isaac Newton.

Resumo

O presente trabalho apresenta um estudo aprofundado acerca do ensino dos conceitos que envolvem as áreas e os volumes de figuras semelhantes, que, embora estejam presentes nos currículos da educação básica, em alguns casos, não são abordados com a devida ênfase. Ao logo do trabalho deduzimos, por meio de uma sequência lógico-dedutiva, os resultados referentes às relações existentes entre as áreas e entre os volumes de figuras semelhantes, buscando oferecer ao leitor uma base teórica, justificando os resultados matemáticos encontrados. Além disso, nesta pesquisa são aplicadas duas sequências didáticas em turmas do 3º ano do ensino médio, uma sequência em formato presencial e outra em formato remoto, compreendendo que esta segunda modalidade de ensino citada é uma alternativa para períodos em que as aulas precisam acontecer à distância. Posteriormente, as aplicações das sequências didáticas são analisadas e comparadas, verificando a viabilidade da abordagem deste tema através das atividades propostas em cada uma das sequências.

Palavras-chave: Semelhança de figuras; Área; Volume; Sequência didática.

Abstract

This work presents an in-depth study of the teaching of concepts involving areas and volumes of similar figures, which, although present in basic education curricula, in some cases, are not addressed with due emphasis. In the course of the work, we deduced, through a logical-deductive sequence, the results regarding the existing relationships between areas and between volumes of similar figures, seeking to offer the reader a theoretical basis, justifying the mathematical results found. In addition, in this research, two didactic sequences are applied in third-year high school classes, one sequence in face-to-face format and the other in remote format, understanding that this second teaching modality mentioned is an alternative for periods when classes need to take place at the distance. Subsequently, the applications of the didactic sequences are analyzed and compared, verifying the feasibility of approaching this theme through the activities proposed in each of the sequences.

Keywords: Similarity of figures; Area; Volume; Following teaching.

Lista de ilustrações

Sumário

Introdução

A ideia de semelhança está ligada à ampliação ou à redução de uma figura, mantendo sua forma, isto é, alterando seu tamanho e mantendo suas proporções. No estudo tradicional da geometria da educação básica é comum a apresentação do conceito de semelhança através de triângulos da seguinte forma: *"dois triângulos semelhantes têm ângulos correspondentes congruentes e lados correspondentes proporcionais"*(BIANCHINI, 2015, p.7). Posteriormente esse conceito é estendido para polígonos, entretanto, a ideia de semelhança de figuras pode ser estendida para além dos polígonos, por exemplo, uma imagem espelhada numa tela de TV é semelhante à imagem da tela do celular que a espelha e uma bola de gude é semelhante a uma bola de sinuca.

Nos exemplos acima, como em vários outros, a definição comumente encontrada de semelhança não pode ser aplicada, visto que as figuras citadas não são compostas por segmentos e ângulos. No caso do círculo, por exemplo, na maneira mais natural de se obter sua área observa-se durante o processo que dois círculos quaisquer são semelhantes, além disso o conceito de semelhança também estabelece relações entre as áreas das figuras e entre os seus volumes, mas para fazer observações e estabelecer relações se faz necessário uma definição de semelhança mais abrangente, de modo que seja possível aplicá-la a quaisquer figuras planas ou espaciais.

Para isso esta pesquisa toma como referência principal o livro (LIMA, 1991) e apresenta uma definição de semelhança através de um tratamento que possa ser válido para quaisquer formas definidas no plano ou no espaço, buscando desenvolver nos estudantes as habilidades exigidas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2018) do ensino médio que aponta como uma das habilidades a serem desenvolvidas *"empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície."*

Ao analisar as habilidades exigidas na BNCC do ensino fundamental e na BNCC do ensino médio, surgiram os seguintes questionamentos: Quais as relações existentes entre as áreas e entre os volumes de duas figuras semelhantes? Como apresentar estas relações para alunos da educação básica desenvolvendo as habilidades exigidas na BNCC?

Para responder estes questionamentos esta pesquisa busca deduzir as relações existentes entre as áreas e entre os volumes de figuras semelhantes para apresentá-las através de sequências didáticas. Inicialmente foi feita uma análise da BNCC do ensino fundamental anos finais e da BNCC do ensino médio, buscando identificar as habilidades exigidas que envolvem os conceitos de semelhança, área e volume de figuras. Em seguida foi feita uma revisão bibliográfica com relação aos conceitos de áreas de figuras semelhantes, a fim de deduzir as relações entre as áreas de figuras semelhantes gerais baseando-se nas relações estabelecidas entre figuras planas específicas como quadriláteros, triângulos círculos, etc. Foi feita também uma revisão bibliográfica acerca dos conceitos de volumes de sólidos semelhantes, a fim de deduzir as relações entre os volumes dos sólidos semelhantes gerais baseando-se nas relações estabelecidas entre sólidos geométricos específicos como cilindros, cones, esferas, etc. Por fim, foram elaboradas duas sequências didáticas com base nas habilidades exigidas na BNCC, uma proposta para a aplicação presencial e outra para a aplicação de forma remota, ambas voltadas para o ensino médio, com foco nas áreas e nos volumes de figuras semelhantes.

Dessa forma, este trabalho caracteriza-se como uma pesquisa de campo exploratória de cunho qualitativo. Sua metodologia consiste em identificar, através de um pré teste, o nível de compreensão dos alunos em relação aos conceitos de figuras semelhantes, elaborar duas sequências didáticas para o ensino médio, uma voltada para a aplicação presencial e a outra voltada para aplicação de forma remota e em seguida fazer intervenções em dois grupos, um para cada sequência proposta, para posteriormente aplicar um pós teste e analisar os impactos das sequências didáticas propostas, comparando os resultados das sequências verificando se cada uma proporcionou o desenvolvimento das habilidades esperadas.

Esta pesquisa será estruturada em 3 capítulos da seguinte forma: No primeiro capítulo é apresentado o referencial teórico e este está subidividido em duas seções. Na primeira seção, intitulada Análise da BNCC, é feita uma análise da Base Nacional Comum Curricular que é um documento normativo que define o conjunto de habilidades que todos os estudantes devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica. Nesta análise buscamos identificar as habilidades referentes ao tema que são propostas no documento com a finalidade de nortear a sequência didática que será proposta posteriormente.

Na segunda seção, intitulada Referencial matemático, a pesquisa apresenta uma revisão bibliográfica apresentando uma definição de semelhança de figuras capaz de atender todas as demandas do estudo. Em seguida, através das figuras geométricas planas usuais, é feita uma dedução lógica das relações existentes entre a razão de semelhança e as áreas de duas figuras semelhantes quaisquer. Por fim utiliza-se dos sólido geométricos comumente apresentados na educação básica para deduzir uma relação geral entre a razão de semelhança e os volumes de duas figuras geométricas espaciais quaisquer.

No segundo capítulo da pesquisa, intitulado Metodologia, são apresentados o público participante da pesquisa, a metodologia utilizada na coleta e tratamento dos dados e as sequências didáticas que serão aplicadas como proposta de intervenção didática.

No terceiro capítulo, intitulado resultados e discussões, são apresentados e discutidos os resultados obtidos nos testes diagnósticos aplicados antes e depois da intervenção didática. Neste capítulo serão feitas comparações entre os resultados dos testes diagnósticos e entre as sequências propostas, para posteriormente apresentas as considerações finais, analisando se a aplicação de cada sequência didática atendeu as expectativas proporcionando aos estudantes o desenvolvimento das habilidades esperadas.

1 Referencial Teórico

Neste capítulo será desenvolvido o referencial teórico da pesquisa, que está subdividido em duas seções. Na primeira seção, é feita uma análise da BNCC, destacando algumas habilidades que devem ser desenvolvidas no final do ensino fundamental e do ensino médio que são pertinentes a esta pesquisa. Na segunda seção, é feita uma revisão de literatura acerca do conceito de semelhança de figuras, desenvolvendo Proposições e Teoremas que representam a base teórica para os resultados matemáticos que serão utilizados nesta pesquisa.

1.1 Análise da BNCC

Buscando evidenciar a relevância do tema da pesquisa, na educação básica, esta seção apresenta uma análise do documento que norteia a eduação básica nacional, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), pontuando suas recomendações e elencando as habilidades relevantes a esta pesquisa que são exigidas na BNCC. Pois, como afirma o prórpio documento:

> A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica, de modo a que tenham assegurados seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento.(BRASIL, 2018, p.7).

Neste sentido, iniciamos esta seção pontuando que as expectativas de desenvolvimento das habilidades propostas nesta pesquisa estão de acordo com as recomendações propostas na BNCC que espera que os estudantes desenvolvam a capacidade de identificar oportunidades de utilização da matemática para resolver problemas, aplicando conceitos, procedimentos e resultados para obter soluções e interpretá-las segundo os contextos das situações.

Analisaremos, a BNCC com foco nas habilidades, elencando as habilidades que estão descritas no documento. Cada habilidade exposta acompanha um código alfanumérico que a representa, este código indica características da habilidade, tais como: a etapa do ensino, o ano em que ela está definida ou o bloco de anos, o componente curricular e a posição da habilidade na numeração sequencial do ano, como mostra o exemplo a seguir:

Tabela 1 – Código alfanumérico da BNCC.

(EF06MA21)	
EF	Ensino Fundamental.
06	6º Ano.
MA	Matemática
21	posição da habilidade na numeração sequencial do ano.

Fonte: Autoria própria.

Segundo esse critério, esta é a vigésima primeira habilidade proposta em matemática no 6º ano do ensino fundamental. Vale destacar que o uso de numeração sequencial para identificar as habilidades de cada ano ou bloco de anos não representa uma ordem ou hierarquia esperada das aprendizagens. A progressão das aprendizagens, que se explicita na comparação entre os quadros relativos a cada ano (ou bloco de anos), pode tanto estar relacionada aos processos cognitivos em jogo, quanto aos objetos de conhecimento.

Elencamos a seguir algumas das habilidades relacionadas ao tema da pesquisa que estão descritas na BNCC como habilidades que os estudantes devem ter desenvolvidas ao final do ensino fundamental segundo (BRASIL, 2018):

- (EF06MA21) Construir figuras planas semelhantes em situações de ampliação e de redução, com o uso de malhas quadriculadas, plano cartesiano ou tecnologias digitais.

- (EF06MA29) Analisar e descrever mudanças que ocorrem no perímetro e na área de um quadrado ao se ampliarem ou reduzirem, igualmente, as medidas de seus lados, para compreender que o perímetro é proporcional à medida do lado, o que não ocorre com a área.

- (EF07MA21) Reconhecer e construir figuras obtidas por simetrias de translação, rotação e reflexão, usando instrumentos de desenho ou softwares de geometria dinâmica e vincular esse estudo a representações planas de obras de arte, elementos arquitetônicos, entre outros.

- (EF08MA18) Reconhecer e construir figuras obtidas por composições de transformações geométricas (translação, reflexão e rotação), com o uso de instrumentos de desenho ou de softwares de geometria dinâmica.

- (EF08MA19) Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de área de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de área (quadriláteros, triângulos e círculos), em situações como determinar medida de terrenos.

- (EF09MA12) Reconhecer as condições necessárias e suficientes para que dois triângulos sejam semelhantes.

Ao analisar as habilidades apresentadas nesta seção, fica evidente a expectativa de que o estudante ao final do ensino fundamental seja capaz reconhecer figuras semelhantes obtidas por meio de rotação, translação, homotetia ou, possivelmente, uma combinação de duas ou mais dessas tranformações.

Vale ressaltar que na habilidade (EF06MA29), a BNCC aponta que o estudante deve ser capaz de descrever o que ocorre com a área de um quadrado, quando o seu lado é ampliado ou reduzido, deixando claro que o estudante deve ser capaz de verificar qual a relação existente entre as áreas dos quadrados e as medidas de seus respectivos lados, para que assim possa concluir que a razão entre as áreas não é a mesma entre os lados e os perímetros.

A seguir estão elencadas, ainda com base em (BRASIL, 2018), algumas habilidades que os estudantes devem ter desenvolvidas no final do ensino médio:

- (EM13MAT105) Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras).

- (EM13MAT307) Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais (como o remanejamento e a distribuição de plantações, entre outros), com ou sem apoio de tecnologias digitais.

- (EM13MAT309) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais (como o cálculo do gasto de material para revestimento ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados), com ou sem apoio de tecnologias digitais.

- (EM13MAT505) Resolver problemas sobre ladrilhamento do plano, com ou sem apoio de aplicativos de geometria dinâmica, para conjecturar a respeito dos tipos ou composição de polígonos que podem ser utilizados em ladrilhamento, generalizando padrões observados.

- (EM13MAT506) Representar graficamente a variação da área e do perímetro de um polígono regular quando os comprimentos de seus lados variam, analisando e classificando as funções envolvidas.

Compreende-se, com base nessas habilidades expostas, que ao final do ensino médio, o estudante deve ser capaz de utilizar diversas formas para verificar se duas figuras são semelhantes, não se limitando, portanto aos ângulos das figuras e a valores lineares, tais como, medida dos segmentos que compõem os lados, perímetro, etc.

Além disso, espera-se também que ao final desta etapa do ensino, o estudante possa empregar diferentes métodos para a obtenção da área de uma superfície ou do volume de um sólido e neste sentido, o conceito de semelhança torna-se um recurso que pode auxiliar no desenvolvimento desses métodos.

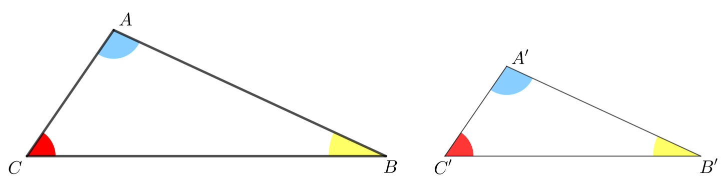
1.2 Figuras semelhantes

Buscando contemplar os conteúdos matemáticos necessários para desenvolver as habilidades apresentas na seção anterior, faremos nesta seção uma revisão bibliográfica, apresentando os conceitos e definições matemáticas através de um tratamento que possibilite desenvolver nos estudantes as habilidades da BNCC que foram elencadas anteriormente, tomando figuras semelhantes como conteúdo matemático central da pesquisa.

É importante ressaltar que o objetivo deste capítulo não é apresentar os resultados através de um abordagem considerada adequada para a educação básica, esta revisão bibliográfica foi desenvolvida com base em (LIMA, 1991) e (LIMA et al., 1998), com o objetivo de servir como fonte para professores interessados em um enfoque mais formal do conteúdo, demonstrando os resultados que serão utlizados na aplicação da sequência didática

O conceito de semelhança está associado a ideia de ampliação ou redução de uma forma sem alterar suas proporções. É comum na educação básica, os livros de geometria mais tradicionais apresentarem o conceito de semelhança através dos triângulos, definindo como semelhantes os triângulos que possuem ângulos correspondentes congruentes e lados correspondentes proporcionais, como ilustrado a seguir.

Figura 1 – Triângulos semelhantes



Fonte: Autoria própria.

$$\text{Em que} \quad \hat{A} = \hat{A}'; \ \hat{B} = \hat{B}'; \ \hat{C} = \hat{C}' \quad \text{e} \quad \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}} = r.$$

A razão $r \in \mathbb{R}$ entre os lados correspondentes é chamada de razão de semelhança.

Este conceito posteriormente é ampliado para os demais polígonos, entretanto, esta definição não se mostra suficiente para esta abordagem, visto que a intenção é estudar a semelhança entre formas não necessariamente poligonais.
Neste sentido abordaremos, em princípio, o conceito de semelhança de modo que possamos apresentar um tratamento válido para quaisquer formas definidas no plano ou no espaço.

Definição 1.1. Seja, F e F' figuras contidas no plano ou no espaço e r um número real positivo, dizemos que F e F' são semelhantes por razão de semelhança r se existe uma correspondência biunívoca $\sigma : F \to F'$ entre os pontos de F e os pontos de F', com a seguinte propriedade: se X,Y são pontos quaisquer de F e $X' = \sigma(X)$, $Y' = \sigma(Y)$ são seus correspondentes em F', então

$$\overline{X'Y'} = r \cdot \overline{XY}$$

ou ainda,

$$\frac{\overline{X'Y'}}{\overline{XY}} = r.$$

O número real r que multiplica as distâncias é chamado de razão de semelhança e os segmentos $\overline{XY}$ e $\overline{X'Y'}$ são chamados de homólogos. No caso dos triângulos, a congruência dos ângulos correspondentes é uma consequência da semelhança entre as figuras, ou seja, se $\sigma : \triangle ABC \to \triangle A'B'C'$, então $\hat{A} = \hat{A'}$; $\hat{B} = \hat{B'}$; $\hat{C} = \hat{C'}$.

Como a função $\sigma : F \to F'$ é bijetora ela possui as seguintes propriedades:

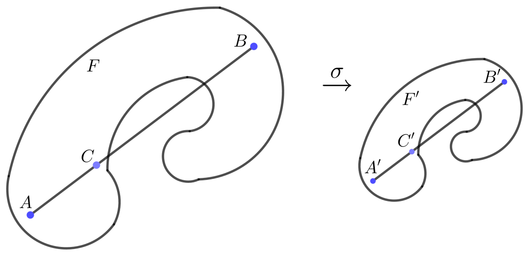
- **Inversa:** Se F é semelhante a F', então F' é semelhante a F.
  Pois se $\sigma : F \to F'$ transforma F em F' com razão de semelhança r, então $\sigma^{-1} : F' \to F$ transforma F' em F com razão de semelhança $\frac{1}{r}$.

- **Transitiva:** Se F é semelhante a F' e F' é semelhante a F'' então F' é semelhante a F''. Pois, sejam $\sigma : F \to F'$ e $\sigma' : F' \to F''$ semelhanças com razões r e r' respecitvamente, então a função composta $\sigma' \circ \sigma : F \to F''$ é uma semelhança com razão $r.r'$.

Lema 1.2. *Toda semelhança transforma pontos colineares em pontos colineares.*

Demonstração. Seja $\sigma : F \to F'$ uma semelhança de razão r. Se A, B e C são pontos colineares de F, com C entre A e B, mostraremos que $A' = \sigma(A)$, $B' = \sigma(B)$ e $C' = \sigma(C)$ são pontos colineares de F' com C' entre A' e B'.

Figura 2 – Segmento $\overline{AB}$ homólogo ao segmento $\overline{A'B'}$.



Fonte: Autoria própria.

De fato, se C pertence ao segmento AB então

$$\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB},$$

aplicando a semelhança nos segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{CB}$

$$\overline{A'C'} + \overline{C'B'} = r \cdot \overline{AC} + r \cdot \overline{CB} = r \cdot (\overline{AC} + \overline{CB}) = r \cdot \overline{AB} = \overline{A'B'},$$

daí

$$\overline{A'C'} + \overline{C'B'} = \overline{A'B'}.$$

Pela desigualdade triangular temos que C' está entre A' e B'. □

Teorema 1.3. *Uma semelhança $\sigma : F \to F'$, de razão r transforma:*

1. *Todo segmento de reta contido em F num segmento de reta contido em F'.*

2. *Uma circunferência de raio a contida em F numa circunferência de raio $r \cdot a$ contida em F'.*

3. *Pontos interiores a F em pontos interiores a F'.*

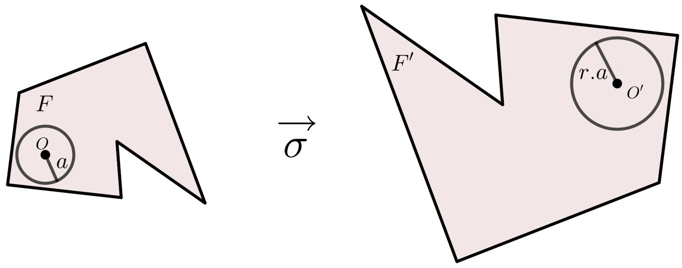
4. *Pontos do contorno de F em pontos do contorno de F'.*

5. *Vértices de F em vértices de F'. (Se for polígono).*

Demonstração. 1. Seja $\overline{AB}$ um segmento de reta contido em F e $A' = \sigma(A)$ e $B' = \sigma(B)$ pontos de F', sabemos pelo Lema 1.2 que para todo ponto C pertencente a $\overline{AB}$ teremos o seu homólogo $C' = \sigma(C)$ pertencente a $\overline{A'B'} \subset F'$.
Para provar a correspondência biunívoca, basta tomar $\sigma^{-1} : F' \to F$.

2. Considere um ponto O pertencente a F, o conjunto dos pontos $X \in F$ que estão a uma distância a de O formam no plano uma circunferência de raio $\overline{OX} = a$, cuja imagem é o conjunto dos pontos X' tais que $\overline{O'X'} = r \cdot a$, com $O' = \sigma(O)$, formando assim uma circunferência de raio $r \cdot a$ e centro O'.

Figura 3 – Circunferências homólogas.



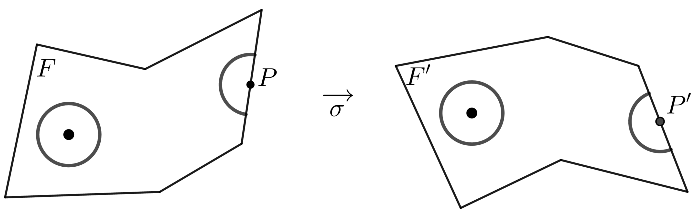
Fonte: Autoria própria.

Este conceito pode ser ampliado se considerarmos o ponto O no espaço, assim o conjunto de pontos X formaria uma superfície esférica.

3. Um ponto O qualquer é interior a uma figura F se O é centro de uma circunferência contida em F. Pelo item anterior, se O é interior a F, então existe $O' = \sigma(O)$ em F' tal que O' é centro de uma circunferência contida em F', logo O' é interior a F'.

4. Um ponto P pertence ao contorno de F quando está em F, mas não é interior. Supondo que o ponto P' homólogo de P é interior a F', podemos afirmar pelo item anterior que seu homólogo $P = \sigma^{-1}(P')$ é interior a F, o que é um absurdo, pois P está no contorno de F. Portanto, P' pertence ao contorno de F'.

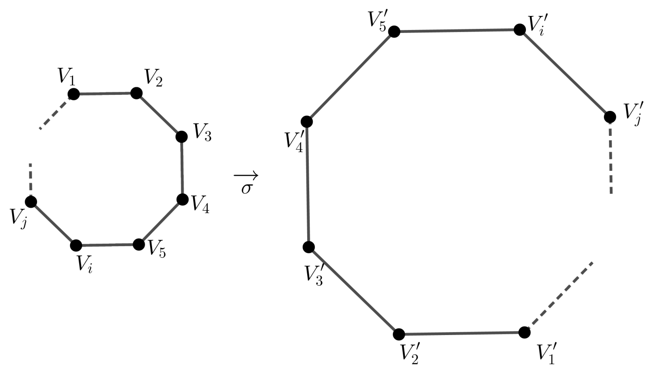
Figura 4 – Pontos de contorno homólgos.



