UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Cicero José da Silva

A importância dos recursos computacionais na resolução de equações e sistemas por estudantes do ensino médio.

RECIFE
2021

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

PROFMAT

Cicero José da Silva

A importância dos recursos computacionais na resolução de equações e sistemas por estudantes do ensino médio.

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Ross Alves do Nascimento

RECIFE
2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal Rural de Pernambuco
Sistema Integrado de Bibliotecas
Gerada automaticamente, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

C568i Silva, Cicero José da Silva
A importância dos recursos computacionais na resolução de equações e sistemas por estudantes do ensino médio. / Cicero José da Silva Silva. - 2021.
90 f. : il.

Orientador: Ross Alves do Nascimento.
Inclui referências e apêndice(s).

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Programa de Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT), Recife, 2021.

1. Ensino de matemática. 2. Recursos computacionais. 3. Equações. 4. sistemas. I. Nascimento, Ross Alves do, orient. II. Título

CDD 510

CÍCERO JOSÉ DA SILVA

A importância dos recursos computacionais na resolução de equações e sistemas por estudantes do ensino médio

Trabalho apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT do Departamento de Matemática da UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Aprovado em 31/08/2021

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Ross Alves do Nascimento (Orientador)- UFRPE

Prof. PhD. Verônica Gitirana aomes Ferreira - EDUMATEC/UFPE

Proff. Dr. Elisangela Bastos de Mélo Espindola - PROFMAT/UFRPE

A todos os que lutam e contribuem para uma educação pública de qualidade, por liberdade e democracia.

Agradecimentos

A Deus, que até aqui guiou os meus passos em minhas jornadas e batalhas.
Aos meus pais, José Simão (in memorian) e Cícera Maria (in memorian) por seus esforços e dedicação para nos dar educação e instrução em meio às dificuldades e intempéries da vida.
A minha querida esposa, Claudineide Silvestre, pelo apoio incondicional, incentivo e paciência para que eu pudesse concretizar esse sonho e realizar esse projeto.
Aos meus filhos, Rayanne, Vitor, Lílian e Saimon, pelo apoio e compreensão nos momentos de ausência.
Aos meus irmãos Janduir, Valdeci, Braz, Antônio, Jailson, Odair, Odemir, Severino, Emerson e minha irmã Rosana, pelo apoio e incentivo.
Agradeço também à CAPES, pois o presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.
À Instituição UFRPE e aos professores do PROFMAT – UFRPE, especialmente aos professores da turma 2019, pela paciência e dedicação com todos os mestrandos.
Aos colegas da turma do PROFMAT 2019, pelo companheirismo e pela ajuda mútua nas dificuldades e dúvidas, com os quais pude aprender muito.
Ao amigo Bruno Ramos, companheiro do curso, de trabalhos e de muitas viagens e diálogos.
Ao amigo Neiviton Paz, pelo apoio e disposição em todas as dúvidas e dificuldades.
Ao professor e meu orientador, Dr. Ross Alves do Nascimento, pelos ensinamentos, apoio, paciência, dedicação e atenção, sempre disponível para tirar qualquer dúvida, pelo muito que acrescentou à minha formação, e para a elaboração do meu TCC. Aos amigos João Tenório e Duguinha, ex-prefeito e prefeito de São Joaquim do Monte por disponibilizarem parte de minha carga horária para este curso.
Á gestora Maria Sandra e aos professores e estudantes da EREFEM Sofia Feijó Sampaio, que gentilmente contribuíram com nossa pesquisa.

"A sabedoria exalta seus filhos e cuida dos que a procuram."
Eclesiástico, 4, 11.

Resumo

Este trabalho tem como objetivo investigar a importância do uso dos recursos computacionais no ensino de equações e sistemas com estudantes do nível médio. Nas últimas décadas o ensino da matemática nas escolas passou a incrementar em sua prática didática o uso desses recursos em diversas situações de ensino, sendo essa uma necessidade pelo hábito de conviver no dia a dia com os novos incrementos da cultura social pelo modo prático deste tipo de utensilio tecnológico. Sendo assim, as metodologias de ensino vêm passando por reformulações em sua aplicação, no sentido de acompanhar a evolução social. Percebe-se que o ensino tradicional apoiado no uso do papel e lápis como instrumentos do manuseio prático vai ficando para trás com a inovação tecnológica, que suprime dificuldades de aprendizagens na educação básica amparada em novos métodos de ensino da matemática a ser ensinada e aprendida. Portanto, contribuir com as discussões do uso de tecnologia no ensino de matemática é o foco desse estudo, especificamente no ensino e resolução de equações e sistemas lineares. Trabalhamos com o Geogebra para investigar a importância deste recurso como instrumento facilitador do processo de ensino e aprendizagem, que possibilita aos estudantes um novo modelo de aprendizagem significativa e investigativa mediante o uso dos recursos computacionais, que propicie ao estudante observar um mesmo objeto matemático por múltiplas representações e registros. Trabalhamos um estudo de caso com 6 (seis) estudantes do ensino médio de uma escola Rural do município de Catende, que desenvolveram atividades via sequência de atividades utilizando o Geogebra como recurso para solucionar questões relativas a equações e sistemas. O estudo apontou que é fundamental o uso do recurso tecnológico para o entendimento de determinados saberes que o lápis e papel não proporcionam, que a sequência didática é um roteiro imprescindível para encaminhar atividades no computador e que mesmo sendo um hábito cultural hoje fora da escola, ainda se percebe que a prática do recurso computacional parece ausente da metodologia do professor e da sala de aula.

Palavras-chave: : Ensino de Matemática; Recursos Computacionais; Equações; Sistemas.

Abstract

This study aims to investigate the importance of using computational resources in the teaching of equations and systems with high school students. In the last decades the math teaching at schools became to including on its didactic practice the use of those computational resources in differents teaching situations, becoming this as a necessity due the habit of living daily with new increments of the social culture by the easily way of this kind of technological utensils. Then, the methodologies have been reinstations in these applications, following social evolution. The era of traditional teaching, when using paper and pencil was the motor of handling in practice method is lagging behind. But the difficulties of abstraction in basic education still persist and suggest the adoption of new records for mathematics to be taught and learned. Therefore, this study's focus is to contribute to discussions about the use of technologies in math teaching, specifically in equation and systems teaching and resolving. We work with Geogebra to investigate the importance of this resource as a facilitator instrument of the learning and teaching process, which enables to the students a new model of significative and investigative learning through the use of computational resources, which propitiates to the student to observe the same math project by multiples representation and register. We work in a case study with 6 high school students from a Rural school in Catende's city, that developed activities by didactic sequence utilizing Geogebra as a resource to resolve questions about equations and systems. This study pointed that it is fundamental to use technological resources to the understanding of certain knows that paper and pencil could not provide, that didactic sequence is a essential itinerary to forward activities on computer and that even it being a cultural habit out of the schools, it may be seen that the practice of computational resources is still absent in teachers and classroom methodology.

Keywords:Teaching Mathematics; Computational Resources; Equations; Systems.

Lista de ilustrações

Sumário

Introdução

No ensino tradicional de matemática é comum verificarmos a dificuldade de muitos estudantes em compreender elementos e termos da linguagem matemática que vão desde o significado na representação do número, a compreensão de representações geométricas, a nomenclatura específica para equações e funções, entre outros aspectos. Conhecimentos que são a base para se ampliar os conceitos mais elaborados como a compreensão de um sistema de equações ou a resolução de problemas complexos.

Entender o traçado e a visualização simulada de gráficos e equações é imprescindível para entender as bases matemáticas. No modelo tradicional de ensino se observa ainda professores trabalhando as tarefas da geometria de forma manual, o que torna ainda mais complexa a compreensão de certas aprendizagens, pois muitos alunos não conseguem entender a dinâmica gerada pela construção indicativa dos saberes visualizados nas representações e apresentados por linguagem matemática.

Portanto, é um fato evidente que se deve tomar iniciativas para mudança desse cenário, através de uma boa formação dos professores e incrementação do uso de recursos computacionais (aplicativos e softwares) que contribuem para a construção de imagens, efeitos e simulações de dados matemáticos que são necessários na compreensão do cálculo ou artifícios que facilitem a compreensão de boa ajuda para minimizar alguma dificuldade de compreensão. Nesse modelo de compreensão, podemos citar um software que assessorou muitos professores no ensino de geometria, o LOGO, desenvolvido por Seymour Papert, pesquisador matemático e criador do programa. A proposta de uso dessa linguagem e software traz o envolvimento do estudante com o desenrolar do conceito de formas geométricas, validações e programação.

O contexto usado nesse recurso evidenciou a abordagem Construcionista (PAPERT, 1994), em que provocava o usuário a interagir com o computador na execução de saberes da geometria. Hoje, no ensino básico é bastante discutido a atividade matemática com uso de software em muitas pesquisas (PAPERT, 1994); (PAPERT, 1985), (VALENTE, 1993), (NASCIMENTO, 2007). Nessa compreensão, o nosso trabalho é um estudo do ProfMat-UFRPE que buscou investigar o uso do Geogebra com seis alunos do ensino básico de uma escola do distrito de Laje Grande, município de Catende, localizado na zona da Mata Sul do estado de Pernambuco, trabalhando de forma virtual, usando o software Geogebra online e acompanhado por um pesquisador para discutir dúvidas que porventura faça parte da discussão e construção dos dados relativos a identificar que habilidades matemáticas e computacionais os estudantes necessitam para demonstrar o conhecimento que estão adquirindo.

Nessa perspectiva traçamos alguns objetivos para identificar o que de fato contribui nesse modelo de abordagem, que pode ser observado em contrapartida ao modelo tradicional usando lápis e papel.

No meio acadêmico o Geogebra vem passando por ricas transformações a partir dos seus recursos e possibilidades utilizadas no ensino de matemática especificamente na análise e compreensão de equações e de sistemas lineares.

Reconhecemos a partir da bibliografia apresentada na literatura da educação matemática e nos domínios da matemática pura em que se discute a importância do Geogebra em simulações e representações matemáticas que o software tem o poder de divulgar, simultaneamente, vários saberes e conceitos por meio de representação que interagem entre si (forma de gráfico, forma algébrica, modelo de simulação e tabulação), essa proposta desde já é um ponto importante para aprendizagem para esse tópico do conhecimento matemático no que diz respeito ao ensino.

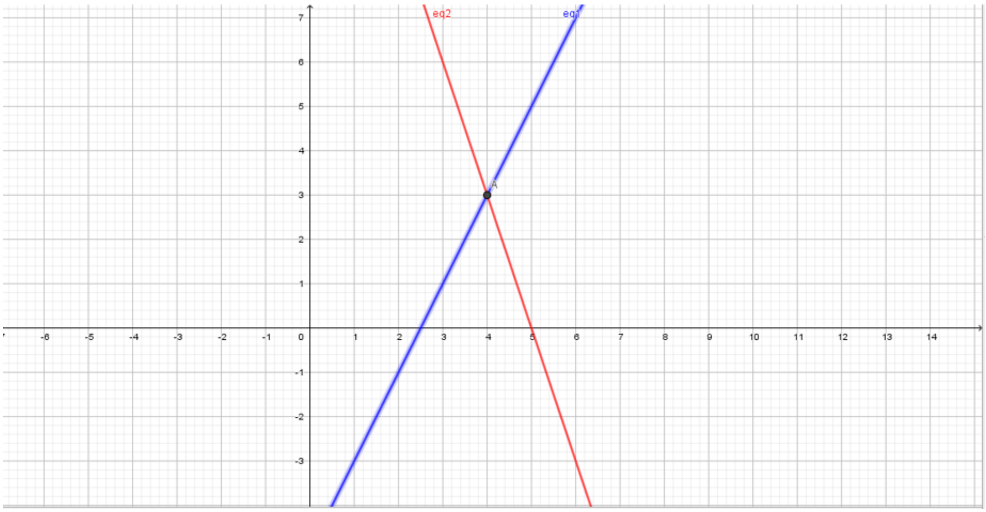
O software Geogebra versão 5.0 tem servido ao estudante como uma ferramenta que condiciona algumas compreensões que o ensino tradicional em que se faz uso do quadro branco, lápis e papel não é facilitado no seu entender para os alunos que em algumas ações necessitam realizar e interpretar construções geométricas. O software pauta-se como ferramenta na apresentação da teoria matemática ao aluno, como recurso posterior para apresentação de exemplos e aplicações (exercícios resolvidos) e depois proposição de exercícios similares, em que o aluno tenha apenas que repetir, apenas fazer algumas adaptações simples dos procedimentos apresentados. No modo tradicional há ainda a concepção de que o conhecimento matemático se aprende por repetição apenas. Portanto, é preciso fazer uso do software sem seguir o modo tradicional.

Na Figura 1, logo abaixo temos a representação geométrica do sistema

$$\begin{cases} 2x - y &= 5 \\ 3x + y &= 15 \end{cases}$$

E a indicação do ponto de intersecção entre as retas correspondentes a cada equação do sistema, cujas coordenadas cartesianas correspondem à solução do sistema.

Figura 1 – Representação da solução gráfica de um sistema.



Fonte: Autoria própria.

Nesse sentido, alguns pesquisadores levantam a questão de que o uso de um software facilita a compreensão e validação de modelos representados para designar situações-problema, (BASSANEZI, 2002; BIEMBENGUT & HEIN, 2003; BARBOSA, 2003; NASCIMENTO, 2007). Essa informação já é, desde já, um ponto de excelência com importância no ensino aprendizagem da matemática, portanto, apresentamos nossa questão-problema da pesquisa, como sendo: **Quais as contribuições facilitadas pelo software Geogebra para entender saberes matemáticos relativos à representação gráfica de equações e sistemas?** Buscamos entender se a simulação matemática apresenta elementos não percebidos em contrapartida ao modelo tradicional usando lápis e papel. Com base nessa preocupação apresentamos os objetivos do nosso estudo.

OBJETIVO GERAL

Discutir as aprendizagens divulgadas por estudantes do ensino Médio ao utilizar o software Geogebra como ferramenta de aprendizagem para resolução de equações e sistemas.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Discutir as contribuições proporcionadas pela utilização do software Geogebra para que os alunos consigam transitar mais facilmente entre os diferentes meios de registros e representações.;

- Experimentar a resolução de problemas envolvendo equações e sistemas com recurso do Geogebra para analisar o comportamento dos estudantes;

- Desenvolver habilidades e comportamentos previstos na BNCC, quanto a resolução de problemas que envolvam equações do 2º grau e sistemas de equações lineares simultâneas, com duas equações e duas incógnitas.

1 Fundamentação Teórica

Para o desenvolvimento do nosso estudo, recorremos a uma fundamentação que consideramos ser essencial ao trabalho e que estão indicados segundo os tópicos a seguir.

1.1 Como visualizamos os saberes matemáticos relativos a equações e sistemas na História da Matemática.

Conhecer como está estruturado o desenvolvimento dos tópicos matemáticos voltados à compreensão de equações e sistemas é importante para nossa pesquisa, por trazer um resgate das formas de abordagem que podem ser exploradas em sala de aula. A história da matemática, hoje bastante utilizada como recurso metodológico, passou a ser apresentada na sala de aula, não como informação superficial ou como curiosidade, mas no sentido de cumprir o papel informativo da própria matemática, trazendo sua elaboração e construção como produção da humanidade.

(PITOMBEIRA; ROQUE, 2012, p.8) destacam que a matemática pode ser ensinada de uma maneira mais concreta, de modo que seus conceitos sejam tratados a partir de um contexto mais próximo do cotidiano do aluno, processo esse que coloca o saber próximo dos conceitos com que se relacionam e como podem ser trabalhados na rede de relações e de significados – ainda que estas relações pertençam à própria matemática.

Um exemplo importante é o observado quando ao ensinar a relação das equações envolvidas em um sistema linear ou equações quadráticas, podemos associar a uma viagem no tempo estudando os modos como os povos mesopotâmicos, egípcios e gregos resolviam equações, dessa forma trazemos para nossa sala de aula problemas do cotidiano, como os mostrados no material histórico (tabletes de argila), produzidos pelos babilônios. Ou ainda, como os documentos históricos a partir dos papiros de Rhind e de Moscou, apresentando aos alunos, mesmo antes de mostrar as técnicas e métodos de resolução da atualidade.

A compreensão por parte dos alunos de que a matemática da época era muito utilizada para resolver problemas práticos pelos povos antigos, problemas esses relacionados com medições de terras, distribuição de heranças, cálculo de áreas e de volumes, etc., pode funcionar como elemento motivador, fazendo com que os alunos passem a ter atitudes mais investigativas, reflexivas, e que tenham um papel mais ativo na produção do próprio conhecimento.

O surgimento de rudimentos da matemática remonta a períodos em que os seres humanos provavelmente ainda habitavam cavernas. (EVES, 2004) cita o osso de Ishango que contém diversos traços que sugerem uma contagem, material esse, com mais de 8 mil anos de idade, encontrado às margens do lago Edward, no Zaire, como um dos sinais de que já havia uma matemática rudimentar no período em que ele chama de Idade da Pedra.

Figura 2 – Osso de Ishango exposto no Real Instituto Belga de Ciências Naturais, data de aproximadamente 8000 a.C. (Eves, 2004)

Fonte: africaarteeducacao.ciar.ufg.br

Para (EVES, 2004, p.57) a evolução da história da matemática que durante séculos evoluiu de forma muito lenta, só vindo a ser impulsionada pela revolução agrícola, a qual fez surgir diversas necessidades práticas como drenagem de pântanos, irrigação e o controle de inundações em terras próximas às margens dos rios, tornando tais regiões agricultáveis. E a realização de tais projetos só era possível a partir de ousados projetos de engenharia. E foi neste contexto que para o autor a matemática surgiu como uma ciência primitiva, que atendia às necessidades práticas de uma sociedade em formação que crescia e se desenvolvia, necessitando cada vez mais da realização de cálculos em atividades diversas na agricultura, nas construções, na criação de calendários e no comércio.

(EVES, 2004) destaca que a matemática, já com uma formulação mais elaborada com ênfase na aritmética e na mensuração, tornou-se uma arte a ser ensinada e foi neste contexto que surgiram as primeiras tendências de abstração. Em suas palavras:

> "a ênfase inicial da matemática ocorreu na aritmética e na mensuração práticas. Uma arte especial começou a tomar corpo para o cultivo, aplicação e ensino dessa ciência prática. Nesse contexto, todavia, desenvolvem-se tendências no sentido da abstração e, até certo ponto, passou-se então a estudar a ciência por si mesma. Foi dessa maneira que a álgebra evolveu ao fim da aritmética e a geometria teórica originou-se da mensuração" (EVES, 2004, p.57)

Foi desta maneira que a álgebra envolveu ao fim da aritmética e a geometria teórica originou-se da mensuração. (EVES, 2004, p.57).

A região da Mesopotâmia, situada entre os rios Tigre e Eufrates, local de civilização dos Sumérios, uma antiga civilização à qual é atribuída a invenção da escrita, bem como a Civilização Babilônica que habitou a região por cerca de 1600 anos, realizaram grandes feitos. Eles deixaram um vasto registro, uma escrita chamada cuneiforme, que era registrada em tabletes de argila que foram encontrados em regiões da Mesopotâmia. Ainda segundo (EVES, 2004) alguns destes tabletes da coleção de Yale (EUA) datando de cerca de 1600 A.C. catalogam centenas de problemas não resolvidos envolvendo equações simultâneas que levam à resolução de equações biquadradas, como, por exemplo:

$$xy = 600 \quad \text{e} \quad 150(x - y) - (x + y)^2 = -1000.$$

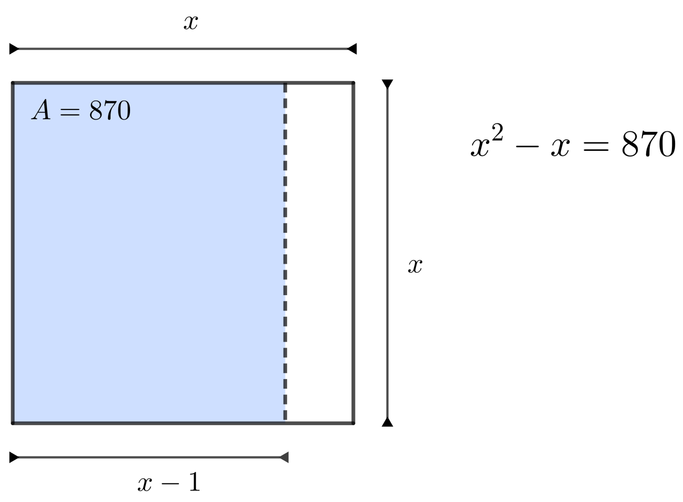
Neste contexto, de divulgação de dados históricos, surgiram diversos problemas que podem ser interpretados como equações e sistemas de equações simultâneas, sendo vários destes problemas relativos a equações quadráticas e sistemas lineares.

(BOYER, 1974) destaca que os babilônios faziam uso de tabulações como auxílio para a álgebra desenvolvida no período, por exemplo, as tabulações de $n^2 + n^3$ para valores Inteiros de n. E segundo (CHAQUIAM, 2017) eles também apresentavam a solução da equação quadrática a partir de uma flexibilidade algébrica da multiplicação de um determinado termo em ambos os membros de uma equação, além de outras estratégias algébricas.

Para ilustrar como procediam os Babilônios a respeito da resolução de equações quadráticas, (CHAQUIAM, 2017, p.52) descreve o seguinte problema:

Pede-se o lado de um quadrado, se a área menos o lado dá $14, 30$ (na base sexagesimal) e sua solução equivale a resolver a equação $x^2 - x = 870$, cujo passo a passo é descrito da seguinte forma: Tome a metade de 1, que corresponde a $0; 30$ e multiplique $0; 30$ por $0; 30$, o que resulta $0; 15$; some isto a $14, 30$, o que dá $14, 30; 15$. Isto é o quadrado de $29; 30$. Agora some $0; 30$ a $29; 30$ e o resultado é 30, o lado do quadrado, como apresentado na figura a seguir.

Figura 3 – Representação gráfica do problema.



Fonte: Autoria própria.

E tal resolução se resume à utilização da fórmula $(x - \frac{p}{2})^2 = (\frac{p}{2})^2 + q$, a qual pode ser desenvolvida a partir da equação $x^2 - px = q$, usando os conhecimentos dos dias atuais para estabelecer o valor de x.

Segundo (BOYER, 1974) os Babilônios abordavam dois tipos de problemas envolvendo equações quadráticas, onde faziam uso de transformações algébricas, em que classificavam as equações em: $x^2 + px = q$, $x^2 = px + q$ e $x^2 + q = px$. Tais técnicas de resolução eram utilizadas pelo fato de os babilônios não dominarem uma regra geral de resolução de equações quadráticas. Segundo (EVES, 2004) por volta de 2000 a.C. a aritmética babilônica já havia evoluído para uma álgebra retórica bem desenvolvida, onde resolviam equações quadráticas, seja pelo método equivalente ao da substituição na forma geral, seja pelo método de completar quadrados, como também se discutiam algumas equações cúbicas e algumas biquadradas. No entanto, para ele o método de resolução de equações não seria propriamente um método, mas um conjunto de instruções do tipo "faça assim e assim", de modo que, exceto em alguns casos, tais instruções não eram regras gerais, ou seja, não havia uma regra que pudesse ser aplicada a qualquer tipo de equação quadrática, mas sim um passo a passo de como resolver equações específicas, onde o passo a passo variava conforme o tipo de equação. (EVES, 2004) ainda acrescenta que, de certo modo, tal prática se assemelha ao que utilizamos ainda hoje no ensino de partes da matemática elementar no primeiro e segundo graus.

1.1.1 As equações e sistemas no Egito Antigo.

A maneira como os babilônios registravam a sua escrita, por meio de tabletes de argila possibilitou conhecermos muito daquela civilização, bem como da matemática por eles desenvolvida. Já no Egito Antigo, a escrita era geralmente registrada em papiro (material precursor do papel produzido a partir da fibra de uma planta de mesmo nome), que por sua constituição não tinha a durabilidade dos tabletes babilônios, sendo alguns poucos papiros conservados até os dias atuais, como é o caso do Papiro de Rhind, também conhecido como Papiro de Ahmes e o Papiro de Moscou.

