

Universidade Federal de Jataí (UFJ)
Unidade Acadêmica Especial de Ciências Exatas (UAECIEXA)
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT

Janaína Martins Gouveia

**Construções Gráficas no Ensino Médio: uma
abordagem utilizando ferramentas do Cálculo
Diferencial**

Jataí - GO
2021



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
UNIDADE ACADÊMICA ESPECIAL DE CIÊNCIAS EXATAS

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO (TECA) PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES

E DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a [Lei 9.610/98](#), o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou download, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

O conteúdo das Teses e Dissertações disponibilizado na BDTD/UFG é de responsabilidade exclusiva do autor. Ao encaminhar o produto final, o autor(a) e o(a) orientador(a) firmam o compromisso de que o trabalho não contém nenhuma violação de quaisquer direitos autorais ou outro direito de terceiros.

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO (TECA) PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES E DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFJ

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Jataí (UFJ) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFJ), regulamentada pela Resolução CEPEC no 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei 9.610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou download, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data. O conteúdo das Teses e Dissertações disponibilizado na BDTD/UFJ é de responsabilidade exclusiva do autor. Ao encaminhar o produto final, o autor(a) e o(a) orientador(a) firmam o compromisso de que o trabalho não contém nenhuma violação de quaisquer direitos autorais ou outro direito de terceiros.

1. Identificação do material bibliográfico

Dissertação [] Tese

2. Nome completo do autor:

JANAÍNA MARTINS GOUVEIA

3. Título do trabalho:

CONSTRUÇÕES GRÁFICAS NO ENSINO MÉDIO: UMA ABORDAGEM UTILIZANDO FERRAMENTAS DO CÁLCULO DIFERENCIAL

4. Informações de acesso ao documento (este campo deve ser preenchido pelo orientador)

Concorda com a liberação total do documento SIM [] NÃO

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. Após esse período, a possível disponibilização ocorrerá apenas mediante:

a) consulta ao(à) autor(a) e ao(à) orientador(a);

b) novo Termo de Ciência e de Autorização (TECA) assinado e inserido no arquivo da tese ou dissertação.

O documento não será disponibilizado durante o período de embargo.

Casos de embargo:

- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. Após esse período, a possível disponibilização ocorrerá apenas mediante:

a) consulta ao(à) autor(a) e ao(à) orientador(a);

b) novo Termo de Ciência e de Autorização (TECA) assinado e inserido no arquivo da tese ou dissertação.

O documento não será disponibilizado durante o período de embargo.

Casos de embargo:

- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

Obs. Este termo deverá ser assinado no SEI pelo orientador e pelo autor.



logotipo

Documento assinado eletronicamente por **Wender José De Souza, Professor do Magistério Superior**, em 09/11/2021, às 10:39, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



logotipo

Documento assinado eletronicamente por **JANAINA MARTINS GOUVEIA, Discente**, em 09/11/2021, às 15:32, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



QRCode

Assinatura

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **2475004** e o código CRC **1D3F303C**.

Janaína Martins Gouveia

Construções Gráficas no Ensino Médio: uma abordagem utilizando ferramentas do Cálculo Diferencial

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT da Universidade Federal de Jataí (UFJ), como requisito para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática

Linha de Pesquisa: Educação Matemática

Orientador: Prof. Dr. Wender José de Souza

Universidade Federal de Jataí (UFJ)

Unidade Acadêmica Especial de Ciências Exatas (UAECIEXA)

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT

Jataí - GO

2021

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFJ.

Gouveia, Janaína Martins Gouveia

Construções Gráficas no Ensino Médio: uma abordagem utilizando ferramentas do Cálculo Diferencial / Janaína Martins Gouveia Gouveia. - 2021.

146, CXLVI f.

Orientador: Prof. Dr. Wender José de Souza Souza.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Jataí, Unidade Acadêmica Especial de Ciências Exatas e Tecnológicas, Jataí, PROFMAT- Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional - Sociedade Brasileira de Matemática (RJ), Jataí, 2021.

Bibliografia.

Inclui gráfico, tabelas, lista de figuras, lista de tabelas.

1. Cálculo. 2. Derivada. 3. Função Polinomial. I. Souza, Wender José de Souza, orient. II. Título.

CDU 51



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS

COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO - REGIONAL JATAÍ

ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO

Ata nº **20** da sessão de Defesa de Dissertação de JANAINA MARTINS GOUVEIA, que confere o título de Mestra em **Matemática**, na área de concentração em **Matemática do Ensino Básico**.

No dia cinco de julho de 2021, a partir das **10h00 horas**, realizou-se a sessão pública de Defesa de Dissertação integralmente por meio de tecnologias de comunicação à distância, intitulada “CONSTRUÇÕES GRÁFICAS NO ENSINO MÉDIO: UMA ABORDAGEM UTILIZANDO FERRAMENTAS DO CÁLCULO DIFERENCIAL”. Os trabalhos foram instalados pelo Orientador, Professor Doutor Wender José de Souza (UAE de Ciências Exatas / UFJ) com a participação dos demais membros da Banca Examinadora: Professora Doutora Kamila da Silva Andrade (IME / UFG), membro titular externo; Professor Doutor Rafael Siqueira Silva (UAE de Ciências Exatas / UFJ), membro titular interno. Durante a arguição os membros da banca não fizeram sugestão de alteração do título do trabalho. A Banca Examinadora reuniu-se em sessão secreta a fim de concluir o julgamento da Dissertação, sendo a candidata aprovada pelos seus membros. Proclamados os resultados pelo Professor Doutor Wender José de Souza, Presidente da Banca Examinadora, foram encerrados os trabalhos e, para constar, lavrou-se a presente ata que é assinada pelos Membros da Banca Examinadora, no dia cinco de julho de 2021.

TÍTULO SUGERIDO PELA BANCA



Documento assinado eletronicamente por **Wender José De Souza, Professor do Magistério Superior**, em 05/07/2021, às 13:33, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Rafael Siqueira Silva, Professor do Magistério Superior**, em 05/07/2021, às 15:30, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Kamila Da Silva Andrade, Professor do Magistério Superior**, em 05/07/2021, às 16:16, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **2186218** e o código CRC **8909ADB0**.

À minha mãe, Clesmeire Martins de Jesus

Agradecimentos

À Deus, por minha existência e permanência em vida com saúde, e por mais esta conquista.

À minha mãe, cujo presente trabalho dedico, por todo amor, carinho, paciência e compreensão, além de todo incentivo dedicado à mim em todos estes anos de vida. Obrigada por nunca medir esforços em me apoiar e me auxiliar e por sempre acreditar que a educação mudaria nossas vidas.

À minha família, pelo apoio incondicional, e principalmente ao Maicon e ao Alexandre pela paciência nos meus dias mais difíceis.

Aos meus amigos, pelo incentivo e auxílio durante esta jornada, em especial à minha grande amiga Camila, por ter embarcado neste sonho comigo e nunca me permitir desistir.

À Luna e à Nega, por simplesmente fazerem meus dias mais leves e felizes, por me acolherem nos dias de prantos e por sempre me esperarem quando eu saio de casa.

Ao professor Dr. Wender, cuja orientação foi essencial para o desenvolvimento deste trabalho. Sua paciência, sabedoria e direcionamento nortearam o meu pensamento inúmeras vezes.

