



UNIVERSIDADE DO ESTADO DE MATO GROSSO  
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE SINOP  
FACULDADE DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS  
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE  
NACIONAL – PROFMAT



**MARCOS EDUARDO CÂNDIDO DOS SANTOS**

**MODELO MATEMÁTICO PARA EXPLORAR O CASO DA  
EPIDEMIOLOGIA DA COVID-19 NO ENSINO MÉDIO**

**Sinop – MT**

**MARCOS EDUARDO CÂNDIDO DOS SANTOS**

**MODELO MATEMÁTICO PARA EXPLORAR O CASO DA  
EPIDEMIOLOGIA DA COVID-19 NO ENSINO MÉDIO**

Dissertação apresentada ao programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, na Universidade do Estado de Mato Grosso - UNEMAT como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Rodrigo Bruno Zanin.

## FICHA CATALOGRÁFICA

### CIP – CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

SANTOS, Marcos Eduardo Cândido dos.  
S237m      Modelo Matemático para Explorar o Caso da Epidemiologia da Covid-19 no Ensino Médio / Marcos Eduardo Cândido dos Santos – Sinop, 2021.  
121 f.; 30 cm. (ilustrações) Il. color. (sim)

Trabalho de Conclusão de Curso (Dissertação/Mestrado) – Curso de Graduação Licenciatura Plena em Matemática, Faculdade de Ciências Exatas e Tecnológicas, Câmpus de Sinop, Universidade do Estado de Mato Grosso, 2021.  
Orientador: Rodrigo Bruno Zanin

1. Modelagem Matemática. 2. Modelo Sir. 3. Covid-19. I. Marcos Eduardo Cândido dos Santos. II. Modelo Matemático para Explorar o Caso da Epidemiologia da Covid-19 no Ensino Médio.

CDU 519.85



ESTADO DE MATO GROSSO  
SECRETARIA DE ESTADO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA  
UNIVERSIDADE DO ESTADO DE MATO GROSSO  
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE SINOP  
FACET – FACULDADE DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS  
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL- PROFMAT  
UNEMAT - SINOP



**MARCOS EDUARDO CANDIDO DOS SANTOS**

**MODELO MATEMÁTICO PARA EXPLORAR O CASO DA EPIDEMIOLOGIA DA  
COVID-19 NO ENSINO MÉDIO**

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – ProfMat da Universidade do Estado de Mato Grosso/UNEMAT – Campus Universitário de Sinop, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Rodrigo Bruno Zanin  
Aprovado em 29/10/2021

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Rodrigo Bruno Zanin  
UNEMAT – SINOP – MT

Documento assinado digitalmente



Luciano Endler  
Data: 30/11/2021 17:54:07-0300  
Verifique em <https://verificador.iti.br>

Prof. Dr. Luciano Endler  
IFMT – GUARANTÃ DO NORTE - MT

Prof. Dr. Érico Fernando de Oliveira Martins  
UNEMAT – SINOP - MT

Sinop/MT  
2021



Programa de Mestrado Profissional em Matemática em  
Rede Nacional – PROFMAT/UNEMAT/Sinop/MT  
Av. dos Ingás, 3001, CEP: 78.550-000, Sinop, MT  
Tel/PABX: (66) 3511 2100. [www.unemat.br](http://www.unemat.br) –  
Email: [profmat@unemat.br](mailto:profmat@unemat.br)



## DEDICATÓRIA

À minha família.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço a todo o corpo docente da Universidade do Estado de Mato Grosso – UNEMAT, *Campus Sinop-MT*, que participou direta ou indiretamente do programa de mestrado PROFMAT; foi um privilégio ter educadores especializados que, com certeza, contribuíram à minha formação acadêmica. Em especial, agradeço ao professor Dr. Rodrigo Bruno Zanin pelas orientações, pela dedicação empregada com o intuito de concluir esse trabalho e também pelas experiências compartilhadas.

Agradeço minha mãe, Cleuzeni Cândida da Silva, e ao meu irmão, Maike Henrique Cândido Tenório, por me apoiarem, por estarem ao meu lado em todos os momentos e acreditarem nessa formação profissional.

Em especial, deixo meus agradecimentos a Adrianly, pelo amor e companheirismo em todos os momentos.

Agradeço também aos amigos que fiz durante o curso, Amanda, Eliane, Felipe, Ivo, João, Jocenir, Jonas, Lucas, Luciana, Maria, Onalda, Rafael, Rodrigo, Rômulo, Vanessa e Wellington, pelos momentos compartilhados, pelas experiências vivenciadas, por toda amizade, parceria e troca de ideias.

Enfim, agradeço a todos que, de uma forma ou outra, participaram e me apoiaram nessa caminhada.

“O livro do mundo está escrito em linguagem matemática.”

(Galileu Galilei)

## RESUMO

Este trabalho está vinculado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT da Universidade do Estado de Mato Grosso – UNEMAT, *Campus* Universitário de Sinop, e teve como objetivo geral compreender como a modelagem matemática é utilizada no estudo e descrição do avanço da pandemia da Covid-19 em Mato Grosso por meio do modelo SIR (Suscetíveis, Infectados e Removidos). Buscou-se com esta pesquisa responder as seguintes questões: como é realizado o estudo da dinâmica de doenças infecciosas utilizando o modelo SIR? Como transpor o entendimento do modelo SIR e da dinâmica de infecção causada pela Covid-19 para estudantes do Ensino Médio? Para auxiliar a reflexão sobre essas questões, o referencial teórico assumido contempla noções sobre Modelagem Matemática e modelos matemáticos, enfatizando a descrição do processo de modelagem e as estratégias e dificuldades em sua adoção como metodologia de ensino com base em autores como Rodney Carlos Bassanezi, Maria Salett Biembengut, Jonei Cerqueira Barbosa, Dionísio Burak, João Frederico da Costa Azevedo Meyer, entre outros. Além disso, uma parte do referencial teórico foi destinada para elucidar alguns conceitos envolvendo taxa de variação e equações diferenciais, visando subsidiar os métodos adotados no processo de estudo do modelo SIR baseando-se nas contribuições de Rodney Carlos Bassanezi e Wilson Castro Ferreira Junior, William E. Boyce e Richard C. DiPrima, James Stewart, entre outros autores. A pesquisa teve uma abordagem quali-quantitativa sendo encaminhada por meio de estudo descritivo-explicativo. O objeto de pesquisa foi a dinâmica da Covid-19 em Mato Grosso de 14 de março de 2020 até o final de janeiro de 2021 e os dados foram coletados a partir do painel interativo fornecido pela Secretaria de Estado de Saúde de Mato Grosso – SES/MT, sendo estes organizados em planilhas eletrônicas do *Excel*. Para modelar os dados foi utilizado o modelo SIR discretizado implementado no *Excel*, e o parâmetro de infecção foi obtido minimizando a função de erro quadrado a partir dos dados reais e os dados simulados por meio da ferramenta *Solver*. Utilizou-se três abordagens para a obtenção do parâmetro de infecção: intervalos de 36 dias com o acréscimo dos intervalos anteriores; intervalos de 36 dias sem o acréscimo dos intervalos anteriores; intervalos de 7 dias sem acréscimo dos intervalos anteriores. Os achados da pesquisa mostram que na dinâmica de infecção causada pela Covid-19, por meio do modelo SIR, a população pode ser dividida em três compartimentos: suscetíveis, infectados e removidos, cujo objetivo é identificar o número de indivíduos que transitam de um compartimento para o outro por unidade de tempo. A adoção de diferentes intervalos no processo de minimização do erro quadrado mostrou-se bem relevante para o entendimento da dinâmica e favoreceu diferentes projeções de pico e de valor máximo de infecção a partir dos dados consolidados até o fim de janeiro. Ao final do trabalho é realizada uma proposta didática para ser trabalhada com os estudantes do 3º ano do Ensino Médio baseada em modelagem matemática. O problema é dado inicialmente pelo professor e as demais etapas serão conduzidas pelos estudantes.

**Palavras-chave:** Modelagem Matemática; Modelo SIR; Covid-19.



## ABSTRACT

This work is linked to the Professional Master's Program in Mathematics in National Network - PROFMAT of the University of the State of Mato Grosso - UNEMAT, University Campus of Sinop, and had as general objective to understand how mathematical modeling is used in the study and description of the pandemic advance Covid-19 in Mato Grosso through the SIR (Susceptible, Infected and Removed) model. This research sought to answer the following questions: how is the study of the dynamics of infectious diseases carried out using the SIR model? How to convey the understanding of the SIR model and the dynamics of infection caused by Covid-19 to high school students? To help reflect on these issues, the theoretical framework assumed includes notions about Mathematical Modeling and mathematical models, emphasizing the description of the modeling process and the strategies and difficulties in its adoption as a teaching methodology based on authors such as Rodney Carlos Bassanezi, Maria Salett Biembengut, Jonei Cerqueira Barbosa, Dionísio Burak, João Frederico da Costa Azevedo Meyer, among others. In addition, part of the theoretical framework was intended to elucidate some concepts covering rate of change and differential equations, it describes subsidizing the methods adopted in the study process of the SIR model based on the contributions of Rodney Carlos Bassanezi and Wilson Castro Ferreira Junior, William E. Boyce and Richard C. DiPrima, James Stewart, among other authors. The research had a quali-quantitative approach being forwarded through a descriptive-explanatory study. The research object was the Covid-19 dynamics in Mato Grosso from March 14, 2020 to the end of January 2021 and data were collected from the interactive panel provided by the Mato Grosso State Health Department - SES / MT, which are organized in Excel spreadsheets. To model the data, the discretized SIR model implemented in Excel was used, and the infection parameter was found minimizing the squared error function from real data and simulated data using the Solver tool. Three approaches were used to obtain the choice parameter: 36-day intervals with the addition of previous intervals; 36-day intervals without adding the previous intervals; 7-day intervals without adding the previous intervals. The research findings show that in the dynamics induced by Covid-19, through the SIR model, a population can be divided into three compartments: susceptible, infected and removed, whose objective is to identify the number of people who move from one district to another the other per unit of time. The definition of different intervals in the square error minimization process proved to be very relevant for understanding the dynamics and favored different projections of peak and maximum infection values based on consolidated data up to the end of January. At the end of the work, a didactic proposal is made to be worked on with students in the 3rd year of high school based on mathematical modeling. The problem is given by the teacher and the other steps will be carried out by the students.

**Keywords:** Mathematical Modeling; SIR model; Covid-19.

## LISTA DE FIGURAS

|  |    |
|--|----|
| Figura 1: Esquema das principais etapas no processo de modelagem .....   | 35 |
| Figura 2: Casos de modelagem e participação em cada etapa .....  | 37 |
| Figura 3: Taxa média de variação de $y$ em relação a $x$ .....   | 40 |
| Figura 4: Domínio discreto igualmente espaçados em $t + 1$ pontos .....  | 54 |
| Figura 5: Discretização da função $f(x) = x^2$ com domínio espaçado em 0,2. ....   | 55 |
| Figura 6: Sistema utilizado para obter a aproximação de diferenças finitas.....  | 55 |
| Figura 7: Recorte do modelo SIR discretizado criado no Excel .....   | 69 |
| Figura 8: Construção do modelo SIR discretizado no Excel .....   | 70 |
| Figura 9: Programação da função objetivo e utilização do <i>Solver</i> .....   | 71 |
| Figura 10: Programação da função objetivo e utilização do <i>Solver</i> para estimativa de $\beta$ variando em 9 intervalos .....                  | 72 |
| Figura 11: Programação da função objetivo e utilização do <i>Solver</i> com $\beta$ variando em 46 intervalos.....                                 | 73 |
| Figura 12: Casos confirmados em Mato Grosso (20/03/2020 à 31/01/2021).....   | 74 |
| Figura 13: Casos confirmados acumulados (março de 2020 a janeiro de 2021) .....  | 75 |
| Figura 14: Número de óbitos confirmados (março de 2020 a janeiro de 2021) .....  | 76 |
| Figura 15: Cenários obtidos pelas estimativas de $\beta$ em 9 intervalos com acréscimo de 36 dias .....  | 77 |
| Figura 16: Cenário obtido pelas estimativas de $\beta$ variando em 9 intervalos de 36 dias sem acréscimo dos períodos anteriores .....             | 79 |
| Figura 17: Cenário obtido pelas estimativas de $\beta$ variando em semanalmente .....  | 80 |
| Figura 18: Cenários obtidos pelas estimativas de $\beta$ variando em 9 intervalos de 36 dias.....  | 81 |
| Figura 19: Número acumulados de infectados até 31 de janeiro e as diferentes projeções .....   | 82 |
| Figura 20: Comparação entre os dados reais e os dados do modelo ( $\beta$ variando e nove intervalos sem acréscimos dos períodos anteriores) ..... | 83 |
| Figura 21: Comparação entre os dados reais e os dados do modelo ( $\beta$ variando semanalmente) .....   | 83 |
| Figura 22: Comparação entre os dados reais acumulados e os dados do modelo.....  | 84 |
| Figura 23: Comparação entre os dados reais acumulados e os dados do modelo.....  | 84 |
| Figura 24: Comparação entre os dados reais acumulados e os dados do modelo (continuação) .....   | 85 |

|   |     |
|---|-----|
| Figura 25: Painel epidemiológico interativo Covid-19 Mato Grosso.....   | 90  |
| Figura 26: Região do Teles Pires e a situação epidemiológica até o fim de 2020 .....  | 91  |
| Figura 27: Situação de Mato Grosso de 14 de março como início e 12 de abril de 2020 .....   | 94  |
| Figura 28: Dados consolidados no intervalo de 14 de março como início e 12 de abril de 2020 .....   | 95  |
| Figura 29: Modelo de planilha eletrônica para cálculo da variação simples.....  | 97  |
| Figura 30: Modelo de planilha eletrônica para cálculo da variação simples.....  | 98  |
| Figura 31: Identificação da maior variação por meio de células programadas .....  | 99  |
| Figura 32: Modelo de planilha eletrônica para cálculo da variação semanal.....  | 100 |
| Figura 33: Modelo de planilha eletrônica para o cálculo da incidência semanal da Covid-19 em Mato Grosso .....                                      | 103 |
| Figura 34: Esquema de apresentação do modelo SIR por meio de compartimentos .....   | 105 |
| Figura 35: Modelo de planilha para simulação das 20 primeiras semanas epidemiológica em Mato Grosso .....   | 107 |
| Figura 36: Simulação para os dados acumulados semanalmente para as 20 primeiras semanas epidemiológicas em Mato Grosso .....                        | 109 |
| Figura 37: Simulação para os dados acumulados semanalmente para as 100 primeiras semanas epidemiológicas em Mato Grosso mantem $\beta = 0,56$ ..... | 110 |

## LISTA DE TABELAS

|  |     |
|--|-----|
| Tabela 1: Fórmulas de diferenciação numéricas com intervalos igualmente espaçados .....                  | 56  |
| Tabela 2: Estimativa para taxa de infecção $\beta$ usando a taxa de remoção $\gamma = 0,1$ .....         | 77  |
| Tabela 3: Estimativa para número máximo de infectados usando a taxa de remoção $\gamma = 0,178$ .....    | 79  |
| Tabela 4: Estimativa para taxa de infecção $\beta$ variando em 9 intervalos de 36 dias .....             | 79  |
| Tabela 5: Coeficientes de correlação $R^2$ para abordagem 1 .....  | 81  |
| Tabela 6: Valores obtidos para o coeficiente de correlação $r^2$ com $\beta$ variando semanalmente ..... | 120 |

## LISTA DE QUADROS

|  |     |
|--|-----|
| Quadro 1: Dissertações do PROFMAT que abordam o estudo sobre modelos matemáticos aplicados ao estudo epidemiológico .....                  | 20  |
| Quadro 2: Dissertações do PROFMAT que abordam o estudo sobre modelos matemáticos aplicados ao estudo epidemiológico .....                  | 21  |
| Quadro 3: Habilidades selecionadas para a proposta didática baseada em modelagem .....   | 88  |
| Quadro 4: Cálculo de incidência da Covid-19 em dois municípios de Mato Grosso com base nos dados da SES-MT até o fim de 2020. ....         | 92  |
| Quadro 5: Cálculo da taxa de letalidade da Covid-19 em dois municípios de Mato Grosso com base nos dados da SES-MT até o fim de 2020. .... | 93  |
| Quadro 6: Cálculo da variação simples em relação aos casos acumulados confirmados nos primeiros 18 dias a partir do primeiro caso .....    | 96  |
| Quadro 7: Comparativo entre o conceito de taxa de variação e a programação no Excel .....  | 102 |
| Quadro 8: Distribuição das dissertações do PROFMAT envolvendo modelagem ou modelos matemática.....   | 119 |

## LISTA DE SIGLAS

|         |  |
|---------|--|
| BNCC    | Base Nacional Comum Curricular                       |
| OMS     | Organização Mundial de Saúde                         |
| PROFMAT | Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional |
| SES/MT  | Secretaria de Estado de Saúde de Mato Grosso         |
| SI      | Suscetíveis-Infetados                                |
| SIR     | Suscetíveis-Infetados-Removidos                      |
| SIS     | Suscetíveis-Infetados-Suscetíveis                    |
| UFMT    | Universidade Federal de Mato Grosso                  |
| UNEMAT  | Universidade do Estado de Mato Grosso                |
| UNESP   | Universidade Estadual Paulista                       |

## SUMÁRIO

|  |           |
|--|-----------|
| <b>INTRODUÇÃO</b> .....  | <b>15</b> |
| Algumas reflexões e anseios da graduação ao PROFMAT .....                      | 15        |
| A pandemia da covid-19 e a escolha do tema .....                               | 18        |
| Modelagem e modelos epidemiológicos: mapeando as dissertações do PROFMAT ..... | 19        |
| A proposta de pesquisa e a organização do trabalho .....                       | 23        |
| <b>1 REFERENCIAL TEÓRICO</b> .....   | <b>26</b> |
| 1.1 MODELAGEM MATEMÁTICA .....   | 26        |
| 1.1.1 Modelagem e Modelos Matemáticos .....                                    | 29        |
| 1.1.2 Modelagem como estratégia de Ensino-Aprendizagem .....                   | 31        |
| 1.1.3 Técnicas de Modelagem Matemática .....                                   | 34        |
| 1.2 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS E EQUAÇÕES DE DIFERENÇAS .....                       | 38        |
| 1.2.1 Taxas de Variações Contínuas e Discretas .....                           | 38        |
| 1.2.2 Equações de Diferenças .....   | 40        |
| 1.2.3 Equações de Diferenças Lineares .....                                    | 41        |
| 1.2.4 Equações Diferenciais Ordinárias .....                                   | 49        |
| 1.2.5 Equações lineares de primeira ordem .....                                | 51        |
| 1.2.6 Aproximações numéricas .....   | 53        |
| <b>2 METODOLOGIA</b> .....   | <b>59</b> |
| 2.1 DELINEAMENTO METODOLÓGICO DA PESQUISA .....                                | 59        |
| 2.2 OS PROCEDIMENTOS DE COLETA E ANÁLISE DE DADOS .....                        | 60        |
| 2.3 FORMULAÇÃO DO MODELO SIR EM EPIDEMIOLOGIA .....                            | 62        |
| 2.4 SOLUÇÕES ANALÍTICAS PARA O MODELO SIR .....                                | 64        |
| 2.5 SOLUÇÕES EXPLÍCITAS PARA O MODELO SIR (DISCRETIZAÇÃO) .....                | 67        |
| 2.6 IMPLEMENTANDO O MODELO SIR NO <i>EXCEL</i> .....                           | 69        |
| <b>3 ANÁLISE E RESULTADO</b> .....   | <b>74</b> |
| 3.1 LEVANTAMENTO DE DADOS COVID-19 NO ESTADO DE MATO GROSSO ..                 | 74        |
| 3.2 ESTIMATIVA DOS PARÂMETROS PARA O ESTADO DE MATO GROSSO .....               | 76        |
| 3.3 COMPARAÇÃO DOS DADOS EMPÍRICOS X ESTIMADOS POR EQUAÇÕES ..                 | 80        |
| <b>4. PROPOSTA DIDÁTICA BASEADA EM MODELAGEM MATEMÁTICA</b> .....              | <b>87</b> |
| 4.1 A PROPOSTA .....   | 87        |
| 4.2 SUGESTÕES DE ATIVIDADES .....  | 89        |
| 4.2.1 Atividade 1: Conhecendo o painel Covid-19 de Mato Grosso .....           | 90        |
| 4.2.2 Atividade 2: Verificando a incidência da doença .....                    | 91        |
| 4.2.3 Atividade 3: Verificando a letalidade da doença .....                    | 93        |

|   |  |            |
|---|--|------------|
| 4.2.4                                   | Atividade 4: Estudo do avanço dos casos confirmados de Covid-19 em Mato Grosso nos primeiros 30 dias .....   | 94         |
| 4.2.5                                   | Atividade 5: Calculando as diferenças de casos diários a partir dos dados acumulados confirmados para os primeiros 18 dias. ....                     | 95         |
| 4.2.6                                   | Atividade 6: Calculando as diferenças de casos diários a partir dos dados acumulados confirmados para os primeiros 100 dias utilizando o Excel. .... | 96         |
| 4.2.7                                   | Atividade 7: Calculando a variação média semanal a partir dos dados acumulados utilizando planilhas eletrônicas .....                                | 100        |
| 4.2.8                                   | Atividade 8: Calculando a incidência da Covid-19 semanal por meio de uma planilha eletrônica. ....   | 102        |
| 4.2.9                                   | Atividade 9: Apresentando o modelo SIR para os estudantes. ....  | 104        |
| 4.2.10                                  | Atividade 10: Utilizando o modelo SIR para simular o avanço da pandemia em Mato Grosso. ....   | 106        |
| <b>CONSIDERAÇÕES FINAIS .....</b>       |  | <b>111</b> |
| <b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b> |  | <b>115</b> |
| <b>APÊNDICE A .....</b>                 |  | <b>119</b> |
| <b>APÊNDICE B .....</b>                 |  | <b>120</b> |
| <b>APÊNDICE C .....</b>                 |  | <b>121</b> |



## INTRODUÇÃO

A seguir é descrita a trajetória que levou à escolha do objeto de pesquisa. Inicia-se esse percurso com algumas reflexões da vida do autor desta pesquisa como acadêmico do curso de Matemática, início à docência e as experiências como acadêmico do curso do mestrado PROFMAT. Além disso, busca-se nesse espaço introdutório fazer um breve mapeamento das produções do bando de dissertações do programa PROFMAT, além de trazer alguns dados do avanço da pandemia da Covid-19 no Brasil e em Mato Grosso que colaboraram para a construção da problemática inicial, bem como da escolha e delimitação da pesquisa.

### **Algumas reflexões e anseios da graduação ao PROFMAT**

A escolha do curso de graduação muitas das vezes baseia-se em um objetivo de carreira profissional que se deseja atingir; outras, por afinidade com determinadas áreas do conhecimento. Pode-se dizer que, de uma forma ou de outra, o motivo por cursar Licenciatura em Matemática teve por base essa mesma justificativa.

Ao iniciar o curso supracitado, no município de Juína-MT no ano de 2013, esperava-se que o estudo dos objetos de conhecimento dentro da própria Matemática seriam os mais desafiadores, o que realmente aconteceu. Porém esses desafios não estavam somente na dificuldade do próprio objeto matemático, mas também pela dificuldade em visualizar e compreender como seria transposto para o estudante da Educação Básica e até mesmo do Ensino Superior.

Durante o curso as aulas dos componentes que tratavam diretamente de objetos matemáticos ocorriam, muitas das vezes, com grande ênfase no estudo teórico de cada tema, resolução de inúmeras listas de exercícios e demonstrações. Claro que todos foram de suma importância, porém os estudos de Álgebra Linear, Geometria Analítica, Cálculo Diferencial Integral e Equações Diferenciais Ordinárias tiveram apreço pessoal muito grande, tanto pelo estudo da Matemática em si, quanto pelas possibilidades de aplicações.

Em estudos paralelos tinham-se os componentes metodológicos do Ensino de Matemática, nos quais, na maioria das experiências vivenciadas, o foco estava no estudante e na aprendizagem, como de fato deve ser. Os estudos sobre Resolução de Problemas, Etnomatemática, Tecnologia da Informação e Modelagem Matemática se destacaram durante o curso e ajudaram a evidenciar que as situações em sala de aula são adversas e que ensinar não é uma tarefa fácil.

Uma das situações que pode ser citada é que, durante a realização dos estágios supervisionados em sala de aula, além das dificuldades operacionais, observou-se que alguns estudantes viam o componente curricular de Matemática apenas como algo a ser cumprido para finalizar o Ensino Básico. Outros comentavam que muitos dos cálculos e alguns tópicos estudados não faziam sentido para eles, juntamente porque não sabiam se iriam utilizar em algum contexto ou que não seriam relevantes para sua vida profissional. Havia também aqueles que viam a matemática com algo difícil, dificuldade que perpassam os aspectos da formação docente, inúmeros fatores internos e externos aos ambientes educativos e também falhas conceituais que interferem no processo da abstração matemática das Anos Iniciais ao Ensino Médio.

Tais observações foram novamente constatadas ao findar a graduação e iniciar a docência em 2016, criando uma angústia para contornar essas situações. Diante da inexperiência e algumas incertezas do ensino e da aprendizagem Matemática, tornou-se necessário refletir sobre a prática docente e sobre as ações metodológicas em sala, principalmente a partir de aulas ministradas para estudantes do Ensino Fundamental e Ensino Médio nesse início de carreira.

É natural que, nesse processo de reflexão, as evidências levantadas durante o estágio supervisionado e no início de carreira levassem a vários questionamentos, como por exemplo: como tornar as aulas de Matemática mais próxima da realidade dos estudantes da Educação Básica? Claro que não há uma única resposta para essa pergunta, tampouco pode-se encontrar uma resposta que trará a receita para todas as aulas contornarem esse problema. Entretanto, esse questionamento não é de um único professor e, certamente, faz parte das inúmeras indagações feitas já há algum tempo por aqueles que ensinam Matemática. Tais indagações levaram ao desenvolvimento de metodologias e experiências específicas que podem auxiliar nas aulas, algumas delas utilizando o fator relevância na seleção dos temas abordados.

Tendo contado inicialmente durante a disciplina de Práticas Pedagógicas na graduação após realizar um estudo sobre o processo de fermentação na produção de vinho e, posteriormente, durante o curso de pós graduação *Lato Sensu* em Metodologia do Ensino de Matemática em 2016, a Modelagem Matemática tornou-se uma ótima alternativa para se trabalhar em sala, dada a preocupação em como aproximar a experiência em sala de aula à realidade vivenciada pelos estudantes e como fazer da sala de aula uma extensão das experiências trazidas por eles.

Mesmo com a imaturidade em sala de aula e com pouca prática em modelagem, ao trabalhar geometria plana na construção de pipas no ano de 2018, com os estudantes do 1º ano

do Ensino Médio de uma escola do município de Tabaporã- MT (atividade semelhante foi desenvolvida no Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência - PIBID durante a graduação), pode-se perceber algumas contribuições. Ao buscar essas aproximações de experiências, já que muitos estudantes gostavam de “soltar pipas”, além da interação entre vários objetos de conhecimento (um pouco sobre porcentagem e matemática financeira para compra de materiais) houve um maior engajamento por parte dos estudantes com técnicas e formatos de construção diferentes. Isso de fato aumentou o interesse pelo uso da modelagem em sala de aula.

Ao ingressar no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT em 2019 deparou-se com uma qualidade e um rigor que surpreendeu. Apesar dos tópicos do primeiro ano de estudo serem voltados para conceitos elementares do Ensino Médio, o tratamento da informação dado pelos docentes, e pelo próprio programa, foi além das expectativas iniciais.

Além dos conceitos estudados, as contribuições metodológicas tornaram possível estabelecer uma conexão com a sala de aula. Várias possibilidades para se trabalhar com os estudantes na escola puderam ser pensadas e/ou aprimoradas. Uma delas, citada muitas das vezes durante o programa, é a de utilizar a modelagem como metodologia para o ensino-aprendizagem de matemática. Isso, somado ao apreço particular, contribuiu para a escolha de um objeto de estudo relacionado com a modelagem matemática.

Um trabalho desenvolvido na disciplina de Geometria Analítica Vetorial, ministrada pelo professor Dr. Oscar Antonio Gonzalez Chong, também foi de suma importância para a escolha do tema voltado para a modelagem. Já no ano de 2020 com a pandemia da Covid-19 declarada, as aulas presenciais foram suspensas e passaram a ser conduzidas de forma remota: síncrona via vídeo conferência, e assíncrona por meio de estudos dirigidos. O professor mediou suas aulas por meio de uma inversão de sala, nos quais os temas eram dados todas as semanas, sendo apresentados e debatidos na semana seguinte, com as explicações e resoluções de problemas sendo feitas pelos próprios acadêmicos.

Como proposta para o trabalho final da disciplina foram distribuídos 17 temas, um para cada acadêmico, envolvendo aplicações de Geometria Analítica Vetorial. Por exemplo, alguns temas envolviam o estudo sobre cônicas aplicadas: à construção e no uso de telescópios; ao estudo do sistema solar; ao funcionamento do *Global Positioning System* - GPS; à construção de antenas parabólicas; à localização de barcos; a construções indígenas; à construção de usinas atômicas; ao movimento de predadores; aos voos cósmicos. Esses e outros temas foram

apresentados com o intuito de aplicar os conhecimentos voltados à solução de problemas práticos e habilidades adquiridos na disciplina.

Evidente que o objetivo não era trabalhar diretamente com Modelagem Matemática, mas fez com que muitos dos acadêmicos percorressem, ou no mínimo evidenciassem, ao estudar cada referencial teórico, alguns dos caminhos realizados pelo modelador no estudo dos problemas citados. Mostrou-se também a relevância da Matemática quando aliada a situações reais e que, muitas das vezes, se parte de um problema que não é matemático para fazer uso da Matemática.

### **A pandemia da Covid-19 e a escolha do tema**

Em 30 de janeiro de 2020, a Organização Mundial da Saúde (OMS) declarou Emergência de Saúde Pública de Importância Internacional em razão da disseminação do novo coronavírus, após reunião com especialistas. Naquele momento, havia 7,7 mil casos confirmados e 170 óbitos na China, principal local de disseminação do vírus, além de 98 casos em outros 18 países. Apenas 41 dias depois, em 11 de março, o *status* da doença foi elevado para pandemia, já constando mais de 145 mil casos confirmados e aproximadamente 4,6 mil óbitos pelo mundo, conforme os dados apresentados pela OMS (2020).

No Brasil, o Ministério da Saúde recebeu a primeira notificação de um caso confirmado em 26 de fevereiro de 2020, saltando para 52 casos confirmados até o dia em que foi declarada a pandemia. Até o fim do primeiro semestre de 2021 os números já passavam dos 18,5 milhões casos acumulados e mais de 500 mil óbitos registrados em decorrência de complicações causadas pela Covid-19 (BRASIL, 2020).

No decorrer das semanas, principalmente após a declaração de pandemia, notícias vieram a divulgar projeções sobre o avanço da pandemia. Embasado em dados científicos que sustentavam tais notícias, várias medidas de prevenção e contenção foram estudadas e colocadas em prática. Com o passar do tempo e a obtenção de novas informações tais projeções se alteravam e quase de forma natural alguns questionamentos sobre o porquê dessas alterações foram observados. Isso fez com que a seguinte questão inicial fosse levantada: como são realizadas as projeções da curva de contágio de Covid-19?

Ao investigar a questão inicial pode-se observar que a humanidade já presenciou algumas grandes epidemias. No livro de Stefan Cunha (2020) intitulado “História das epidemias” é descrito um panorama histórico sobre as grandes epidemias vivenciadas pela humanidade partindo da Grécia Antiga, passando pelo Império Romano, pelas 1ª e 2ª Guerras

Mundiais e, por fim, chegando ao Século XXI. De modelo geral, pode-se destacar três casos que tiveram grande impacto na humanidade: Peste Negra (1346-1353) também conhecida como peste bubônica na qual estima-se de 5 milhões de mortos na Mongólia e China e em outros países; Cólera (1817-1923), sendo registrados seis grandes epidemias nesse intervalo espalhadas em vários países; Varíola (Séculos XVII e XVIII) com os registros mais trágicos onde hoje é situada a República Dominicana e Taiti. Muitos outros casos registrados na história da humanidade e assim como a própria história da Epidemiologia podem ser visualizados nos trabalhos de Ujvari (2020) e Pereira e Veiga (2014).

A epidemiologia, face a esses e outros registros históricos, surge como uma ferramenta crucial para caracterizar o comportamento de doenças infecciosas, bem como na tomada de decisão por parte das organizações que tratam da saúde pública. Pode-se dizer, ainda, Pereira e Veiga (2014), que estudos voltados para a epidemiologia ao longo da história tiveram um reforço com modelos matemáticos, reforço ao qual que esse trabalho está concentrado.

Dentre os inúmeros modelos matemáticos destinados ao estudo de doenças infecciosas pode-se destacar os modelos compartimentais, nos quais os indivíduos são divididos conforme o estado da doença (MURRAY, 1993; GANI e DALEY, 1999). Os mais comuns, também chamado de modelos clássicos, são: SI - os indivíduos podem ser considerados como Suscetíveis (vulneráveis a doença) e Infectados; SIS - os indivíduos são considerados como Suscetíveis (vulneráveis a doença) e Infectados, com a diferença que os indivíduos infectados podem adquirir uma imunidade temporária e futuramente retornar ao compartimento dos infectados; SIR – considera-se que os indivíduos podem ser divididos em três compartimentos: Suscetíveis, Infectados e Recuperados e o estudo da transição entre os compartimentos descreve a dinâmica de uma determinada doença; SEIR – a população é dividida em Suscetível, Exposto, Infectado e Removidos, no qual o compartimento Exposto reúne os indivíduos que tiveram contado com um infectado e podendo ou não desenvolver a doença.

### **Modelagem e modelos epidemiológicos: mapeando as dissertações do PROFMAT**

A fim de sustentar a escolha do tema e encontrar situações que auxiliassem a execução desse trabalho, optou-se por realizar um levantamento das produções disponibilizadas no banco de dissertações do programa de mestrado PROFMAT, buscando entender como o tema vem sendo abordado pelos acadêmicos do programa. Para tanto utilizou-se, de início, o buscador de títulos do próprio banco de dissertações para realizar a busca duas palavras centrais: (i) modelagem; (ii) modelo. Após a identificação dos trabalhos voltados para o tema, realizou-se

um mapeamento das produções, buscando identificar como o tema está distribuído pelas regiões do país e quais as instituições de concentração. Por fim, foi feita a seleção de textos envolvendo modelagem e modelos epidemiológicos.

A primeira busca resultou no total de 162 publicações referentes ao tema, já na segunda, mostrou mais 75 registros, porém, fazendo a leitura dos títulos e resumos, 29 trabalhos foram descartados por não se enquadrarem no estudo de modelagem ou modelos matemáticos, ou também por já terem sido selecionados na busca anterior. Esse quantitativo de 208 trabalhos tratando diretamente sobre o tema modelagem e/ou modelos matemáticos é relativamente baixo, pois representa apenas 3,37% das dissertações. Claro que, pela amplitude do programa, é natural a grande variedade de temas escolhidos pelos mestrados.

Com base nos dados coletados observou-se que os 208 trabalhos analisados estão distribuídos nas 5 regiões do país, sendo: Norte (26); Nordeste (42); Centro-Oeste (42); Sudeste (67); Sul (31). Além disso, notou-se a presença de 54 instituições diferentes, sendo divididas entre 24 estados mais o Distrito Federal (no APÊNDICE A é apresentado o quantitativo por estado e por instituição. A maior concentração encontra-se em São Paulo, com 39 publicações, em que 17 pertencem a Universidade Estadual Paulista – UNESP. Já o estado do Mato Grosso aparece com um quantitativo de 10 publicações, sendo UNEMAT (1) e UFMT (9). Uma justificativa para que a região Sudeste tenha um número expressivo de trabalhos pode estar relacionada a presença dos grandes grupos de pesquisas voltados para modelagem, por exemplo, os liderados por Rodney Bassanezi ou por Joao Frederico Meyer, duas grandes referências no assunto.

Por meio da leitura dos títulos, resumos e, quando necessário, de outras partes dos trabalhos, foi possível identificar 5 trabalhos que abordam de algum modo o estudo sobre modelos matemáticos aplicados ao estudo epidemiológico (Quadro 1).

Quadro 1: Dissertações do PROFMAT que abordam o estudo sobre modelos matemáticos aplicados ao estudo epidemiológico

| Nº | Autor(a)                   | Título  | Ano  |
|----|----------------------------|---|------|
| 1  | Valdir de Oliveira Junior  | Modelagem matemática de epidemias: uma abordagem com modelos compartimentais  | 2021 |
| 2  | Márcia Lopes Ferreira      | Modelagem matemática em dinâmica da população como uma estratégia no ensino da matemática   | 2021 |
| 3  | Jonatas da Silva Soares    | Modelagem matemática: um estudo sobre o comportamento dos dados da Covid-19 no Brasil no ano de 2020.   | 2021 |
| 4  | Paula Adriana Matos Mourão | Simulações matemáticas em estudos epidemiológicos: o modelo SIR com estratégias de vacinação como aplicação da modelagem matemática no ensino | 2020 |
| 5  | Siliana Fagundes           | Uma alternativa para o ensino de matemática utilizando modelos epidêmicos   | 2016 |

Fonte: Elaborado pelo autor.