Segundo (EVES, 2004) o Papiro de Moscou ou Golenishchev, de autoria desconhecida, que data de aproximadamente 1850 a. C. tem cerca de dezoito pés de comprimento por cerca de três polegadas de altura e encontra-se no Museu de Belas Artes de Moscou (Rússia), já o Papiro de Rhind, também conhecido como Papiro de Ahmes, em homenagem ao escriba que o escreveu, data de aproximadamente 1650 a. C., tem cerca de 18 pés de comprimento e cerca de treze polegadas de altura e encontra-se no Museu Britânico.

Os dois papiros se assemelham quanto aos conteúdos e juntos trazem 110 problemas, sendo a grande maioria numéricos e bastante simples, de origem prática que fazem referência a coisas do cotidiano, sendo alguns dos problemas de natureza teórica.

Segundo (EVES, 2004) muitos dos problemas fazem referência a quantidades de pão e cerveja, sobre balanceamento de rações para o gado e aves domésticas e sobre armazenamento de grãos. Para muitos desses problemas a resolução não exigia mais do que uma equação linear simples e o método empregado ficou conhecido como regra de falsa posição.

Assim, para resolver a equação $x + \dfrac{x}{7} = 24$ assume-se um valor conveniente para x, digamos, $x = 7$.
Daí $x + \dfrac{x}{7} = 8$, em vez de 24.
Como 8 deve ser multiplicado por 3 para obter 24, o valor de x é 3.7, ou seja, 21.

Ainda segundo (EVES, 2004) há um outro papiro, encontrado em Kahun e data de aproximadamente 1950 a. C. que contém o seguinte problema que envolve sistema de equações e equação quadrática: "Uma dada superfície de 100 unidades de área deve ser representada como a soma de dois quadrados cujos lados estão entre si como 1 está para $\frac{3}{4}$". Neste caso, temos $x^2 + y^2 = 100$ e $x = \frac{3y}{4}$.
A eliminação do x fornece uma equação quadrática em y, podendo o problema ser resolvido por falsa posição, tomando $y = 4$. Então $x = 3$ e $x^2 + y^2 = 25$ em vez de 100.
Por conseguinte, fazendo a correção de x e y, dobrando os valores iniciais, encontra-se $x = 6$ e $y = 8$.

A História da Matemática apresentada na literatura através dos estudos de grandes historiadores nos mostra que o estudo de sistemas de equações simultâneas, bem como de equações do 2º grau se fazia importante devido à sua aplicabilidade em diversas situações do mundo real, conhecimento já bastante comum na vida prática de civilizações antigas que mostraram o fascínio e curiosidade por eles, que atravessou vários séculos, e que somente a partir da segunda metade do século XVII chega-se a um tratamento sistematizado das teorias sobre sistemas de equações lineares, a partir dos estudos de G.W. Leibniz (1646-1716) na Alemanha e Takakazu Seki Kowa (1642-1708) no Japão, e que nos séculos seguintes surgiram diversos outros estudos dos quais se destacam os trabalhos de Colin Maclaurin (1698-1746), Gabriel Cramer (1704-1752), Etienne Bèzout (1730-1788), Carl Friedrich Gauss (1777-1855), Carls Gustav Jacob Jacobi (1804-1851), Leopold Kronecker (1832-1891), Eugène Rouché (1832-1910) e Ferdinand Georg Forbenius (1847-1917).

Quanto à resolução de equações quadráticas nota-se que esse campo recebe várias contribuições de matemáticos como Bhaskara Akaria (1114-1185), de onde se popularizou no Brasil a denominação fórmula de Bhaskara como a fórmula geral para resolver equações quadráticas, Abu Jafar Mohamed Ibn Musa Al-Khwarizmi (780-850), que se destacou, entre outras contribuições, pela técnica de completar quadrados para resolver equações quadráticas e François Viéte (1540- 1603), considerado o maior matemático do século XVI, que contribuiu para a simplificação da escrita ao utilizar o simbolismo algébrico para expressar equações lineares, quadráticas e cúbicas.

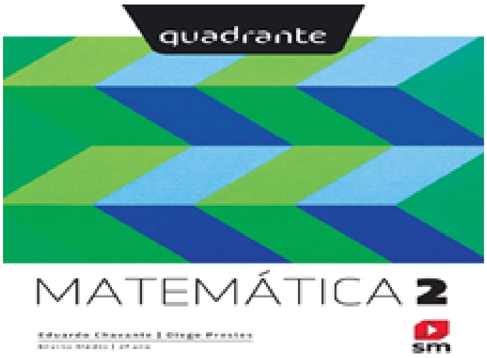
1.2 Análise de informações apresentadas em livros didáticos sobre equações e sistemas.

A resolução de sistemas passou por estratégias detalhadas, uma delas, conhecida como o método de eliminação gaussiana, conhecido por método do escalonamento, permite resolver sistemas lineares por meio de um processo que permite explicitar as soluções quando existem. Outro fato observado é que a teoria de Jacobi também é considerada uma evolução do método gaussiano, por haver semelhanças entre eles.

Para se ter um panorama de como a educação tradicional aborda o tema o qual desenvolvemos neste estudo, buscamos destaque especialmente nos métodos de Gauss e Jacobi para se discutir a resolução de sistemas lineares de três ou mais equações e três ou mais incógnitas, portanto, fizemos uma análise de quatro livros didáticos, tentando observar como é tratado esses procedimentos que geralmente são a fonte de inspiração para a atuação da grande maioria dos professores da educação básica. Relatamos a seguir nossas observações:

No Livro 1: **MATEMÁTICA – 2º ano do ensino médio, autores: Eduardo Chavante Diego Prestes – Editora Quadrante – 1ª edição, SP – 2016.**

Figura 4 – Livro didático 1 - Editora Quadrante.



Fonte: Editora Chavante - (CHAVANTE; PRESTES, 2016).

Nesse material, figura 4, a abordagem do tema Sistemas lineares a partir de um problema motivador sobre quantidades de frutas compradas em uma feira, que é equacionado para uma equação linear e a partir de tal equação se chegar a uma definição de equação linear, bem como das suas possíveis soluções. Posteriormente, após uma sequência de exercícios destaca-se o tema Sistema de equações lineares, que sob mesma estratégia de uma situação-problema busca introduzir uma definição para a noção de sistemas de equações lineares e sua possível estratégia de solução, discutindo também a classificação do sistema quanto às possibilidades de soluções.

Figura 5 – Problema motivador.

Sistemas lineares

Equação linear

Welinton comprou 2 kg de banana, 1 kg de laranja e 1 kg de maçã e pagou R$ 13,00 por essas frutas. Quantos reais Welinton pagou pelo quilograma de cada tipo de fruta?

Para responder essa pergunta, vamos inicialmente representar o preço das frutas por meio de incógnitas.

- x: preço do quilograma da banana;
- y: preço do quilograma da laranja;
- z: preço do quilograma da maçã.

O consumo regular de frutas diminui o risco de se contrair várias doenças.

Devemos determinar os valores positivos de x, y e z que satisfaçam a equação:

$$2x + y + z = 13$$

Essa é uma **equação linear** de incógnitas x, y e z.

Equações do 1º grau com uma ou mais incógnitas são chamadas de equações lineares.

Fonte: Editora Chavante - (CHAVANTE; PRESTES, 2016).

No tópico seguinte, apresenta o método gaussiano usado para a resolução, denominando-o de escalonamento e associa a resolução à classificação de um sistema escalonado. Após alguns exemplos, seguem-se procedimentos de escalonamento elencados e uma bateria de exercícios para que se resolva aplicando o escalonamento.

Já o teorema de Jacobi é citado apenas no capítulo seguinte quando vai explorar o tópico das Matrizes, da seguinte forma: (CHAVANTE; PRESTES, 2016) coloca o Teorema de Jacobi, da seguinte forma:

> Se uma matriz quadrada B de ordem n maior que ou igual a 2, for obtida de uma matriz quadrada A de mesma ordem, substituindo uma de suas linhas ou colunas pela soma desta com um múltiplo de outra linha ou outra coluna, respectivamente, então o determinante não se altera, isto é, $\det B = \det A$.(CHAVANTE; PRESTES, 2016, p.150).

E o livro didático da Editora Quadrante segue com um exemplo" de aplicação deste teorema e após um conjunto de exercícios o teorema de Jacobi é novamente citado no cálculo do determinante de matrizes quadradas, por meio de escalonamento (triangularização).

O modo como o tema é abordado não estabelece uma relação entre os dois métodos, embora seja o teorema de Jacobi um aperfeiçoamento do método gaussiano, bem como não há uma ênfase nas aplicações práticas dos sistemas, especialmente nos cálculos computacionais. Os exercícios exploram muito os procedimentos mecânicos de aplicação dos métodos, e enfatizam pouco a resolução de problemas, bem como a capacidade argumentativa e investigativa dos alunos. Nota-se que falta uma abordagem motivadora para a aprendizagem, com situações-problema que convidem os alunos a apresentar atitudes mais reflexivas e produtivas na construção do saber.

Livro 2: **MATEMÁTICA – interação e tecnologia – 2º ano do ensino médio, autor: Rodrigo Balestri – Editora Leya – 2ª edição, SP – 2016.**

Figura 6 – Livro didático 2- Editora Leya.

Fonte: Editora Leya - (BALESTRI, 2016).

Observamos no livro 2, de autoria de Rodrigo Balestri a introdução do tema sistemas lineares problematizando sobre o consumo de combustível, em que se chega a um sistema $2x2$ que é resolvido pelo método da substituição e em seguida discute-se o método aditivo como uma outra possibilidade de resolução do sistema.

Figura 7 – Problema introdutório sobre sistemas lineares p. 68

Rafael vai realizar uma viagem de 215 km e está calculando quantos litros de combustível vai gastar. O carro que ele utilizará é um modelo *flex*, ou seja, pode ser abastecido com etanol, gasolina ou uma mistura dos dois, e tem um desempenho de 10 km com um litro de gasolina e 7 km com um litro de etanol. Supondo que Rafael não tem preferência por um dos combustíveis e pode utilizar ambos, quantos litros de cada combustível ele utilizará na viagem?

Pavel Losevsky/ Dreamstime.com

Carro sendo abastecido.

Fonte: Editora Leya - (BALESTRI, 2016).

Posteriormente com alguns exemplos de sistema resolvidos pelos dois métodos, também explora um procedimento de análise por meio de gráficos cartesianos das possíveis soluções de um sistema, encerrando o tópico com um conjunto de exercícios.

Ao avançar, nas páginas seguintes, o autor apresenta o processo de escalonamento através de exemplo sobre sistema escalonado, o qual é apresentado como método do escalonamento da seguinte forma:

> O método do escalonamento se baseia no fato de que todo sistema linear é equivalente ao sistema em sua forma escalonada. Partindo de um sistema em sua forma não escalonada obtém-se um sistema equivalente em sua forma escalonada por meio de uma sequência de operações elementares. (BALESTRI, 2016, p. 77)

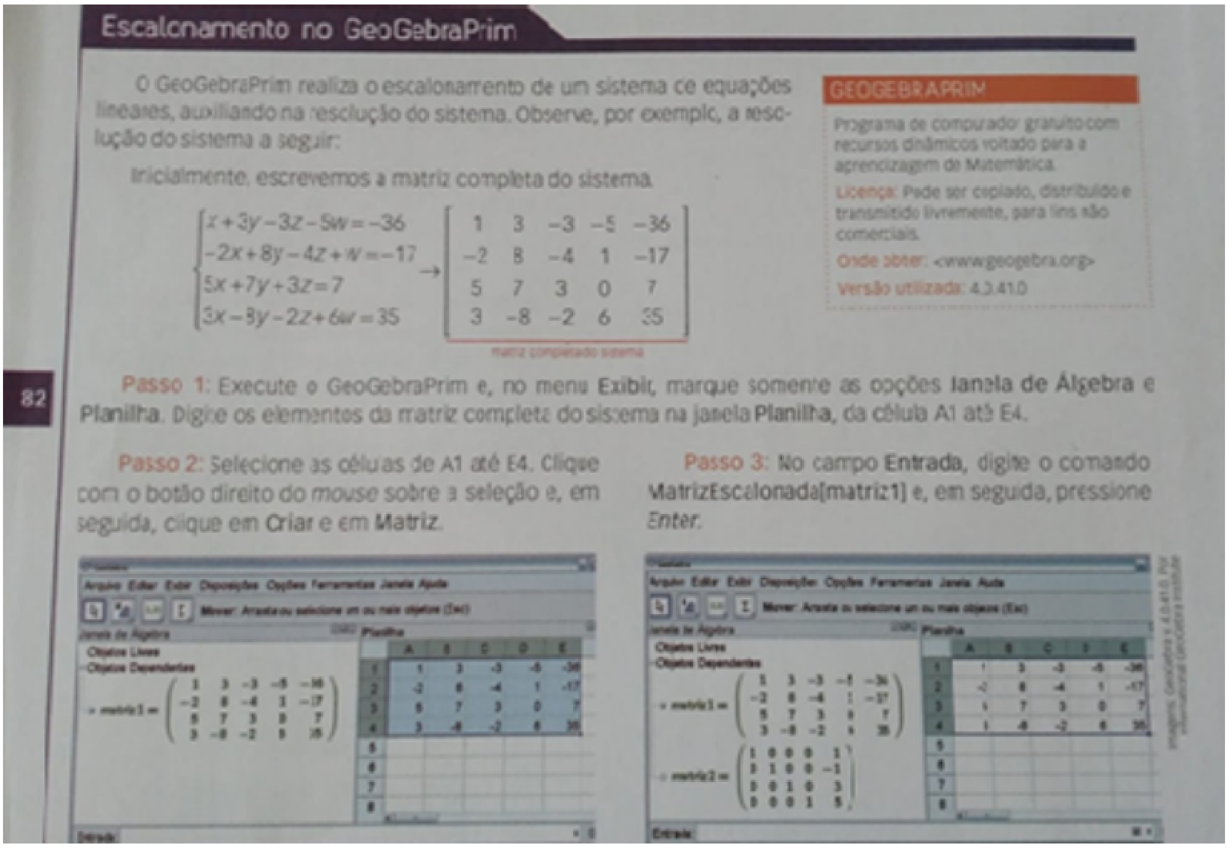
Partindo dessa compreensão prossegue explicando o passo a passo para realizar as operações necessárias de um escalonamento, usando um exemplo que dá uma interpretação geométrica de um sistema do tipo $3x3$. Em seguida, aplica uma sequência de exercícios resolvidos e exercícios propostos.

No texto há uma pequena nota atribuindo a Gauss a criação do método de escalonamento, sem detalhes de como é este método, nem como se chegou a ele, assim como ocorre no Livro 1, e no tópico sobre determinantes faz menção ao nome de Jacobi como um dos matemáticos que ao lado de Cauchy, muito contribuiu para o desenvolvimento das teorias empregada ao tópico de determinantes de matrizes quadradas, destacando a importância que este tema tem para o desenvolvimento de diversas técnicas avançadas de resolução de problemas em diversas áreas, inclusive no campo da computação. No final, apresenta o teorema de Jacobi:

> Em uma matriz A de ordem maior que ou igual a 2, se adicionarmos a uma linha (ou coluna) os elementos correspondentes de outra linha (ou coluna) previamente multiplicados por um número real, o determinante da matriz não se altera. (BALESTRI, 2016, p.110).

O autordo livro didático 2 também sugere a utilização do Geogebra, um software de Geometria no livro, mas não estabelece diretamente nenhuma relação entre o método gaussiano e o teorema de Jacobi na dinâmica, explicando apenas o passo a passo para a resolução de sistemas lineares por meio de escalonamento, bem como a resolução de problemas envolvendo matrizes e determinantes. Nesse caso, consideramos ser um avanço em relação aos demais livros analisados.

Figura 8 – Sugestão de atividade com o GeoGebraPrim, p.82.


Escalonamento no GeoGebraPrim

O GeoGebraPrim realiza o escalonamento de um sistema de equações lineares, auxiliando na resolução do sistema. Observe, por exemplo, a resolução do sistema a seguir:

Inicialmente, escrevemos a matriz completa do sistema.

$$\begin{cases} x+3y-3z-5w=-36 \\ -2x+8y-4z+w=-17 \\ 5x+7y+3z=7 \\ 3x-8y-2z+6w=35 \end{cases} \rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 & -5 & -36 \\ -2 & 8 & -4 & 1 & -17 \\ 5 & 7 & 3 & 0 & 7 \\ 3 & -8 & -2 & 6 & 35 \end{bmatrix}}_{\text{matriz completa do sistema}}$$

GEOGEBRAPRIM

Programa de computador gratuito com recursos dinâmicos voltado para a aprendizagem de Matemática.

Licença: Pode ser copiado, distribuído e transmitido livremente, para fins não comerciais.

Onde obter: <www.geogebra.org>

Versão utilizada: 4.3.41.0

82

Passo 1: Execute o GeoGebraPrim e, no menu **Exibir**, marque somente as opções **Janela de Álgebra** e **Planilha**. Digite os elementos da matriz completa do sistema na janela **Planilha**, da célula A1 até E4.

Passo 2: Selecione as células de A1 até E4. Clique com o botão direito do *mouse* sobre a seleção e, em seguida, clique em **Criar** e em **Matriz**.

Passo 3: No campo **Entrada**, digite o comando **MatrizEscalonada[matriz1]** e, em seguida, pressione *Enter*.

Fonte: Editora Leya - (BALESTRI, 2016).

Livro 3: **MATEMÁTICA: contextos e aplicações – 2º ano do ensino médio, Autor: Luiz Roberto Dante – Editora Ática – 3ª edição, SP, 2016.**

Figura 9 – Livro didático 3.

Fonte: Editora Ática (DANTE, 1998).

(DANTE, 1998), autor do livro 3, aborda o tema sistemas lineares com uma explanação sobre o método chinês, por meio de um problema “ Os nove capítulos da arte Matemática”, e no tópico seguinte conceitua equações lineares e sistemas lineares e aplica alguns exercícios.

A seguir, explica a classificação de um sistema linear a partir das possíveis soluções e relaciona matrizes, determinantes e como se pode chegar a solução de sistemas lineares, passando em seguida ao método de escalonamento conceituando um sistema escalonado da seguinte forma:

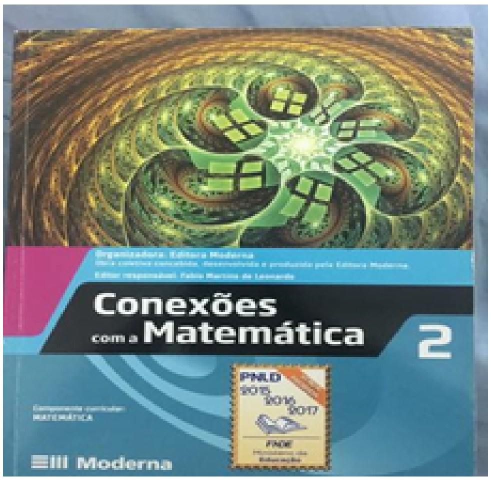
> Considerando um sistema genérico mxn, dizemos que ele está escalonado quando a matriz dos coeficientes tiver, em cada uma de suas linhas, o primeiro elemento não nulo situado à esquerda do primeiro elemento não nulo da linha seguinte. Além disso, linhas com todos os elementos não nulos devem estar abaixo de todas as outras. (DANTE, 1998, p.102).

Após conceituar sistemas equivalentes, e fazer alguns exercícios de aplicação desse conceito, discute sobre o processo de escalonamento, apresentando um passo a passo de como escalonar um sistema linear, o que de certo modo refere-se ao modelo como os primeiros matemáticos utilizavam para resolver os problemas. Verificamos que o livro não faz nenhuma menção ao método gaussiano ou à teoria de Jacobi e nem faz menção à utilização de recursos computacionais na resolução de sistemas, como estratégia que poderia interessar aos alunos, principalmente a atual geração que convive com diversas tecnologias, o que chega a ser uma falha, pois o tema é de grande utilidade na área de cálculo computacional.

Posteriormente o autor do livro didático propõe uma série de exercícios, que mescla questões sobre aplicação direta das técnicas de escalonamento e propondo algumas questões de vestibulares e do Enem, o que é importante para a realização dos exames, mas nota-se a falta de questões que estimulem o raciocínio, a reflexão e a capacidade de investigação analítica dos alunos.

Livro 4: **Conexões com a matemática – 2º ano do ensino médio, de autoria coletiva, Editora Moderna, 2ª edição, SP - 2013.**

Figura 10 – Livro 4.



Fonte: Editora Moderna - (COLETIVA, 2013).

Neste livro o tema Matrizes antecede o tema Sistema de equações. Onde o teorema de Jacobi é utilizado também relacionando matrizes e determinantes. O teorema de Jacobi é descrito da seguinte maneira:Dada uma matriz A de ordem n, se adicionarmos a uma fila de A uma fila paralela a A, previamente multiplicada por uma constante qualquer, obteremos uma matriz B, tal que $\det A = \det B$

Após apresentar o conceito, trabalha alguns exemplos e exercícios tradicionais sobre o tema.

No capítulo seguinte é abordado o tema Sistemas de Equações, colocando inicialmente algumas definições de Equações lineares e de sistemas lineares, exemplificando com situações reais, através de balanceamento de equações químicas. Na sequência define sistema homogêneo e faz a associação de uma matriz com um sistema, enfatizando que um sistema linear pode ser resolvido pela regra de Cramer com a utilização de determinantes.

Nas páginas seguintes faz a apresentação do conceito de sistema escalonado, e dá uma explicação de como aplicar o processo de escalonamento, denominando-o de método de eliminação de Gauss-Jordan, nota-se que não se dá nenhuma abordagem sobre a sua validade, assim como foi discutido nos outros livros didáticos analisados. Nota-se que não há referência à possibilidade de utilização de recursos computacionais para resolver sistemas por meio do método gaussiano (escalonamento) ou ainda sobre a utilidade do método de Gauss e do teorema de Jacobi nos cálculos computacionais. Os exercícios apresentados no livro são bem básicos e tradicionais, com aplicação imediata de métodos, não propõem estímulos do ponto de vista da motivação, da curiosidade e da investigação.

Após essa análise de quatro livros didáticos, notamos que é perceptível o uso da metodologia em que o tradicional ainda predomina e quase exclusivamente se trabalha o escalonamento como método de resolução de sistemas lineares, baseando-se nas descobertas de Gauss e Jacobi, e mesmo assim, quase não há referência a eles de modo a destacar tais contribuições, sendo praticamente desprezados os aspectos históricos das descobertas matemáticas. Também não se dá importância à utilização de recursos computacionais para a resolução de sistemas, nem da utilidade prática de sistemas nos cálculos computacionais, à exceção do livro (BALESTRI, 2016), que traz uma boa ênfase na abordagem e utilização do software livre Geogebra, bem como da planilha CALC do conjunto de aplicativos do Libre Office, explicando o passo a passo de como utilizar tais recursos.

Em nossa análise percebe-se que os livros analisados são bastante tradicionais, como verificado na apresentação da maneira como abordam conteúdos relativos a Sistemas lineares, carente de inovação no exercícios, nos problemas bem como na utilização de novas ferramentas que possam contribuir para uma boa aprendizagem, destoando do que preconiza a Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018), pois a mesma destaca que além do uso de recursos didáticos como jogos, malhas quadriculadas, [...], *os alunos devem fazer uso de softwares de geometria dinâmica e da história da matemática, possibilitando que a aprendizagem de conceitos e procedimentos devam estar fundamentadas em contextos significativos.*

Vale salientar que os livros analisados foram publicados em anos anteriores à promulgação da BNCC, posto que serviriam para os alunos durante os anos de 2017 a 2020, com exceção do livro 4, que foi utilizado no triênio 2015-2017, o que não impede que fossem mais atualizados e conectados com a realidade de um público que vem dominando o mundo dos artifícios tecnológicos, que estão cada vez mais sendo estimulados por meio de aprendizagem significativa. Sabemos que tal tarefa cabe aos professores de matemática, mas é preciso que o seu material didático o estimule a praticar os artefatos da realidade de nossos estudantes.