Fonte: Autoria própria.

5. Se F possui vértices e V é um vértice de F, então seu homólogo V' está no contorno de F'. Supondo por absurdo que V' não é vértice de F', então V' pertence a um segmento $\overline{V_i'V_j'}$, sendo diferente de $V_i' = \sigma(V_i)$ e de $V_j' = \sigma(V_j)$, com V_i, V_j, vértices consecutivos de F'. Com isso V' está entre V_i' e V_j' e pelo Lema 1.2, $V = \sigma^{-1}(V')$ pertence a um lado de F, o que é uma contradição, pois V é um vértice. Logo V' é um vértice de F'.

Figura 5 – Vértices homólogos.



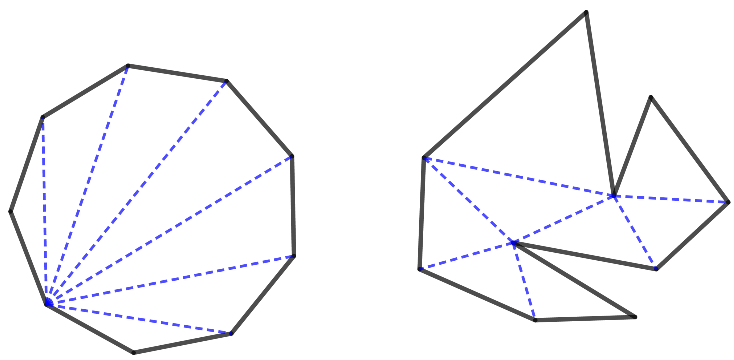
Fonte: Autoria própria.

□

Vale lembrar que dois triângulos semelhantes possuem ângulos correspondentes congruentes, ou seja, se $\sigma : \triangle ABC \rightarrow \triangle A'B'C'$, então $\hat{A} = \hat{A}'$; $\hat{B} = \hat{B}'$; $\hat{C} = \hat{C}'$.

Observe na figura a seguir que um polígono qualquer pode ser decomposto em $n - 2$ triangulos justapostos (para mais detalhes ver Lema 1.17).

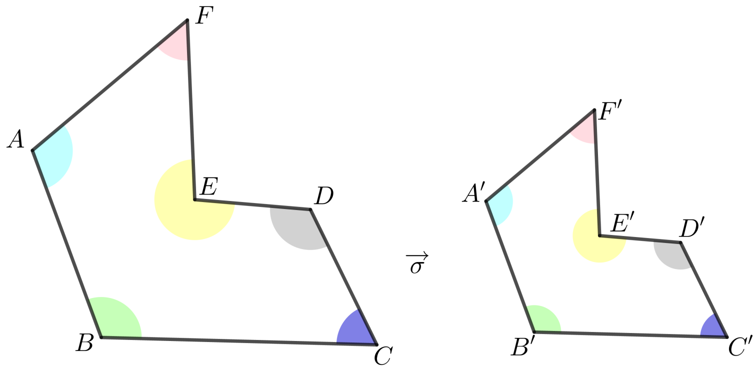
Figura 6 – Polígonos decompostos em triângulos.



Fonte: Autoria própria.

Portanto um ângulo interno de um polígono pode ser visto como um ângulo interno de um triângulo ou como a soma de dois ou mais ângulos de triângulos. Com isso conclui-se que dois polígonos semelhantes quaisquer possuem ângulos correspondentes congruentes. Como ilustra a figura a seguir.

Figura 7 – Ângulos correspondentes congruentes.

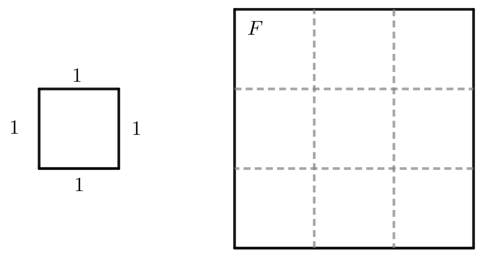


Fonte: Autoria própria.

1.2.1 Relação entre área e semelhança.

Encontrar a área de uma figura significa medir a região do plano ocupada por esta figura. Para isso, considera-se inicialmente um quadrado cujo lado mede 1 unidade de comprimento (este quadrado é chamado de quadrado unitário) e compara-se a área deste quadrado com a região ocupada pela figura. O resultado desta comparação é um número real e seu valor indica quantas vezes a figura contém o quadrado unitário.
Na imagem a seguir temos um quadrado unitário e uma figura com área igual a 9 unidades de área, pois ela contém exatamente 9 quadrados unitários.

Figura 8 – Área de figuras.



Fonte: Autoria própria.

Usaremos este conceito para verificar a razão entre as áreas de duas figuras semelhantes. Para isso, serão considerados válidos os seguintes axiomas.

Axioma 1.4. *Figuras congruentes*[1] *possuem áreas congruentes.*

Axioma 1.5. *Todo quadrado cujo lado mede* 1 *unidade de comprimento possui área igual a* 1 *unidade de área.*

[1] Figuras congruentes são figuras que possuem mesma forma e tamanho.

Axioma 1.6. *Se uma figura F for decomposta em n figuras $F_1, F_2, ..., F_n$, tais que todas as figuras estão justapostas, então a área de F é igual a soma das áreas de $F_1, F_2, ..., F_n$.*

Axioma 1.7. *Se uma figura F está contida em outra figura F', então a área de F é menor ou igual a área de F'.*

Demonstraremos a seguir algumas proposições acerca da relação entre a área de figuras semelhantes e a razão de semelhança existente ente elas.

1.2.1.1 Relação entre as áreas dos quadrados.

Definição 1.8. Um quadrado é uma figura plana fechada, limitada por 4 segmentos congruentes[2], de modo que os ângulos formados pelas interseções das extremidade são retos.

Proposição 1.9. *A razão entre as áreas de dois quadrados quaisquer é igual ao quadrado da razão de semelhança.*

Demonstração. Dado um quadrado Q com lado medindo l, mostraremos inicialmente que a área do quadrado é igual a l^2, para qualquer valor real de l, em seguida usaremos este resultado para provar que dados dois quadrados quaisquer com a razão entre os lados medindo r, então a razão entre suas áreas é r^2.

1. l **é um número inteiro.** Se l é inteiro, então podemos dividir o lado do quadrado em uma quantidade l segmentos unitários traçando retas paralelas aos lados de Q, formando assim l^2 quadrados unitários que pelo Axioma 1.5 possuem área igual a 1. Portanto $A_Q = l^2$.

2. l **é um número racional.** Supondo que l é igual a $\frac{1}{n}$, com n inteiro, então podemos tomar um quadrado unitário e dividí-lo em n^2 quadrados justapostos de lado $\frac{1}{n}$ e portanto congruentes ao quadrado Q. Como a área de um quadrado unitário é igual a 1, temos

$$n^2 \cdot A_Q = 1 \Rightarrow A_Q = \frac{1}{n^2}.$$

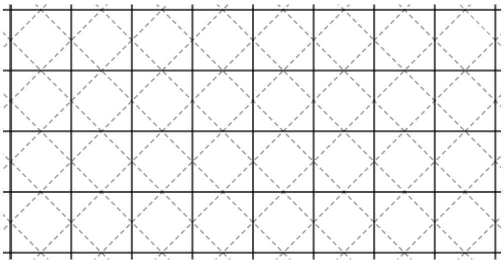
   De uma forma mais geral, l é um número racional se, e somente se, $l = \frac{m}{n}$, com m,n inteiros e $n \neq 0$. Então se $l = \frac{m}{n}$, podemos dividir cada lado l em m segmentos de medida $\frac{1}{n}$, formando assim m^2 quadrados de lado $\frac{1}{n}$ e pelo caso anterior a área dos quadrados menores é $\frac{1}{n^2}$, então concluímos que

$$A_Q = m^2 \cdot \frac{1}{n^2} \Rightarrow A_Q = \frac{m^2}{n^2} \Rightarrow A_Q = \left(\frac{m}{n}\right)^2 = l^2.$$

[2] Segementos congruentes são segmentos que possuem mesma medida.

3. l **é um número irracional.** Na figura a seguir, temos um exemplo no qual, independente da unidade de comprimento, pelo menos um dos dois tipos de quadrados tem lados com medidas irracionais.

Figura 9 – Quadrados irracionais



Fonte: Autoria própria.

Para este caso, mostraremos de modo indireto que não existe outro número capaz de exprimir o valor da área de Q se não l^2. Seja a um número real tal que $a < l^2$. Pela densidade de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$,(este fato pode ser visto em (LIMA et al., 2009, p.74)) podemos tomar um número racional $k < l$ suficientemente próximo a l, de modo que se tenha $a < k^2 < l^2$. De fato, no interior do quadrado Q tomamos um quadrado K de lado k, como k é racional a área de K é k^2. Como K está contido no quadrado Q e pelo Axioma 1.7

$$A_K < A_Q \;\Rightarrow\; k^2 < A_Q.$$

Além disso,

$$a < k^2 \;\Rightarrow\; a < k^2 < A_Q.$$

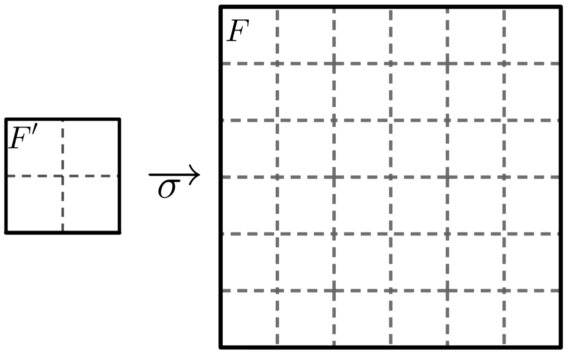
Disto segue que todo número real $a < l^2$ é também menor que a área de Q, logo a área de Q não pode ser menor que l^2. Seja b um número real tal que $l^2 < b$. Pode-se concluir de modo análogo ao caso anterior que todo número real $b > l^2$ é também maior que a área de Q, ou seja, a área de Q é igual a l^2.

Concluímos assim que a área de um quadrado Q, cujo lado mede l, deve ser expressa por

$$A_Q = l^2. \tag{1.1}$$

Considere agora dois quadrados Q e Q' com lados medindo l e l' respectivamente, tais que a razão $\frac{l'}{l} = r$, ou seja, a razão de semelhança entre os quadrados é igual a r.

Figura 10 – $\sigma : F \to F'$ com $r = 3$



Fonte: Autoria própria.

Pela equação (1.1) as áreas dos quadrados Q e Q' medem respectivamente

$$A_Q = l^2 \quad \text{e} \quad A_{Q'} = (r.l)^2 = r^2.l^2.$$

Com isso,

$$A_{Q'} = r^2 \cdot A_Q \Rightarrow \frac{A_{Q'}}{A_Q} = r^2.$$

□

1.2.1.2 Relação entre áreas de retângulos semelhantes.

Definição 1.10. Um retângulo é uma figura plana fechada, limitada por 4 segmentos congruentes dois a dois, de modo que os segmentos congruentes estão em lados opostos e os ângulos formados pelas interseções das extremidade são retos.

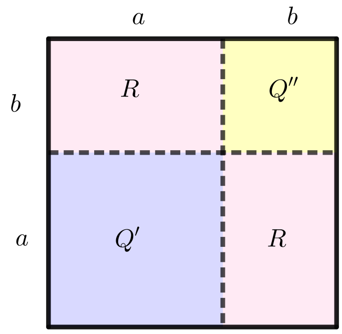
Proposição 1.11. *A razão entre as áreas de dois retângulos semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança.*

Demonstração. Dados dois retângulos R e R' e uma semelhança $\sigma : R \to R'$ de razão r devemos mostrar que

$$\frac{A_{R'}}{A_R} = r^2.$$

Consideramos inicialmente um retângulo R com lados medindo a e b, em seguida faremos algumas construções. Traçamos um quadrado Q de lado $(a + b)$ com um vértice e dois lados coincidentes ao retângulo R em seguida notamos que Q é composto por um quadrado Q' de lado a, um quadrado Q'' de lado b e dois retângulos congruentes a R. Conforme mostra a figura a seguir:

Figura 11 – Área do retângulo



Fonte: Autoria própria.

Pelo Axioma 1.6 temos que $A_Q = A_{Q'} + A_{Q''} + 2A_R$ e de acordo com a equação (1.1), se o lado do quadrado é igual a $(a + b)$, então

$$A_Q = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Com isso

$$A_{Q'} + A_{Q''} + 2A_R = a^2 + 2ab + b^2.$$

Como as áreas dos quadrados Q' e Q'' medem respectivamente a^2 e b^2 podemos afirmar que

$$2A_R = 2ab.$$

Portanto podemos concluir que a área de um retângulo cujos lados medem a e b é da forma

$$A_R = ab. \tag{1.2}$$

Considere agora dois retângulos R e R' semelhantes de modo que que $\sigma : R \to R'$ com razão r. Se as medidas do retângulo R são a e b, então as medidas de R' são $r.a$ e $r.b$. Pela equação (1.2) as áreas de R e R' medem

$$A_R = ab \;\text{ e }\; A_{R'} = ra \cdot rb \Rightarrow A_{R'} = r^2 \cdot ab.$$

Logo

$$A_{R'} = r^2 \cdot A_R \Rightarrow \frac{A_{R'}}{A_R} = r^2.$$

□

1.2.1.3 Relação entre áreas de paralelogramos semelhantes.

Definição 1.12. Chamamos de paralelogramo, uma figura plana fechada, limitada por 4 segmentos congruentes dois a dois, de modo que os segmentos congruentes estão em lados opostos.

Proposição 1.13. *A razão entre as áreas de dois paralelogramos semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança.*

Demonstração. Seja $\sigma : P \to P'$ uma semelhança entre paralelogramos de razão r vamos provar que

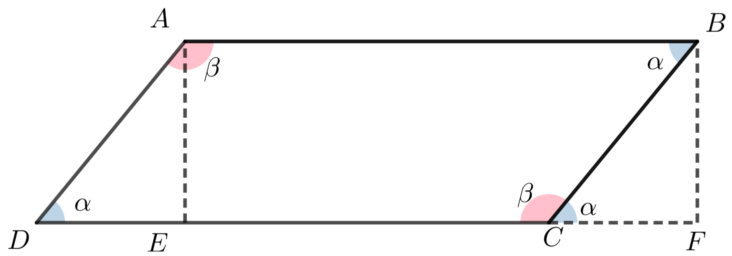
$$\frac{A_{P'}}{A_P} = r^2.$$

Considerando um paralelogramo $P_{(ABCD)}$ tal que $\overline{AB} = b$ e a altura relativa a AB é igual a h, faremos algumas construções a fim de descobrir como encontrar a área de P.

- Pelo vértice A traçamos um segmento AE perpendicular a CD e determinamos um triângulo $\triangle AED$ (note que $\overline{AE} = h$).

- A partir do lado BC construímos, externo ao paralelogramo, um triângulo $\triangle BFC$ congruente a $\triangle AED$.

Figura 12 – Área do paralelogramo



Fonte: Autoria própria.

Note que os pontos E, C, e F são colineares, pois α e β são suplementares e como $\triangle AED$ e $\triangle BFC$ são congruentes, temos

$$A_{\triangle AED} = A_{\triangle BFC}.$$

Disto decorre que,

$$A_{P_{(ABCD)}} = A_{ABFE},$$

como $ABFE$ é um retângulo e $\overline{CD} = \overline{EF}$, podemos afirmar que

$$A_{P_{(ABCD)}} = A_{ABFE} = b.h.$$

Considere agora uma semelhança $\sigma : P \to P'$ de razão r. Se $P_{(ABCD)}$ possui base $\overline{AB} = b$ e altura h relativa a AB, então $P'_{(A'B'C'D')}$ possui base $\overline{A'B'} = r.b$ e altura $r.h$ relativa a $A'B'$. Calculando as áreas de P e P' temos

$$A_P = b.h \quad \text{e} \quad A_{P'} = rb \cdot rh \Rightarrow A_{P'} = r^2 \cdot bh.$$

Com isso,

$$A_{P'} = r^2 \cdot A_P \Rightarrow \frac{A_{P'}}{A_P} = r^2.$$

□

1.2.1.4 Relação entre áreas de triângulos semelhantes.

Definição 1.14. Dados três segmentos a, b e c, chamamos de triângulo, uma figura plana fechada, limitada por esses 3 segmentos consecutivos.

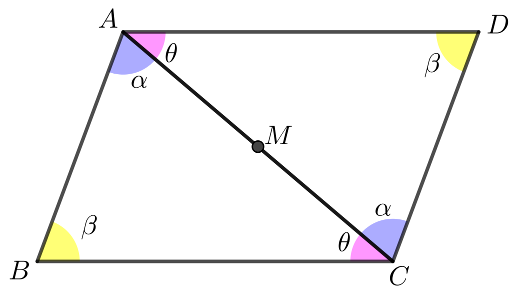
Proposição 1.15. *A razão entre as áreas de dois triângulos semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança.*

Demonstração. Dados dois triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ semelhantes com razão de semelhança r, mostraremos que

$$\frac{A_{\triangle ABC}}{A_{\triangle A'B'C'}} = r^2.$$

Para encontrar a área do triângulo $\triangle ABC$ marcamos o ponto médio M no lado AC e em seguida refletimos a figura em relação ao ponto, formando um quadrilátero $ABCD$ com base e altura igual ao triângulo $\triangle ABC$, como mostra a figura a seguir.

Figura 13 – Paralelogramo composto por triângulos congruentes.



Fonte: Autoria própria.

Note que $ABCD$ é um paralelogramo, pois $\hat{B} = \hat{D}$ e $\hat{A} = \hat{C} = \alpha + \beta$, além disso $ABCD$ é composto por dois triângulos $\triangle ABC$, $\triangle ACD$ congruentes. Seja b a media do lado BC e h a altura relativa a BC temos

$$A_{ABCD} = A_{ABC} + A_{ACD} = bh.$$

Como $\triangle ABC = \triangle ACD$ podemos afirmar que

$$A_{ABCD} = 2.A_{ABC} = bh \Rightarrow A_{ABC} = \frac{bh}{2}.$$

Por outro lado, se $\triangle A'B'C'$ é semelhante ao $\triangle ABC$ com razão r, então $\overline{B'C'} = r.b$ e a altura relativa a $B'C'$ é

$$h' = r.h.$$

Disto segue que as áreas dos triângulos são

$$A_{\triangle ABC} = \frac{bh}{2} \quad \text{e} \quad A_{\triangle A'B'C'} = \frac{rb.rh}{2} = r^2.\frac{bh}{2},$$

daí

$$A_{\triangle A'B'C'} = r^2.A_{\triangle ABC} \Rightarrow \frac{A_{\triangle A'B'C'}}{A_{\triangle ABC}} = r^2.$$

□

1.2.1.5 Relação entre áreas de polígonos semelhantes.

Definição 1.16. Chamamos de polígono uma figura plana fechada, limitada por $n \geq 3$ segmentos consecutivos, sem segmentos consecutivos colineares.

Lema 1.17. *Um polígono com n lados pode ser decomposto, traçando diagonais internas que não se cortam, em $n-2$ triângulos justapostos.*

Demonstração. De fato, seja P_n um polígono com n lados, mostraremos por indução em n que a sentença é válida para todo $n \geq 3$. Fazendo inicialmente para $n = 3$ o polígono é um triângulo e o resultado é óbvio. Consideremos o resultado válido para n, ou seja, P_n pode ser decomposto em $(T_1, T_2, ..., T_{n-2})$ triângulos e mostraremos que vale para uma quantidade $n+1$ de lados. Com efeito, tomando um polígono P_{n+1} (com $n+1$ lados) e traçando uma diagonal de modo que P_{n+1} seja dividido em um polígono P^1 e um triângulo T^1, podemos notar que P^1 possui n lados, podendo então ser decomposto em $n-2$ triângulos justapostos e como $P_{n+1} = P^1 + T^1$ podemos afirmar que a quantidade de triângulos de P_{n+1} é dada por $n-2+1$, com isso podemos concluir que P_{n+1} pode ser decomposto em $(T_1, T_2, ..., T_{n-2}, T_{(n+1)-2})$ triângulos. □

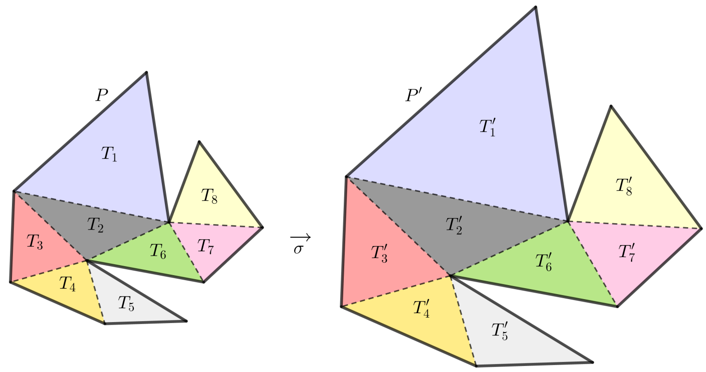
Proposição 1.18. *A razão entre as áreas de dois polígonos semelhantes quaisquer é igual ao quadrado da razão de semelhança.*

Demonstração. Seja $\sigma : P \to P'$ uma semelhança entre polígonos de n lados e de razão r, devemos mostrar que

$$\frac{A_{P'}}{A_P} = r^2.$$

Considerando os polígonos P e P' com n lados e semelhantes por razão r podemos afirmar pelo Lema 1.17 que P e P' podem ser decompostos respectivamente em $(T_1, T_2, ..., T_{n-2})$ e $(T_1', T_2', ..., T_{n-2}')$ triângulos justapostos, nos quais todos os T_i, T_i' são semelhantes.

Figura 14 – Polígonos decompostos em triângulos.



Fonte: Autoria própria.