Assim como pede o programa todas as dissertações elencadas no Quadro 1 buscam aproximar temas específicos do currículo de Matemática da Educação Básica à didática em sala de aula por meio de proposta/sequência didática, sendo que duas delas foram desenvolvidas com estudantes. No Quadro 2 pode-se visualizar todas essas informações, bem como os diferentes tipos de modelos aplicados em estudo epidemiológicos e objetos de conhecimento utilizados (o número apresentado na coluna 1 refere-se a ordem criada no quadro anterior).

Quadro 2: Dissertações do PROFMAT que abordam o estudo sobre modelos matemáticos aplicados ao estudo epidemiológico

| Nº | Modelo(s) utilizado(s)                           | Enfermidade analisada                                 | Objeto(s) de conhecimento                         | Aplicou? | Recurso(s) tecnológico(s)             |
|----|--|---|---|----------|---------------------------------------|
| 1  | SIS e SIR  | Covid-19  | Estudo sobre os modelos                           | Não      | <i>Geogebra</i>                       |
| 2  | SI, SIS, SIR e SEIR                              | AIDS, Meningite Meningocócica, Influenza A e Covid-19 | Recorrências                                      | Sim      | <i>Simulite e Epidemic Calculator</i> |
| 3  | Linear, Quadrático, Logístico, Exponencial e SIR | Covid-19  | Método dos Mínimos Quadrados                      | Não      | <i>Wolfram online e Excel</i>         |
| 4  | SIR  | Sarampo   | Estudo sobre o modelo e EDO como taxa de variação | Sim      | <i>Software Octave</i>                |
| 5  | SI   | Dengue  | Expressões e equações algébricas                  | Não      | <i>Geogebra</i>                       |

Fonte: Elaborado pelo autor.

### **O que dizem os autores sobre a modelagem em sala de aula e o estudo modelos epidêmicos?**

As pesquisas selecionadas mostram que a modelagem traz um tratamento contextualizado e aplicado em torno do conhecimento, mostrando-se como mais um recurso que pode auxiliar no ensino-aprendizagem de matemática, conforme levantado por Fagundes (2016) e Mourão (2020). Ao estudar a dinâmica de doenças infecciosas, a contextualização favorece a ação investigativa criando, em alguns casos, conexão com outras áreas do conhecimento, proporcionando o chamado ensino interdisciplinar (FERREIRA, 2021; OLIVEIRA JÚNIOR, 2021).

Os estudos sobre modelos matemáticos aplicados à dinâmica de doenças infecciosas levantados pelos autores mostram a importância da Epidemiologia Matemática e da construção dos modelos epidemiológicos para o enfrentamento de doenças uma vez que, por meio deles,

ações e decisões são tomadas e o levantamento de informações geram previsões de ocorrências futuras relativas à propagação. Dessa forma, os estudantes podem compreender determinados objetos de estudos da Matemática matemáticos, como por exemplo a construção e interpretação de gráficos, e como estes são essenciais para a compreensão de fenômenos interdisciplinares (OLIVEIRA JÚNIOR, 2021).

Um outro aspecto observado é que no uso da modelagem em sala de aula a utilização de certos recursos tecnológicos, principalmente quando se trabalha quantidades de dados relativamente grandes, mostra-se como essencial, conforme apresentado no Quadro 2. Certamente o objeto de estudo não será o recurso tecnológico em questão, mas o ideal é que se elabore um roteiro, um passo a passo, já que alguns estudantes podem ter pouco e até mesmo nenhum contato com tal recurso. Isso pode ser verificado nos trabalhos de Ferreira (2021), Oliveira Junior (2021), Soares (2021) e Mourão (2020), nos quais são desenvolvidas atividades que auxiliam na atualização de determinados *softwares*.

Essa conexão entre a Matemática e o estudo das epidemias na Educação Básica não é uma tarefa fácil. Ao estudar a pandemia da Covid-19 Soares (2021) afirma que as mudanças causadas durante a dinâmica da doença fazem com que o modelo seja ajustado quase que em tempo real, o que seria algo ainda mais difícil de ser com estudantes devido a dimensão do currículo básico. Entretanto, esse não seria um fator limitante para a utilização de modelos epidêmicos nesse nível de aprendizagem.

Nas propostas didáticas elaboradas por Oliveira Junior (2021), Soares (2021) e Fagundes (2016) pode-se observar que muitas das vezes o modelo não se ajusta bem aos dados reais, fugindo um pouco da realidade de indivíduos que se enquadram nas classes de suscetíveis e infectados. Isso se dá a complexidade da dinâmica estudada e também pelas significativas simplificações realizadas para que fosse possível aplicar o estudo com estudantes da Educação Básica.

Sendo assim, os métodos utilizados durante as aulas podem não dar uma garantia de resultados positivos à pesquisa fazendo com que o(s) objetivo(s) das aulas não sejam totalmente direcionados à obtenção de um modelo, mas sim no tratamento contextualizado do conhecimento e na interpretação do fenômeno em estudo. Alguns outros aspectos da dinâmica da doença poderão ser estudados, mesmo utilizando um modelo que não aproxima tão bem os dados simulados dos dados reais, como por exemplo a ideia de pico de uma epidemia, as fases de epidemia, endemia e erradicação da doença e também a ideia de previsibilidade a partir de um modelo.



## **A proposta de pesquisa e a organização do trabalho**

Como base no que foi descrito anteriormente, optou-se por estudar o modelo SIR clássico. Autores como Murray (1993), Gani e Daley (1999) e Allman e Rhodes (2004) destacam que a simplicidade, a capacidade de ser modificado e ajustado para ter melhores previsões e por ter as premissas básicas dos modelos epidemiológicos mais complexos, mesmo que sendo analisado em sua representação mais simples, fazem com que o modelo SIR tenha vários conceitos relevantes para o estudo da dinâmica de doenças infecciosas.

Sendo assim, para este trabalho, visando compreender melhor a pandemia causada pela Covid-19 em Mato Grosso e buscando um meio de levar esse entendimento sobre modelos matemáticos aplicados à epidemiologia, definiu-se as seguintes questões norteadoras: como é realizado o estudo da dinâmica de doenças infecciosas utilizando o modelo SIR? Como transpor o entendimento do modelo SIR e da dinâmica de infecção causada pela Covid-19 para estudantes do Ensino Médio?

Assim definidas, o presente trabalho tem como objetivo geral compreender como a modelagem matemática é utilizada no estudo e descrição do avanço da pandemia da Covid-19 em Mato Grosso por meio do modelo SIR. Para isto, adotou-se os seguintes objetivos específicos:

- a) Descrever os métodos e técnicas utilizados no processo de construção do modelo SIR no estudo de doenças infecciosas, bem como apresentar soluções analíticas e explícitas encontradas na literatura;
- b) Construir uma planilha eletrônica com o modelo SIR discretizado que possibilite ajustar os parâmetros de infecção e tempo de infecção para obter uma melhor aproximação dos dados coletados;
- c) Utilizar o modelo SIR para simular o avanço da pandemia em Mato Grosso com base em dados reais disponibilizados pelo Secretaria de Estado de Saúde de Mato Grosso;
- d) Elaborar uma proposta didática para o 3º ano do Ensino Médio voltado para estudo da pandemia da Covid-19 em Mato Grosso utilizando os conceitos de taxa de variação e com o auxílio de planilhas eletrônicas.

A pesquisa foi realizada com os dados coletados de março de 2020 a janeiro de 2021. Justifica-se esse recorte temporal devido o início da vacinação contra Covid-19 no dia 18 de janeiro de 2021, fazendo com que indivíduos suscetíveis sejam transferidos diretamente para o

compartimento de removidos por adquirirem imunização. Como a proposta é trabalhar com modelo SIR simples, passa-se a desconsiderar a taxa de vacinação.

Ressalta-se que o Estado de Mato Grosso iniciou a vacinação no dia 18 de janeiro de 2021 em um ato simbólico ao vacinar dez profissionais da área da saúde e iniciou a distribuição de 126.160 doses da vacina, que contemplou 60.074 pessoas com duas doses, nas primeiras horas do dia 19 de janeiro. Considerando o intervalo entre as doses e que o número inicial de imunizados até o final de janeiro é muito pequeno quando comparado com a população total, essa parcela pode ser desconsiderada.

Para atender a demanda dos objetivos propostos e das questões a pesquisa foi dividida em 4 capítulos. No Capítulo 1 apresenta-se o referencial teórico sobre Modelagem Matemática e sua utilização como estratégia de ensino-aprendizagem de Matemática. Além disso, busca-se também apresentar alguns conceitos, os modelos matemáticos e as etapas executadas durante o processo de modelagem. Ainda no Capítulo 1 são feitas algumas breves considerações sobre a taxa de variação que será utilizada na construção da proposta didática para o Ensino Médio e sobre as Equações de Diferenças e Equações Diferenciais Ordinárias para auxiliar no processo de construção e interpretação do modelo SIR.

O Capítulo 2 está reservado para o delineamento metodológico adotado à pesquisa e a construção do modelo SIR. Para tanto, inicia-se definindo o perfil da pesquisa como qualitativo e quantitativo, com foco em um breve estudo descritivo e explicativo sobre o modelo matemático utilizado. Utiliza-se as ideias defendidas por Gerhardt e Silveira (2009), Gil (2002), Marconi e Lakatos (2017) e outros autores para dar suporte a metodologia escolhida, bem como as fontes utilizadas e modelo de agrupamento e análise dos dados coletados.

Também é realizado nesse capítulo um estudo sobre o modelo SIR e alguns elementos importantes de sua composição. Busca-se descrever alguns resultados obtidos a partir do modelo como, por exemplo, a reprodução básica de uma determinada doença infecciosa e a transição entre os indivíduos por meio dos compartimentos. Para o processo de construção do modelo discretizado adotou-se as planilhas do *Excel*, sendo todo o processo descrito no decorrer do capítulo.

No Capítulo 3 é realizada a análise dos dados coletados sobre a Covid-19 em Mato Grosso no período analisado. Os dados coletados foram organizados a partir dos dados diários obtidos pela Secretaria de Estado de Saúde de Mato Grosso, conforme o número de casos confirmados e óbitos registrados em cada dia.

No Capítulo 4 apresenta-se uma proposta de utilização da modelagem para estudantes do Ensino Médio. Foram elaboradas algumas atividades que elucidaram as fases executadas

durante o processo de modelagem. A problemática inicial é levantada pelo professor e as demais etapas do estudo são executadas pelos estudantes. Os conceitos estudados envolvem taxa da variação por meio da utilização de planilhas eletrônicas.

## 1 REFERENCIAL TEÓRICO

Neste capítulo encontram-se algumas ideias que ajudarão no entendimento sobre modelagem. Na seção 1.1 comenta-se sobre o que é a Modelagem Matemática na visão de alguns autores e faz o uso de algumas situações que se encaixam nessa prática antes mesmo de ser conhecida como é hoje. Além disso, busca-se nessa seção descrever o que é o modelo matemático e algumas de suas classificações, bem como algumas técnicas utilizadas pelo modelador e sobre como a Modelagem Matemática pode ser uma aliada na Educação Matemática. Já na seção 1.2 estão descritos alguns pressupostos teóricos sobre as Equações Diferenciais, desde os mais básicos sobre taxa de variação, equação de diferenças aos de Equações Diferenciais Ordinárias.

### 1.1 MODELAGEM MATEMÁTICA

A matemática e ciências físicas, ainda que de forma extrínseca em alguns momentos, tiveram efeitos importantes sobre o desenvolvimento uma da outra ao longo da história. Também não é insensato pensar que, há algum tempo, a matemática vem desempenhando um papel importante nas ciências humanas e sociais, ao mesmo tempo em que o seu desenvolvimento é influenciado por essas ciências. É nesse tipo de interação, extremamente importante para o desenvolvimento e aperfeiçoamento de ferramentas matemáticas adequadas para as várias ciências, que a modelagem matemática surge. Nesse sentido, D'Ambrósio, ao escrever o prefácio da obra de Bassanezi, intitulada "Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática" afirma que

A modelagem matemática é matemática por excelência. As origens das ideias centrais da matemática são o resultado de um processo que procura entender e explicar fatos e fenômenos observados na realidade. O desenvolvimento dessas ideias e sua organização intelectual dão-se a partir de elaboração sobre representações do real (BASSANEZI, 2002, p. 13).

É claro que na literatura pode-se encontrar várias definições para modelagem matemática, apesar do termo em si ser recente quando comparado com a própria história da matemática. Isso porquê, segundo Biembengut e Hein (2003, p. 8), “a expressão, em seu conceito moderno, surge durante o renascimento, quando se constroem as primeiras ideias da física apresentadas segundo linguagem e tratamentos matemáticos”.

Uma definição que se pode trazer, e que amplamente utilizada, é a de Bassanezi, um dos pioneiros em pesquisas sobre modelagem matemática no ensino aqui no Brasil, que diz que

“modelagem matemática consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real” (BASSANEZI, 2002, p. 16).

Essa definição é ampla e permite fazer uma análise atemporal sobre o termo ao longo da história, ou seja, pode-se identificar eventos em que se usa matemática como ferramenta na solução de algum problema do cotidiano, conforme a definição, porém são mais antigas que a própria terminologia renacentista.

Um exemplo comum, trazido em livros didáticos quando se vai trabalhar os conceitos de áreas de figuras planas na educação básica é o dos egípcios e o problema das enchentes do rio Nilo no século V a.C. Em suma, ao conceder a cada egípcio uma porção igual para desenvolvimento da agricultura, o faraó empregava um certo tributo a ser-lhe pago todos os anos. Quando o rio, em suas enchentes, carregava alguma parte do lote de algum agricultor, o prejudicado ia procurar o faraó para expor o ocorrido. Dessa forma, agrimensores eram enviados para o local a fim de determinar a redução sofrida pelo terreno, passando o proprietário a pagar um tributo proporcional ao que restara (GARBI, 2010).

Nota-se que o problema das enchentes era recorrente e os agrimensores responsáveis pelas demarcações possuíam técnicas específicas para recalculá-lo. Segundo Cajori (2007, p. 43), os egípcios “levaram a geometria não mais além do que o absolutamente necessário para os seus desejos”, desenvolvendo conceitos intuitivos para finalidades práticas de agrimensura, de arquitetura e das obras de irrigação. Entretanto, “a origem da geometria, que teria passado do Egito para a Grécia” (GARBI, 2010, p. 12).

Um outro exemplo que pode ser facilmente lembrado é o Arquimedes e o problema da Coroa do Rei Hieron. Um dos trabalhos publicados por Arquimedes é o *Tratado Sobre os Corpos Flutuantes*, podendo encontrar o que hoje é dado como Teorema ou Princípio de Arquimedes. Nesse trabalho, ele afirma que “todo corpo mergulhado em um fluido recebe um empuxo, de baixo para cima, igual ao peso do volume do fluido deslocado” (BOYER, 1998, p. 84).

Segundo Martins (2000) uma narrativa criada por Marcus Vitruvius Pollio (S/D), engenheiro e arquiteto romano que viveu no século I a.C., relata como Arquimedes teria descoberto o seu Princípio:

Hieron de Siracusa tendo chegado ao poder real, decidiu colocar em um templo, por causa de seus sucessos, uma coroa de ouro que havia prometido aos deuses imortais. Ofereceu assim um prêmio pela execução do trabalho e forneceu ao vencedor a quantidade de ouro necessária, devidamente pesada. Este, depois do tempo previsto, submeteu seu trabalho, finalmente manufaturado, à provação do rei e, com uma

balança fez uma prova do peso da coroa. Quando Hieron soube, através de uma denúncia, que certa quantidade de ouro havia sido retirada e substituída pelo equivalente em prata, incorporada ao objeto votivo, furioso por haver sido enganado, mas não encontrando nenhum modo de evidenciar a fraude, pediu a Arquimedes que refletisse sobre isso. E o acaso fez com que ele fosse se banhar com essa preocupação em mente e ao descer à banheira, notou que, à medida que lá entrava, escorria pra fora uma quantidade de água igual ao volume do seu corpo. Isso lhe revelou o modo de resolver o problema. Sem demora, ele saltou cheio de alegria para fora da banheira e completamente nu, tomou o caminho de sua casa, manifestando em voz alta para todos que havia encontrado o que procurava. Pois em sua corrida ele não cessava de gritar: encontrei, encontrei... (MARTINS, 2000, p. 117).

Essa narrativa é considerada fantasiosa para muitos, entretanto, Arquimedes resolveu uma situação problema, que aparentemente não tinha nada a ver com mundo da matemática, através de um modelo matemático. Tal modelo está inserido, nos dias de hoje, no campo da Matemática Contínua.

O modelo planetário apresentado por Cláudio Ptolomeu também pode ser utilizado como um exemplo de modelagem. Em um de seus trabalhos, Ptolomeu marca a posição da Terra usando resultados de Hiparco e considerando-a imóvel. Em seguida, com a Terra como centro do Universo, distribui os corpos celestes, que giravam em torno dela, na seguinte ordem: Lua, Mercúrio, Vênus, Sol e Marte. Claro que o modelo apresentado foi bem atrativo, pois ia ao encontro dos ideais teológicos da época; recusava-se qualquer sistema em que a Terra não fosse o elemento central.

Este modelo representativo, assim como os demais exemplos apresentados ajudando a evidenciar as atividades características da modelagem já estavam presentes na humanidade. Como citado anteriormente, o uso do termo modelagem surge durante o renascimento, período este em que o pensamento e o comportamento pregado baseavam-se na utilização de um senso crítico mais elevado e uma maior atenção às necessidades humanas, permitindo uma atenção maior aos fenômenos naturais. Evidentemente esse período opõe-se ao teocentrismo da Idade Média, que pregava a atenção total aos assuntos divinos e, portanto, um senso crítico menos elevado. Para Zandonaid

O período conhecido como Renascimento surge, então, como lugar comum na historiografia por ser um dos mais complexos e criativos períodos da humanidade, haja visto o quantitativo de realizações como o ressurgimento de teorias matemáticas pouco utilizadas até o século XVI, o reaparecimento de obras por meio das traduções humanistas e o uso de maquinários que contribuíram para a melhoria da vida como um todo. Nesse contexto, surgiram também correntes de pensamento que comporiam a base intelectual para o desenvolvimento da ciência moderna [...] (ZANDONAI, 2016).

De meados do século XVI estendendo-se até o século XVIII, tem-se a Revolução Científica, como é tratado na história das ciências. Pode-se citar algumas publicações celebres do século XVI, como: *De revolutionibus orbium coelestium* ("Das revoluções das esferas celestes") defendida por Nicolau Copérnico; *De Humani Corporis Fabrica* ("Da Organização do Corpo Humano") por Andreas Vesalius; A publicação do Diálogo sobre os Dois Principais Sistemas do Mundo, por Galileu Galilei; e o enunciado das Leis de Kepler. Eventos estes que impulsionaram decisivamente a revolução científica.

Já no século XVII, alinhados também ao pensamento renascentista, alguns enormes avanços podem ser citados: a Geometria Analítica de Fermat e Descartes e o Cálculo Infinitesimal de Newton e Leibniz.

a crescente inovação técnico-científica renascentista e o desenvolvimento completo do Cálculo Diferencial e Integral – que possibilitou o estudo da taxa de variação de grandezas ao longo do tempo – a modelagem matemática de processos físicos, químicos, biológicos e sociais sistematizou-se e mostrou-se uma poderosa ferramenta no manejo e interpretação de dados coletados a fim de que, a partir de um estudo de um fato observável [...] (OLIVEIRA JÚNIOR, 2021, p. 18).

Entretanto, mesmo com todo esse avanço, o rigor matemático ainda deixava a desejar. Foi então que, no século XVIII, estimulados ainda mais para entender e descrever fenômenos naturais, explorar o movimento contínuo de partículas no espaço e entender como a variação da velocidade se relacionava com a aceleração, tanto Newton quanto Leibniz perceberam que as equações que descreviam os modelos físicos tinham como base a variação e que poderiam ser modeladas por derivadas, e a matemática base para resolvê-las era o Cálculo desenvolvido por eles, foi então que surgiu o estudo das Equações Diferenciais.

### 1.1.1 Modelagem e Modelos Matemáticos

A definição trazida por Bassanezi na seção 1.1 torna evidente que o processo de modelagem inicia e termina no mundo real. É nesse processo de transformação de problemas da realidade em linguagem matemática que surge o *modelo matemático*. Mas afinal, o que significa esse termo?

Na literatura há inúmeras definições, mas uma que ainda permanece bem adequada e apresentada por HAGGETT e CHORLEY (1967; 1975) diz que um

[...] modelo é uma estruturação simplificada da realidade que supostamente apresenta, de forma generalizada, características ou relações importantes. Os modelos são aproximações altamente subjetivas, por não incluírem todas as observações ou medidas associadas, mas são valiosos por obscurecerem detalhes acidentais e por

permitirem o aparecimento dos aspectos fundamentais da realidade (HAGGETT e CHORLEY, 1967; 1975 *apud* CHRISTOFOLETTI, 1999, p. 8).

Deve-se ressaltar que nesse processo de simplificação e de transposição de informações deve-se ter em mente que não é a realidade em si que se encontra representada, mas sim uma visão (do modelador) e a maneira como a realidade é percebida e compreendida. É nessa visão que a subjetividade do modelo pode ser enxergada, podendo torná-lo o mais preciso quanto necessário. Dependendo de como esse processo ocorre, o grau de complexidade do modelo construído pode variar, influenciando na complexidade de sua resolução.

A tipologia dos modelos é variada e muitas das vezes pode-se confundir a matemática do modelo com as características de sua organização. As contribuições de Bassanezi (2002) evidenciam dois grandes grupos: o modelo objeto e o modelo teórico. O primeiro, segundo o autor, é uma representação de um objeto ou fato concreto, podendo essa representação ser pictórica (um desenho, um esquema compartimental<sup>1</sup>, um mapa, etc.), conceitual (fórmula matemática), ou simbólica. Já o segundo, volta-se para uma teoria geral existente em torno de um modelo objeto com um código de interpretação, preservando características do sistema real.

Os modelos matemáticos podem transitar entre esses dois grupos e são comumente distinguidos em três classes: determinísticos, probabilísticos ou estocásticos, e de otimização. Os modelos matemáticos determinísticos baseiam-se em noções matemáticas que relacionam variáveis independentes e dependentes e consistem num conjunto de afirmações matemáticas especificadas, a partir das quais consequências únicas podem ser deduzidas pela argumentação matemática.

Os modelos probabilísticos ou estocásticos possuem expressões que envolvem variáveis, parâmetros e constantes matemáticas, juntamente com um ou mais componentes aleatórios dos dados de observação ou da experimentação. Um exemplo é a simulação de Markov que simula eventos posteriores com base nos estados precedentes. Outro exemplo é a simulação Monte Carlo, na qual um evento posterior é simulado de modo independente em relação aos estados prévios de um determinado sistema.

Já os modelos de otimização, baseiam-se na maximização ou minimização de uma determinada força ou critério. Por exemplo, para simular o estado provável de entropia máxima, ou os estados de eficiência máxima ou de custos mínimos. Geralmente, traduz as principais características do problema que precisa ser solucionado considerando três elementos: a função objetivo, as variáveis de decisão e as restrições de problema.

---

<sup>1</sup> Segundo Bassanezi (2002) o modelo SIR, objeto de estudo da pesquisa pode encaixar como um modelo objeto



### 1.1.2 Modelagem como estratégia de Ensino-Aprendizagem

A história da Modelagem na Educação Matemática, no Brasil, remete ao final da década de 1970. Dentre os personagens desse início pode-se destacar Aristides Camargo Barreto, pois, segundo Barbosa (2001), foi o primeiro a realizar experiências de modelagem na educação brasileira, representando o Brasil em congressos internacionais com trabalhos sobre o tema, além de divulgar seus trabalhos em cursos de pós-graduação, artigos em revistas e anais de congressos. Pode-se destacar também um grupo de professores, especialmente Ubiratan D'Ambrósio e Rodney Carlos Bassanezi, ambos do Instituto de Matemática, Estatística e Ciências da Computação, IMECC, da Universidade Estadual de Campinas, UNICAMP (BIEMBENGUT, 2009; BRANDT, BURAK e KLÜBER, 2016).

Biembengut (2009) ainda traz como referências singulares, fundamentais para impulsionar e consolidar modelagem na Educação Matemática, nomes como: João Frederico Mayer, Marineuza Gazzetta e Eduardo Sebastiani. Segundo a autora, as discussões desde como se faz um modelo matemático e como se ensina matemática, trazidas por essas e outras referências, permitiram o surgimento da linha de pesquisa de modelagem matemática no ensino no Brasil. Mas afinal, quais fatores fizeram com que a Modelagem fosse direcionada para a educação?

É difícil dizer ou elencar todos os fatores que culminaram no direcionamento da modelagem para a educação, porém pode-se dizer que tal surgimento está relacionado a dois fatores principais. O primeiro consiste, de acordo com Andrews e McLone (1976), em um processo de transferência dos procedimentos e técnicas, utilizados pelo profissional na aplicação da matemática, para o ambiente universitário. Esse processo, segundo os autores, ocorreu em resposta ao baixo desempenho dos profissionais recém-formados que atuavam na área de Matemática Aplicada em aplicar os conceitos matemáticos aos problemas das empresas nas quais trabalham.

E esse baixo desempenho dava-se à pouca preocupação das universidades em proporcionar aplicações reais aos acadêmicos dos cursos de licenciatura e bacharelado, em outras palavras, faltavam-lhes situações que permitiria ter uma visão mais profunda da aplicabilidade da matemática e do desenvolvimento do processo de modelagem, até então atividade do matemático aplicado. Em decorrência disso, matemáticos puros e aplicados iniciaram as discussões sobre métodos para se ensinar Matemática (BARBOSA, 2001).

Já o segundo fator, baseando-se nas contribuições de D'Ambrosio (1986), Bassanezi (2002), Biembengut (2009), Malheiros, Meyer e Caldeira (2011) e Brandt; Burak; Klüber

(2016), está relacionado a transferência para o ambiente da Educação Básica devido às preocupações socioculturais nos ambientes escolares, principalmente relacionados à motivação dos estudantes face aos objetos de conhecimento, relevância dos temas dada a realidade em que vivem e o significado destes objetos na construção de pensamento sociocrítico. Nesse sentido, a Modelagem viria a contribuir como uma maneira de “fazer matemática”, trazendo o que Malheiros, Meyer e Caldeira (2011) se referem como matemática na vida ou matemática para a vida.

Brandt, Burak e Klüber (2016) destacam que essas preocupações socioculturais, citadas anteriormente, influenciam diretamente nos resultados obtidos em avaliações escolares de Matemática, sejam nacionais e internacionais, como a Prova Brasil do Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (SAEB) e o Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA), indicando que se trata de componente curricular em que os educandos brasileiros obtêm pouco sucesso e estão abaixo do desejado e da média mundial.

É importante ressaltar que, em ambos os processos de transferências mencionados, a essência da Modelagem, que é a observação da realidade e o favorecimento à pesquisa, não pode ser perdida (BARBOSA, 2001). Entretanto, não se deve transferir da Matemática Aplicada o processo para a Educação Matemática como ele é de fato, mas sim garantir que se caminhe nas etapas do processo na busca por entender algumas situações e acontecimentos com o auxílio da matemática, podendo até mesmo agir sobre os mesmos.

Modelagem na Educação Matemática, por vezes, não conduz à construção de modelos propriamente ditos, o que corrobora o argumento de que não se pode transferir automaticamente para o campo da Educação Matemática as conceituações sobre a Modelagem da Matemática Aplicada (BARBOSA, 2001, p. 36)

Nesse sentido, como a Modelagem Matemática na Educação pode contribuir para que essas preocupações relacionadas à motivação, à relevância e ao significado da matemática sejam consideradas em sala de aula? Para responder essa pergunta é necessário compreender como esta configura-se no ensino-aprendizagem de matemática.

Na literatura existem concepções diferentes sobre Modelagem na educação entre professores e pesquisadores, sendo estas voltadas para educação básica, superior e na formação de professores. Muitas das vezes, trata-se a Modelagem como Estratégia ou Metodologia de Ensino e/ou Aprendizagem, outras, como Prática e, ainda, como Ambiente de Aprendizagem.

Em sua pesquisa, Barbosa (2004) volta-se para a educação básica considerando duas correntes de modelagem. A primeira delas traz Modelagem para ensinar matemática, ou seja, um argumento voltado à aprendizagem. Já a outra para atuar no dia-a-dia, ressaltando o

argumento de utilidade. Baseando-se nessas duas correntes, o autor concebe a Modelagem Matemática como “um *ambiente de aprendizagem* no qual” estudantes “são convidados a problematizar e investigar, por meio da matemática, situações com referência na realidade” (2004, p. 3, grifo nosso).

Bassanezi (2002) e Malheiros (2008), voltando-se para formação de professores, entende-a como um método de pesquisa, este derivado da Matemática Aplicada, apenas com algumas variações para o ensino e para a aprendizagem da Matemática. Os autores tratam-na como uma estratégia pedagógica em que os estudantes, a partir de um tema ou problema de interesse deles, utilizam conteúdos matemáticos para investigá-lo ou resolvê-lo.

A modelagem no ensino é apenas uma estratégia de aprendizagem, onde o mais importante não é chegar imediatamente a um modelo bem sucedido, mas caminhar seguindo etapas onde o conteúdo matemático vai sendo sistematizado e aplicado (BASSANEZI, 2002, p. 38).

Já para Biembengut e Hein (2003, p. 28) a Modelagem Matemática na Educação configura-se “como metodologia de ensino-aprendizagem” que “parte de uma situação/tema e sobre ela desenvolve questões, que tentarão ser respondidas mediante o uso de ferramental matemático e da pesquisa sobre o tema”.

Apesar de o título de sua pesquisa também trazer a modelagem como uma metodologia alternativa de ensino, Burak (1987, p. 11) considera a modelagem como “propiciadora de uma metodologia e de uma prática educativa caracterizada pelo ensino e aprendizagem ao nível de reflexão”, uma das quatro grandes classes de níveis de ensino e aprendizagem<sup>2</sup>.

Independentemente da concepção ou da visão epistemológica trazidas por estes e outros autores, é possível ver uma convergência para que a adoção de temas e/ou problemas, levantamentos de hipóteses e questões, bem como a coleta de dados sejam realizadas pelos estudantes, contribuindo, assim, para o aspecto motivacional e de contextualizado da matemática. Além disso, a importância do ferramental matemático para auxiliar na interpretação dos dados e na resolução do problema investigado pode ser vista no cotidiano dos estudantes, indo ao encontro do objetivo da modelagem trazido por Góes e Góes:

[...] o objetivo da modelagem matemática na educação básica é aplicar ou representar conceitos, possibilitando aos professores a percepção da importância que a matemática tem no cotidiano dos estudantes. Dessa forma, o estudante pode ser motivado a desenvolver raciocínio lógico e ter uma visão crítica dos acontecimentos (GÓES e GÓES, 2016, p. 49-50).

---

2 Na perspectiva de Bigge (1977) *apud* Burak (1987), os quatro níveis de ensino e aprendizagem seriam i) Ensino e aprendizagem ao nível de memorização; ii) Ensino e aprendizagem ao nível de compreensão; iii) Ensino ao nível de desenvolvimento da autonomia; iv) Ensino e aprendizagem ao nível de reflexão.

Ao trazer à tona o ensino contextualizado, fica ainda mais evidente a aplicação da matemática no cotidiano dos estudantes, pois pode-se fazer interseções com outras áreas do conhecimento, que pode ser uma forma de trabalhar a interdisciplinaridade no ambiente escolar. Isso já é previsto nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) para o ensino de matemática (BRASIL, 1997, p. 30)

Esse processo de transformação do saber científico em saber escolar não passa apenas por mudanças de natureza epistemológica, mas é influenciado por condições de ordem social e cultural que resultam na elaboração de saberes intermediários, como aproximações provisórias, necessárias e intelectualmente formadoras. É o que se pode chamar de contextualização do saber.

Entretanto o uso da modelagem matemática na educação exige mudança na postura do educador frente à Matemática e seu ensino. Muitas das vezes o tempo para cumprir o currículo escolar dificulta essa mudança, pois o redimensionamento do tempo e do espaço de sala de aula difere do ensino tradicional. Bassanezi afirma que a maior dificuldade para a adoção do processo de modelagem

[...] é a transposição da barreira naturalmente criada pelo ensino tradicional onde o objeto de estudo apresenta-se quase sempre bem delineado, obedecendo a uma sequência de pré-requisitos e que vislumbra um horizonte claro de chegada – tal horizonte é muitas vezes o *cumprimento do programa da disciplina* (BASSANEZI, 2002, p. 43, grifo do autor).

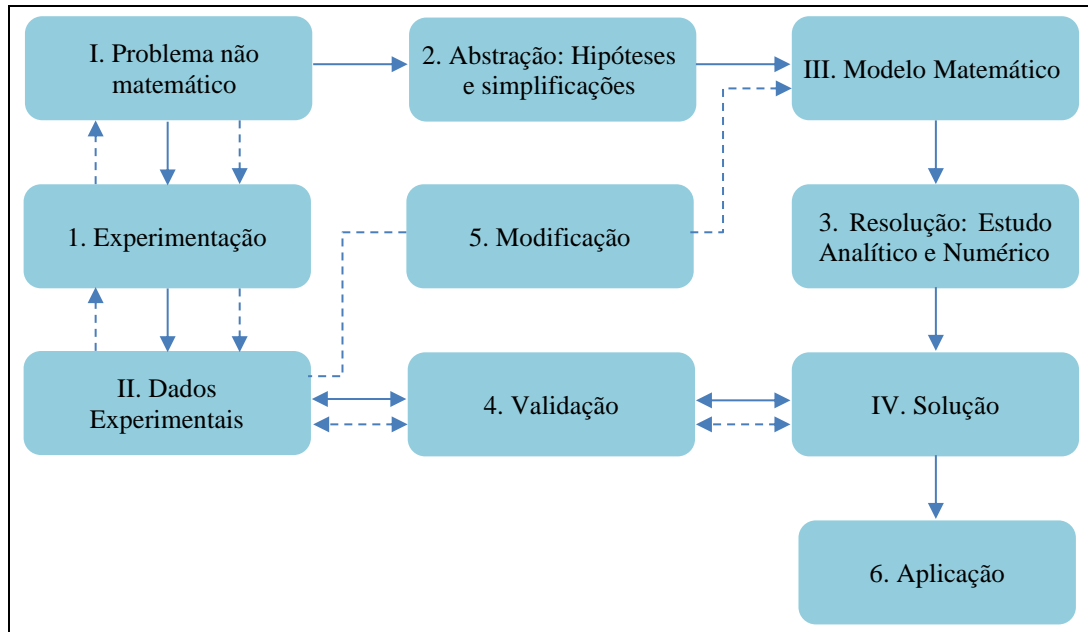
Ressalta-se aqui que não se está fazendo uma crítica ao ensino tradicional, mas sim evidenciando que o ensino pela modelagem ocorre de modo diferente. Um exemplo trazido por Brandt; Burak; Klüber (2016) mostra que, na maioria dos casos, ao trabalhar com modelagem, não são os conteúdos que determinam os problemas ou as situações, mas os problemas ou situações que determinam os conteúdos. Ainda segundo o autor, é comum que conteúdos de séries anteriores ou posteriores apareçam na resolução das situações de modelagem, fazendo com que o professor tenha um papel de filtrar e auxiliar os estudantes em como seguir com o estudo. Isso faz com que o processo de ensino-aprendizagem não ocorra em sentido único do professor para o estudante, mas por meio da interação do estudante com seu ambiente natural.

### 1.1.3 Técnicas de Modelagem Matemática

Apenas compreender o que é a modelagem matemática não é suficiente para pôr essa atividade em prática. É necessário entendê-la como um processo que ocorre de modo dinâmico

e sempre passível de ser melhorado. Para Bassanezi e Junior (1988) e Bassanezi (2002) esse processo de modelagem matemática de um problema real deve seguir uma sequência de etapas: experimentação; abstração; resolução; validação; modificação. Essas etapas são bastante conhecidas quando utilizadas na perspectiva da Matemática Aplicada podendo apresentar algumas etapas intermediárias, conforme a Figura 1.

Figura 1: Esquema das principais etapas no processo de modelagem



Fonte: Adaptado de Bassanezi e Junior (1988, p. 6)<sup>3</sup>.

A etapa de *experimentação* (1) configura-se como uma atividade destinada à obtenção de dados experimentais ou empíricos ajudando na compreensão do problema. Os objetivos da pesquisa guiam os métodos experimentais a serem utilizados. Ao adotar técnicas e métodos estatísticos na pesquisa experimental pode-se dar maior grau de confiabilidade aos dados coletados.

Na etapa de *abstração* procura-se selecionar as variáveis envolvidas, bem como reformular o problema teórico numa linguagem própria da área em que se está trabalhando. Nesse processo de seleção de variáveis é natural que haja conjectura de hipóteses iniciais e simplificações para facilitar o entendimento do problema e dos dados coletados, além das possíveis soluções.

A próxima etapa será a *resolução* do problema. É nessa etapa que ocorre a construção do modelo matemático, substituindo a linguagem natural das hipóteses levantadas por uma

<sup>3</sup> Na Figura 1 as setas contínuas indicam a primeira aproximação com cada etapa da Modelagem. Já as setas pontilhadas indicam que a transição entre cada etapa ocorre de modo dinâmico, podem o modelador ir e vir entre as etapas anteriores e posteriores.

linguagem matemática coerente. A aceitação ou não desse modelo será dada por meio da *validação*, processo no qual o modelo construído, juntamente com às hipóteses atribuídas, suas soluções são confrontadas com os valores obtidos no sistema real. Caso alguns fatores ligados ao problema original ou o grau de aproximação entre as soluções do modelo e os dados coletados provoque a rejeição ou aceitação do modelo será necessário *modificá-lo*.