Vale destacar, que já em 2006, as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (BRASIL, 2018), trazem a seguinte orientação que: No estudo de sistemas de equações, além de trabalhar a técnica de resolução de sistemas, é recomendável colocar a álgebra sob o olhar da geometria. A resolução de um sistema $2X2$ de duas equações e duas variáveis pode ser associada ao estudo da posição relativa de duas retas no plano. Com operações elementares simples, pode-se determinar a existência ou não de soluções desse sistema, o que significa geometricamente os casos de intersecção/coincidência de retas ou paralelismo de retas. (BRASIL, 2018, p.78)

1.3 Alguns destaques das dificuldades dos estudantes do ensino básico na resolução de problemas envolvendo equações e sistemas..

Em um dos tópicos anteriores discutimos que a matemática está presente na vida da sociedade desde épocas pré-civilizatórias e se perpetua até os dias atuais. Sobre essa visão, (D'AMBROSIO, 1998) afirma:

> A matemática dos sistemas escolares é congelada. São teorias em geral, antigas, desligadas da realidade. Foram concebidas e desenvolvidas em outros tempos, outros espaços. Será que essa matemática, que chamamos de acadêmica, é importante para todos os povos? Sem dúvida. A sociedade moderna não funciona sem essa matemática, as teorias científicas não podem ser trabalhadas sem essa matemática. Mesmo as artes e as humanidades estão impregnadas dessa matemática. (D'AMBROSIO, 1998, p.3).

Essa compreensão de D'Ambrósio é bem própria de nossa BNCC, que apesar de salientar um tema tão presente em nossas vidas, esta presença não se reverte em compreensão e aprendizado nos ambientes escolares. O baixo rendimento dos estudantes da educação básica em matemática, é hoje, uma preocupação de muitos países e é algo que vem chamando a atenção de estudiosos e pesquisadores a muito tempo. As dificuldades observadas na aprendizagem se tornam mais evidentes quando envolvem álgebra (equações e sistemas por exemplo). Boa parte dos alunos até conseguem compreender fórmulas e fazer aplicações em exercícios semelhantes, por conta do hábito proposto pelos professores, porém, quando se deparam com problemas, que necessitem modelar a natureza algébrica do problema, buscando equacionar e utilizar variáveis e leis, o desempenho fica aquém do desejável.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 2001, p.32) destacam que a História da Matemática foi construída como resposta a perguntas provenientes de diferentes origens e contextos, motivados por problemas de ordem prática, por problemas vinculados a outras ciências, bem como por problemas relacionados a investigações internas à própria Matemática. Assim, surgiram os teoremas, as fórmulas e os símbolos, que com o tempo foram sendo aprimorados, enriquecendo cada vez mais a linguagem matemática, portanto, é necessário que os estudantes saibam vivenciar técnicas de uso na prática.

Ainda, segundo os PCNs, tradicionalmente, os problemas não têm enfatizado o seu verdadeiro papel no ensino, pois, na melhor das hipóteses, são utilizados apenas como forma de aplicação de conhecimentos previamente adquiridos pelos alunos. Ou seja, com o passar do tempo, as fórmulas foram perdendo o sentido original na qual foram fundamentadas. Os PCNs só destacam parte do problema, a escolha equivocada da ausência de contextualização e a carência de significados que podem ser um dos entraves no aprendizado dos estudantes, aliados às dificuldades de interpretação de textos, bem como dificuldades com os cálculos e algoritmos, até mesmo em operações mais básicas, mostrando que temos uma grande maioria de alunos que não conseguem compreender e resolver problemas simples no seu nível de escolaridade.

1.4 Qual deve ser o papel do(a) professor(a) de matemática diante das dificuldades de seus estudantes na resolução de problemas que envolvem equações e sistemas?

Para (DANTE, 1998, p.25)

> É possível, por meio da resolução de problemas, desenvolver no aluno iniciativa, espírito explorador, criatividade, independência e habilidade de elaborar um raciocínio lógico e fazer uso inteligente e eficaz dos recursos disponíveis, para que ele possa propor boas soluções às questões que surgem em seu dia a dia, na escola ou fora dela.

Reconhecemos que um caminho que pode levar os professores e professoras de matemática a minimizarem as dificuldades e contribuírem para uma melhora no desempenho de seus estudantes é a pesquisa e a escolha de problemas que sejam significantes, motivadores, desafiadores e instigantes para os estudantes, que façam parte da sua realidade ou com aplicações no mundo real. Posteriormente, cabe a cada professor despertar o seu lado pesquisador e criativo, para fazer da metodologia de problemas uma prática interessante no aprendizado dos seus estudantes. Outro ponto importante é a valorização da Metodologia do uso de recursos computacionais para que além de motivar o aluno a saber utilizar de forma adequada as ferramentas que tem domínio e que os auxilie na compreensão de conceitos, trabalhem por meio de contextos, reconhecendo o campo de aplicação de conteúdos matemáticos.

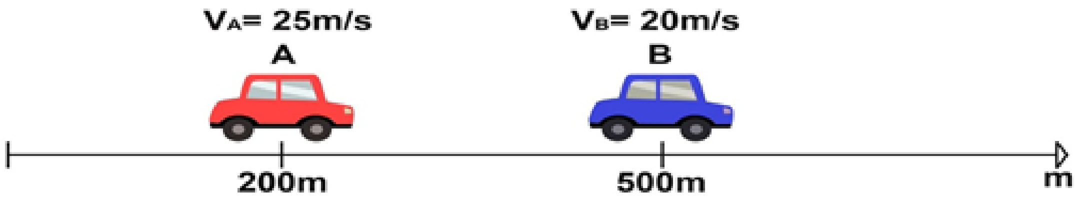
É notório que os professores da educação básica trabalham com uma geração de alunos com certo domínio no uso de tecnologias e que esse fato pode ser positivo pois, devem ser aproveitadas principalmente em sala de aula de modo a favorecer a aprendizagem, principalmente na compreensão e resolução de problemas.

Relato aqui uma experiência recente que tive com uma das turmas em que leciono (2ª ano A do ensino médio na EREFEM Sofia Feijó Sampaio): para introduzir sistema de equações lineares, sem citar o tema a ser trabalhado, trouxe para a turma o seguinte problema

> Dois automóveis A e B, estão em movimento uniforme e trafegam na mesma direção e no mesmo sentido, sendo as velocidades de A e B,

> respectivamente, 25 m/s e 20 m/s, no instante zero, onde a posição inicial de A é de 500 m, enquanto a de B é de 200 m em relação a um referencial inercial. Pergunta-se: Esses automóveis irão se encontrar em algum momento? Se sim, qual o instante em que posição ocorrerá esse encontro?

Figura 11 – Representação gráfica do fenômeno observado.



Fonte: Autoria própria.

Após apresentar o problema e pedir que os estudantes refletissem sobre o mesmo, lembrando que o movimento de cada automóvel poderia ser representado por uma equação, lembrando-os da equação horária do espaço no M. U. O problema gerou um pequeno debate, e após ouvir algumas opiniões, das quais algumas acertadas, mostrei que tal problema poderia ser resolvido com o auxílio do Geogebra, sem a necessidade de cálculos, apenas pela interpretação geométrica dos gráficos gerados e quando escrevi as equações correspondentes aos dois móveis, do gráfico gerado veio a resposta de alguns estudantes de que os móveis se encontrariam, já que as retas geradas não são paralelas, o que fez com que uma aluna fizesse a observação de que isto poderia ser afirmado também a partir das equações obtidas, comparando os coeficientes angulares, tema já tratado em aulas anteriores.

Com a utilização do software foi possível mostrar por simulação não apenas que o encontro entre A e B ocorreria, como também em que ponto isto ocorreria, momento em que lhes disse que seria possível obter e identificar as coordenadas do ponto de concorrência originado por meio de um sistema de equações lineares que poderia ser resolvido algebricamente. E eles perceberam também a aplicação em momento real, validando o entendimento e as outras situações que envolviam a compreensão do problema.

Richard (1991, p. 3) discute que:

> É necessário que o professor de matemática organize um trabalho estruturado através de atividades que propiciem o desenvolvimento da exploração informal e investigação reflexiva e que não privem os alunos

> nas suas iniciativas e controle de situação. O professor deve projetar desafios que estimulem o questionamento, a colocação de problemas e a busca de solução. Os alunos não se tornam aprendizes por acaso, mas por desafios projetados e estruturados, que visem a exploração e a investigação.

Os professores de matemática, têm o desafio de fugir do comodismo e engessamento causados pela formação de um currículo arcaico e baseado em um material didático que apenas reproduzem tarefas repetidas um número de vezes. O professor precisa ter um olhar de pesquisador para inovar a aprendizagem, e essa saída se dá pela formação e realização de pesquisa, caminho este que busca a inovação do campo didático com a prática da utilização de recursos de diversos modelos e estruturas, inclui-se aqui os recursos computacionais, que já são de domínio próprio do professor e dos alunos.

É claro que há uma resistência por parte de muitos professores, pois faltam-lhes capacitação, problema que se arrasta há décadas, pois dificilmente verificamos os governos institucionais explorando tal ação. Não se resolve a formação do professor num passe de mágica, e certamente não há uma solução simples, mas a mudança de atitude dos professores só ocorrerá quando se investir na sua formação, de modo que conheça a diversificação de saberes que hoje complementam a educação do século XXI, como também que possa saber utilizar metodologias inovadoras na sala de aula para que cheguem a trabalhar a aprendizagem significativa.

1.5 O uso de software no entendimento da matemática, representações oferecidas pelos recursos computacionais no ensino.

Gravina e Santarosa discutem sobre o trabalho com tecnologia e destacam que:

> Na pesquisa matemática, o conhecimento é construído a partir de muita investigação e exploração, e a formalização é simplesmente o coroamento deste trabalho, que culmina na escrita formal e organizada dos resultados obtidos! O processo de aprendizagem deveria ser similar a este, diferindo essencialmente quanto ao grau de conhecimento já adquirido. [...] Durante alguns anos, a linguagem Logo se apresentou como uma das poucas ferramentas computacionais, se não a única, que tinha como concepção pedagógica que 'só se aprende fazendo, experimentando, investigando'. No geral os programas disponíveis eram do tipo 'instrução assistida por computador'. Nos dias de hoje ainda é grande a oferta de programas deste último tipo, que mesmo tendo interface com interessantes recursos de hipermídia (som, imagem, animação, texto não linear), nada mais oferecem aos alunos do que ler definições e propriedades e aplicá-las em exercícios práticos (tipo tutorial) ou testar e fixar 'conhecimentos' através da realização de exercícios protótipos e repetitivos, que no máximo avançam em grau de dificuldade (tipo prática de exercícios) (GRAVINA; SANTAROSA, 1998, p. 2).

A discussão levantada pelas pesquisadoras nos alimenta quanto ao entendimento do tipo de aprendizagem voltado para o uso e efeito das novas tecnologias, apresentando que o tipo de software é fundamental. Nesse caso, também destacamos a proposta de uso do SuperLogo por (NASCIMENTO, 2007), que ao explorar o conhecimento dos estudantes sobre PA e PG, verificaram que estudantes universitários não associam a matemática aprendida na escola para saberes diferentes sobre sucessões e sequências exploradas de modo diferente do livro didático, quando podem ser validadas também com figuras do campo da geometria. O estudo dos pesquisadores denota que os alunos, mesmo utilizando um software que retrata a construção passo a passo da imagem de uma figura em progressão, parecem ser viciados em dois tipos de representação, o da forma numérica e a algébrica, comum para essa abordagem e esquecendo a forma geométrica. No estudo nota-se que:

> Muitos alunos tiveram dificuldade em apontar os efeitos do conceito de progressão visualizados nas construções realizadas, próprios do campo da aritmética, mas que estavam visualizados em representações geométricas. Verificamos que os estudantes não colocavam em cena essa ação, que estava envolvida na construção dos procedimentos gerados para alguns modelos geométricos (através da programação no SuperLogo). Albuquerque e Nascimento (NASCIMENTO, 2007, p.55-56).

Tal compreensão observada na pesquisa citada anteriormente, retrata a preocupação de Gravina e Santarosa ao destacar que:

> ... os alunos chegam à universidade sem terem atingido os níveis mentais da dedução e do rigor. Raciocínio dedutivo, métodos e generalizações - processos característicos e fundamentais da Geometria - os alunos pouco dominam. Até mesmo apresentam pouca compreensão dos objetos geométricos, confundindo propriedades do desenho com propriedades do objeto.(GRAVINA; SANTAROSA, 1998, p.6)

1.5.1 A importância do uso do software Geogebra na solução de equações e sistemas.

No nosso caso de pesquisa, a escolha do Geogebra como um software educacional que propicie uma aprendizagem significativa se dá justamente porque ele reúne as características acima elencadas, segundo as ideias de Papert e Duval.

O Geogebra é um software livre, gratuito, multiplataforma, que pode ser baixado em computadores, tabletes e smartphones. Foi desenvolvido por Markus Hohenwarter como tese de sua dissertação de mestrado, no ano de 2001. Segundo o Instituto Geogebra (www.geogebra.org) atualmente o Geogebra é utilizado em 190 países, traduzido para 55 idiomas, são mais de 300000 downloads mensais, havendo no mundo 62 Institutos Geogebra em 44 países, inclusive no Brasil. Por ser livre, o software Geogebra vem ao encontro de novas estratégias de ensino e aprendizagem de conteúdos de álgebra, geometria, cálculo e estatística, permitindo a professores e alunos a possibilidade de explorar, conjecturar, investigar tais conteúdos na construção do conhecimento matemático.

A apresentação do Geogebra e os dados fornecidos mostram o quanto a sua utilização é importante para a aprendizagem da matemática. Por isso, o Geogebra tem sido tema de muitas dissertações e teses de mestrado e doutorado no Brasil. No catálogo de Teses e Dissertações da Capes há atualmente 879 dissertações em que o Geogebra é citado e utilizado, sendo 94 dissertações na área de Educação Matemática e 690 de Mestrado Profissional, onde 14 dissertações têm como tema Geogebra e Sistemas Lineares.

Nesta pesquisa procuramos destacar algumas opiniões de pesquisadores que em suas dissertações abordaram o tema Geogebra e resolução de problemas por meio de sistemas lineares.

(SILVA, 2016) afirma que o Geogebra se destaca como um material pedagógico possível de ser vinculado a conteúdos matemáticos, proporcionando interação, manipulação, criação e armazenamento, dispensando as tecnologias manuais como régua, transferidor e compasso que tornam as construções geométricas mais morosas e menos precisas. Porém, por não apresentar atividades já elaboradas requer que o professor disponha de tempo para construir as atividades de forma a desenvolver ou aprimorar atividades intelectuais.

(BOCCARDO, 2017) afirmou que Sistemas lineares é um assunto que pode ser abordado de várias maneiras e está relacionado com muitos problemas importantes do dia a dia e, além disso, é ferramenta fundamental para trabalhar com os alunos outros assuntos de matemática como Matrizes e Determinantes, Modelagem, Otimização, entre outros.

(SILVA, 2015) afirmou que o software Geogebra fornece aos alunos a possibilidade de enxergar com facilidade as etapas do processo de criação de objetos, bem como perceberem o movimento gerado pela manipulação de objetos criados, aumentando as possibilidades de aprendizagens significativas, uma vez que o processo de construção é simples e ágil.

(SOUZA, 2020) destacou que o Geogebra se encaixa perfeitamente em nossas escolas (públicas ou particulares) por ser livre, gratuito, multiplataforma, podendo ser baixado em computadores, tablets e celulares e permite a visualização 3 D, que permite a visualização de figuras no espaço, permitindo a percepção e a visualização dos planos formados por uma equação linear de três variáveis e permite visualizar intersecções de planos, ajudando a interpretar, resolver e discutir um sistema linear.

(PEDRO, 2016) ressaltou a necessidade de atualização tecnológica que as escolas devem buscar para oferecer melhor qualidade de ensino aos alunos desta geração, que são altamente conectados, e que os alunos sentem a necessidade de ver na escola o mesmo nível tecnológico que é parte de seu cotidiano em outros contextos sociais. Por isso, a sua escolha pelo Geogebra.

(SANTANA, 2015) justificou a escolha do Geogebra para a resolução de sistemas lineares 3 X 3 ao afirmar que após levantamento bibliográfico constatou que em nenhuma obra é abordada a solução geométrica para sistemas lineares 3 X 3, destacando ainda o papel do professor como mediador entre o conhecimento e o aluno.

(OLIVERA, 2019) realizou um trabalho diferenciado dos demais na utilização do Geogebra ao criar um aplicativo específico para a resolução de sistemas lineares por escalonamento. Ele destacou que a premissa do aplicativo é a interatividade, que permite ao aluno aprender com os erros durante as etapas de resolução dos problemas propostos.

(SILVA, 2019) afirmou que a utilização do Geogebra para representar graficamente um problema aprimora a percepção do entendimento do problema em questão, porque ao mostrar um gráfico na malha quadriculada, a visualização dos pontos fica mais perceptível.

De um modo geral, percebe-se pelas opiniões aqui relatadas que a utilização do Geogebra, especialmente na resolução de problemas envolvendo Sistemas Lineares, pelo seu dinamismo, por aproximar a álgebra da geometria, tem o potencial de trazer para a sala de aula uma nova realidade que proporciona aos alunos uma aprendizagem significativa, atualizada com a realidade atual, em que os alunos têm a oportunidade de construir o próprio conhecimento, transitando com facilidade entre as diversas representações da matemática.

Assim, os recursos computacionais devem estar presentes nas escolas, com professores capacitados e atualizados o suficiente para serem mediadores entre o conhecimento e os alunos. Logicamente a capacitação de professores depende também de que haja políticas públicas e investimentos voltados para essa necessidade que se faz urgente e imediata em nosso país.

1.5.2 O que dizem as pesquisas sobre o uso de software na solução de problemas sobre equações e sistemas.

O ensino de matemática ao longo dos tempos vem recebendo inovações no uso de recursos tecnológicos e científicos que modificaram a prática do professor. Tais contribuições modificam também a maneira de ser da sociedade, modificações na cultura e nos outros pontos que se relacionam com o trato escolar, mesmo assim, tais mudanças não acontecem na mesma velocidade quando se trata de educação, ensino e aprendizagem. Para (MORAN, 2012, p.8) " a sociedade evolui mais que a escola e, sem mudanças profundas, consistentes e constantes não avançaremos como nação". Acrescentando que, o avanço tecnológico na escola ocorrer sem conexão com o mundo virtual teremos uma escola incompleta.

Entendemos que a escola precisa oportunizar aos alunos condições para que tenham acesso aos recursos tecnológicos propiciando uma educação atualizada e voltada para a realidade. Mas, é preciso que os professores sejam competentes no domínio desse aparato, para que propiciem e trabalhem uma didática ao nível do avanço tecnológico com aulas que possibilitem uma aprendizagem significativa, para o pleno desenvolvimento de seus alunos.

É fato que alguns professores já desenvolvem o uso de computadores como ferramenta didática, enquanto que a maioria ainda usa a tecnologia para repetir o modelo tradicional de ensino tratando o uso do computador apenas como ferramenta de cálculo.

A abordagem tecnológica deve ser, como destaca (VALENTE, 1993), instrucionismo, pois, não bastam ser apenas visualmente atrativos, precisam fugir de técnicas de memorização e repetição.

Seymour Papert (1928-2016) defendia a utilização do uso de computadores na educação dentro de uma perspectiva Construcionista, ou seja, uma ferramenta como um instrumento que permitisse aos estudantes serem os autores na produção do próprio conhecimento. Para (PAPERT, 1994, p. 158) "os computadores podiam e deveriam ser utilizados como instrumentos para trabalhar e para pensar, como meio de realizar projetos, como fonte de conceitos, para pensar novas ideias". A partir da utilização do computador com a visão Construcionista, ele criou, junto com sua equipe de pesquisadores no Massachusetts Institute of Technology (MIT) a ferramenta educacional LOGO. A conhecida linguagem LOGO utilizava efeitos de programação, onde um cursor "tartaruga" executava efeitos através de comandos. O programador, tinha que projetar e definir as ações que deveriam ser executadas pelo computador. O LOGO foi um marco na área de uso de softwares educacionais, pois inspirou a criação de outros modelos e contribuiu com a aprendizagem de diversas gerações desde sua criação.

Neste sentido, se percebe que há uma necessidade de se ter recursos para simular e explorar esse campo da matemática, por meio de softwares como o Geogebra, Winplot, entre outros, para propor aos alunos uma melhor apresentação das possibilidades de sua utilização na aprendizagem matemática.

Sobre a utilização de computadores na matemática, (EVES, 2004, p.695) escreveu que: "O tremendo e incrível desenvolvimento da computação eletrônica no século XX deverá prosseguir no futuro por algum tempo, levando a uma velocidade nos cálculos e a aplicações difíceis de imaginar hoje".

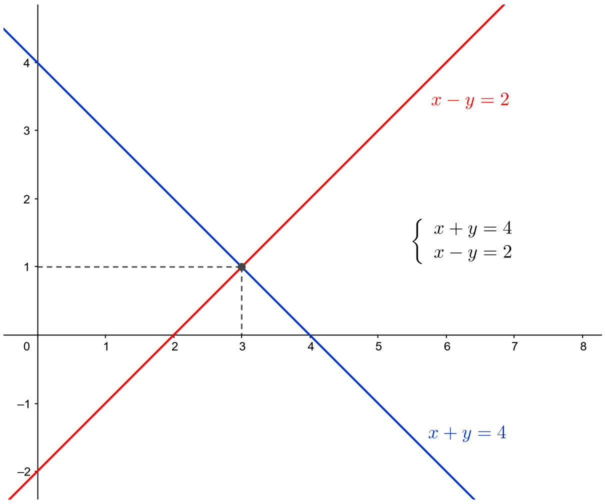
1.6 7 A importância das representações semióticas na aprendizagem de matemática.

Um outro pesquisador que tem uma importância considerável na busca pela compreensão de como os saberes podem ser estruturados no processo de ensino e aprendizagem é Raymond Duval (2003), que desenvolveu a Teoria dos registros e representações semióticas. Duval utilizou o termo semiótica ao referir-se às diferentes representações utilizadas em matemática, tais como gráficos, tabelas, desenhos, linguagem algébrica e linguagem natural.

Sua teoria busca compreender a forma como os conhecimentos são elaborados e construídos pelo sujeito, especialmente no processo de aprendizagem da matemática, a partir das relações entre suas diversas formas de representações.

De acordo com (DUVAL, 2003, p. 15-16) “existem dois tipos de transformações de representações semióticas que são radicalmente diferentes: os tratamentos e as conversões”. Os tratamentos são transformações de representação semiótica em que não se altera o registro, ou seja, mantém-se o sistema de representação, por isso, a representação é “interna a um registro”. Por exemplo, isto ocorre quando se opta por resolver um sistema linear ou uma equação apropriando-se apenas da forma algébrica, ou ainda, realizando uma ampliação ou redução da imagem de um gráfico. Já as conversões são transformações em que um objeto conserva suas referências mas muda o sistema de representação. Neste caso, diz-se que a representação é externa a um registro. a seguir apresentamos uma situação de destaque desse fato.

Figura 12 – Representação gráfica de um sistema de duas equações e duas variáveis



fonte: Autoria própria

Na figura 12 acima vemos um mesmo objeto matemático, um mesmo sistema linear, representado em dois registros diferentes.