Calculando as áreas destes polígonos temos

$$A_P = A_{T_1} + A_{T_2} + ... + A_{T_{n-2}} \text{ e } A_{P'} = A_{T_1'} + A_{T_2'} + ... + A_{T_{n-2}'}.$$

Como todos os triângulos T_i, T_i' são semelhantes, podemos escrever a área de P' da seguinte forma

$$A_{P'} = r^2.A_{T_1} + r^2.A_{T_2} + ... + r^2.A_{T_{n-2}} = r^2.(A_{T_1} + A_{T_2} + ... + A_{T_{n-2}}).$$

Com isso concluímos que

$$A_{P'} = r^2.A_P \Rightarrow \frac{A_{P'}}{A_P} = r^2.$$

□

1.2.1.6 Relação entre as áreas das circunferências.

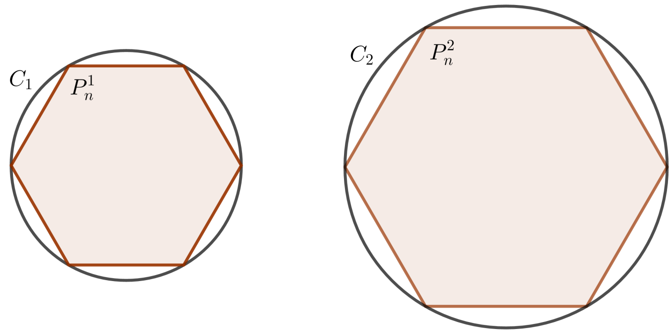
Definição 1.19. Dado um ponto C e um comprimento fixo r, chamamos de circunferência o conjunto de pontos que equidistam de C uma distância r.

Proposição 1.20. *A razão entre as áreas de duas circunferências é igual ao quadrado da razão entre seus raios.*

Demonstração. Para desenvolver esta demonstração mostraremos primeiramente que a razão entre o comprimento e a medida do diâmetro de uma circunferência qualquer é constante.

De fato, considere duas circunferências C_1 e C_2 de diâmetros e comprimentos medindo respectivamente d_1 e d_2 e c_1 e c_2, com todos contidos numa mesma unidade de comprimento. Tomamos dois polígonos regulares de n lados P_n^1 e P_n^2 inscritos em C_1 e C_2.

Figura 15 – Polígonos inscritos.



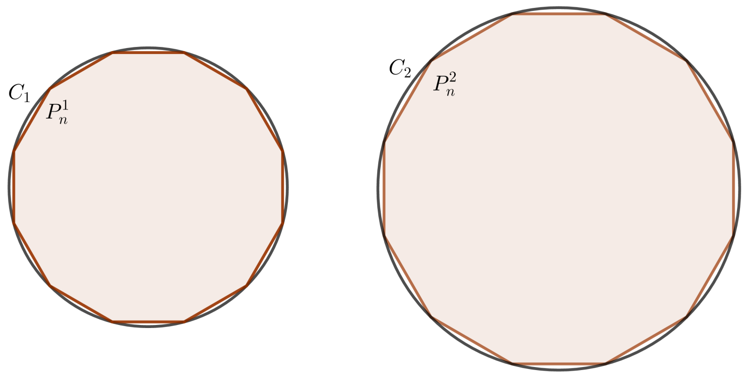
Fonte: Autoria própria.

Como os polígonos são semelhantes, a razão entre os perímetros de P_n^1 e P_n^2 e a razão entre os diâmetros das circunferências são iguais.

$$\frac{P_n^1}{P_n^2} = \frac{d_1}{d_2}.$$

Fazendo o número n de lados do polígono crescer indefinidamente, as medidas dos perímetros P_n^1 e P_n^2 tendem a c_1 e c_2. (Como pode ser visto em (LIMA, 1991, p.34)).

Figura 16 – Aproximação por polígonos com $n = 12$.



Fonte: Autoria própria.

Assim, com n suficientemente grande temos

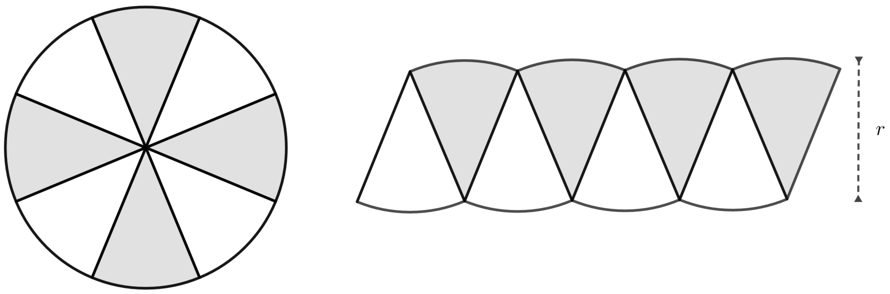
$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{P_n^1}{P_n^2} = \frac{d_1}{d_2} \Rightarrow \frac{c_1}{d_1} = \frac{c_2}{d_2} = \pi.$$ [3]

Vale notar que em uma circunferência a medida do diâmetro d é o dobro do raio r e por isso podemos escrever o comprimento de uma circunferência como

$$c = 2\pi r.$$

Devemos agora encontrar uma forma geral para encontrar a área de uma circunferência. Para isto, consideramos uma circunferência C, decompomos C em $2n$, com $1 \leq n \in \mathbb{N}$ setores circulares e reorganizamos os setores da seguinte forma

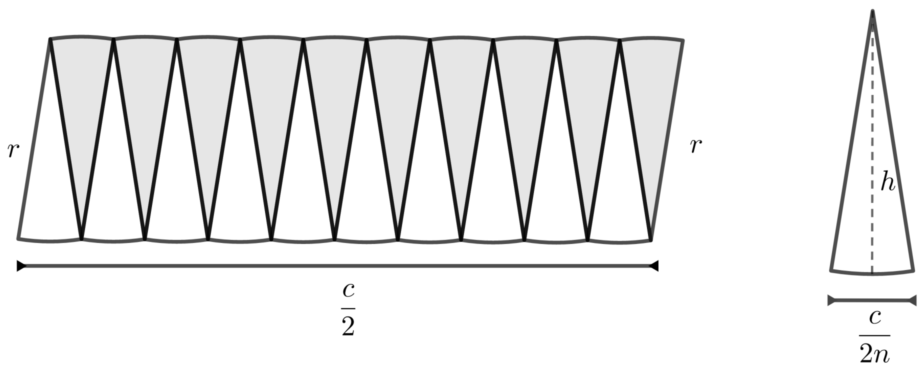
Figura 17 – decomposição do círculo



Fonte: Autoria própria.

Note que a medida em que tornamos n maior, os setores circulares tornam-se menores e sua forma se aproxima da forma de triângulos isósceles com lados congruentes medindo r e base medindo $\frac{c}{2n}$.

Figura 18 – aproximação por setores circulares



Fonte: Autoria própria.

Sabemos que a área do triângulo será expressa na forma

$$A_n = \frac{\frac{c}{2n}.h}{2}.$$

Como os triângulos são isósceles, a medida da altura é

$$h = \sqrt{r^2 - \left(\frac{c}{4n}\right)^2}.$$

Disto segue que

$$A_n = \frac{\frac{c}{2n}.\sqrt{r^2 - (\frac{c}{4n})^2}}{2}.$$

Como a circunferência C é composta por $2n$ triângulos, podemos escrever a área de C em função de n.
Assim

$$\begin{aligned} A_{C(n)} &= 2n \cdot \frac{\frac{c}{2n}\sqrt{r^2 - (\frac{c}{4n})^2}}{2} \\ &= n \cdot \frac{c}{2n}\sqrt{r^2 - \left(\frac{c}{4n}\right)^2} \\ &= \frac{c}{2}\sqrt{r^2 - \left(\frac{c}{4n}\right)^2}. \end{aligned}$$

Portanto se tomarmos $\lim_{n\to\infty} A_{C(n)}$ teremos

$$\lim_{n\to\infty} A_{C(n)} = \frac{c}{2}\sqrt{r^2 - \left(\frac{c}{4n}\right)^2} = \frac{c}{2}.r.$$

Note que $c = 2\pi r \Rightarrow \frac{c}{2} = \pi r$. Logo podemos concluir que a área de C é

$$A_C = \pi r^2. \tag{1.3}$$

Com isso, dadas duas circunferências C e C', com raios medindo r e r', respectivamente, tais que $\frac{r'}{r} = a$. (Neste caso a razão de semelhança é dada por a). Calculando as áreas de C e C' temos

$$A_C = \pi r^2 \quad \text{e} \quad A_{C'} = \pi r'^2 \Rightarrow A_{C'} = \pi(ra)^2$$

daí

$$A_{C'} = \pi r^2 a^2 \Rightarrow A_{C'} = A_C.a^2 \Rightarrow \frac{A_{C'}}{A_C} = a^2.$$

□

1.2.1.7 Relação entre áreas de figuras semelhantes quaisquer.

Até o momento, deduzimos as relações existentes entre as figuras planas comumente estudadas na educação básica, entretanto todos esses casos vistos são situações particulares e, portanto, possuem especifidades. Buscando validar a relação entre as áreas de figuras semelhantes para quaisquer figuras que sejam, desenvolveremos a seguir uma dedução que visa generalizar os casos vistos anteriormente. Na demonstração do teorema a seguir mostraremos que é possível encontrar a medida da área de uma figura plana qualquer aproximando por falta ou por excesso. No decorrer do processo usaremos aproximações por polígonos retangulares por falta e por excesso, mostrando que para toda aproximação por falta cuja área do polígono é menor que o valor da área desejada, é possível obter outro polígono com uma aproximação mais precisa, obtendo assim uma medida de área ainda mais próxima da área desejada. Mostraremos também que se tomarmos aproximações por excesso teremos o mesmo fato e que as duas aproximações convergem para o mesmo valor que é a área da figura desejada.

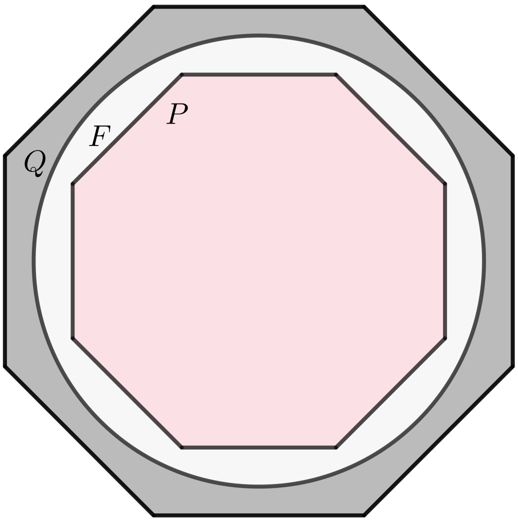
Teorema 1.21. *A razão de semelhança entre as áreas de duas figuras planas semelhantes quaisquer é igual ao quadrado da razão de semelhança.*

Demonstração. Seja F uma figura plana qualquer, encontraremos o valor da área de F aproximando com áreas polígonos por falta ou por excesso. Os valores da área de F aproximados por falta são, por definição, as áreas dos polígonos P contidos em F e os valores da área de F por excesso são as áreas dos polígonos Q que contém F. Assim, tomando polígonos P e Q que obedecem as condições acima, podemos afirmar que

$$A_P < A_F < A_Q.$$

Como ilustra a figura a seguir

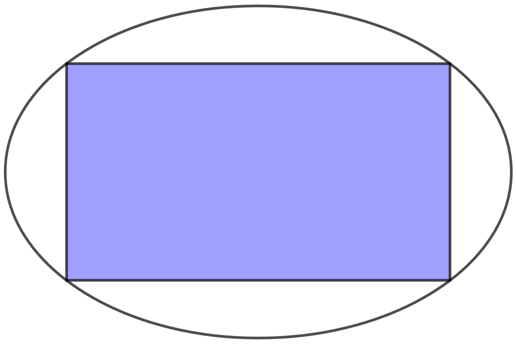
Figura 19 – Figura aproximada por polígonos.



Fonte: Autoria própria.

Para facilitar a compreensão desta demonstração, usaremos polígonos retangulares que são polígonos obtidos pela reunião de vários retângulos justapostos, portanto o cálculo de suas áreas se dá de formas mais direta, visto que podemos calcular a área aproximada da figura, através da soma das áreas dos retângulos que formam o polígono. Considere uma figura F e um polígono retangular P_1 contido em F obtido por uma aproximação a_1 suficientemente próxima de F, de modo que o valor da área de F aproximado por falta possa ser expresso por $A_F \approxeq A_{P_1}$.

Figura 20 – Figura aproximada por polígono retangular P_1.



Fonte: Autoria própria.

Contudo, podemos tomar uma aproximação a_2 mais precisa, através de um polígono retangular P_2 formado pela união de P_1 com outros retângulos menores de área R_1, justapostos a P_1, de modo que ainda se tenha

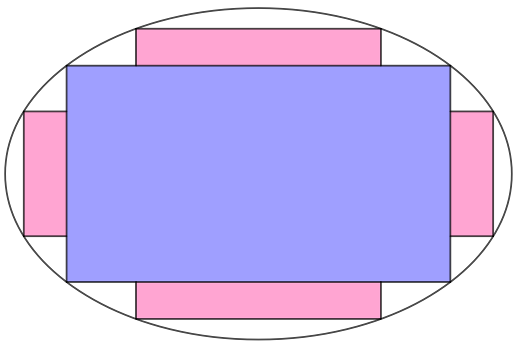
$$A_{P_1} < A_{P_2} < A_F.$$

Note que

$$A_{P_2} = A_{P_1} + 4R_1 < A_F,$$

conforme ilustra a figura a seguir

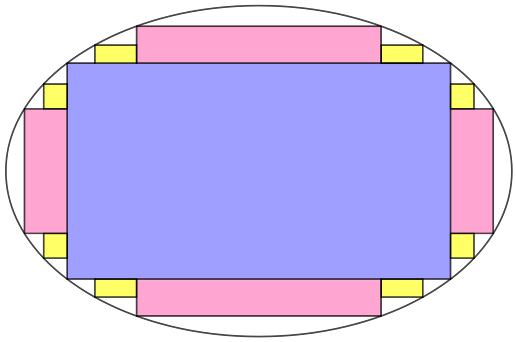
Figura 21 – Figura aproximada por polígono retangular P_2.



Fonte: Autoria própria.

Podemos tomar ainda uma aproximação a_3 ainda mais precisa que a_2 através de um outro polígono retangular P_3 composto pela união de P_2 com outros retângulos menores de área R_2, como é possível notar no caso a seguir

Figura 22 – Figura aproximada por polígono retangular P_3.



Fonte: Autoria própria.

Observe que

$$A_{P_3} = A_{P_2} + 8R_2 < A_F.$$

Isto implica que

$$A_{P_1} < A_{P_2} < A_{P_3} < A_F.$$

Como entre dois números reais sempre há um ooutro número real, pudemos tomar uma sequência de números $b_n = A_F - \frac{1}{n}$, com $n \geq 1$ e notar que para todo b_n, existe um polígono retangular P_n tal que

$$b_n < A_{P_n} < A_F.$$

Por outro lado, considerando um polígono retangular Q_1 obtido por uma aproximação por excesso e aplicamos um raciocínio inteiramente análogo, podemos obter uma outra sequência $c_n = A_F + \frac{1}{n}$, com $n \geq 1$ e notar que para todo c_n existe um polígono retangular Q_n tal que

$$A_F < A_{Q_n} < c_n.$$

Observe que quanto maior o valor de n, teremos A_{P_n} e A_{Q_n} mais próximas de A_F. Portanto, fazendo o limite nas duas sequências b_n e c_n, com $n \to \infty$ temos

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} b_n &= A_F - \cancelto{0}{1/n} = A_F \\ \lim_{n\to\infty} c_n &= A_F + \cancelto{0}{1/n} = A_F. \end{aligned}$$

Como

$$b_n < A_{P_n} < A_F < A_{Q_n} < c_n,$$

pelo Teorema do Confronto[4], temos que se b_n e c_n convergem para A_F então A_{P_n} e A_{Q_n} convergem para a o mesmo valor que as sequências. Disto segue que área de uma figura plana qualquer pode ser vista como o limite da justaposição de polígonos retangulares. E, portanto, considerando agora $\sigma : F \to F'$ uma semelhança entre figuras F, F' com

[4] O Teorems do Confonto está enunciado e demonstrado em (STEWART, 2013, A37)

razão de semelhança r e P, P' aproximações para F, F', podemos apresentar as áreas das figuras F e F' da seguinte forma

$$A_F = \lim A_P \quad \text{e} \quad A_{F'} = \lim A_{P'}.$$

Como $\lim P$ e $\lim P'$ são polígonos semelhantes

$$\lim A_{P'} = r^2 \cdot \lim A_P \Rightarrow A_{F'} = r^2 A_F$$

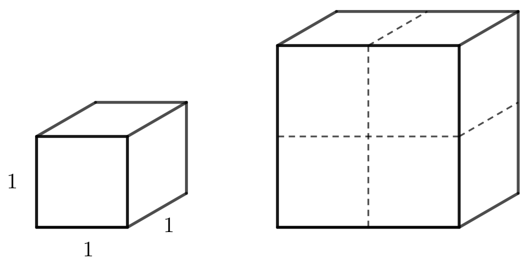
$$\frac{A_{F'}}{A_F} = r^2.$$

Portanto, a razão entre as áreas de duas figuras semelhantes quaisquer é igual ao quadrado da razão de semelhnaça. □

1.2.2 Relação entre volume e semelhança

Encontrar o volume de um sólido mensurável significa medir a quantidade de espaço limitada ocupado por este sólido. Para isso, considera-se inicialmente um cubo com arestas medindo 1 unidade de comprimento (este cubo é chamado de cubo unitário) e compara-se o espaço ocupado por esse cubo com o espaço ocupado pelo sólido. O resultado dessa comparação será um número real não negativo e seu valor indica quantas vezes o sólido contém o cubo unitário.
A figura a seguir mostra um cubo unitário e uma figura com o volume medindo 4 unidades de volume.

Figura 23 – Volume de figuras



Fonte: Autoria própria.

Usaremos o conceito acima para verificar a razão entre dois sólidos mensuráreis semelhantes.
Para isso, consideramos válidos os seguintes axiomas.

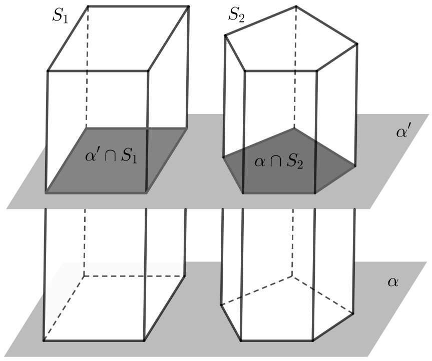
Axioma 1.22. *Todo cubo cujo a aresta mede 1 unidade de comprimento possui volume igual a 1 unidade de volume.*

Axioma 1.23. *Sejam S_1 e S_2 sólidos mensuráveis, tais que $Int(S_1) \cap Int(S_2) = \emptyset$ e $S_1 \cup S_2$ é mensurável, então $V_{(S_1 \cup S_2)} = V_{S_1} + VS_2$.*

Axioma 1.24. *Se um sólido S_1 está contido num outro sólido S_2, então o volume de S_1 é menor que o volume de S_2.*

Axioma 1.25. ***(Princípio de Cavalieri).*** *Sejam S_1 e S_2 sólidos mensuráveis e α um plano, tal que, todo $\alpha' \parallel \alpha$ corta os sólidos S_1 e S_2 em áreas iguais, então os sólidos S_1 e S_2 possuem volumes iguais.*

Figura 24 – $A_{S_1} \cap \alpha' = A_{S_2} \cap \alpha'$.



Fonte: Autoria própria.

Axioma 1.26. *Se S_1 é um sólido mensurável, e S_2 pode ser obtido de S_1 por meio de uma translação ao longo de um vetor, uma rotação ao longo de um eixo ou uma reflexão ao longo de um plano, então S_2 também é mensurável e o volume de S_1 é igual ao volume de S_2.* [5]

Com base nesses axiomas e no Teorema 1.3, demonstraremos a seguir algumas proposições a cerca da relação entre o volume de sólidos semelhantes e a razão de semelhança existente entre eles.

1.2.2.1 Relação entre os volumes dos cubos

Definição 1.27. Sólido geométrico limitado por 6 faces quadrangulares congruentes.

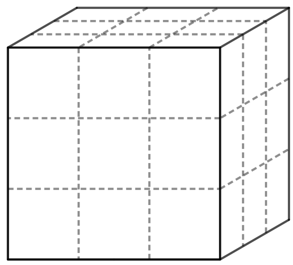
Proposição 1.28. *A razão entre o volume de dois cubos quaisquer é igual ao cubo da razão de semelhança.*

Demonstração. Seja C um cubo com aresta medindo a, mostraremos inicialmente que o volume do cubo é igual a a^3, para qualquer valor real de a, posteriormente usaremos o resultado alcançado para provar que dados dois cubos quaisquer, se a razão entre os lados é igual a r, então a razão entre os seus volumes é r^3.

[5] A ideia da demonstração do Princípio de Cavalieri pode ser vista em (LIMA, 1991, p.71).

1. a **é um número inteiro.** Se a é inteiro, podemos decompor o cubo em a^3 cubos unitários, que por sua vez, possuem volume igual a 1, portanto o volume de C é dado por $V_C = a^3$. A figura a seguir ilustra um caso particular.

Figura 25 – Cubo com $a = 3$



Fonte: Autoria própria.

2. a **é um número racional.** Supondo que $a = \frac{1}{n}$, com $1 \leq n \in \mathbb{N}$, então podemos tomar um cubo unitário e dividir suas arestas em um número n de partes iguais, com isso o cubo fica dividido em n^3 cubos de aresta $\frac{1}{n}$ e portanto congruentes ao cubo C. Como o volume do cubo unitário é igual a 1, segue

$$n^3 \cdot V_C = 1 \Rightarrow V_C = \frac{1}{n^3}.$$

De uma forma mais geral, a é um número racional se, e somente se, $a = \frac{m}{n}$, com m, n inteiros e $n \neq 0$. Então considerando agora um cubo C cuja aresta mede $a = \frac{m}{n}$, podemos dividir cada arresta a em m segmentos de medidas $\frac{1}{n}$, formando assim m^3 cubos de arestas $\frac{1}{n}$ e pelo caso anterior o volume dos cubos menores é $\frac{1}{n^3}$, então podemos escrever

$$V_C = m^3 \cdot \frac{1}{n^3} \Rightarrow V_C = \frac{m^3}{n^3} = \left(\frac{m}{n}\right)^3 = a^3.$$

3. a **é um número irracional.** Se a é um número irracional, mostraremos de forma indireta que o volume de C não pode ser expresso por outro número se não a^3. Seja x um número real tal que $x < a^3$. É possível tomar um número racional $p < a$, tão próximo de a quanto se queira de tal forma que tenhamos $x < kp^3 < a^3$. Diante disso, podemos tomar um cubo C_p no interior do cubo C cuja aresta mede p e teremos pelo axioma 1.24 e pelo item anterior que

$$V_{C_p} < V_C \Rightarrow p^3 < V_C.$$

Além disso

$$x < p^3 \Rightarrow x < p^3 < V_C.$$

Com isso mostramos que todo número real $x < a^3$ é também menor que o volume de C, portanto o volume de C não pode ser menor que C^3. Por outro lado, se

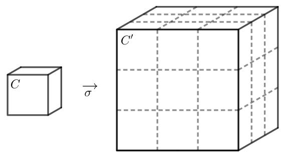
considerarmos um y real tal que $a^3 < y$, concluiremos de modo inteiramente análogo que y é também maior que o volume de C.
Isso significa que o volume de C é igual a a^3.