Aos colegas de turma, e à todos os professores do PROFMAT, por todo convívio e troca nestes mais de 2 anos de curso.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Diagrama de máquina para a função f .	20
Figura 2 – Domínio e Imagem de uma função f .	21
Figura 3 – Gráfico da função $f(x) = 2$.	43
Figura 4 – Funções Afins crescente (esquerda) e decrescente (direita).	44
Figura 5 – Gráfico da função $f(x) = 3x + 1$.	44
Figura 6 – Gráfico da função $f(x) = -2x$.	45
Figura 7 – Formas dos gráficos de funções quadráticas.	46
Figura 8 – Gráfico da função $f(x) = x^2 + 2x - 3$.	49
Figura 9 – Gráfico da função $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$.	50
Figura 10 – Análise da função $f(x) = x^2 - x + 2$ para valores de x próximos a 2.	54
Figura 11 – Gráfico com os pontos A e B.	56
Figura 12 – Gráfico com reta secante S.	57
Figura 13 – Intervalos definidos pelos pontos $x = 1$ e $x = -2$.	75
Figura 14 – Gráfico com pontos de máximo e mínimo.	76
Figura 15 – Gráfico com pontos de máximo de mínimo locais e absolutos.	77
Figura 16 – Esboço do gráfico de $f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2$, com $-1 \leq x \leq 4$.	77
Figura 17 – Intervalos divididos pelos pontos críticos de $f(x) = 2x^4 - 4x^2 + 3$.	80
Figura 18 – Intervalos de crescimento e decrescimento da função $f(x) = 2x^4 - 4x^2 + 3$.	81
Figura 19 – Concavidade de uma função.	82
Figura 20 – Comparativo entre a concavidade e as retas tangentes do gráfico de uma função.	83
Figura 21 – Representação dos intervalos definidos pelos pontos críticos da derivada de $f(x) = 2x^4 - 8x^3 + 7x - 3$.	84
Figura 22 – Análise de Concavidade da função $f(x) = 2x^4 - 8x^3 + 7x - 3$.	84
Figura 23 – Pontos de Inflexão.	85
Figura 24 – Análise de Concavidade da função $f(x) = f(x) = 3x^5 - 5x^4 - 1$.	86
Figura 25 – Análise Concavidade da função $f(x) = x^4 - 4x^3$.	87
Figura 26 – Interseção com os eixos x e y de $f(x) = 3x + 1$.	92
Figura 27 – Esboço do gráfico de $f(x) = 3x + 1$.	93
Figura 28 – Interseção com os eixos x e y de $f(x) = -2x + 6$.	94
Figura 29 – Esboço do gráfico de $f(x) = -2x + 6$.	95
Figura 30 – Interseção com os eixos x e y de $f(x) = x^2 - 5x + 6$.	97
Figura 31 – Intervalos definidos pelo ponto crítico de $f(x) = x^2 - 5x + 6$.	97
Figura 32 – Mínimo local de $f(x) = x^2 - 5x + 6$.	98
Figura 33 – Esboço do gráfico de $f(x) = x^2 - 5x + 6$.	99
Figura 34 – Interseção com os eixos x e y de $f(x) = x^2 + 2x + 3$.	100

Figura 35 – Intervalos definidos pelo ponto crítico de $f(x) = x^2 + 2x + 3$.	101
Figura 36 – Mínimo local de $f(x) = x^2 + 2x + 3$.	102
Figura 37 – Esboço do gráfico de $f(x) = x^2 + 2x + 3$.	103
Figura 38 – Interseção com os eixos x e y de $f(x) = -x^2 - 2x$.	104
Figura 39 – Intervalos definidos pelo ponto crítico de $f(x) = -x^2 - 2x$.	105
Figura 40 – Máximo local de $f(x) = -x^2 - 2x$.	106
Figura 41 – Esboço do gráfico de $f(x) = -x^2 - 2x$.	106
Figura 42 – Interseção com os eixos x e y de $f(x) = 3x^2 - 3x + 2$.	107
Figura 43 – Intervalos definidos pelo domínio e ponto crítico de $f(x) = 3x^2 - 3x + 2$.	108
Figura 44 – Mínimo local de $f(x) = 3x^2 - 3x + 2$.	109
Figura 45 – Esboço $f(x) = 3x^2 - 3x + 2$ para $-3 \leq x \leq 3$.	110
Figura 46 – Interseção com os eixos x e y de $f(x) = -4x^2 + 8$.	111
Figura 47 – Intervalos definidos pelo ponto crítico de $f(x) = -4x^2 + 8$.	112
Figura 48 – Esboço do gráfico de $f(x) = -4x^2 + 8$.	113
Figura 49 – Interseção com os eixos x e y de $f(x) = x^3$.	114
Figura 50 – Intervalos definidos pelo ponto crítico de $f(x) = x^3$.	115
Figura 51 – Esboço de $f(x) = x^3$.	116
Figura 52 – Interseção com os eixos x e y de $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x$.	118
Figura 53 – Intervalos definidos pelos pontos críticos de $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x$.	119
Figura 54 – Máximo e mínimo local de $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x$.	120
Figura 55 – Ponto de inflexão de $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x$.	121
Figura 56 – Esboço de $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x$.	122
Figura 57 – Interseção com os eixos x e y de $f(x) = x^3 - x^2 - 5x - 3$.	123
Figura 58 – Intervalos definidos pelos pontos críticos de $f(x) = x^3 - x^2 - 5x - 3$.	124
Figura 59 – Máximo e mínimo local de $f(x) = x^3 - x^2 - 5x - 3$.	125
Figura 60 – Ponto de inflexão $f(x) = x^3 - x^2 - 5x - 3$.	126
Figura 61 – Esboço de $f(x) = x^3 - x^2 - 5x - 3$.	127
Figura 62 – Interseção com os eixos x e y de $f(x) = -2x^3 + 4x$.	128
Figura 63 – Intervalos definidos pelos pontos críticos de $f(x) = -2x^3 + 4x$.	129
Figura 64 – Máximo e mínimo local de $f(x) = -2x^3 + 4x$.	131
Figura 65 – Esboço de $f(x) = -2x^3 + 4x$.	132
Figura 66 – Gráfico de $g(x) = -2x^3 + 4x + 3$.	132
Figura 67 – Gráfico de $g(x) = -2x^3 + 4x + 3$ e $f(x) = -2x^3 + 4x$.	133
Figura 68 – Raízes de $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 7$.	135
Figura 69 – Esboço do gráfico de $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 7$.	136

Lista de tabelas

Tabela 1	–	Comportamento de $f(x) = x^2 + 2x - 3$ quando x tende a infinito. . . .	51
Tabela 2	–	Comportamento de $f(x) = x^2 - x + 2$ quando x se aproxima de 2. . . .	53
Tabela 3	–	Comportamento de $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$ quando x se aproxima de 1.	55
Tabela 4	–	Intervalo de crescimento e decrescimento da função $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 7$	75
Tabela 5	–	Intervalo de crescimento e decrescimento da função $f(x) = 2x^4 - 4x^2 + 3$	81
Tabela 6	–	Análise da Concavidade da função $f(x) = 2x^4 - 8x^3 + 7x - 3$	84
Tabela 7	–	Análise de Concavidade da função $f(x) = 3x^5 - 5x^4 - 1$	86
Tabela 8	–	Análise Concavidade da função $f(x) = x^4 - 4x^3$	87
Tabela 9	–	Intervalos de crescimento e decrescimento da função $f(x) = x^2 - 5x + 6$	98
Tabela 10	–	Intervalos de crescimento e decrescimento da função $f(x) = x^2 + 2x + 3$	101
Tabela 11	–	Comportamento de $f(x) = x^2 + 2x + 3$ quando $x \rightarrow \infty$ e $x \rightarrow -\infty$	102
Tabela 12	–	Intervalos de crescimento e decrescimento da função $f(x) = -x^2 - 2x$	105
Tabela 13	–	Intervalos de crescimento e decrescimento da função $f(x) = 3x^2 - 3x + 3$	108
Tabela 14	–	Intervalos de crescimento e decrescimento da função $f(x) = -4x^2 + 8$	112
Tabela 15	–	Intervalos de crescimento e decrescimento da função $f(x) = x^3$	115
Tabela 16	–	Análise da concavidade de $f(x) = x^3$	116
Tabela 17	–	Intervalos de crescimento e decrescimento da função $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x$	119
Tabela 18	–	Análise da concavidade de $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x$	120
Tabela 19	–	Intervalos de crescimento e decrescimento da função $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x$	125
Tabela 20	–	Análise da concavidade de $f(x) = x^3 - x^2 - 5x - 3$	126
Tabela 21	–	Intervalos de crescimento e decrescimento da função $f(x) = -2x^3 + 4x$	130
Tabela 22	–	Análise da concavidade de $f(x) = -2x^3 + 4x$	131