Essa modificação pode ir desde a forma que os dados foram coletados, hipóteses levantadas à lei de formação construída, modificando o modelo original e que todo o processo seja retomado. A possibilidade de sempre ser modificado, podendo quase sempre ser melhorado, mostra que nenhum modelo pode ser apresentado como definitivo (BASSANEZI, 2002).

Quando é voltada à Educação, a Modelagem Matemática pode manter essas etapas diferindo apenas no tratamento da informação e com foco na aprendizagem, e não necessariamente na construção do modelo. É nesse sentido que em Burak (2010) elenca as seguintes etapas: 1) Escolha de um tema; 2) pesquisa exploratória, 3) levantamento do(s) problema(s); 4) Resolução dos problemas e o desenvolvimento dos conteúdos no contexto do tema; 5) análise crítica da(s) solução(ões).

Na etapa (1) o interesse do grupo ou dos grupos de estudantes envolvidos irá conduzir a escola do tema, motivados pela curiosidade ou mesmo para a resolução de uma situação-problema. Isso fará com que os estudantes busquem conhecer mais e melhor o assunto escolhido, realizando, de uma forma ou de outra, uma pesquisa exploratória (2). Nessa etapa os estudantes vão poder organizar os dados e identificar o melhor modo de fazer o tratamento desses dados.

Com os dados coletados vem a próxima etapa, o levantamento do problema ou dos problemas relativos ao tema. Nessa etapa busca-se o desenvolvimento da autonomia do estudante em construir hipóteses, analisar as situações e tomar decisões. Essa autonomia irá conduzir a resolução do(s) problema(s) levantados, etapa (3), fazendo uso de todo o ferramental matemático disponível. É que aí que professor, ao mediar o processo de modelagem, deve orientar a busca de conteúdo no livro texto e criar alternativas que permitam ao estudante buscar uma solução para o problema.

É importante ressaltar que, no âmbito da Educação Básica, a obtenção de um modelo matemático não constitui prioridade, muitas das vezes os conteúdos trabalhados nesse nível de escolaridade valem-se de modelos já prontos, como por exemplo funções, equações lineares ou quadráticas, fórmulas das áreas de figuras planas e espaciais e o modelo pode ser visto como

uma representação que vão desde os modelos matemáticos a lista de supermercado, a planta de uma casa entre outros (BURAK, 2010).

Na última etapa, análise crítica da(s) solução(ões), grupo ou grupos discutem os cuidados com a linguagem, com as restrições que se fazem necessárias em muitas ocasiões, bem como fazem algumas justificativas, alguns procedimentos mais particulares. É nesse momento que as soluções empíricas às mais formais são comentadas e, sob aspecto da matemática, pode-se analisar a coerência e a consistência da solução ou das soluções encontradas para o problema levantado.

Na educação básica é interessante conhecer os níveis de modelagem, o que Barbosa (2004) chama de casos, sendo determinados pela participação de professor e/ou estudante em cada etapa do processo de modelagem descrito anteriormente. Na Figura 2 estão elencados os três casos descritos por Barbosa como base nas etapas da modelagem e na participação ou não do professor e do estudante.

Figura 2: Casos de modelagem e participação em cada etapa

|        |                        |                     |                 |                               |
|--------|------------------------|---------------------|-----------------|-------------------------------|
| Caso 1 |                        |                     |                 |                               |
| Caso 2 |                        |                     |                 |                               |
| Caso 3 |                        |                     |                 |                               |
|        | Formulação do problema | Simplificação       | Coleta de dados | Solução                       |
|        |                        | Tarefa do professor |                 | Tarefa do professor/Estudante |

Fonte: Adaptado de Barbosa (2004).

No caso 1, para contornar algumas das dificuldades apresentadas em utilizar modelagem matemática como estratégia de ensino, o professor pode formular e apresentar um problema, devidamente relatado, com dados qualitativos e quantitativos, cabendo aos estudantes a investigação e a interpretação. Barbosa (2004) ressalta que nesse caso a atividade não é extensa e também não será necessário coletar mais dados para resolvê-lo, o que torna o caso interessante para os estudantes da educação infantil, do ensino fundamental anos iniciais e finais.

No caso 2, os estudantes receberão um problema inicialmente elaborado pelo professor e, a partir dele terão que sair da sala de aula para coletar dados. Nesse caso, os estudantes são mais ativos e responsabilizados também por conduzir a simplificação do problema e a sua solução, o que torna o caso 2 mais indicado para os estudantes dos anos finais do ensino fundamental e ensino médio.

Por fim, no caso 3, os estudantes serão responsáveis por formular do problema inicial e simplificá-lo, coletar de dados e resolvê-lo. Esse caso é desenvolvido a partir de temas ‘não-matemáticos’, que podem ser escolhidos pelo professor ou pelos estudantes. Nesse caso, os estudantes são responsabilizados por todas as etapas da modelagem, tornando o caso propício ao ensino médio.

## 1.2 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS E EQUAÇÕES DE DIFERENÇAS

No processo de modelagem descrito na Seção 1.1, buscou-se falar sobre a formulação de um modelo matemático, a partir de um problema real, utilizando raciocínio intuitivo sobre o fenômeno, ou por meio de uma lei física fundamentada em evidência experimental. O modelo matemático frequentemente tem a forma de uma equação diferencial, isto é, uma equação que contém uma função desconhecida e algumas de suas derivadas. Nessa seção busca-se debater algumas das propriedades de soluções de equações diferenciais e apresentar alguns dos métodos que se mostraram eficazes para encontrar soluções ou, em alguns casos, aproximá-las conforme os seguintes autores: Boyce e DiPrima (2002), Barroso *et al.*, (1987), Bassanezi e Junior (1988) e Stewart (2013).

### 1.2.1 Taxas de Variações Contínuas e Discretas

É comum no processo de modelagem matemática de situações ou fenômenos não matemáticos estabelecer relações entre as grandezas observadas, isso se dá, principalmente, pelo estudo das variações destas em estágios diferentes de observação. Por isso, é natural que as grandezas envolvidas sejam atribuídas nesse processo como variáveis (modificam-se durante o processo), ou parâmetros (medidas auxiliares e podem ou não mudar durante o processo) e algumas vezes constantes (não apresentam variação e têm seus valores previamente fixados ou determinados).

Essas variáveis podem ser apresentadas de modo contínuo ou discreto, dependendo do problema analisado ou de como são interpretadas durante o processo de modelagem. Em suma, pode-se dizer que a variável  $x$  será contínua quando puder se assumir todos os valores reais intermediários entre os valores discretos da sequência  $\{x_i\}, i = 1, 2, \dots, n$ , sendo  $x_1, x_2, \dots, x_n$



é um conjunto finito de dados observados. Caso a variável  $x$  não seja contínua, ela será dita discreta, assumindo valores em um conjunto discreto<sup>4</sup>.

Sejam  $x$  e  $y$  variáveis (discretas ou contínuas),  $y$  depende quantitativamente de  $x$ , pode-se construir um modelo por meio das variações destas grandezas. Baseando-se nas contribuições de Stewart (2013) e Morgado e Carvalho (2015) essas variações podem ser tomadas com: variação simples, variação relativa, variação média e variação instantânea.

**Definição 1.** A *variação simples* (ou absoluta) de  $y = f(x)$  é dada pela diferença da variável dependente  $y$  em dois estágios da variável independente  $x$ , ou seja,

$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1) \quad (1)$$

**Definição 2.** A *variação média* (ou taxa de variação média) é dada pela proporção entre as variações de  $y$  e de  $x$ , mostrando quanto variou  $y$  por unidade de  $x$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \quad (2)$$

A expressão  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ , geometricamente, mede o coeficiente angular (ou inclinação) da reta que liga os pontos  $(x_1, f(x_1))$  e  $(x_2, f(x_2))$ .

**Definição 3.** A *variação relativa* também mostra a variação de  $y$  por unidade de  $x$ , porém, é considerado o estágio inicial  $y = y_i$ .

$$\frac{1}{y_i} \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \left( \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} \right) \frac{1}{y_i} \quad (3)$$

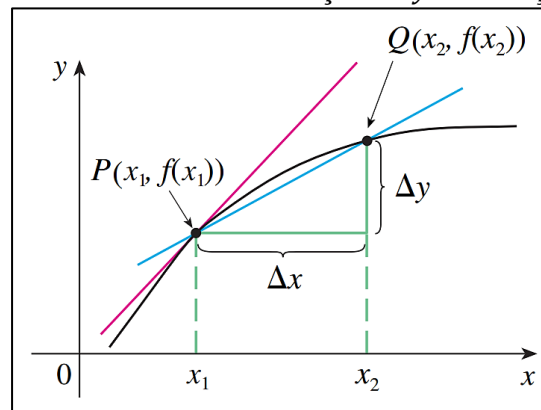
**Definição 4.** A *variação instantânea* (ou taxa de variação instantânea) de função  $f$  dada por  $y = f(x)$ , em um ponto  $(x, f(x))$  é o valor limite obtido calculando-se a taxa média de  $f$  em intervalos cada vez menores, em torno de  $(x, f(x))$ .

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (4)$$

quando tal limite existir, conforme é apresentado na Figura 3.

---

<sup>4</sup> Deve-se ressaltar que um conjunto  $A$  será dito discreto se houver uma correspondência biunívoca entre seus elementos e um subconjunto dos números naturais (MORGADO e CARVALHO, 2015).

Figura 3: Taxa média de variação de  $y$  em relação a  $x$ 

Fonte: STEWART (2013, p. 135).

O entendimento sobre as características das variáveis influencia a construção do modelo em estudo, dado que na maioria das vezes os modelos matemáticos que buscam relacionar as variáveis através de suas variações contínuas são formulados com equações diferenciais. Já os modelos discretos utilizam as equações de diferenças.

### 1.2.2 Equações de Diferenças

Ao estudar alguns fenômenos naturais, como por exemplo a dinâmica de populações, o ideal é estabelecer relações entre os valores dos elementos da sequência do estágio  $t + 1$  e do estágio  $t$ , pois entre gerações sucessivas o crescimento ocorre em etapas discretas, não ocorrendo sobreposições de gerações. Essas etapas são conhecidas como *passos* e podem ser caracterizadas como horas, dias, semanas, meses, etc. Estas relações denominam-se fórmulas recursivas ou equações de diferenças (BASSANEZI e JUNIOR, 1988; BOYCE e DIPRIMA, 2002).

**Definição 5.** Uma equação de diferenças é uma equação do tipo

$$y_{n+1} = f(n, y_n, y_{n-1}, y_{n-2}, \dots, y_{n-m}), \quad n \in N \quad (5)$$

sendo  $f$  uma função. Os valores obtidos para uma sequência de números reais  $y_0, y_1, \dots, y_{n+1}$ , que verifica a equação para cada  $n \in N$  são soluções da equação de diferenças (5). Note que a expressão apresenta o valor de uma variável em um estágio  $n$  em função de  $n$  e dos valores dos estágios iniciais (condições iniciais).

Um exemplo de emprego das equações de diferenças que pode ser é a sequência de Fibonacci, definida como:

$$y_{n+1} = y_n + y_{n-1} \text{ com } y_0 = 1 \text{ e } y_1 = 1, \quad n = 2, 3, \dots \quad (6)$$

A sequência numérica foi originada do seguinte problema: “Quantos coelhos haverá em um ano, começando com um só casal, se em cada mês cada casal adulto gera um novo casal, o qual se tornará produtivo em dois meses?”. De modo recursivo tem-se que os primeiros nove termos da sequência de Fibonacci são exibidos a seguir:  $(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots, y_n)$ , sendo o número de casais adultos no estágio  $n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , representado por  $y_n$ .

### 1.2.3 Equações de Diferenças Lineares

Nessa subseção será realizada uma breve exposição sobre o conceito de equações de diferenças lineares, bem como são classificadas e a solução obtida no termo geral.

**Definição 6.** Uma equação de diferenças *linear* de ordem  $(n - m)$  é uma equação da forma:

$$y_{n+1} = f(n, y_n, y_{n-1}, y_{n-2}, \dots, y_{n-m}), \quad n \in \mathbb{N} \quad (7)$$

$f$  é uma função linear nas variáveis  $y_n, y_{n-1}, y_{n-2}, \dots, y_{n-m}$ .

A equação (7) pode ser representada como:

$$y_n = \sum_{i=n-1}^m g(n)y_i + h(n) \quad (8)$$

com  $g(n)$  e  $h(n)$  funções de  $\mathbb{N}$  em  $\mathbb{R}$ ,  $m < n$  e  $(n - m)$  condições iniciais. Se  $h(n) = 0$  a equação é dita *homogênea*, caso contrário é dita *não-homogênea*.

**Definição 7.** Se  $(n - m) = 1$  e  $h(n) = 0$ , então a equação (8) é uma equação linear de primeira ordem homogênea. Isso quer dizer que a equação recorre a apenas um termo e pode ser apresentada na forma

$$\begin{cases} y_n = g(n)y_{n-1} \\ y_0, \quad \text{dado.} \end{cases} \quad (9)$$

Conhecendo a forma da equação da recorrência é possível encontrar a equação de seu termo geral. Para isso, basta listar os termos da sequência de modo recursivo:

$$\begin{aligned} y_1 &= g(1)y_0 \\ y_2 &= g(2)y_1 \\ y_3 &= g(3)y_2 \\ &\vdots \\ y_n &= g(n)y_{n-1} \end{aligned}$$

Fazendo o produto dos elementos do primeiro e do segundo membro das equações entre si, obtém-se

$$y_1 \cdot y_2 \cdot y_3 \cdot \dots \cdot y_{n-1} \cdot y_n = g(1)y_0 \cdot g(2)y_1 \cdot g(3)y_2 \cdot \dots \cdot g(n)y_{n-1}$$

o que, ao simplificar os termos que se repetem em ambos os lados, fornece

$$y_n = g(1)y_0 \cdot g(2) \cdot g(3) \cdot \dots \cdot g(n-1)$$

Agora é necessário analisar a função  $g(n)$ . Se  $g(n) = k$  (função constante), então a solução geral da equação (9) será dada por

$$y_n = y_0 k^n \quad (10)$$

Entretanto, se  $g(n) = n$ , então a solução geral será dada por

$$y_n = (n-1)! y_0 \quad (11)$$

De modo geral, as soluções mais comuns podem ser divididas em dois casos:

- Se  $y_n = ky_{n-1}$  com  $y_0$  dado, então a solução será dada por  $y_n = y_0 k^{n-1}$
- Se  $y_n = ny_{n-1}$  com  $y_0$  dado, então a solução será dada por  $y_n = (n-1)! y_0$

Esses dois casos podem ser visualizados nos exemplos a seguir:

**Exemplo 1.** (Adaptado de Morgado e Carvalho (2015, p. 71)) para resolver a recorrência linear homogênea de 1ª ordem

$$y_n = 2y_{n-1}$$

deve observar que recorrência encaixa no primeiro caso dado anteriormente, já que  $g(n) = 2$  é constante. Logo, a solução geral será dada por  $y_n = y_0 2^{n-1}$ , como não foi prescrito o valor de  $y_0$ , haverá uma infinidade de soluções para a recorrência.

**Exemplo 2.** Resolva a recorrência linear homogênea de 1ª ordem definida por  $y_n = ny_{n-1}$ , com  $y_0 = 1$ .

Neste caso  $g(n) = n$  e encaixa com o segundo caso, possibilitando assim calcular

$$\begin{aligned} y_n &= (n-1)! y_0 \\ &= (n-1)! \end{aligned}$$

Logo,  $y_n = (n-1)!$  com  $n \in \mathbb{N}$ , é uma solução para o problema em questão.

**Definição 8.** Se  $h(n) \neq 0$ , mostra-se, de modo análogo, que a solução da equação de diferenças de 1ª ordem não homogênea com  $g(n) = 1$

$$\begin{cases} y_n = y_{n-1} + h(n) \\ y_0, \quad \text{dado.} \end{cases} \quad (12)$$

será dada por

$$y_n = y_0 + \sum_{k=0}^{n-1} h(k) \quad (13)$$

**Exemplo 3.** A recorrência linear não-homogênea de 1ª ordem

$$\begin{cases} y_n = y_{n-1} + (n + 1) \\ y_0 = 1 \end{cases}$$

representa o número de máximo de regiões em que  $n$  retas podem dividir um plano. Neste caso o valor inicial já está definido e  $h(n) = n + 1$  e para resolver basta tomar  $k = n + 1$ , ou seja,

$$y_n = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} n + 1$$

como cada parcela representa a soma termos de uma progressão aritmética de razão 1 o termo geral será dado por

$$y_n = 1 + \frac{n(n + 1)}{2}$$

**Exemplo 4.** (Adaptado de Morgado e Carvalho (2015, p. 72)) Na recorrência

$$\begin{cases} y_n = y_{n-1} + 2^n \\ y_0 = 1 \end{cases}$$

o valor inicial já é fixado e  $h(n) = 2^n$ , logo a solução será dada por:

$$\begin{aligned} y_n &= y_0 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{n-1} \\ &= 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{n-1} \\ &= 1 \frac{2^n - 1}{2 - 1} \\ &= 2^n - 1 \end{aligned}$$

Em outros casos, tomando  $g(n) \neq 1$ , há a possibilidade de manipular a equação da recorrência de modo que se possa encontrar uma equação semelhante e resolvê-la como resolvido anteriormente. Isso pode ser evidenciado no teorema a seguir, o qual mostra que qualquer recorrência linear não homogênea de 1ª ordem pode ser transformada em uma da forma  $y_n = y_{n-1} + h(n)$ .

**Teorema 1.** Se  $a_{n-1}$  é uma solução não nula da recorrência  $y_n = g(n)y_{n-1}$ , então ao fazer a substituição  $y_{n-1} = a_{n-1}x_{n-1}$  a recorrência  $y_n = g(n)y_{n-1} + h(n)$  é transformada e

$$x_n = x_{n-1} + h(n)[g(n)a_n]^{-1}$$

*Demonstração:* Note que a substituição  $y_n = g(n)y_{n-1}$ , transforma

$$y_n = g(n)y_{n-1} + h(n) \text{ em } a_n x_n = g(n)a_{n-1}x_{n-1} + h(n).$$

Como  $a_{n-1}$  é uma solução de  $y_n = g(n)y_{n-1}$ , pode-se reescrever  $a_n = g(n)a_{n-1}$ . Logo, a equação se transforma em

$$g(n)a_{n-1}x_n = g(n)a_{n-1}x_{n-1} + h(n)$$

ou seja,

$$x_n = x_{n-1} + \frac{h(n)}{g(n)a_{n-1}} = x_{n-1} + h(n)[g(n)a_n]^{-1}$$

**Exemplo 5.** Para resolver a recorrência  $y_n = 3y_{n-1} + 3^n$ , com  $y_0 = 2$ , pode ser utilizado o Teorema 1, basta considerar a equação homogênea associada  $y_n = 3y_{n-1}$ , cuja solução é dada por  $y_n = 3^{n-1}$ . Fazendo a substituição  $y_n = 3^n x_n$  se obtém

$$3^n x_n = 3 \cdot 3^{n-1} x_{n-1} + 3^n$$

$$x_n = \frac{3^n x_{n-1} + 3^n}{3^n}$$

$$x_n = x_{n-1} + 1$$

Como  $x_n = x_{n-1} + 1$  é uma progressão aritmética de razão 1, uma solução tem a forma  $y_n = y_0 + (n - 1) \cdot 1$ , ou ainda,  $y_n = y_0 + (n - 1)$ . Retomando  $y_n = 3^n x_n$  e a  $y_0 = 2$ , tem-se que,  $x_0 = 2$  e  $x_n = n + 1$ . Portanto,  $x_n = (n + 1)3^{n-1}$ .

**Definição 9.** Na equação (8), se  $(n - m) = 2$ , tem-se uma equação de diferenças de 2ª ordem cuja equação geral é da forma:

$$y_n = g(n)y_{n-1} + h(n)y_{n-2} + f(n), \quad (14)$$

$y_0$  e  $y_1$  são valores conhecidos. Assim como na equação linear de primeira ordem, se  $f(n) = 0$  a equação (14) é dita homogênea, caso contrário, é não-homogênea.

Para a solução da equação (14) com  $f(n) = 0$  e com  $g(n) = \alpha$  e  $h(n) = \beta$  constantes considera-se  $y_n = k\lambda^n$ . Assim,

$$k\lambda^n - \alpha k\lambda^{n-1} - \beta k\lambda^{n-2} = 0 \Rightarrow k\lambda^{n-2}[\lambda^2 - \alpha\lambda - \beta] = 0 \quad (15)$$

logo,  $\lambda = 0$  ou  $\lambda^2 - \alpha\lambda - \beta = 0$ .

No primeiro caso, se  $\lambda = 0$ , então  $y_n = 0$  para todo  $n$ . Note que essa solução só tem sentido se  $y_0 = y_1 = 0$ . Já no segundo caso, se  $\lambda \neq 0$ , então  $P(\lambda) = \lambda^2 - \alpha\lambda - \beta$  é o polinômio característico da equação de diferença dada inicialmente e suas raízes  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são denominados *autovalores*.

$$\lambda^2 - \alpha\lambda - \beta = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 4\beta}}{2} \quad (16)$$

$\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são univocamente determinadas pelos valores dos coeficientes  $a$  e  $\beta$ .

Se as raízes da equação linear de segunda ordem são  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , então qualquer sequência da forma

$$y_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n \quad (17)$$

é solução da recorrência, quaisquer que sejam os valores das constantes  $C_1$  e  $C_2$ . Isso se dá pelo o *princípio da superposição*, isto é, se há várias soluções, então a combinação linear entre elas também é uma solução

A expressão (17) será a solução geral da equação de diferenças inicial se  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , isto é, se  $a^2 + 4b \neq 0$ . Neste caso, as constantes  $C_1$  e  $C_2$  são determinadas univocamente através das condições iniciais  $y_0$  e  $y_1$ . Se  $n = 0$ , então  $y_0 = C_1 + C_2$  e, se  $n = 1$ , então  $y_1 = C_1\lambda_1 + C_2\lambda_2$ . Dessa forma, obtém-se o seguinte sistema

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = y_0 \\ C_1\lambda_1 + C_2\lambda_2 = y_1 \end{cases} \quad (18)$$



que admite como solução os seguintes valores

$$C_1 = y_0 - \frac{\lambda_1 y_0 - y_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \quad \text{e} \quad C_2 = \frac{\lambda_1 y_0 - y_1}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

Nota-se que, se os autovalores da equação (16) são iguais, ou seja,  $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{\alpha}{2}$ , então que a solução geral da equação (15) será dada por

$$y_n = (C_1 + nC_2) \left(\frac{\alpha}{2}\right)^n \quad (19)$$

e as constantes  $C_1$  e  $C_2$  são obtidas por:

$$C_1 = y_0 \quad \text{e} \quad C_2 = \frac{2y_1}{\alpha} - y_0 \quad (20)$$

**Exemplo 6.** A equação de recorrência  $y_n = -5y_{n-1} - 6y_{n-2}$ , com  $y_0 = 3$  e  $y_1 = -6$  possui equação característica  $r^2 + 5r + 6 = 0$ , cujas raízes são  $\lambda_1 = -2$  e  $\lambda_2 = -3$ . Logo, a solução geral desta equação é da forma  $y_n = C_1(-2)^n + C_2(-3)^n$ . Agora basta tomar as condições iniciais  $y_0 = 3$  e  $y_1 = -6$  para  $n = 0$  e  $n = 1$ , respectivamente, e resolver seguinte sistema:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 3 \\ -2C_1 - 3C_2 = -6 \end{cases}$$

A resolução do sistema acima resulta nos valores  $C_1 = 3$  e  $C_2 = 0$ , levando a solução

$$y_n = 3(-2)^n$$

**Exemplo 7.** A equação de recorrência  $y_n = 4y_{n-1} - 4y_{n-2}$ , com  $y_0 = 3$  e  $y_1 = 6$  possui equação característica  $r^2 - 4r + 4 = 0$ , cujas raízes são  $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ . Logo, usando a equação (20), a solução geral desta é da forma  $y_n = C_1 2^n + C_2 n 2^n$ . Tomando as condições iniciais  $y_0 = 3$  e  $y_1 = 6$  para  $n = 0$  e  $n = 1$ , respectivamente, na equação (21) se obtém as constantes  $C_1 = 3$  e  $C_2 = 0$ , levando a solução

$$y_n = 3 \cdot 2^n$$

Uma observação interessante é que uma equação linear homogênea de 2ª ordem com coeficientes constantes é dada da seguinte forma

$$y_{n+2} + \alpha y_{n+1} + \beta y_n = 0 \quad (21)$$

pode ser transformada num sistema linear de 2 equações de 1ª ordem, passando a considerar a mudança de variáveis  $z_n = y_{n+1}$ :

$$\begin{cases} y_{n+1} = z_n \\ z_{n+1} = -\alpha z_n - \beta y_n \end{cases} \quad (22)$$

De modo reciprocamente, um sistema linear de ordem 2

$$\begin{cases} y_{n+1} = a_{11}y_n + a_{12}z_n \\ z_{n+1} = a_{21}y_n + a_{22}z_n \end{cases} \quad (23)$$

pode ser transformado na equação linear de 2ª ordem

$$y_{n+2} - (a_{11} + a_{22})y_{n+1} + (a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21})y_n = 0 \quad (24)$$

A matriz dos coeficientes da equação (24) dada por

$$J = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

é conhecida como a matriz Jacobiana do sistema (23). Dessa forma, os autovalores associados a matriz são valores  $\lambda$  tais que  $\det(J - \lambda I) = 0$ ,  $I$  é a matriz identidade. Isso resulta em

$$\det(J - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} \Leftrightarrow \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}) = 0,$$

na qual  $P(\lambda) = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21})$  é o polinômio característico do sistema proposto.

#### 1.2.4 Equações Diferenciais Ordinárias

Pode-se entender uma equação diferencial como uma relação que contém uma função desconhecida e uma ou mais de suas derivadas. Por exemplo, as equações

$$\frac{dy}{dt} = 3y^2 \text{sen}(t + y) \quad (25)$$

e

$$\frac{d^3y}{dt^3} = e^{-y} + t + \frac{d^2y}{dt^2} \quad (26)$$

são ambos exemplos de equações diferenciais. Se a função desconhecida depende de uma única variável independente, aparecem na equação diferencial apenas derivadas simples e ela é dita *Equação Diferencial Ordinária*. Porém, se a função desconhecida depende de diversas variáveis, as derivadas são derivadas parciais e a equação é chamada de *Equação Diferencial Parcial*. Nesse trabalho todas as equações diferenciais são Equações Diferenciais Ordinárias.

De modo geral, uma equação diferencial ordinária pode ser classificada conforme a ordem, número de funções desconhecidas e são lineares ou não. No primeiro caso, a ordem de uma diferencial equação é a ordem da derivada mais alta da função  $y$  que aparece na equação. Assim, a equação (25) é uma equação diferencial de primeira ordem, enquanto a equação (26) é uma equação diferencial de terceira ordem. Mais geralmente, a equação

$$F[t, u(t), u'(t), \dots, u^{(n)}(t)] = 0 \quad (27)$$

é uma equação diferencial ordinária de ordem  $n$ , expressando uma relação entre a variável independente  $t$  e os valores da função  $u$  e de suas  $n$  primeiras derivadas,  $u', u'', \dots, u^{(n)}$ . Uma notação muito comum é substituir  $u(t)$  por  $y$  e  $u'(t), \dots, u^{(n)}(t)$  por  $y', y'', \dots, y^{(n)}$ . Dessa forma, equação (27) pode ser reescrita como

$$F(t, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (28)$$

Além disso, a classificação de equações diferenciais pode depender do número de funções desconhecidas. Se existe uma única função a ser determinada, uma equação é

suficiente. Entretanto, se existem duas ou mais funções que devem ser determinadas, será necessário um sistema de equações. Por exemplo:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= ax - \alpha xy \\ \frac{dy}{dt} &= -cy + \gamma xy\end{aligned}\tag{29}$$

é um sistema que possui duas equações diferenciais<sup>5</sup>.

Quanto a linearidade, tem-se que a equação diferencial

$$F(t, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

é dita *linear* se  $F$  é uma função linear das variáveis  $y', y'', \dots, y^{(n)}$ , ou seja, se as funções  $y$ , e todas as derivadas que aparecem nesta estão com potência um, e não aparecem se multiplicando em nenhuma parcela. Assim, a equação diferencial ordinária linear geral de ordem  $n$  é

$$a_0(t)y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \dots + a_n(t)y = g(t)\tag{30}$$

Uma equação que não é da forma (30) é uma equação não-linear. Um exemplo que pode ser citado para esse caso é

$$y''' + 2e^t y'' + yy' = t^4\tag{31}$$

que, devido ao termo  $yy'$ , tem-se uma equação diferencial não-linear. O sistema apresentado em (29) também se encaixa nesse caso.

No caso das equações não-lineares o conhecimento e os métodos de resolução são mais complicados e menos satisfatórios, necessitando, na maioria dos casos, de recurso computacional. É comum que muitos problemas significativos levam a Equações Diferenciais Ordinárias não-lineares ou que podem ser aproximadas por equações lineares.

Esse processo de aproximar uma equação não-linear por uma linear, conforme aponta Boyce e Deprima (2002) e Braun e Golubitsky (1992), é chamado de *linearização* e é extremamente útil para tratar equações não-lineares. Apesar disso, ressalta-se que existem muitos fenômenos físicos que não podem ser representados adequadamente por equações lineares, tornando-se imprescindível saber lidar com equações não-lineares.

---

<sup>5</sup>Essas equações são conhecidas como Lotka-Volterra ou equações presa-predador, muito utilizada em modelagem ecológica. Nesse caso, as constantes  $a, \alpha, c$  e  $\gamma$  são baseadas em observação empírica e dependem das espécies particulares em estudo (BOYCE e DIPRIMA, 2002).

## 1.2.5 Equações lineares de primeira ordem

Conforme apresentado na subseção 1.2.4 uma equação diferencial linear de primeira ordem é aquela que pode ser escrita na forma

$$F(t, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (32)$$

com  $n = 1$  e  $F$  é uma função linear das variáveis  $y', y'', \dots, y^{(n)}$ . A equação (32) pode ser reescrita como

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = q(t), \quad (33)$$

$p$  e  $q$  são funções contínuas em um dado intervalo. Toda equação diferencial dessa forma pode ser resolvida pela multiplicação de ambos os lados por uma função adequada  $\mu(t)$ , chamada *fator integrante* (BOYCE e DIPRIMA, 2002; STEWART, 2013). Não é um objetivo do trabalho demonstrar essa afirmação, mas o objetivo é encontrar uma  $\mu$  contínua no intervalo dado de modo que o lado esquerdo da equação (33), quando multiplicado por  $\mu(t)$ , torna-se a derivada do produto  $\mu(t)y$ :

$$\mu(t) \left( \frac{dy}{dt} + p(t)y \right) = \frac{d}{dt} (\mu(t)q(t)) \quad (34)$$

o que resulta em

$$\begin{aligned} \mu(t)y' + \mu(t)p(t)y &= \mu'(t)y + \mu(t)y' \\ \mu(t)p(t) &= \mu'(t) \end{aligned} \quad (35)$$

Esta é uma equação separável para  $\mu$ , que pode ser resolvida da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\int \frac{d\mu}{\mu} &= \int p(t)dt \\ \ln \mu &= \int p(t)dt, \\ \mu &= Ae^{\int p(t)dt}\end{aligned}\tag{36}$$

em que  $A = \pm e^C$ . O fator de integração particular pode ser dado tomando  $A = 1$ , resultando em

$$\mu(t) = e^{\int p(t)dt}\tag{37}$$

**Exemplo 8.** (Extraído de Stewart (2013, p. 558)) A equação  $\frac{dy}{dx} + 3x^2y = 6x^2$  é uma equação linear pois pode ser apresentada na forma da equação (33) em que  $p(x) = 3x^2$  e  $q(x) = 6x^2$ . Sendo assim, um fator integrante é

$$I(x) = e^{\int 3x^2 dx} = e^{x^3}$$

Ao multiplicar ambos os lados da equação diferencial por  $e^{x^3}$  se obtém

$$\begin{aligned}e^{x^3} \frac{dy}{dx} + 3x^2 e^{x^3} y &= 6x^2 e^{x^3} \\ \frac{d}{dx}(e^{x^3} y) &= 6x^2 e^{x^3}\end{aligned}$$

Agora, basta integrar ambos os lados para se obter o resultado da equação, ou seja,

$$\begin{aligned}e^{x^3} y &= \int 6x^2 e^{x^3} dx = 2e^{x^3} + C \\ y &= 2 + Ce^{-x^3}\end{aligned}$$

Uma equação linear de primeira ordem também poderá ser dita *equação separável* se puder ser fatorada como uma função de  $t$  multiplicada por uma função de  $y$ . Em outras palavras, pode ser escrita na forma

$$\frac{dy}{dt} = \frac{g(t)}{f(y)}\tag{38}$$

Como o próprio nome diz, o objetivo é reescrever a equação separando em uma função de  $t$  e uma função de  $y$ , o que resultará em

$$f(y)dy = g(t)dt \quad (39)$$

Logo todos os termos que contém  $y$  estão em um lado da equação e todos contém  $t$  estão do outro lado, com  $f(y) \neq 0$ . Ao integrar ambos os lados da equação:

$$\int f(y)dy = \int g(t)dt \quad (40)$$

**Exemplo 9.** A equação diferencial

$$\frac{dy}{dt} = \frac{t^2}{y^2}$$

cuja condição inicial é  $y(0) = 2$  pode ser separada da seguinte forma

$$\begin{aligned} y^2 dy &= t^2 dt \\ \int y^2 dy &= \int t^2 dt \\ \frac{1}{3}y^3 &= \frac{1}{3}t^3 + K \end{aligned}$$

sendo  $K$  é uma constante resultante da integração de ambos os lados. Isolando  $y$  obtém-se

$$y = \sqrt[3]{t^3 + 3K} \quad , \text{ou ainda,} \quad y = \sqrt[3]{t^3 + K'}$$

A condição inicial  $y(0) = 2$  resulta que  $2 = \sqrt[3]{0^3 + K'} \rightarrow K' = 8$ . Portanto a solução do problema valor inicial é

$$y = \sqrt[3]{t^3 + 8}$$

### 1.2.6 Aproximações numéricas

Um método que pode ser utilizado no estudo de equações diferenciais é o das *diferenças finitas* no qual uma função contínua é transformada em uma representação discreta (pontos). Em suma, uma equação de diferenças finitas é definida com uma relação da forma

$$y_{t+k} = f(y_t, y_{t+1}, y_{t+2}, \dots, y_{t+k-1}), \quad (41)$$

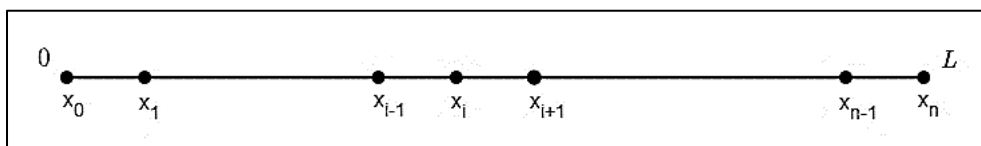
$f: L \subset \mathbb{N} \rightarrow Y \subset \mathbb{R}$ , entre a variável independente  $t$ , a variável dependente  $y$  e sua diferença finita. Para descrever esse método considera-se a equação

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), t > 0, \quad (42)$$

sendo  $y(0) = \alpha$  é a condição inicial. Logo, a equação diferencial juntamente com a condição inicial assume o que é conhecido como Problema de Valor Inicial (PVI). Supondo que  $y(t)$  e suas várias derivadas existem, são contínuas e definidas no intervalo utilizado.

No processo de discretização da derivada de uma função contínua  $y(t)$  em um intervalo  $0 \leq x \leq L$ , deve ser considerado um domínio discreto no qual o domínio contínuo (região entre 0 e  $L$ ) é dividido em  $n + 1$  pontos (veja a Figura 4). Deve ressaltar que o método de diferenças finitas tem por objetivo obter aproximações para o valor da função  $y(t)$  em cada um destes  $t + 1$  pontos. Além disso, muitas das vezes pode ser utilizado para resolver problemas de valor de contorno ou valor inicial, envolvendo Equações Diferenciais Ordinárias ou Parciais.

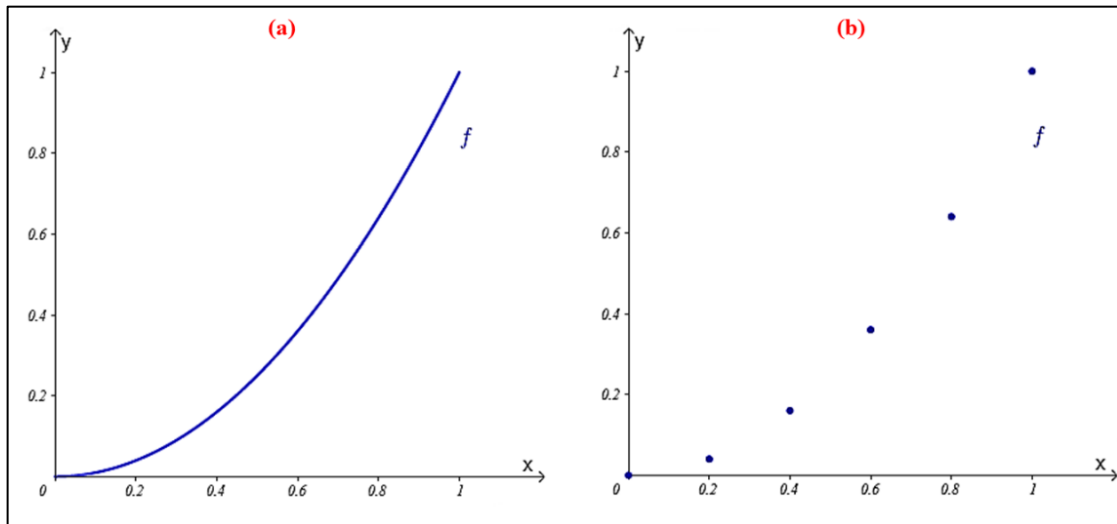
Figura 4: Domínio discreto igualmente espaçados em  $t + 1$  pontos



Fonte: Elaborado pelo autor.