Portanto, concluímos que o volume de um cubo C, cujo lado mede a, deve ser expresso por

$$V_C = a^3.$$

Consideramos agora dois cubos C e C' com arestas medindo respectivamente a e a', de modo que $\frac{a'}{a} = r$, ou seja, a de semelhança é r.

Figura 26 – Cubos com $r = 3$.



Fonte: Autoria própria.

Já sabemos que os volumes dos cubos são da forma

$$V_C = a^3 \text{ e } V_{C'} = (r.a)^3 \Rightarrow V_{C'} = r^3.a^3.$$

Com isso temos

$$V_{C'} = a^3 \cdot V_C \Rightarrow \frac{V_{C'}}{V_C} = a^3.$$

□

1.2.2.2 Relação entre os volumes de blocos retangulares semelhantes.

Definição 1.29. Também chamado de paralelepípedo reto retângulo, um bloco retangular é um sólido limitado por 6 faces retangulares com as faces opostas congruentes duas a duas.

Para determinar um bloco retangular, basta conhecer as medidas de 3 arestas que concorrem num mesmo ponto. Um cubo é um caso particular de bloco retangular em que as arestas têm a mesma medida e consequentemente as faces são quadrados.

Proposição 1.30. *A razão entre o volume de blocos retangulares semelhantes é igual ao cubo da razão de semelhança.*

Demonstração. Mostraremos inicialmente que o volume de um bloco retangular é dado pelo produto de suas dimensões e em seguida provaremos a relação entre as razões.
Seja P um paralelepípedo reto retângulo cujas dimensões são racionais, ou seja, as medidas

das arestas são $\frac{a}{q}$, $\frac{b}{q}$ e $\frac{c}{q}$, com a, b, c e q números naturais. Decompondo as arestas em segmentos de comprimento $\frac{1}{q}$, as arestas $\frac{a}{q}$, $\frac{b}{q}$ e $\frac{c}{q}$ ficam divididas em a, b e c partes, respectivamente. Com isso o paralelepípedo fica divido em $a.b.c$ cubos de aresta $\frac{1}{q}$ que pela Proposição 1.28 tem volume igual a $\left(\frac{1}{q}\right)^3$. Disto segue que o volume do paralelepípedo P pode ser escrito como

$$V_P = abc \cdot \left(\frac{1}{q}\right)^3 = \frac{a}{q} \cdot \frac{b}{q} \cdot \frac{c}{q}.$$

Deste modo fica provado que, quando as dimensões são racionais, o volume de P_1 é dado pelo produto de suas dimensões. Resta provar que o mesmo acontece quando pelo menos uma das dimensões é irracional. Considere agora um paralelepípedo reto retângulo cujas dimensões são x, y e z, com pelo menos uma das dimensões sendo irracional. Mostraremos de modo indireto que não existe outro número capaz de expressar o volume de P_1 se não $x.y.z$. Tomamos um número $k < xyz$ e em seguida podemos tomar números racionais $r < x$, $s < y$ e $t < z$ tão próximos de x, y e z de modo que se tenha $k < rst < xyz$. Assim, o paralelepípedo P_1 contém um outro paralelepípedo P_2 cujas arestas são r, s e t. Disto conclui-se que para todo $k < xyz$ temos

$$k < rst = V_{P_2} < V_{P_1} \Rightarrow k < V_{P_1}.$$

Tomando um número $l > xyz$ conclui-se de modo inteiramente análogo que existe um outro paralelepípedo P_3, com medidas racionais, tal que

$$V_{P_1} < V_{P_3} < l.$$

Com isso fica provado que xyz é o único número capaz de expressar o volume de P_1. Com base nesses resultados, podemos concluir que o volume de um paralelepípedo reto retângulo é dado pelo produto de suas dimensões. Consideramos agora dois paralelepípedos retos retângulos P e P', semelhantes por razão r e com dimensões medindo a, b, c e a', b', c' respectivamente.

Calculando os volumes de P e P' encontramos

$$V_P = abc \;\text{ e }\; V_{P'} = a'.b'.c'.$$

Como $a' = ra$, $b' = rb$ e $c' = rc$

$$V_{P'} = ra.rb.rc = r^3.abc \Rightarrow V_{P'} = r^3.V_P \Rightarrow \frac{V_{P'}}{V_P} = r^3.$$

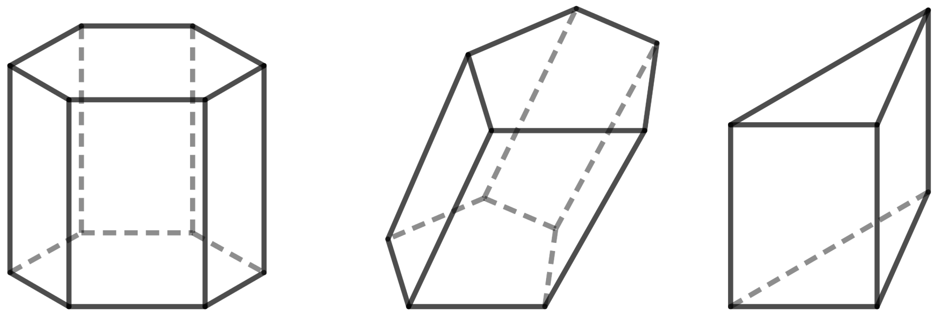
□

1.2.2.3 Relação entre os volumes de prismas semelhantes.

Definição 1.31. Dados dois polígonos congruentes contidos em planos paralelos, chamam-se de prisma o sólido limitado por esses polígonos e faces laterais em forma de paralelogramos.

Dizemos que os polígonos congruentes e paralelos são as bases do prisma, que pode ser classificado como reto (quando as outras faces são perpendiculares às bases) ou oblíquo (caso contrário). A distância entre um plano que contém uma base e o plano que contém a outra base é a altura h do prisma. Além disso, a quantidade de lados do polígono determina a nomeclatura do sólido.
De acordo com esta definição, podemos observar que, no caso anerior, um bloco retangular é um prisma quadrangular reto.

Figura 27 – Exemplos de prismas.



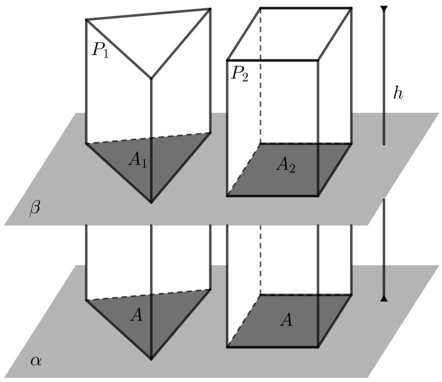
Fonte: Autoria própria.

Proposição 1.32. *A razão de semelhança entre os volumes de dois prismas semelhantes quaisquer é igual ao cubo da razão de semelhança.*

Demonstração. Para alcançar o resultado desejado mostraremos que o volume de um prisma qualquer, assim como no caso do paralelepípedo reto retângulo, pode ser encontrado fazendo o produto entre a área da base e a altura relativa a esta base. Com efeito, considere um prisma P_1 cuja base é um polígono de área A contida num plano α e a altura é h. Ao lado do prisma construímos um paralelepípedo reto retângulo P_2 de mesma altura h e a base com área medindo A contida no mesmo plano α. Tomamos agora um plano β cortando os sólidos e paralelo a α, como os dois sólidos são prismas, toda seção paralela a base é congruente à esta base, ou seja, a interseção de P_1 e P_2 com β determinam respectivamente áreas A_1 e A_2 congruentes a A. Pelo Axioma 1.25, o volume dos sólidos são iguais, isso significa que

$$V_{P_1} = V_{P_2} = Ah.$$

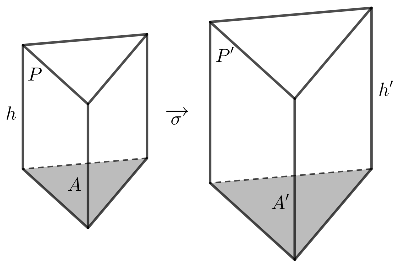
Figura 28 – Áreas equivalentes.



Fonte: Autoria própria.

Considere agora dois prismas P e P', com respectivas bases B e B', semelhantes com razão de semelhança r. Pela Proposição 1.18, a área da base de P' mede $A'_B = A_B.r^2$ e sabemos que $h' = r.h$.

Figura 29 – Prismas triangulares semelhantes



Fonte: Autoria própria.

Calculando os volumes de P e P' temos

$$V_P = A_B h \ \text{ e } \ V_{P'} = A_{B'} h' \Rightarrow V_{P'} = A_B r^2.hr = r^3.A_B h$$

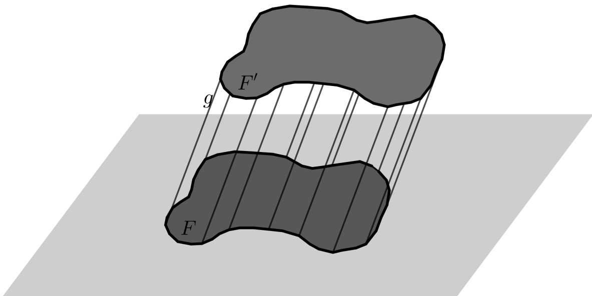
$$V_{P'} = r^3.V_P \Rightarrow \frac{V_{P'}}{V_P} = r^3.$$

□

1.2.2.4 Relação entre os volumes de cilindros semelhantes.

Definição 1.33. Dados duas figuras planas F e F' contidas em planos paralelos não conincidentes e um segmento de reta g que une F e F'. Chama-se de cilindro de base F e geratriz g, todos os segmentos congruentes e paralelos a g que unem F e F'.

Figura 30 – Cilindro por definição.



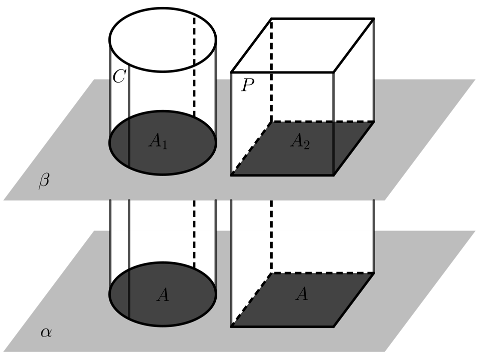
Fonte: Autoria própria.

A partir desta definição, podemos concluir que o prisma definido anteriormente é um caso particular do cilindro cuja a base é um polígono.

Proposição 1.34. *A razão de semelhança entre os volumes de dois cilindros semelhantes quaisquer é igual ao cubo da razão de semelhança.*

Demonstração. Para encontrar a relação desejada mostraremos que o volume de um cilindro qualquer pode ser encotrado fazendo o produto entre a área da base e a altura relativa a esta base. Para tal usaremos nos exemplos das figuras cilindros cujas bases são círculos, entretanto, fica claro que existem outros tipos de cilindros. Considere um cilindro C cuja base de área A está contida num plano α e a distancia entre as bases é h. Ao lado deste cilindro construímos um prisma P de altura h e uma das bases com área medindo A, contida no mesmo plano α. Tomamos um plano β paralelo ao plano α cortando os sólidos e pela Definição 1.33, as regiões determinadas pelo plano β nos sólidos são congruentes as suas respectivas bases, isto é, a interseção de C e P com β determinam respectivamente áreas A_1 e A_2 congruentes a A

Figura 31 – Princípio de Cavalieri para cilindros.



Fonte: Autoria própria

Como os sólidos possuem mesma altura, pelo Axioma 1.25, o volume dos sólidos são iguais e isto significa que

$$V_P = V_C = Ah. \tag{1.4}$$

Considere agora outro cilindro C' semelhante a C por razão de semelhança r e com área da base medindo A' e teremos que os volumes de C e C' são respectivamente

$$V_C = Ah \quad \text{e} \quad V_{C'} = A'h'.$$

Já sabemos que as bases desses sóldios são figuras planas semelhantes e pelo Teorema 1.21

$$A' = r^2 A.$$

Logo

$$V_C = Ah \quad \text{e} \quad V_{C'} = r^2 Ah' \Rightarrow V_{C'} = r^2 A.rh = r^3 Ah$$
$$V_{C'} = r^3 V_C \Rightarrow \frac{V_{C'}}{V_C} = r^3.$$

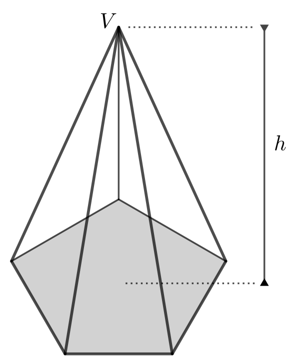
□

1.2.2.5 Relação entre os volumes de pirâmides semelhantes.

Definição 1.35. Dados um polígono P com n lados contido em um plano α e um ponto V fora do plano. Chama-se de pirâmide a reunião dos segmentos com uma extremidade em V e outra no polígono.

Neste caso dizemos que V é o vértice da pirâmide e P é a base da pirâmide. O valor de n determina a nomeclatura da pirâmide, por exemplo, uma pirâmide cuja base é triangular é chamada de pirâmide triangular.

Figura 32 – Exemplo de uma pirâmide pentagonal.



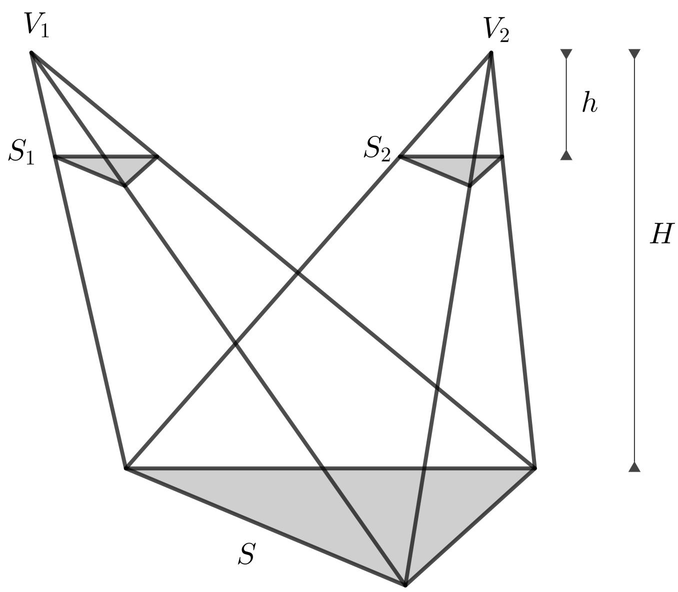
Fonte: Autoria própria.

No próximo resultado, mostraremos inicialmente como encontrar o volume de uma pirâmide qualquer e em seguida encontraremos a razão entre os volumes de duas pirâmides semelhantes. Para tal, se faz necessário enunciar e demonstrar o seguinte resultado.

Lema 1.36. *Duas pirâmides de mesma base e mesma altura possuem o mesmo volume.*

Demonstração. De fato, considerando duas pirâmides de mesma base S, com vértices V_1 e V_2, ambas com altura H, faremos nelas algumas construções. Traçando um plano paralelo à base com uma altura $H - h$, determinamos regiões S_1 e S_2 semelhantes a S como ilustra a figura a seguir.

Figura 33 – Pirâmides com mesma altura.



Fonte: Autoria própria.

Denotaremos por $V_1 - S_1$ uma pirâmide cujo vértice é V_1 e a base é S_1. Note que as pirâmides $V_1 - S_1$, $V_1 - S$ e $V_2 - S_2$, $V_2 - S$ são semelhantes entre si e pelo Teorema 1.21 a razão entre as áreas das bases das pirâmides é

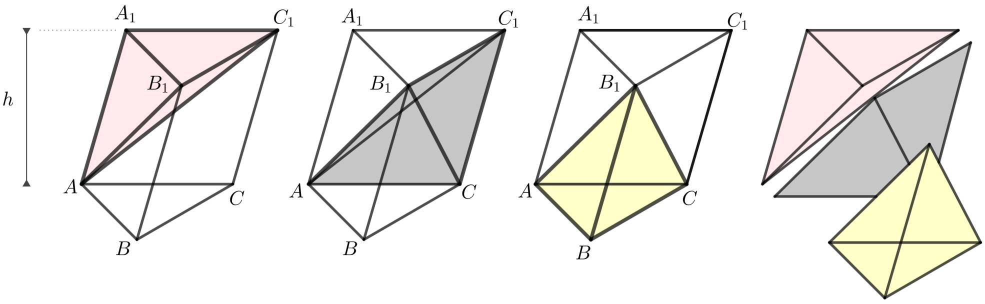
$$\frac{A_S}{A_{S_1}} = \left(\frac{H}{h}\right)^2 = \frac{A_S}{A_{S_2}}.$$

Daí conclui-se que $A_{S_1} = A_{S_2}$ e pelo Princípio de Cavalieri, as duas pirâmides têm o mesmo volume. □

Proposição 1.37. *A razão entre os volumes de duas pirâmides semelhantes é igual ao cubo da razão de semelhança.*

Demonstração. Considerando agora um prisma de base triangular, cujas bases são $\triangle ABC$ e $\triangle A_1B_1C_1$ e a altura é h. Já vimos que o volume deste prisma é dado por $A_{ABC}.h$ e se seccionarmos este prisma com os planos AB_1C_1 e ACB_1 encontraremos três pirâmides $A - A_1B_1C_1$, $B_1 - ABC$ e $B_1 - ACC_1$.

Figura 34 – Secção do prisma em pirâmides.



Fonte: Autoria própria.

Como seccionamos um prisma, a pirâmides $A - A_1B_1C_1$ e $B_1 - ABC$, possuem mesmo volume, visto que $A_{A_1B_1C_1} = A_{ABC}$ e mesma altura h. É válido notar que a pirâmide $A - A_1B_1C_1$ também pode ser vista como $B_1 - AA_1C_1$, assim podemos observar de maneira mais clara que $B_1 - AA_1C_1$ e $B_1 - ACC_1$ possuem bases e alturas congruentes, pois $\triangle AA_1C_1 \cong \triangle ACC_1$ e as bases estão contidas no mesmo plano A_1ACC_1 com o mesmo vértice B_1. Com isso podemos concluir que

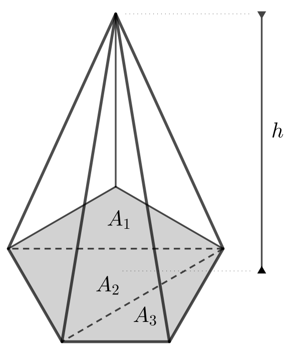
$$V_{(A-A_1B_1C_1)} = V_{B_1-ABC} = V_{B_1-ACC_1}.$$

Assim, fica demonstrado que para uma pirâmide de base triangular vale o seguinte resultado

$$V_{(prisma)} = 3.V_{(piramide)} = A_{(base)}.h$$
$$V_{(piramide)} = \frac{1}{3}.A_{(base)}.h \tag{1.5}$$

Desejando generalizar o caso para uma pirâmide cuja base é um polígono de n lados, basta usar o Teorema 1.17 e dividiremos a base em $n-2$ triângulos justapostos, como ilustra a figura a seguir.

Figura 35 – Volume de uma pirâmide.



Fonte: Autoria própria.

Desta forma, dada uma pirâmide P qualquer de altura h e base formada por um polígono B de n lados temos

$$V_P = \frac{1}{3}A_1h + \frac{1}{3}A_2h + ... + \frac{1}{3}A_{(n-2)}h$$

$$V_P = \frac{1}{3}(A_1 + A_2 + ... + A_{(n-2)}).h$$

$$V_P = \frac{1}{3}A_B.h$$

Por fim, dadas duas pirâmides P e P', de bases B,B' e altura h,h' respectivamente semelhantes por razão r, sabemos pela Proposição 1.18 que $A_{B'} = A_B.r^2$, além disso, $h' = r.h$. Calculando os volumes de P e P' temos

$$V_P = \frac{1}{3}.A_B.h \text{ e } V_{P'} = \frac{1}{3}.A_{B'}.h',$$

como $A_{B'} = A_B.r^2$ e $h' = r.h$ podemos escrever

$$V_{P'} = \frac{1}{3}.r^2 A_B.rh \Rightarrow V_{P'} = r^3 A_B.h$$

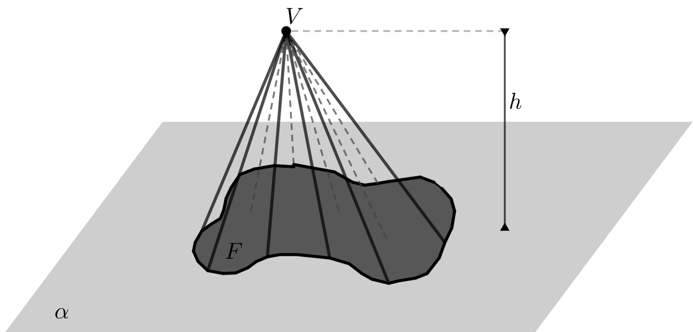
$$V_{P'} = r^3 V_P \Rightarrow \frac{V_{P'}}{V_P} = r^3.$$

□

1.2.2.6 Relação entre os volumes de cones semelhantes.

Definição 1.38. Dados uma figura F contida num plano α e um ponto V fora do plano. Chama-se de cone a reunião dos segmentos com uma extremidade em V e outra na figura.

Figura 36 – Cone por definição.



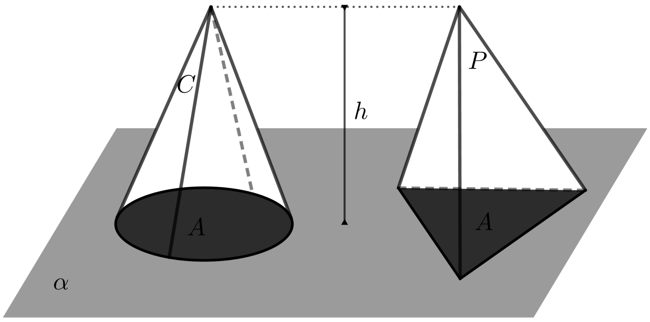
Fonte: Autoria própria

Neste caso dizemos que V é o vértice, F é a base e o segmento que liga V à extremidade de F é chamado de geratriz do cone. Observe que, com esta definição, a pirâmide definida anteriormente pode ser vista como um caso particular em que a base do cone é um polígono.

Proposição 1.39. *A razão entre os volumes de dois cones semelhantes é igual ao cubo da razão de semelhança.*

Demonstração. Para demonstrar este resultado, inicialmente mostraremos que o volume de um cone qualquer é dado por $V = \frac{1}{3}A_b h$. Para isso, considere um cone C e uma pirâmide P, ambos com altura h e base de área A contida num plano α. Como ilustra a figura a seguir

Figura 37 – Volume do cone.