Sumário

	Introdução	12
1	FUNÇÕES POLINOMIAIS	19
1.1	Funções de uma variável real	19
1.2	Funções Polinomiais	22
1.2.1	Operações entre funções polinomiais	25
1.2.2	Valor numérico de uma Função Polinomial	28
1.2.3	Raízes de uma Função Polinomial	28
1.2.3.1	Raiz de Funções de Primeiro Grau	31
1.2.3.2	Raízes de Funções de Segundo Grau	32
1.2.3.3	Raízes de Funções de Terceiro Grau	35
1.2.4	Gráficos das Funções Polinomiais	42
1.2.5	Comportamento da Função no Infinito	49
2	DERIVADA E CONCEITOS RELACIONADOS	52
2.1	Noção Intuitiva de Limite	53
2.2	Definindo a Derivada	55
2.2.1	Regras de Derivação	61
2.2.2	Derivadas Sucessivas ou de Ordem Superior	69
2.3	Conceitos Relacionados à Derivada	70
2.3.1	Continuidade de uma Função	70
2.3.2	Intervalos de Crescimento e Decrescimento	72
2.3.3	Valores Máximos e Mínimos	75
2.3.4	O Teste da Primeira Derivada: Intervalos de Crescimento e Máximos e Mínimos locais	79
2.3.5	O Teste da Segunda Derivada: Análise da Concavidade	82
3	CONSTRUÇÕES GRÁFICAS	89
3.1	Roteiro para esboço de gráficos de funções polinomiais	90
3.2	Exemplos de esboços de gráficos pelo método apresentado	91
3.2.1	Exemplo 1 - Esboço do gráfico de $f(x) = 3x + 1$	91
3.2.2	Exemplo 2 - Esboço do gráfico de $f(x) = -2x + 6$	94
3.2.3	Exemplo 3 - Esboço do gráfico de $f(x) = x^2 - 5x + 6$	96
3.2.4	Exemplo 4 - Esboço do gráfico de $f(x) = x^2 + 2x + 3$	99
3.2.5	Exemplo 5 - Esboço do gráfico $f(x) = -x^2 - 2x$	103
3.2.6	Exemplo 6 - Esboço do gráfico $f(x) = 3x^2 - 3x + 2$ para $-3 \leq x \leq 3$. . .	107

3.2.7	Exemplo 7 - Esboço do gráfico $f(x) = -4x^2 + 8$	110
3.2.8	Exemplo 8 - Esboço do gráfico $f(x) = x^3$	113
3.2.9	Exemplo 9 - Esboço do gráfico $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x$	116
3.2.10	Exemplo 10 - Esboço do gráfico $f(x) = x^3 - x^2 - 5x - 3$	121
3.2.11	Exemplo 11 - Esboço do gráfico $f(x) = -2x^3 + 4x$	127
3.2.12	Exemplo 12 - Análise do gráfico $g(x) = -2x^3 + 4x + 3$	132
4	SUGESTÕES DE ABORDAGENS DE TRABALHO DO MATERIAL PROPOSTO	134
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	137
	REFERÊNCIAS	139

Resumo

Desde sua invenção, ainda no século XVII, o Cálculo Diferencial e Integral tem sido de grande relevância para o desenvolvimento das ciências. O estudo do Cálculo é muito abordado em cursos superiores nas mais diversas áreas do conhecimento, e sua importância se dá devido à sua extensa aplicabilidade, fazendo-se uma poderosa ferramenta de resolução de problemas. Um assunto que vem sendo discutido por alguns autores dentro da área de ensino matemático é a inserção do estudo de Cálculo no Ensino Médio, mas não de maneira tradicional, e sim através de uma abordagem mais contextualizada. A proposta deste trabalho é criar um material de apoio ao professor do Ensino Médio que deseje trabalhar a construção de gráficos de funções polinomiais de um modo mais aprofundado, usando os conceitos da derivada para dar mais sentido às fórmulas já existentes. Desta forma, este trabalho apresenta uma revisão teórica sobre funções polinomiais, derivadas e conceitos relacionados à derivada, e por último, discorre de um roteiro para a elaboração de tais construções gráficas, trazendo alguns exemplos e análises. A contribuição desta dissertação está no material de apoio construído, que através de minuciosos exemplos, auxiliará o professor neste processo. A abordagem desses conceitos no Ensino Médio é desafiadora, exige conhecimento, confiança e criatividade, mas gera bons resultados, visto que a assimilação dos conteúdos é mais eficiente, promovendo assim um ensino matemático contextualizado e enraizado.

Palavras-chave: Cálculo. Derivada. Função Polinomial.

Abstract

Since its invention, in the 17th century, Differential and Integral Calculus was created for the development of sciences. The study of calculus is widely discussed in higher education courses in the most diverse areas of knowledge, and its importance is due to its extensive applicability, making it a powerful problem-solving tool. A subject that has been discussed by some authors within the field of mathematics education is the inclusion of the study of calculus in high school, not in a traditional way, but through a more contextualized approach. The purpose of this work is to create a support material for the high school teachers who want to work on the construction of polynomial function graphs in a deeper way, using the derived concepts to give more meaning to the already existing formulas. Thus, this work presents a theoretical review about polynomial functions, derivatives and concepts related to derivatives, and finally, it discusses a guide for the definition of such graphic constructions, bringing some examples and analyses. The contribution of this dissertation is on built support material, which through detailed examples, will help the teacher in this process. The concepts approach in High School is challenging, requires knowledge, confidence and creativity, but generates good results, since the assimilation of contents is more efficient, thus promoting a contextualized and rooted mathematical teaching.

Keywords: Calculus. Derivatives. Polynomial Function.

Introdução

Os primeiros estudos do cálculo datam do século XVII, e desde então, o Cálculo Diferencial e Integral tem sido de extrema relevância para o desenvolvimento de outras áreas do conhecimento [1]. O estudo do cálculo é muito abordado nos cursos superiores nas áreas de ciências, engenharias e tecnologias, e até mesmo em alguns cursos de ciências humanas e biológicas. Sua importância se dá devido à sua extensa aplicabilidade e por ser uma poderosa ferramenta de resolução de problemas [2].

Embora muito abordado no Ensino Superior, o Cálculo Diferencial e Integral ainda é pouco explorado no Ensino Médio. O Ensino Médio, de acordo com a Lei de Diretrizes e Bases (LDB 9.394/96), é considerado como a última e complementar etapa da Educação Básica.

O ensino de cálculo no Ensino Médio tem sido alvo de discussões e pesquisas de autores renomados, como Rezende [3], Ávila [4], Machado [5], entre outros. Essas pesquisas discutem a viabilidade da inserção do ensino de cálculo no Ensino Médio e a metodologia mais adequada para tal finalidade.

A motivação dessas pesquisas é o alto índice de reprovação nas disciplinas de Cálculo do Ensino Superior, ocasionado pela grande dificuldade dos alunos que saem do Ensino Médio sem uma boa base preparatória, como reforça Araújo [6]:

Os autores concordam que há um fracasso no ensino de Cálculo no Ensino Superior, com altos índices de reprovações, e entendem que ensinar Cálculo de forma introdutória no Ensino Médio seria parte da solução para esse problema. (p. 11).

A grade curricular do Ensino Médio já contou com o ensino de cálculo, que foi excluído após a Reforma da Matemática Moderna, em meados da década de 70.

Araújo [6] faz referência ao renomado autor Ávila, enfatizando que o cálculo desempenha um papel fundamental no desenvolvimento das ciências e tecnologia, e descartá-lo no Ensino Médio é um erro grave, por deixar de lado uma componente significativa para a formação do aluno em um contexto de ensino moderno e atual.