Para Duval, os objetos matemáticos precisam de diferentes representações para ficarem mais acessíveis quanto a sua compreensão, pois eles, em geral, não são diretamente perceptíveis ou observáveis. Para os estudantes em processo de aprendizagem as representações são importantes porque lhes permitem enxergar um mesmo objeto matemático de formas diferentes, o que contribui para a formalização de conceitos. Neste sentido, cabe aos professores, enquanto mediadores, possibilitar que seus estudantes tenham contato com as diferentes formas de representação de um mesmo objeto matemático, compreendendo os processos de conversões que existem entre as diferentes representações, de modo que consiga transitar melhor entre elas. Os professores podem aliar as ideias de Papert e

Duval ao realizar escolhas de softwares e ferramentas educacionais para as suas aulas, pois, a escolha de meios interativos adequados podem fazer toda a diferença no processo de construção de conceitos.(GRAVINA; SANTAROSA, 1998, p.10) afirmam que “um meio que pretenda ser interativo, na medida do possível, não deve frustrar o aluno nos procedimentos exploratórios associados a suas ações mentais. ”

2 Metodologia

Nosso trabalho de dissertação é um estudo envolvendo seis estudantes do ensino básico, todos cursando a 2ª série do ensino médio e três professores da Escola de Referência em Ensino Fundamental e Médio Sofia Feijó Sampaio, localizada no distrito de Lage Grande, no município de Catende - PE, que passou a integrar neste ano, 2021, o programa de ensino integral da rede estadual, contando inicialmente com cinco turmas de ensino semi-integral, sendo três turmas do 1º ano do Ensino médio e duas turmas do sexto ano do Ensino fundamental, tendo no total 8 turmas de ensino fundamental, 7 turmas do ensino médio, uma turma de EJA fundamental e três turmas de EJA médio.

Especificamente, para nossa pesquisa a seleção dos estudantes ocorreu de forma voluntária por convite a um grupo de 06 (seis) estudantes da turma do segundo ano A do Ensino Médio regular, pois, no momento da coleta estávamos em processo de retorno ou não à escola, sendo opcional aos alunos o momento presencial. Dessa forma, entramos em contato com os estudantes que se encontravam na escola e com os 03 (três) professores de matemática, que aceitaram o convite e formaram o corpo de sujeitos de nosso estudo. Agendamos dias para realizar as atividades de acordo com a disponibilidade deles. Os professores participantes atuam nas modalidades Ensino Fundamental e Ensino Médio desta escola.

A escolha de um número reduzido de alunos, levou em consideração o número de computadores disponíveis para a realização da sequência de atividades utilizada como recurso para a coleta de dados e a necessidade da manutenção das regras sanitárias de prevenção ao vírus da Covid-19 e dentre tais regras, que necessitamos manter o distanciamento social, o que impede a realização de atividades em duplas. Além do mais, a turma do 2º ano A foi dividida em quatro grupos de alunos, dois grupos que estudam presencialmente e frequentam a escola em dias alternados, o terceiro grupo formado por alunos que estudam remotamente, com atividades/aulas pela internet e o quarto grupo formado por alunos que não estudam presencialmente e não tem aparelho tecnológico (tablet, computador ou celular) e/ou não têm acesso à internet. A escolha dos alunos se deu apenas com os alunos que estavam frequentando as aulas presenciais, levando em consideração o perfil dos alunos e mediante convite feito individualmente.

A participação dos professores teve como objetivo conhecer informações de como é o desenvolvimento dos alunos na escola até o fim do ensino médio e que base de formação e no conhecimento de uso de recursos tecnológicos eles adquirem, considerando que o autor desta pesquisa escolheu essa turma pelo fato de nunca ter sido professor de matemática desta turma. O estudo de caso é no intuito de conhecer as dificuldades e domínios relativos aos tópicos matemáticos de equações e sistemas.

A coleta de dados da pesquisa foi iniciada com o grupo de estudantes selecionados, e aconteceu no laboratório de informática, um estudante para cada computador, para resolver duas questões sobre sistemas de duas equações e duas variáveis e uma questão–problema envolvendo equações do segundo grau.

Consideramos que a coleta de dados necessários à investigação nos permitiu conhecer o que é dado ao aluno como instrução e ensino baseado no conhecimento de representações matemáticas para o entendimento de resolução de equações e sistemas apresentados por meio de resolução de problemas.

Apesar de nossa questão-problema buscar: Quais as contribuições facilitadas pelo software Geogebra para entender saberes matemáticos relativo à representação gráfica de equações e sistemas? Entendemos que a proposta de uso do software para conhecer as bases de aprendizagem dos estudantes em regiões mais afastadas dos grandes centros urbanos, pode nos levar a ficar diante da situação muito comum nas escolas de pequenas cidades do interior que é a ausência do trabalho com tecnologia, apesar de que, nos últimos anos vem alcançando o seu propósito nessas escolas como divulgado em muitas pesquisas. Pois, o que presenciamos é que no ensino tradicional se propõe uma prática para o entendimento de equações e sistemas apenas baseados na representação algébrica e , pouco é enfatizado o trabalho com uso de software.

2.1 Coleta dos dados

A coleta de dados ocorreu por meio de questionários impressos que foram respondidos pelos alunos no computador, que foram orientados a salvar e arquivar todas as produções realizadas com a utilização do software Geogebra versão 5.0 e através de anotações das falas de alguns alunos sobre observações e registros do pesquisador. Em outros casos, coletamos também por filmagem e fotos de celular e captura de tela, durante os 3 (três) encontros de duas horas-aula agendados.

A sequência de atividades proposta, apresentada logo a seguir, realizou-se em 3 (três) encontros, cada um com duas aulas de 50 minutos, que aconteceram de forma presencial, seguindo todos os protocolos sanitários, nos dias 21, 23 e 25 junho.

SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES

A sequência de atividades, voltada para uma turma do 2º ano do Ensino Médio abordoou a utilização de recursos computacionais, mais especificamente o uso do Geogebra, como ferramenta auxiliar na resolução de sistemas de equações lineares com duas incógnitas bem como de equações do 2º grau, tendo como objetivo que o software, a partir da relação entre as representações algébricas e geométricas propicie ao estudante uma melhor compreensão de conceitos como raiz de uma equação e solução de um sistema. Detalhamos a nossa sequência a seguir:

HABILIDADES DESENVOLVIDAS

- Resolver sistemas lineares.
- Compreender a reta como representação geométrica de uma equação linear com duas incógnitas.
- Associar a solução de um sistema linear de duas equações com duas incógnitas às coordenadas do ponto de intersecção entre as retas associadas ao sistema dado.
- Reconhecer que um sistema linear pode ter uma, nenhuma ou infinitas soluções.
- Associar a solução de uma equação do 2º grau aos zeros da função quadrática.
- Compreender quantas raízes pode ter uma equação do 2º grau, a partir da intersecção da parábola gerada pela função associada a essa equação.
- Resolver problemas envolvendo sistemas de equações lineares com duas incógnitas;
- Resolver problemas envolvendo equações do 2º grau.

HABILIDADES OBSERVADAS NA BNCC

- (EM13MAT510). Investigar conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas, usando tecnologias de informação, e, se apropriado, levar em conta a variação e utilizar uma reta para descrever a relação observada.
- (EM13MAT401). Converter representações algébricas de funções polinomiais do 1º grau para representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a softwares de álgebra e geometria dinâmica.
- (EM13MAT402). Converter representações algébricas de funções polinomiais do 2º grau para representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a softwares de álgebra e geometria dinâmica.
- (EM13MAT301). Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, incluindo ou não tecnologias digitais.
- (EM13MAT302). Resolver e elaborar problemas cujos modelos são as funções polinomiais do 1º grau e do 2º grau, em contextos diversos, incluindo ou não tecnologias digitais.

CONTEÚDOS VIVENCIADOS

- Sistemas de equações simultâneas com duas incógnitas;
- Equações do 2º grau.

MATERIAIS UTILIZADOS

- Lápis e borracha;
- Papel ofício;
- Questionários (em Word);
- 7 Computadores (notebooks, tablets ou desktop) com o software Geogebra versão 5.0 já instalado em cada computador;
- Datashow e tela para projeção;
- Réguas.

TEMPO DE DURAÇÃO

A sequência de atividades foi vivenciada em três encontros, cada encontro com duas aulas de 50 minutos.

AÇOES REALIZADAS NOS ENCONTROS

- Os encontros ocorreram no Laboratório de Informática da escola;
- Os alunos realizaram as atividades presencialmente, de forma individual, mantendo todas as regras de protocolo sanitário;
- Cada aluno utilizou um computador, além dos materiais já mencionados.

DESENVOLVIMENTO DAS ATIVIDADES

Primeiro encontro: Incialmente o pesquisador utilizou o computador e Datashow para fazer uma breve apresentação da sequência didática a ser vivenciada e na sequência apresentará o Geogebra e algumas de suas funcionalidades para os alunos, que fizeram alguns exercícios propostos para se familiarizarem com os comandos e ícones do aplicativo. Os alunos também aprenderam a criar uma pasta no computador, salvar e armazenar as suas produções no Geogebra nas pastas criadas por cada um. Em seguida foi aplicado o questionário 01 (apêndice A), que aborda a localização de pontos no plano cartesiano, a representação geométrica de uma equação linear com duas incógnitas e a resolução de um sistema de equações simultâneas com duas incógnitas.

Segundo encontro: Incialmente o pesquisador utilizou o computador e o Datashow para fazer uma breve apresentação das atividades a serem desenvolvidas neste encontro. Em seguida aplicamos o questionário 02 (apêndice A), contendo dois problemas envolvendo sistemas de equações simultâneas com duas incógnitas.

Terceiro encontro: Incialmente o pesquisador utilizou o computador e o Datashow para fazer uma breve apresentação das atividades a serem desenvolvidas nesse encontro. Em seguida será aplicado o questionário 03 (apêndice A), contendo quatro questões que tratam de resolução de equações do $2^{\underline{o}}$ grau.

PROPOSTA DE AVALIAÇÃO

A avaliação ocorreu por meio da análise das respostas coletadas nos questionários aplicados, bem como dos arquivos produzidos no Geogebra.

3 Análise dos resultados

A partir dos questionários que foram aplicados e respondidos pelos estudantes que voluntariamente aceitaram participar desta pesquisa, procedemos à análise dos resultados obtidos, os quais detalhamos por encontro, a seguir.
Primeiro encontro: nesse momento nosso propósito foi direcionado para que os alunos tivessem um primeiro contato com o Geogebra conhecendo um pouco de suas ferramentas, bem como da sua utilização na resolução de equações e sistemas, e em que atividade eles teriam de executar as lições do questionário 01 (ilustrada no apêndice A, localizada no fim do trabalho).

Após apresentar os objetivos das duas primeiras aulas os estudantes ficaram bastante entusiasmados com a ideia de utilizarem um software que contribuísse com as suas aprendizagens em matemática, tendo em vista que nunca tiveram essa oportunidade antes, o que culminou com o surgimento de algumas perguntas, como: “em quais conteúdos o Geogebra pode ser utilizado? ” – Expliquei por meio de projeção do Geogebra, versão 5.0, utilizando um Datashow, portanto as informações foram que havia várias ferramentas que poderiam ser utilizadas em diversas áreas da matemática, como Geometria, Álgebra e Grandezas e Medidas, mas que naquele momento nosso objetivo era aprender a utilizá-lo na resolução e na compreensão da resolução de sistemas lineares. Neste primeiro momento eles puderam exercitar a localização de pontos, retas e segmentos de retas, aprenderam a inserir dados no Campo de Entrada (Barra de Entrada), dar Zoom, ampliando ou reduzindo a janela de projeção gráfica, apagar elementos como pontos e retas quando cometiam algum erro, e também aprenderam a observar a Janela da álgebra, onde os dados ficavam registrados. Também no momento falamos que cada estudante precisaria criar uma pasta na área de trabalho do computador, nomeá-la com seu nome, e que todas as suas produções no Geogebra seriam arquivadas nessas pastas. Curiosamente a maioria dos alunos não sabia criar pastas nem salvar documentos no computador, mas não tiveram dificuldades para aprender as informações iniciais.

A primeira atividade, de autoria própria, consistiu em inserir pontos no plano cartesiano de duas formas, como pode ser visto a seguir e também no Apêndice A.

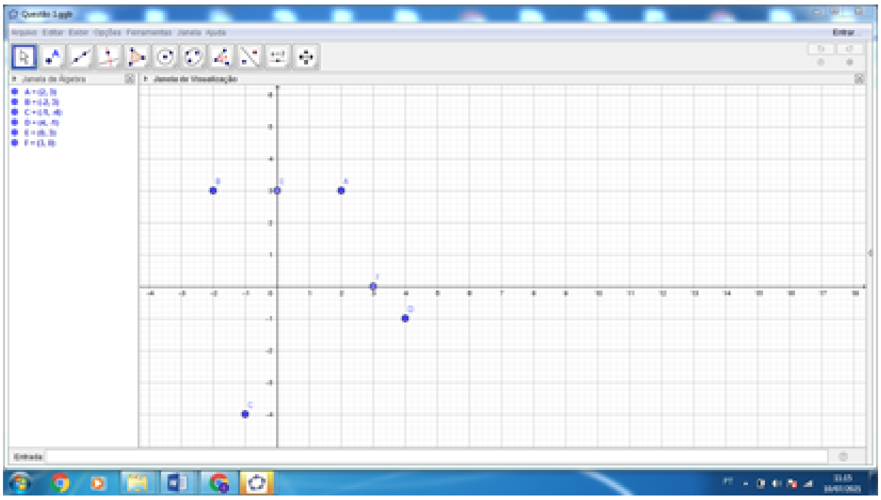
<u>Questão 1</u>: Insira no plano cartesiano os pontos A, B, C, D, E e F de acordo com os comandos abaixo:
a) no campo de entrada insira os pontos de acordo com as coordenadas cartesianas a seguir: A = (2, 3), B = (-2,3), C = (-1, -4).
b) clicando no ícone ponto, localize os pontos D= (4, -1), E = (0, 3) e F = (3,0).
c) indique em qual quadrante cada ponto está localizado.

Os estudantes conseguiram bom desempenho nesta primeira lição, o que demonstra

que conseguiram localizar corretamente pontos no plano cartesiano. Ao indagar se eles tiveram dificuldades na realização dessa tarefa alguns destacaram que não tiveram dificuldades em localizar os pontos pela inserção das coordenadas, embora alguns tenham feito confusão e inserido letras minúsculas ao invés de maiúsculas na indicação do ponto (erro de nomenclatura), o que fazia surgir uma semirreta (vetor) ao invés de um ponto, mas a possibilidade de corrigir quase automaticamente, pois o Geogebra tem essa dinâmica de visualizar o erro quando ele ocorre, puderam fazer as devidas correções. Outro relato interessante, é o pronunciamento da estudante:
Aluna 2: *"Eu errei ao inserir um ponto direto na janela geométrica, mas observei as coordenadas desse ponto geradas na janela da álgebra, pude apagar e refazer a localização corretamente".*

O erro da aluna ao inserir um ponto diretamente na janela geométrica pode ter ocorrido devido a um esquecimento ou não conhecimento do conceito de par ordenado, e a inserção das coordenadas das ordenadas no lugar das abscissas e as abscissas no lugar das ordenadas, erro muito comum em atividades dessa natureza. No entanto, a aluna percebe o erro ao analisar o par ordenado gerado na janela algébrica ao inserir o ponto na janela geométrica. Esse tipo de análise certamente não ocorreria em uma atividade realizada apenas com lápis e papel e a aluna poderia ter que esperar alguns dias para que o professor realizasse a correção da atividade em sala de aula.

Figura 13 – Questão 1 - Resposta da aluna 2 no Geogebra.



Fonte: Registro de atividades desenvolvidas

A questão 2 tinha como objetivo levar os estudantes a compreenderem e representarem geometricamente no plano cartesiano equações lineares com duas incógnitas $x + y = 6$ e também descobrir se um ponto pertencia ao gráfico de uma equação dessa natureza.

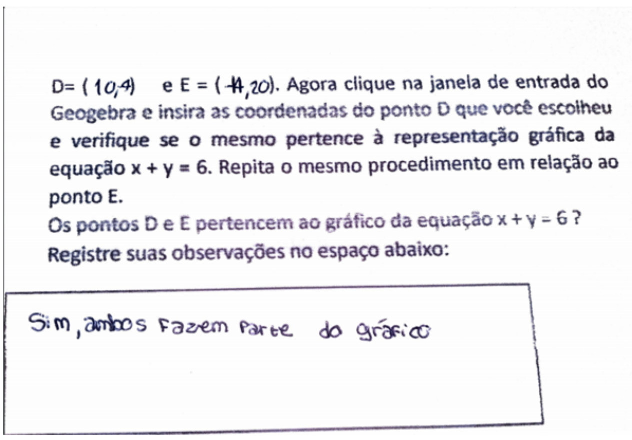
Questão 2: Para representar geometricamente a equação x + y =6, clique no campo de entrada e digite x + y = 6.
a) que forma geométrica tem essa equação no plano cartesiano?
b) faça uma análise da representação geométrica que indica a equação x + y = 6. Responda: (é uma reta, parábola ou círculo?)
c) agora você irá escolher três pontos que pertencem ao gráfico da equação x + y = 6 e verificar a relação entre suas coordenadas na mesma.
d) escreva as coordenadas de dois pontos que você acredita que pertencem à representação geométrica da equação x + y = 6. D = (,) e E = (,). Agora clique na janela de entrada do Geogebra e insira as coordenadas do ponto D que você escolheu e verifique se o mesmo pertence à representação gráfica da equação x + y = 6. Repita o mesmo procedimento em relação ao ponto E. Os pontos D e E pertencem ao gráfico da equação x + y = 6?

a) todos responderam corretamente que aquela equação tinha como forma geométrica uma reta.

b) fizeram a análise corretamente.

c) Dois terços escolheram as coordenadas corretamente. Quando indaguei como escolheram as coordenadas, alguns relataram que puderam visualizar a reta na Janela Geométrica e compreender que havia vários pontos formando aquelas retas, realizando as suas escolhas a partir do que visualizaram na representação geométrica. Dois estudantes relataram que fizeram suas escolhas baseados na soma $x + y = 6$, ou seja, escolher dois números que somados resultassem em 6.

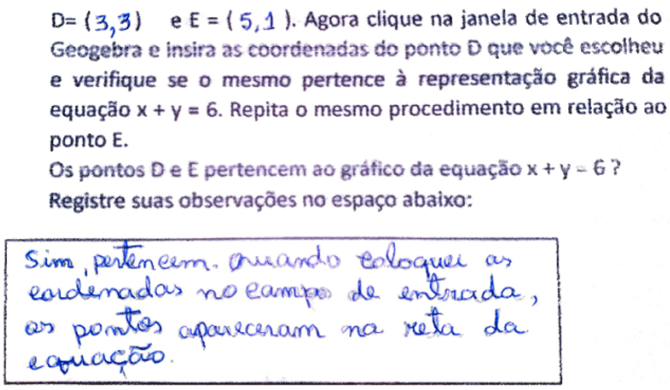
Figura 14 – resposta dada pelo aluno 2.


D= (10,-4) e E = (-14,20). Agora clique na janela de entrada do Geogebra e insira as coordenadas do ponto D que você escolheu e verifique se o mesmo pertence à representação gráfica da equação x + y = 6. Repita o mesmo procedimento em relação ao ponto E.
Os pontos D e E pertencem ao gráfico da equação x + y = 6 ?
Registre suas observações no espaço abaixo:
Sim, ambos fazem parte do gráfico

Fonte: material da pesquisa do autor.

O aluno 2 justificou que respondeu o item corretamente baseado na visualização do gráfico, mas não deixou claro como se deu a escolha dos pares ordenados.

Figura 15 – resposta e justificativa do aluno 3.

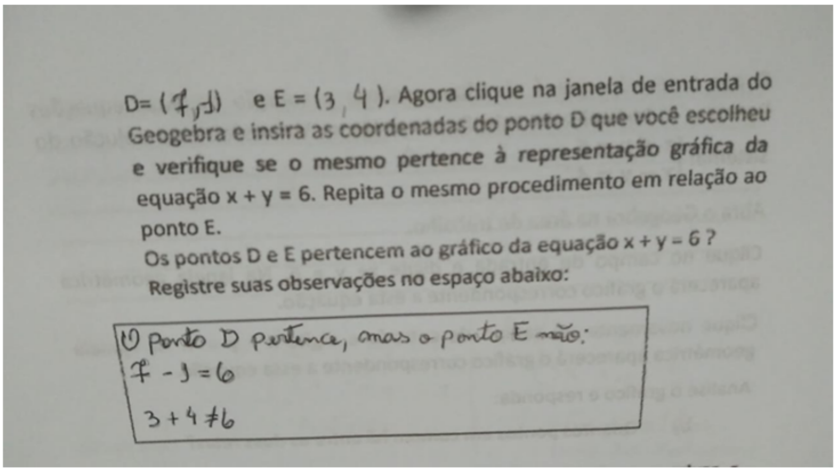

D= (3,3) e E = (5,1). Agora clique na janela de entrada do Geogebra e insira as coordenadas do ponto D que você escolheu e verifique se o mesmo pertence à representação gráfica da equação x + y = 6. Repita o mesmo procedimento em relação ao ponto E.
Os pontos D e E pertencem ao gráfico da equação x + y = 6 ?
Registre suas observações no espaço abaixo:

Sim, pertencem. Quando coloquei as coordenadas no campo de entrada, os pontos apareceram na reta da equação.

Fonte: material da pesquisa do autor.

O aluno 3 respondeu que os pontos escolhidos pertenciam ao gráfico e constatou isso ao inserir as coordenadas no campo de entrada e visualizar os pontos no gráfico

Figura 16 – resposta e justificativa do aluno 5.


D= (7,-1) e E = (3, 4). Agora clique na janela de entrada do Geogebra e insira as coordenadas do ponto D que você escolheu e verifique se o mesmo pertence à representação gráfica da equação x + y = 6. Repita o mesmo procedimento em relação ao ponto E.
Os pontos D e E pertencem ao gráfico da equação x + y = 6 ?
Registre suas observações no espaço abaixo:

O ponto D pertence, mas o ponto E não:
7 - 1 = 6
3 + 4 ≠ 6

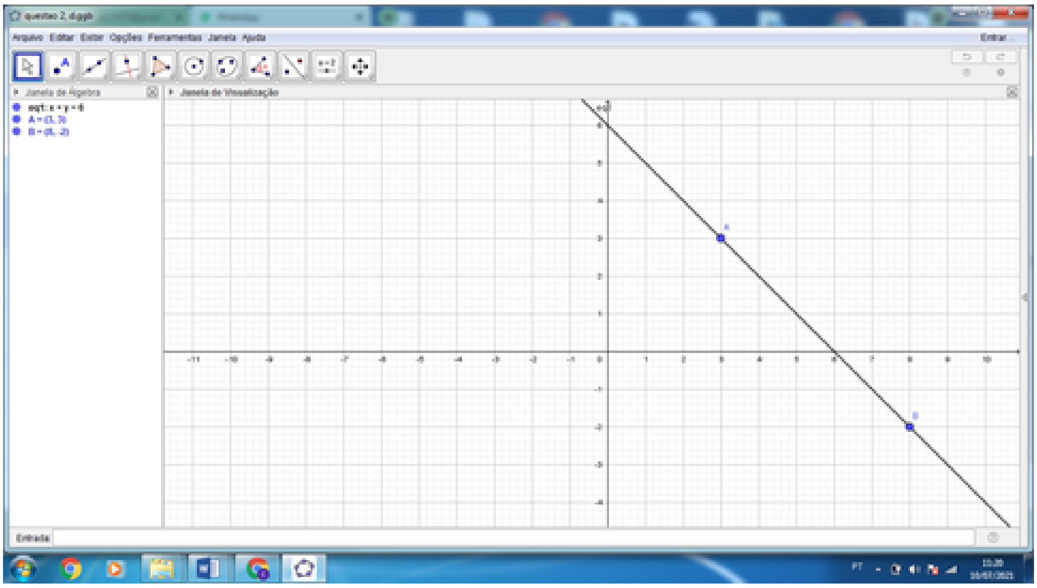
Fonte: material da pesquisa do autor.

O aluno 5 acertou na escolha das coordenadas para o ponto D e errou na escolha das coordenadas do ponto E. Ele justificou a escolha de seus pontos algebricamente, a partir do valor numérico atribuído às incógnitas da equação.