Fonte: Autoria própria

Pelo Axioma 1.25 temos que

$$V_P = V_C.$$

Como, pela Equação (1.37) o volume da pirâmide P é dado por $V_P = \frac{1}{3}Ah$ e o cone C possui área da base e altura congruentes a P, podemos concluir que

$$V_P = V_C = \frac{1}{3}Ah. \tag{1.6}$$

Considere agora um cone C' semelhante a C por razão de semelhança r. Teremos que os volumes de C e C' são respectivamente

$$V_C = \frac{1}{3}Ah \quad \text{e} \quad V_{C'} = \frac{1}{3}A'h'.$$

Como as bases dos cilindros são figuras planas semelhantes, pelos Teoremas 1.21 e 1.3 temos

$$A' = r^2 A \quad \text{e} \quad h' = rh.$$

Disto segue que

$$V_C = \frac{1}{3}Ah \quad \text{e} \quad V_{C'} = \frac{1}{3}r^2 A.rh \Rightarrow V_{C'} = \frac{1}{3}r^3 Ah$$

$$V_{C'} = \frac{1}{3}r^3 V_C \Rightarrow \frac{V_{C'}}{V_C} = r^3.$$

□

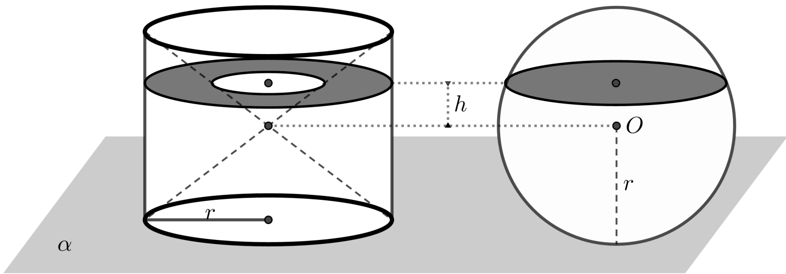
1.2.2.7 Relação entre os volumes das esferas.

Definição 1.40. Dados um ponto O, denominamos por esfera de raio R, a reunião de todos os segmentos de medida R com um dos extremos em O.

Proposição 1.41. *A razão entre os volumes de duas esferras quaisquer é igual ao cubo da razão de semelhança.*

Demonstração. Dada uma esfera centro O e raio r e tangente ao plano horizontal α, faremos algumas construções afim de encontrar uma forma para calcular o volume de E. Considere um cilindro C reto, cuja base é um círculo de raio r contido num plano α e a altura mede $2r$. No interior do cilindro tome dois cones circulares C_1 e C_2, um em cada base que limita o cilindro e ambos com altura r.

Figura 38 – Volume da esfera.



Fonte: Autoria própria

Das Equações (1.3), (1.4) e (1.3), (1.6) temos respectivamente que

$$V_C = \pi r^2.2r = 2\pi r^3 \quad \text{e} \quad V_{C_1} = V_{C_2} = \frac{1}{3}\pi r^2.r = \frac{1}{3}\pi r^3.$$

Considere agora um sólido S limitado interiormente por C_1 e C_2 e exteriormente por C e note que

$$V_S = V_C - (V_{C_1} + V_{C_2}) = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Tomamos agora um plano $\beta // \alpha$ e distando h do centro da esfera e notamos que para todo $h \leq r$ temos

$$A_{S\cap\beta} = \pi r^2 - \pi h^2 = \pi(r^2 - h^2) \quad \text{e} \quad A_{E\cap\beta} = \pi\left(\sqrt{r^2 - h^2}\right)^2 = \pi(r^2 - h^2).$$

Logo

$$A_{S\cap\beta} = A_{E\cap\beta}.$$

Com isso podemos concluir pelo Axioma 1.25 que

$$V_S = V_E = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Tomamos agora uma outra esfera E' com raio medindo r' de modo que $\dfrac{r'}{r} = a$, ou seja, a é a razão de semelhança entre E' e E.

Sabemos pela equação anterior que os volumes das esferas são

$$V_E = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad \text{e} \quad V_{E'} = \frac{4}{3}\pi (ra)^3 \Rightarrow V_{E'} = \frac{4}{3}\pi r^3 a^3.$$

Com isso temos

$$V_{E'} = a^3 \cdot V_E \Rightarrow \frac{V_{E'}}{V_E} = a^3.$$

$\square$

1.2.2.8 Relação entre os volumes de dois sólidos semelhantes quaisquer.

Deduzimos até aqui, as relações existentes entre os volumes dos sólidos geralmente abordados na educação básica, mas os casos apresentados até então são situações particulares e se mostram insuficientes para a aplicação em alguns caso do cotidiano. Buscando validar a relação apresentada para quaisquer que sejam os sólidos semelhantes, desenvolveremos a seguir uma dedução, com base nos casos já vistos que possibilite generalizar os resultados encontrados anteriormente, permitindo assim a aplicação em qualquer que seja a forma do sólido geométrico.

Teorema 1.42. *A razão de semelhança entre os volumes de dois sólidos semelhantes quaisquer é igual ao cubo da razão de semelhança.*

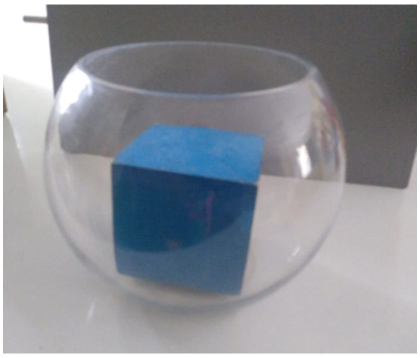
Demonstração. Seja S um sólido qualquer, encontraremos o valor do volume de S aproximando por poliedros,[6] fazendo isto por falta ou por excesso. Os valores do volume de S aproximados por falta são, por definição, os volumes dos poliedros R contidos em S e os valores do volume de S por excesso são os volumes dos poliedros T que contém S. Assim, tomando os poliedros R e T que obedecem as condições acima, podemos afirmar que

$$V_R < V_S < V_T.$$

Para apresentar um tratamento mais fácil entendimento, aproximaremos o sólido por poliedros retangulares, que são poliedros formados por vários blocos retangulares justapostos, assim o cálculo do volume se dará de forma mais direta, visto que podemos calcular o volume do sólido fazendo a soma dos volumes dos blocos retangulares. Considere um sólido S e um poliedro retangular R_1 contido em S obtido por uma aproximação a_1 suficientemente próxima de S, de tal modo que o valor do volume de S aproximado por falta possa ser expresso por $V_S \approxeq V_{R_1}$.

[6] Poliedro é uma reunião de um número finito de polígonos planos chamados faces,

Figura 39 – Sólido apróximado por poliedro retangular P_1.

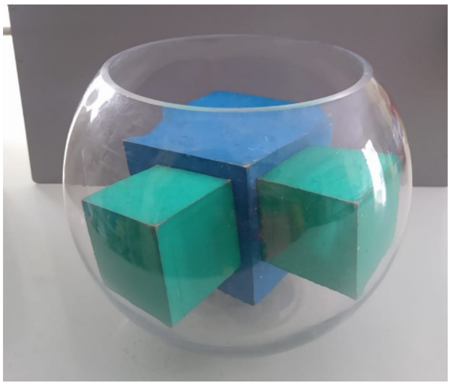


Fonte: Autoria própria

No entanto, podemos ainda tomar um poliedro retangular R_2 por uma aproximação a_2 mais precisa formada pela união de R_1 com outros blocos retangulares de Volume B_1. Com isso teremos

$$V_{R_1} < V_{R_2} < V_S.$$

Figura 40 – Sólido apróximado por poliedro retangular P_2.



Fonte: Autoria própria

Observe que

$$V_{R_2} = V_{R_1} + 2B_1 < V_S.$$

Note que ainda é possível tomar uma outra aproximação a_3 ainda mais precisa que a_2 através de um outro poliedro retangular R_3 composto pela união de R_2 com outros blocos retanglares de volumes B_2, como podemos observar na ilustração a seguir.

Figura 41 – Sólido apróximado por poliedro retangular P_3.

Fonte: Autoria própria

Observe que

$$V_{R_3} = V_{R_2} + 6B_2 < V_S.$$

Isto implica que

$$V_{R_1} < V_{R_2} < V_{R_3} < V_S.$$

Como entre dois números reais sempre há um ooutro número real, pudemos tomar uma sequência de números $b_n = V_S - \frac{1}{n}$, com $n \geq 1$ e notar que para todo b_n, existe um poliedro retangular R_n tal que

$$b_n < V_{R_n} < V_F.$$

Por outro lado, se considerarmos um outro poliedro retangular T_1 obtido por uma aproximação por excesso e aplicamos um inteiramente análogo, concluiremos que é possível tomar outra sequência $c_n = V_S + \frac{1}{n}$ e notar que para todo c_n existe um polígono retangular T_n tal que

$$V_S < S_{T_n} < c_n.$$

Observe que quando tornando maior o valor de n, teremos V_{R_n} e V_{T_n} mais próximos de V_S. Portanto, fazendo o limite nas duas sequências b_n e c_n, com $n \to \infty$ temos

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} b_n &= V_S - \cancelto{0}{\frac{1}{n}} = V_S \\ \lim_{n\to\infty} c_n &= V_S + \cancelto{0}{\frac{1}{n}} = V_S. \end{aligned}$$

Como

$$b_n < V_{R_n} < V_S < V_{T_n} < c_n,$$

e b_n é crescente, c_n é decrescente e ambas convergem para V_S, pelo Teorema do Confronto[7], temos que V_{R_n} e V_{T_n} convergem para a o mesmo valor que as sequências. Disto segue que o volume de um sólido qualquer pode ser pode ser visto como uma justaposição de blocos retangulares. Considerando agora $\sigma : S \to S'$ uma semelhança entre os sólidos S, S', com

[7] O Teorems do Confonto está enunciado e demonstrado em (STEWART, 2013, A37)

razão de semelhança r e P,P' aproximações para S, S', podemos apresentar os volumes de S e S' como

$$V_S = \lim V_P \quad \text{e} \quad V_{S'} = \lim V_{P'}.$$

Como $\lim P$ e $\lim P'$ são poliedros retangulares semelhantes temos

$$\lim V_{P'} = r^3 \lim V_P \Rightarrow V_{S'} = r^3 V_S$$

$$\frac{V_{S'}}{V_S} = r^3.$$

Portanto, a razão entre os volumes de dois sólidos semelhantes quaisquer é igual ao cubo da razão de semelhnaça. $\square$

2 Metodologia

Neste capítulo está definida a metodologia deste trabalho, caracterizando o tipo da pesquisa desenvolvida, o público participante e as etapas da sequência didática desenvolvida.

2.1 Caracterização da pesquisa

Uma pesquisa científica pode ser inicialmente classificada em três tipos: exploratória, descritiva e explicativa. Como toda classificação deve obedecer a alguns critérios, faremos esta com base nos objetivos da pesquisa, utilizando os critérios apresentados por (GIL, 2002).

Uma pesquisa exploratória busca apresentar um problema, porporcionando maior familiaridade com o fenômeno estudado. Pode-se dizer que o objetivo principal é o aprimoramento de ideias ou descobertas de intuições. Seu planejamento é, portanto, bastante flexível, de modo que possibilite a consideração dos mais variados aspectos relativos ao fato estudado. Gil aponta ainda que

> Embora o planejamento da pesquisa exploratória seja bastante flexível, na maioria dos casos assume a forma de pesquisa bibliográfica ou de estudo de caso[...] (GIL, 2002, p.41).

Portanto, o presente trabalho pode ser classificado como uma pesquisa exploratória de cunho qualitativo, mais precisamente, um estudo de campo, visto que os procedimentos utilizados na pesquisa estão de acordo com a definição de (GIL, 2002) para o estudo de campo, no qual ele afirma que:

> Tipicamente, o estudo de campo focaliza uma comunidade, que não é necessariamente geográfica, já que pode ser uma comunidade de trabalho, de estudo, de lazer ou voltada para qualquer outra atividade humana. Basicamente, a pesquisa é desenvolvida por meio da observação direta das atividades do grupo estudado e de entrevistas com informantes para captar suas explicações e interpretações do que ocorre no grupo. Esses procedimentos são geralmente conjugados com muitos outros, tais como a análise de documentos, filmagem e fotografias. (GIL, 2002, p.53).

Mais especificamente, este estudo consiste na elaboração, aplicação e análise de uma Sequência Didática, como proposta de ensino e aprendizagem de Semelhança de Figuras, estabelecendo relações entre as áreas e/ou entre os volumes das figuras estudadas, visando desenvolver nos estudantes as habilidades exigidas na BNCC.

2.2 Caratecrização do público participante

Para a realização da coleta de dados, optou-se por desenvolver a pesquisa em uma escola da rede pública do estado de Pernambuco, a Escola de Referência em Ensino Fundamental e Ensino Médio (EREFEM) Costa Azevedo, localizada no município de Olinda-PE.

A escolha da escola se justifica pelo fato do pesquisador lecionar na instituição e desejar contribuir, por meio desta pesquisa, de forma direta para o aperfeiçoamento do processo de ensio-aprendizagem, na unidade educacional na qual ele atua.

Esta pesquisa será desenvolvida com uma turma do 3º ano do ensino médio da EREFEM Costa Azevedo, que será divida em dois grupos com os quais será trabalhado os conceito de volume de figuras semelhantes. Em ambos os grupos o conceito de semelhança de figuras será apresentado através de sequências didáticas que serão propostas neste capítulo, entretanto com um grupo será uma didática de modo presencial, no outro, a seuquência será trabalhada de forma inteiramete remota.

Devido à necessidade de se cumprir o distanciamento social, por causa do momento de pandemia que estamos enfrentando, a quantidade de estudantes que participaram da pesquisa no grupo presencial foi reduzida, pois a escola está funcionando com capacidade máxima de 11 alunos por sala no grupo presencial e os demais alunos da turma estão acompanhando as aulas de forma remota, havendo assim um quantitativo maior de etudantes participando das atividades remotas. Por este motivo, participaram da pesquisa 7 estudantes no grupo presencial e 18 estudantes no grupo remoto.

As sequências didáticas são compostas por um pré teste, uma sequência de atividades interligadas entre si e um pós teste que será comparado com o pré teste afim de verificar se os objetivos foram alcançados em cada sequência. Dentre as atividades desenvolvidas consta resolução de problemas do cotidiano, investigação de problemas e desenvolvimento de oficinas. A seguir apresentamos de maneira mais detalhada, cada etapa desta pesquisa.

2.3 Pré teste

Em cada turma será aplicado um pré teste com o objetivo de identificar quais são as habilidades da BNCC relevantes para o andamento da pesquisa que os estudantes apresentam.

O pré teste é um questionário composto por 5 questões, disponível em Anexo A, com cada questão buscando verificar se o estudante possui uma determinada habilidade, de uma forma mais precisa, o objetivo de cada questão está elencado a seguir:

- **Questão 1 -** o estudante compreende o conceito de semelhança.

- **Questão 2 -** o estudante reconhece figuras planas semelhantes.
- **Questão 3 -** o estudante calcula a medida da área de uma figura plana utilizando o conceito de semelhança de figuras.
- **Questão 4 -** o estudante reconhece sólidos espaciais semelhantes.
- **Questão 5 -** o estudante calcula a medida do volume de um sólido geométrico utilizando o conceito de semelhança de figuras.

2.4 Sequência didática

As sequências didáticas são formas de organização do trabalho pedagógico, com objetivos que podem variar de acordo com a proposta do professor. Além disso, tem como característica principal desenvolver atividades em sequência, nesta proposta uma atividade está articulada a outra, como afirma Zabala:

> As sequências de ensino-aprendizagem ou sequências didáticas são a maneira de encadear e articular as diferentes atividades ao longo de uma unidade didática. Assim, poderemos analisar as diferentes formas de intervenção segundo as atividades que se realizam e, sobretudo, pelo sentido que adquirem sobre uma sequência orientada para a construção de objetivos educacionais. (ZABALA; ARNAU, 2010, p.179).

Em concordância com esta concepção acreditamos que a elaboração e a aplicação de sequência didáticas, fornecerá dados relevantes para o desenvolvimento desta pesquisa, pois o mesmo autor afirma ainda que

> As sequências podem fornecer pistas acerca da função que cada uma das atividades tem na construção do conhecimento ou da aprendizagem de diferentes conteúdos e, por seguinte, valorizar a pertinência ou não de cada uma delas, a falta de outras ou a ênfase que devemos lhes atribuir. (ZABALA; ARNAU, 2010, p.179).

Diante disto, elaboraremos nesta seção duas sequências didáticas voltadas para o ensino médio, uma elaborada para o ensino presencial e outra para o ensino remoto, ambas com foco na relação existente entre as áreas de figuras semelhantes e entre os volumes de figuras semelhantes.

2.4.1 Sequência didática - Ensino presencial.

A sequência didática voltada para o ensino médio aborda a relação entre as áreas e entre os volumes de duas figuras semelhantes, com o objetivo de apresentar o conceito de semelhança aos estudantes através de atividades que possam relacionar os conceitos de semelhança, de área de figuras planas e de volumes de sólidos. De forma mais detalhada, a sequência está estruturada da seguinte forma:

Habilidades a serem desnvolvidas

- Compreender o conceito de semelhaça, identificando figuras semelhantes.
- Reconhecer figuras semelhantes obtidas por meio de tranformações.
- Reconhecer figuras planas e espaciais semelhantes obtidas por meio de tranformações.
- Encontrar o valor da área da superfícies dos sólidos geométricos a partir das propriedades de figuras semelhantes.
- Encontrar o valor do volume de sólidos geométricos a partir das propriedades de figuras semelhantes.

Habilidades da BNCC

As habilidades elencadas a seguir já foram descritas anteriormente na Seção 1.1.

- (EF06MA21)
- (EF07MA21)
- (EF06MA29)
- (EM13MAT105)
- (EM13MAT309)
- (EM13MAT506)

Conteúdos abordados

- Semelhança de figuras.
- Tranformações geométricas (translação, reflexão, rotação e homotetia).
- Áreas de figuras planas.
- Volumes de sólidos espaciais.

Materiais didáticos

- 1 Caderno sem pauta.
- 4 Folhas de papel com malha quadriculada.
- Lápis.
- Borracha.

- Compasso.
- Transferidor
- Régua
- 1 Par de esquadros (45° e 60°).

Além disso, o professor deve dispor de um computador e um projetor de tela.

Tempo de execução: 9 aulas de 50 minutos

- 1º Encontro - Aplicação do pré teste exposto no Anexo A, conforme está descrito na Seção 2.3.
  Para este momento será necessária uma aula 50 minutos.
- 2º Encontro - Apresentação de uma lista com 4 problemas práticos, exposta no Anexo B, envolvendo semelhança de figuras planas, exposta na com a finalidade apresentar aos estudantes a aplicabilidade no seu cotidiano dos conceitos que serão estudados, motivando os estudantes e tornando-os sujeitos ativos no processo de construção do seu conhecimento.
  Para a este momento são necesárias duas aulas 50 minutos.
- 3º Encontro - Apresentação da ideia de semelhança entre figuras planas e entre figuras espaciais como uma relação que transforma uma figura F em outra figura F' com mesma forma, mas não necessariamente o mesmo tamanho, mostrando que a variação do tamanho da figura depende da razão de semelhança r que transforma distâncias d de F em distâncias $d' = r.d$ em F'. Neste momento o professor apresenta as propriedades da congruência dos ângulos internos e da razão constante entre os lados dos polígonos semelhantes, mostrando que as propriedades também são válidas para os poliedros. Para fixar os conceitos apresentados pelo professor, os estudantes devem resolver uma lista de exercícios envolvendo semelhança, disponível em Anexo C.
  A duração deste encontro é de duas aulas de 50 minutos.
- 4º Encontro - Revisão do conceito de volume, mostrando como encontrar o volume de alguns sólidos geométricos. Desenvolvimento de uma oficina com atividades voltadas para a verificação da relação entre as áreas e entre os volumes de figuras semelhantes com a utilização de malha quadriculada e sólidos geométricos constuídos pelos estudantes, utilizando papelão, conforme está exposto no Anexo D. Este momento deve funcionar como uma oficina na qual os estudantes construirão os sólidos afim de verificar qual a relação entre os volumes de sólidos semelhantes por razão de semelhança r. A verificação deve ser feita com areia ou outro material capaz e ocupar

ao máximo o volume existente no interior dos sólidos constuídos. Neste encontro o professor deve agir como mediador do processo de desenvolvimento da atividades, auxiliando os estudantes nas construções dos objetos e no processo de verificação. Para este encontro são necessárias duas aulas de 50 minutos.

- 5º Encontro - Apresentação das soluções dos problemas propostos no encontro anterior, mostrando as relações entre as áreas e entre os volumes das figuras estudadas. Após a apresentação das soluções encontradas no 4º encontro, a sequência didática é finalizada com uma generalização apresetada pelo professor, mostrando que as relações encontradas para as áreas das figuras estudadas são válidas para quaisquer figuras planas semelhantes e que as relações encontradas para os volumes são válidas para quaisquer sólidos semelhantes. Neste momento o professor deve fazer uma transposição didática dos Teoremas 1.21 e 1.42.
A duração deste encontro é de uma aula de 50 minutos.

- 6º Encontro - Aplicação do pós teste descrito na Seção 2.5 e exposto no Anexo E. Para este momento será necessária uma aula 50 minutos.

2.4.2 Sequência didática - Ensino remoto

Diante das adversidades encontradas durante o período de pandemia, que teve início no ano de 2020, no qual as aulas presenciais foram suspensas e passaram a ocorrer de forma virtual, ficou evidente a necessidade de se pensar em atividades que possam ser aplicadas de forma remota. E motivados por esta necessidade desenvolvemos uma sequência didática voltada para o processo de ensino remoto.

A sequência didática voltada para o ensino médio remoto pretende desenvolver as mesmas habilidades e aborda os mesmos conteúdos que a sequência didática presencial, entretanto esta sequência apresenta algumas adaptações nas atividades desenvolvidas, de modo que seja possível desenvolvê-las sem a necessidade de haver encontros presenciais.

Para desenvolver as atividades propostas nesta sequência os estudantes deverão dispor dos mesmos materiais didáticos expostos na sequência didática para o ensino presencial, mais 1 computador ou outro aparelho capaz de se conectar à internet para participar das aulas que serão realizadas por vídeos chamadas.

De forma mais detalhada, as atividades desta sequência estão organizadas da seguinte forma:

Tempo de execução: 7 encontros divididos entre aulas de 50 minutos realizadas através de vídeochamadas e encontros assíncronas, totalizando 7 aulas por vídeochamadas e 3 encontro assíncronos.