Introduzir conceitos de Cálculo Diferencial e Integral no Ensino Médio poderia auxiliar no entendimento de algumas propriedades que são indispensáveis para a compreensão de fenômenos físicos, como velocidade, aceleração, taxa de variação, entre outros exemplos encontrados na física e em outras áreas do conhecimento. Embora muitos desses fenômenos sejam abordados no Ensino Médio fora do ensino de cálculo, tal “aprofundamento” daria mais embasamento e uma construção mais “pura” e elaborada de determinados conceitos.

Desta forma, o estudo do Cálculo Diferencial e suas aplicações são as grandes motivações para o desenvolvimento dessa dissertação. O propósito deste trabalho consiste em utilizar e aplicar ideias do cálculo diferencial para a aprendizagem de outros conceitos matemáticos. Especificamente, na construção de gráficos de funções polinomiais.

O estudo do conceito de derivada é muito abordado em vários contextos devido à sua aplicabilidade em diversas áreas. Como defendido por Ávila (2007), citado em Moreira [2],

O conceito de derivada é da maior importância na fundamentação de toda a Matemática que se originou no século XVII e que vem se desenvolvendo até os dias de hoje. (...). Daí a enorme importância de se ensinar derivada já no ensino médio. Mas isso tem de ser feito de maneira adequada a esse nível de ensino, não como se faz nas disciplinas dos cursos universitários de Cálculo (p. 19).

A problematização desta pesquisa, portanto, gira em torno da aplicação dos conceitos relacionados à derivada na construção de gráficos de funções polinomiais, sendo este um assunto bastante recorrente tanto no Ensino Médio quanto no Ensino Superior.

Levar a interdisciplinaridade que ocorre entre a matemática e outras áreas, como física e biologia, dentre outras, para o ensino de matemática pode ser desafiador, e colocá-la em prática, muitas das vezes, requer estudo e criatividade. Porém, o estudo contextualizado de conceitos matemáticos facilita a aprendizagem dos mesmos e traz uma abordagem mais moderna e aplicada. Ainda com relação a matemática, e ao estudo de funções, Ávila (2007), também defende que a contextualização beneficia o aprendizado, como citado em Moreira [2]:

O ensino de funções, como vemos em vários livros, é que está carregado de terminologia e notação, de maneira artificial e descontextualizada. O excesso de “conjuntos” continua presente em vários livros, “entulhando” o currículo. Tudo isso pode ser reduzido substancialmente e com vantagens, beneficiando o bom aprendizado das ideias matemáticas (p. 20).

Visto que o aprendizado matemático gera contribuições para todas as áreas do conhecimento, trabalhá-lo de forma contextual e prática, aproxima o aluno dos problemas do dia-a-dia. Moreira [2], ainda comenta que “atualmente, se discute muito, nas escolas, a questão da interdisciplinaridade, que deve ser colocada em prática com frequência cada vez maior, mas o docente constantemente é desafiado com essa abordagem”.

Esta dissertação vem ao encontro à esse desafio, trazendo um material de apoio ao professor para que o mesmo o trabalhe em suas aulas de construções gráficas de funções polinomiais.

O ensino matemático no Ensino Médio

Como dito por França [7], a história cultural para a pesquisa em educação proporciona a análise de práticas escolares que foram se constituindo ao longo da história.

O ensino secundário no Brasil no início do século XIX era desalinhado: não existia um plano de ensino concreto, as aulas eram avulsas, e os alunos eram promovidos por disciplinas (não por séries, como hoje). Em 1890, houve a Reforma Benjamin Constant, que foi uma reforma educacional importantíssima para a organização dos conteúdos ministrados na educação básica, introduzindo uma formação científica em substituição à formação literária existente [8]. Esta proposta incluiu o estudo de vários tópicos relativos à matemática, inclusive o Cálculo Diferencial e Integral no último ano do ensino secundário.

Em 1931 a Reforma Francisco Campos estruturou o ensino secundário no Brasil, inserindo princípios mais modernos. As disciplinas matemáticas foram unificadas, e apresentadas como “Matemática”, cuja ementa incluía, introdução do conceito de funções e noções de Cálculo. Esta proposta, inovadora para a época, obteve muita resistência para ser implantada, principalmente por parte dos próprios professores, que não se sentiam seguros para trabalhar a Matemática desta forma [7].

Em 1942, com a Reforma Capanema, o ensino secundário foi dividido em dois ciclos: ginásial e científico, e os conteúdos de cálculo ficaram restritos ao programa científico. Sobre este fato, Ávila [4] comenta que

- O Cálculo? - Sim, o Cálculo! Pois fazia parte do programa da 3.^a série do chamado curso científico o ensino da derivada e aplicações a problemas de máximos e mínimos, além de outros tópicos como polinômio de Taylor. Isso desde 1943, quando foi instituída uma reforma do ensino secundário que ficou conhecida pelo nome do ministro da educação na época, o sr. Gustavo Capanema. Mas mesmo antes da Reforma Capanema, quando o que hoje chamamos de 5.^a à 8.^a série mais o 2.^o grau era o curso ginásial de 5 anos, seguido por dois anos de pré-universitário, já o Cálculo fazia parte do programa no pré das escolas de engenharia (p. 01).

Já em 1961, com a Lei de Diretrizes e Bases, a estrutura escolar no Brasil foi dividida em quatro graus: primário, ginásio, colegial e superior. Com tal estrutura, o ensino de Cálculo desapareceu da escola secundária, fato que perdura até dos dias de hoje.

O ensino-aprendizagem em Matemática tem sido alvo de discussões, em todos os níveis de ensino. Estudiosos do ensino-aprendizagem matemático, e até mesmos autores renomados, defendem a inclusão do ensino dos conteúdos de cálculo no ensino médio e uma reforma no ensino desses mesmos conteúdos no ensino superior, motivados pelo grande índice de reprovação nas disciplinas de Cálculo nas faculdades, como ressalta Rezende [3].

Molon [9] articula que, as raízes do problema estão além dos métodos e das técnicas, se referindo ao fracasso do ensino de Cálculo e aos altos índices de reprovação dessa

disciplina, discutido em sua dissertação “Cálculo no ensino médio: uma abordagem possível e necessária com o auxílio do *software geogebra*”.

Ávila [4] traz que

A idéia de que os programas de Matemática são extensos e não comportariam a inclusão do Cálculo é um equívoco. Os atuais programas estão, isto sim, mal estruturados. A reforma dos anos 60 introduziu nos programas um pesado e excessivo formalismo. Não obstante as modificações que têm sido feitas nos últimos dez ou quinze anos, num esforço de melhoria do ensino, muito desse formalismo persiste em muitos livros e é responsável pelo inchaço desnecessário dos programas (p. 01).

O autor ainda que complementa que

O exemplo mais evidente disso está no ensino das funções. Gasta-se muito tempo para introduzir uma extensa nomenclatura - contradomínio, função inversa, função composta, função injetiva, sobrejetiva - num esforço de poucos resultados práticos (p. 01).

E finaliza dizendo que “Seria muito mais proveitoso que todo o tempo que hoje se gasta, no 2º grau, ensinando formalismo e longa terminologia sobre funções, que todo esse tempo fosse utilizado com o ensino das noções básicas do Cálculo e suas aplicações” [4].

Analisando o ensino matemático hoje, a reforma curricular do Ensino Médio estabelece a divisão do conhecimento escolar em três áreas do conhecimento:

- Linguagens, Código e suas tecnologias;
- Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias;
- Ciências Humanas e suas tecnologias.

E, como ressaltado por Pereira [10], esta divisão por áreas

... tem como base a reunião daqueles conhecimentos que compartilham objetos de estudo e, portanto, mais facilmente se comunicam, criando condições para que a prática escolar se desenvolva numa perspectiva de interdisciplinaridade (Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio, p. 19 e p. 20).

Ou seja, espera-se hoje que o estudo desenvolvido e aplicado no ensino médio, seja de caráter interdisciplinar, promovendo integração entre as áreas do conhecimento. E com grande ambição, pode-se dizer até que este ensino deve ser não somente interdisciplinar, mas sim multidisciplinar.