Por exemplo, a função  $f$  definida em um intervalo real  $[0, 1] \rightarrow [0, 1]$  tal que sua imagem seja dada por  $f(x) = x^2$  (Figura 5a), pode ser representada de forma discreta como  $f(x) = x^2$  com  $x \in \{0, 0,2, 0,4, 0,6, 0,8, 1\}$ , ou seja,  $x$  assume valores igualmente espaçados entre os pontos de 0,2 (Figura 5b). Com isso,  $f(x) \in \{0, 0,04, 0,16, 0,36, 0,64, 1\}$ .



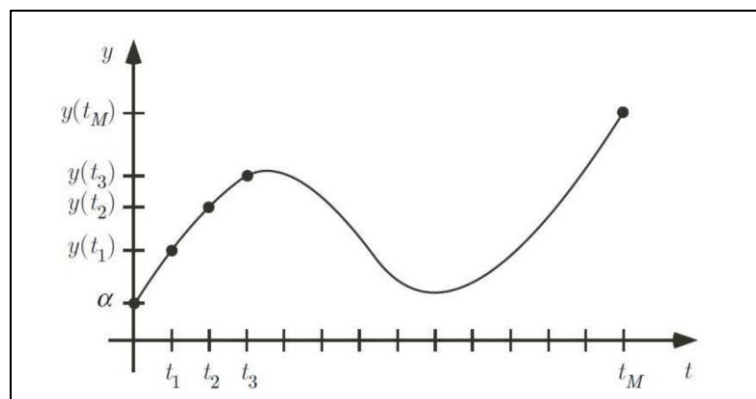
Figura 5: Discretização da função  $f(x) = x^2$  com domínio espaçado em 0,2.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Para discretizar a equação (42) deve-se inicialmente substituir as variáveis contínuas,  $t$  e  $y$ , por variáveis discretas, tornando possível resolver o problema resultante usando métodos numéricos convencionais atentando-se para que a discretização conduza para uma nova solução que se aproxime da solução do PVI original. Feito isso, deve-se especificar o intervalo de iterações, gerando o tempo que será utilizado para o cálculo da solução de  $0 \leq t \leq L$ .

Na primeira etapa deste processo serão introduzidos os pontos de tempo utilizados na solução. Tais pontos são dados sequencialmente por  $t_0, t_1, \dots, t_M$ , igualmente espaçados e o último valor será  $t_M = L$ . Um esquema da posição destes pontos ao longo do eixo é mostrado na Figura 6.

Figura 6: Sistema utilizado para obter a aproximação de diferenças finitas



Fonte: Elaborado pelo autor.

Tomando  $k$  os espaços entre cada ponto da sequência, com estes pontos são igualmente espaçados, obtém-se que  $t_j = jk, j = 0, 1, \dots, M$ . Deve-se garantir que, ao tomar o intervalo de tempo para a discretização como  $0 \leq t \leq L, t_M = L$ . Isso fornece a seguinte relação para  $k$

$$k = \frac{L}{M} \quad (43)$$

Em seguida, devemos analisar a equação diferencial (31) no tempo  $t_j$ , obtendo

$$y'(t_j) = f(t_j, y(t, j)) \quad (44)$$

Agora deve-se substituir a derivada  $y'$  dada na equação (44) por uma aproximação com uma fórmula de diferenças finitas usando os valores de  $y$  de um ou mais pontos da sequência adotada em uma vizinhança de  $t_j$ . Neste momento, ocorre a escolha da fórmula de aproximação, algumas das quais estão listadas na Tabela 1, ressaltando que escolhas diferentes resultam em diferentes procedimentos numéricos (BARROSO, BARROSO, *et al.*, 1987).

Tabela 1: Fórmulas de diferenciação numéricas com intervalos igualmente espaçados

| Diferenças finitas | Fórmula de diferenças                                    | Termo de Truncamento                  |
|--------------------|--|---------------------------------------|
| Para frente        | $f'(t_i) = \frac{f(t_{i+1}) - f(t_i)}{h} + \tau_i$       | $\tau_i = -\frac{h}{2} f''(\eta_i)$   |
| Para trás          | $f'(t_i) = \frac{f(t_i) - f(t_{i-1})}{h} + \tau_i$       | $\tau_i = \frac{h}{2} f''(\eta_i)$    |
| Central            | $f'(t_i) = \frac{f(t_{i+1}) - f(t_{i-1}))}{2h} + \tau_i$ | $\tau_i = -\frac{h^2}{6} f''(\eta_i)$ |

Fonte: Adaptado de Barroso e Barroso (1987).

Neste trabalho foi utilizada a aproximação de diferenças finitas para frente, dada na primeira entrada da Tabela 1. A expressão para a primeira derivada é dada por

$$y'(t_j) = \frac{y(t_{j+1}) - y(t_j)}{k} + \tau_j, \quad (45)$$

$\tau_i = -\frac{h}{2} x''(\eta_j)$  é o termo de truncamento e  $\eta_j$  é um ponto entre  $t_j$  e  $t_{j+1}$ . Substituindo a nova expressão para  $y'$  em (44) obtém-se

$$\frac{y(t_{j+1}) - y(t_j)}{k} + \tau_j = f(t_j, y(t_j)) \quad (46)$$

ou, de forma equivalente,

$$y(t_{j+1}) - y(t_j) + k\tau_j = kf(t_j, y(t_j)) \quad (47)$$

O termo  $\tau_j$  indicará o quão boa a aproximação está do problema inicial. Por isso, é chamado *erro de truncamento do método* e pode ser representado como uma função de  $k$ ,  $E(k) = k\tau_j$ . Note então  $E(k)$  se aproxima de zero à medida em que  $k$  vai para zero. Isto significa que, pelo menos em teoria, para aproximar do problema original o quanto necessário, basta fazer o passo de tempo  $k$  suficientemente pequeno.

Esse erro de truncamento pode ser ignorado, saindo de um problema exato por outro que é uma aproximação do PVI original. Então, tomando  $\tau_j = 0$  na equação (46),

$$y(t_{j+1}) - y(t_j) = kf(t_j, y(t_j)) \quad (48)$$

ou, de forma equivalente,

$$y(t_j) + kf(t_j, y(t_j)), \quad j = 0, 1, \dots, M - 1 \quad (49)$$

A equação de diferenças finitas (49) é conhecida como o *Método de Euler* para resolver e constitui-se de um algoritmo recursivo que começa com  $j = 0$  e, em seguida, utiliza-se a equação (49) para determinar a solução em  $j = 1$ , depois  $j = 2$ , em seguida  $j = 3 \dots$ . O resultado desconhecido de  $y(t_{j+1})$  é dado explicitamente em função de termos conhecidos, por isso sendo conhecido como um *método explícito*.

Uma forma de demonstrar que o erro  $\tau_j$  pode ser ignorado é analisar se (49) é uma aproximação *consistente*, ou seja, determinar se a ligação entre a solução aproximada e a análise do quão próxima ela está de satisfazer o problema de valor inicial. Para isso, suponha que a equação (49) seja conhecida, usando a aproximação por *séries de Taylor*, sabe-se que

$$\begin{aligned}
y(t_{j+1}) &= y(t_j + k) \\
&= y(t_j) + ky'(t_j) + \frac{1}{2}k^2y''(t_j) + \dots \\
&= y(t_j) + kf'(t_j, y(t_j)) + \frac{1}{2}k^2y''(t_j) + \dots
\end{aligned} \tag{50}$$

Fazendo uma pequena substituição  $y(t_j)$  por  $y_j$  para simplificar a notação da equação (50), pode-se reescrevê-la como

$$y_{j+1} = y_j + kf'(t_j, x_j) + \frac{1}{2}k^2y''(t_j) + \dots. \tag{51}$$

Assim, comparando a expressão alcançada por meio da aproximação por *séries de Taylor* e a adotada pelo método de diferenças finitas, tem-se que

$$y_j + kf'(t_j, y_j) + \frac{1}{2}k^2y''(t_j) + \dots = y_j + kf'(t_j, y_j) \tag{52}$$

ou seja,

$$\frac{1}{2}k^2y''(t_j) + \dots = 0 \tag{53}$$

Note-se que ao satisfazer (49) a equação (51) perde uma série de termos, os quais serão denotados por  $E(k^2)$ . Sabe-se que erro de truncamento  $E(k)$  vai para zero à medida em que  $k \ll 1$  vai para zero e  $E(k^2)$  também tende a zero quando isto acontece. Desta forma, o método é aproximação *consistente*.

## 2 METODOLOGIA

Para garantir que os objetivos sejam contemplados e as questões problemas sejam respondidas é preciso definir como isso será feito. Sendo assim, nesse capítulo busca-se descrever o percurso metodológico da pesquisa, não limitando-se apenas à explicitação das técnicas e instrumentos utilizados na investigação, mas também definindo um quadro teórico-metodológico que seja claro e consistente, que contenha pressupostos que o norteie. O capítulo está dividido em 3 seções, sendo a 2.1 reservada a explicitar os motivos que levaram a um estudo descritivo-explicativo mediante a uma abordagem qualitativa e quantitativa. Na seção 2.2 estão descritos os procedimentos adotados para a coleta de dados, bem com as fontes consultadas e os mecanismos utilizados para a análise dos dados. Por fim, na seção 2.3 executa-se o processo de descrição e formulação do modelo SIR com ênfase no processo de solução do modelo e na inserção do modelo discreto no *Excel*.

### 2.1 DELINEAMENTO METODOLÓGICO DA PESQUISA

Essa pesquisa tem, inicialmente, uma abordagem qualitativa, buscando compreender como o modelo epidemiológico SIR pode ser utilizado para estudar e descrever o avanço da pandemia da Covid-19 em Mato Grosso no período que antecede o início da vacinação.

Há de se ressaltar que na pesquisa de natureza qualitativa entre suas características estão: “objetivação do fenômeno; hierarquização das ações de descrever, compreender, explicar, precisão das relações entre o global e o local em determinado fenômeno” (GERHARDT e SILVEIRA, 2009, p. 32). Isso corrobora para que o problema estudado possa ser melhor compreendido no contexto em que ocorre e do qual é parte.

Alinhados a essas características há vários tipos de pesquisa qualitativa, e sua classificação varia conforme o critério adotado. Autores como Cervo, Bervian e Silva (2006), Gil (2002) e Gerhardt e Silveira (2009) classificam-nas de acordo com suas finalidades e identificam três tipos: exploratória, descritiva e explicativa.

Partindo dessa classificação, esta pesquisa enquadra-se na modalidade descritiva-explicativa. Essa escolha teve como base as ideias de Gil (2002) e Gerhardt e Silveira (2009) que consideram que a pesquisa descritiva tem como objetivo principal a descrição das características de determinada população ou fenômeno ou estabelecimento de relações entre variáveis. Já a pesquisa explicativa, ainda segundo os autores, volta-se para a identificação de

fatores que determinam ou contribuem para a ocorrência dos fenômenos, levando a explicar a razão e os motivos dos fatos ocorrerem.

Também foi adotada uma abordagem quantitativa à pesquisa, buscando conectar os dados apresentados pela Secretaria de Estado de Saúde de Mato Grosso sobre avanço da pandemia da Covid-19 ao modelo SIR. Para Fonseca (2002, p. 20) “a pesquisa quantitativa recorre à linguagem matemática para descrever as causas de um fenômeno, as relações entre variáveis, etc. E a utilização conjunta da pesquisa qualitativa e quantitativa permite recolher mais informações do que se poderia conseguir isoladamente”. Nesse sentido, os dados coletados foram utilizados para ajustar o modelo SIR à pandemia da Covid-19 em Mato Grosso, colaborando para o estudo e descrição da mesma.

## 2.2 OS PROCEDIMENTOS DE COLETA E ANÁLISE DE DADOS

Para dar conta de levantar os dados necessários à pesquisa adotou-se a documentação indireta com base em análise documental (fontes primárias) e pesquisa bibliográfica (fontes secundárias). Apesar da proximidade para obtenção de dados, Fonseca afirma que

A pesquisa documental trilha os mesmos caminhos da pesquisa bibliográfica, não sendo fácil por vezes distingui-las. A pesquisa bibliográfica utiliza fontes constituídas por material já elaborado, constituído basicamente por livros e artigos científicos localizados em bibliotecas. A pesquisa documental recorre a fontes mais diversificadas e dispersas, sem tratamento analítico, tais como: tabelas estatísticas, jornais, revistas, relatórios, documentos oficiais, cartas, filmes, fotografias, pinturas, tapeçarias, relatórios de empresas, vídeos de programas de televisão, etc. (FONSECA, 2002, p. 32).

Na análise documental foram utilizados os dados relacionados ao avanço da pandemia, sendo direcionados aos novos casos confirmados, novos óbitos confirmados, casos confirmados acumulados e óbitos confirmados acumulados disponibilizados nos boletins informativos da Secretaria de Estado de Saúde de Mato Grosso<sup>6</sup> – SES. Os dados coletados foram organizados em uma planilha do cálculo do *Excel* para facilitar a o processo de obtenção dos parâmetros de infecção. Uma versão foi disponibilizada no APÊNDICE C.

Em relação aos tipos e fontes bibliográficas, foram utilizadas publicações tais como: livros, teses, dissertações, monografias, publicações avulsas, pesquisas, artigos científicos eletrônicos etc., relacionados ao modelo SIR aplicado a pandemia da Covid-19 no Brasil ou a qualquer estado e cidade brasileira para determinar tempo de duração da doença, podendo assim

---

<sup>6</sup> Disponível em: <http://www.saude.mt.gov.br>.

estimar o parâmetro remoção  $\gamma$ . Para isso, foram consultadas as seguintes bases de dados: (a) Banco de Dissertações do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT<sup>7</sup>; (b) Mecanismo virtual de pesquisa Google Acadêmico<sup>8</sup>.

Ressalta-se que o intuito desse levantamento se deu devido à dificuldade de estimar o tempo de duração da infecção, já que depende de muitos fatores clínicos. Conforme é apontado por Manzo (1971, p. 32) citado por Lakatos e Marconi (2017, p. 123) a pesquisa bibliográfica forneceu “meios para definir, resolver, não somente problemas já conhecidos, como também explorar novas áreas em que os problemas não se cristalizaram suficientemente”.

Os parâmetros do modelo SIR foram obtidos por meio dos dados oficiais coletados, sendo tomado  $t = 0$  como o dia da ocorrência do primeiro caso e  $t = j$  é o último dia dos dados coletado para estudo. Dessa forma, o parâmetro de transmissão  $\beta$ , em diferentes intervalos de análise, foi obtido minimizando a função de erro quadrado dada por:

$$f(\beta, I_0) = \sum_{j=1}^k \left( Valor_{coletado_j} - Valor_{modelo_j} \right)^2, \quad (54)$$

em que  $Valor_{coletado_j}$  é número infectados no instante  $j$  a partir dos dados coletados e  $Valor_{modelo_j}$  é número de infectados  $j$  obtidos pela solução do modelo SIR discretizado.

A obtenção do parâmetro de transmissão  $\beta$  ocorreu tomando três tipos de abordagem quanto ao intervalo. Na **abordagem 1** foram considerados 9 intervalos, sendo o intervalo inicial de 36 dias e os demais obtidos pelos acréscimos de mesmo valor. Logo a a quantidade de dias utilizados para a obtenção da taxa de infecção  $\beta$  foram: 36, 72, 108, 144, 180, 216, 252, 288, 324.

Já na **abordagem 2** foram considerados 9 intervalos iguais de 36 dias, sem adicionar os intervalos anteriores. Assim, os intervalos utilizados para a obtenção da taxa de infecção  $\beta$  foram: dia 0 ao dia 35, dia 36 ao dia 71, dia 72 ao dia 107, dia 108 ao dia 143, dia 144 ao dia 179, dia 180 ao dia 215, dia 216 ao dia 251, dia 252 ao dia 287, dia 288 ao dia 323.

Por fim, na **abordagem 3** foram considerados intervalos de 7 dias sem o acréscimo dos períodos anteriores. Os intervalos permitiram a obtenção de 46 valores para a taxa de infecção  $\beta$ , visando aproximar os dados simulados dos dados reais.

<sup>7</sup> Disponível em: [www.profmat-sbm.org.br](http://www.profmat-sbm.org.br).

<sup>8</sup> Disponível em: [www.scholar.google.com.br](http://www.scholar.google.com.br).

### 2.3 FORMULAÇÃO DO MODELO SIR EM EPIDEMIOLOGIA

No modelo SIR desenvolvido por Kermack e McKendrick em 1927 são utilizadas as técnicas de modelagem matemática que dividem a população em três compartimentos: **suscetíveis** ( $S$ ) composto pelos indivíduos que podem contrair a doença; **infectados** ( $I$ ): indivíduos que podem transmitir a doença; **removidos** ( $R$ ): indivíduos removidos, ou seja, casos de cura e também casos de óbito. Segundo Murray (1993) e Allman e Rhodes (2004), as hipóteses usadas por Kermack e McKendrick (1927) no modelo levam em conta que: (i) todos os indivíduos da população são, inicialmente, suscetíveis; (ii) infectados que se recuperam, ganham imunidade total; (iii) as interações entre os componentes se dão de forma homogênea; (iv) a razão de variação da população suscetível é proporcional ao número de encontros entre as populações suscetível e infectada; (v) a razão de variação da população removida é proporcional a população infectada.

Para descrever o modelo SIR sem dinâmica vital foram tomadas as hipóteses anteriores juntamente com as contribuições de Murray (1993), Daley e Gani (1999) e Allman e Rhodes (2004) e Bassanezi (2002) para o entendimento do modelo. Também foi considerado que a população em questão permanece constante em relação ao tempo, isso é, foram desprezados os nascimentos e os fenômenos migratórios e emigratórios. Assim, tem-se que:

$$N = S(t) + I(t) + R(t) \text{ para todo } t \geq 0, \quad (55)$$

$N$  é o total da população e  $S(t)$ ,  $I(t)$  e  $R(t)$  representam o número de indivíduos suscetíveis, infectados e removidos em um dado tempo  $t$ , respectivamente.

Segundo os autores, na primeira etapa da dinâmica do modelo SIR, os indivíduos suscetíveis contraem a doença quando entram em contato com infectados. Suponha que as pessoas se encontrem e façam contato por tempo suficiente para que haja a contaminação a uma taxa  $\beta$  (por indivíduo), sendo a doença transmitida somente quando um infectado encontra um suscetível. O indivíduo infectado é transferido da classe de suscetível para a classe dos infectados, fazendo com que o número de indivíduos suscetíveis decresça em uma unidade de tempo e, conseqüentemente, o número de indivíduos infectados aumenta por causa desses novos infectados. Dessa forma, a taxa de mudança da classe de suscetíveis para infectados é denotada por:

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI, \quad (56)$$



sendo  $\beta SI$  é o número de indivíduos que se tornam infectados por unidade de tempo.

Na segunda etapa os indivíduos se recuperam (ou morrem) a uma taxa  $\gamma$  por unidade de tempo (neste caso, o tempo médio de duração da infecção será dado por  $\frac{1}{\gamma}$ ). Portanto,  $\gamma I$  representa o número de indivíduos infectados que foram removidos. Assim,

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I \quad (57)$$

representa o número de indivíduos infectados por unidade de tempo. Note que da equação (57) pode-se ser analisada em que condições surgem as epidemias. Sabendo que uma epidemia cresce somente se o número de infectados aumenta, isto é, se a taxa de mudança de infectados  $\frac{dI}{dt}$  for maior que zero, tem-se que

$$\text{Epidemia} \Leftrightarrow I \text{ cresce} \Leftrightarrow \frac{dI}{dt} > 0$$

ou seja,

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I = (\beta S - \gamma)I > 0$$

Portanto,

$$\text{Epidemia} \Leftrightarrow \frac{\beta S}{\gamma} > 1$$

sendo:  $\beta S$  é a taxa de infectados causadores de novas doenças;  $\frac{1}{\gamma}$ , como citado anteriormente, é o tempo médio no qual um indivíduo é infectado.

Tomando  $\mathcal{R}_0 = \frac{\beta}{\gamma}$ , então,  $\mathcal{R}_0$ , chamado de número básico de reprodução, é o número médio de infecções causadas por um indivíduo infectado. Assim, pode-se dizer que incidência da doença aumenta se, e somente se,  $\mathcal{R}_0 > 1$  e, conseqüentemente, a incidência diminui se, e somente se,  $\mathcal{R}_0 < 1$ .

Quando os indivíduos se recuperaram ou vêm a óbito em decorrência da infecção, passam a deixar a classe de infectados para a classe de removidos ( $R$ ). Sendo assim,

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I \quad (58)$$

representa o número de indivíduos removidos por unidade de tempo.

Note que das equações (56), (57) e (58) pode-se observar que, somando as três equações,

$$\frac{dN}{dt} = \frac{dS}{dt} + \frac{dI}{dt} + \frac{dR}{dt} = -\beta SI + \beta IS - \gamma I + \gamma I = 0, \quad (59)$$

$\frac{dN}{dt}$  é constante e igual ao seu valor inicial, conforme estabelecido nas hipóteses iniciais.

Com isso, as equações diferenciais (56), (57) e (58) compõem o modelo SIR, podendo ser representado pelo o sistema:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\beta SI \\ \frac{dI}{dt} = \beta IS - \gamma I \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I \end{cases} \quad (60)$$

É necessário, no sistema apresentado em (60), estabelecer a condição inicial  $S(0) = S_0$ ,  $I(0) = I_0$  e  $R(0) = R_0$  para que tenha uma única solução. É evidente que, assim como na maioria dos modelos em epidemiologia são quantidades físicas, tem-se que as soluções começam a partir de uma solução inicial não negativa e permanecem sempre não negativas por todo o tempo.

## 2.4 SOLUÇÕES ANALÍTICAS PARA O MODELO SIR

A fim de comparar os resultados previstos pelo modelo com os dados reais de epidemias, deve-se encontrar as quantidades  $\frac{dI}{dt}$  e  $\frac{dR}{dt}$  em função do tempo. A seguir serão expostos alguns resultados analíticos e explícitos para o modelo SIR. De início, observa-se no sistema (60) que a primeira e a segunda equações não dependem de R, ou seja, é possível reduzi-las a uma só.

$$\frac{dI}{dS} = \frac{\beta SI - \gamma I}{-\beta SI} = -1 + \frac{\gamma}{\beta S} \quad (61)$$

cuja solução é dada por

$$I(t) = -S + \frac{\gamma}{\beta} \ln S + K, \quad (62)$$

$K$  é a constante de integração.

Usando as condições iniciais, pode-se o valor da constante  $K$

$$K = I_0 + S_0 - \frac{\gamma}{\beta} \ln S_0 \quad (63)$$

Entretanto, no início da epidemia, tem-se que  $S \cong N$ , isto é,  $I \cong 0$  quando comparado com a população total. Sendo assim,  $K$  pode ser rescrito como:

$$K = N - \frac{\gamma}{\beta} \ln S_0 \quad (64)$$

Assim, o número de infectados no tempo  $t$  será dado por

$$I(t) = -S + \frac{\gamma}{\beta} \ln S + N - \frac{\gamma}{\beta} \ln S_0, \quad (65)$$

ou ainda, usando a definição de logaritmo do quociente,

$$I(t) = N - S + \frac{\gamma}{\beta} \ln \frac{S}{S_0} \quad (66)$$

Da equação (61) vem que  $\frac{dI}{dS} > 0$  se  $\frac{\gamma}{\beta S} > 1$ , ou seja, se  $S < \frac{\gamma}{\beta}$ . Portanto,  $I$  é uma função crescente se  $S < \frac{\gamma}{\beta}$ . E, analogamente,  $I$  é decrescente, quando  $S > \frac{\gamma}{\beta}$ .

Agora, é importante saber o valor de  $R$  em cada instante. Ressalta-se aqui que  $R$  representa o número de indivíduos que foram contaminados e adquiriram imunidade ou vieram a óbito. A solução para o número de removidos na forma analítica é de obtenção trabalhosa, porém segue a solução apresentada em (BRAUN e GOLUBITSKY, 1992, p. 462). Do sistema (60), tomando a primeira e a terceira equações, pode-se escrevê-las de maneira reduzida como uma só equação:

$$\frac{dS}{dR} = \frac{\frac{dS}{dt}}{\frac{dR}{dt}} = -\frac{\beta}{\gamma} S \quad (67)$$

Resolvendo para  $S$ , e usando as condições iniciais, obtém-se o comportamento dos suscetíveis ao longo da epidemia, sendo representado por:

$$S = S_0 e^{-\frac{\beta}{\gamma} R} \quad (68)$$

Agora, como  $N = S + I + R$  e  $\frac{dR}{dt} = \gamma I$  pode-se reescrevê-la como

$$\frac{dR}{dt} = \gamma(N - R - S) \quad (69)$$

ou ainda, usando o resultado obtido em (68),

$$\frac{dR}{dt} = \gamma \left( N - R - S_0 e^{-\frac{\beta}{\gamma} R} \right) \quad (70)$$

Essa equação não pode ser resolvida explicitamente. Porém, se  $R$  for suficientemente pequeno, pode-se criar uma aproximação pela Série Taylor, ou seja,

$$e^{-\frac{\beta}{\gamma} R} \cong 1 - \frac{\beta}{\gamma} R + \frac{\left(\frac{\beta}{\gamma} R\right)^2}{2} + \dots \quad (71)$$

Desconsiderando os termos como grau maior que 2, tem-se que a equação (70) é aproximadamente igual a

$$\begin{aligned} \frac{dR}{dt} &= \beta \left[ N - R - S_0 \left( 1 - \frac{\beta}{\gamma} R + \frac{\beta^2}{2\gamma^2} R^2 \right) \right] = \\ &= \beta \left[ N - S_0 + \left( \frac{\beta}{\gamma} S_0 - 1 \right) R - \frac{\beta^2 S_0}{2\gamma^2} R^2 \right] \end{aligned} \quad (72)$$

Separando as variáveis e fazendo a integração por frações parciais, tem-se que:

$$R(t) = \frac{\gamma^2}{\beta^2 S_0} \left[ \frac{\beta}{\gamma} S_0 - 1 + a \tanh \left( \frac{\beta \gamma t}{2} - \theta \right) \right] \quad (73)$$

e

$$a = \left[ \left( \frac{\beta}{\gamma} S_0 - 1 \right)^2 + 2 \frac{\beta^2}{\gamma^2} S_0 (N - S_0) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (74)$$

e

$$\theta = \tanh^{-1} \frac{\left( \frac{\beta}{\gamma} S_0 - 1 \right)}{a} \quad (75)$$

Sendo assim, tem-se que a variação das pessoas isoladas  $\frac{dR}{dt}$  é dada por

$$\frac{dR}{dt} = \frac{\gamma^3 \beta^2}{2\beta^2 S_0} \operatorname{sech}^{-1} \left( \frac{\beta \gamma t}{2} - \theta \right) \quad (76)$$

Note que  $\frac{dR}{dt} = 0$ , se  $\frac{\beta \gamma t}{2} - \theta = 0$ . Isso ocorre quando  $t = \frac{2\theta}{\beta \gamma}$  (ponto de máximo da equação (73)).

## 2.5 SOLUÇÕES EXPLÍCITAS PARA O MODELO SIR (DISCRETIZAÇÃO)

O caso mais comum apresentado para a solução do modelo SIR é o da discretização. Para isso, considera-se o modelo contínuo apresentado em (60)

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\beta SI \\ \frac{dI}{dt} = \beta IS - \gamma I, \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I \end{cases}$$

$S(t)$ ,  $I(t)$  e  $R(t)$  representam as proporções de indivíduos suscetíveis, infectados e recuperados, no instante  $t$ , e os parâmetros  $\beta$  e  $\gamma$  infecção e recuperação, respectivamente.

Para discretizá-lo será utilizado o método de discretização de passo à frente, cuja fórmula é descrita na Tabela 1 na subseção 1.2.4, dada por  $f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} + \tau_i$ . Para a primeira equação do sistema apresentado em (60), deve-se fazer

$$\frac{dS}{dt}(t_j) = \frac{S(t_{j+1}) - S(t_j)}{k}, \quad (77)$$

$0 \leq t \leq L$ ,  $t_j = jk$ , sendo  $k$  o espaço entre os pontos considerados, com  $j = 0, 1, \dots, M$ . Para facilitar os cálculos, considera-se  $L = M$ , ou seja,  $k = 1$ . Então, ignorando o erro de truncamento,  $\tau_j$ , obtém-se a aproximação

$$\frac{dS}{dt}(t_j) \approx S(t_{j+1}) - S(t_j) = S_{j+1} - S_j \quad (78)$$

Assim, a primeira equação do sistema discretizada

$$S_{j+1} - S_j = -\beta I_j S_j \quad (79)$$

Realizando o mesmo procedimento para as outras duas equações, obtém-se o novo sistema:

$$\begin{cases} S_{j+1} - S_j = -\beta I_j S_j \\ I_{j+1} - I_j = \beta I_j S_j - \gamma I_j \\ R_{j+1} - R_j = \gamma I_j \end{cases} \quad (80)$$

que pode ser reescrito como

$$\begin{cases} S_{j+1} = S_j - \beta I_j S_j \\ I_{j+1} = I_j + \beta I_j S_j - \gamma I_j \\ R_{j+1} = R_j + \gamma I_j \end{cases} \quad (81)$$

As equações apresentadas em (81) são chamadas equações a diferenças finitas ou equações recorrentes. Deste modo, com a interpretação desse tipo de modelagem é que se conhece os dados de um determinado fenômeno no instante  $t$ , então podemos prever como esse fenômeno se comporta no instante seguinte  $t + 1$ .

## 2.6 IMPLEMENTANDO O MODELO SIR NO EXCEL

Para processo de minimização da função erro quadrado citado em (54) foi utilizada a ferramenta *Solver* do *Excel* para que os resultados simulados para o número de infectados possam ser considerados suficientemente próximos aos dados fornecidos pela Secretaria de Estado de Saúde de Mato Grosso. A utilização dessa ferramenta ocorreu em consonância ao modelo discretizado na planilha de cálculo, conforme apresentado na Figura 7.

Figura 7: Recorte do modelo SIR discretizado criado no Excel

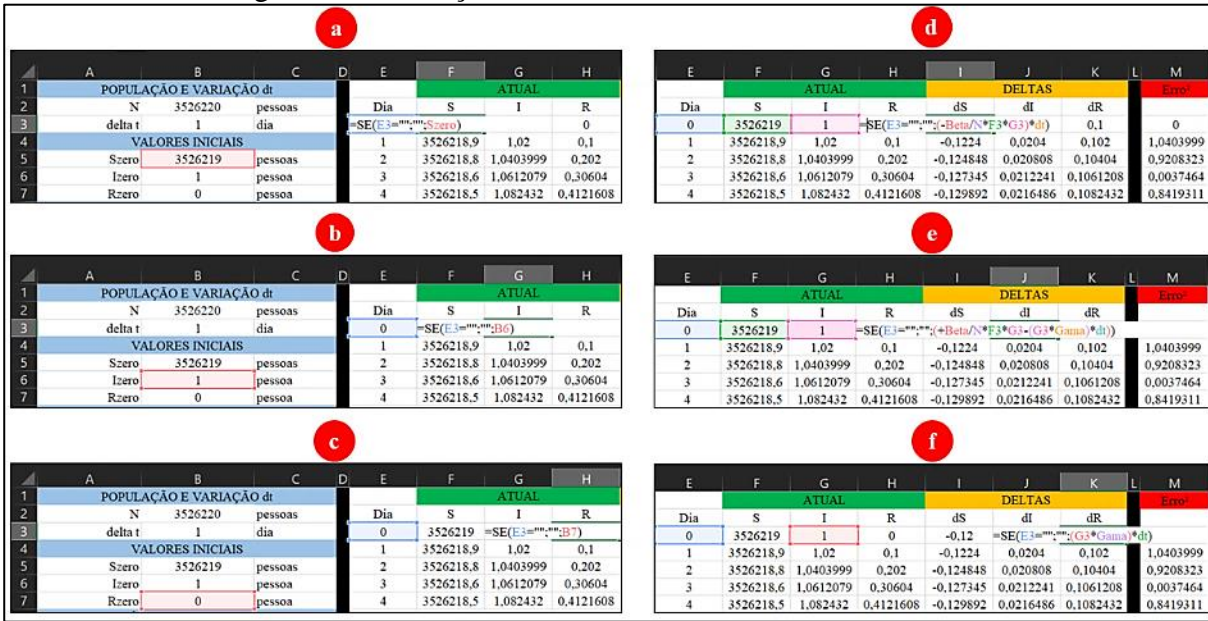
|    | A                           | B               | C        | D | E   | F         | G         | H         | I         | J         | K         | L | M                 |
|----|-----------------------------|-----------------|----------|---|-----|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|---|-------------------|
| 1  | POPULAÇÃO E VARIAÇÃO dt     |                 |          |   |     | ATUAL     |           |           | DELTAS    |           |           |   | Erro <sup>2</sup> |
| 2  | N                           | 3526220         | peessoas |   | Dia | S         | I         | R         | dS        | dI        | dR        |   |                   |
| 3  | delta t                     | 1               | dia      |   | 0   | 3526219   | 1         | 0         | -0,12     | 0,02      | 0,1       |   | 0                 |
| 4  | VALORES INICIAIS            |                 |          |   | 1   | 3526218,9 | 1,02      | 0,1       | -0,1224   | 0,0204    | 0,102     |   | 1,0403999         |
| 5  | Szero                       | 3526219         | peessoas |   | 2   | 3526218,8 | 1,0403999 | 0,202     | -0,124848 | 0,020808  | 0,10404   |   | 0,9208323         |
| 6  | Izero                       | 1               | peessoa  |   | 3   | 3526218,6 | 1,0612079 | 0,30604   | -0,127345 | 0,0212241 | 0,1061208 |   | 0,0037464         |
| 7  | Rzero                       | 0               | peessoa  |   | 4   | 3526218,5 | 1,082432  | 0,4121608 | -0,129892 | 0,0216486 | 0,1082432 |   | 0,8419311         |
| 8  | PARÂMETROS DO MODELO        |                 |          |   | 5   | 3526218,4 | 1,1040806 | 0,520404  | -0,13249  | 0,0220816 | 0,1104081 |   | 0,0108328         |
| 9  | Beta                        | 0,12            |          |   | 6   | 3526218,2 | 1,1261621 | 0,630812  | -0,135139 | 0,0225232 | 0,1126162 |   | 0,7635926         |
| 10 | Tempo de duração            | 10              | dias     |   | 7   | 3526218,1 | 1,1486853 | 0,7434282 | -0,137842 | 0,0229736 | 0,1148685 |   | 1,3194779         |
| 11 | Gama                        | 0,10            |          |   | 8   | 3526218   | 1,1716589 | 0,8582968 | -0,140599 | 0,0234331 | 0,1171659 |   | 1,3727847         |
| 12 | Reprodução Basal            | 1,2             |          |   | 9   | 3526217,8 | 1,195092  | 0,9754627 | -0,143411 | 0,0239018 | 0,1195092 |   | 1,428245          |
| 13 | CÁLCULOS AUXILIARES         |                 |          |   | 10  | 3526217,7 | 1,2189938 | 1,0949719 | -0,146279 | 0,0243798 | 0,1218994 |   | 0,6099707         |
| 14 | Somatório Erro <sup>2</sup> | 386560484795,08 |          |   | 11  | 3526217,5 | 1,2433736 | 1,2168713 | -0,149205 | 0,0248674 | 0,1243374 |   | 1,5459778         |
| 15 | r <sup>2</sup>              | 0,328171615     |          |   | 12  | 3526217,4 | 1,2682409 | 1,3412086 | -0,152189 | 0,0253647 | 0,1268241 |   | 1,6084351         |
| 16 |                             |                 |          |   | 13  | 3526217,2 | 1,2936056 | 1,4680327 | -0,155233 | 0,025872  | 0,1293606 |   | 2,9117817         |
| 17 |                             |                 |          |   | 14  | 3526217,1 | 1,3194776 | 1,5973933 | -0,158337 | 0,0263894 | 0,1319478 |   | 1,7410212         |
| 18 |                             |                 |          |   | 15  | 3526216,9 | 1,345867  | 1,729341  | -0,161504 | 0,0269172 | 0,1345867 |   | 1,8113581         |
| 19 |                             |                 |          |   | 16  | 3526216,8 | 1,3727842 | 1,8639277 | -0,164734 | 0,0274555 | 0,1372784 |   | 6,9022626         |
| 20 |                             |                 |          |   | 17  | 3526216,6 | 1,4002398 | 2,0012062 | -0,168029 | 0,0280046 | 0,140024  |   | 31,357315         |
| 21 |                             |                 |          |   | 18  | 3526216,4 | 1,4282444 | 2,1412301 | -0,171389 | 0,0285647 | 0,1428244 |   | 2,4704156         |
| 22 |                             |                 |          |   | 19  | 3526216,3 | 1,4568091 | 2,2840546 | -0,174817 | 0,029136  | 0,1456809 |   | 133,24526         |
| 23 |                             |                 |          |   | 20  | 3526216,1 | 1,4859451 | 2,4297355 | -0,178313 | 0,0297187 | 0,1485945 |   | 2,2923622         |
| 24 |                             |                 |          |   | 21  | 3526215,9 | 1,5156638 | 2,57833   | -0,181879 | 0,0303131 | 0,1515664 |   | 209,79599         |

Fonte: Elaborado pelo autor.