Os exemplos de repostas escolhidos mostram três modos distintos de responder uma mesma questão, e nos exemplos mostrados percebe-se que os alunos que optaram por responder a partir da visualização gráfica obtiveram mais sucesso nas respostas.

d) Apenas um errou essa questão. Eles puderam inserir as coordenadas dos pontos escolhidos no Campo de Entrada e observar se os pontos se localizariam na reta.

Figura 17 – Questão 2 – item d: resposta do aluno 3 no computador.



Fonte: material da pesquisa do autor.

Na questão 3 (apêndice A), de autoria própria a lição consistiu na resolução de um sistema linear com duas equações e duas incógnitas utilizando o Geogebra, sendo que inicialmente os estudantes deveriam resolver o sistema utilizando lápis e papel e em seguida resolver o mesmo sistema utilizando o Geogebra. O objetivo dessa atividade era perceber se a resolução através contribuiria para que os alunos obtivessem mais sucesso na solução dos sistemas, a partir de uma compreensão geométrica da solução do sistema.

Questão 3:

Antes de utilizar o Geogebra, tente resolver o sistema: $\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 4 \end{cases}$ usando lápis e papel.

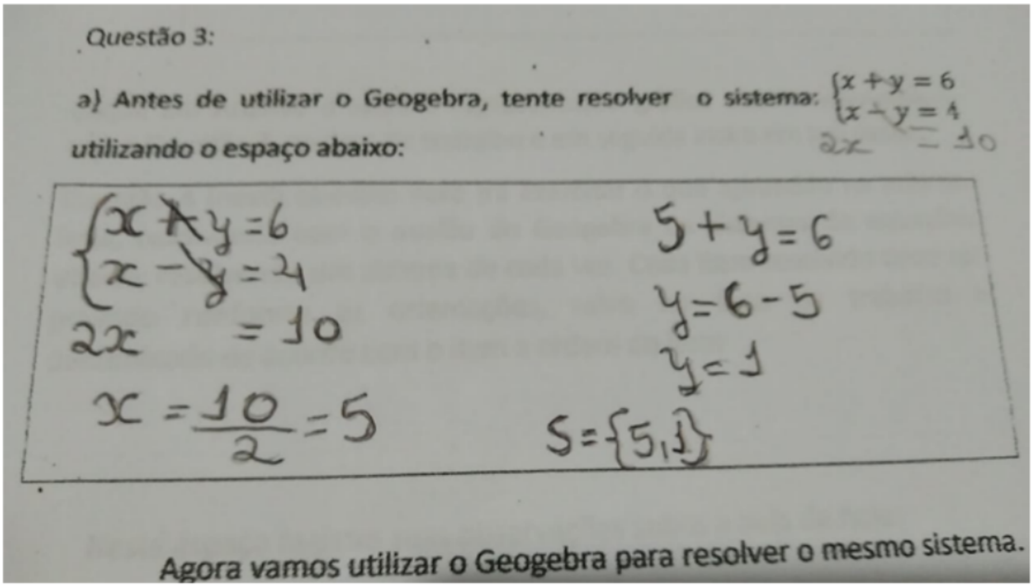
Abra o Geogebra na área de trabalho. Clique no campo de entrada e digite $x + y = 6$. Clique novamente no campo de entrada e digite x – y = 4. Na janela geométrica aparecerá o gráfico correspondente a essa equação. Analise o gráfico e responda:

Quantos pontos em comum há entre as duas retas?

Para verificar as coordenadas do ponto de intersecção é só clicar neste ponto e observar suas coordenadas na janela geométrica ou na janela algébrica. Qual a solução desse sistema? A sua resposta do item [a] é a mesma do Geogebra?

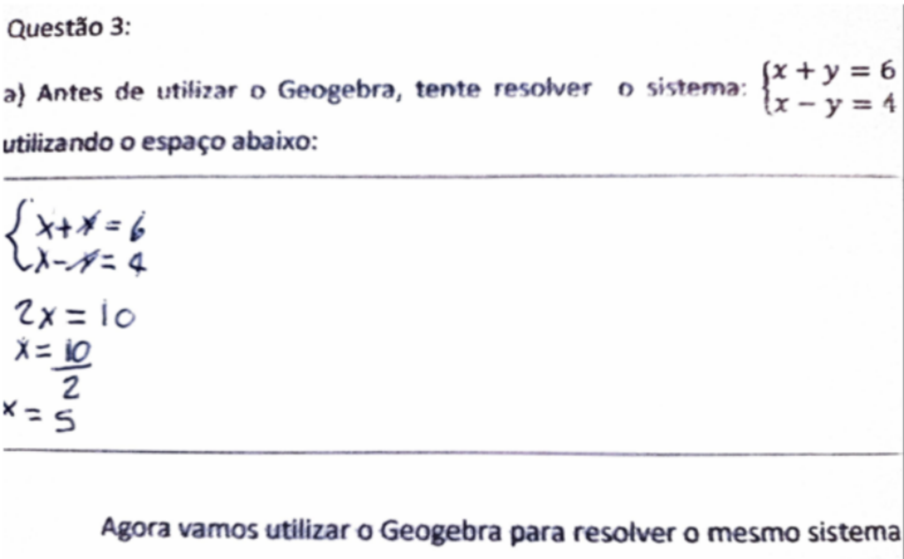
A maioria dos entrevistados não teve dificuldade para resolver utilizando o lápis e papel, e ao resolverem o mesmo sistema utilizando o Geogebra puderam compreender, a partir de toda a sequência didática oferecida, que a solução de um sistema nada mais é que encontrar um ponto de intersecção entre as suas representações geométricas, como destacado na fala de um aluno.

Figura 18 – Resposta do aluno 4 utilizando lápis e papel.



Fonte: Registro de atividades desenvolvidas

Figura 19 – Resposta do aluno 2 utilizando lápis e papel.

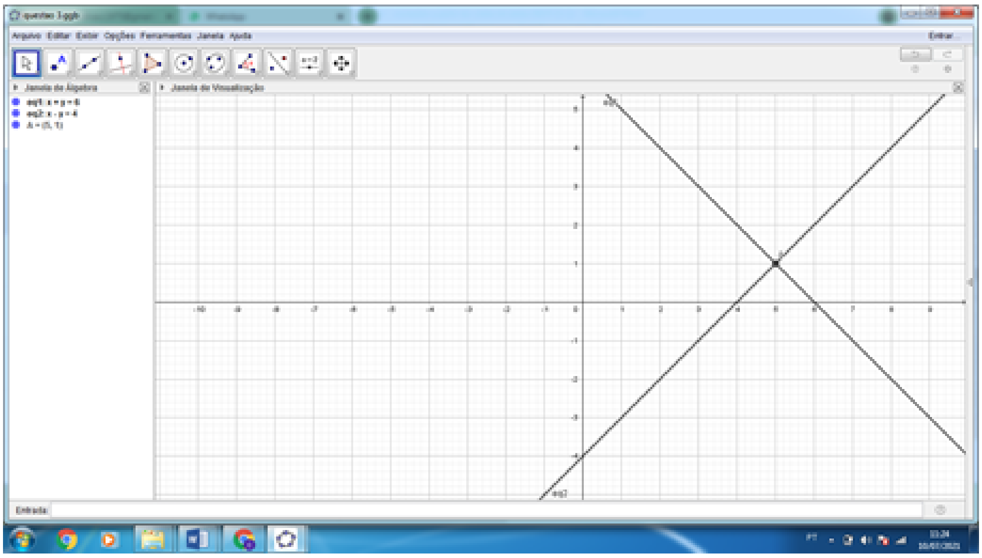


Fonte: Registro de atividades desenvolvidas

A resposta dada pelo aluno 2, determinando apenas o valor de x, ao invés de um dar um par ordenado como resposta pode estar relacionada à não distinção entre uma equação e um sistema de equações, fato comum entre muitos estudantes. Tal deficiência pode ser atenuada quando o aluno tem a oportunidade de confrontar a sua resposta algébrica com a resposta obtida geometricamente através do software.

Aluno 3: *"Já tinha resolvido sistemas de equações em outras ocasiões e até dominava uma técnica de resolução, mas pra mim não fazia muito sentido a solução de um sistema,* *porque que era um par de números ao invés de só um número como nas equações, mas a visualização das retas no Geogebra me ajudou a entender que o par de números da solução são as coordenadas do ponto de intersecção".*

Figura 20 – Questão 3: item b – resolução de sistema pelo aluno 3



Fonte: Registro de atividades desenvolvidas

Na questão 4, em que o objetivo era que eles compreendessem que um sistema linear com duas equações e duas incógnitas pode ter uma, nenhuma ou infinitas soluções, apenas observando as representações geométricas de três sistemas lineares dados, e que eles deveriam inserir no Geogebra e tirar as suas conclusões sobre a solução de cada sistema.

Questão 4: Resolva os sistemas de equações Geogebra abaixo, com o auxílio do Geogebra.

$a)\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases}$

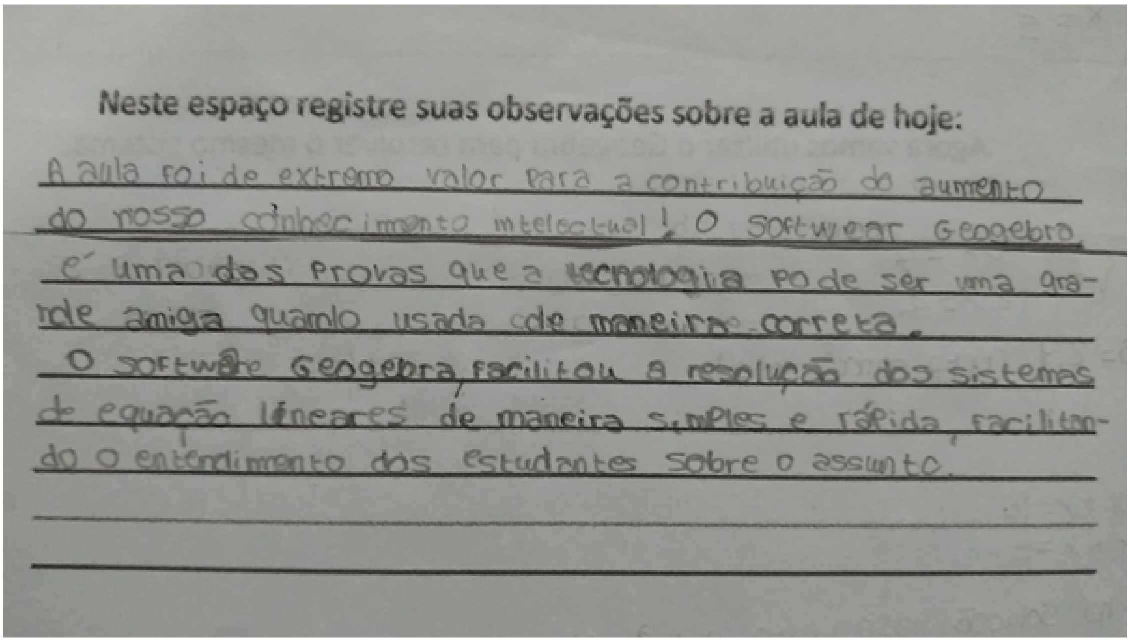
$b)\begin{cases} 3x + y = 10 \\ 3x + y = 5 \end{cases}$

$c)\begin{cases} 2x + 2y = 5 \\ 4x + 4y = 10 \end{cases}$

Apesar de alguns estudantes não dominarem corretamente as nomenclaturas que relacionam as posições entre retas, conseguiram associar retas concorrentes a uma única solução, a maioria usou o termo "retas que se cruzam", conseguiram associar corretamente retas paralelas a sistemas sem solução sendo que a maioria usou o termo "retas que não se cruzam" e conseguiram compreender que se as retas ocupam as mesmas posições terão várias ou infinitas soluções, sendo que o aluno 4 respondeu da seguinte forma: "as retas são coincidentes portanto o limite é infinito".
Registro da opinião do aluno 3: *"A aula foi de extremo valor para a contribuição do aumento do nosso conhecimento intelectual! O software Geogebra é uma das provas que a tecnologia pode ser uma grande amiga quando usada de maneira correta. O software*

Geogebra facilitou a resolução de sistemas de equações lineares de maneira simples e rápida, facilitando o entendimento dos alunos sobre o assunto.”

Figura 21 – Relato da aluna 3



Neste espaço registre suas observações sobre a aula de hoje:

A aula foi de extremo valor para a contribuição do aumento do nosso conhecimento intelectual! O softwear Geogebra é uma das provas que a tecnologia pode ser uma grande amiga quando usada de maneira correta.

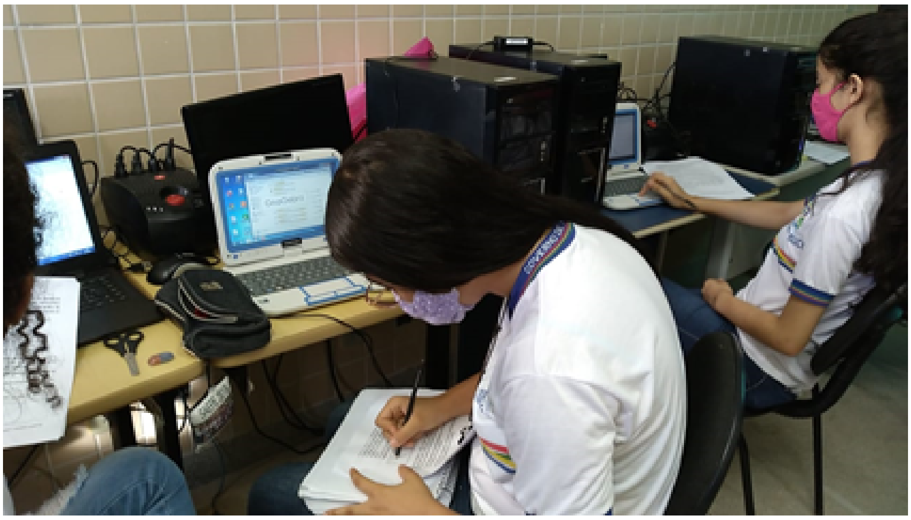
O software Geogebra, facilitou a resolução dos sistemas de equação lineares de maneira simples e rápida, facilitando o entendimento dos estudantes sobre o assunto.

Fonte: material da pesquisa do autor

Figura 22 – Aluno respondendo atividade no primeiro encontro

Fonte: material da pesquisa do autor

Figura 23 – Alunas respondendo atividade no primeiro encontro



Fonte: material da pesquisa do autor

Segundo encontro: Aplicação do questionário 2, contendo dois problemas.

Problema 1: O perímetro de um retângulo mede 42 cm e a diferença entre o comprimento e a largura desse retângulo é de 5 cm. Chame de x o comprimento e y a largura e faça o que se pede.
a) utilizando lápis e papel, desenhe um retângulo com as medidas do comprimento e da largura x e y e escreva uma equação que represente o perímetro desse retângulo.
b) escolha dois pares ordenados (x, y) que você acredita que sejam soluções da equação que você representou para indicar o perímetro desse retângulo. Em seguida complete a tabela abaixo com as coordenadas desses pontos:

Ponto	x	y	(x, y)
A			
B			

c) abra o Geogebra na área de trabalho. No campo de entrada de dados insira a equação criada por você para representar o perímetro do retângulo. Qual representação geométrica no Geogebra tem essa equação?
d) utilizando o ícone ponto ou o campo de entrada de dados insira os pontos A e B que você escolheu no item [b]. Os pontos escolhidos pertencem ao gráfico da equação criada para o perímetro?
e) você consegue escrever uma equação que represente a diferença entre o comprimento e a largura do retângulo? Qual a equação?
f) utilizando a função ponto ou o campo de entrada de dados insira os pontos C e D. Os pontos escolhidos pertencem ao gráfico da equação?
g) com as equações que você criou, escreva um sistema que represente as situações trabalhadas, utilizando as equações. Qual o par ordenado que você acredita ser a solução desse sistema?
h) represente no Geogebra o sistema linear que você obteve no item anterior e verifique a solução desse sistema. Qual a solução encontrada?

a) metade dos alunos escreveu corretamente a equação e a outra metade escreveu o sistema que contemplava todo o enunciado, o que demonstra que alguns não souberam diferenciar corretamente equação de sistema.

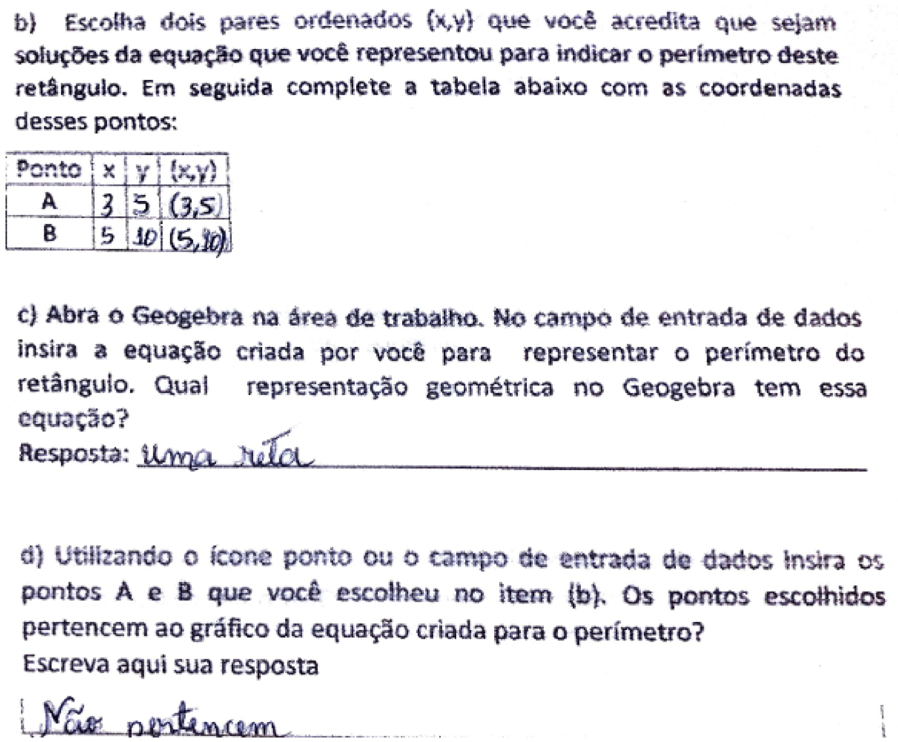
b) Dois alunos escolheram os dois pares ordenados corretamente, três alunos escolheram corretamente apenas um par ordenado e um aluno errou nas duas escolhas, o que demonstra que há ainda dificuldade em fazer escolhas deste tipo.

c) todos responderam corretamente.

d) todos avaliaram corretamente, mostrando que souberam localizar corretamente os pontos escolhidos no plano cartesiano e analisar a pertinência.

As três figuras a seguir são registros de respostas utilizando lápis e papel, aos itens [b], [c] e [d] de três dos alunos participantes da pesquisa.

Figura 24 – Resposta do aluno.


b) Escolha dois pares ordenados (x,y) que você acredita que sejam soluções da equação que você representou para indicar o perímetro deste retângulo. Em seguida complete a tabela abaixo com as coordenadas desses pontos:

Ponto	x	y	(x,y)
A	3	5	(3,5)
B	5	10	(5,10)

c) Abra o Geogebra na área de trabalho. No campo de entrada de dados insira a equação criada por você para representar o perímetro do retângulo. Qual representação geométrica no Geogebra tem essa equação?

Resposta: uma reta

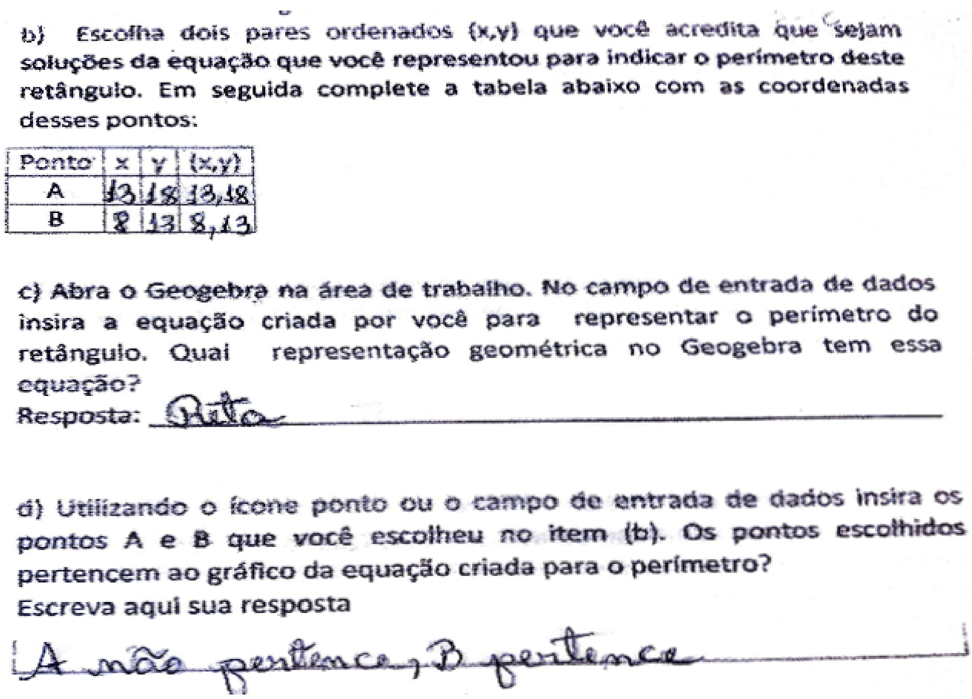
d) Utilizando o ícone ponto ou o campo de entrada de dados insira os pontos A e B que você escolheu no item (b). Os pontos escolhidos pertencem ao gráfico da equação criada para o perímetro?

Escreva aqui sua resposta

Não pertencem

Fonte: material da pesquisa do autor

Figura 25 – Resposta do aluno.



b) Escolha dois pares ordenados (x,y) que você acredita que sejam soluções da equação que você representou para indicar o perímetro deste retângulo. Em seguida complete a tabela abaixo com as coordenadas desses pontos:

Ponto	x	y	(x,y)
A	13	18	13,18
B	8	13	8,13

c) Abra o Geogebra na área de trabalho. No campo de entrada de dados insira a equação criada por você para representar o perímetro do retângulo. Qual representação geométrica no Geogebra tem essa equação?

Resposta: Reta

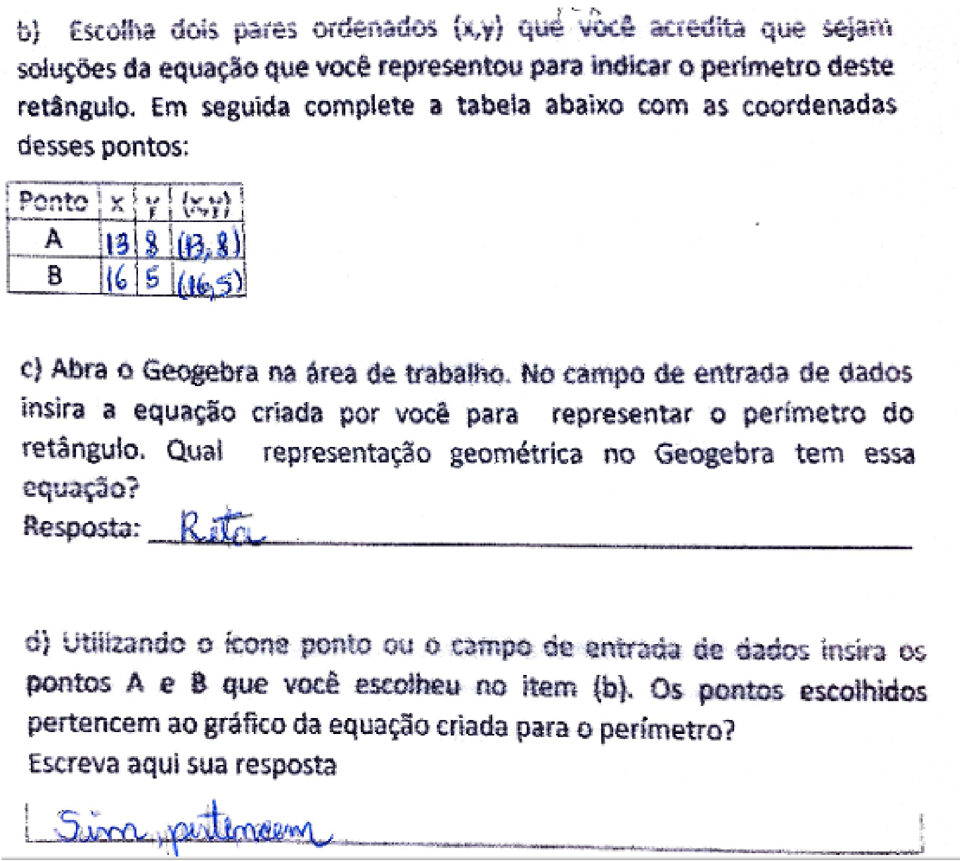
d) Utilizando o ícone ponto ou o campo de entrada de dados insira os pontos A e B que você escolheu no item (b). Os pontos escolhidos pertencem ao gráfico da equação criada para o perímetro?