As orientações educacionais complementares ao PCN - Parâmetros Curriculares Nacionais - estabelecem três grandes metas a serem alcançadas durante o Ensino Médio, nas três áreas do conhecimento:

- Representação e comunicação, competência que inclui a leitura, a interpretação e a produção de texto;
- Investigação e compreensão, competência que enfatiza a capacidade de resolução de situações-problemas;
- Contextualização das ciências no âmbito social-cultural

E sobre o ensino de funções, as orientações são:

Assim, o ensino pode ser iniciado diretamente pela noção de função para descrever situações de dependência entre duas grandezas, o que permite o estudo a partir de situações contextualizadas, descritas algebricamente e graficamente. ... os problemas de aplicação não devem ser deixados para o final desse estudo, mas devem ser motivo e contextos para o aluno aprender funções. A riqueza de situações envolvendo funções permite que o ensino se estruture permeado de exemplos do cotidiano, das formas gráficas que a mídia e outras áreas do conhecimento utilizam para descrever fenômenos de dependência entre grandezas. (Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio, p. 121).

A BNCC - Base Nacional Comum Curricular, documento mais recente sobre a base educacional no Brasil, reforça a ideia apresentada pelo PCN sobre a interdisciplinaridade, a contextualização e a resolução de problemas no que tange à matemática do Ensino Médio:

A área de Matemática e suas Tecnologias tem a responsabilidade de aproveitar todo o potencial já constituído por esses estudantes no Ensino Fundamental, para promover ações que ampliem o letramento matemático iniciado na etapa anterior. Isso significa que novos conhecimentos específicos devem estimular processos mais elaborados de reflexão e de abstração, que deem sustentação a modos de pensar que permitam aos estudantes formular e resolver problemas em diversos contextos com mais autonomia e recursos matemáticos. (Base Nacional Comum Curricular: Ensino Médio - Matemática e suas tecnologias, p. 528 e p. 529).

O documento ainda defende que o estudante tenha seu próprio modo de raciocinar, representar, comunicar, argumentar, apresentar e que aprenda conceitos cada vez mais sofisticados:

Para que esses propósitos se concretizem nessa área, os estudantes devem desenvolver habilidades relativas aos processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas. Para tanto, eles devem mobilizar seu modo próprio de raciocinar, representar, comunicar, argumentar e, com base em discussões e validações conjuntas, aprender conceitos e desenvolver representações e procedimentos cada vez mais sofisticados. (Base Nacional Comum Curricular: Ensino Médio - Matemática e suas tecnologias, p. 529).

A BNCC explica como as competências de raciocinar, representar, comunicar e argumentar podem ser alcançadas e ainda traz uma série de competências específicas de

matemática e suas tecnologias para o ensino médio, que estão de acordo e que sustentam o objetivo principal deste trabalho, como as que se seguem:

3. Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente; 4. Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas. (Base Nacional Comum Curricular: Ensino Médio - Matemática e suas tecnologias, p. 531).

Diante de todo esse contexto, apresenta-se aqui nesta dissertação, um método alternativo à construção de gráficos de funções polinomiais no Ensino Médio, utilizando os conceitos de derivada adequando-os ao nível de ensino em questão. Tal método é apresentado como um material que apoie o professor nesse procedimento, embasado nos conceitos estudados, apresentando-o com conceitos, definições e exemplos minuciosos, não necessariamente em forma de sequência didática, mas de uma forma simples e objetiva, com facilidade de ser aplicado no cotidiano do público-alvo em questão.

Portanto, o método aqui descrito, embora já utilizado no Ensino Superior, representa uma forma inusual de trabalhar este conteúdo no Ensino Médio, visando a interdisciplinaridade e a contextualização dessas ideias e conceitos matemáticos, tal como requer o PCN - Parâmetros Curriculares Nacionais - do Ensino Médio e a BNCC - Base Nacional Comum Curricular - do Ensino Médio.

Estrutura do trabalho

Como já citado anteriormente, o Cálculo Diferencial e Integral é uma grande ferramenta de resolução de problemas nas mais diversas áreas do conhecimento. E este trabalho propõe a utilização dos conceitos e aplicações da derivada, (compatível ao nível de ensino, com conceitos mais contextualizados) para construção de gráficos de funções polinomiais.

Para atingir tal objetivo, esta dissertação encontra-se organizada conforme descrito a seguir:

O Capítulo 1 é destinado ao estudo das funções polinomiais. Apresenta-se uma revisão bibliográfica sobre as referidas funções, destacando as principais características como definição, domínio, imagem, grau da função, raízes da função e seus respectivos gráficos. Todos os conceitos apresentados são acompanhados de exemplos, que facilitam sua aplicação, e que juntos ao elementos explanados no próximo capítulo, edificarão o método percorrido neste trabalho.

No Capítulo 2 aborda-se a derivada em sua definição formal, construindo-a através de conceitos usualmente utilizados como a ideia intuitiva limite, e as regras de derivação. Além da apresentação de conceitos teóricos, o capítulo conta com alguns exemplos relacionados às ideias apresentadas. Ainda neste capítulo, apresenta-se conceitos como pontos críticos, máximos e mínimos, crescimento e decrescimento, concavidade e pontos de inflexão.

Após esse aprofundamento teórico, o Capítulo 3 destina-se ao erguimento do método apresentado de construção de gráficos de funções polinomiais através de um roteiro dinâmico, referindo e interligando todos os conceitos já abordados em capítulos anteriores de forma conectada e contextualizada. Ao fim da formulação desse método, apresenta-se exemplos de construção de gráficos de funções polinomiais, solucionando-os de forma minuciosa como arquitetado ao longo do capítulo.

Já o Capítulo ?? é uma seção dedicada aos professores com algumas possibilidades de trabalhar o material aqui apresentado em suas aulas.

Em seguida, a Conclusão finaliza este trabalho, onde faz-se as considerações finais, apresentando os resultados alcançados até o momento da publicação deste, os resultados ainda esperados, e sugestões para trabalhos futuros.

1 Funções Polinomiais

É comum, em nosso dia-a-dia, nos depararmos com grandezas que se relacionam, como por exemplo, o valor da corrida do táxi em função da quilometragem percorrida, a área de um círculo em função do seu raio, o salário de um vendedor em função da quantidade vendida por ele, a taxa de crescimento de uma epidemia em função do número de dias descritos, a potência de um aparelho eletrônico em função da sua corrente nominal, entre inúmeras outras situações.

Tais relações são denominadas “funções”. Esse conceito é relativamente novo, sendo os primeiros estudos das funções desenvolvidos em meados do século XVII, por Newton e Leibniz, conforme consta em “História da Matemática”, de Boyer [1].

Basicamente, uma função pode ser definida como uma relação entre dois conjuntos, associando-se aos elementos do primeiro conjunto um único elemento do segundo conjunto. Desta forma, a definição de função não se limita apenas à matemática, sendo abordada e aplicada em diversas áreas do conhecimento e circunstâncias.

Este capítulo traz uma abordagem sobre as funções e suas características, com enfoque nas funções polinomiais. Dentro desse contexto, estabelece-se, a definição de funções polinomiais, operações entre polinômios, raízes das funções polinomiais de primeiro, segundo e terceiro grau e seus respectivos gráficos.

1.1 Funções de uma variável real

Para compreender as características e especificidades das funções, primeiramente se faz necessário discorrer sobre o conceito de função.

Definição 1.1.1. *Sejam A e B dois conjuntos não vazios. Uma **função** f , de A em B , é a correspondência que associa a cada elemento $x \in A$ um único elemento $y \in B$. O conjunto A é chamado de **domínio** da função f , denotado por $D(f)$, e o conjunto B de **contradomínio** da função f , denotado por $CD(f)$.*

Seja f uma função de A em B . Destaca-se:

- i) O único elemento y , em B , associado à x , em A , pela função f é indicado por $f(x)$ (lê-se f de x);
- ii) A notação $f : A \rightarrow B$ (lê-se: f de A em B), significa que tem-se uma função f , cujo domínio e contradomínio são A e B , respectivamente;

iii) Neste trabalho os conjuntos A e B sempre serão subconjuntos do conjunto dos números reais, \mathbb{R} .