Para facilitar a inserção do modelo SIR discretizado, optou-se por nomear os valores da *coluna B* conforme seus respectivos nomes atribuídos na *coluna A*. Isso faz com que tais células fiquem “travadas” e não se alterem ao utilizar o preenchimento automático do *Excel* para copiar as fórmulas para as próximas células. Na *coluna E* tem-se os dias transcorridos desde o primeiro caso confirmado no dia 14 de março de 2020, sendo registrado para  $t = 0$  na *célula E3*. Para a *célula E4* programou-se  $E4 = E3 + dt$  e copiou-se a fórmula para as próximas células da *coluna*.

Nas *colunas F, G e H* foram calculadas os valores do número de suscetíveis, infectados e removidos em cada unidade de tempo, respectivamente, conforme apresentado Figura 8(a), (b) e (c). Já nas *colunas I, J e K*, Figura 8(d), (e) e (f), programou-se as equações  $dS$ ,  $dI$  e  $dR$  para cada  $t$ , respectivamente, de acordo com a abordagem adotada. Os comandos utilizados na abordagem 1 podem ser visualizados a seguir.

Figura 8: Construção do modelo SIR discretizado no Excel



Fonte: Elaborado pelo autor.

Os comandos citados na figura anterior são para o *passo 0*, tomado quando  $t = 0$ . Os números suscetíveis, infectados e removidos do *passo 1* foram obtidos pela soma de  $S$ ,  $I$  e  $R$  com os respectivos valores de  $dS$ ,  $dI$  e  $dR$  do passo anterior, assim como pede o modelo discretizado construído na seção 2.5. Assim, a programação das colunas F, G e H podem ser realizadas da seguinte forma:

- F4:=SE(E4="";"";MÁXIMO(F3+I3;0))
- G4:=SE(E4="";"";MÁXIMO(G3+J3;0))
- H4:=SE(E4="";"";MÁXIMO(H3+K3;0))

Selecione as células e arraste até o último dia em análise para copiar as fórmulas para as demais linhas das colunas. Já a programação das colunas I, J e K podem ser realizadas selecionando as células programadas no passo 0 e arrastadas para as demais linhas das colunas. O

Na *coluna M* foi programado o erro quadrado entre os dados reais e os simulados. Tal programação é relativamente simples, basta fazer o quadrado da diferença entre a quantidade de infectados a partir dos dados reais e os dados obtidos no modelo, por exemplo, a *célula M3* pode ser utilizada a programação da seguinte forma:

$$M3: =SE(E3 = ""; ""; ('Dados de Mato Grosso '! C2 - 'Modelo SIR'! G3)^2)$$



Em seguida basta copiar a fórmula para as demais linhas da coluna. Note que neste caso a programação irá até o último dia do intervalo analisado e será muito útil para programar a função objetivo, minimizar esses erros quadrados. Por exemplo, a célula B14 foi programada para calcular o somatório dos valores obtidos na coluna M para os primeiros 36 da abordagem 1, conforme apresentado na Figura 9a.

Para minimizar esse somatório pode-se selecionar o recurso Solver e definir a função objetivo minimizando o resultado da célula B14, alterando a variável beta, conforme apresentado na Figura 9b. Para os demais intervalos adotados na abordagem 1 basta mudar a programação da célula B14 para que contemple até o último dia no intervalo, fazendo o valor de beta variar até que o valor da célula selecionada se torna o menor possível.

Figura 9: Programação da função objetivo e utilização do Solver

**a**

| POPULAÇÃO E VARIAÇÃO dt |             |          |
|-------------------------|-------------|----------|
| N                       | 3526220     | peessoas |
| delta t                 | 1           | dia      |
| VALORES INICIAIS        |             |          |
| Szero                   | 3526219     | peessoas |
| Izero                   | 1           | peessoa  |
| Rzero                   | 0           | peessoa  |
| PARÂMETROS DO MODELO    |             |          |
| Beta                    | 0,12        |          |
| Tempo de duração        | 10          | dias     |
| Gama                    | 0,10        |          |
| Reprodução Basal        | 1,2         |          |
| CÁLCULOS AUXILIARES     |             |          |
| Somatório Erro²         | 1323,91     |          |
| r²                      | 0,328171615 |          |

**b**

Parâmetros do Solver

Definir Objetivo:

Para:  Máx.  MÍN.  Valor de:

Alterando Células Variáveis:

Sujeito às Restrições:

Tornar Variáveis Irrestritas Não Negativas

Selecionar um Método de Solução:

Método de Solução

Selecione o mecanismo GRG Não Linear para Problemas do Solver suaves e não lineares. Selecione o mecanismo LP Simplex para Problemas do Solver lineares. Selecione o mecanismo Evolutionary para problemas do Solver não suaves.

Ajuda

Fonte: Elaborado pelo autor.

Para implementação da abordagem 2 as programações das colunas F, G e H ocorrem de mesmo modo. A mudança ocorreu na coluna I que recebeu a seguinte programação:

$$I3:= SES(E3 = ""; ""; E3 < 36; (-Beta1/N * F3 * G3) * dt; E3 < 72; (-Beta2/N * F3 * G3) * dt; E3 < 108; (-Beta3/N * F3 * G3) * dt; E3 < 144; (-Beta4/N * F3 * G3) * dt; E3 < 180; (-Beta5/N * F3 * G3) * dt; E3 < 216; (-Beta6/N * F3 * G3) * dt; E3 < 252; (-Beta7/N * F3 * G3) * dt; E3 < 288; (-Beta8/N * F3 * G3) * dt; E3 > 287; (-Beta9/N * F3 * G3) * dt)$$

Este tipo de programação condicional fez com que os intervalos utilizados não sofressem o acréscimo dos períodos anteriores, calculando assim um valor para a taxa de infecção para cada período.

A programação da função objetivo ocorreu de modo análogo a abordagem 1, tomando ao todo nove valores para  $\beta$  inseridos nas células B17 a B25 (Figura 10a). Este intervalo será adotado como células variáveis na ferramenta *solver* e o objetivo foi minimizar a soma obtida na célula B14 (Figura 10b).

Figura 10: Programação da função objetivo e utilização do *Solver* para estimativa de  $\beta$  variando em 9 intervalos

**a**

| CÁLCULOS AUXILIARES         |             |
|-----------------------------|-------------|
| Somatório Erro <sup>2</sup> | 48273564,27 |
| r <sup>2</sup>              | 0,590088121 |
| Beta1                       | 0,127719156 |
| Beta2                       | 0,155429618 |
| Beta3                       | 0,126347657 |
| Beta4                       | 0,085157171 |
| Beta5                       | 0,063922801 |
| Beta6                       | 0,052784869 |
| Beta7                       | 0,065226523 |
| Beta8                       | 0,086874719 |
| Beta9                       | 0,087396683 |

**b**

Parâmetros do Solver

Definir Objetivo:

Para:  Máx.  MÍN.  Valor de:

Alterando Células Variáveis:

Sujeito às Restrições:

Tornar Variáveis Irrestritas Não Negativas

Selecionar um Método de Solução:

Método de Solução  
 Selecione o mecanismo GRG Não Linear para Problemas do Solver suaves e não lineares. Selecione o mecanismo LP Simplex para Problemas do Solver lineares. Selecione o mecanismo Evolutionary para problemas do Solver não suaves.

Botões: Ajuda, Resolver, Fechar

Fonte: Elaborado pelo autor.

De modelo análogo, programou-se a abordagem 3 alterando a programação da *coluna I* para calcular um valor para  $\beta$  a cada 7 dias, partindo de 0. A fórmula utilizada foi a mesma, mudando apenas a quantidade células tomadas em cada condição, o que resultou em 46 valores para  $\beta$  inseridos nas células B17 a B62 (Figura 11a). Tais valores foram adotados como células variáveis na ferramenta *Solver* (Figura 11b).

Figura 11: Programação da função objetivo e utilização do Solver com  $\beta$  variando em 46 intervalos

**a**

| CÁLCULOS AUXILIARES         |             |
|-----------------------------|-------------|
| Somatório Erro <sup>2</sup> | 45204241,49 |
| r <sup>2</sup>              | 0,616154365 |
| Beta1                       | 0,173790116 |
| Beta2                       | 0,226690164 |
| Beta3                       | 0,227508609 |
| Beta4                       | 0,129967489 |
| Beta5                       | 0,108881857 |
| Beta43                      | 0,166936315 |
| Beta44                      | 0,127317107 |
| Beta45                      | 0,078196861 |
| Beta46                      | 0,091802655 |

**b**

Fonte: Elaborado pelo autor.

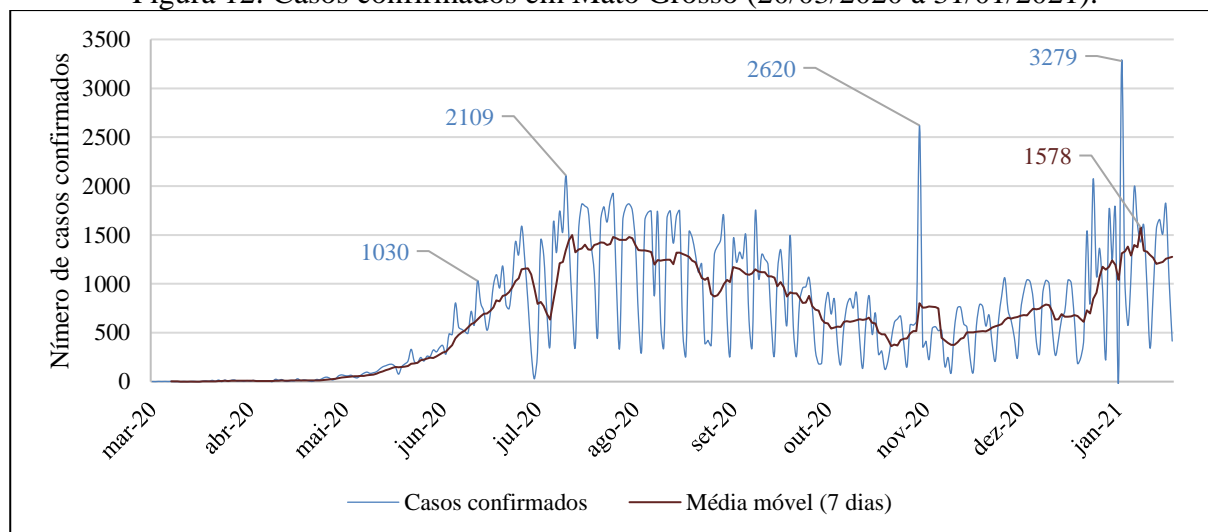
### 3 ANÁLISE E RESULTADO

Este capítulo está dividido em três seções, a seção 3.1 refere-se ao levantamento de dados sobre a Covid-19 no estado de Mato Grosso de março de 2020 a janeiro de 2021 com base nos dados disponibilizados pela SES/MT e algumas análises iniciais. Já na seção 3.2 apresenta-se, por meio dos dados levantados, estimativas para os parâmetros de infecção e remoção do modelo SIR. Por fim, na seção 3.3 é feita a comparação dos dados coletados com os dados simulados, buscando identificar a consistência dos parâmetros obtidos.

#### 3.1 LEVANTAMENTO DE DADOS COVID-19 NO ESTADO DE MATO GROSSO

Desde o início da crise sanitária causada pela pandemia da COVID-19, o Mato Grosso vem apresentando expressivo aumento de casos e óbitos pela doença. O primeiro caso foi registrado no município de Cuiabá em 14 de março de 2020. Na Figura 12 é possível ver como o número de casos diários confirmados aumentou expressivamente em intervalos de tempo cada vez menores.

Figura 12: Casos confirmados em Mato Grosso (20/03/2020 à 31/01/2021).



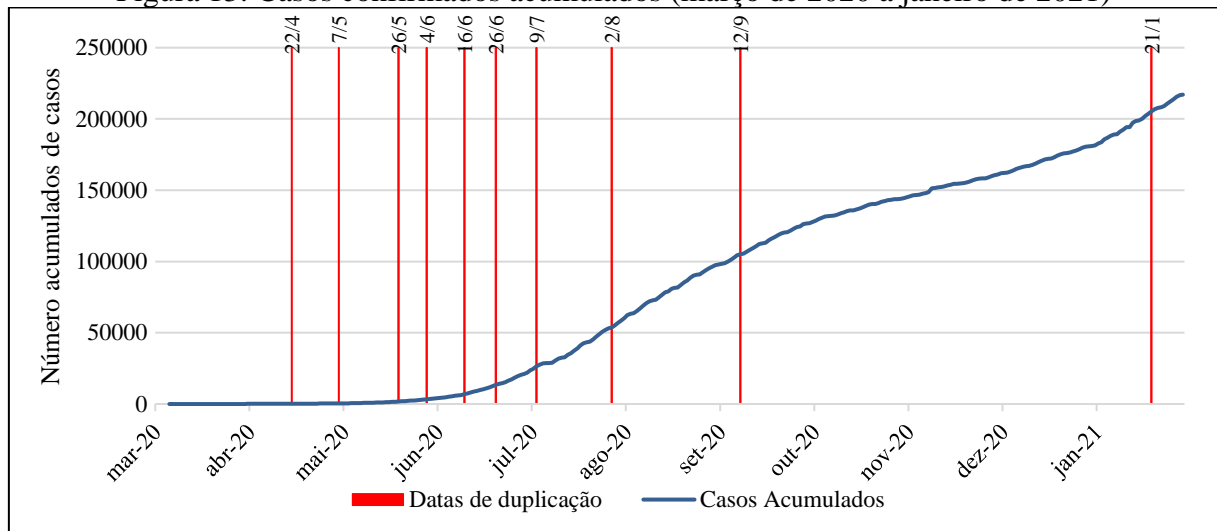
Fonte: Elaborado pelo autor.

Após o primeiro caso confirmado, levou-se cerca de 70 dias para ultrapassar 100 casos registrado em um único dia, fato ocorrido no dia 24 de maio desse mesmo ano. Apenas 31 dias depois ocorreu o primeiro registro de um número superior a 1000 casos em um único dia e, após este, cerca de 28 dias para atingir mais 2.000 casos, conforme apresentado apresenta o Figura 12.

No período analisado, o maior número de casos confirmados em um único dia foi 3.279, sendo registrado no dia 15 de janeiro de 2021. Nota-se também, que a média móvel (7 dias) se manteve acima dos 1.000 casos diários em 96 dos 324 dias em estudo, sendo o intervalo de 20/07/2020 à 06/09/2020 o maior intervalo observado. Nesse intervalo consta a maior média registrada, cerca 1578 no dia 25/07/2020 (Figura 12).

Até o final do mês de janeiro de 2021, o estado chegou à marca de 217.022 casos acumulados confirmados e, avaliando o número de dias para a duplicação do número de casos, após atingir 100 casos acumulados confirmados (9 de abril de 2020), verifica-se que o número de casos dobrou por 10 vezes em Mato Grosso, conforme apresentado na Figura 13.

Figura 13: Casos confirmados acumulados (março de 2020 a janeiro de 2021)



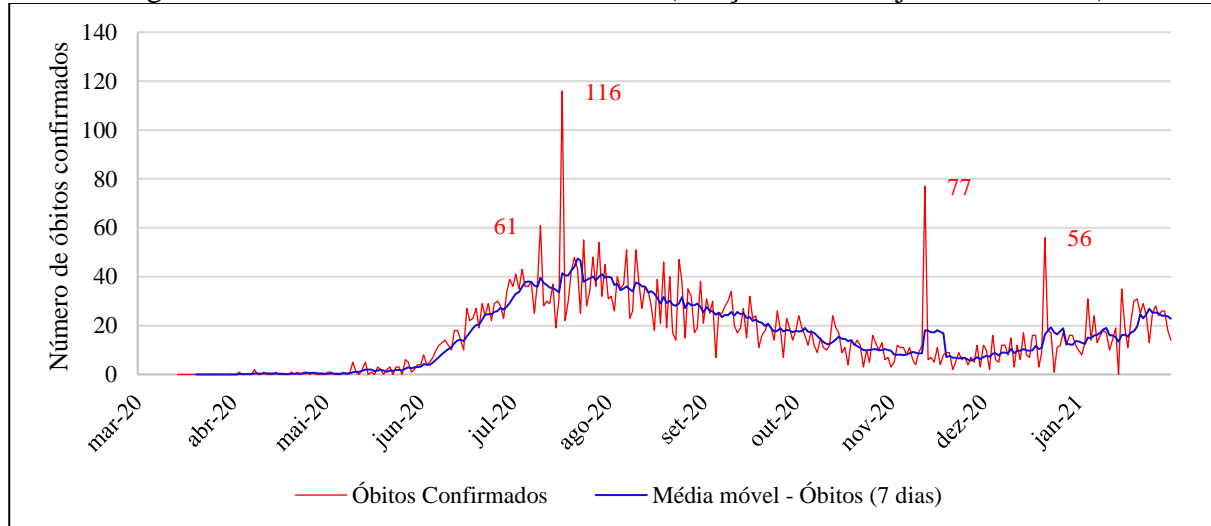
Fonte: Elaborado pelo autor.

A primeira data de duplicação após atingir 100 casos acumulados confirmados ocorreu no dia 22 de abril, com uma diferença de 13 dias. As próximas datas de duplicação foram 7 e 26 de maio, 16 e 26 de junho, 9 de julho, 2 de agosto, 12 de setembro e 21 de janeiro de 2021, com diferenças de 15, 19, 9, 12, 10, 13, 22, 41 e 133 dias, respectivamente. Uma justificativa para esse comportamento distinto da velocidade de disseminação da doença, fazendo com que, por exemplo, o 4º e 6º intervalos de duplicação para os dados de Mato Grosso sejam menores, pode estar relacionado ao aumento acelerado dos casos registrados em alguns grandes centros, com por exemplo Cuiabá e Rondonópolis, conforme apontado por (CECCONELLO, MURARO, *et al.*, 2020).

Os dados coletados também evidenciam que a taxa de letalidade durante o período analisado foi de 2% sendo registrado cerca de 5.128 óbitos acumulados em decorrências da infecção. O número de óbitos diários foi superior 50 em oito datas (10/07, 17/07, 24/07, 29/07,

07/08, 09/08, 12/11, 21/12) e o maior valor observado foi de 116 óbitos em 17 de julho de 2020, veja a Figura 14 a seguir.

Figura 14: Número de óbitos confirmados (março de 2020 a janeiro de 2021)



Fonte: Elaborado pelo autor.

A média móvel do número de óbitos manteve-se abaixo de 50 em todo o período analisado, tendo seu maior valor nos dias 22 e 23 de junho de 2020, registrando um valor médio de 47 óbitos.

### 3.2 ESTIMATIVA DOS PARÂMETROS PARA O ESTADO DE MATO GROSSO

Os estudos clínicos em todo o mundo têm estimado que o tempo médio de recuperação da Covid-19 varia de 10 a 20 dias. Para este trabalho adotou-se inicialmente dois valores para fim de estimativas,  $t = 10$  dias, resultando na taxa de remoção  $\gamma = 0,1$ . A taxa de transmissão da doença  $\beta$  foi obtida utilizando um código computacional através de processo de otimização até que os resultados simulados para o número de infectados possam ser considerados suficientemente próximos aos dados fornecidos pela Secretaria de Estado de Saúde de Mato Grosso, conforme descrito na seção 2.5. Foi considerada uma estimativa para população mato-grossense de 3.484.466 habitantes para ano de 2020, conforme dados pela própria secretaria.

Inicialmente, adotando-se intervalos com acréscimos de 36 dias (aproximadamente cinco semanas epidemiológicas) partindo de  $t = 0$ , foi possível obter os valores de  $\beta$  em nove simulações diferentes dentro do período analisado. A utilização de uma aproximação com duas casas decimais fez com que alguns dos valores obtidos para  $\beta$  coincidissem, gerando cinco cenários distintos. Na Tabela 2 são apresentados os valores obtidos, assim como o número básico de reprodução  $\mathcal{R}_0 = \frac{\beta}{\gamma}$  para cada intervalo adotado.

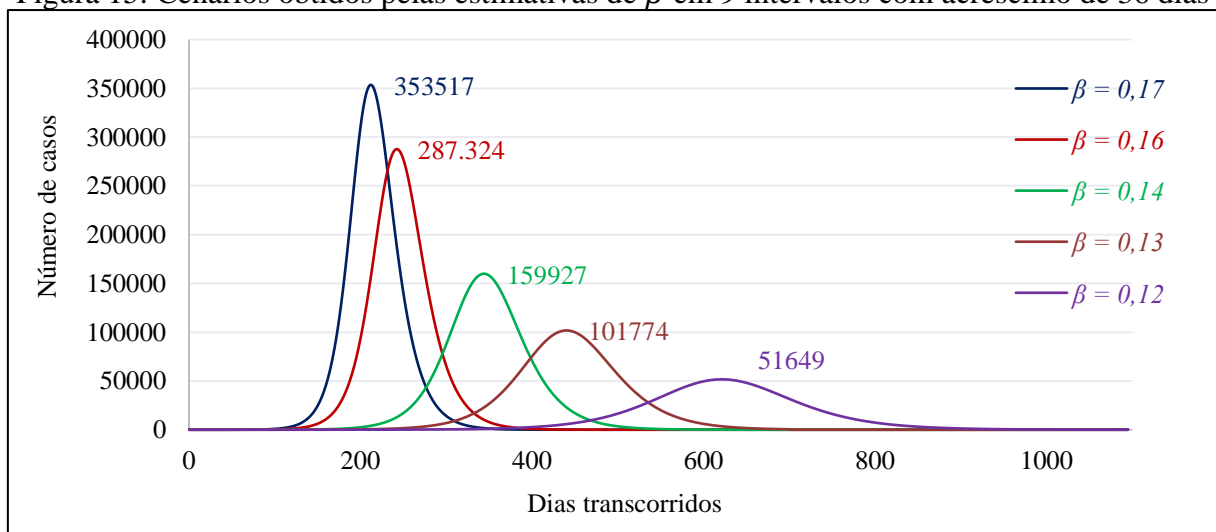
Tabela 2: Estimativa para taxa de infecção  $\beta$  usando a taxa de remoção  $\gamma = 0,1$ 

| Simulação | Quantidade de dias em cada simulação | Taxa de infecção $\beta$ | $\mathcal{R}_0$ de cada intervalo |
|-----------|--------------------------------------|--------------------------|-----------------------------------|
| 1         | 36                                   | 0,17                     | 1,7                               |
| 2         | 72                                   | 0,17                     | 1,7                               |
| 3         | 108                                  | 0,17                     | 1,7                               |
| 4         | 144                                  | 0,16                     | 1,6                               |
| 5         | 180                                  | 0,14                     | 1,4                               |
| 6         | 216                                  | 0,14                     | 1,4                               |
| 7         | 252                                  | 0,13                     | 1,3                               |
| 8         | 288                                  | 0,12                     | 1,2                               |
| 9         | 324                                  | 0,12                     | 1,2                               |

Fonte: Elaborado pelo autor.

A partir das simulações notou-se que o número de indivíduos que serão contaminados a partir de um indivíduo infectado ( $\mathcal{R}_0$ ) calculado na simulação 1, com 36 dias transcorridos a partir da primeira infecção, gerou o maior valor  $\mathcal{R}_0 = 1,7$ . Para as demais simulações tal valor apresentou uma queda considerável, tendo o menor valor registrado na simulação 9, com 324 dias transcorridos.

Considerando os cenários distintos foi possível projetar as maiores quantidades de infectados em único dia para cada simulação, o chamado pico da pandemia. Na Figura 15 é apresentas essas projeções caso os respectivos valores de  $\beta$  fossem mantidos para os períodos futuros.

Figura 15: Cenários obtidos pelas estimativas de  $\beta$  em 9 intervalos com acréscimo de 36 dias

Fonte: Elaborado pelo autor.

Os cenários obtidos para  $\gamma = 0,1$  mostram que, se taxa de infecção  $\beta = 0,17$  permanecesse, o pico do número de infectados atingiria a marca de 353.517 pessoas ocorrendo por volta do dia 11/10/2021 com 212 dias transcorridos desde o primeiro registro. Com o acréscimo de dias e a consequente diminuição da taxa de infecção as projeções para o número de infectados se alteraram e estimaram o menor valor para o pico de 51.649 contaminados para  $\beta = 0,12$ , ocorrendo 621 dias após o primeiro registro de infecção, na data de 24/11/2021, (Tabela 3).

Tabela 3: Estimativa para número máximo de infectados usando a taxa de remoção  $\gamma = 0,1$

| $\beta$ | $\mathcal{R}_0$ | Data prevista para o maior valor de infectados simulados (pico) | Dias entre o primeiro caso e o pico | Valor obtido na simulação |
|---------|-----------------|---|-------------------------------------|---------------------------|
| 0,17    | 1,7             | 11/10/2020  | 212                                 | 353517                    |
| 0,16    | 1,6             | 10/11/2020  | 242                                 | 287654                    |
| 0,14    | 1,4             | 20/02/2021  | 344                                 | 159927                    |
| 0,13    | 1,3             | 27/05/2021  | 440                                 | 101774                    |
| 0,12    | 1,2             | 24/11/2021  | 621                                 | 51649                     |

Fonte: Elaborado pelo autor.

Essas diferenças na previsão do quantitativo e da data para o alcance do número máximo de infectados se deve a capacidade de reprodução (transmissibilidade) do vírus obtidas em cada simulação. No estudo realizado por Gomes e Monteiro (2020), ao analisar a taxa variável de crescimento de infectados, mostrou-se que uma redução do percentual de circulação de indivíduos suscetíveis acarreta uma diminuição da densidade populacional de expostos ao vírus, provocando, consequentemente, uma diminuição na taxa de infecção. Essa evidencia, apesar de não ser objeto dessa pesquisa, mostra a importância do isolamento social na contenção dos fatores de dispersão do vírus.

Uma outra estimativa que pode ser feita é reavaliar os intervalos considerados para que, em vez de considerar um acréscimo ao(s) intervalo(s) anterior, sejam feitos os cálculos da taxa de infecção de cada intervalo equivalente e consecutivo.

Essa tentativa de tornar o modelo mais realista resultou na Abordagem 2, na qual os valores de  $\beta$  variam em 9 intervalos de 36 dias. Os dados simulados são apresentados na Tabela 4 e mostram uma variação maior na taxa de infecção  $\beta$  e na taxa de reprodução básica  $\mathcal{R}_0$ . Além disso, é evidenciado o maior valor registrado em um único dia em cada intervalo e a data de ocorrência.



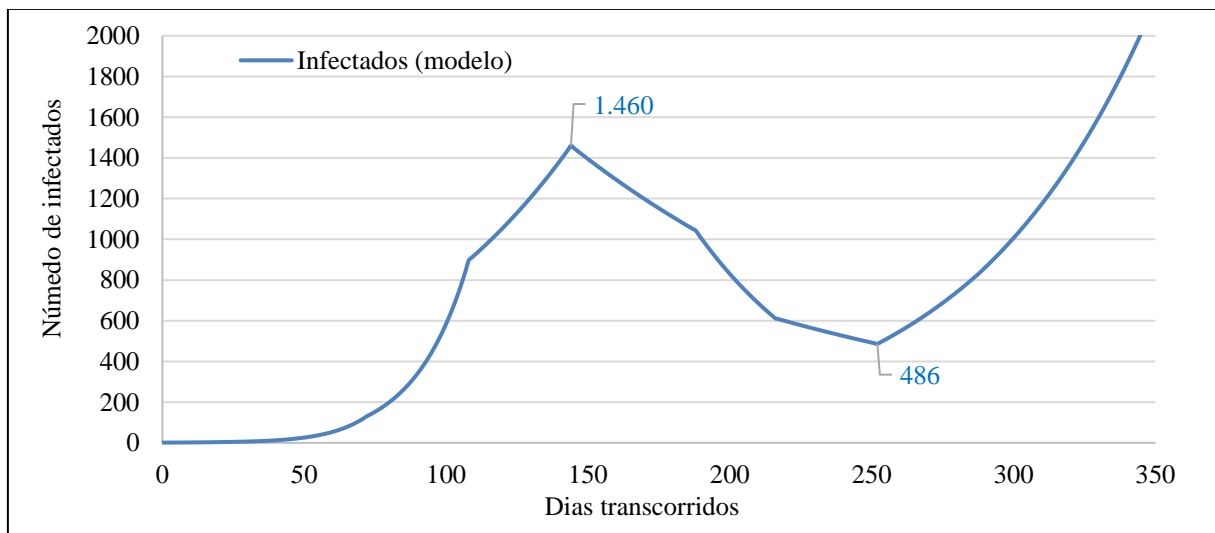
Tabela 4: Estimativa para taxa de infecção  $\beta$  variando em 9 intervalos de 36 dias

| Intervalos              | $\beta$ | $\mathcal{R}_0$ | Maior valor no intervalo | Data       |
|-------------------------|---------|-----------------|--------------------------|------------|
| 14/03/2020 à 18/04/2020 | 0,15    | 1,5             | 9                        | 18/04/2020 |
| 19/04/2020 à 24/05/2020 | 0,19    | 1,9             | 121                      | 24/05/2020 |
| 25/05/2020 à 29/06/2020 | 0,15    | 1,5             | 850                      | 29/06/2020 |
| 30/06/2020 à 04/08/2020 | 0,11    | 1,1             | 1440                     | 04/08/2020 |
| 05/08/2020 à 09/09/2020 | 0,09    | 0,9             | 1460                     | 05/08/2020 |
| 10/09/2020 à 15/10/2020 | 0,08    | 0,8             | 1109                     | 10/09/2020 |
| 16/10/2020 à 20/11/2020 | 0,09    | 0,9             | 612                      | 16/10/2020 |
| 21/11/2020 à 26/12/2020 | 0,11    | 1,1             | 823                      | 26/12/2020 |
| 27/12/2020 à 31/01/2021 | 0,11    | 1,1             | 1414                     | 30/01/2021 |

Fonte: Elaborado pelo autor.

O cenário gerado a partir da variação de taxa de infecção nos intervalos analisados apresentado na Figura 16 mostrou um possível pico para o número de infectados para o dia 04 de agosto de 2020 com um valor projetado de 1460 casos. Além disso, registrou uma possível queda para 486 para o dia 21 de novembro de 2020 seguida de uma nova crescente.

Figura 16: Cenário obtido pelas estimativas de  $\beta$  variando em 9 intervalos de 36 dias sem acréscimo dos períodos anteriores



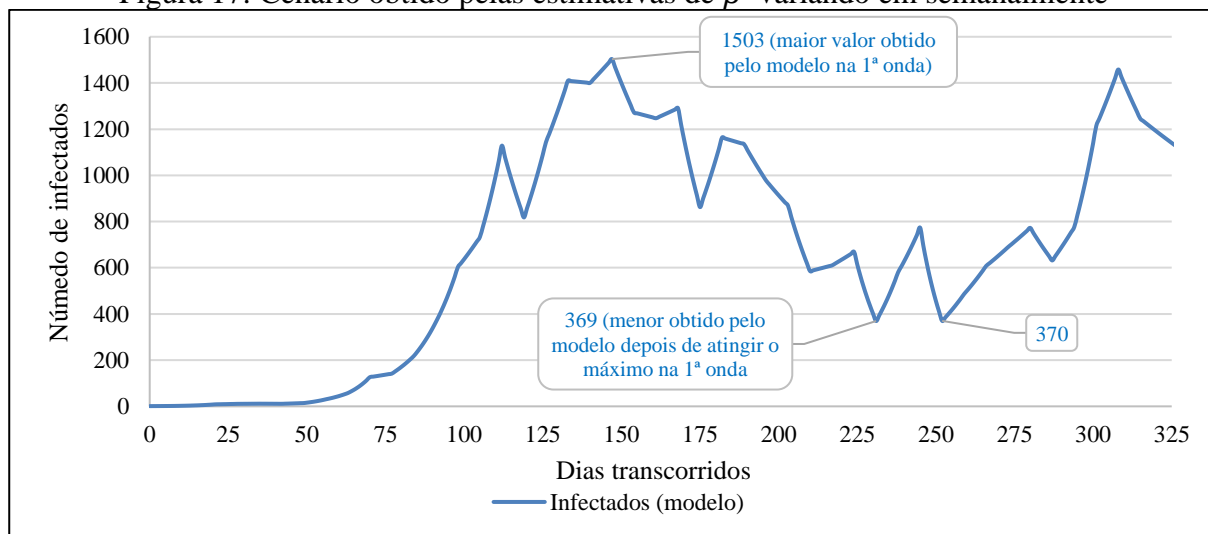
Fonte: Elaborado pelo autor.

Essa projeção segue os resultados obtidos na descrição do modelo SIR na subseção 2.4, já que nos quatro primeiros intervalos obteve-se  $\mathcal{R}_0 > 1$  indicando que a incidência da doença tende a crescer. Porém, do quinto ao sétimo intervalo obteve-se  $\mathcal{R}_0 < 1$ , o que desacelerou significativamente o número de novas infecções no modelo. A possível crescente no número de

novos casos diários gerada no 8º e 9º intervalos mostra uma projeção conhecida com segunda onda.

Na abordagem 3 buscou-se variar a taxa de infecção  $\beta$  semanalmente, fazendo com que a projeção da curva de infectados variasse em 46 semanas epidemiológica durante o período analisado. A simulação gerou um cenário para a primeira onda estipulando um pico de 1503 casos de infecção em um único dia, registrado para o dia 08 de agosto de 2020, conforme apresentado na Figura 17.

Figura 17: Cenário obtido pelas estimativas de  $\beta$  variando em semanalmente

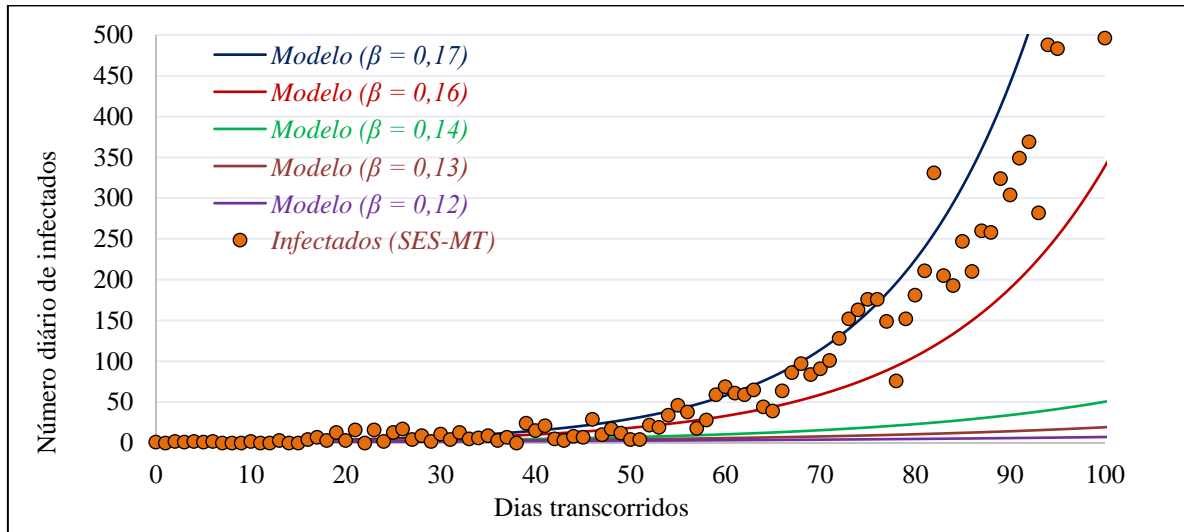


Fonte: Elaborado pelo autor.

### 3.3 COMPARAÇÃO DOS DADOS EMPÍRICOS X ESTIMADOS POR EQUAÇÕES

O objetivo dessa seção é confrontar simulações aos dados reais, de forma a mostrar o desempenho do modelo em reproduzir a evolução epidêmica real. As figuras foram geradas com o mesmo padrão, mostrando o número de casos reais, o número de casos previsto pelo modelo e a curva de infectados acumulados previsto no modelo.

Conforme os dados apresentados na seção 3.2 ao usar a Abordagem 1 obteve-se cinco cenários a partir da taxa de remoção  $\gamma = 0,1$ . Para haver esse bom ajuste entre dados reais e modelo, houve a necessidade de se adotar diferentes valores para a taxa de crescimento  $\beta$ : inicialmente,  $\beta = 0,17$ , para  $t < 108$ ,  $\beta = 0,16$ , para  $t < 144$ ,  $\beta = 0,14$ , para  $t < 216$ ,  $\beta = 0,13$ , para  $t < 252$  e  $\beta = 0,12$ , para  $t < 324$ . Essa metodologia mostrou inicialmente promissora, pois os dados obtidos pelo modelo tomando  $\beta = 0,17$  com 108 dias em análise forneceram um coeficiente de correlação  $R^2 = 0,90$ .

Figura 18: Cenários obtidos pelas estimativas de  $\beta$  variando em 9 intervalos de 36 dias

Fonte: Elaborado pelo autor.