- 1º Encontro -(Encontro assíncrono) aplicação de um fórmulário pré teste exposto no Anexo A, conforme está descrito na Seção 2.3.

- 2º Encontro - Apresentação de uma lista (em formato PDF) com 4 problemas práticos, exposta no Anexo B, envolvendo semelhança de figuras planas, exposta na com a finalidade apresentar aos estudantes a aplicabilidade no seu cotidiano dos conceitos que serão estudados, motivando os estudantes e tornando-os sujeitos ativos no processo de construção do seu conhecimento. Neste encontro o professor, através da vídeochamada deve mediar a aula auxiliado os estudantes na resolução dos problemas.
  Para a este momento são necesárias duas aulas 50 minutos.

- 3º Encontro - Apresentação da ideia de semelhança entre figuras planas e entre figuras espaciais como uma relação que transforma uma figura F em outra figura F' com mesma forma, mas não necessariamente o mesmo tamanho, mostrando que a variação do tamanho da figura depende da razão de semelhança r que transforma distâncias d de F em distâncias $d' = r.d$ em F'. Neste momento o professor apresenta as propriedades da congruência dos ângulos internos e da razão constante entre os lados dos polígonos semelhantes, mostrando que as propriedades também são válidas para os poliedros. Para fixar os conceitos apresentados pelo professor, os estudantes devem resolver uma lista de exercícios envolvendo semelhança, disponível em Anexo C.
  A duração deste encontro é de duas aulas de 50 minutos.

- 4º Encontro - (Encotnro assíncrono) revisão do conceito de volume, por meio de um vídeo postado na plataforma de aulas, mostrando como encontrar o volume de alguns sólidos geométricos. Neste encontro o professor solicita os materiais que serão utilizados no próximo encontro.

- 5º Encontro - Desenvolvimento de uma oficina com atividades voltadas para a verificação da relação entre as áreas e entre os volumes de figuras semelhantes com a utilização de malha quadriculada e sólidos geométricos constuídos pelos estudantes, utilizando papelão, conforme está exposto no Anexo D. Este momento deve funcionar como uma oficina na qual os estudantes construirão os sólidos afim de verificar qual a relação entre os volumes de sólidos semelhantes por razão de semelhança r. A verificação deve ser feita com areia ou outro material capaz e ocupar ao máximo o volume existente no interior dos sólidos constuídos. Neste encontro o professor deve agir como mediador do processo de desenvolvimento da atividades, auxiliando os estudantes nas construções dos objetos e no processo de verificação.
  Para este encontro são necessárias duas aulas de 50 minutos.

- $6^{\underline{o}}$ Encontro - Apresentação das soluções dos problemas propostos no encontro anterior, mostrando as relações entre as áreas e entre os volumes das figuras estudadas. Após a apresentação das soluções encontradas no $5^{\underline{o}}$ encontro, a sequência didática é finalizada com uma generalização apresetada pelo professor, mostrando que as relações encontradas para as áreas das figuras estudadas são válidas para quaisquer figuras planas semelhantes e que as relações encontradas para os volumes são válidas para quaisquer sólidos semelhantes. Neste momento o professor deve fazer uma transposição didática dos Teoremas 1.21 e 1.42.
A duração deste encontro é de uma aula de 50 minutos.

- $7^{\underline{o}}$ Encontro -(Encontro assíncrono) aplicação de um fórmulário pós teste descrito na Seção 2.5 e exposto no Anexo E.

2.5 Pós teste

Em cada turma será aplicado um pós teste em forma de questionário, disponível em Anexo E com o objetivo de identificar quais as habilidades foram desenvolvidas com a aplicação da sequência didática. A fim de tornar mais direta a comparação entre o os resultados obtidos no pré teste e no pós teste, as questões do pós teste serão problemas com os mesmos objetivos dos problemas propostos no questionário do pré teste, entretanto a abordagem se dá através de problemas contextualizados, nos quais as respostas serão alcançadas utilizado os conceitos estudados na sequência didática. Esta comparação irá compor o próximo capítulo do TCC, intitulado Resultados e dicussões.

3 Resultados e discussões

Neste capítulo será feita uma análise detalhada do desenvolvimento das atividades que compõem as sequências didáticas, discutindo o fatores relevantes a esta pesquisa que foram percebidos no decorrer do processo de aplicação. Além disso, serão expostos neste capítulo, os restulados dos questionários pré teste e pós teste da sequência didática voltada para o ensino presencial e também da sequência voltada para o ensino remoto.

No final do capítulo, na seção será feita uma comparação entre os resultados do pré teste e pós teste de cada modalidade utilizada, verificando se a aplicação de cada sequência didática apresentou resultados satisfatórios.

3.1 Resultados do pré teste

No primeiro encontro foi aplicado o mesmo questionário pré teste para os grupos presencial e remoto, com a finalidade de verificar quais as habilidades que os estudantes já dominavam e quais habilidades deverriam ser desenvolvidas no decorrer das sequências didáticas. Para o grupo remoto, o questionário foi enviado em formato de formulário online.

Foi informado aos estudantes que o questionário é parte de uma pesquisa, numa tentativa de tranqulizar os estudantes, casos os mesmos tivessem dificuldades para responder corretamente todas as questões e como esperado, muitos tiveram dificuldades com algumas questões. Por outro lado, houve questões com uma quantidade satisfatória de acertos. A seguir apresentamos a porcentagem de acertos por questão em cada grupo.

Questão 1. Aponte qual das afirmações a seguir, está corretamente ligada ao conceito de semelhança de figuras.

a) Duas figuras são semelhantes se, e somente se, são iguais.

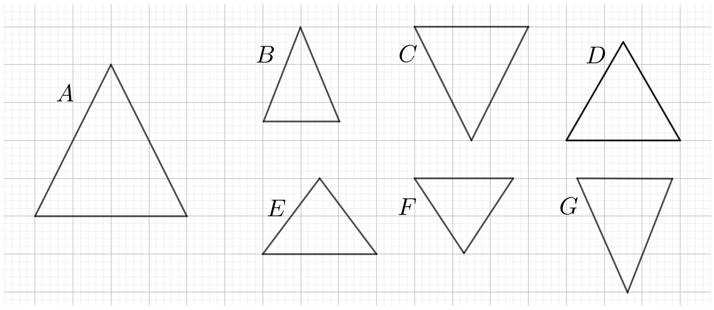
b) Duas figuras são semelhantes, se e somente se os lados correspondentes são proporcionais.

c) Duas figuras são semelhantes se uma pode ser vista como ampliação da outra dada por uma razão r.

d) Duas figuras são semelhantes se os ângulos formados pelos lados são congruentes.

No grupo presencial $14,3\%$ das respostas foram corretas, enquanto no grupo remoto, a porcentagem de acerto foi de $5,5\%$. Estes dados mostraram que os estudantes iriam participar da pesquisa, em sua maioria, não compreendiam, de maneira precisa, o conceito de semelhança.

Questão 2. Qual das figuras a seguir é semelhante à figura A?



I) Figura B

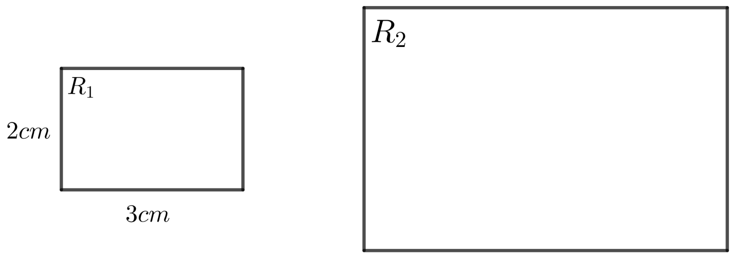
II Figura C

III Figura D

IV Figura E

As porcentagens de acertos dos grupos presencial e remoto nesta questão foram respectivamente $42,3\%$ e $72,2\%$. O que nos permite concluir que, mesmo não compreendendo precisamente o que são figuras semelhantes, os estudantes são capazes de reconhecer figuras semelhantes, dado que o grupo presencial apresentou um quantitativo mediano de acertos, enquanto o grupo remoto apresentou um quantitativo considerável de acertos.

Questão 3. A figura R_2 é semelhante a figura R_1 por razão de semelhança $r = 2$.



Com isso podemos afirmar que a área de R_2 é igual a:

a) $8m^2$

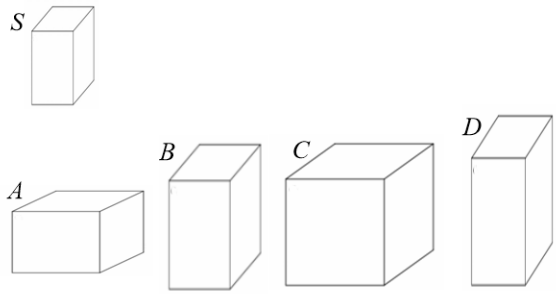
b) $12m^2$

c) $18m^2$

d) $24m^2$

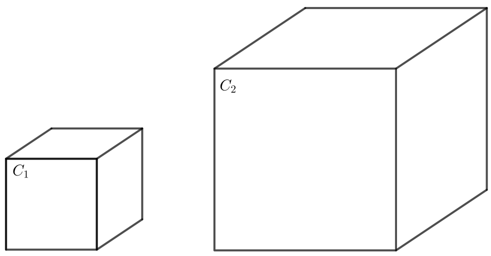
Visando facilitar o cálculo da área da figura semelhante, nesta quetão foram utilizados retângulos semelhantes, o que permite aos estudantes formular uma solução encontrando primeiramente as medidas das dimensões do retângulo R_2 para, em seguida calcular sua área, ou seja, a solução não está restrita apenas a hablidade de conhecer a relação existente entre as áreas de figuras semelhantes e a razão de semelhança. Ainda assim, a porcentagem de acertos dos grupos presencial e remoto foram respectivamente iguais a $42,3\%$ e $33,3\%$, com isso notamos que em nenhum dos grupos houve mais de 50% de acertos, o que nos mostra que a quantidade de acertos, não pode ser considerada satisfatória.

Questão 4. Qual dos sólidos geométricos a seguir é semelhante ao sólido S?



No grupo presencial 100% dos estudantes responderam corretamente e no grupo remoto a porcentagem de acertos foi de $72,2\%$. Isto mostra que uma quantidade significativa dos estudantes conseguem identificar dois sólidos semelhantes.

Questão 5. A seguir temos dois cubos C_1 e C_2. A aresta do cubo maior possui o dobro da medida da aresta do cubo menor e o volume do cubo menor é igual a $1m^3$.



Podemos afirmar que o volume do cubo maior é igual a:

a) $2m^3$
b) $4m^3$
c) $8m^3$
d) $12m^3$

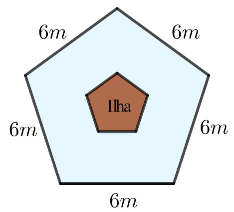
Nesta questão foram utilizados cubos como as figuras semelhantes, tendo em vista que o objetivo da questão foi de verificar se o estudantes encontra o volume de um sólido usando o conceito de semelhança de figuras. Neste caso citado na questão, o estudante poderia encontrar a medida da aresta do cubo C_2 e em seguida calcular seu volume. Contudo as porcentagens de acertos dos grupos presencial e remoto foram respectivamente iguais a $28,6\%$ e $33,3\%$, não podendo ser consideradas satisfatórias, devido às possíbilidades de soluções que poderiam ser desenvolvidas.

3.2 Discussões sobre as atividades desenvolvidas

3.2.1 Lista de problemas práticos do cotidiano

No segundo encontro foi aplicada para o grupo presencial e também para o grupo remoto uma lista com problemas práticos do cotidiano, disponível em Anexo B. Durante o desenvolvimento das atividades, foi possível notar que, em ambos os grupos, os estudantes apresentavam uma satisfatoria noção intuitiva de semelhança, podendo identificar as figuras semelhantes nos problemas, entretanto apresentavam bastante dificuldade de aplicar os conceitos de semelhança na elaboração de uma estratégia para resolver o problema. A seguir está colocado de forma mais precisa o que foi possível observar em cada questão.

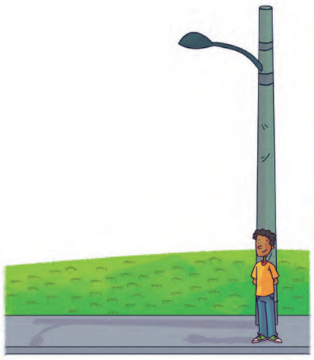
Questão 1. No interior de um lago que possui a forma de um pentágono regular deseja-se construir uma ilha semelhante a este lago com razão $\frac{1}{3}$, conforme ilustra a figura a seguir:



Qual deve ser a medida do contorno da ilha, se cada lado do lago mede 6 metros?

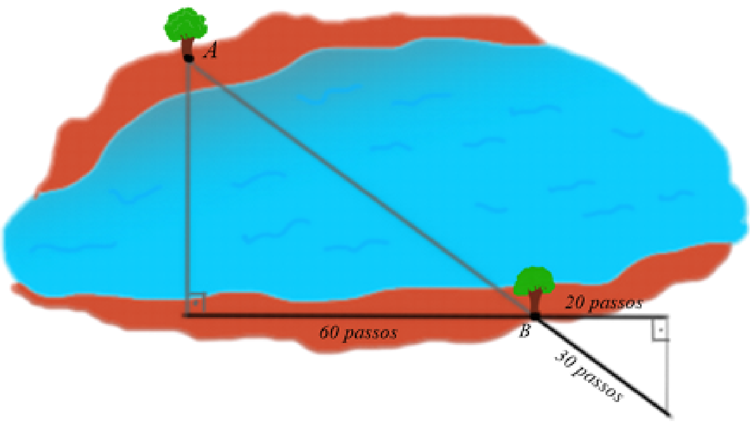
Alguns estudantes conseguiram resolver esta questão sem dificuldades, enquanto outros não souberam aplicar o conceito de semelhaça com base na razão de semelhança. Para ajudar estes que tiveram dificuldades, foi exposto dois exemplos utilizando quadrados e triângulos equiláteros, mostrando a relação entre a razão de semelhança e os contornos das figuras.

Questão 2. Em certo momento do dia, um poste projetava sobre a calçada uma sombra de 4 m. esse mesmo momento, um homem de 1,80 m de altura, que estava ao lado do poste, rojetava uma sombra de 1,20 m. Qual a altura do poste?



A maior dificuldade apresentada pelos estudantes do grupo presencial e do grupo remoto foi identificar que as alturas citadas no problema e suas respectivas projeções determinavam triângulos semelhantes. Entretanto, muitos perceberam que a relação entre as alturas e suas projeções eram proporcionais, mas por não conseguir visualizar, não coseguiram estabelecer a proporção na maneira adequada, o que comprometeu a solução do problema. Numa tentativa de fornecer um caminho viável para a solução, foi apresentado aos estudantes os triângulos que eram determinados pelos dados do problema e lembrado que o conceito de razão de semelhança vista no problema anterior poderia ajudar nesta questão.

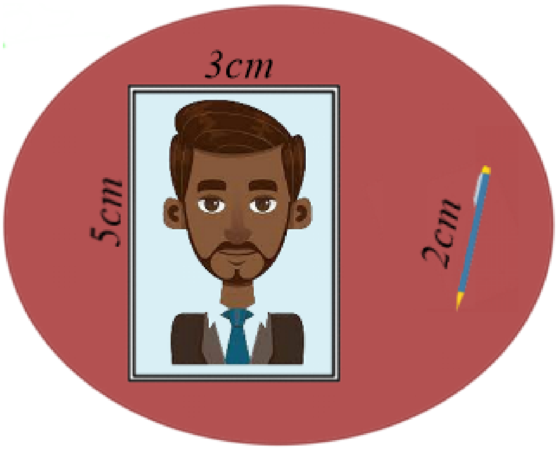
Questão 3. Veja na figura o procedimento usado por Marcos para descobrir a distância entre as árvores A e B próximas do lago.



Sabendo que a medida do passo de Marcos é 100 cm, determine a distância entre essas árvores, em metro.

Os estudantes perceberam que os triângulos apresentados na questão eram semelhantes e usaram o conceito de proporcionalidade entre os lados para buscar a solução do problema, no entanto alguns estudantes ainda não aplicaram este conceito da maneira adequada por não identificar quais eram os lados correspondentes. Para ajudar a encaminhar os alunos para uma solução correta, o professor fez uma observação mostrando que os ângulos das figuras semelhantes são congruentes e pode-se tomar os ângulos como referência para classificar os pares de lados correspondentes.

Questão 4. Para prensentear seu amigo, Jorge comprou um quadro utilizando um aplicativo de internet e para verificar as medidas do quadro comprado ele solicitou uma foto da pintura antes que ela fosse enviada. Após revelar a foto recebida, ele percebeu que ao lado do quadro havia uma caneta e então ele efetuou algumas medições e anotou, conforme ilustra a figura a seguir



Sabendo que uma caneta possui $14cm$ de comprimento, qual o tamanho real do quadro comprado por Jorge?

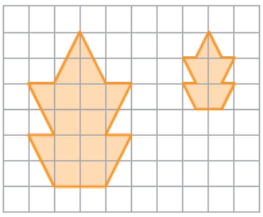
Em ambas as sequências os estudantes apresentaram bastante dificuldade para perceber que havia relação entre o quadro real e o quadro apresentado na imagem. Possivelmente pelo fato de haver apenas uma imagem na questão, os estudantes não conseguiram identificar a relação de proporcionalidade estabelecida entre a razão das dimensões do quadro real e do quadro na foto e a razão do comprimento da caneta real e da caneta na foto. Quando perguntados a respeito da dificuldade de resolver o problema, os estudantes responderam: *"Como vou fazer aqui, se só tem uma imagem?" "Ta faltando algum dado no problema."* Para minimizar a dificuldade, foi mostrado aos estudantes a proporcionalidade entre as dimensões reais e as dimensões virtuais citadas no problema.

3.2.2 Apresentação de figuras semelhantes e lista de exercícios

No terceiro encontro, em ambas sequências, foi trabalhado o conceito de semelhança de figuras através de uma exposição de conteúdo, mostrando inicialmente a semelhança entre figuras planas como uma relação entre duas figuras com mesma forma, mas não necessariamente o mesmo tamanho, mostrando que as dimensões da figura variam de acordo com uma razão de semelhança r. Neste momento foram apresentadas as propriedades da congruência dos ângulos internos e da razão constante entre os lados correspondentes dos polígonos semelhantes. Posteriormente este conceito foi ampliado para os sólidos semelhantes, mostrando que as propriedades de congruência dos ângulos internos e da razão constante entre os segmentos correspondentes também são válidas neste caso.

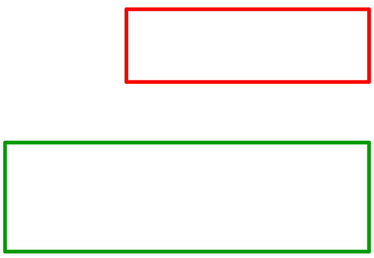
Em seguida foi aplicada uma lista de exercícios, (disponível no Anexo C) possibilitando aos estudantes a aplicação direta das propriedades expostas pelo professor e, em ambos os grupos, os estudantes apresentaram algumas dificuldades para resolver a lista por completo, necessitando da intervenção do professor em alguns casos. A seguir estão apresentados os exercícios que foram aplicados neste encontro, juntamente com os fenomenos que foram possível observar.

Exercício 1. Qual é a razão de semelhança entre a figura reduzida (à direita) e a figura original (à esquerda) na ilustração abaixo?



Os estudantes não apresentaram dificuldade para resolver este exercício, salvo alguns casos nos quais as respostas eram $r = 2$ e não $r = \frac{1}{2}$, como deveria. Para estes casos, foi mostrado que o valor da razão de semelhança determina se a figura originall será ampliada ou reduzida.

Exercício 2. Com uma régua, meça a base e a altura dos retângulos a seguir e, com o auxílio de um transferidor, meça os ângulos de ambos.



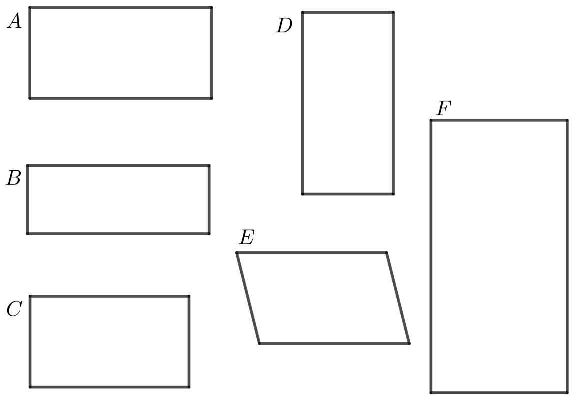
a) Qual é a razão entre a medida da base do retângulo vermelho e a medida da base do retângulo verde?

b) Qual é a razão entre a medida da altura do retângulo vermelho e a medida da altura do retângulo verde?

c) Esses retângulos são semelhantes? Por quê?

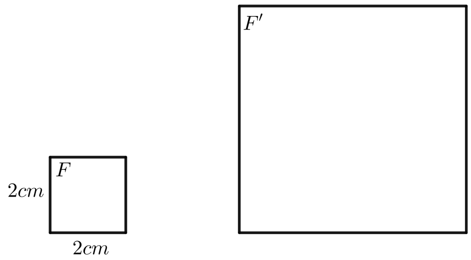
Neste exercício houve uma divergência entre os grupos presencial e remoto, pois nos dois grupos alguns estudantes não tinham o material necessário para medir os ângulos das figuras, embora o transferidor faça parte dos materiais didáticos listados anteriormente, muitos não conseguiram adquirir a tempo. No grupo presencial, devido a pequena quantidade de estudantes, o material que tínhamos na escola foi suficiente para que cada estudante pudesse fazer o seu exercício, já no grupo remoto, a solução encontrada foi medir os ângulos na vídeochamada para que todos pudessem verificar as medidas das figuras. Apesar desta divergenência, os dois grupos conseguiram resolver os três itens, chagando à conclusão esperada de que as figuras eram semelhantes por possuírem ângulos correspondentes congruentes e a razão entre os lado ser constante.

Exercício 3. Verifique, utilizando régua e transferidor, qual das figuras a seguir é semelhante ao retângulo A.