Define-se **imagem** da função f , e denota-se por $Im(f)$, o conjunto formado pelos valores que $f(x)$ assume quando x percorre todo o conjunto A . Note que $Im(f) \subset CD(f)$.

Stewart [11] faz uma analogia interessante, comparando uma função a uma máquina, ilustrada na Figura 1, conforme segue:

É útil considerar uma função como uma máquina. Se x estiver no domínio da função f , quando x entrar na máquina, ele será aceito como entrada, e a máquina produzirá uma saída $f(x)$ de acordo com a lei que define a função. Assim, podemos pensar o domínio como o conjunto de todas as entradas, enquanto a imagem é o conjunto de todas as saídas possíveis (p. 10).

Figura 1 – Diagrama de máquina para a função f .



Fonte: Stewart [11].

Analisando o exemplo citado anteriormente, em que a área do círculo é dada em função de seu raio: a área do círculo, denotada por A , depende do seu raio r e a lei que relaciona essas duas variáveis pode ser escrita como $A = \pi \cdot r^2$. Desta forma, cada número r está relacionado a um único número A . Os valores atribuídos à r formam o domínio, e os valores assumidos por A formam a imagem da função. Enquanto a variável r é chamada de variável independente (aquela variável que está sendo manipulada e pode assumir qualquer valor dentro do domínio da função f), a variável A é chamada de variável dependente (aquela cujo valor depende da variável independente).

Existem vários tipos de funções: função polinomial, função modular, função trigonométrica, função logarítmica, função exponencial, entre tantas outras, mas todas elas definidas por leis generalizadas e propriedades específicas, podendo ainda serem classificadas de acordo com suas características em injetoras, sobrejetoras, bijetoras, limitadas, ilimitadas, etc. Para mais detalhes veja [11], [12], [13] e [14].

As funções aparecem em muitos contextos matemáticos e em vários problemas cotidianos, como afirmou Thomas [12], “As funções são o elemento-chave para descrever o mundo real em termos matemáticos” (p. 01).

De modo geral, é possível representar uma função de quatro formas:

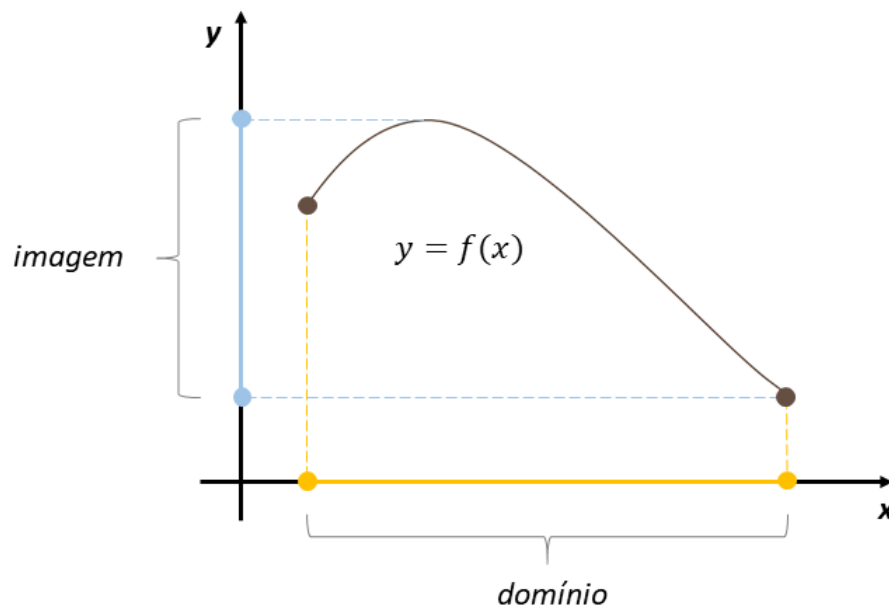
1. verbalmente, descrevendo-a com palavras;
2. numericamente, por meio de tabela de valores;
3. graficamente, através de gráficos;
4. algebricamente, utilizando-se uma fórmula explícita.

Uma notável forma de visualização e representação de uma função é através de seu gráfico, como afirma Stewart [11], “O gráfico de uma função f nos fornece uma imagem útil do comportamento ou “histórico” da função” (p. 11). O gráfico de uma função f é o conjunto:

$$G(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \quad y = f(x) \quad \text{e} \quad x \in D(f)\}.$$

Utilizando o sistema de eixos cartesianos xy , popularmente conhecido como Plano Cartesiano, geralmente representa-se o gráfico de f colocando a variável independente no eixo horizontal (ou eixo das abscissas) e a variável dependente no eixo vertical (ou eixo das ordenadas). Como é possível observar no gráfico da função $y = f(x)$, ilustrado na Figura 2 a seguir, o domínio da função f está contido no eixo x e a imagem da função f está contida no eixo y , matematicamente expressos por $D(f) \subset \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = 0\}$ e $Im(f) \subset \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x = 0\}$.

Figura 2 – Domínio e Imagem de uma função f .



Fonte: Produzido pela autora.

O gráfico de uma função diz muito sobre suas características, como ressalta Queiroz [15]:

O gráfico de uma função real, com valores reais, forma uma curva no plano xy que mostra o seu comportamento, tais como: continuidade, descontinuidade, crescimento e decrescimento dos valores de uma função em um determinado intervalo do domínio, zeros da função, máximos e mínimos locais, pontos de inflexão, assíntotas, concavidade e curvatura do gráfico em um determinado intervalo do domínio e etc. (p. 13).

É interessante evidenciar dois aspectos fundamentais na construção do gráfico de uma função: O zero ou as raízes da função e o ponto onde a função intercepta o eixo das ordenadas. Tais pontos serão abordados posteriormente.

1.2 Funções Polinomiais

Como o foco deste trabalho está nas funções polinomiais, há conceitos importantes relacionados à tais funções, que estão descritos a seguir, e que são de suma relevância para o alcance do objetivo geral deste trabalho.

“As funções polinomiais representam uma das classes mais importantes de função, pois modelam diversos problemas, desde os mais simples até os mais complexos, nas diferentes áreas” (p. 01), Nantes [16]. Estas funções são utilizadas na modelagem física para descrever a trajetória de um projétil, no mercado de ações para prever variações de preços e pontos de equilíbrio entre oferta e demanda, no transporte para calcular aluguéis e fretes, no cálculo de salários e despesas, e até mesmo na área da saúde, como indicador da taxa de crescimento ou decrescimento de uma patologia, por exemplo. Rezende [3] descreve com entusiasmo essa pluralidade de aplicações das funções polinomiais:

Em geometria, por exemplo, a área de um círculo é proporcional ao quadrado do comprimento do seu raio e a área do quadrado é igual ao quadrado do comprimento do seu lado. Na disciplina de Física, você já deve ter ouvido falar de equação horária de um corpo em queda livre, energia potencial elástica de uma mola, energia cinética, etc. A função polinomial do segundo grau é bastante útil nesses contextos! Outros exemplos, na área de economia, de biologia ou em áreas mais diversas do conhecimento, podem ser visualizados em textos de matemática aplicada ou mesmo em um bom livro de Cálculo (p. 01).

Sua importância baseia-se também na sua simplicidade: são de fácil manipulação, seus valores numéricos necessitam apenas de aritmética elementar para serem calculados, e suas raízes podem ser encontradas com agilidade, como destacado adiante. Em outro trecho de seu artigo, Rezende [3] também menciona a simplicidade das funções polinomiais, descrevendo-as como encantadoras:

Assim, dois fatores conspiram a favor das funções polinomiais: ou os fenômenos científicos se encaixam maravilhosamente em modelos descritos por funções polinomiais, ou essas funções satisfazem à condição do “menor esforço” do intelecto humano que, para vencer problemas de natureza mais complexa, tende a realizar uma simplificação dos modelos a serem utilizados. De um fato temos certeza: a simplicidade dessas funções é realmente encantadora! (p. 01).