Porém, ao analisar os novos intervalos com acréscimos de 36 dias tal coeficiente mostrou-se cada vez mais distante de 1 e, conseqüentemente, os valores obtidos pelo modelo não foram próximos o suficiente para garantir um bom ajuste. Na Tabela 5 pode-se perceber que a qualidade do ajuste reduziu consideravelmente até a inclusão dos 324 dias transcorridos da epidemia em Mato Grosso.

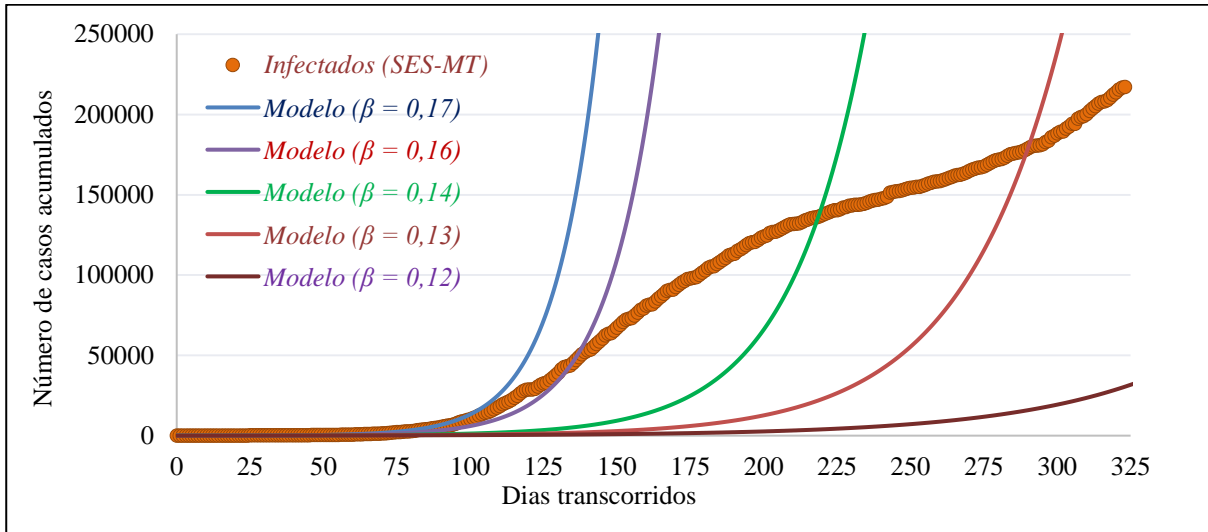
Tabela 5: Coeficientes de correlação  $R^2$  para abordagem 1

| Simulação | Taxa de infecção $\beta$ | $R^2$ |
|-----------|--------------------------|-------|
| 1         | 0,17                     | 0,26  |
| 2         | 0,17                     | 0,88  |
| 3         | 0,17                     | 0,90  |
| 4         | 0,16                     | 0,64  |
| 5         | 0,14                     | 0,28  |
| 6         | 0,14                     | 0,35  |
| 7         | 0,13                     | 0,006 |
| 8         | 0,12                     | 0,003 |
| 9         | 0,12                     | 0,08  |

Fonte: Elaborado pelo autor.

Para visualizar os cenários obtidos no modelo e consonância com os dados reais fornecidos pela Secretaria de Estado de Saúde de Mato Grosso organizou-se as projeções diárias na forma de infectados acumulados.

Figura 19: Número acumulados de infectados até 31 de janeiro e as diferentes projeções



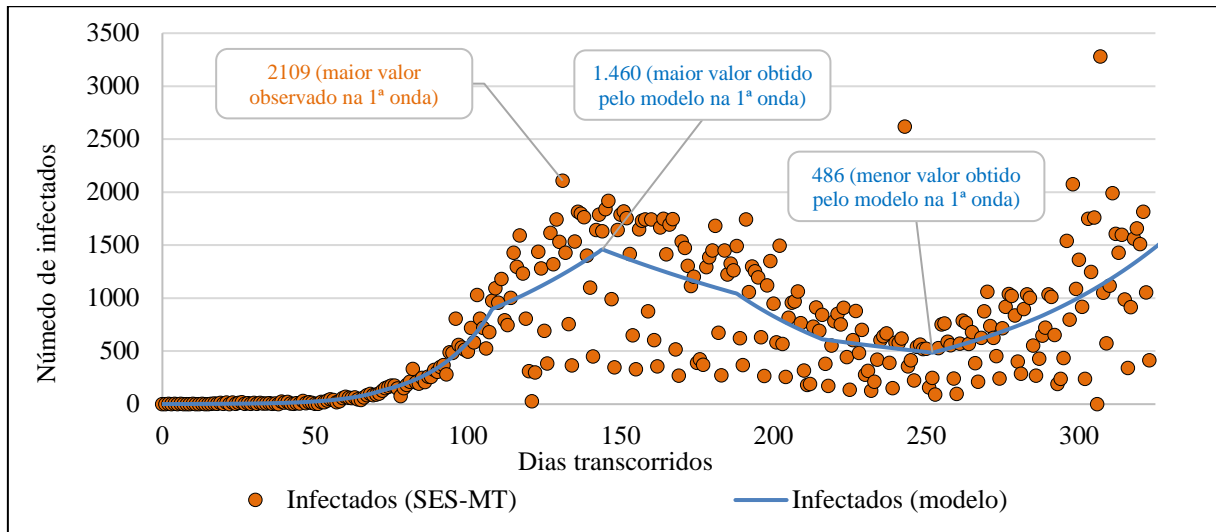
Fonte: Elaborado pelo autor.

Considerando a Abordagem 2, empregou-se a estimativa de  $\beta$  em 9, intervalos sem adição dos períodos anteriores, foram obtidos os seguintes valores para  $\beta$ :  $\beta = 0,15$ , para  $t < 36$ ,  $\beta = 0,19$ , para  $36 \leq t < 72$ ,  $\beta = 0,15$ , para  $72 \leq t < 108$ ,  $\beta = 0,11$ , para  $108 \leq t < 144$ ,  $\beta = 0,09$ , para  $144 \leq t < 180$ ,  $\beta = 0,08$ , para  $180 \leq t < 216$ ,  $\beta = 0,09$ , para  $216 \leq t < 252$ ,  $\beta = 0,11$ , para  $252 \leq t < 288$  e  $\beta = 0,11$ , para  $288 \leq t < 324$ . Ao confrontar o cenário obtido pelo modelo aos dados reais tais valores proporcionaram um coeficiente de correlação  $r^2 = 0,59$ , o que gerou uma boa aproximação ao comparar, principalmente, as datas início e término da 1ª onda<sup>9</sup>, bem como o maior valor do intervalo.

Segundo os dados fornecidos pela Secretaria de Estado de Saúde o Estado de Mato Grosso o maior valor observado no número de infectados em um único dia na 1ª onda ocorreu no dia 23 de julho de 2020, sendo foi registrado 2109 casos. O modelo estipulou essa data de máximo para o dia 05 de agosto de 2020, uma diferença de 13 dias. Além disso, o modelo estipulou o término da 1ª onda para o dia 21 de novembro, uma diferença de 9 dias quando comparado com as projeções da Secretaria de Saúde. Esse cenário pode ser visualizado na Figura 20.

<sup>9</sup> Considera-se a primeira onda com data de início no dia 14 de março 2020 e término no dia 30 de novembro do mesmo ano. Já a segunda onda iniciou no dia 01 de dezembro de 2020 (SES, 2021).

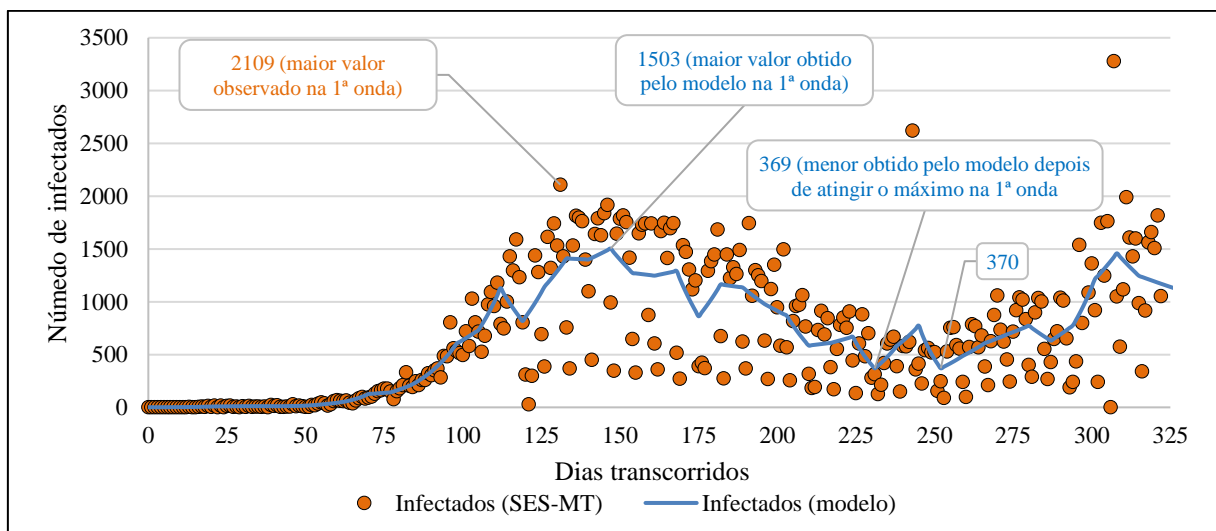
Figura 20: Comparação entre os dados reais e os dados do modelo ( $\beta$  variando e nove intervalos sem acréscimos dos períodos anteriores)



Fonte: Elaborado pelo autor.

Considerando a Abordagem 3, cuja estimativa de  $\beta$  ocorreu variando a cada semana epidemiológica, foi obtido um coeficiente de correlação  $r^2 = 0,62$  ao comparar a proximidade dos dados reais nos 324 dias analisados com o modelo obtido, conforme apresentado na Figura 21. Para a primeira onda o modelo estipulou um máximo de 1503 casos de infecção para o dia 08 de agosto de 2020, ocorrendo com uma diferença de 16 dias, e um valor mínimo de 369 casos para o dia 31 de outubro.

Figura 21: Comparação entre os dados reais e os dados do modelo ( $\beta$  variando semanalmente)

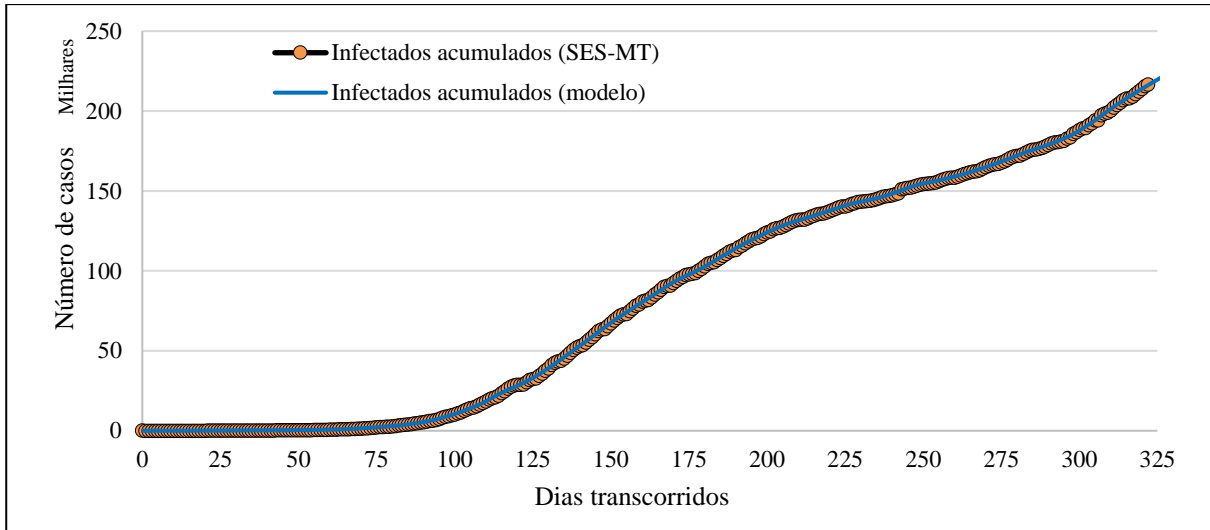


Fonte: Elaborado pelo autor.

Apesar da dispersão apresentada no número diário de infectados na Figura 21 o modelo com  $\beta$  variando em intervalos semanais mostrou-se mais próximo dos dados reais quando

comparado aos obtidos nas abordagens 1 e 2. Esse comparativo obtido pela abordagem 3 é melhor visualizado por meio do número acumulado de infectados apresentados na Figura 22, na qual, aparentemente, os dados simulados capturaram bem os dados reais.

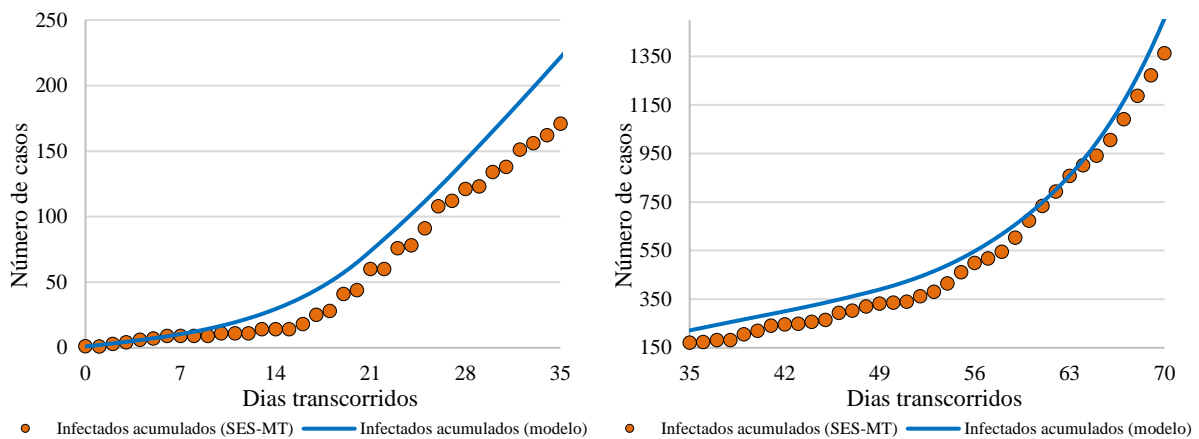
Figura 22: Comparação entre os dados reais acumulados e os dados do modelo



Fonte: Elaborado pelo autor.

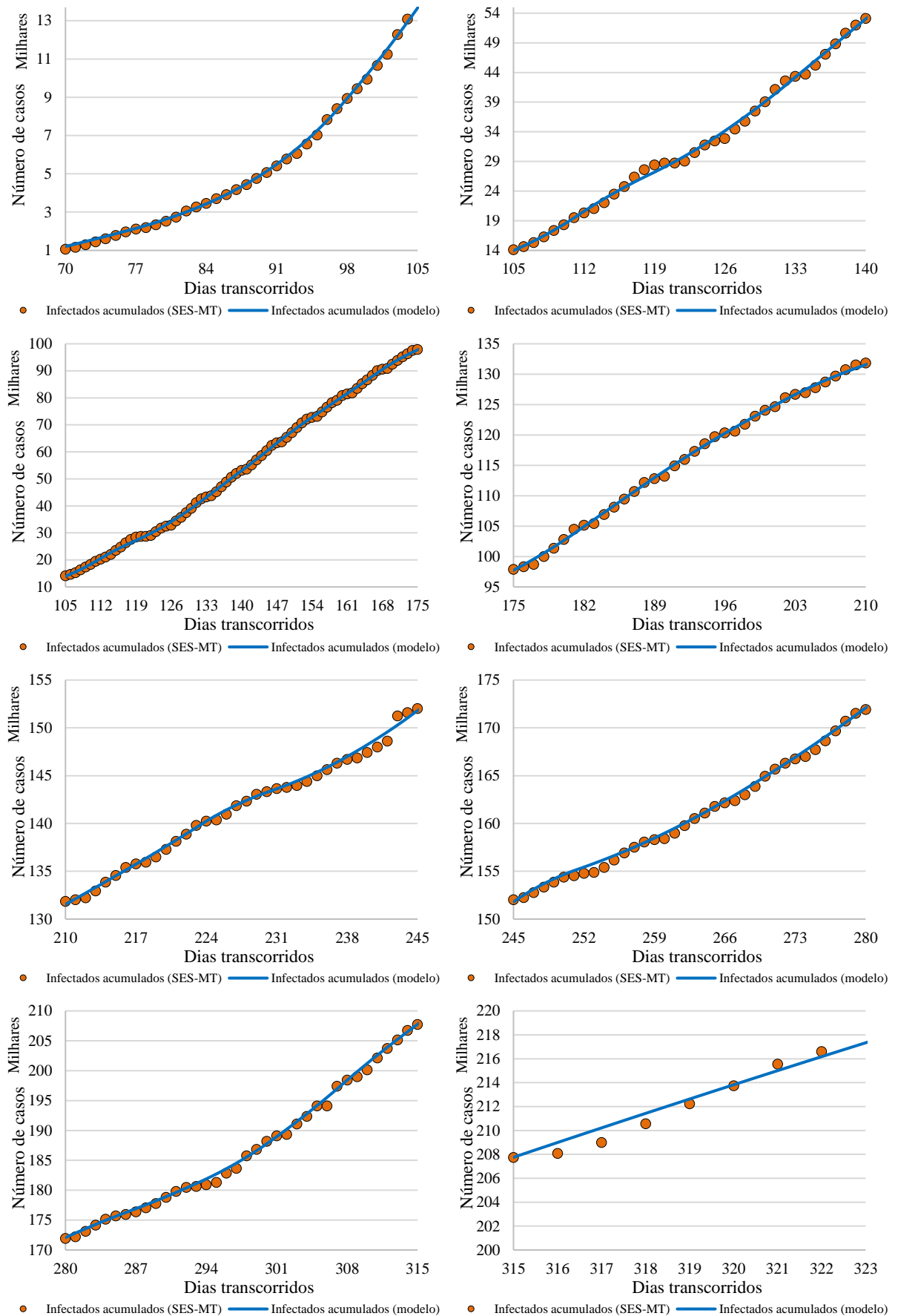
Devido a escala utilizada no número de casos e o modelo de plotagem disponível no *Excel* pode-se cair na alusão que os dados simulados e os dados reais coincidente de maneira significativa. Entretanto, ao dividir a Figura 22 em intervalos menores é possível visualizar alguns momentos que em a projeção de distanciou dos dados reais. Esses intervalos são apresentados na Figura 23 e Figura 24 distribuídos em intervalos de 35 dias.

Figura 23: Comparação entre os dados reais acumulados e os dados do modelo



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 24: Comparação entre os dados reais acumulados e os dados do modelo (continuação)



Fonte: Elaborado pelo autor.

Como a taxa de infecção foi calculada semanalmente é natural que o modelo crie diferentes aproximações ao mensurar o coeficiente de correlação  $r^2$  de cada intervalo, por exemplo, os maiores valores obtidos para  $r^2$  foram 0,83, 0,94 e 0,86 para 8<sup>a</sup>, 11<sup>a</sup> e 26<sup>a</sup> semanas. Já os menores valores 0,003, 0,0004 e 0,02 obtidos nas 4<sup>a</sup>, 5<sup>a</sup> e 41<sup>a</sup> semana. Entretanto, ao considerar o total de dias analisados obteve-se um valor de  $r^2 = 0,62$ . Os demais valores foram disponibilizados por meio de uma tabela no APÊNDICE B.



#### 4. PROPOSTA DIDÁTICA BASEADA EM MODELAGEM MATEMÁTICA

Nesse capítulo busca-se responder a seguinte questão norteadora: como transpor o entendimento do modelo SIR e da dinâmica de infecção causa pela Covid-19 para estudantes do Ensino Médio? O capítulo encontra-se dividido em duas seções, na seção 4.1 é realizado o delineamento da proposta didática ressaltando os objetivos a serem alcançados, bem como a metodologia escolhida, os recursos a serem utilizados e como proceder a avaliação e reflexão da aprendizagem. Já na seção 4.2 encontram-se algumas sugestões de situações a serem trabalhadas com os estudantes, no total são 10 situações que vão desde o estudo do painel interativo da Secretaria de Estado de Saúde de Mato Grosso à simplificação do modelo SIR e comparação dos resultados.

##### 4.1 A PROPOSTA

Para responder à questão problema citada anteriormente, optou-se por realizar uma proposta com a utilização de planilhas eletrônicas do *software Excel* juntamente com alguns objetos de conhecimentos e habilidades que fazem parte do Currículo Nacional do Ensino Médio elencados na Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2017) e no Documento Referência Curricular de Mato Grosso (MATO GROSSO, 2020). O tema será voltado para o estudo do avanço da Covid-19 em Mato Grosso até o final do mês de janeiro de 2021, período que antecede o início da vacinação.

Ressalta-se que a utilização da planilha de eletrônicas é prevista na BNCC, na qual propõem que

os estudantes utilizem tecnologias, como calculadoras e planilhas eletrônicas, desde os anos iniciais do Ensino Fundamental. Tal valorização possibilita que, ao chegarem aos anos finais, eles possam ser estimulados a desenvolver o pensamento computacional, por meio da interpretação e da elaboração de algoritmos, incluindo aqueles que podem ser representados por fluxogramas (BRASIL, 2017, p. 528).

O público alvo será os estudantes do 3º ano do Ensino Médio e terá como objetos de conhecimento selecionados, dentre os disponíveis, são: taxas de variação média e instantânea. Tais objetos foram selecionados com base nas habilidades apresentadas no Quadro 3, porém é natural que, no processo de estudo e descrição do avanço da Covid-19 em Mato Grosso, algumas outras habilidades possam ser contempladas. Com isso, ressalta-se que será tarefa do

professor mediar essa relação entre o problema inicial e os objetos matemáticos em estudo e assegurar que as devidas habilidades sejam consolidadas.

Quadro 3: Habilidades selecionadas para a proposta didática baseada em modelagem

|            |  |
|------------|--|
| EM13MAT101 | Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais.                      |
| EM13MAT104 | Interpretar taxas e índices de natureza socioeconômica (índice de desenvolvimento humano, taxas de inflação, entre outros), investigando os processos de cálculo desses números, para analisar criticamente a realidade e produzir argumentos.                                     |
| EM13MAT203 | Aplicar conceitos matemáticos no planejamento, na execução e na análise de ações envolvendo a utilização de aplicativos e a criação de planilhas (para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros simples e compostos, entre outros), para tomar decisões. |
| EM13MAT314 | Resolver e elaborar problemas que envolvem grandezas determinadas pela razão ou pelo produto de outras (velocidade, densidade demográfica, energia elétrica etc.).   |
| EM13MAT407 | Interpretar e comparar conjuntos de dados estatísticos por meio de diferentes diagramas e gráficos (histograma, de caixa ( <i>box-plot</i> ), de ramos e folhas, entre outros), reconhecendo os mais eficientes para sua análise.  |

Fonte: Adaptado de Mato Grosso (2020) e Brasil (2017).

## Objetivos

Sobre as habilidades, é essencial que o estudante saiba interpretar a realidade ao seu redor e o impacto causado pela Covid-19 em Mato Grosso, para isso espera-se que ele também seja capaz de identificar e seguir o melhor caminho para a construção do seu conhecimento, por meio da apresentação dos seguintes objetivos:

- a) Compreender o conceito de taxa de variação por meio do estudo do número de casos de Covid-19 registrados em Mato Grosso;
- b) Identificar e descrever situações que envolvam taxas de variação para resolver problemas e saber tirar inferências que auxiliem no entendimento do mundo ao seu redor;
- c) Coletar, organizar e interpretar informações por meio de tabelas e gráficos com o auxílio de planilhas eletrônicas;
- d) Realizar cálculos de taxa de variação média e instantânea de modo manual e por meio de algoritmos recursivos inseridos nas planilhas de cálculo.

## Metodologia

Essa proposta didática terá a modelagem matemática como metodologia central. Ao todo foram elencadas 10 atividades que contemplam uma ou mais etapas do processo de

modelagem e optou-se por trabalhar conforme o caso 2 citado na seção 1.1.3 apresentado por Barbosa (2004), sendo a escolha do tema e a formulação do problema inicial serão realizados pelo(s) professor(res) e o estudante terá participação direta na coleta de dados e na investigação e solução do problema. Conforme apresentado pelo autor, os estudantes serão mais responsabilizados pela condução das etapas de modelagem.

### **Recursos didáticos**

Para o desenvolvimento das atividades serão necessários: computador (recomenda-se, de preferência, utilização o laboratório de informática com um computador por estudante); retroprojektor, lápis e papel; quadro e/ou lousa interativa.

### **Avaliação**

Como os objetivos foram definidos a partir da Base Nacional Comum Curricular e no Documento Referência Curricular de Mato Grosso a avaliação da proposta terá a mesma ótica e ocorrerá sob os fundamentos da avaliação formativa. Segundo Luckesi (2014) este formato avaliativo busca informar o professor e o estudante sobre o resultado da aprendizagem, durante o desenvolvimento das atividades escolares, mostrando como os estudantes estão se modificando em direção aos objetivos. Logo, tem-se a possibilidade de localizar deficiências na organização do ensino-aprendizagem sobre o conceito de taxa de variação possibilitando reformulações no mesmo e assegurar o alcance dos objetivos.

A avaliação e registro da aprendizagem pode ser feita de forma contínua e informal na sala de aula/laboratório de informática atentando-se à participação e questionamentos dos estudantes. Além disso, é importante atentar-se ao desenvolvimento e comentários sobre a situação inicial de forma a obter um retorno sobre o andamento do tema. Busca-se também avaliar o desenvolvimento das atividades aplicadas sugeridas a seguir.

## **4.2 SUGESTÕES DE ATIVIDADES**

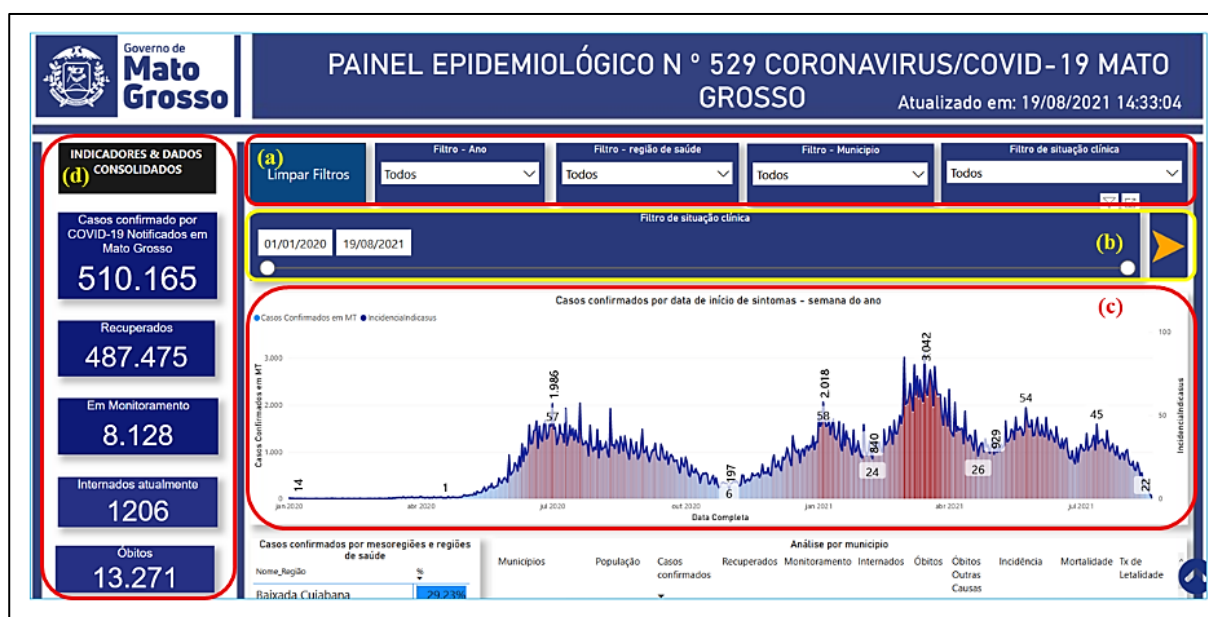
Nessa seção estão algumas sugestões de atividades voltadas para o estudo e descrição do avanço da Covid-19 em Mato Grosso.

4.2.1 Atividade 1: Conhecendo o painel Covid-19 de Mato Grosso

Nesta atividade será realizada uma breve apresentação sobre avanço da Covid-19 em Mato Grosso por meio dos dados disponibilizados pela Secretaria de Estado de Saúde de Mato Grosso através do Painel Covid-19 e que servirá, posteriormente, como base para coleta de dados das próximas atividades. Essa atividade contempla as habilidades EM13MAT101 e EM13MAT407 da BNCC e será desenvolvida pelo professor juntamente com a participação estudantes, sendo atribuída a Caso 1 na etapa da coleta de dados apresentado por Barbosa (2004).

Na Figura 25 é apresentada uma visualização inicial do Painel Covid-19 que pode ser dividida inicialmente em 4 partes: (a) faixa de filtro, os dados podem se organizado por ano, grandes regiões, município e situação clínica; (b) faixa de datas, sendo possível selecionar os dados em um determinado intervalo; (c) visualização dos novos casos confirmados por data de início de sintomas; (d) dados consolidados acumulados até data selecionada.

Figura 25: Painel epidemiológico interativo Covid-19 Mato Grosso



Fonte: SES-MT, 2021.

Uma sugestão é que o professor use um projetor para compartilhar simultaneamente o painel, assim todos os estudantes poderão acompanhar a apresentação. Além disso, o ideal é que se realize alguns filtros para que essa manipulação do painel seja feita na prática. Por exemplo, ao adicionar os filtros Ano = 2020 e Região de saúde = Teles Pires pode-se comentar quais os municípios que compõem a região do Teles Pires, qual a população estimada

para 2020, além é claro, de visualizar do número de casos confirmados, recuperados e óbitos por município até o fim do ano de 2020 por meio do gráfico representativo e/ou tabelas de dados, conforme apresentado na Figura 26.

Figura 26: Região do Teles Pires e a situação epidemiológica até o fim de 2020

| Municípios              | População      | Casos confirmados | Recuperados   | Monitoramento | Internados | Óbitos    | Óbitos Outras Causas | Incidência      | Mortalidade  | Tx de Letalidade |
|-------------------------|----------------|-------------------|---------------|---------------|------------|-----------|----------------------|-----------------|--------------|------------------|
| Sinop                   | 142.996        | 9.811             | 9.684         |               |            | 1         | 126                  | 6.861,03        | 0,881        | 1,28%            |
| Sorriso                 | 90.313         | 8.911             | 8.808         |               |            | 8         | 95                   | 9.866,80        | 1,052        | 1,07%            |
| Lucas do Rio Verde      | 65.534         | 7.726             | 7.650         |               |            |           | 76                   | 11.789,30       | 1,160        | 0,98%            |
| Nova Mutum              | 45.378         | 3.832             | 3.796         |               |            | 34        | 2                    | 8.444,62        | 0,749        | 0,89%            |
| Tapurah                 | 13.705         | 1.028             | 1.015         |               |            |           | 13                   | 7.500,91        | 0,949        | 1,26%            |
| Ipiranga do Norte       | 7.667          | 649               | 644           |               |            |           | 3                    | 8.464,85        | 0,391        | 0,46%            |
| Vera                    | 11.309         | 623               | 616           |               |            | 1         | 6                    | 5.508,89        | 0,531        | 0,96%            |
| Cláudia                 | 12.149         | 609               | 603           |               |            |           | 6                    | 5.012,76        | 0,494        | 0,99%            |
| Feliz Natal             | 14.192         | 404               | 394           |               |            |           | 10                   | 2.846,67        | 0,705        | 2,48%            |
| Nova Ubiratã            | 11.982         | 297               | 289           |               |            |           | 8                    | 2.478,72        | 0,668        | 2,69%            |
| Santa Carmem            | 4.525          | 284               | 279           |               |            |           | 5                    | 6.276,24        | 1,105        | 1,76%            |
| União do Sul            | 3.525          | 130               | 127           |               |            |           | 3                    | 3.687,94        | 0,851        | 2,31%            |
| Itanhangá               | 6.737          | 69                | 68            |               |            | 1         |                      | 1.024,19        | 0,148        | 1,45%            |
| Santa Rita do Trivelato | 3.429          | 33                | 32            |               |            |           | 1                    | 962,38          | 0,292        | 3,03%            |
| <b>Total</b>            | <b>433.441</b> | <b>34.406</b>     | <b>34.005</b> |               |            | <b>10</b> | <b>387</b>           | <b>7.937,87</b> | <b>0,893</b> | <b>1,12%</b>     |

Fonte: SES-MT, 2021.

#### 4.2.2 Atividade 2: Verificando a incidência da doença

Essa atividade contempla as habilidades EM13MAT101, EM13MAT104 e EM13MAT407 da BNCC e será desenvolvida pelo professor juntamente com a participação estudantes, sendo atribuída a Caso 1 na etapa da coleta de dados apresentado por Barbosa (2004).

Na coluna em azul e roxo geradas no exercício anterior é apresentada a incidência da doença e a taxa de letalidade em cada município da região do Teles Pires, respectivamente (Figura 26). O município de Sinop é o mais populoso da região, porém a incidência da doença é a 6ª maior, ficando atrás de Lucas do Rio Verde, Sorriso, Ipiranga do Norte, Nova Mutum e Tapurah. Mas afinal, o que significa esse valor? Como ele é calculado? Se o município apresentar uma população menor, a incidência da doença será menor?

**Solução:**

De acordo com a Organização Pan-Americana da Saúde (2010) a incidência de uma doença é a medida do número de casos novos, chamados casos incidentes, originados de uma população em risco de sofrê-la, durante um período de tempo determinado. A incidência indica a velocidade de ocorrência de uma doença na população e, conseqüentemente, é um estimador do risco absoluto de vir a padecer da mesma. Para calculá-la usa-se o seguinte argumento:

$$Incidência = \frac{n^{\circ} \text{ de novos casos do período}}{n^{\circ} \text{ total de indivíduos em risco no início do período}} \times fator$$

Nesse cálculo é de suma importância deixar bem claro qual é a população e a que período essas informações se refere. Pode-se relacionar com a população inteira de uma região, um grupo específico que estaria exposto ao problema, ou ainda, uma determinada população tomada em tempos diferentes. O *fator* será uma potência de base 10 que deixará o resultado mais coerente de ser apresentado, por exemplo, 0,15 novos casos a cada 1000 habitantes podem ser melhor apresentados como 15 novos casos a cada 100.000 habitantes.

Um exemplo de constatação que pode ser feita com estudantes: a população de Sinop e Sorriso são de, respectivamente, 142.996 e 90.313 habitantes. Pelos dados apresentados no Painel Covid-19 até o final do ano de 2020, o número de pessoas que foram contaminadas em Sinop foi de 9.881 e Sorriso 8.991. Calculando a incidência da doença em cada município pode-se verificar que o valor obtido utilizando um *fator* igual a  $10^5$  e as etapas do cálculo podem ser visualizada no Quadro 4.

Quadro 4: Cálculo de incidência da Covid-19 em dois municípios de Mato Grosso com base nos dados da SES-MT até o fim de 2020.

| Sinop   | Sorriso  |
|---|--|
| $Incidência = \frac{9.881}{142.996} \times fator$ | $Incidência = \frac{8.991}{90.313} \times fator$ |
| $= 0,0686103 \times fator$                        | $= 0,986680 \times fator$                        |
| $= 0,0686103 \times 10^5$                         | $= 0,986680 \times 10^5$                         |
| $= 6.861,03$                                      | $= 9.866,80$                                     |

Fonte: Elaborado pelo autor.

Evidente que se um município apresentar uma população menor não necessariamente a incidência da doença será menor. Isso pode ser facilmente percebido por meio do Quadro 4 no qual a cidade de Sorriso, apesar de ter uma população menor, apresentou uma incidência maior quando comparado com Sinop. Deve-se ressaltar com o estudante que fator  $10^5 = 100.000$ , por exemplo, mostra que existem 6.861 casos confirmados a cada 100.000 habitantes em Sinop, com base nos dados disponibilizados até o final de 2020.

#### 4.2.3 Atividade 3: Verificando a letalidade da doença

Essa atividade contempla as habilidades EM13MAT101, EM13MAT104 e EM13MAT407 da BNCC e será desenvolvida pelo professor juntamente com a participação estudantes, sendo atribuída a Caso 1 na etapa da coleta de dados apresentado por Barbosa (2004).

Ainda com base na Figura 26 é possível visualizar que as cidades de Nova Ubitatã e Santa Rita de Trivelato possuem as maiores taxas de letalidade. Discuta com um colega como esse valor é calculado. Alguns questionamentos que podem ser lançados à turma para conectar o tema aos devidos cálculos: Se taxa de letalidade é a maior, então significa que nesses municípios o número de óbitos registrados foram os maiores? Se a taxa de letalidade é a menor, então o número de habitantes do município em questão será o menor?

#### Solução:

Nesse momento o estudante deve visualizar o número de óbitos acumulados como uma parte da população, assim será possível resgatar o conceito de razão entre dois números. Feito isso, pode-se realizar o cálculo para verificar os valores referentes à taxa de letalidade nos municípios de Nova Ubitatã e Santa Rita de Trivelato, conforme apresentado no Quadro 5.