Escreva aqui sua resposta

A não pertence, B pertence

Fonte: material da pesquisa do autor

Figura 26 – Resposta do aluno em lápis e papel.



b) Escolha dois pares ordenados (x,y) que você acredita que sejam soluções da equação que você representou para indicar o perímetro deste retângulo. Em seguida complete a tabela abaixo com as coordenadas desses pontos:

Ponto	x	y	(x,y)
A	13	8	(13,8)
B	16	5	(16,5)

c) Abra o Geogebra na área de trabalho. No campo de entrada de dados insira a equação criada por você para representar o perímetro do retângulo. Qual representação geométrica no Geogebra tem essa equação?

Resposta: Reta

d) Utilizando o ícone ponto ou o campo de entrada de dados insira os pontos A e B que você escolheu no item (b). Os pontos escolhidos pertencem ao gráfico da equação criada para o perímetro?

Escreva aqui sua resposta

Sim, pertencem

Fonte: material da pesquisa do autor

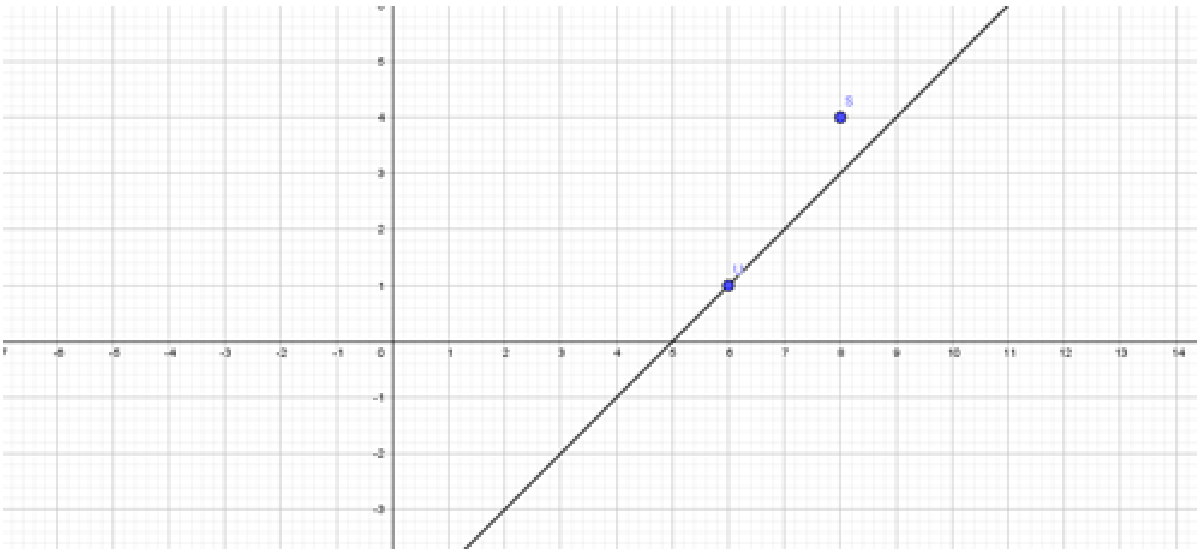
e) todos escreveram corretamente a equação e quanto aos pares ordenados escolhidos, 4 alunos escolheram os dois pares ordenados corretamente, 1 aluno errou nas duas escolhas e 1 aluno escolheu um par ordenado corretamente e errou na escolha do outro par.

f) todos conseguiram avaliar corretamente suas escolhas.

g) todos escreveram o sistema corretamente, 4 alunos determinaram o par ordenado corretamente e dois erraram.

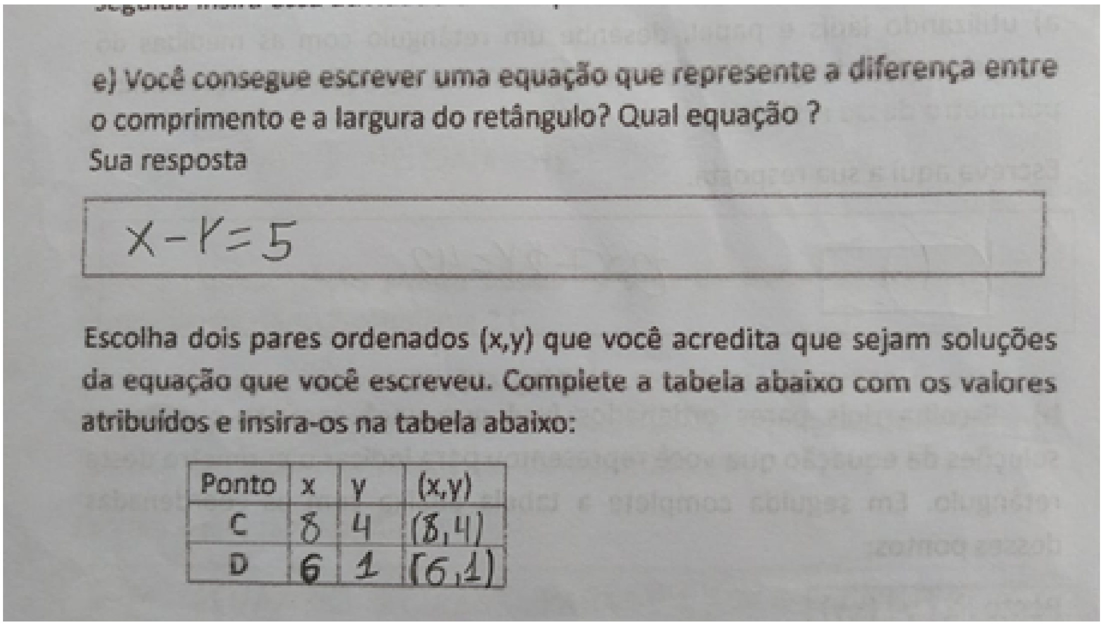
h) Todos conseguiram fazer a representação corretamente bem como foram capazes de avaliar se tinham acertado ou errado a solução do sistema.

Figura 27 – Questão 1 – item e – Resposta do aluno 1



Fonte: material da pesquisa do autor

Figura 28 – Resposta do aluno 1 da mesma questão no lápis e papel.


e) Você consegue escrever uma equação que represente a diferença entre o comprimento e a largura do retângulo? Qual equação ?

Sua resposta

X-Y=5

Escolha dois pares ordenados (x,y) que você acredita que sejam soluções da equação que você escreveu. Complete a tabela abaixo com os valores atribuídos e insira-os na tabela abaixo:

Ponto	x	y	(x,y)
C	8	4	(8,4)
D	6	1	(6,1)

Fonte: material da pesquisa do autor

Problema 2: Dois móveis A e B ocupam no instante zero, respectivamente as posições 12 m e 30 m, quando entram em M.U. (movimento uniforme), de acordo com as funções horárias $y_A = 2x + 12$ e $y_B = 2x + 30$, onde y é a posição em metros em relação ao tempo x em segundos. Em que instante x os móveis ocuparão posições iguais?

a) represente o problema dado por meio de um sistema de equações.

b) abra o Geogebra e insira as equações dadas. Analise a representação simultânea das equações. Esse sistema tem solução? Justifique sua resposta.

c) O problema tem solução se $y_A = 2x+12$ e $y_B = 2x + 30$? Justifique sua resposta.

d) abra o Geogebra e insira a representação gráfica do item [c]. Analise e compare a sua resposta do item [c] com a resposta obtida com auxílio do Geogebra.

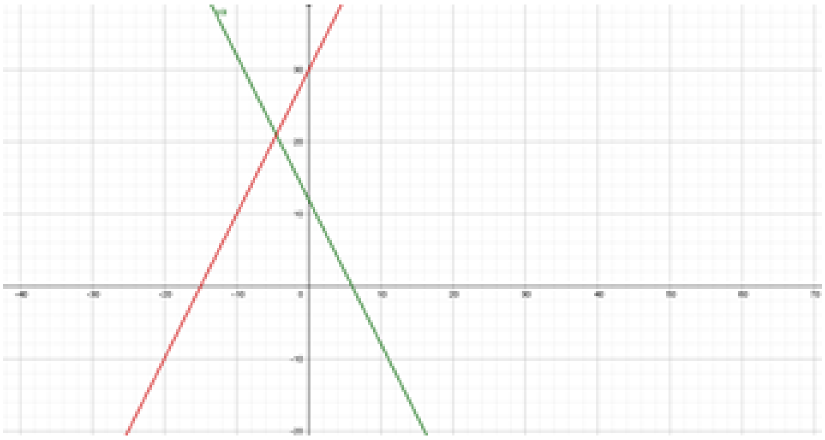
a) Este item foi respondido corretamente por 5 alunos e apenas um errou.

b) As respostas apontam que conseguiram se apropriar do conceito de solução de um sistema com base em sua representação geométrica.

c) Quatro alunos resolveram o sistema corretamente e dois deles erraram o valor de uma das incógnitas, mas todos responderam corretamente que neste caso os móveis se encontrariam já que o sistema tem solução única.

d) Um aluno apenas só escreveu o par ordenado do ponto de intersecção da representação geométrica do sistema e os demais afirmaram que o sistema tinha solução; quatro responderam corretamente e uma aluna indicou que teria errado, pois a solução do Geogebra diferia da sua.

Figura 29 – Questão 2 – item c- resolução do aluno 4 no Geogebra



Fonte: material da pesquisa do autor

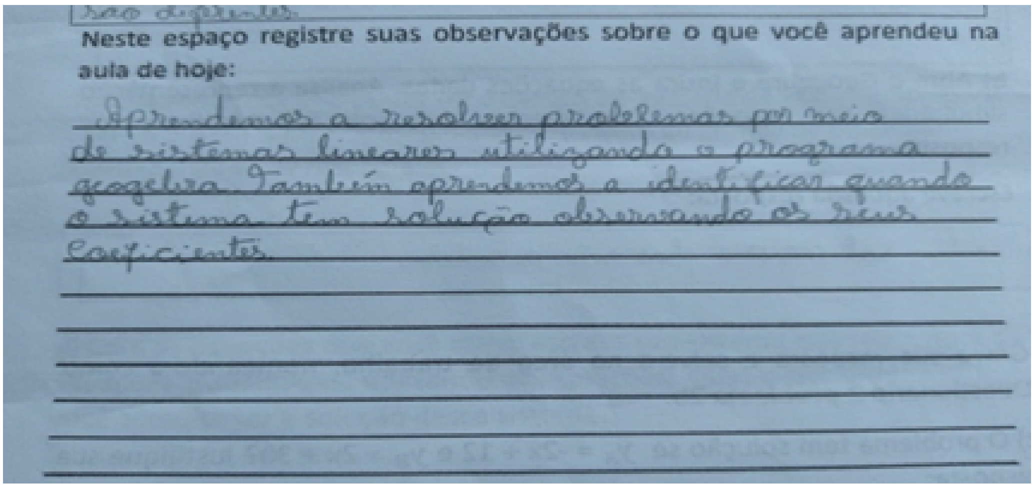
Ao responder o que eles acharam sobre o que tinham aprendido neste encontro como relatos escritos, destacamos:

Aluno 3: " Aprendi a resolver com mais precisão, os problemas de equações lineares. E descobri que o software Geogebra pode contribuir para a otimização do tempo, ao resolver questões de equações lineares, e outros problemas que envolvem matemática".

Aluna 5: "Na aula de hoje aprendemos a resolver problemas que envolvem sistemas de equações através do Geogebra e vi que a observação da representação geométrica do sistema nos ajudou muito a resolver e entender as respostas de um sistema"

Aluna 6: "Aprendemos a resolver problemas por meio de sistemas lineares utilizando o programa Geogebra. Também aprendemos a identificar quando o sistema tem solução observando os seus coeficientes".

Figura 30 – Registro da aluna 6

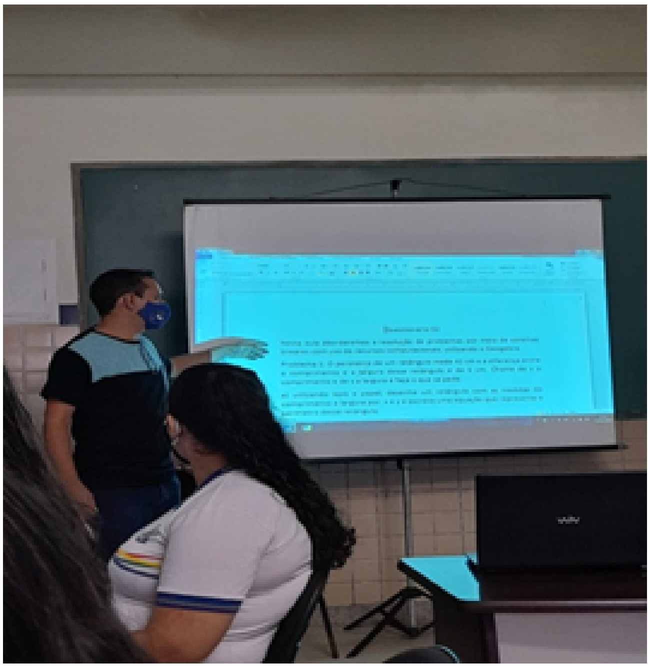


Neste espaço registre suas observações sobre o que você aprendeu na aula de hoje:

Aprendemos a resolver problemas por meio de sistemas lineares utilizando o programa geogebra. Também aprendemos a identificar quando o sistema tem solução observando os seus coeficientes.

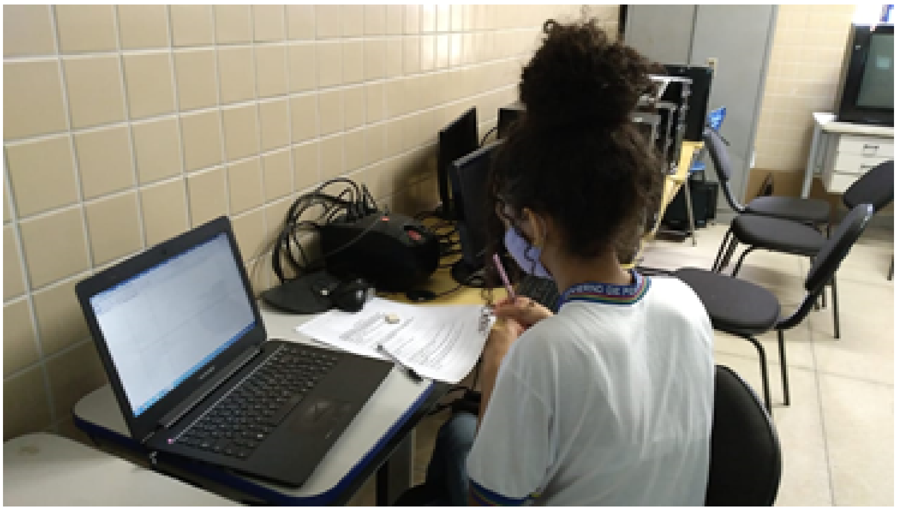
Fonte: material da pesquisa do autor

Figura 31 – Início do segundo encontro



Fonte: material da pesquisa do autor

Figura 32 – Aluna respondendo atividade do segundo encontro



Fonte: material da pesquisa do autor

Terceiro encontro: o tema abordado foi a resolução de equações do segundo grau e ocorreu a aplicação do questionário 03, que continha 4 questões. O objetivo principal é que consigam aprender a associar as raízes de uma equação do segundo grau aos zeros de uma função quadrática.

Questão 1: Considere a função $y = x^2 - 7x + 6$.
Utilizando lápis e papel tente responder quantos e quais os zeros dessa função.
Abra o Geogebra e insira no campo de entrada de dados a função quadrática $y = x^2 - 7x + 6$.
Observe a sua representação geométrica na janela algébrica e responda quantos e quais são os zeros dessa função.
A sua resposta dos itens [a] e [b] foram iguais?

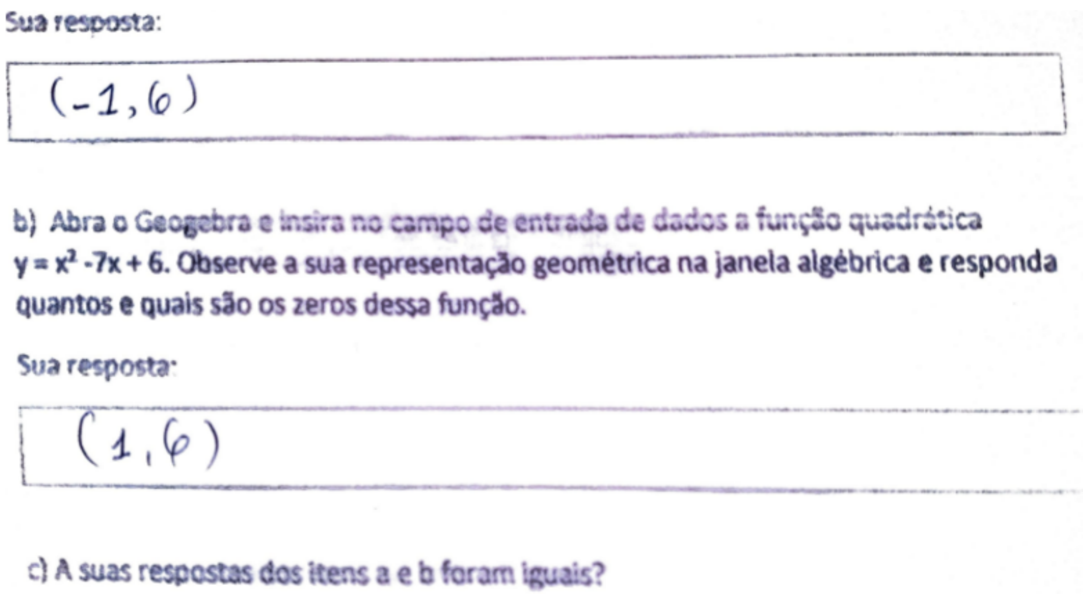
a) Quatro alunos conseguiram resolver corretamente e dois erraram uma das raízes, fazendo confusão quanto aos sinais.

b) todos conseguiram inserir corretamente a equação e interpretar corretamente quais as raízes.

c) Eles deveriam confrontar as suas respostas dos itens a e b tendo a oportunidade de avaliar quando estão certos ou errados e todos o fizeram corretamente, inclusive associando o número de zeros de uma função ao número de raízes da equação quando $y = 0$.

As figuras abaixo, 33 e 34, são registros em papel e lápis das respostas de 2 alunos.

Figura 33 – Resposta do aluno utilizando lápis e papel.


Sua resposta:

(-1, 6)

b) Abra o Geogebra e insira no campo de entrada de dados a função quadrática $y = x^2 - 7x + 6$. Observe a sua representação geométrica na janela algébrica e responda quantos e quais são os zeros dessa função.

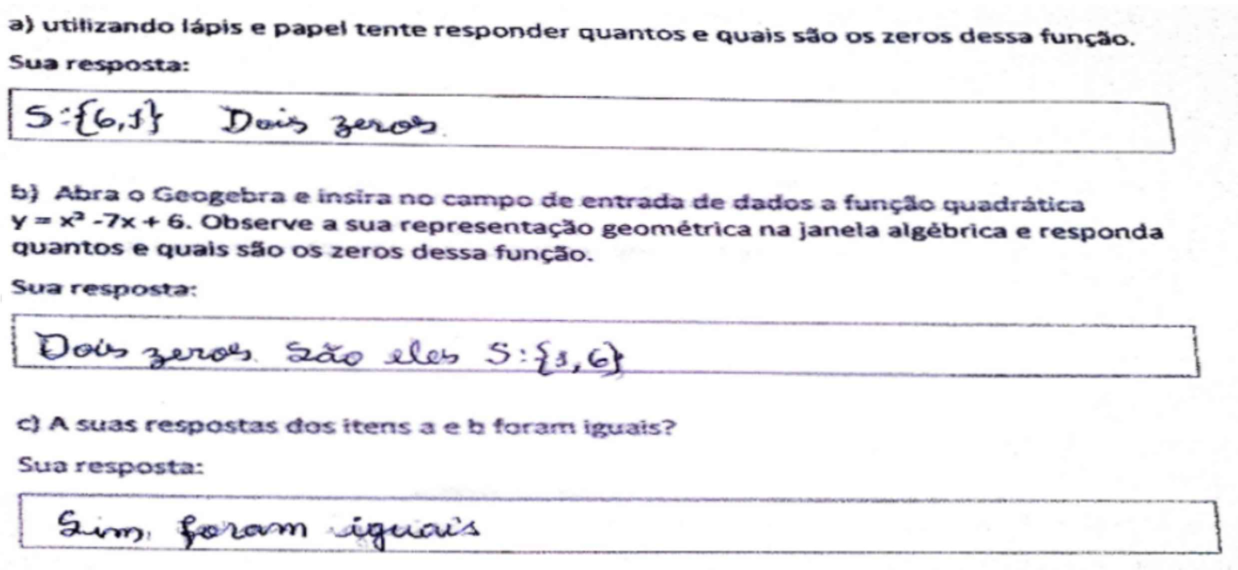
Sua resposta:

(1, 6)

c) A suas respostas dos itens a e b foram iguais?

Fonte: material da pesquisa do autor

Figura 34 – Resposta do aluno utilizando lápis e papel.



a) utilizando lápis e papel tente responder quantos e quais são os zeros dessa função.

Sua resposta:

S:{6,1} Dois zeros

b) Abra o Geogebra e insira no campo de entrada de dados a função quadrática $y = x^2 - 7x + 6$. Observe a sua representação geométrica na janela algébrica e responda quantos e quais são os zeros dessa função.

Sua resposta:

Dois zeros. São eles S:{1,6}

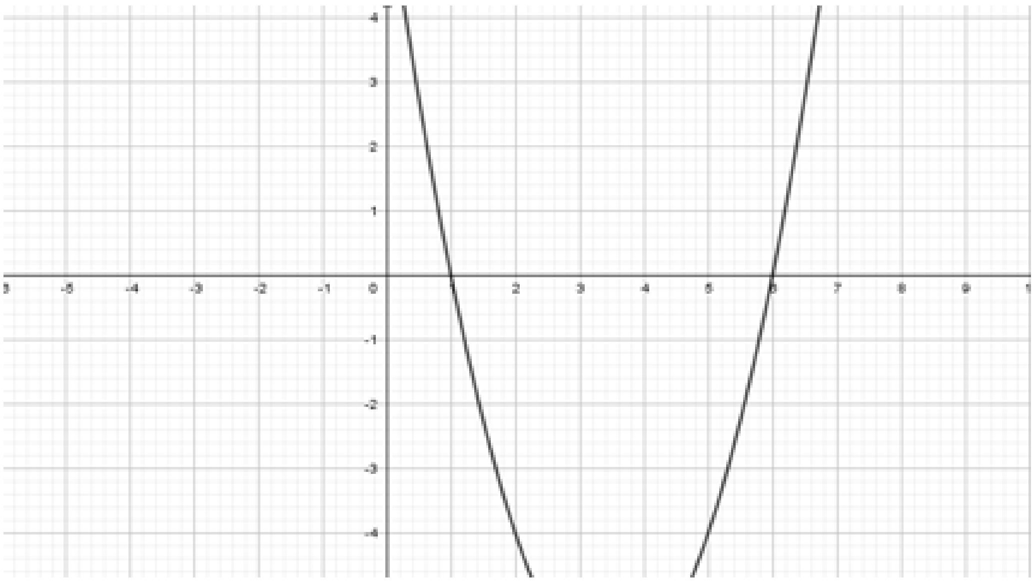
c) A suas respostas dos itens a e b foram iguais?