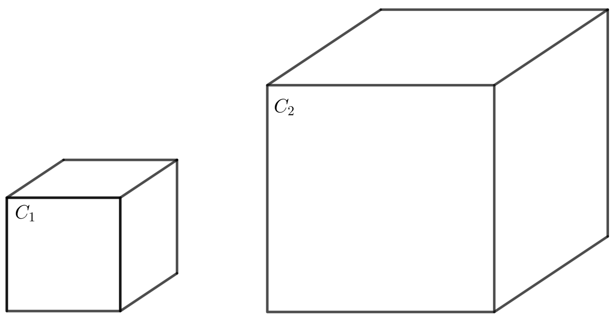
Nos dois grupos, as dificuldades decorrentes da falta de transferidor que ocorreram no exercício 3, também ocorreram neste exercício. No grupo remoto, utlizando de uma estratégia semelhante a da questão 3, quando os estudantes solicitaram, foi feita uma medição dos ângulos através da vídeochamada. O que se mostrou sufuciente para atingir o objetivo do exercício.

Exercício 4. As figuras F e F' a seguir são semelhantes com razão de semelhança $r = 3$. Encontre a o valor da área de F'



Neste exercício os estudantes tiveram dificuldade para encontrar o valor da área da figura F', alguns responderam afirmando que o valor da área seria três vezes maior, visto que o valor de semelhança é $r = 3$, outros estudantes conseguiram encontrar o valor da área encontrando primeiramente as dimensões da figura F' e em seguida calculando a área do quadrado de lado $9cm$.

Exercício 5. Sabendo que dois cubos quaisquer são semelhantes e que a aresta do cubo C_2 tem o dobro da medida da aresta do cubo C_1, determine o volume de C_2.



Neste exercício os estudantes também tiveram dificuldade para encontrar o volume do cubo C_2. Alguns estudantes afirmaram equivocadamente que o volume do cubo C_2 também dobraria, outros responderam que o volume do cubo C_2 seria 4 vezes maior que o cubo C_1, pelo fato da razão de semelhança ser $r = 2$. Como neste exercício, diferentemente do anterior, as dimensões da figura original não estavam explícitas, os estudantes não conseguiram encontrar dimensões do cubo C_2 semelhante para em seguida calcular o volume.

Diante das dificuldades apresentadas pelos estudantes na resolução dos exercícios 4 e 5, ficou evidente que o estudo de semelhança de figuras, através da abordagem apresenada, não foi suficiente para que desenvolver nos estudantes as habilidades de verificar a relação enre as áreas e entre os volumes de figuras semelhantes, este fato justifica a necessidade de se desenvolver as atividades programadas para o próximo encontro.

3.2.3 Revisão de volumes de sólidos e proposta de oficina

No primeiro momento desta etapa da sequência o encontro com o grupo remoto ocorreu em formato assíncrono, através de um vídeo postado na plataforma da sala de aula virtual, contendo uma aula de revisão sobre as formas de calcular os volumes de cubos, prismas, cilindros, pirâmides, cones e esferas. O outro momento desta etapa ocorreu através de uma videochama, na qual foi proposta uma atividade em formato de oficina para este grupo.

A mesma revisão foi feita com o grupo presencial e posteriormente foi proposta a mesma atividade em formato de oficina que foi proposta para o grupo remoto. Entretanto pela dinâmica da aula presencial, foi possível fazer a revisão e desenvolver as atividades da oficina em duas aulas de 50 minutos, sendo necessário um tempo menor do que o tempo gasto com o grupo remoto.

A seguir estão apresentadas algumas observações que foi possível notar durante o desenvolvimento de cada atividades que compõe a oficina.

Atividade 1. Construa na malha quadriculada um triângulo retângulo com base medindo 3 e altura 2, em seguida construa, ao lado deste, um retângulo semelhante com razão de semelhança $r = 2$ e encontre o valor das áreas das duas figuras.

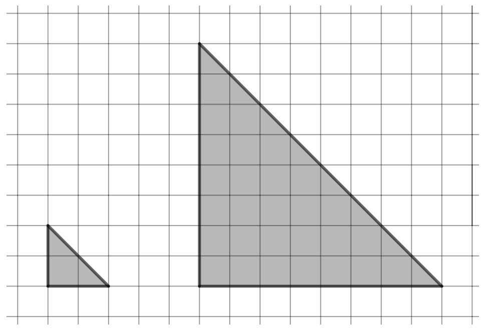
O uso da malha quadriculada foi um obstáculo para alguns estudantes, visto que muitos alguns não puderam imprimir o modelo da mala enviado e também não possuiam recursos tecnológicos para utlizá-la de modo digital. A alternativa encontrada para esta dificuldade foi criar, uma malha numa folha de papel ofício com o auxílio da régua.

Após resolver o problema da malha, a atividade foi desenvolvida por ambos os grupos sem muita dificuldade, com isso foi possível notar que os estudantes compreenderam o conceito de semelhança entre os lados dos triângulos com base na razão de semelhança.

Atividade 2. Utilize a malha quadriculada para analisar o que acontece com a área de um quadrado se dobrarmos o valor dos seus lados. E quando triplicamos o valor do lado?

Nesta atividade foi possível notar com o grupo presencial que os estudantes construíram quadrados semelhantes, de modo análogo à atividade anterior e, em seguida, calcularam as áreas dos quadrados utilizando a soma dos quadrados unitários presentes na malha. Os estudantes do grupo remoto também conseguiram constuir os quadrados e quando perguntados pelo método utilizado, dois estudantes que se pronunciaram declararam ter utilizado o mesmo método que foi observado no grupo presencial. Entretanto, as comparações entre as áreas não foram todas por meio da razão, alguns estudantes comparam por meio da diferença, como o estudantes que afirmou *"quando dobrei o lado do quadrado a área aumentou 12 unidades"*. No seu exemplo, este estudante considerou inicialmente um quadrado de lado 2 e ao encontrar as áreas desejadas, ele comparou fazendo subtrações, chegando assim numa conclusão equivocada. Os estudantes que cometeram este equívoco foram direcionados a usar mais de um exemplo e comparar as áreas usando a razão.

Atividade 3. Os triângulos a seguir são semelhantes com razão de semelhança $r = 4$. Qual a relação existente entre as áreas dos triângulos?

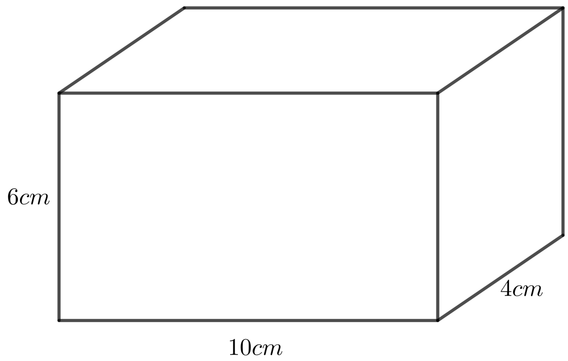


Devido ao uso da malha quadriculada, os estudantes conseguiram calcular as àreas das figuras somando as áreas dos quadrados unitários e juntando dois triângulos cujos catetos medem 1 para formar um quadrado unitário. Nesta atividade já não houve casos em que a comparação foi feita pela diferença.

Atividade 4. Com base nos resultados anteriores, responda o que acontece com a àrea de um polígono qualquer quando dobramos o comprimento dos lados.

Esta atividade, por se tratar de uma questão mais generalizada, não apresentando a figura dos polígonos semelhantes, os estudantes apresetaram dificuldades de apontar uma solução. Para direcionar os estudantes a uma estratégia de resolução adequada para este problema, foi mostrado o que aconteceu com os polígonos das atividades anteriores, fazendo uma relação entre a razão de semelhança e as áreas dos polígonos. Após esta observação, ambos os grupos conseguiram apontar a resposta esperada.

Atividade 5. Utilizando papelão e fita adesiva, construa um paralelepípedo com as dimensões apresentadas na figura abaixo. Em seguida calcule o seu volume.



Para esta tividade, a maior dificuldade de ambos os grupos foi construir os sólidos com medidas indicadas. Para ajudar os estudantes, foi colocado um passo a passo, mostrando que eles poderiam primeiramente cortar as faces com os tamanhos indicados e em seguida montar o sólido, envolvendo as faces com fica adesiva. Após a confecção dos sólidos, os estudantes apoontaram o volume do paralelepípedo sem muitas dificuldades.

Atividade 6. Construa um paralelepípedo semelhante ao paralelepípedo construído anteriormente por razão de semelhança $r = 2$ e verifique a relação entre os volumes.

Para desenvolver esta atividade, boa parte dos estudantes optou por criar primeiramente um rascunho do sólido que deveria ser criado, definindo suas medidas com base no sólido da questão anterior e da razão de semelhança. Neste caso, não houve muita dificuldade no processo de confecção, pois os grupos utilizaram o mesmo passo a passo da questão anterior. No entando, para efetuar a verificação dos volumes, foi necessário dar um direcionamento, sugeridno que eles poderiam verificar preencehndo o interior do sólido menor e, em seguida, transferir o conteúdo para o sólido maior, notando assim a razão entre os volumes das figuras.

Nos dois grupos esta verificação foi feita com areia, para o grupo remoto foi passado no final do encontro anterior uma lista com os materiais que seriam utlizados nesta ativdade e para o grupo presencial, foi disponibilizado um recipiente com areia, para que os estudantes pudessem efetuar a verificação. Os estudantes verificaram e concluíram que o volume do sólido maior era 8 vezes maior que o outro sólido, considerando uma pequena margem de erro, devido à falta de precisão na confecção dos sólidos.

Atividade 7. Calcule o volume do paralelepípedo maior e verifique se a relação encontrada está correta.

Esta atividade foi desenvolvida juntamente com a verificação. Os esudantes calcularam e ao comparar os volumes encontrados concluíram que o resultado visto com o preenchimento dos sólidos foi válido.

Atividade 8. Com base no resultado anterior, responda o que acontece com o volume de um paralelepípedo quando dobramos o valor do comprimento das arestas. E quando triplicamos o valor do comprimento?

Para responder esta atividade, os estudantes não tiveram problemas para apontar o que aconcete quando dobra o valor do comprimento das arestas e optaram por não construir outro sólido com razão de semelhança $r = 3$. Na opnião da maioria, a construção foi muito complicada. Daí, buscando um método mais prático de verificar a relação, eles desenharam o sólido, calcularam os volumes e verificarm por meio da razão.

Após o cumprimento de todas as atividades da oficina, os estudantes do grupo remoto tiveram um momento de apresentação, onde alguns estudantes se dispuzeram a apresentar os sólidos que eles construíram, mostrando a relação entre os volumes para cada caso. Devido à dinâmica da aula presencial, na qual os estudantes puderam ver a construção do outro no momento da realização da oficina, este momento de apresentação não foi necessário.

Por fim, para finalizar a sequência didática, foi apresentada aos estudantes uma generalização, fazendo uma transposição didática dos Teoremas 1.21 e 1.42, tomando como referência as formas estudadas na sequência didática e mostrando que as relações entre as áreas e entre os volumes que foram encontradas na realização da oficina são válidas para quaisquer figuras que possuam área ou volume.

3.3 Resultado do pós teste

Após a finalização das seuquências didáticas foi aplicado, no último encontro, um questionário pós teste para os grupos presencial e remoto, a fim de verificar quais habilidades foram desenvolvidas com a aplicação das sequências de atividades propostas. Para o grupo remoto, assim como o pré teste, este questionário foi enviado no formato de formulário online.

Nesta seção será apresentado o resultado do pós teste, além disso, será realizada uma comparação destes dados com os dados do resultado do pré teste. Vale lembrar que ambos os questionários foram compostos por questões com o mesmo objetivo e para tornar esta comparação mais direta, tomaremos os resultados de cada questão do pós teste e faremos uma comparação com a questão do pré teste que possui o mesmo objetivo.

Além disso, para verificar se os objetivos de cada questão foi alcançado, classificaremos as questões do pós teste de acordo com o parâmetro apresentado na tabela a seguir. Assim teremos uma resposta direta quanto a viabilidade da utilização das sequências didáticas.

Tabela 2 – Parâmetro

PORCENTAGEM DE ACERTOS ($x\%$)	NÍVEL DE ALCANCE DO OBJETIVO
$0\% \leq x < 50\%$	Ruim
$50\% \leq x < 70\%$	Regular
$70\% \leq x \leq 85\%$	Bom
$85\% \leq x < 100\%$	Ótimo

Fonte: Autoria própria.

A seguir estão apresentadas as questões do pós teste, seguidas de seus resultados e suas respectivas análises e comparações.

Questão 1. Marque qual afirmação a seguir está corretamente ligada ao conceito de semelhança de figuras.

a) Duas figuras são semelhantes se, e somente se, possuem mesma forma e tamanho.

b) Duas figuras são semelhantes se uma pode ser vista como ampliação ou redução da outra sem alterar suas proporções.

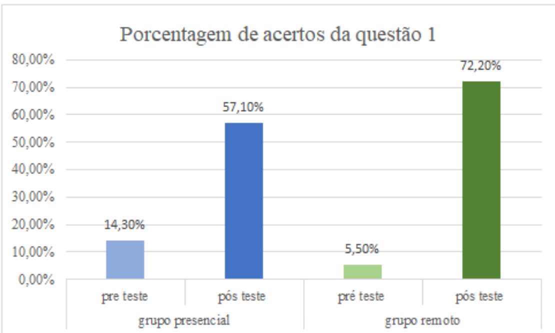
c) Duas figuras são semelhantes, se e somente se as razões entre os lados são iguais.

d) Duas figuras são semelhantes se e somente se os ângulos formados pelos lados correspondentes são congruentes.

No grupo presencial $57,1\%$ das respostas foram corretas, atingindo um nível de alcance regular, enquanto no grupo remoto a porcentagem de acerto foi de $72,2\%$, atingindo um nível de alcance bom. Embora as porcentagens de acerto sejam maiores que 50%, acreditamos que porcentagem de acertos não atingiu um nível de alcance do objetivo melhor por causa das atividades desenvolvidas durante as sequências que não focaram em conceituar precisamente a semelhança de figuras.

Por outro lado, o gráfico a seguir, mostra que ainda assim, houve um considerável aumento nas porcentagens de acertos em ambos os grupos, quando relacionados à do pré teste que possui o mesmo objetivo.

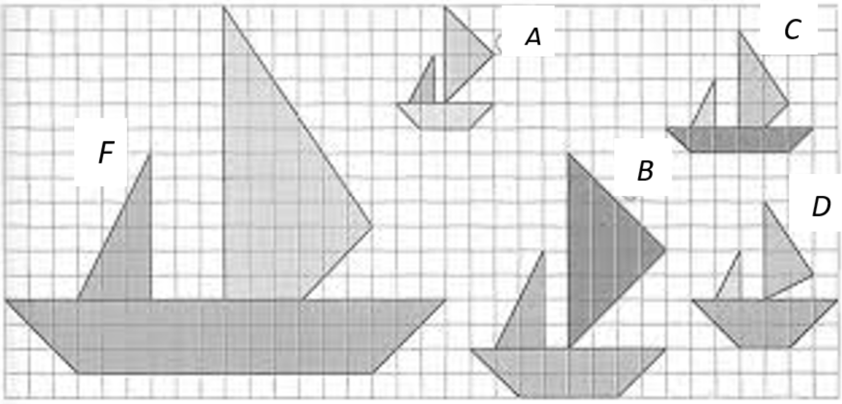
Figura 42 – Comparação da questão 1: pré teste x pós teste



Fonte: Autoria própria.

Compreendemos então que na questão 1 o grupo presencial atingiu um nível regular e o grupo remoto atingiu um nível bom, associamos este melhor desempenho do grupo remoto ao uso dos recursos tecnológicos que nos permitiu ao logo das atividades mostrar na prática uma figura sendo ampliada e reduzida.

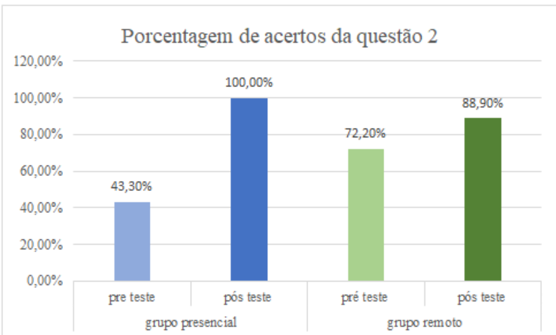
Questão 2. Qual das figuras a seguir é semelhante à figura F?



a) Figura A
b) Figura B
c) Figura C
d) Figura D

As porcentagens de acertos dos grupos presencial e remoto nesta questão foram respectivamente 100% e $88,9\%$. Estes dados nos mostra que os dois grupos atingiram um nível de alcance do objeto ótimo, atingindo a totalidade no grupo presencial. No entanto, vale lembrar que já no pré teste, a quantidade de acertos foi significativa, conforme mostra o gráfico a seguir.

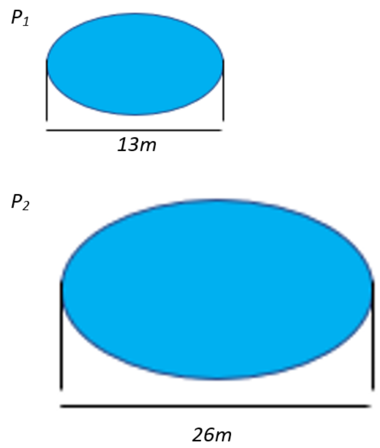
Figura 43 – Comparação da questão 2: pré teste x pós teste



Fonte: Autoria própria.

Notamos aqui que nos dois grupos o desenvolvimento das atividades pôde desenvolver nos estudantes as habilidades necessárias para alcançar o objetivo desta questão.

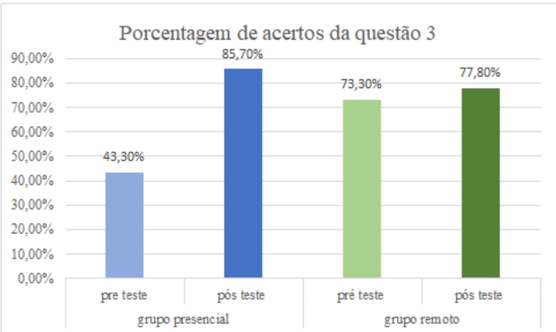
Questão 3. . Para cobrir uma piscina com as dimensões da piscina P_1, Jonas gastou exatamente $40m^2$ de lona plástica. Desejando cobrir outra piscina semelhante a P_1 e com as dimensões da figura P_2, quantos m^2 de lona plástica ele deverá comprar?



Diferentemente da questão do pré teste que possui o mesmo objetivo, no pós teste optamos por utilizar uma questão contextualizada, na qual a área da figura desejada não pode ser encontrada sem a aplicação da relação existente entre as áreas das figuras e a razão de semelhança. Esta estratégia foi utilzada visando verificar se os estudantes seriam capazes de utilizar esta relação em quaisquer que fossem as figuras planas semelhantes.

Mesmo restringindo os meios para encontrar a solução do problemas, as porcentagens de acertos nos grupos presencial e remoto foram respectivamente iguais a $85,7\%$ e $77,8\%$. Comprovando que com a aplicação da sequência de atividades foi possível atingir o objetivo esperado no grupo presencial, porém o grupo remoto atingiu um nível de alcance bom, conforme mostra o gráfico a seguir.

Figura 44 – Comparação da questão 3: pré teste x pós teste

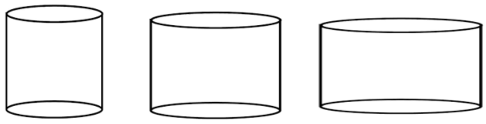


Fonte: Autoria própria.

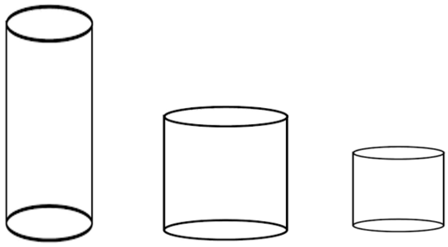
Esta diferença pode ser atribuída ao obstáculo que surgiu durante a realização da oficina, visto que alguns estudantes tiveram dificuldade em resolver o problema referente a área de figuras semelhantes por falta de recursos para utilizar a malha quadriculada.

Questão 4. Marque a alternativa que apresenta três sólidos semelhantes.

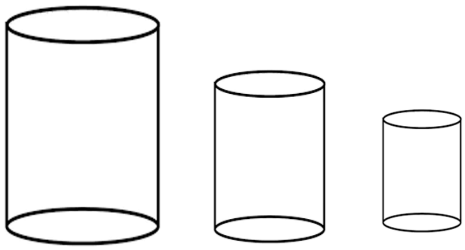
a) Alternativa A



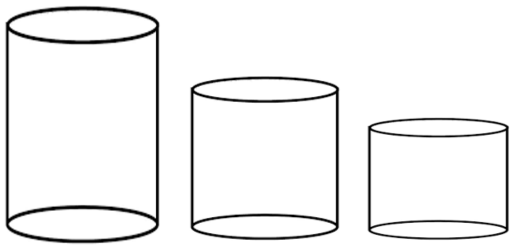
b) Alternativa B



c) Alternativa C

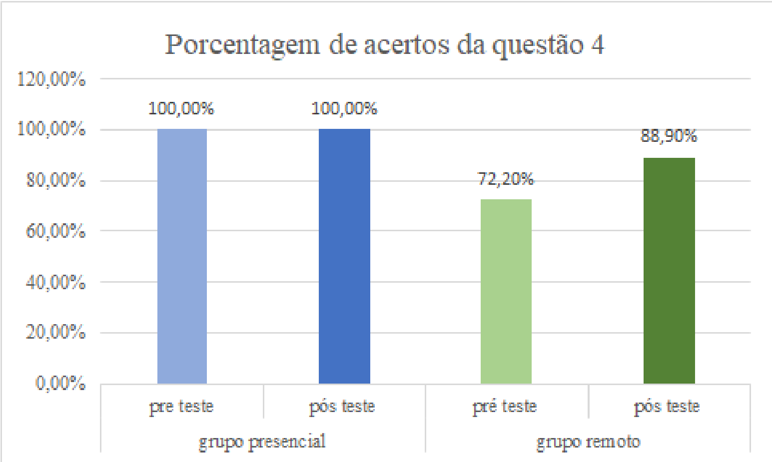


d) Alternativa D



As porcentagens de acerto para desta questão nos grupos presencial e remoto foram respectivamente iguais a 100% e 88, 9%, mostrando assim que o objetivo para esta questão foi alcançado em ambos os grupos. Entretanto, as porcentagens de acertos desta questão no pré teste também foram altas em ambos os grupos, com o grupo presencial atingindo 100% já no pré teste, conforme mostra o gráfico a seguir.

Figura 45 – Comparação da questão 4: pré teste x pós teste



Fonte: Autoria própria.

Por outro lado, é possível notar que no grupo remoto houve uma melhora significativa, atingindo no pós teste uma porcentagem considerada ótima.