Quadro 5: Cálculo da taxa de letalidade da Covid-19 em dois municípios de Mato Grosso com base nos dados da SES-MT até o fim de 2020.

| Nova Ubitatã  | Santa Rita de Trivelato  |
|---|--|
| $Taxa_{letalidade} = \frac{8}{297}$<br>$= 0,0269$<br>$= 2,29\%$ | $Taxa_{letalidade} = \frac{1}{33}$<br>$= 0,0303$<br>$= 3,03\%$ |

Fonte: Elaborado pelo autor.

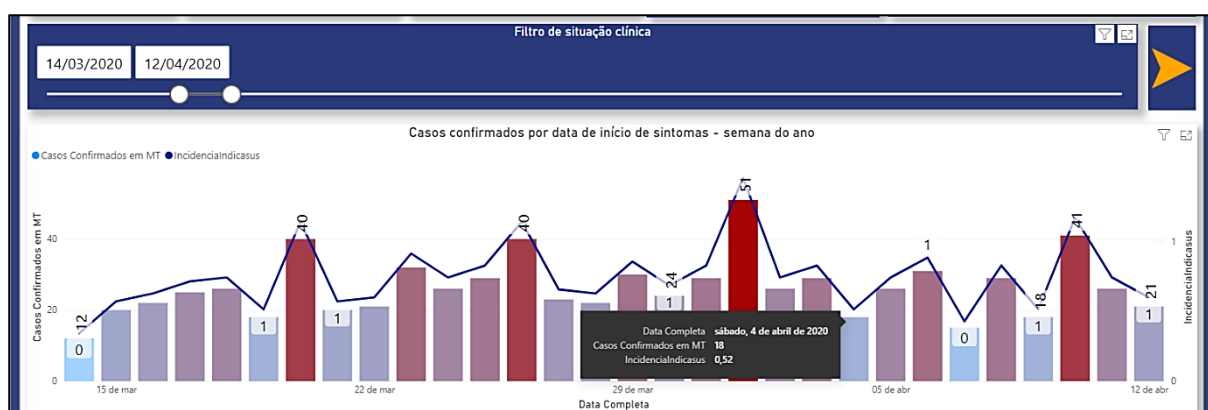
Nota-se que Santa Rita de Trivelato apresentou uma taxa de letalidade maior que Nova Ubiratã, porém a quantidade de óbitos registrados até o final de 2020 foi menor. Isso significa que a taxa de letalidade maior não implicará necessariamente em número de óbitos registrados maior ao comparar com outros municípios. A razão entre o número de óbitos registrados e o número de casos confirmados no intervalo dado leva em consideração apenas a parte analisada em relação ao todo analisado, fazendo com que a ação comparativa seja evidenciada pelo valor dessa razão.

#### 4.2.4 Atividade 4: Estudo do avanço dos casos confirmados de Covid-19 em Mato Grosso nos primeiros 30 dias

Essa atividade contempla as habilidades EM13MAT101, EM13MAT101 e EM13MAT104 da BNCC e será desenvolvida pelo professor juntamente com a participação estudantes, sendo atribuída a Caso 2 na etapa da coleta de dados apresentado por Barbosa (2004).

Nessa atividade será realizado um estudo sobre os primeiros 30 dias após o primeiro caso ser registrados. Na barra de tempo, selecione a data 14 de março como início e 12 de abril como fim (veja a Figura 27). Qual o maior valor registrado em relação ao número de casos confirmados no estado de Mato Grosso? Em que dia esse registro ocorreu? Qual o número total de casos registrados nos primeiros 30 dias?

Figura 27: Situação de Mato Grosso de 14 de março como início e 12 de abril de 2020



Fonte: SES-MT, 2021.

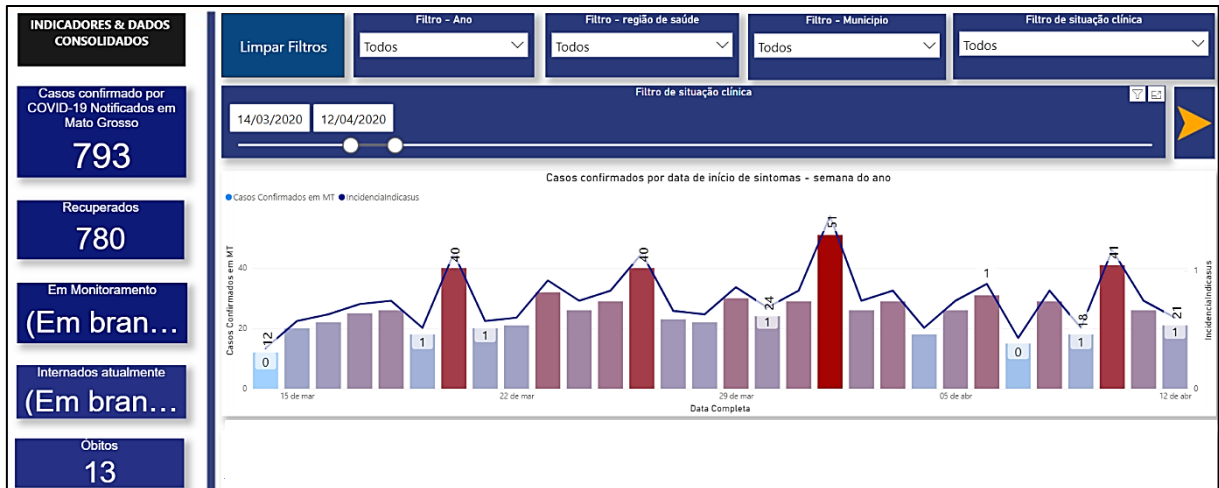
#### Solução:

Nesse momento o estudante deve visualizar os valores por meio de uma combinação de gráficos de linhas e barras. Para facilitar, ao passar o cursor *mouse* em cada barra vertical o



estudante poderá visualizar o valor registrado em cada dia e verificar que: o maior valor foi de 51 casos registrados no dia 01 de abril de 2020 e o total de casos registrados até o dia 12 foi de 793 casos, sendo estes obtidos pela soma dos valores diários. O estudante pode visualizar esse valor no próprio Painel Interativo, pois, ao selecionar um filtro de datas, os dados consolidados são atualizados para o intervalo de referência, veja a Figura 28 a seguir.

Figura 28: Dados consolidados no intervalo de 14 de março como início e 12 de abril de 2020



Fonte: SES-MT, 2021.

4.2.5 Atividade 5: Calculando as diferenças de casos diários a partir dos dados acumulados confirmados para os primeiros 18 dias.

Essa atividade contempla as habilidades EM13MAT101, EM13MAT104 e EM13MAT407 da BNCC e será desenvolvida pelo professor juntamente com a participação estudantes, sendo atribuída a Caso 2 na etapa da coleta de dados apresentado por Barbosa (2004).

Com base nos dados apresentados no painel epidemiológico de Mato Grasso, qual a diferença entre o número de casos em relação ao dia anterior? Qual a diferença mínima no intervalo analisado? Quantas vezes essa diferença ocorreu? Qual a diferença máxima no intervalo analisado? Quantas vezes essa diferença ocorreu?

**Solução:**

Nessa atividade o estudante deve realizar a coleta de dados referentes ao número de casos acumulados confirmados nos primeiros 18 dias desde o primeiro registro e realizar a

organização no quadro a seguir. Além disso, deverá calcular manualmente as diferenças do número de casos acumulados confirmados em cada dia em relação ao dia anterior. Nesta situação a diferença obtida em cada linha já foi inserida diretamente no quadro anterior e a maior variação observada foi de 7 casos registrada no 16º dia. Já a menor diferença foi de 0 casos, registrados em 7 dos 18 dias analisados. O estudante deve perceber que os resultados obtidos se referem ao número de casos confirmados em cada dia.

No Quadro 6 é apresentado os casos acumulados confirmados nos primeiros 18 dias desde o primeiro registro com base nos dados apresentados pela Secretaria de Estado de Saúde de Mato Grosso.

Quadro 6: Cálculo da variação simples em relação aos casos acumulados confirmados nos primeiros 18 dias a partir do primeiro caso

| $t$ | $I_{a_t}$ | $\Delta I = I_{a_t} - I_{a_{t-1}}$ | $t$ | $I_{a_t}$ | $\Delta I = I_{a_t} - I_{a_{t-1}}$ |
|-----|-----------|------------------------------------|-----|-----------|------------------------------------|
| 0   | 1         | 1                                  | 9   | 9         | 2                                  |
| 1   | 1         | 0                                  | 10  | 11        | 0                                  |
| 2   | 3         | 2                                  | 11  | 11        | 0                                  |
| 3   | 4         | 1                                  | 12  | 11        | 3                                  |
| 4   | 6         | 2                                  | 13  | 14        | 0                                  |
| 5   | 7         | 1                                  | 14  | 14        | 0                                  |
| 6   | 9         | 2                                  | 15  | 14        | 4                                  |
| 7   | 9         | 0                                  | 16  | 18        | 7                                  |
| 8   | 9         | 0                                  | 17  | 25        | 3                                  |

Fonte: Elaborado pelo autor.

O professor deve, durante a coleta de dados e os devidos cálculos, comentar as notações atribuídas a cada variável. Neste caso adotou-se as seguintes notações:  $t$  é a quantidade de dias transcorridos partindo  $t = 0$  como a data do primeiro registro;  $I_{a_t}$  é o número de casos acumulados confirmados no tempo  $t$ ;  $I_{a_{t-1}}$  é o número de casos acumulados confirmados no dia anterior;  $\Delta I = I_{a_t} - I_{a_{t-1}}$  é a variação simples entre o número de casos acumulados em um determinado dia e o dia anterior.

#### 4.2.6 Atividade 6: Calculando as diferenças de casos diários a partir dos dados acumulados confirmados para os primeiros 100 dias utilizando o Excel.

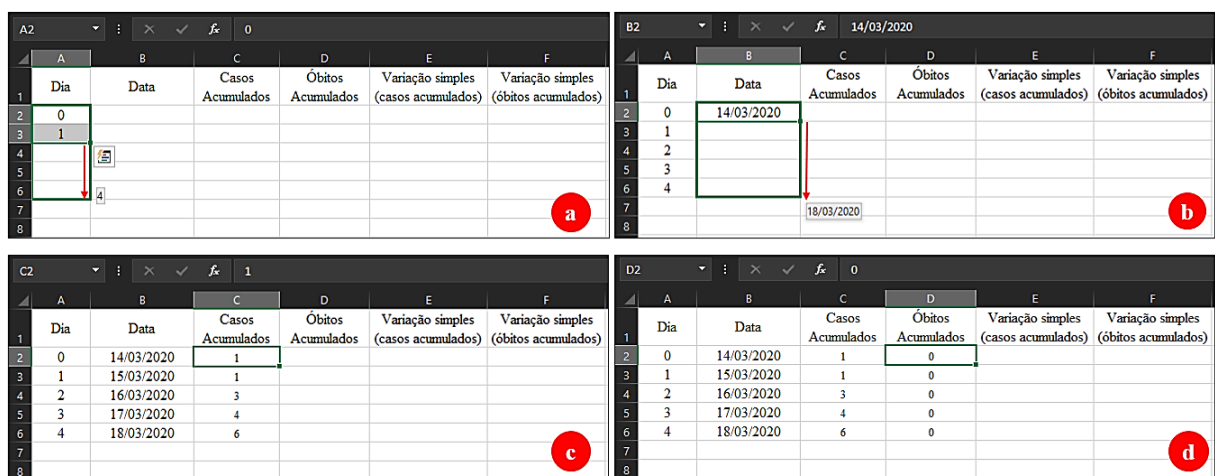
Essa atividade contempla as habilidades EM13MAT101, EM13MAT104, EM13MAT203 e EM13MAT407 da BNCC e será desenvolvida pelo professor juntamente com a participação estudantes, sendo atribuída a Caso 3 na etapa da coleta de dados apresentado por Barbosa (2004).

Com base nos dados disponibilizados nos 100 primeiros dias, construa uma planilha eletrônica com o número acumulados de casos de Covid-19 confirmados e o número acumulado de óbitos desde o primeiro registro. Programe e utilize a planilha eletrônica para realizar o cálculo de variação simples do número de casos acumulados confirmados e do número acumulado de óbitos em cada dia nos primeiros 100 dias de infecção em Mato Grosso. Além disso, identifique a maior variação, o dia de ocorrência e quantos dias transcorreram desde o primeiro registro (para auxiliar na execução dessa atividade modelo foi disponibilizado no APÊNDICE C).

**Solução:**

O primeiro passo para realizar a tabulação dos dados é preparar a planilha eletrônica para recebê-los. Assim, uma sugestão é apresentada na Figura 29, sendo que: na *coluna A* serão inseridos os dias transcorridos desde o primeiro registro; na *coluna B* serão inseridas as datas a partir do dia 14 de março de 2020; na *coluna C* será inserido o número de casos acumulados confirmados em cada dia; na *coluna D* será inserido o número de óbitos acumulados em cada dia; a *coluna E* será programada para calcular a variação simples do número de casos acumulados confirmados em cada dia em relação ao dia anterior; a *coluna F* será programada para calcular a variação simples do número de óbitos acumulados em cada dia em relação ao dia anterior.

Figura 29: Modelo de planilha eletrônica para cálculo da variação simples



Fonte: Elaborado pelo autor.

Para preencher *coluna A* o estudante pode inserir as *células A2* e *A3* com os tempos 0 e 1, respectivamente, selecioná-las e arrastar para gerar o preenchimento automático até o dia 99 (lembrando que os dados iniciam no dia  $t = 0$ ), conforme apresentado Figura 29a. O mesmo pode ser realizado na *célula B2*, preenchendo com a data 14/03/2020 e arrastando até a última linha em análise (Figura 29b). Os dados referentes ao número de casos acumulados confirmados e o número acumulado de óbitos em cada dia nos primeiros 100 dias devem ser inseridos manualmente nas *colunas C* e *D*, respectivamente, conforme apresentados na Figura 29c e Figura 29d.

A programação da *coluna E* é relativamente simples, primeiramente deve-se entender que a *célula E2* será igual a *célula C2*, pois no dia anterior não há registros de casos confirmados, sendo assim, basta digitar  $=C2$  e pressionar *enter* (Figura 30a). A *célula E3* é programada de modo recursivo, basta digitar:  $=C3 - C2$  (Figura 30b). Para programar as demais *células da coluna E* basta selecionar a *célula E3* e arrastar até o último dia analisado. A programação da *coluna F* ocorre de modo análogo, conforme apresentado na Figura 30c e Figura 30d.

Figura 30: Modelo de planilha eletrônica para cálculo da variação simples

The figure consists of four screenshots of an Excel spreadsheet, labeled a, b, c, and d, showing the step-by-step setup of formulas for calculating simple variation in cumulative cases and deaths.

**Table a:** Shows the initial data entry. The formula bar shows  $=C2$ . The spreadsheet shows columns A (Dia), B (Data), C (Casos Acumulados), D (Óbitos Acumulados), E (Variação simples (casos acumulados)), and F (Variação simples (óbitos acumulados)). Row 2 has values 0, 14/03/2020, 1, 0, and the formula  $=C2$  is entered in cell E2.

**Table b:** Shows the recursive formula for cell E3. The formula bar shows  $=C3-C2$ . The spreadsheet shows the formula  $=C3-C2$  entered in cell E3.

**Table c:** Shows the recursive formula for cell F2. The formula bar shows  $=D2$ . The spreadsheet shows the formula  $=D2$  entered in cell F2.

**Table d:** Shows the recursive formula for cell F3. The formula bar shows  $=D3-D2$ . The spreadsheet shows the formula  $=D3-D2$  entered in cell F3.

Fonte: Elaborado pelo autor.

O estudante perceberá que a quantidade de dados é relativamente grande quando comparada com a atividade 1, na qual os cálculos foram realizados manualmente. Sendo assim os cálculos programados de modo recursivo facilitam a obtenção do número de casos confirmados em cada dia.

Além disso, o uso das planilhas eletrônicas pode facilitar a análise dos dados, pode-se programar algumas *células* para identificar valores específicos dos dados coletados, como por exemplo o maior valor para variação no número de casos acumulados confirmados. Isso pode

ser visualizado na Figura 31 com a utilização das funções *MAIOR*, *ÍNDICE* e *CORRESP* para localizar tais valores.

Figura 31: Identificação da maior variação por meio de células programadas

| G | H                       | I     | J                | K                            | L |
|---|-------------------------|-------|------------------|------------------------------|---|
|   |                         | Valor | Data de registro | Quant. de dias transcorridos |   |
|   | Maior variação (casos)  | 805   | 19/06/2020       | 96                           |   |
|   | Maior variação (Óbitos) | 29    | 21/06/2020       | 99                           |   |
|   |                         |       |                  |                              |   |
|   |                         |       |                  |                              |   |

Fonte: Elaborado pelo autor.

Existe algumas formas de programar as células citadas na Figura 31 para retornarem os valores desejados, como sugestão pode-se utilizar:

- $I2: = \text{MAIOR}(E: E; 1)$  – Retornará o maior valor na *coluna E* na qual foi calculada a variação simples no número de casos acumulados confirmados.
- $J2: = \text{ÍNDICE}(B: B; \text{CORRESP}(I2; E: E; 0); 1)$  – Irá procurar o valor inserido na *célula I2* na *coluna E* e irá retornar o valor correspondente na mesma linha na *coluna B* na qual estão inseridas as datas de ocorrência.
- $K2: = \text{ÍNDICE}(A: A; \text{CORRESP}(I2; E: E; 0); 1)$  – Irá procurar o valor inserido na *célula I2* na *coluna E* e irá retornar o valor correspondente na mesma linha na *coluna A* na qual estão inseridos os dias transcorridos.

De modo análogo pode-se programar algumas células para identificar a maior variação no número acumulado de óbitos no tempo estipulado, o dia de ocorrência e a quantidade de dias transcorridos.

- $I3: = \text{MAIOR}(F: F; 1)$  - Retornará o maior valor na *coluna F* na qual foi calculado a variação simples no número de óbito acumulados em cada dia.
- $J3: = \text{ÍNDICE}(B: B; \text{CORRESP}(I3; F: F; 0); 1)$  - – Irá procurar o valor inserido na *célula I3* na *coluna F* e irá retornar o valor correspondente na mesma linha na *coluna B* na qual estão inseridas as datas de ocorrência.
- $K3: = \text{ÍNDICE}(A: A; \text{CORRESP}(I3; F: F; 0); 1)$  – Irá procurar o valor inserido na *célula I3* na *coluna E* e retornar o valor correspondente de mesma linha na *coluna A* na qual estão inseridos os dias transcorridos.

4.2.7 Atividade 7: Calculando a variação média semanal a partir dos dados acumulados utilizando planilhas eletrônicas

Essa atividade contempla as habilidades EM13MAT101, EM13MAT104, EM13MAT203 e EM13MAT407 da BNCC e será desenvolvida pelo professor juntamente com a participação estudantes, sendo atribuída a Caso 3 na etapa da coleta de dados apresentado por Barbosa (2004).

Agrupe os dados semanalmente e calcule a variação média semanal referente ao número de casos acumulados confirmados e do número acumulado de óbitos nas primeiras 46 semanas e verifique qual semana epidemiológica registrou o maior valor em relação ao número de infectados e óbitos. Use uma programação semelhante à utilizada na situação anterior para identificar a maior variação média em cada caso.

**Solução:**

Para agrupar os dados acumulados semanalmente pode-se utilizar vários recursos disponíveis no *Excel*, uma sugestão é utilizar os dados acumulados diariamente, juntamente com as funções *ÍNDICE* e *CORRESP*. Essas funções não foram desenvolvidas propriamente para somar valores, porém podem ser utilizadas em conjunto com outros recursos para facilitar a programação pelo estudante. Inicialmente pode-se tomar os dados acumulados inseridos na planilha disponibilizadas no APÊNDICE C.

Figura 32: Modelo de planilha eletrônica para cálculo da variação semanal

|    | A   | B          | C                | D                 | E      | F          | G          | H                          | I                      | J                                | K                           | L                       | M                                 |
|----|-----|------------|------------------|-------------------|--------|------------|------------|----------------------------|------------------------|----------------------------------|-----------------------------|-------------------------|-----------------------------------|
| 1  | Dia | Data       | Casos Acumulados | Óbitos Acumulados | Semana | Início     | Fim        | Casos acumulados (Semanal) | Novos casos por semana | Variação Média (Casos - Semanal) | Óbitos acumulados (Semanal) | Novos óbitos por semana | Variação Média (Óbitos - Semanal) |
| 2  | 0   | 14/03/2020 | 1                | 0                 | 1      | 14/03/2020 | 20/03/2020 | 9                          | 9                      | 1,29                             | 0                           | 0                       | 0,00                              |
| 3  | 1   | 15/03/2020 | 1                | 0                 | 2      | 21/03/2020 | 27/03/2020 | 14                         | 5                      | 0,71                             | 0                           | 0                       | 0,00                              |
| 4  | 2   | 16/03/2020 | 3                | 0                 | 3      | 28/03/2020 | 03/04/2020 | 44                         | 30                     | 4,29                             | 1                           | 1                       | 0,14                              |
| 5  | 3   | 17/03/2020 | 4                | 0                 | 4      | 04/04/2020 | 10/04/2020 | 112                        | 68                     | 9,71                             | 3                           | 2                       | 0,29                              |
| 6  | 4   | 18/03/2020 | 6                | 0                 | 5      | 11/04/2020 | 17/04/2020 | 162                        | 50                     | 7,14                             | 5                           | 3                       | 0,29                              |
| 7  | 5   | 19/03/2020 | 7                | 0                 | 6      | 18/04/2020 | 24/04/2020 | 241                        | 79                     | 11,29                            | 8                           | 5                       | 0,43                              |
| 8  | 6   | 20/03/2020 | 9                | 0                 | 7      | 25/04/2020 | 01/05/2020 | 320                        | 79                     | 11,29                            | 10                          | 5                       | 0,29                              |
| 9  | 7   | 21/03/2020 | 9                | 0                 | 8      | 02/05/2020 | 08/05/2020 | 461                        | 141                    | 20,14                            | 13                          | 8                       | 0,43                              |
| 10 | 8   | 22/03/2020 | 9                | 0                 | 9      | 09/05/2020 | 15/05/2020 | 793                        | 332                    | 47,43                            | 27                          | 19                      | 2,00                              |
| 11 | 9   | 23/03/2020 | 9                | 0                 | 10     | 16/05/2020 | 22/05/2020 | 1272                       | 479                    | 68,43                            | 38                          | 19                      | 1,57                              |
| 12 | 10  | 24/03/2020 | 11               | 0                 | 11     | 23/05/2020 | 29/05/2020 | 2259                       | 987                    | 141,00                           | 56                          | 37                      | 2,57                              |
| 13 | 11  | 25/03/2020 | 11               | 0                 | 12     | 30/05/2020 | 05/06/2020 | 3564                       | 1305                   | 186,43                           | 90                          | 53                      | 4,86                              |
| 14 | 12  | 26/03/2020 | 11               | 0                 | 13     | 06/06/2020 | 12/06/2020 | 5360                       | 1796                   | 256,57                           | 179                         | 126                     | 12,71                             |
| 15 | 13  | 27/03/2020 | 14               | 0                 | 14     | 13/06/2020 | 19/06/2020 | 8696                       | 3336                   | 476,57                           | 320                         | 194                     | 20,14                             |
| 16 | 14  | 28/03/2020 | 14               | 0                 | 15     | 20/06/2020 | 26/06/2020 | 13378                      | 4682                   | 668,86                           | 502                         | 308                     | 26,00                             |
| 17 | 15  | 29/03/2020 | 14               | 0                 | 16     | 27/06/2020 | 03/07/2020 | 19510                      | 6132                   | 876,00                           | 738                         | 430                     | 33,71                             |
| 18 | 16  | 30/03/2020 | 18               | 0                 | 17     | 04/07/2020 | 10/07/2020 | 27596                      | 8086                   | 1155,14                          | 1015                        | 585                     | 39,57                             |
| 19 | 17  | 31/03/2020 | 25               | 0                 | 18     | 11/07/2020 | 17/07/2020 | 32451                      | 4855                   | 693,57                           | 1305                        | 720                     | 41,43                             |
| 20 | 18  | 01/04/2020 | 28               | 0                 | 19     | 18/07/2020 | 24/07/2020 | 42582                      | 10131                  | 1447,29                          | 1570                        | 850                     | 37,86                             |
| 21 | 19  | 02/04/2020 | 41               | 0                 | 20     | 25/07/2020 | 31/07/2020 | 52012                      | 9430                   | 1347,14                          | 1847                        | 997                     | 39,57                             |
| 22 | 20  | 03/04/2020 | 44               | 1                 | 21     | 01/08/2020 | 07/08/2020 | 62378                      | 10366                  | 1480,86                          | 2099                        | 1102                    | 36,00                             |
| 23 | 21  | 04/04/2020 | 60               | 1                 | 22     | 08/08/2020 | 14/08/2020 | 72138                      | 9760                   | 1394,29                          | 2333                        | 1231                    | 33,43                             |
| 24 | 22  | 05/04/2020 | 60               | 1                 | 23     | 15/08/2020 | 21/08/2020 | 80853                      | 8715                   | 1245,00                          | 2544                        | 1313                    | 30,14                             |
| 25 | 23  | 06/04/2020 | 76               | 1                 | 24     | 22/08/2020 | 28/08/2020 | 90087                      | 9234                   | 1319,14                          | 2742                        | 1429                    | 28,29                             |
| 26 | 24  | 07/04/2020 | 78               | 1                 | 25     | 29/08/2020 | 04/09/2020 | 97501                      | 7414                   | 1059,14                          | 2923                        | 1494                    | 25,86                             |
| 27 | 25  | 08/04/2020 | 91               | 3                 | 26     | 05/09/2020 | 11/09/2020 | 104497                     | 6996                   | 999,43                           | 3092                        | 1598                    | 24,14                             |

Fonte: Elaborado pelo autor.

Na *coluna E* será inserido o tempo transcorrido em semana, para isso, basta selecionar a *célula E2* e utilizar a seguinte programação:

- $E2 := 1$  – Primeira semana epidemiológica.
- $E3: E2 + 1$  – Segunda semana epidemiológica
- Selecione *célula E3* e arraste até preencher a 46 semanas em estudo.

Na *coluna F* foram inseridos a data de início de cada semana e sua programação ocorreu da seguinte forma:

- $F2: = 14/03/2020$  – Data de início da primeira semana epidemiológica.
- $F3: = F2 + 7$  – Data de início da segunda semana epidemiológica.
- Selecione essa célula e arraste até preencher as 46 semanas em estudo.

A *coluna G* foi programada com a data de término de cada semana, sendo sua programação feita da seguinte forma:

- $G3: = F2 + 6$  – Data do término da primeira semana epidemiológica.
- Selecione *célula G3* e arraste até preencher as 46 semanas em estudo.

Como as datas de início e fim de cada semana foram programadas nas *colunas F* e *G*, respectivamente, pode-se agrupar os dados semanalmente por meio da função *ÍNDICE* para localizar e retornar um determinado valor procurado juntamente com a função *CORRESP* para localizar o valor correspondente de uma célula localizada na mesma linha e em outra coluna previamente determinada. Por exemplo, pode-se programar a *célula H2* para procurar o valor na *coluna B* (valores casos acumulados) que seja correspondente a data de fim da 1ª semana disponibilizado na *célula G2* e retornar um valor indicado na *coluna C*. A programação pode ser a seguinte:

- $H2: = \text{ÍNDICE}(C:C; \text{CORRESP}(G2; B:B; 0); 1)$  – Localiza o valor inserido na *célula G2* na *coluna B* e irá retornar o valor correspondente na mesma linha na *coluna C* onde estão inseridas as datas de ocorrência.

Para programar as próximas células basta selecioná-las e arrastar até a linha correspondente à 46ª semana, retornando o número de casos acumulados confirmados registrados no fim de cada semana. Para calcular variação média na *coluna G* pode-se programar da seguinte forma:

- $G2: = H2/7$
- $G3: = (H3-H2)/7$  (selecione essa célula e arraste até preencher as 46 semanas em estudo)

Para programar a *coluna J* e *K* para agrupar os dados acumulados semanalmente e calcular variação média, respectivamente, pode-se utilizar a seguinte programação:

→ J2: =ÍNDICE(D:D;CORRESP(G2;B:B;0);1)

→ K2: =J2/7

→ K3: =(J3-J2)/7

→ Selecione *célula K3* e arraste até preencher as 46 semanas em estudo.

*Comentários para o professor:* Para que esta atividade seja utilizada para ensinar e/ou revisar o conceito de taxa de variação média deve, em algum momento, formalizá-lo. Uma sugestão é que as notações e tal conceito sejam apresentados durante a programação da planilha fazendo um comparativo entre a fórmula para o cálculo manual e a programação realizada no *Excel*.

Quadro 7: Comparativo entre o conceito de taxa de variação e a programação no Excel

| Conceito de taxa de variação média  | Exemplo de programação no Excel  |
|---|--|
| <p>A <i>variação média</i> (ou taxa de variação média) é dada pela proporção entre as variações de <i>I</i> e de <i>t</i>, mostrando quanto variou <i>I</i> por unidade de <i>t</i></p> $\frac{\Delta I}{\Delta t} = \frac{I(t_2) - I(t_1)}{t_2 - t_1}$ | <p>A1: = <math>I_{a_0}</math> (número acumulado de infectados no tempo <math>t = 0</math>)</p> <p>A2: = <math>I_{a_7}</math> (número acumulado de infectados no tempo <math>t = 7</math>)</p> <p>B2: =(A2-A1)/(7-0) ou B2: =(A2-A1) /7</p> |

Fonte: Elaborado pelo autor.

4.2.8 Atividade 8: Calculando a incidência da Covid-19 semanal por meio de uma planilha eletrônica.

Essa atividade contempla as habilidades EM13MAT101, EM13MAT104, EM13MAT203, EM13MAT314 e EM13MAT407 da BNCC e será desenvolvida pelo professor juntamente com a participação estudantes, sendo atribuída a Caso 3 na etapa da coleta de dados apresentado por Barbosa (2004).

A partir dos dados agrupados semanalmente obtidos na atividade anterior, verifique a incidência da Covid-19 para os novos casos semanais nas primeiras 46 semanas, utilize um fator de 100.000. A partir dos resultados obtidos determine a maior incidência observada e qual a semana de registro.



**Solução:**

A atividade tem o objetivo de reutilizar os dados agrupados semanalmente obtidos na Atividade 10: Utilizando o modelo SIR para simular o avanço da pandemia em Mato Grosso e de retomar o cálculo da incidência da Covid-19 em cada uma das semanas epidemiológicas estudadas. Vale ressaltar com o estudante que na Atividade 2: Verificando a incidência da doença foi identificado que a incidência de uma doença é dada pelo produto da razão entre o número de novos casos e o número total de indivíduos em risco em um determinado período pelo fator de base 10 escolhido. Retomando a fórmula utilizada tem-se que:

$$Incidência = \frac{n^{\circ} \text{ de novos casos do período}}{n^{\circ} \text{ total de indivíduos em risco no início do período}} \times \text{fator}$$

O primeiro passo é retomar os dados agrupados semanalmente, para facilitar o desenvolvimento da atividade um modelo foi disponibilizado no APÊNDICE C. Em seguida deve-se inserir a fórmula para calcular recursivamente a incidência em cada semana, conforme apresentado na Figura 33.

Nas células B2 e B3 foram inseridos, respectivamente, os valores da população de Mato Grosso segundo a SES-MT e o fator a ser utilizado no cálculo. Nas colunas C, D e E foram inseridos o número, a data de início e fim de cada semana epidemiológica, respectivamente. Já nas colunas F e G foram inseridos números de acumulados de casos e quantidade de novos casos em cada semana.

Figura 33: Modelo de planilha eletrônica para o cálculo da incidência semanal da Covid-19 em Mato Grosso

|    | A     | B       | C      | D          | E          | F                          | G                     | H                                   |
|----|-------|---------|--------|------------|------------|----------------------------|-----------------------|-------------------------------------|
| 1  |       |         | Semana | Início     | Fim        | Casos acumulados (Semanal) | Novos Casos (Semanal) | Incidência (Novos Casos por semana) |
| 2  | N     | 3484466 | 1      | 14/03/2020 | 20/03/2020 | 9                          | 9                     | 0,25828922                          |
| 3  | Fator | 100000  | 2      | 21/03/2020 | 27/03/2020 | 14                         | 5                     | 0,14349438                          |
| 4  |       |         | 3      | 28/03/2020 | 03/04/2020 | 44                         | 30                    | 0,86096752                          |
| 5  |       |         | 4      | 04/04/2020 | 10/04/2020 | 112                        | 68                    | 1,95154318                          |
| 6  |       |         | 5      | 11/04/2020 | 17/04/2020 | 162                        | 50                    | 1,43498623                          |
| 7  |       |         | 6      | 18/04/2020 | 24/04/2020 | 241                        | 79                    | 2,26731077                          |
| 8  |       |         | 7      | 25/04/2020 | 01/05/2020 | 320                        | 79                    | 2,26736218                          |
| 9  |       |         | 8      | 02/05/2020 | 08/05/2020 | 461                        | 141                   | 4,04690274                          |
| 10 |       |         | 9      | 09/05/2020 | 15/05/2020 | 793                        | 332                   | 9,52926302                          |
| 11 |       |         | 10     | 16/05/2020 | 22/05/2020 | 1272                       | 479                   | 13,74985540                         |
| 12 |       |         | 11     | 23/05/2020 | 29/05/2020 | 2259                       | 987                   | 28,33606167                         |
| 13 |       |         | 12     | 30/05/2020 | 05/06/2020 | 3564                       | 1305                  | 37,47623275                         |
| 14 |       |         | 13     | 06/06/2020 | 12/06/2020 | 5360                       | 1796                  | 51,59582200                         |
| 15 |       |         | 14     | 13/06/2020 | 19/06/2020 | 8696                       | 3336                  | 95,88670193                         |
| 16 |       |         | 15     | 20/06/2020 | 26/06/2020 | 13378                      | 4682                  | 134,70396488                        |
| 17 |       |         | 16     | 27/06/2020 | 03/07/2020 | 19510                      | 6132                  | 176,65930682                        |

Fonte: Elaborado pelo autor.

O estudante deve atentar-se ao fato de que a população em risco de ser contaminada pela doença varia de semana para semana dado que os indivíduos infectados e aqueles que adquiram imunidade ou vieram a óbito são deixaram o grupo de indivíduos em risco. Sendo assim, pode-se inserir o cálculo da incidência na *coluna H* da seguinte forma:

- $H1: = G2/(\$B\$2)*\$B\$3$  – Número de novos casos na 1º semana dividido pela população em risco (nesse primeiro momento será dado pela população total). Ao final a razão é multiplicada pelo fator utilizado<sup>10</sup>.
- $H2: = G3/(\$B\$2 - F2)*\$B\$3$  – Número de novos casos na 2ª semana dividido pela população em risco (nesse caso será dado pela população total menos os indivíduos contaminados na 1º semana). Ao final a razão é multiplicada pelo fator utilizado.
- $H4: = G4/(\$B\$2 - F3)*\$B\$3$  – Número de novos casos na 3º semana dividido pela população em risco (nesse caso será dado pela população total menos os indivíduos contaminados nas duas semanas). Ao final a razão é multiplicada pelo fator utilizado.
- Selecione *célula H4* e arraste até preencher as 46 semanas em estudo.

Os resultados mostram que a maior incidência observada foi de aproximadamente 302, sendo registrada na 21ª semana epidemiológica. Outro fato que pode ser comentado com os estudantes é que em 17 semanas os valores observados foram menores quando comparados com os valores da semana anterior, podendo ser um indicativo de que alguma medida sanitária foi adotada.

#### 4.2.9 Atividade 9: Apresentando o modelo SIR para os estudantes.

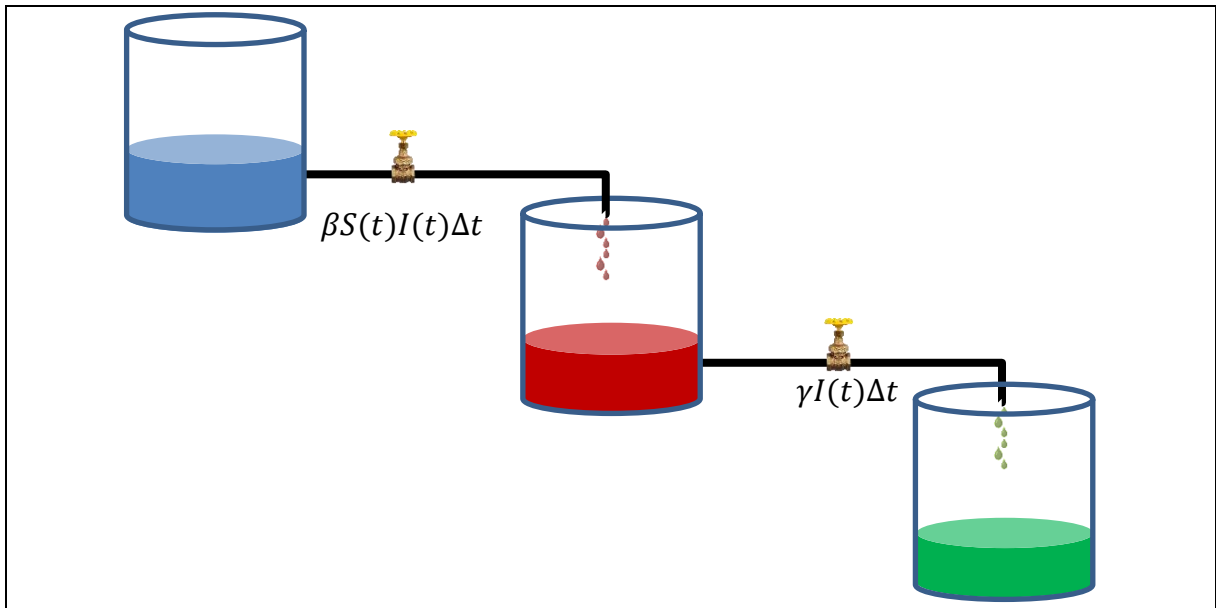
Essa atividade contempla as habilidades EM13MAT101, EM13MAT104, EM13MAT203, EM13MAT314 e EM13MAT407 da BNCC e será desenvolvida pelo professor, sendo atribuída a Caso 2 na etapa da coleta de dados apresentado por Barbosa (2004).