Sua resposta:

Sim, foram iguais

Fonte: material da pesquisa do autor

Figura 35 – Resolução do item b pelo aluno 4



Fonte: material da pesquisa do autor

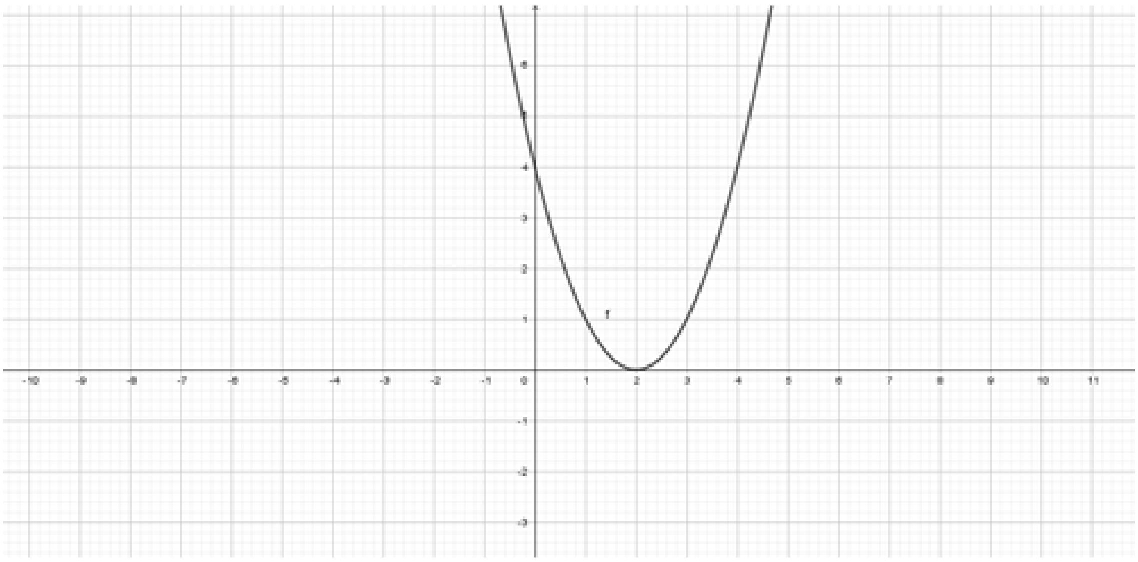
Questão 2: Considere a função $y = x^2 - 4x + 4$.
Escreva a equação que determina os zeros dessa função. Quantos são as raízes dessa equação?
Abra o Geogebra e insira no campo de entrada de dados a função $y = x^2 - 4x + 4$. Observe a sua representação geométrica na janela algébrica e responda quantos e quais são os zeros dessa função.
A sua resposta dos itens [a] e [b] foram iguais?

a) três alunos resolveram corretamente a questão, inclusive compreendendo que quando as raízes são iguais a função só tem um zero, dois alunos resolveram a equação mas interpretaram que tinha dois zeros, já que encontraram duas raízes, e um deles errou a questão.

b) Todos conseguiram resolver o item corretamente, isto é, obter a correta interpretação do gráfico gerado neste item e avaliar suas respostas.

c) Aqueles que afirmaram que a equação tinha duas raízes compreenderam que a função tinha um único zero e isso se justificava porque os valores de x eram iguais.

Figura 36 – Questão 3 – item 2- Resolução do aluno 1 no Geogebra



Fonte: material da pesquisa do autor

Questão 3: Em uma jogada de golfe o jogador dá uma tacada na bola que entra em movimento obedecendo à função horária $y = -0{,}25x^2 + 3x - 5$, onde x é a posição em metros em relação ao ponto de lançamento e y é a altura em metros. Qual a distância em metros entre as posições inicial e final da bola? (Resolva esse problema observando a representação geométrica dessa função).

Todos os alunos inseriram corretamente a equação no campo de entrada e entenderam que a solução seria obtida ao encontrar os zeros da função. A maioria entendeu que 2 e 10 seriam os zeros da função, mas dois alunos erraram a valor da distância da bola, que seria de 8 metros, tendo um deles respondido 12 metros, e outro respondido 10 metros.

Questão 4: Com o auxílio do Geogebra, responda: qual das equações abaixo não tem raízes reais?

a) $x^2 + 7x + 8$

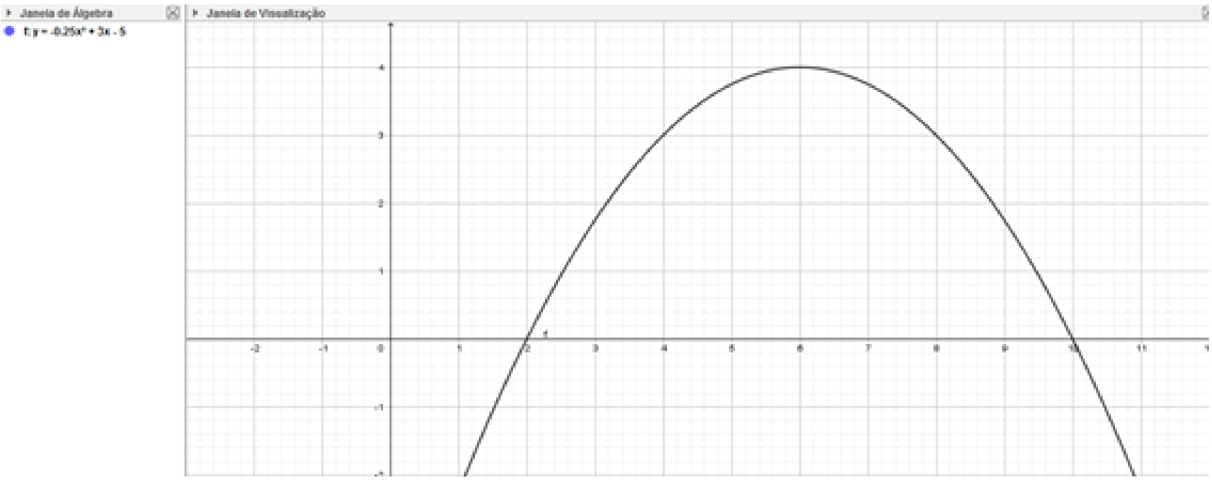
b) $2x^2 - 8x + 8$

c) $2x^2 - 6x = -5$

d) $(x+2).(x-3) = 0$

Na questão 4 eles teriam que identificar dentre quatro equações qual não teria raízes reais utilizando o Geogebra e todos responderam corretamente, o que mostra que compreenderam que se a parábola associada a uma equação do segundo grau não intercepta o eixo das abscissas a equação não tem raízes reais.

Figura 37 – Questão 3: item 2- Resolução do aluno 1 no Geogebra



Fonte: material da pesquisa do autor

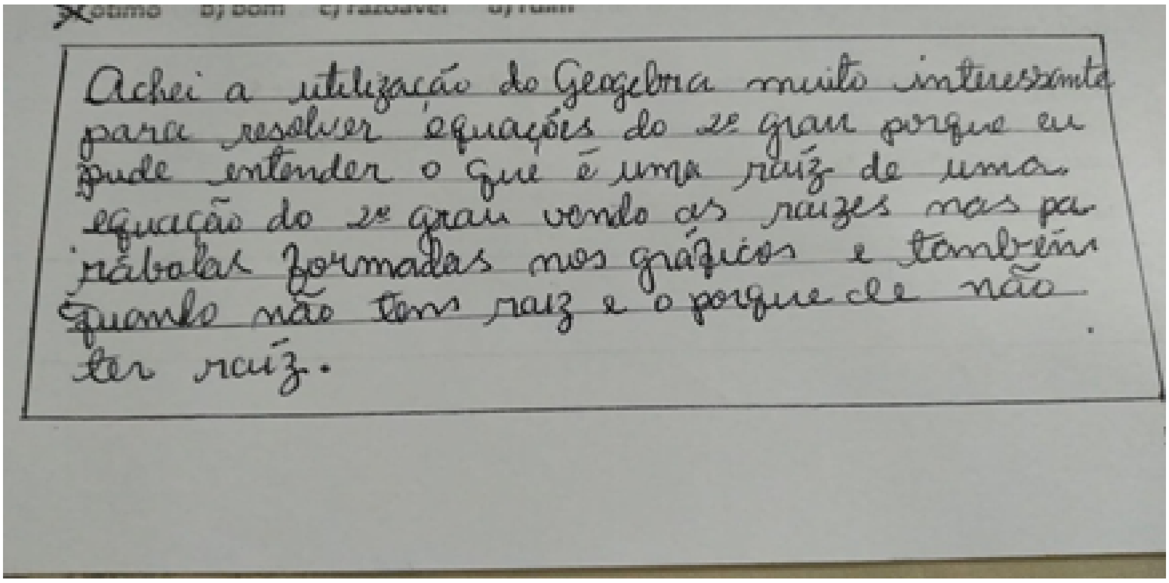
Para finalizar eles registraram suas observações sobre o encontro:

Aluno 1: "Hoje aprendemos a identificar quando as equações do segundo grau têm e não têm raízes e utilizamos o Geogebra para maior compreensão das questões".

Aluno 3: "Hoje aprendemos a resolver equações do 2º grau através de cálculos e do programa Geogebra. Também pudemos compreender melhor o que são raízes e números reais e não reais. "

Aluno 5: " Achei a utilização do Geogebra muito interessante para resolver equações do segundo grau, porque pude entender o que é uma raiz de uma equação do segundo grau vendo as raízes nas parábolas formadas nos gráficos e também quando não tem raiz, o porquê de não ter raiz. "

Figura 38 – Registro do aluno 5



Achei a utilização do Geogebra muito interessante
para resolver equações do 2º grau porque eu
pude entender o que é uma raiz de uma
equação do 2º grau vendo as raízes nas pa-
rábolas formadas nos gráficos e também
quando não tem raiz e o porque de não
ter raiz.

Fonte: material da pesquisa do autor

4 Análise das Respostas na pesquisa realizada com os professores.

Também entrevistamos, por meio de questionário (Apêndice B), três professores da EREFEM Sofia Feijó Sampaio. Esta pesquisa foi realizada previamente, com o objetivo de obter um panorama do nível de conhecimento dos alunos da turma que participaria da pesquisa, quanto à utilização de recursos computacionais.

No quadro a seguir, denominado Quadro 1, apresentamos um resumo das respostas dadas pelos professores.

Figura 39 – Quadro 1

Questionamento	Professor 1	Professor 2	Professor 3
Área de formação	Matemática	Matemática	Matemática
Ano de conclusão da graduação	2002	2006	2004
Especialização/ano de conclusão	Programação do Ensino da matemática/2006	Ensino da matemática/ 2012	Ensino da Matemática/ 2018
Há quantos anos é professor	24 anos	18 anos	18 anos
Em quantas escolas trabalha	3	1	2
Vínculo empregatício	Contrato temporário	Contrato temporário	Contrato temporário
Modalidades de atuação	Ensino fundamental e médio	Ensino fundamental e médio	Ensino fundamental e médio
Número de encontros de formação continuada que participou nos últimos 3 anos	Mais de 10	1 a 5	6 a 10
Dos encontros de formação continuada que participou houve algum encontro em que o tema foi a utilização de recursos computacionais no ensino de matemática?	Não	Não	Não
Utiliza recursos computacionais em suas aulas de matemática? Se sim, descreva como se dá essa utilização.	Não	Sim, por meio de plataformas digitais, google meet, google Chrome e Zoom	Não
Você conhece o software Geogebra?	Sim	Não	Não
Alguma das formações continuadas que você participou teve como tema a utilização do Geogebra?	Não	Não	Não
Você utiliza ou já utilizou o Geogebra em suas aulas?	Não	Não	Não

Fonte: Material da pesquisa do autor

Pelas respostas dadas pelos professores às indagações feitas percebe-se que participaram de várias formações ao longo do último anos, exceto o Professor 2, que não estava trabalhando como professor nos últimos dois anos, tendo sido contratado recentemente, mas nas formações oferecidas a utilização de recursos computacionais no ensino da matemática não é abordada, apesar de ser esta pesquisa realizada apenas com professores da rede estadual, esta realidade se estende aos municípios, o que demonstra que os entes públicos não dão importância ao tema.

Nota-se um desconhecimento dos professores quanto ao software Geogebra que tem se mostrado uma excelente ferramenta auxiliar no ensino de matemática, pois, dos três professores apenas um afirmou conhecer o software e nenhum deles o utiliza, o próprio conceito de recursos computacionais nas aulas de matemática confunde-se com ferramenta de acesso ao ensino remoto, como é o caso do professor 2, que citou a utilização de plataformas como o Google meet, Zoom e Chrome como recursos computacional utilizado nas aulas e nenhum deles citou a utilização de Datashow, equipamento atualmente disponível em quase todas as escolas.

Outro fator a considerar é a justificativa dos professores para não utilizarem recursos computacionais, que vão desde sinal de internet, falta de equipamentos, até o fato de os livros didáticos não enfatizarem a sua utilização, o que demonstra que ainda há um forte vínculo da prática dos professores com a utilização dos livros didáticos.

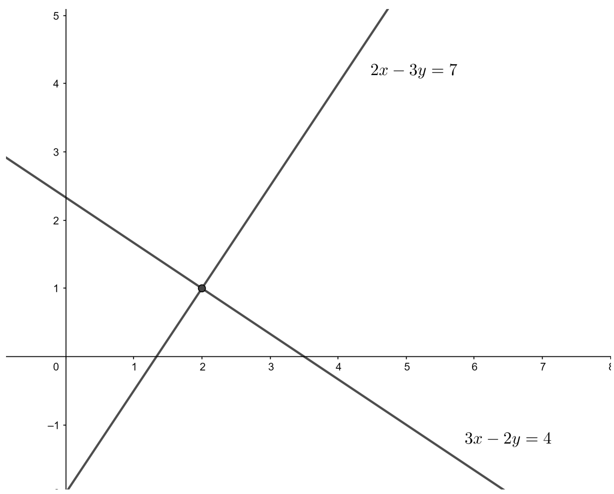
Apesar de terem bastante experiência na docência, com um mínimo de 18 anos, a não utilização e a falta de conhecimento na utilização de recursos computacionais voltados para o ensino da matemática, especialmente o Geogebra, demonstra uma realidade que certamente se estende à grande maioria das escolas de nossa região, o que de certo modo afeta a qualidade do ensino e aprendizagem de matemática nos ensinos fundamental e médio, com grande impacto no ensino superior.

5 Resultados

Nossa pesquisa traz alguns pontos que tratamos de discutir na composição dos resultados, em tópicos a seguir:

A partir das análises realizadas no estudo, verificamos dificuldades que são também observadas nos demais conteúdos de matemática que são trabalhados na escola, portanto, não são novas as dificuldades dos alunos. Esse fato aparece claro no nosso trabalho que verificamos através dos comentários dos estudantes quanto a saberes que são próprios do uso de tecnologias. Por exemplo, o aluno 1, comenta que para ele o cruzamento de duas retas expõe a intersecção em um único ponto e este ponto é a solução do sistema, pois na prática com uso do papel e lápis ele observa o par de coordenadas (x, y), mas não tem segurança quanto à compreensão do significado de solução do sistema. No entanto, quando a solução do sistema é reforçada por meio de simulação chega a ter um significado mais apurado, pois no computador a representação da figura onde isso ocorre é a mais significativa. Por exemplo:

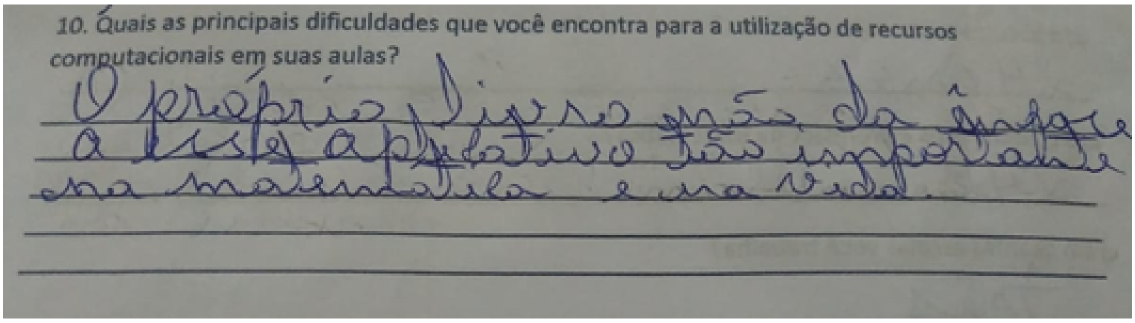
Figura 40 – Solução do sistema visto no geogebra



Fonte: Material da pesquisa do autor

As maneiras como os livros abordam os objetos de conhecimento refletem consideravelmente na didática de muitos professores e professoras de matemática, fato que fica evidente em nossa pesquisa, cujos resultados constam no Quadro 1, quando um dos professores pesquisados alegou que não utiliza recursos computacionais em suas aulas porque os livros didáticos não dão ênfase a esse tipo de recurso.

Figura 41 – Justificativa do professor 1 sobre a não utilização de softwares em suas aulas.


10. Quais as principais dificuldades que você encontra para a utilização de recursos computacionais em suas aulas?

O próprio livro não dá ênfase a este aplicativo tão importante na matemática e na vida.

Fonte: Registros de atividades desenvolvidas

A BNCC (BRASIL - 2018) enfatiza a necessidade de utilização nas aulas de matemática, de recursos tecnológicos como softwares de Geometria dinâmica. Nossa pesquisa, realizada com o grupo de professores entrevistados neste trabalho, mostrou que as formações continuadas promovidas pelos poderes públicos não contemplam a utilização de recursos computacionais nas aulas de matemática, de modo que possibilitem aos docentes um domínio razoável da utilização de tais recursos. A pesquisa também evidencia o perfil de muitos professores de matemática, que têm boa formação acadêmica, vários anos de experiência em sala de aula, mas têm uma formação deficiente quando se trata de utilização de recursos tecnológicos. Pois uma boa parte sequer utiliza o Datashow, aparelho disponível em praticamente todas as escolas e quando se trata da utilização de softwares voltados para as aulas de matemática, a grande maioria desconhece o que são e/ou como são utilizados.

O ensino da matemática de forma tradicional, como vem sendo ainda trabalhado, com um professor transmissor de conhecimentos e estudantes passivos, é um modo didático que ainda impera em nossas escolas e isso se traduz em um ensino em que as dificuldades de aprendizagem dos estudantes persistem, resultando em baixos resultados dos estudantes e professores frustrados. Para mudar essa realidade faz-se necessário mudanças no processo, com a incorporação de novas tecnologias, como os softwares de Geometria dinâmica, que possibilitem aos estudantes serem sujeitos ativos no processo de aprendizagem, que eles mesmos possam construir seus conhecimentos com a intermediação dos professores, como evidencia o construcionismo de Papert. Os softwares de Geometria dinâmica, como é o caso do Geogebra, possibilitam que os estudantes ao manusear um computador ou mesmo um aparelho celular, possam transitar entre os diferentes modos de representações semióticas, como denominou Raymond Duval, compreendendo conceitos algébricos que se tornam mais significativos quando associados as suas representações geométricas. Tal observação ao realizar a sequência didática proposta neste estudo de caso, podemos verificar na prática a validade de tais teorias e o impacto delas no processo de ensino e aprendizagem.

As construções e respostas dadas pelos estudantes mostraram que a utilização de tais recursos possibilitou aos mesmos a possibilidade de transitar entre as áreas de álgebra e geometria e a utilização dos diferentes registros semióticos foi fundamental para a compreensão do conceito de raiz de uma equação do segundo grau, bem como da compreensão do conceito de par ordenado indicador do ponto que se define como solução de um sistema linear, possibilitando também que compreendessem quando um sistema tem solução única, infinitas soluções ou não tem solução, associando tais conceitos às suas representações geométricas, embora as nomenclaturas dos tipos de solução não tenham sido exploradas na sequência didática.

Os resultados obtidos a partir da sequência de atividades demonstraram que a utilização de recursos computacionais possibilitou que os estudantes aprendessem a partir de construções dinâmicas e simulações, como sujeitos ativos no processo de aprendizagem, representando equações, sistemas e resolvendo problemas geometricamente, extraindo significados dessas representações ou ainda verificando a validade de respostas obtidas a partir das resoluções obtidas com lápis e papel. Conseguiram observar a simulação do movimento da bola em M.U.V. (na questão 3, do questionário 3), que resultou em uma parábola e fizeram observações interessantes que não eram pedidos na questão, como a associação de um valor de y à altura máxima atingida pela bola, e também a existência do infinito quando indagados qual seria a altura máxima da parábola na questão 1 do questionário 3. Acredito que os alunos que participaram da pesquisa vão sempre lembrar da intersecção da parábola com o eixo das abscissas ao se depararem com equações do segundo grau e de um par de retas paralelas, concorrentes ou coincidentes ao se depararem com sistemas com duas equações e duas incógnitas.

Sendo este trabalho um estudo de caso, ele aponta para a necessidade de futuras pesquisas nessa área, que certamente este trabalho não comportaria. Além do Geogebra há atualmente diversas ferramentas tecnológicas voltadas para o ensino de matemática e ciências correlatas que ainda não têm a devida divulgação, necessitando de mais estudos, de trabalhos que os tornem mais conhecidos e mais utilizados pelos professores. Como exemplo podemos citar o Logo, o Super Logo, Scratch e o Wordwall. A produção de histórias em quadrinhos e a gamificação também surge como exemplos de recursos computacionais que são bastante atrativos e podem instigar a curiosidade, a criatividade e a melhoria do processo de ensino e aprendizagem.

6 Considerações finais

O suporte oferecido por ambientes digitais pode contribuir para acelerar o processo de apropriação do conhecimento e ainda, o contexto em que a Geometria, através de um software dinâmico pode favorecer, e muito, a compreensão da natureza do conhecimento matemático. Partindo dessa ótica vivenciamos a sequência de atividades aplicada neste trabalho que permitiu observar na prática as teorias pesquisadas neste trabalho, de que o ambiente informatizado com recursos computacionais adequados poderia fazer dos alunos aprendizes com atitudes ativas, reflexivas, construcionistas e protagonistas da própria aprendizagem. Considero que o desempenho obtido pelos alunos foi bastante proveitoso e ocorreu em um ambiente de entusiasmo, de interatividade e de produtividade, o que geralmente não ocorre em um ambiente tradicional. É fato que a utilização de recursos computacionais por si só não significa um afastamento do ensino tradicional, mas a sua utilização, atrelada a situações-problema que instiguem os alunos à reflexão, à elaboração de estratégias, a atitudes investigativas, com autonomia para corrigirem os próprios erros, ou seja, serem sujeitos ativos no processo, podem fazer uma grande diferença na vida de professores e de alunos.

A utilização de softwares como o Geogebra pode contribuir e muito para o processo de ensino e aprendizagem, para que ocorra de forma integrada com a realidade atual, em que nossos alunos convivem diariamente com ambientes virtuais, internet, jogos eletrônicos e redes sociais, porque tais softwares permitem aos alunos a manipulação, a simulação, a interatividade e a possibilidade de que os alunos possam identificar e corrigir os próprios erros, aprendendo com os próprios erros, sem a necessidade de professores que lhes apontem esses erros.