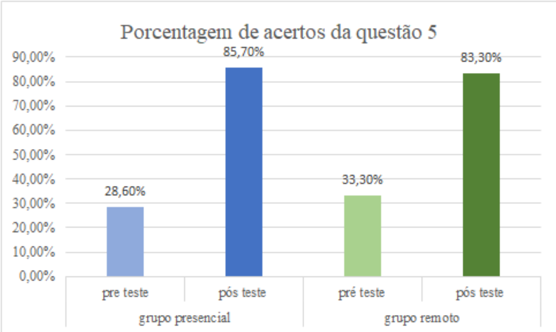
Questão 5. Uma empresa que fabrica café solúvel fornece seus produtos em potes que possuem formas dos sólidos P_1 e P_2 semelhantes por uma determinada razão de semelhança r. Como ilustra a figura a seguir:

Se o pote P_1 possui $250g$ de capacidade, qual a capacidade do pote P_2?

Assim como na questão 3, nesta questão também optamos por utilizar uma questão contextualizada, o que difere da questão do pré teste que possui o mesmo objetivo. Aqui utilizamos sólidos semelhantes diferentes dos sólidos vistos na educação básica, evitando que o estudante elabore uma solução com a aplicação direta na fórmula para obter o volume sem a aplicação da relação existente entre os volumes dos sólidos e a razão de semelhança. Esta estratégia foi utilizada visando verificar se os estudantes seriam capazes de utilizar esta relação em quaisquer que sejam os sólidos semelhantes.

Apesar da restrição dos meios para encontrar a solução, as porcentagens de acertos no grupos presencial foi de $85,7\%$ e no grupo remoto foi de $83,3\%$. Vale lembrar que para esta questão as porcentagens de acertos não foram altas no pré teste, como pode ser visto no gráfico a seguir.

Figura 46 – Comparação da questão 5: pré teste x pós teste



Fonte: Autoria própria.

Notamos então que as porcentagens de acertos de ambos os grupos aumentou consideravelmente após as aplicações das sequências didáticas, o que comprova que com a aplicação da sequência de atividades foi possível desenvolver as habiilidades esperadas em grande parte da turma, atingindo um nível de alcance do objetivo ótimo nos dois grupos.

Na próxima seção apresentaremos uma análise geral da aplicações das sequências didáticas, apontando as considerações finais da pesquisa.

3.4 Considerações finais

O presente trabalho se propôs a verificar quais as relações existentes entre as áreas e entre os volumes de duas figuras semelhantes e elaborar uma forma de apresentar estas relações para estudantes do ensino médio desenvolvendo as habilidades exigidas na BNCC. Buscando atingir o objetivo desenvolvemos uma revisão bibliográfica, encontrando as relações desejadas e em seguida elaboramos duas sequências didáticas para a aplicação em turmas do terceiro ano de ensino médio.

É importante lembrar que esta pesquisa foi desenvolvida durante o biênio 2020-2021 e neste período o ensino público em Pernambuco, estado onde desenvolvemos a pesquisa, aconteceu de forma híbrida, combinando o ensino presencial e remoto e por este motivo, nos motivamos a desenvolver esta pesquisa pensando nestes dois formatos de ensino e isto nos levou a desenvolver uma sequência didática para ser aplicada de forma presencial e outra para ser aplicada de forma remota.

Após as devidas aplicações e análises foi constatado que ambas as sequências puderam atingir os objetivos propostos, desenvolvendo nos estudantes as habilidades esperadas e podendo ser consideradas, com base nestas aplicações, como abordagens alternativas para o ensino de áreas e volumes de figuras semelhantes. No entanto, vale ressaltar que devido aos protocolos de distanciamento social necessários para o enfretamento do momento de pandemia que ocorreu neste período, a quantidade de estudantes participando da pesquisa no grupo presencial foi reduzida, contendo apenas 7 estudantes neste grupo.

Portanto, embora os resultados desta pesquisa tenham apresentado dados bastantes satisfatórios, mostrando uma significativa assimilação dos conceitos estudados e atingindo os objetivos para ambos os grupos, a aplicação destas mesmas atividades em turmas com uma quantidade demasiadamente maior de estudantes pode não apresentar os mesmos resultados, visto que a dinâmica da sala mudará consideravelmente. Por outro lado, ao optar por utilizar um destas ou as duas sequências propostas, o professor estará ciente de que esta foi uma experiência exitosa.

Diante disso, nos encontramos frente a novos questionamentos, tais como: *As atividades propostas nas sequências são capazes de desenvoler as mesmas habilidades nos estudantes se trabalhadas com turmas maiores? Visto que o cálculo de área e volume sólidos já está presente no 2ºano do ensino médio, estas propostas podem ser aplicadas com este grupo?*

Estes questionamentos serão respondidos posteriormente em outros estudos que serão desenvolvidos pelo pesquisador como relatos de experiências de sua prática docente.

Referências

BIANCHINI, E. *Matemática Bianchini 9º ano*. São Paulo: Moderna, 2015.

BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: Ministério da educação, 2018.

GIL, A. C. *Como Elaborar Projetos de Pesquisa*. São Paulo: Editora Atla S.A., 2002.

LIMA, E. L. *Medida e Forma em Geometria*. Rio de Janeiro: Tipografia Matemática, 1991.

LIMA, E. L. et al. *A Matemáica do Ensino Médio*. Rio de Janeiro: SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA, 1998.

LIMA, E. L. et al. *Curso de análise; v.1*. Rio de Janeiro: IMPA, 2009.

STEWART, J. *Cálculo, volume 1*. São Paulo: Cengage Learning, 2013.

ZABALA, A.; ARNAU, L. *Como aprender e ensinar competências*. Porto Alegre: ARTMED EDITORA S.A., 2010.

Anexos

ANEXO A – Pré teste

Questão 1. Aponte qual das afirmações a seguir, está corretamente ligada ao conceito de semelhança de figuras.

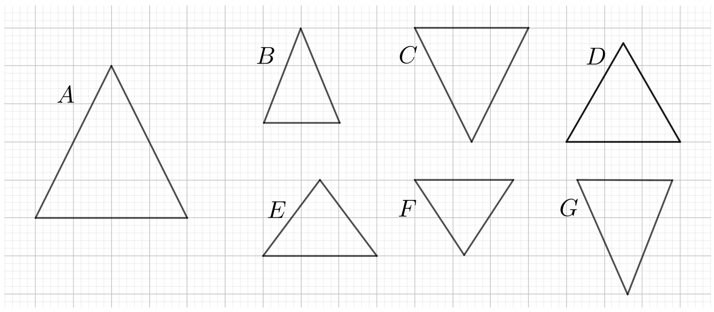
a) Duas figuras são semelhantes se, e somente se, são iguais.

b) Duas figuras são semelhantes, se e somente se os lados correspondentes são proporcionais.

c) Duas figuras são semelhantes se uma pode ser vista como ampliação da outra dada por uma razão r.

d) Duas figuras são semelhantes se os ângulos formados pelos lados são congruentes.

Questão 2. Qual das figuras a seguir é semelhante à figura A?



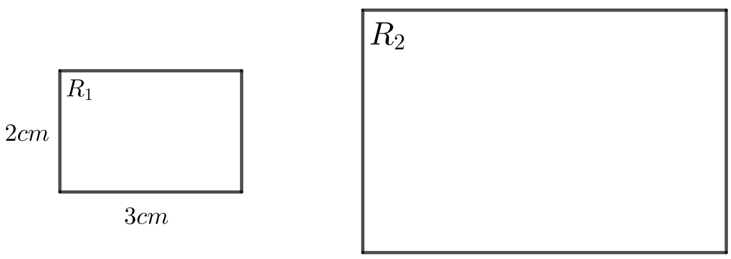
I) Figura B

II Figura C

III Figura D

IV Figura E

Questão 3. A figura R_2 é semelhante a figura R_1 por razão de semelhança $r = 2$.



Com isso podemos afirmar que a área de R_2 é igual a:

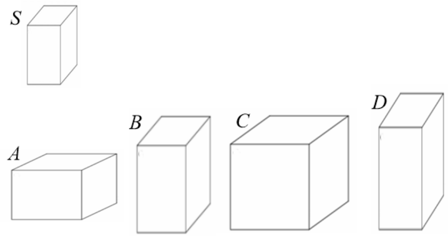
a) $8m^2$

b) $12m^2$

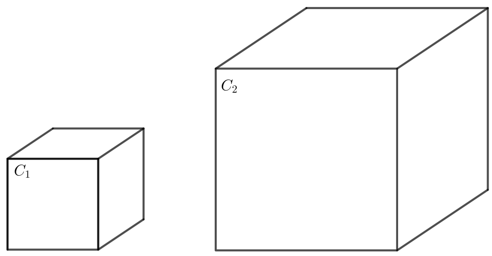
c) $18m^2$

d) $24m^2$

Questão 4. Qual dos sólidos geométricos a seguir é semelhante ao sólido S?



Questão 5. A seguir temos dois cubos C_1 e C_2. A aresta do cubo maior possui o dobro da medida da aresta do cubo menor e o volume do cubo menor é igual a $1m^3$.



Podemos afirmar que o volume do cubo maior é igual a:

a) $2m^3$

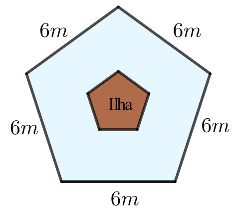
b) $4m^3$

c) $8m^3$

d) $12m^3$

ANEXO B – Problemas práticos do cotidiano

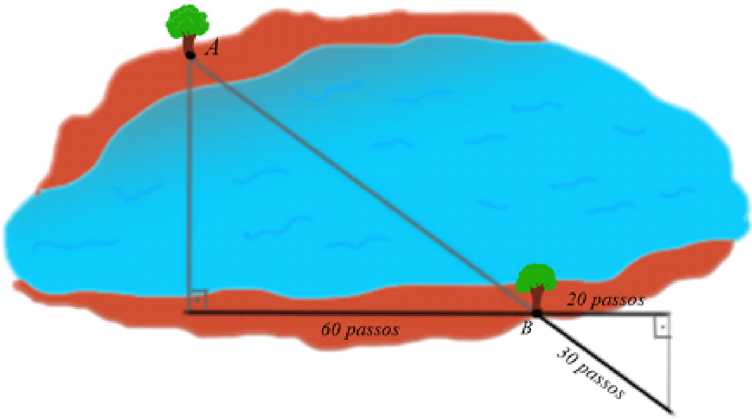
Questão 1. No interior de um lago que possui a forma de um pentágono regular deseja-se construir uma ilha semelhante a este lago com razão $\frac{1}{3}$, conforme ilustra a figura a seguir:



Qual deve ser a medida do contorno da ilha, se cada lado do lago mede 6 metros?

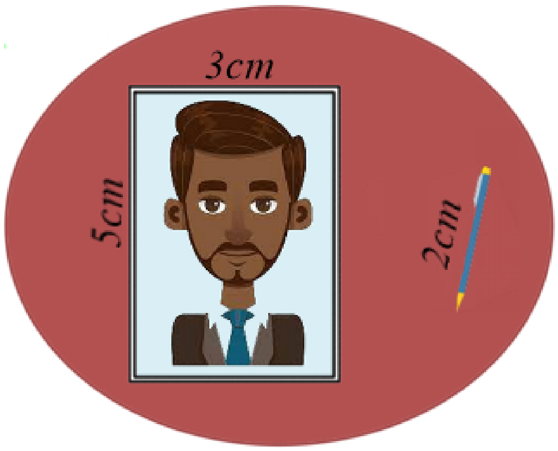
Questão 2. Em certo momento do dia, um poste projetava sobre a calçada uma sombra de 4 m. esse mesmo momento, um homem de 1,80 m de altura, que estava ao lado do poste, rojetava uma sombra de 1,20 m. Qual a altura do poste?

Questão 3. Veja na figura o procedimento usado por Marcos para descobrir a distância entre as árvores A e B próximas do lago.



Sabendo que a medida do passo de Marcos é 100 cm, determine a distância entre essas árvores, em metro.

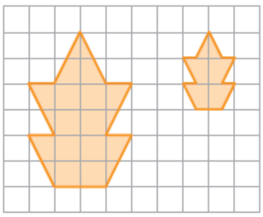
Questão 4. Para prensentear seu amigo, Jorge comprou um quadro utilizando um aplicativo de internet e para verificar as medidas do quadro comprado ele solicitou uma foto da pintura antes que ela fosse enviada. Após revelar a foto recebida, ele percebeu que ao lado do quadro havia uma caneta e então ele efetuou algumas medições e anotou, conforme ilustra a figura a seguir



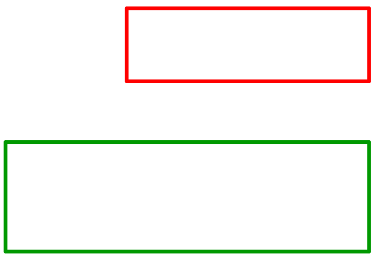
Sabendo que uma caneta real possui 14cm de comprimento, qual o tamanho real do quadro comprado por Jorge?

ANEXO C – Lista de exercícios envolvendo semelhança de figuras.

Exercício 1. Qual é a razão de semelhança entre a figura reduzida (à direita) e a figura original (à esquerda) na ilustração abaixo?



Exercício 2. Com uma régua, meça a base e a altura dos retângulos a seguir e, com o auxílio de um transferidor, meça os ângulos de ambos.

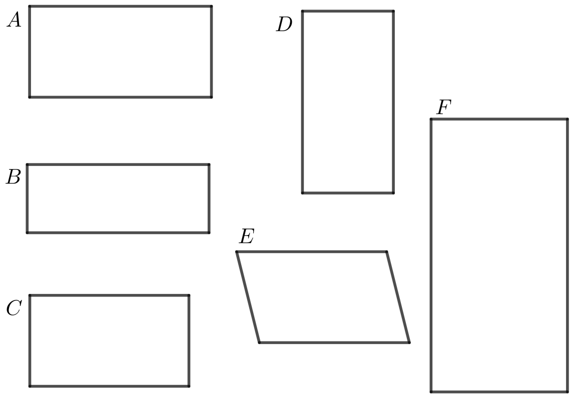


a) Qual é a razão entre a medida da base do retângulo vermelho e a medida da base do retângulo verde?

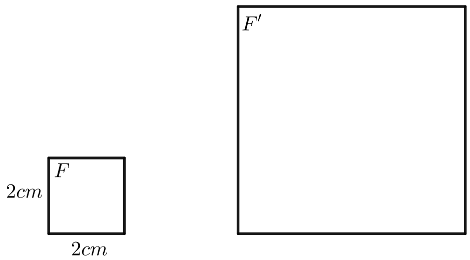
b) Qual é a razão entre a medida da altura do retângulo vermelho e a medida da altura do retângulo verde?

c) Esses retângulos são semelhantes? Por quê?

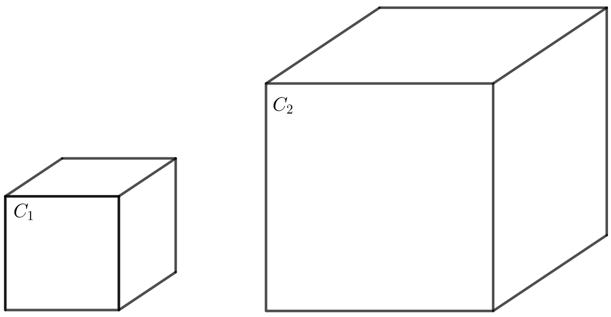
Exercício 3. Verifique, utilizando régua transferidor, qual das figuras a seguir é semelhante ao retângulo A.



Exercício 4. As figuras F e F' a seguir são semelhantes com razão de semelhança $r = 3$. Encontre a o valor da área de F'



Exercício 5. Sabendo que dois cubos quaisquer são semelhantes e que a aresta do cubo C_2 tem o dobro da medida da aresta do cubo C_1, determine o volume de C_2.

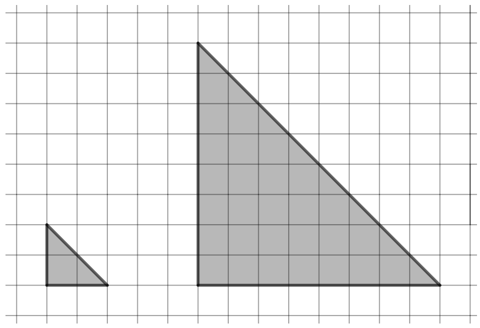


ANEXO D – Proposta da oficina.

Atividade 1. Construa na malha quadriculada um triângulo retângulo com base medindo 3 e altura 2, em seguida construa, ao lado deste, um retângulo semelhante com razão de semelhança $r = 2$ e encontre o valor das áreas das duas figuras.

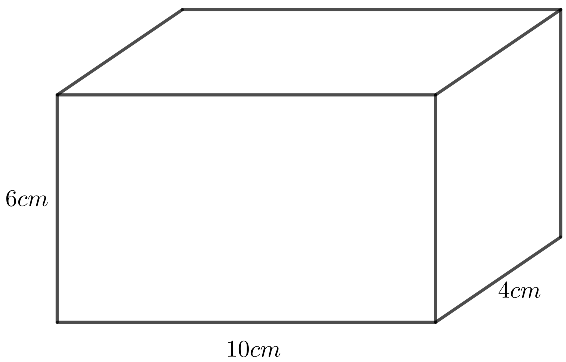
Atividade 2. Utilize a malha quadriculada para analisar o que acontece com a área de um quadrado se dobrarmos o valor dos seus lados. E quando triplicamos o valor do lado?

Atividade 3. Os triângulos a seguir são semelhantes com razão de semelhança $r = 4$. Qual a relação existente entre as áreas dos triângulos?



Atividade 4. Com base nos resultados anteriores, responda o que acontece com a área de um polígono qualquer quando dobramos o comprimento dos lados.

Atividade 5. Utilizando papelão e fita adesiva, construa um paralelepípedo com as dimensões apresentadas na figura abaixo. Em seguida calcule o seu volume.



Atividade 6. Construa um paralelepípedo semelhante ao paralelepípedo construído anteriormente por razão de semelhança $r = 2$ e verifique a relação entre os volumes

Atividade 7. Calcule o volume do paralelepípedo maior e verifique se a relação encontrada está correta.

Atividade 8. Com base no resultado anterior, responda o que acontece com a área de um paralelepípedo quando dobramos o valor do comprimento das arestas. E quando triplicamos o valor do comprimento?

ANEXO E – Pós teste

Questão 1. Marque qual afirmação a seguir está corretamente ligada ao conceito de semelhança de figuras.

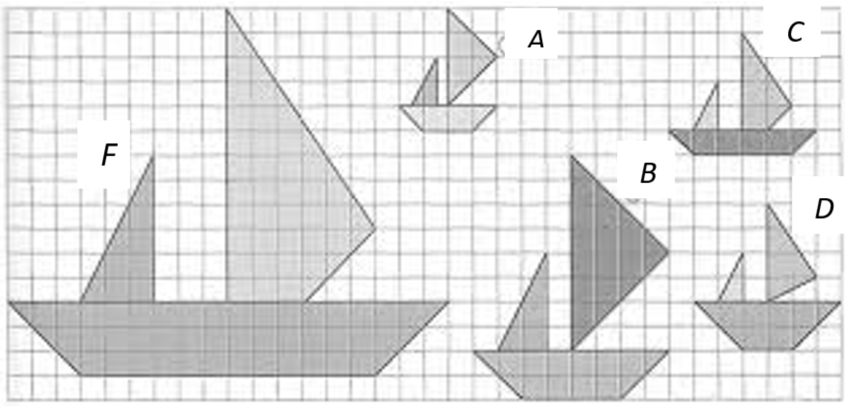
a) Duas figuras são semelhantes se e somente se possuem mesma forma e tamanho.

b) Duas figuras são semelhantes se uma pode ser vista como ampliação ou redução da outra sem alterar suas proporções.

c) Duas figuras são semelhantes, se e somente se as razões entre os lados são iguais.

d) Duas figuras são semelhantes se e somente se os ângulos formados pelos lados correspondentes são congruentes.

Questão 2. Qual das figuras a seguir é semelhante à figura F?



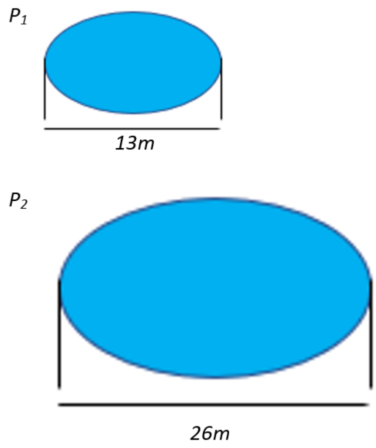
a) Figura A

b) Figura B

c) Figura C

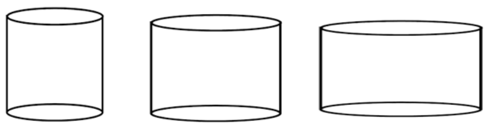
d) Figura D

Questão 3. Para cobrir uma piscina com as dimensões da piscina P1, Jonas gastou exatamente $40m^2$ de lona plástica. Desejando cobrir outra piscina semelhante a P1 e com as dimensões da figura P2, quantos m^2 de lona plástica ele deverá comprar?

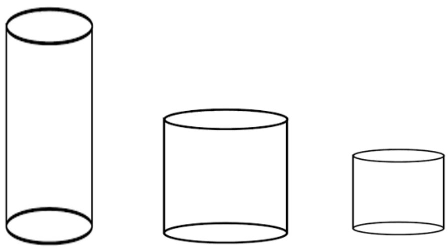


Questão 4. Marque a alternativa que apresenta três sólidos semelhantes.

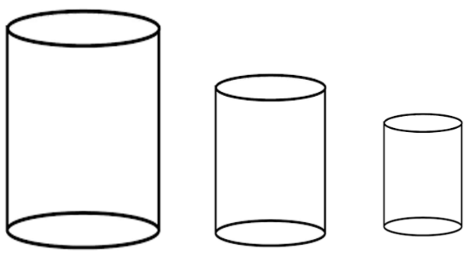
a) Alternativa A



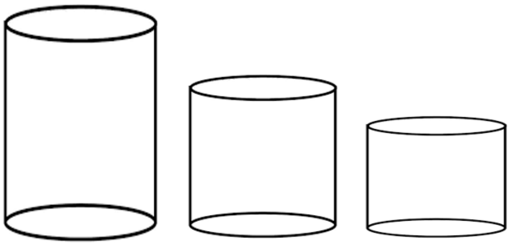
b) Alternativa B



c) Alternativa C



d) Alternativa D



Questão 5. Uma empresa que fabrica café solúvel fornece seus produtos em potes que possuem formas dos sólidos P_1 e P_2 semelhantes por uma determinada razão de semelhança r. Como ilustra a figura a seguir:

Se o pote P_1 possui $250g$ de capacidade, qual a capacidade do pote P_2?