Devido à sua relevância, as funções polinomiais são estudadas em diversos níveis de educação, desde o ensino fundamental até o ensino médio, como destaca Nantes [16]:

Seu estudo inicia-se no 7º ano, em que o aluno aprende a identificar os dados de um problema e como traduzí-lo em linguagem matemática para uma equação de 1º grau, e segue até o 3º ano do ensino médio, em que os alunos desenvolvem o conhecimento algébrico, aprendem a identificar os polinômios, definindo conceitos e propriedades, além de realizar operações com polinômios (p. 01).

Além do mais, as funções também são abordadas no ensino superior, e em algumas áreas do conhecimento, adiante desse, como é o caso do próprio PROFMAT. As funções polinomiais são elucidadas através da definição:

Definição 1.2.1. *Uma **função polinomial** de grau n , ou simplesmente polinômio de grau n , é aquela que pode ser escrita da forma*

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \quad (1.1)$$

onde $n \in \mathbb{N}$; e $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{R}$, com $a_n \neq 0$.

Os números $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ são constantes chamadas de **coeficientes** do polinômio. O domínio de qualquer polinômio é $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$. O coeficiente a_0 é, também, conhecido como coeficiente independente ou termo independente; e o coeficiente a_n , como coeficiente dominante. Observe que, o grau do polinômio é dado pelo maior expoente com coeficiente não-nulo, entre os monômios (polinômio que contém apenas um termo) que o formam.

Entre as funções polinomiais podemos destacar algumas que são mais comuns e mais facilmente encontradas e trabalhadas no Ensino Médio. Estas serão percorridas de forma algébrica a seguir e seus gráficos serão abordados na Seção 1.2.4.

- **Funções constantes**

As funções constantes são do tipo

$$f(x) = a_0, \quad \text{com } a_0 \in \mathbb{R}.$$

Note que, $f(x) = a_0$ também pode ser escrita na forma $f(x) = a_0 x^0$, desta forma, podemos dizer que as funções constantes são polinomiais de grau 0.

Exemplo 1.2.1. *São exemplos de funções constantes:*

$$f(x) = 2, \quad g(x) = -3 \quad e \quad h(x) = \pi.$$

- **Funções afins**

As funções afins são aquelas que podem ser escritas da forma

$$f(x) = a_1x + a_0, \quad \text{com } a_1, a_0 \in \mathbb{R} \quad e \quad a_0 \neq 0,$$

ou seja, são funções polinomiais de grau 1. O coeficiente dominante a_1 é denominado coeficiente angular, enquanto o coeficiente independente a_0 é denominado coeficiente linear.

Exemplo 1.2.2. *São exemplos de funções afins:*

$$f(x) = 3x + 1, \quad g(x) = -2x + 5 \quad e \quad h(x) = \frac{x}{3} - 4.$$

- **Funções lineares**

As funções lineares são uma particularidade das funções afins, onde $b = 0$. Segue que, se f é linear, então

$$f(x) = ax, \quad \text{com } a \in \mathbb{R} \quad e \quad a \neq 0.$$

Exemplo 1.2.3. *São exemplos de funções lineares:*

$$f(x) = -2x, \quad g(x) = 5x \quad e \quad h(x) = \frac{1}{2}x.$$

- **Funções quadráticas**

As função quadráticas são funções da forma

$$f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0, \quad \text{com } a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R} \quad e \quad a_2 \neq 0.$$

Note que, as funções quadráticas são, na verdade, funções polinomiais de grau 2.

Exemplo 1.2.4. *São exemplos de funções quadráticas:*

$$f(x) = x^2 + 2x - 3, \quad g(x) = 2x^2 - 5x \quad e \quad h(x) = -x^2 + 9.$$

- **Funções cúbicas**

As funções cúbicas são funções polinomiais de grau 3, ou seja, àquelas que podem ser escritas da forma

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0, \quad \text{com } a_3, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R} \quad e \quad a_3 \neq 0.$$

Exemplo 1.2.5. *São exemplos de funções cúbicas:*

$$f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4, \quad g(x) = -x^3 + 27 \quad e \quad h(x) = 3x^3 + 6x^2 + 8.$$

1.2.1 Operações entre funções polinomiais

Quando se trabalha com funções polinomiais pode ser necessário efetuar algumas operações entre as mesmas. As operações entre funções polinomiais se dão da mesma forma que as operações entre números. Tais operações resultam em novas funções polinomiais.

- **Adição e subtração**

A adição e subtração de funções polinomiais se dá, respectivamente, com a soma e subtração dos coeficientes dos monômios de mesmo grau, isto é,

$$\begin{aligned} \text{se } f(x) &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_0 \quad \text{e} \\ g(x) &= b_m x^m + \dots + b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \dots + b_0, \quad \text{com } m \geq n, \quad \text{então} \\ (f + g)(x) &= f(x) + g(x) \\ &= b_m x^m + \dots + (a_n + b_n) x^n + (a_{n-1} + b_{n-1}) x^{n-1} + \dots + (a_0 + b_0) \quad \text{e} \\ (f - g)(x) &= f(x) - g(x) \\ &= b_m x^m + \dots + (a_n - b_n) x^n + (a_{n-1} - b_{n-1}) x^{n-1} + \dots + (a_0 - b_0). \end{aligned}$$

Exemplo 1.2.6. *Sejam $f(x) = x^4 + 3x^3 + 2$ e $g(x) = -7x^3 + x^2 - 2x + 1$.*

A soma $(f + g)(x)$, resulta em:

$$\begin{aligned} (f + g)(x) &= (x^4 + 3x^3 + 2) + (-7x^3 + x^2 - 2x + 1) \\ &= x^4 + (3 - 7)x^3 + x^2 - 2x + (2 + 1) \\ &= x^4 - 4x^3 + x^2 - 2x + 3. \end{aligned}$$

De modo análogo, a subtração $(f - g)(x)$, resulta em:

$$\begin{aligned} (f - g)(x) &= (x^4 + 3x^3 + 2) - (-7x^3 + x^2 - 2x + 1) \\ &= x^4 + (3 - (-7))x^3 - x^2 - (-2x) + (2 - 1) \\ &= x^4 + 10x^3 - x^2 + 2x + 1. \end{aligned}$$

- **Multiplicação**

A multiplicação de funções polinomiais utiliza, fortemente, a propriedade distributiva do conjunto dos números reais, popularmente conhecida como “chuveirinho”. De fato, a multiplicação de polinômios se dá com a soma dos resultados das multiplicações de cada elemento de um polinômio por cada elemento do outro polinômio, isto é,

$$\begin{aligned}
\text{se } f(x) &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_0 \quad \text{e} \\
g(x) &= b_m x^m + \dots + b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \dots + b_0, \quad \text{com } m \geq n, \quad \text{então} \\
(f \cdot g)(x) &= f(x) \cdot g(x) \\
&= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m a_i \cdot b_j \cdot x^{i+j} \\
&= a_n \cdot b_m \cdot x^{n+m} + \dots + a_n \cdot b_n \cdot x^{n+n} + a_n \cdot b_{n-1} \cdot x^{n+(n-1)} + \dots + a_n \cdot b_0 \cdot x^n + \\
&\quad a_{n-1} \cdot b_m \cdot x^{(n-1)+m} + \dots + a_{n-1} \cdot b_n \cdot x^{(n-1)+n} + a_{n-1} \cdot b_{n-1} \cdot x^{(n-1)+(n-1)} + \\
&\quad \dots + a_{n-1} \cdot b_0 \cdot x^{n-1} + \dots + a_0 \cdot b_m \cdot x^m + \dots + a_0 \cdot b_n \cdot x^n + \dots + a_0 \cdot b_0.
\end{aligned}$$

Lembrando que, pelas propriedades de potenciação do conjunto dos números reais, $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$.