No estudo sobre a Covid-19 em Mato Grosso pode-se dividir a população em três compartimentos: **suscetíveis** (*S*) composto pelos indivíduos em risco e podem contrair a doença; **infectados** (*I*): indivíduos que podem transmitir a doença; **removidos** (*R*): indivíduos removidos, ou seja, casos de cura e também casos de óbito, conforme a Figura 34

---

<sup>10</sup> Na programação da *coluna H* alguns valores devem ser “travados” para não serem alterados ao copiar a fórmula para outras células. Para tanto foi utilizado a tecla F4 que transformou a notação *B2* em  $\$B\$2$  e *B3* em  $\$B\$3$  garantido o inalteração no processo de colagem.

Figura 34: Esquema de apresentação do modelo SIR por meio de compartimentos



Fonte: Elaborado pelo autor.

Na Figura 34 pode-se notar também que as equações que representam o modelo dependem inicialmente do número de indivíduos que são infectados durante o instante  $\Delta t$ . Considerando que a probabilidade de que uma pessoa contaminada infecte uma vulnerável aleatoriamente durante o tempo  $\Delta t$  seja  $\beta\Delta t$ , então a interrelação entre suscetíveis ( $S$ ) e ( $I$ ) infectados fornecerá o número esperado de novos infectados na população  $N$  durante o tempo  $\Delta t$ , sendo este calculado por  $\beta SI\Delta t$ .

Logo, o número de novos infectados no tempo  $t + \Delta t$  será dado por

$$I(t + \Delta t) = I(t) + \beta S(t)I(t)\Delta t, \quad (82)$$

Entretanto, é sabido que alguns indivíduos serão removidos desse compartimento por unidade de tempo. Assumindo-se a probabilidade de que um infectado se recupere durante o tempo  $\Delta t$  seja  $\gamma\Delta t$ , tem-se que o número total de indivíduos contaminados que se recuperam no tempo  $\Delta t$  é dado por  $I\gamma\Delta t$  e, portanto

$$I(t + \Delta t) = I(t) + \beta S(t)I(t)\Delta t - I(t)\gamma\Delta t, \quad (83)$$

ou ainda, subtraindo  $I(t)$  em ambos os membros da equação e dividindo toda equação por  $\Delta t$ ,

$$\frac{I(t + \Delta t) - I(t)}{\Delta t} = \beta SI - I(t)\gamma\Delta t. \quad (84)$$

Deve-se ainda deixar claro ao estudante que nessa interação o compartimento em que estão alocados a parte da população em risco de ser contaminada irá decair  $\beta SI\Delta t$  por unidade de tempo. Nesse momento é possível visualizar o número de indivíduos em risco será diferença entre a quantidade no instante  $t$  e a quantidade deslocada para o compartimento dos infectados, sendo representada pela equação (85).

$$S(t + \Delta t) = S(t) - \beta S(t)I(t)\Delta t, \quad (85)$$

ou ainda,

$$\frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t} = -\beta S(t)I(t). \quad (86)$$

De modo análogo pode-se interpretar que o número de indivíduos removidos no instante  $t + \Delta t$  como

$$R(t + \Delta t) = R(t) + \gamma I(t), \quad (87)$$

ou ainda,

$$\frac{R(t + \Delta t) - R(t)}{\Delta t} = \gamma I(t). \quad (88)$$

Nesse momento é ideal que o conceito de taxa de variação instantânea seja retomado, podendo defini-la como o valor limite obtido calculando-se a taxa média de uma função  $f$  em intervalos cada vez menores, em torno de um ponto. Considerando a função  $f$  dada por  $y = f(x)$ , em um ponto  $(x, f(x))$  a variação instantânea será dada por

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (89)$$

#### 4.2.10 Atividade 10: Utilizando o modelo SIR para simular o avanço da pandemia em Mato Grosso.

Essa atividade contempla as habilidades EM13MAT101, EM13MAT104, EM13MAT203, EM13MAT314 e EM13MAT407 da BNCC e será desenvolvida pelo professor

juntamente com a participação estudantes, sendo atribuída a Caso 3 na etapa da coleta de dados apresentado por Barbosa (2004).

Considerando a população de Mato Grosso como  $N = 3484466$  habitantes e o número de novos casos semanais obtidos na Atividade 7: Calculando a variação média semanal a partir dos dados acumulados utilizando , utilize o modelo SIR para simular a propagação da Covid-19 ao longo das 20 semanas epidemiológicas. Utilize as equações que representam o número de indivíduos suscetíveis, infectados e removidos para programar uma planilha eletrônica para realizar a representar o modelo. Além disso, utilize a taxa de infecção  $\beta = 0,46$  e a taxa de média de remoção como  $\gamma = 0,1$ .

**Solução:**

A justificativa pela escolha das 20 primeiras semanas está na proximidade do pico da curva de infecção dada na primeira onda em Mato Grosso. Com isso, será possível trabalhar com valores que não oscilam em grande quantidade, podendo facilitar a interpretação pelos estudantes. Valer ressaltar que o objetivo é compreender como o modelo SIR é utilizado e identificar alguns aspectos da modelagem matemática no estudo de doenças infecciosas.

Para simular a propagação da Covid-19 deve-se inicialmente inserir o modelo em uma planilha eletrônica. Um modelo de planilha com a programação do modelo SIR para ser utilizada com os estudantes foi disponibilizada no APÊNDICE C e foi baseada na construção adotada no processo de modelagem adotado no início do trabalho. Na Figura 35 é apresentada a planilha a ser utilizada na solução da atividade.

Figura 35: Modelo de planilha para simulação das 20 primeiras semanas epidemiológica em Mato Grosso

|    | A                       | B         | C       | D | E      | F       | G        | H        | I                            | J        | K        |
|----|-------------------------|-----------|---------|---|--------|---------|----------|----------|------------------------------|----------|----------|
| 1  | POPULAÇÃO E VARIAÇÃO dt |           |         |   |        | ATUAL   |          |          | TAXA DE VARIAÇÃO INSTANTÂNEA |          |          |
| 2  | N                       | 3484466   | pessoas |   | Semana | S       | I        | R        | dS                           | dI       | dR       |
| 3  | delta t                 | 1,0000000 | semana  |   | 1      | 3484457 | 9        | 0        | -5,06672                     | 4,16672  | 0,9      |
| 4  | VALORES INICIAIS        |           |         |   | 2      | 3484452 | 13,16672 | 0,9      | -7,412443                    | 6,095771 | 1,316672 |
| 5  | S1                      | 3484457   | pessoas |   | 3      | 3484445 | 19,26249 | 2,216672 | -10,84414                    | 8,917895 | 1,926249 |
| 6  | I1                      | 9         | pessoa  |   | 4      | 3484434 | 28,18039 | 4,142921 | -15,86457                    | 13,04654 | 2,818039 |
| 7  | R1                      | 0         | pessoa  |   | 5      | 3484418 | 41,22692 | 6,96096  | -23,20921                    | 19,08652 | 4,122692 |
| 8  | PARÂMETROS DO MODELO    |           |         |   | 6      | 3484395 | 60,31344 | 11,08365 | -33,95398                    | 27,92264 | 6,031344 |
| 9  | Beta                    | 0,56      |         |   | 7      | 3484361 | 88,23608 | 17,115   | -49,6728                     | 40,84919 | 8,823608 |
| 10 | Tempo de duração        | 10        | dias    |   | 8      | 3484311 | 129,0853 | 25,9386  | -72,66795                    | 59,75942 | 12,90853 |
| 11 | Gama                    | 0,10      |         |   | 9      | 3484238 | 188,8447 | 38,84713 | -106,307                     | 87,42255 | 18,88447 |
| 12 |                         |           |         |   | 10     | 3484132 | 276,2672 | 57,7316  | -155,5154                    | 127,8886 | 27,62672 |
| 13 |                         |           |         |   | 11     | 3483976 | 404,1559 | 85,35833 | -227,4958                    | 187,0802 | 40,41559 |
| 14 |                         |           |         |   | 12     | 3483749 | 591,2361 | 125,7739 | -332,7799                    | 273,6563 | 59,12361 |
| 15 |                         |           |         |   | 13     | 3483416 | 864,8924 | 184,8975 | -486,7621                    | 400,2728 | 86,48924 |
| 16 |                         |           |         |   | 14     | 3482929 | 1265,165 | 271,3868 | -711,9364                    | 585,4199 | 126,5165 |

Fonte: Elaborado pelo autor.

Nas *colunas F, G e H* foram calculados os valores do número de suscetíveis, infectados e removidos em cada unidade de tempo, respectivamente. A programação ocorreu da seguinte forma:

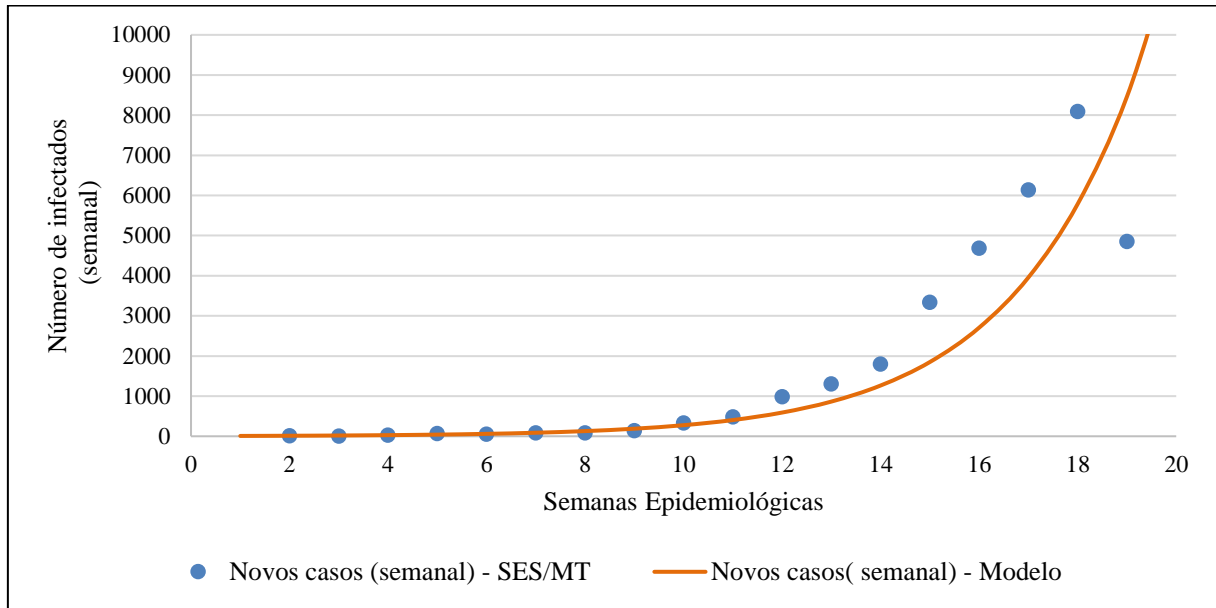
- $F3 := B5$  – O número de suscetíveis será igual ao número de suscetíveis na primeira semana.
- $F4 := F3 + I3$  – O número de suscetíveis será igual ao número de suscetíveis na primeira semana menos a quantidade de indivíduos que foram infectados.
- Selecione *célula F4* e arraste até preencher as 20 semanas em estudo.
- $G3 := B6$  – O número de infectados será igual ao número de infectados na primeira semana.
- $G4 := G3 + J3$  – O número de infectados da segunda semana será igual ao número de infectados na primeira semana menos a quantidade de indivíduos que foram para removidos por deixarem de ser infecciosos.
- $H3 := B7$  – O número de removidos será igual ao número de removidos na primeira semana.
- $H4 := H3 + K3$  – O número de removidos da segunda semana será igual ao número de removidos na primeira semana adicionado dos novos removidos.
- Selecione *célula H4* e arraste até preencher a 20 semanas em estudo.

Já nas *colunas I, J e K* programou-se as equações das taxas de variações  $\Delta S$ ,  $\Delta I$  e  $\Delta R$  para cada instante  $t$ , respectivamente. Os comandos utilizados foram os seguintes:

- $I3 := (-B9/B2 * F3 * G3) * B3$
- Selecione *célula I3* e arraste até preencher a 20 semanas em estudo.
- $J3 := B9/B2 * F3 * G3 - (G3 * B11) * B3$
- Selecione *célula J3* e arraste até preencher a 20 semanas em estudo.
- $K3 := (G3 * B11) * B3$
- Selecione *célula K3* e arraste até preencher a 20 semanas em estudo.

Os estudantes podem perceber que os dados simulados se aproximaram consideravelmente dos dados reais para as primeiras 20 semanas, conforme é apresentado na Figura 36.

Figura 36: Simulação para os dados acumulados semanalmente para as 20 primeiras semanas epidemiológicas em Mato Grosso



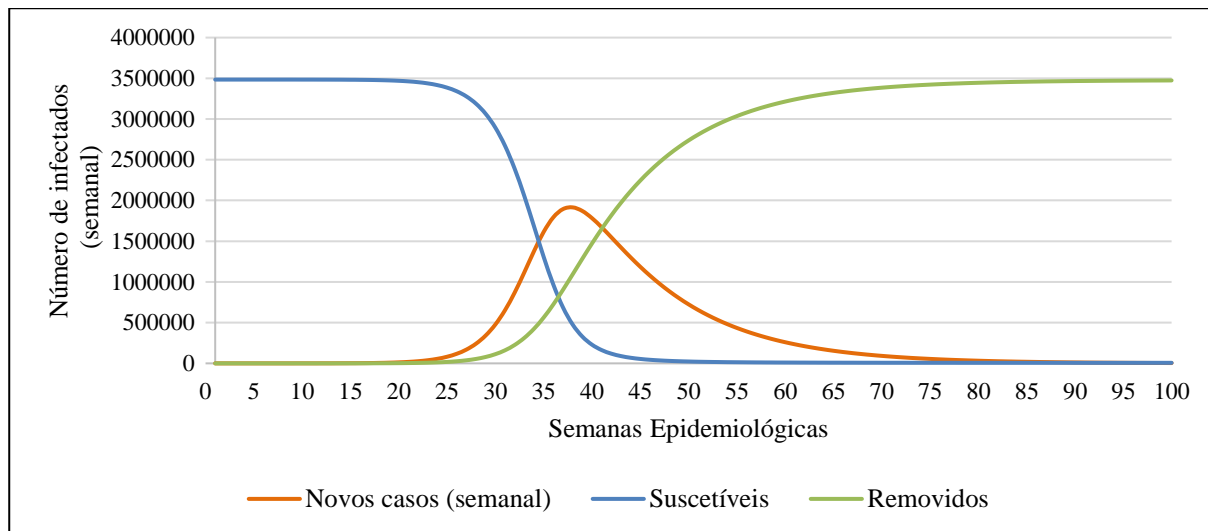
Fonte: Elaborado pelo autor.

A partir da Figura 36 percebe-se uma tendência inicial de crescimento exponencial do número de infectados bastante acelerado. Isso se dá ao fato da alta taxa de contágio considerada na situação, dado que a taxa de transmissão ( $\beta$ ), ou seja, a taxa de sucesso em que um contato suscetível-infectado resulte em uma nova infecção, foi de 0,56<sup>11</sup>. Tal valor foi obtido pela minimizando a função erro quadrado entre os dados reais e os simulados para as primeiras 20 semanas.

Entretanto, a utilização desse ajuste para as demais semanas não caracteriza uma boa estimativa para o número de infectados. Utilizando  $\beta = 0,56$  para as 100 semanas que antecederam a vacinação pode-se obter simular cenário fictício de como seria a curva de contágio caso a taxa de infecção e recuperação fosse mantida.

A tendência inicial mostra um crescimento exponencial do número de infectados e de removidos, enquanto o número de suscetíveis experimenta um decréscimo exponencial. Essa simulação evidencia um número infectados em uma única semana de aproximadamente 1.915.187 de pessoas, o pico da infecção, ocorrendo na 38ª semana epidemiológica. Na Figura 37 é apresentado a projeção para o número de suscetíveis, infectados e removidos nessas primeiras 100 semanas.

Figura 37: Simulação para os dados acumulados semanalmente para as 100 primeiras semanas epidemiológicas em Mato Grosso mantem  $\beta = 0,56$



Fonte: Elaborado pelo autor.

Certamente não é o que de fato está acontecendo, mas espera-se que o estudante perceba a necessidade de reduzir a taxa de contágio e a importância de determinadas medidas sanitárias no controle da Covid-19 em Mato Grosso.



## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho foi proposto com a finalidade de contribuir para a compreensão de como a modelagem matemática pode ser utilizada no estudo e também na descrição do avanço da pandemia da Covid-19. Torna-se necessário fazer algumas reflexões sobre os dados obtidos e quais os impactos sobre a ação docente, sendo estas baseadas nas duas questões levantadas no início do trabalho: como é realizado o estudo da dinâmica de doenças infecciosas utilizando o modelo SIR? Como transpor o entendimento do modelo SIR e da dinâmica de infecção causada pela Covid-19 para estudantes do Ensino Médio?

Ao realizar o estudo sobre o modelo SIR pode-se perceber que a utilização de modelos compartimentais é de suma importância para o estudo de dinâmicas infecciosas. Ao dividir a população em questão em três compartimentos fica mais evidente a necessidade de entender o processo de infecção e recuperação da doença por meio da estimativa das taxas de trocas de compartimentos. De acordo com Bassanezi (2002, p. 151) uma hipótese comumente utilizada é que implica na linearidade do sistema, talvez por sua simplicidade, em que : “o fluxo de um compartimento  $i$  para outro  $j$  é proporcional à quantidade  $x_i(t)$  contida no compartimento  $i$ , em cada instante  $t$ , e independe do valor  $x_j(t)$ ”

No caso do modelo SIR a hipótese de interação baseia-se no princípio da ação das massas, sendo que “a taxa de colisões moleculares entre dois componentes químicos diluídos é proporcional ao produto de suas concentrações”, conforme trazido por Murray (1993), Daley e Gani (1999) e Allman e Rhodes. Com isso, pode-se realizar todo o processo de construção, conforme apresentado na seção 2.3.

Ressalta-se que a modelagem matemática por trás das dinâmicas de doenças infecciosas não é tão simples e os fatores que podem influenciar para um avanço mais rápido ou até mesmo mais lento são diversos. Porém, a utilização do modelo SIR trouxe alguns aspectos indispensáveis para esses estudos.

O primeiro aspecto levantado, derivado do processo de modelagem, é a construção das hipóteses do modelo. Esse processo de simplificação da realidade por meio de cinco hipóteses elucidadas na seção 2.3 mostrou-se essencial para compreender a dinâmica estudada e descrever as características de cada compartimento. Já o segundo aspecto observado no processo de construção do modelo está na obtenção das respectivas taxas de transição entre os compartimentos. Tal tarefa não foi fácil, principalmente quando busca-se entender a dinâmica da infecção quase que em tempo real. Isso exigiu que os dados coletados e os ajustes do parâmetro de infecção fossem realizados constantemente.

A forma com que os intervalos foram tomados durante o trabalho também influenciou na precisão dos resultados obtidos pelo modelo. Como a pesquisa baseou-se em dados já consolidados no período que antecede o início da vacinação, a adoção de diferentes tipos de intervalos pode melhorar ou não a qualidade do ajuste do modelo quando comparado aos dados reais. Isso foi evidenciado pelas diferentes abordagens adotadas nas estimativas para a taxa de infecção, na qual a adoção de intervalos de sete dias sem o acréscimo de períodos anteriores mostrou-se mais promissora e melhor se ajustou aos dados de Mato Grosso no período analisado.

A obtenção das taxas de infecção e remoção leva para o terceiro aspecto observado e relevante para o estudo da dinâmica de doenças infecciosas, o chamando número básico de reprodução ( $\mathcal{R}_0$ ), cujo valor representa o número médio de infecções causadas por um indivíduo infectado. Tal valor facilita a identificação de momentos específicos em que o número de infecção passa a ser extremamente alto, favorecendo assim a um aumento na taxa de infecção. Além disso, também o valor coloca um objetivo frente à infecção, tornar o número de infecção menor que 1, ou seja,  $\mathcal{R}_0 < 1$ , fazendo com que o número de infecção seja reduzido e encaminhando para um possível encerramento da pandemia.

Isso pode ser observado em alguns momentos no processo de estimativa da taxa de infecção, em que tal valor foi menor que 1. Por exemplo, na abordagem 1 o menor valor obtido foi  $\mathcal{R}_0 = 1,2$ , isso mostrou uma projeção de pico mais tardio com um valor muito acima da realidade. Entretanto, nas abordagens 2 e 3 obteve-se valores nos quais alguns dos intervalos analisados assumiram  $\mathcal{R}_0 < 1$ , fazendo com que as projeções de pico e a quantidade máxima de infectados fossem menores. Certamente essas projeções se alteraram a partir dos intervalos analisados, mas foi possível identificar o impacto de tal valor no avanço da infecção em Mato Grosso.

De acordo com Sandes e Freitas (2020) o valor de  $\mathcal{R}_0$  pode variar consideravelmente a depender de certas condições como, por exemplo, uma alta flexibilização de medidas de afastamento social, registro insuficiente de casos (subnotificação), colapso do sistema de saúde do estado, dentre outras. Apesar do trabalho considerar o modelo SIR simples sem dinâmica vital e não verificar o impacto de determinadas medidas sanitárias frente à Covid-19 pode-se perceber que as oscilações dos valores obtidos para a taxa de infecção e, conseqüentemente, para o número básico de reprodução, sugerem que algumas ações foram tomadas e podendo assim mensurar o impacto dessas medidas.

Um outro ponto que pode ter favorecido as diferenças na previsão do quantitativo e da data para o alcance do maior número de infectados em único dia está nas características de cada

região de saúde em Mato Grosso, no qual o alcance da doença pode ter ocorrido de modo mais tardio. Isso pode ser visualizado no trabalho de Ceconello, *et. al.* (2020) em que o número de indivíduos que serão contaminados a partir de um indivíduo infectado ( $\mathcal{R}_0$ ) se mostrou bastante distinto. Os autores apontam em um estudo preliminar que na Região Centro Norte de Mato Grosso, cada indivíduo infectado gerará menos que um outro indivíduo infectado, assumindo uma chance de transmissão baixa enquanto que, na Região Noroeste do estado, cada indivíduo infectado causa mais que uma nova infecção, indicando maior transmissibilidade e, portanto, maior número de infectados na população.

No último capítulo foi elaborada uma proposta de atividades para ser trabalhada com estudantes do 3º ano d Ensino Médio. O estudo mostrou várias possibilidades de uso do *Excel* ou outros programas similares envolvendo planilhas eletrônicas que o docente pode utilizar para facilitar a organização e interpretação dos dados sobre a Covid-19 em Mato Grosso. O domínio de certos recursos favorecidos pelo uso de planilhas eletrônicas mostrou-se fundamental no estudo da dinâmica de doenças infecciosas, isso porque a quantidade de dados a serem analisados é alta, sendo extremamente trabalhoso realizar todos os cálculos manualmente. Além disso, a possibilidade de executar cálculos de forma automática gera praticidade na obtenção de valores que precisam ser atualizados constantemente.

Dessa forma, a modelagem matemática aliada à utilização de recursos tecnológicos configurou uma boa alternativa para que o estudante possa avaliar e desvendar o avanço da Covid-19 em Mato Grosso. Isso faz com que o estudante possa vislumbrar a aplicação da Matemática face à situação atual, visto ser uma ciência capaz de lidar com fatos reais do cotidiano. Sendo assim, fica o convite para que professores auxiliem no processo de aprimoramento e aplicação dessa proposta didática.

Como sugestões para trabalhos futuros podem ser citados:

- ✓ Aprimorar e aplicar a proposta didática baseada em modelagem matemática elaborada para o 3º ano do Ensino Médio, bem como identificar outras situações que favorecem ao estudo de doenças infecciosas com o auxílio da modelagem no Educação Básica.
- ✓ Identificar variações mais sofisticadas do modelo SIR que possibilitem um estudo mais aprofundado sobre a dinâmica da Covid-19 em Mato Grosso.
- ✓ Identificar e utilizar outros *softwares* mais sofisticados e/ou linguagens de programação para inserir os dados coletados de Mato Grosso e facilitar o estudo sobre o modelo e aprimoramento do modelo.

- ✓ Explorar os conceitos de Cálculo Diferencial Integral e Equações Diferenciais aplicados nos estudos de doenças infecciosas.

**REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS**

- ALLMAN, E. S.; RHODES, J. A. *Mathematical models in biology: an introduction*. Cambridge: Cambridge University Press, 2004.
- ANDREWS, J. G.; MCLONE, R. R. *Mathematical modelling*. Butterworth: Heinemann, 1796.
- BARBOSA, J. C. Modelagem na Educação Matemática: contribuições para o debate teórico. *Reunião anual da ANPED*, v. 24, n. 7, p. 1-15, 2001.
- BARBOSA, J. C. Modelagem Matemática: O que é? Por que? Como? *Veritati*, n. 4, p. 73-80, 2004.
- BARROSO, L. C. et al. *Cálculo Numérico (com aplicações)*. 2ª. ed. São Paulo: Harbra LTDA, 1987.
- BASSANEZI, R. C. *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia*. Campinas: Editora Contexto, 2002.
- BASSANEZI, R. C.; JUNIOR, W. C. F. *Equações Diferenciais: com aplicações*. São Paulo: Harbra, 1988.
- BIEMBENGUT, M. S. 30 Anos de Modelagem Matemática na Educação Brasileira: das propostas primeiras às propostas atuais. *Alexandria: revista de educação em ciência e tecnologia*, v. 2, n. 2, p. 7-32, 2009.
- BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. *Modelagem matemática no ensino*. 3ª. ed. São Paulo: Contexto, 2003.
- BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno*. 9ª. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2002.
- BOYER, C. B. *História da matemática*. 2ª. ed. São Paulo: Edgar Blucher, 1998.
- BRANDT, C. F.; BURAK, D.; KLÜBER, T. E. *Modelagem Matemática: perspectivas, experiências, reflexões e teorizações*. 1ª. ed. Ponta Grossa: Editora UEPG, 2016.
- BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular*. MEC. Brasília. 2017.
- BRASIL. Ministério da Saúde. *Painel Coronavírus*, 2020. Disponível em: <<https://covid.saude.gov.br/>>. Acesso em: mar 2021.
- BRASIL, M. D. E. *Parâmetros Curriculares Nacionais - Matemática*. MEC, SEF. Brasília. 1997.
- BRAUN, M.; GOLUBITSKY, M. *Differential equations and their applications*. New York: Springer-Verlag, 1992.

- BURAK, D. *Modelagem matemática: uma alternativa para o ensino de matemática na 5ª série*. (Dissertação de Mestrado) - Unesp. Rio Claro. 1987.
- BURAK, D. Modelagem Matemática sob um olhar de Educação Matemática e suas implicações para a construção do conhecimento matemático em sala de aula. *Modelagem na Educação Matemática*, v. 1, n. 1, p. 10-27, 2010.
- CAJORI, F. *Uma História da Matemática*. Tradução de Tradução Lázaro Coutinho. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2007.
- CECCONELLO, M. D. S. et al. *Evolução da Covid-19 em Mato Grosso: panorama atual e projeções para as regiões de saúde*. Universidade Federal de Mato Grosso. Cuiabá. 2020.
- CERVO, A. L.; BERVIAN, A.; SILVA, R. *Metodologia científica*. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2006.
- CHRISTOFOLETTI, A.. E. B. *Modelagem de sistemas ambientais*. 1ª. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 1999.
- D'AMBRÓSIO, U. *Da realidade à ação: reflexões sobre educação e matemática*. Sao Paulo: Grupo Editorial Summus, 1986.
- FAGUNDES, S. *Uma alternativa para o ensino de matemática utilizando modelos epidêmicos*. (Dissertação) Universidade Federal de Viçosa. Viçosa, p. 46. 2016.
- FERREIRA, M. L. *Modelagem Matemática em dinâmica da população como uma estratégia no ensino da Matemática*. Universidade Federal de Viçosa. Florestal, p. 114. 2021.
- FONSECA, J. J. S. D. *Apostila de metodologia da pesquisa científica*. [S.l.]: Universidade Estadual do Ceará, 2002.
- GANI, D. D. J.; DALEY, D. *Epidemic modeling: an introduction*. Cambridge: Cambridge U. Press, 1999.
- GARBI, G. G. *A rainha das ciências: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática*. São Paulo: Livraria da Física, 2010.
- GERHARDT, T. E.; SILVEIRA, D. T. *Métodos de pesquisa*. [S.l.]: Plageder, 2009.
- GIL, A. C. E. A. *Como elaborar projetos de pesquisa*. São Paulo: Atlas, 2002.
- GÓES, A. R. T.; GÓES, H. C. *Modelagem Matemática: teoria, pesquisas e práticas pedagógicas*. 1ª. ed. Curitiba: Editora InterSaberes, 2016.
- GOMES, S. C. P.; MONTEIRO, I. O. Estudo Preliminar sobre a Dinâmica da Epidemia do Novo Coronavírus., 2020.
- LUCKESI, C. C. *Avaliação da aprendizagem escolar: estudos e proposições*. São Paulo: Cortez editora, 2014.

- MALHEIROS, A. P. D. S. *Educação Matemática online: a elaboração de projetos de Modelagem*. (Tese de doutorado) - Universidade Estadual Paulista. Rio Claro. 2008.
- MARCONI, M. D. A.; LAKATOS, E. M. *Metodologia do trabalho científico*. 8ª. ed. São Paulo: Atlas, 2017.
- MARTINS, R. A. Arquimedes e a coroa do rei: problemas históricos. *Caderno Brasileiro de Ensino de Física*, v. 17, 2000.
- MATO GROSSO. *Documento Referência Curricular de Mato Grosso - Etapa do Ensino Médio*. Secretaria de Estado de Educação. Cuiabá. 2020.
- MEYER, J. F. C. A.; CALDEIRA, A. D.; MALHEIROS, A. P. D. S. *Modelagem em educação matemática*. Belo Horizonte: Autêntica, 2011.
- MORGADO, A. C. D. O.; CARVALHO, P. C. P. *Matemática Discreta*. 2ª. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2015.
- MOURÃO, P. A. M. *Simulações matemáticas em estudos epidemiológicos: o modelo SIR com estratégias de vacinação como aplicação da modelagem matemática no ensino*. (Dissertação) - Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia. Vitória da Conquista, p. 83. 2020.
- MURRAY, J. D. *Mathematical Biology: I. An Introduction*. 3ª. ed. New York: Springer, v. 1, 1993.
- OLIVEIRA JÚNIOR, V. D. *Modelagem matemática de epidemias: uma abordagem com modelos uma abordagem*. UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO. São Luís. 2021.
- ORGANIZAÇÃO MUNDIAL DA SAÚDE (OMS). Discurso de abertura do Diretor-Geral na coletiva de imprensa sobre COVID-19, Genebra, 2020. Disponível em: <<https://bitly.com/n3Buib>>. Acesso em: mar 2021.
- ORGANIZAÇÃO PAN-AMERICANA DA SAÚDE. *Módulo de princípios de epidemiologia para o controle de enfermidades*. Ministério da Saúde. [S.l.]. 2010.
- PEREIRA, C.; VEIGA, N. A epidemiologia: De Hipócrates ao século XXI. *Millenium*, v. 47, p. 129-140, 2014.
- SANDES, S.; FREITAS, A. D. S. *Modelo SIR com taxa de exposição para estudo da projeção de casos de COVID-19 no estado de Sergipe*. [S.l.]. 2020.
- SOARES, J. D. S. *Modelagem matemática: um estudo sobre o comportamento dos dados da Covid-19 no Brasil no ano de 2020*. (Dissertação) Universidade Estadual de Mato Grosso. Sinop, p. 128. 2021.
- STEWART, J. *Cálculo*. Tradução de EZ2Translate. 7ª. ed. São Paulo: Cengage Learning, v. 1, 2013.
- UJVARI, S. C. *História das epidemias*. São paulo: Contexto, 2020.

ZANDONAI, J. C. *Renascença e história da ciência: Uma análise comparativa de tendências historiográficas e a contribuição de Antonio Beltrán*. (Tese de Doutorado) - Universidade de São Paulo. São Paulo. 2016.



## APÊNDICE A

Quadro 8: Distribuição das dissertações do PROFMAT envolvendo modelagem ou modelos matemática

| Instituição | UF | Quant. | Instituição | UF | Quant. |
|-------------|----|--------|-------------|----|--------|
| UNESP       | SP | 17     | UNB         | DF | 3      |
| UFG         | GO | 10     | USP         | SP | 3      |
| UFERSA      | RN | 9      | CPII        | RJ | 2      |
| UFMT        | MT | 9      | FUFS        | SE | 2      |
| UFPI        | PI | 9      | PUC         | RJ | 2      |
| UFCAT       | GO | 8      | UEFS        | BA | 2      |
| UFSCAR      | SP | 8      | UEMA        | MA | 2      |
| UFPR        | PR | 7      | UFCA        | CE | 2      |
| UFT         | TO | 7      | UFMA        | MA | 2      |
| UFABC       | SP | 6      | UFTM        | MG | 2      |
| UFAM        | AM | 6      | UFV         | MG | 2      |
| UFFS        | SC | 6      | UFVJM       | MG | 2      |
| UFMS        | MS | 6      | UNICAMP     | SP | 2      |
| UFPA        | PA | 6      | UNIFESP     | SP | 2      |
| UFSC        | SC | 6      | IFPI        | PI | 1      |
| UFSJ        | MG | 6      | IFSP        | SP | 1      |
| UERJ        | RJ | 5      | IMPA        | RJ | 1      |
| UEPG        | PR | 4      | UEMS        | MS | 1      |
| UFRRJ       | RJ | 4      | UESC        | BA | 1      |
| UNIFAP      | AP | 4      | UESPI       | PI | 1      |
| UTFPR       | PR | 4      | UFCE        | PB | 1      |
| UEL         | PR | 3      | UFGD        | MS | 1      |
| UEM         | PR | 3      | UFPB        | PB | 1      |
| UESB        | BA | 3      | UNEMAT      | MT | 1      |
| UFAL        | AL | 3      | UNIR        | RO | 1      |
| UFJ         | GO | 3      | UNIRIO      | RJ | 1      |
| UFSM        | RS | 3      | UNIVASF     | BA | 1      |

Fonte: Elaborado pelo autor.

## APÊNDICE B

Tabela 6: Valores obtidos para o coeficiente de correlação  $r^2$  com  $\beta$  variando semanalmente

| Semana<br>Epidemiológica | $\beta$ | $R^2$  | Semana<br>Epidemiológica | $\beta$ | $r^2$ |
|--------------------------|---------|--------|--------------------------|---------|-------|
| 1                        | 0,17    | 0,26   | 24                       | 0,12    | 0,59  |
| 2                        | 0,21    | 0,34   | 25                       | 0,12    | 0,35  |
| 3                        | 0,21    | 0,29   | 26                       | 0,11    | 0,86  |
| 4                        | 0,13    | 0,003  | 27                       | 0,11    | 0,54  |
| 5                        | 0,11    | 0,0004 | 28                       | 0,11    | 0,27  |
| 6                        | 0,09    | 0,43   | 29                       | 0,11    | 0,28  |
| 7                        | 0,13    | 0,36   | 30                       | 0,11    | 0,45  |
| 8                        | 0,20    | 0,83   | 31                       | 0,11    | 0,67  |
| 9                        | 0,19    | 0,56   | 32                       | 0,10    | 0,74  |
| 10                       | 0,20    | 0,57   | 33                       | 0,10    | 0,04  |
| 11                       | 0,11    | 0,94   | 34                       | 0,10    | 0,79  |
| 12                       | 0,18    | 0,52   | 35                       | 0,10    | 0,20  |
| 13                       | 0,17    | 0,78   | 36                       | 0,10    | 0,001 |
| 14                       | 0,13    | 0,58   | 37                       | 0,10    | 0,42  |
| 15                       | 0,15    | 0,58   | 38                       | 0,10    | 0,50  |
| 16                       | 0,07    | 0,74   | 39                       | 0,10    | 0,34  |
| 17                       | 0,04    | 0,66   | 40                       | 0,10    | 0,60  |
| 18                       | 0,12    | 0,20   | 41                       | 0,10    | 0,02  |
| 19                       | 0,12    | 0,38   | 42                       | 0,10    | 0,36  |
| 20                       | 0,12    | 0,46   | 43                       | 0,10    | 0,22  |
| 21                       | 0,12    | 0,58   | 44                       | 0,11    | 0,42  |
| 22                       | 0,12    | 0,37   | 45                       | 0,11    | 0,67  |
| 23                       | 0,12    | 0,32   | 46                       | 0,12    | 1     |

Fonte: Elaborado pelo autor.

## APÊNDICE C

Planilha de dados e modelo SIR com as três abordagens adotadas no trabalho.

Link: <https://bityli.com/b1RdCy>

Planilha de dados e modelos de atividades da proposta didática.

Link: <https://bityli.com/FPXE5>