Espero que este trabalho possa contribuir com a formação dos professores e professoras que por ventura venham a consultá-lo, de modo que reflitam sobre suas práticas e se necessário possam modificá-las e possam elevar a qualidade de suas aulas e do processo de ensino e aprendizagem, contribuindo com a melhoria da formação dos profissionais da Educação Básica, o que atende ao objetivo do PROFMAT. Particularmente, como ação local, pretendo contribuir com a formação dos meus colegas de trabalho, nas escolas e nos municípios em que trabalho, divulgando minha pesquisa e os resultados obtidos, bem como propondo a realização de formações continuadas voltadas para o tema, que possam contribuir para que nossas escolas possam ofertar a nossos alunos um ensino de melhor qualidade e mais conectados com a realidade atual e com as inovações tecnológicas, especialmente no ensino de matemática.

Faz-se necessário também que os profissionais da educação, especialmente os professores de matemática, estejam abertos a mudanças e cientes da necessidade de atualização constante. Mesmo sabendo das dificuldades enfrentadas principalmente nas escolas públicas, onde muitos alunos não dispõem de computadores e acesso a internet de qualidade, cabe aos professores serem atores importantes na atualização das ferramentas e metodologias de ensino. As respostas dadas pelos professores pesquisados refletem uma realidade que precisa ser revista e modificada o quanto antes: a carência na formação de professores quanto à utilização das inovações tecnológicas nas aulas de matemática e a sua incorporação às suas práticas. Cabe aos entes públicos em primeira instância ofertar formações e cursos aos docentes de matemática, no tocante ao tema abordado, mas cabe também aos docentes a busca por melhorar a sua formação e qualificação, para que se atualizem e se conectem com os novos tempos, com uma nova era em que uma escola apenas com lousa, livros didáticos e professor transmissor de conhecimentos não funciona, é retrógrada e desconectada da atual realidade.

Referências

BALESTRI, R. *Matemática – interação e tecnologia.* São Paulo: Editora Leya, 2016.

BOCCARDO, M. E. *Um estudo sobre o uso do Geogebra na aprendizagem de geometria analítica no ensino médio. Dissertação (Mestrado Profissional).* São José do Rio Preto.: Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, 2017.

BOYER, C. B. *História da Matemática. 1ª ed.* São Paulo: Tradução: Elza F. Gomide., 1974.

BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino fundamental.* Brasília: MEC-SEF, 2001.

BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular.* Brasília: Ministério da educação, 2018.

CHAQUIAM, M. *Ensaios Temáticos: História e matemática em sala de aula.* Belém: SBM, 2017.

CHAVANTE, E.; PRESTES, D. *Matemática – 2º ano do ensino médio.* São Paulo: Editora Quadrante, 2016.

COLETIVA, A. *Conexões com a matemática – 2º ano do ensino médio.* São Paulo: Editora Moderna, 2013.

D'AMBROSIO, U. *Etnomatemática: Arte ou técnica de explicar e conhecer.* São Paulo: Editora Ática, 1998.

DANTE, L. R. *MATEMÁTICA: contextos e aplicações – 2º ano do ensino médio.* São Paulo: Editora Ática, 1998.

DUVAL, R. *Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática.* Campinas.: Papirus, 2003.

EVES, H. *Introdução à História da Matemática.* UNICAMP: Tradução: Hygino Hugueros Domingues, 2004.

GRAVINA, M. A.; SANTAROSA, M. L. *A APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA EM AMBIENTES INFORMATIZADOS.* Brasília.: IV Congresso RIBIE, 1998.

MORAN, J. M. *A Educação que desejamos: novos desafios e como chegar lá.* Campinas.: Papirus, 2012.

NASCIMENTO, A. R. *Modelagem matemática com simulação computacional na aprendizagem de funções. Tese (Doutorado).* Brasília.: Universidade Federal de Pernambuco, 2007.

OLIVERA, G. B. D. *Estudo do escalonamento de sistemas lineares através do software Geogebra. Dissertação (Mestrado Profissional).* Uberaba: Universidade do Triângulo Mineiro., 2019.

PAPERT, S. *Logo: Computadores e Educação.* São Paulo: Brasiliense, 1985.

PAPERT, S. *A máquina das crianças: repensando a escola na era da informática.* Porto Alegre.: Artes Médicas, 1994.

PEDRO, M. D. A. S. *O Geogebra como uma ferramenta no processo de escalonamento de matrizes e resolução de sistemas lineares Dissertação (Mestrado Profissional).* Cruz das Almas: Universidade Federal do Recôncavo Baiano, 2016.

PITOMBEIRA, J. B.; ROQUE, T. M. *Tópicos de História da Matemática.* Rio de Janeiro: SBM, 2012.

SANTANA, G. E. *SANTANA, E. G. Sistemas Lineares 3 x 3: uma visão geométrica com o Geogebra 3D.Dissertação (Mestrado Profissional).* Salvador: Universidade Federal da Bahia., 2015.

SILVA, A. L. A. D. *Estudo do escalonamento de sistemas lineares através do software Geogebra. Dissertação (Mestrado Profissional).* Feira de Santana: Universidade Estadual de Feira de Santana., 2019.

SILVA, G. M. D. *Um estudo sobre o uso do Geogebra na aprendizagem de geometria analítica no ensino médio. Dissertação (Mestrado Profissional).* São Carlos.: Universidade Federal de São Carlos, 2016.

SILVA, J. C. S. E. *As novas tecnologias no contexto escolar: uma abordagem sobre aplicações do Geogebra em trigonometria. Dissertação (Mestrado Profissional).* São Carlos.: USP, 2015.

SOUZA, E. A. D. *O uso do Geogebra como ferramenta no ensino de sistemas lineares. Dissertação (Mestrado Profissional).* Vitória: Universidade Federal do Espírito Santo, 2020.

VALENTE, M. J. *Computadores e conhecimento: repensando a educação.* Campinas.: Gráfica Central da UNICAMP, 1993.

Imprime uma página indicando o início dos apêndices

Apêndices

APÊNDICE A – Questionários

Questionário 01

Questões de manuseio do software

Lição 1: marcando pontos no plano cartesiano utilizando o Geogebra.

Recomendação: Antes de iniciar a atividade, clique na área de trabalho do computador e crie uma pasta com seu nome. Em seguida, Abra o Geogebra na área de trabalho do computador.

Questão 1. Nesta questão você irá aprender a localizar pontos no plano cartesiano utilizando o Geogebra, inserindo as coordenadas do ponto, ou utilizando o ícone ponto e clicando direto na janela geométrica (gráfica).

No campo de entrada insira os pontos de acordo com as coordenadas cartesianas a seguir: $A = (2, 3)$, $B = (-2, 3)$, $C = (-1, -4)$

Clicando no ícone ponto, localize os pontos $D = (4, -1)$, $E = (0, 3)$ e $F = (3, 0)$.

Indique em qual quadrante cada ponto está localizado.

Resposta do aluno

Lição 2: Aprendendo a gravar no Geogebra.

Para gravar o que você reproduziu no Geogebra você deve seguir os seguintes passos:

1º: clique em Arquivo (canto superior esquerdo do Geogebra)

2º: clique no ícone Gravar como

3º: clique no ícone Área de trabalho

4º: clique dentro do retângulo Nome do arquivo e nomeie o arquivo.

Vamos exercitar?

Seguindo o passo a passo acima, salve a representação gráfica obtida na questão 1, nomeando-a como questão 1, na área de trabalho e em seguida insira essa atividade em sua pasta.

Lição 3: Aprendendo a representar geometricamente uma equação no plano cartesiano.

(Nesta lição você aprenderá a representar geometricamente no plano cartesiano uma equação linear com duas incógnitas, descobrir as coordenadas de um ponto que pertence ao gráfico e também verificar se um ponto pertence a uma representação geométrica).

Questão 2: Para representar geometricamente a equação $x + y = 6$, clique no campo de entrada e digite $x + y = 6$.

Observe o gráfico gerado na janela geométrica e em seguida responda as questões que seguem abaixo:

a) Que forma geométrica tem essa equação no plano cartesiano? Resposta:

---

b) Faça uma Análise da representação geométrica que indica a equação $x + y = 6$ responda: (é uma reta, parábola ou circulo?)
Sua resposta

c) Agora você irá escolher três pontos que pertencem ao gráfico da equação $x + y = 6$ e verificar a relação entre suas coordenadas na mesma. No Geogebra, clique no ícone ponto e em seguida clique no gráfico da equação $x + y = 6$. Ao clicar a primeira vez no gráfico aparecerá o ponto A, cujas coordenadas cartesianas aparecerão na janela algébrica (lado esquerdo da tela). Preencha as coordenadas do ponto A na tabela abaixo. Repita o procedimento para obter as coordenadas dos pontos B e C.

Ponto	x	y	(x,y)
A			
B			
C			

d) Escreva as coordenadas de dois pontos que você acredita que pertencem à representação geométrica da equação $x + y = 6$.
$D = (\quad)$ e $E = (\quad)$.

Agora clique na janela de entrada do Geogebra e insira as coordenadas do ponto D que você escolheu e verifique se o mesmo pertence à representação gráfica da equação $x + y = 6$.

Repita o mesmo procedimento em relação ao ponto E.

Os pontos D e E pertencem ao gráfico da equação $x + y = 6$?

Registre suas observações no espaço abaixo:

Clique em Arquivo e siga o passo a passo da lição 2 para salvar a representação gráfica obtida nomeando-a como Questão 2, na área de trabalho e em seguida insira essa atividade em sua pasta.

Lição 4: Aprendendo a representar geometricamente um sistema linear de duas equações com duas incógnitas.

Nesta lição você irá aprender a representar geometricamente um sistema linear de duas equações com duas incógnitas.

Questão 3:

a) Antes de utilizar o Geogebra, tente resolver o sistema utilizando o espaço a seguir:

$$x + y = 6$$
$$x - y = 4.$$

Agora vamos utilizar o Geogebra para resolver o mesmo sistema.

O par ordenado que é simultaneamente a solução de duas equações lineares, é denominado solução do sistema. Vamos obter a solução do sistema:

$$x + y = 6$$
$$x - y = 4.$$

Abra o Geogebra na área de trabalho. Clique no campo de entrada e digite $x + y = 6$. Na janela geométrica aparecerá o gráfico correspondente a esta equação.

Clique novamente no campo de entrada e digite $x - y = 4$. Na janela geométrica aparecerá o gráfico correspondente a essa equação.

Analise o gráfico e responda:

b) Quantos pontos em comum há entre as duas retas?

c) Para verificar as coordenadas do ponto de intersecção é só clicar neste ponto e observar suas coordenadas na janela geométrica ou na janela algébrica. Qual a solução deste sistema? A sua resposta do item a é a mesma obtida no Geogebra? Sua resposta

Clique em Arquivo e salve a representação gráfica obtida nomeando-a como Questão 3, na área de trabalho e em seguida insira em sua pasta. Questão 4 (nesta questão você irá exercitar o que aprendeu na aula de hoje, resolvendo com o auxílio do Geogebra os sistemas de equações abaixo, resolvendo um sistema de cada vez. Cada item resolvido deve ser gravado conforme as orientações, salvo na área de trabalho e denominado de acordo com a ordem do item.

a) $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x + y = 10 \\ 3x + y = 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + 2y = 5 \\ 4x + 4y = 10 \end{cases}$

Neste espaço registre suas observações sobre a aula de hoje:

Questionário 02

Nesta aula abordaremos a resolução de problemas por meio de sistemas lineares com uso de recursos computacionais, utilizando o Geogebra.

Problema 1: O perímetro de um retângulo mede $42cm$ e a diferença entre o comprimento e a largura desse retângulo é de $5cm$. Chame de x o comprimento e de x a largura e faça o que se pede.

a) utilizando lápis e papel, desenhe um retângulo com as medidas x e y e escreva uma equação que represente o perímetro desse retângulo.

Escreva aqui a sua resposta

b) Escolha dois pares ordenados (x, y) que você acredite que sejam soluções da equação que representa o perímetro deste retângulo. Em seguida complete a tabela abaixo com as coordenadas desses pontos:

Ponto	x	y	(x,y)
A			
B			

c) Abra o Geogebra na área de trabalho. No campo de entrada insira a equação que representa o perímetro do retângulo. Qual a forma da representação geométrica dessa equação?

Resposta:

d) Utilizando o ícone ponto ou o campo de entrada insira os pontos A e B que você escolheu no item (b). Os pontos escolhidos pertencem ao gráfico da equação do perímetro?

Escreva aqui sua resposta

Observação: No ícone gravar, salve a representação gráfica obtida nomeando-a como Questionário 2 (questão 1-b), na área de trabalho e em seguida insira essa atividade em sua pasta.

e) Você consegue escrever uma equação que represente a diferença entre o comprimento e a largura do retângulo? Qual equação?
Sua resposta

Escolha dois pares ordenados (x, y) que você acredita que sejam soluções da equação encontrada . Complete a tabela abaixo com os valores atribuídos e insira-os na tabela abaixo:

Ponto	x	y	(x,y)
C			
D			

Abra o Geogebra e no campo de entrada insira a equação que você escreveu no item (e).

f) Utilizando a função ponto ou o campo de entrada de dados insira os pontos C e D. Os pontos escolhidos pertencem ao gráfico da equação?

Escreva aqui a sua resposta:

g) Com as equações que você criou, escreva um sistema que represente as situações trabalhadas, utilizando as equações. Qual o par ordenado que você acredita ser a solução desse sistema?

Escreva aqui a sua resposta:

h) Represente no Geogebra o sistema linear (representação geométrica) que você obteve no item anterior e verifique a solução desse sistema. Qual a solução encontrada?

Resposta:

Observação: No ícone gravar, salve a representação gráfica obtida nomeando-a como Questão 1- h -questionário 2, na área de trabalho e em seguida insira essa atividade em sua pasta. Problema 2: Dois móveis A e B ocupam no instante zero, respectivamente as

posições $12m$ e $30m$, quando entram em M.U. (movimento uniforme), de acordo com as funções horárias $y_A = 2x + 12$ e $y_B = 2x + 30$, onde y é a posição em metros em relação ao tempo x em segundos. Em que instante x os móveis A e B ocuparão posições iguais?

a) Represente o problema dado por meio de um sistema de equações.

Escreva aqui sua resposta:

b) Abra o Geogebra e insira as equações dadas. Analise a representação simultânea das equações. Esse sistema tem solução? Justifique sua resposta.

Escreva aqui sua resposta:

Grave sua resposta e salve-a na área de trabalho, nomeando-a como Questionário 2-problema 2b.

c) O problema tem solução se $y_A = -2x + 12$ e $y_B = 2x + 30$? Justifique sua resposta:

Escreva aqui sua resposta:

d) Abra o Geogebra e Insira a representação gráfica do sistema de equações do item (c). Analise e compare a sua resposta do item (c) com a resposta obtida com o auxílio do Geogebra.

Escreva aqui sua resposta:

Salve a representação gráfica obtida e salve-a na área de trabalho, nomeando-a como Questionário 2-problema 2 C. Comparando as representações gráficas nas duas situações é possível estabelecer uma relação entre os coeficientes das equações do sistema e as posições relativas das retas que os representam?

Escreva aqui sua resposta

Neste espaço registre suas observações sobre o que você aprendeu na aula de hoje:

Questionário 03

O objetivo dessa atividade é que você aprenda a associar as raízes de uma equação do segundo grau ao conceito de zeros de uma função quadrática, que tem correspondente com base na sua representação geométrica e a partir de então, resolver problemas que envolvam equações do segundo grau utilizando o software Geogebra.

Questão 1. Considere a função $y = x^2 - 7x + 6$.

a) utilizando lápis e papel tente responder quantos e quais são os zeros dessa função.

Sua resposta:

b) Abra o Geogebra e insira no campo de entrada de dados a função quadrática $y = x^2 - 7x + 6$. Observe a sua representação geométrica na janela algébrica e responda quantos e quais são os zeros dessa função.

Sua resposta:

c) A suas respostas dos itens a e b foram iguais?

Sua resposta:

Observação: Salve a sua resposta do Geogebra na área de trabalho com o nome Questionário 03 – Questão 1 e arquive na sua pasta.

Questão 2. Considere a função $y = x^2 - 4x + 4$.

a) escreva a equação que determina os zeros dessa função. Quantas são as raízes dessa equação?

b) abra o Geogebra e insira no campo de entrada a função $y = x^2 - 4x + 4$.

c) observe a representação geométrica dessa função e responda quantas e quais as raízes da equação $x^2 - 4x + 4 = 0$.

Sua resposta:

Observação: Salve a sua resposta do Geogebra na área de trabalho com o nome Questionário 03 – Questão 2 e arquive na sua pasta.

Questão 3: Em uma jogada de golfe o jogador dá uma tacada na bola que entra em movimento obedecendo à função $y = -0,25x^2 + 3x - 5$, onde x é a posição em metros em relação ao ponto de lançamento e y é a altura em metros. Qual a distância em metros entre as posições inicial e final da bola? (Resolva esse problema observando a representação geométrica dessa função).

Sua resposta:

Observação: Salve a sua resposta do Geogebra na área de trabalho com o nome Questionário 03 – Questão 3 e arquive na sua pasta.

Questão 4: Com o auxílio do Geogebra, responda: qual das equações abaixo não tem raízes reais?

a) $x^2 + 7x + 8 = 0$

b) $2x^2 - 8x + 8 = 0$

c) $2x^2 - 6x = -5$

d) $(x + 2).(x - 3) = 0$

Agora responda os seguintes questionamentos:

I) o que você achou da utilização do Geogebra para compreender quando uma equação tem uma, duas ou nenhuma raiz?

   a) ótimo

   b) bom

   c) razoável

   d) ruim

II) o que você achou da utilização do Geogebra para resolver os problemas propostos?

   a) ótimo

   b) bom

   c) razoável

   d) ruim

Registre suas observações sobre a aula de hoje.

APÊNDICE B – Sequência didática

Esta sequência didática, voltada para uma turma do 2º ano do Ensino Médio pretende abordar a utilização de recursos computacionais, mais especificamente o Geogebra, como ferramenta auxiliar na resolução de sistemas de equações lineares com duas incógnitas bem como de equações do 2º grau, tendo como objetivo que o software, a partir da relação entre as representações algébricas e geométricas propicie ao discente melhor compreensão de conceitos como raiz de uma equação e solução de um sistema. Detalhamos a nossa sequência a seguir:

QUAIS HABILIDADES SERÃO DESENVOLVIDAS?

- Resolver sistemas lineares.
- Compreender a reta como representação geométrica de uma equação linear com duas incógnitas.
- Associar a solução de um sistema linear de duas equações com duas incógnitas às coordenadas do ponto de intersecção entre as retas associadas ao sistema dado.
- Reconhecer que um sistema linear pode ter uma, nenhuma ou infinitas soluções.
- Associar a solução de uma equação do 2º grau aos zeros da função quadrática.
- Compreender quantas raízes pode ter uma equação do 2º grau, a partir da intersecção da parábola gerada pela função associada a essa equação.
- Resolver problemas envolvendo sistemas de equações lineares com duas incógnitas.
- Resolver problemas envolvendo equações do 2º grau.

QUAIS AS HABILIDADES DESENVOLVIDAS NA BNCC?

- (EM13MAT510). Investigar conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas, usando tecnologias de informação, e, se apropriado, levar em conta a variação e utilizar uma reta para descrever a relação observada.
- (EM13MAT401). Converter representações algébricas de funções polinomiais do 1º grau para representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a softwares de álgebra e geometria dinâmica.

- (EM13MAT402). Converter representações algébricas de funções polinomiais do 2º grau para representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a softwares de álgebra e geometria dinâmica.
- (EM13MAT301). Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, incluindo ou não tecnologias digitais.
- (EM13MAT302). Resolver e elaborar problemas cujos modelos são as funções polinomiais do 1º grau e do 2º grau, em contextos diversos, incluindo ou não tecnologias digitais.

QUAIS OS CONTEÚDOS VIVENCIADOS?

- Sistemas de equações simultâneas com duas incógnitas
- Equações do 2º grau

QUAIS OS MATERIAIS UTILIZADOS?

- Lápis e borracha
- Papel ofício
- Questionários (em Word)
- 7 Computadores (notebooks, tablets ou desktop) com o software Geogebra versão 5.0 já instalado em cada computador
- Datashow e tela para projeção
- Réguas

QUAL O TEMPO DE DURAÇÃO?

A sequência didática será vivenciada em três encontros, cada encontro com duas aulas de 50 minutos.

ONDE E COMO ACONTECERÃO OS ENCONTROS?

Os encontros ocorrerão no Laboratório de Informática da escola.

Os alunos realizarão as atividades presencialmente, de forma individual, mantendo todas as regras de protocolo sanitário, Cada aluno utilizará um computador, além dos materiais já mencionados.

DESENVOLVIMENTO

Primeiro encontro: Incialmente o pesquisador utilizará o computador e Datashow para fazer uma breve apresentação da sequência didática a ser vivenciada e na sequência apresentará o Geogebra e algumas de suas funcionalidades para os alunos, que farão alguns exercícios propostos para se familiarizarem com os comandos e ícones do aplicativo.

Os alunos também deverão aprender a criar uma pasta no computador, salvar e armazenar as suas produções no Geogebra nas pastas criadas por cada um.

Em seguida será aplicado o questionário 01 (apêndice A), que aborda a localização de pontos no plano cartesiano, a representação geométrica de uma equação linear com duas incógnitas e a resolução de um sistema de equações simultâneas com duas incógnitas.

Segundo encontro: Incialmente o pesquisador utilizará o computador e o Datashow para fazer uma breve apresentação das atividades a serem desenvolvidas neste encontro. Em seguida será aplicado o questionário 02 (apêndice A), contendo dois problemas envolvendo sistemas de equações simultâneas com duas incógnitas.

Terceiro encontro: Incialmente o pesquisador utilizará o computador e o Datashow para fazer uma breve apresentação das atividades a serem desenvolvidas nesse encontro.

Em seguida será aplicado o questionário 03 (apêndice A), contendo quatro questões que tratam de resolução de equações do 2º grau.

COMO SERÁ A AVALIAÇÃO?

A avaliação se dará por meio da análise das respostas coletadas nos questionários aplicados, bem como dos arquivos produzidos no Geogebra.

APÊNDICE C – Questionário - professor

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO – URFRPE
MESTRADO PROFISSIONAL EM REDE NACIONAL – PROFMAT
TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

A IMPORTÂNCIA DOS RECURSOS COMPUTACIONAIS NA RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES E SISTEMAS POR ESTUDANTES DO ENSINO MÉDIO.

QUESTIONÁRIO - PROFESSOR

1. Os questionamentos a seguir são sobre sua formação

a) qual a sua área de formação?

---

b) em que ano concluiu a graduação?

---

c) você fez algum curso de especialização? Se sim, qual o tema e em que ano o concluiu?

---

2. Os questionamentos a seguir são sobre a sua experiência profissional docente:

a) a quantos anos você é professor?

---

b) a quantos anos é professor de matemática?

---

c) em quantas escolas você trabalha?

---

d) Seu vínculo empregatício é :

i) (   ) efetivo
ii) (   ) contrato temporário

3. Em quais modalidades de ensino você trabalha atualmente?

a) (   ) Ensino Fundamental

b) (   ) Ensino Fundamental e Ensino Médio

c) (   ) Ensino Médio

4. De quantos encontros de formação continuada você participou nos três últimos anos?

a) nenhum encontro

b) 1 a 5 encontros

c) 6 a 10 encontros

d) mais de 10 encontros

5. Dos encontros de formação continuada em que você participou, houve algum encontro em que o tema principal foi a utilização de recursos computacionais no ensino de matemática?

____

6. Você utiliza recursos computacionais em suas aulas de matemática? Se sim, descreva como se dá essa utilização.

____

____

____

____

7. Você conhece o software Geogebra?

____

8. Alguma das formações continuadas que você participou teve como tema a utilização do Geogebra nas aulas de matemática?

____

9. Você utiliza ou já utilizou o Geogebra em suas aulas?

____

10. Quais as principais dificuldades que você encontra para a utilização de recursos computacionais em suas aulas?

____

____

____