Exemplo 1.2.7. *Sejam $f(x) = x^4 - 6x^2 - 5x$ e $g(x) = -2x^2 + 3$.*

A multiplicação $(f \cdot g)(x)$, resulta em:

$$\begin{aligned}
(f \cdot g)(x) &= f(x) \cdot g(x) \\
&= -2x^6 + 3x^4 + 12x^4 - 18x^2 + 10x^3 - 15x \\
&= -2x^6 + 15x^4 + 10x^3 - 18x^2 - 15x.
\end{aligned}$$

• Divisão

A divisão de funções polinomiais é feita de forma análoga à divisão de números inteiros. Dados dois polinômios $f(x)$ e $g(x)$, com $g(x)$ não-nulo, existem polinômios $q(x)$ e $r(x)$, tais que $f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x)$, onde o grau de $r(x)$ é igual a zero ou menor que o grau de $g(x)$.

Na operação exposta acima, $f(x)$ é denominado de dividendo, $g(x)$ de divisor, $q(x)$ de quociente e $r(x)$ de resto, assim como na divisão de números inteiros. Este processo é equivalente a fazer a “divisão por chave”:

$$\begin{array}{r}
f(x) \quad | \quad g(x) \\
\hline
r(x) \quad q(x)
\end{array}$$

Das propriedades de potenciação, tem-se que o grau do quociente será igual à diferença entre os graus do dividendo e divisor. Quando o resto $r(x)$ da divisão de $f(x)$ por $g(x)$ é zero, isto é, $r(x)$ é o polinômio nulo, diz-se que $f(x)$ é divisível por $g(x)$ ou ainda que $g(x)$ é divisor de $f(x)$.

Vale ressaltar aqui, que existem outros algoritmos para divisão de polinômios, como o método de Descartes e o dispositivo de Briot-Ruffini, este último muito utilizado no Ensino Médio.

Exemplo 1.2.8. Dados os polinômios $f(x) = 2x^3 + 6x^2 + 10x + 5$ e $g(x) = x + 2$, determine o quociente $q(x)$ e o resto $r(x)$ da divisão de $f(x)$ por $g(x)$.

$$\begin{array}{r}
 2x^3 + 6x^2 + 10x + 5 \quad | \quad x + 2 \\
 \underline{2x^3 + 4x^2} \\
 2x^2 + 10x + 5 \\
 \underline{2x^2 + 4x} \\
 6x + 5 \\
 \underline{6x + 12} \\
 -7
 \end{array}$$

Segue algoritmo para a operação acima:

Primeiramente, faz-se a divisão do termo de maior potência de $f(x)$ pelo termo de maior potência de $g(x)$, obtendo $q_1(x)$:

$$2x^3 \div x = 2x^2 = q_1(x).$$

Vale observar que $x^m \div x^n = x^{m-n}$.

Agora, multiplica-se $q_1(x)$ por $g(x)$:

$$q_1(x) \cdot g(x) = 2x^2 \cdot (x + 2) = 2x^3 + 4x^2.$$

O resultado dessa multiplicação é então subtraído de $f(x)$, obtendo $r_1(x)$:

$$f(x) - (q_1(x) \cdot g(x)) = (2x^3 + 6x^2 + 10x + 5) - (2x^3 + 4x^2) = 2x^2 + 10x + 5 = r_1(x).$$

O primeiro resto encontrado, aqui denominado como $r_1(x)$, tem grau 2. Esse grau ainda é maior que o grau de $g(x)$. Desta forma, a sequência é repetida até que o resto tenha grau menor que $g(x)$.

O algoritmo prossegue com a divisão do termo de maior potência de $r_1(x)$ pelo termo de maior potência de $g(x)$, obtendo $q_2(x)$:

$$2x^2 \div x = 2x = q_2(x).$$

Então, multiplica-se $q_2(x)$ por $g(x)$:

$$q_2(x) \cdot g(x) = (2x) \cdot (x + 2) = 2x^2 + 4x.$$

E subtrai-se este resultado de $r_1(x)$, obtendo assim $r_2(x)$:

$$r_1(x) - (q_2(x) \cdot g(x)) = (2x^2 + 10x + 5) - (2x^2 + 4x) = 6x + 5 = r_2(x).$$

Como o resto $r_2(x)$ tem o mesmo grau de $g(x)$, repete-se a sequência mais uma vez.

Faz-se então a divisão do termo de maior potência de $r_2(x)$ pelo termo de maior potência de $g(x)$, obtendo $q_3(x)$:

$$6x \div x = 6 = q_3(x).$$

Multiplique-se $q_3(x)$ por $g(x)$:

$$q_3(x) \cdot g(x) = 6 \cdot (x + 2) = 6x + 12.$$

E subtraia-se este resultado de $r_2(x)$, obtendo $r_3(x)$:

$$r_2(x) - (q_3(x) \cdot g(x)) = (6x + 5) - (6x + 12) = -7 = r_3(x).$$

Como o grau do resto $r_3(x) = -7$ é menor que o grau de $g(x)$, então a divisão se encerra aqui.

O quociente $q(x)$ é a soma de todos os quocientes encontrados, ou seja, $q(x) = q_1(x) + q_2(x) + q_3(x)$; e o resto da divisão é o último resto encontrado.

Desta forma, $f(x) = 2x^3 + 6x^2 + 10x + 5$ dividido por $g(x) = x + 2$, tem quociente igual a $2x^2 + 2x + 6$ e tem resto igual a -7 . O que equivale a dizer que $2x^3 + 6x^2 + 10x + 5 = (x + 2) \cdot (2x^2 + 2x + 6) + (-7)$.

1.2.2 Valor numérico de uma Função Polinomial

O valor numérico de uma função polinomial $f(x)$ em $x = k$, com $k \in \mathbb{R}$, é o valor da expressão dada por $f(x)$ substituindo x por k , denotando $f(k)$, e efetuando todas as operações aritméticas indicadas.

Exemplo 1.2.9. O valor numérico da função $f(x) = x^2 + 2x - 3$ em $x = 2$ é:

$$\begin{aligned} f(2) &= 2^2 + 2 \cdot 2 - 3 \\ &= 4 + 4 - 3 = 5. \end{aligned}$$

Desta forma, 5 é o valor numérico da função $f(x)$ em $x = 2$. Pode-se dizer também que 5 é a imagem da função em $x = 2$.

1.2.3 Raízes de uma Função Polinomial

Seja $f : A \rightarrow B$ uma função qualquer, os zeros ou raízes da função f são os valores de $x \in A$ para os quais $f(x) = 0$, e são nesses valores que o gráfico da função f intercepta o eixo das abscissas.

O Teorema do Resto define o resto na divisão de polinômios em uma situação particular e possui o seguinte enunciado:

Teorema 1.2.2. (Teorema do Resto) O resto da divisão de um polinômio $f(x)$ por $(x - a)$ é igual a $f(a)$.

Demonstração. Supondo grau $f(x)$ igual a n , sabe-se que $f(x)$ pode ser escrita como $f(x) = (x - a) \cdot q(x) + r(x)$, onde o grau de $q(x)$ é igual a $n - 1$ e o grau de $r(x)$ é menor que grau de $x - a$. O valor $f(a)$ pode ser encontrado fazendo $x = a$:

$$f(a) = (a - a) \cdot q(a) + r(a).$$

Como $(a - a) = 0$, então

$$f(a) = 0 \cdot q(a) + r(a) = r(a).$$

Como o divisor $(x - a)$ tem grau 1, então o resto $r(x)$ (que tem grau menor que o divisor) tem grau 0, ou seja, $r(x)$ é constante. Sendo $r(x)$ uma constante, então $r(x) = r(a) = f(a)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. \square

Uma consequência imediata do Teorema do Resto é o Teorema de D'Alembert.

Teorema 1.2.3. (Teorema de D'Alembert) *Um polinômio qualquer $f(x)$ será divisível por $(x - a)$ se, e somente se, $f(a) = 0$.*

Demonstração. (\Rightarrow) Ao dividir $f(x)$ por $(x - a)$, pode-se escrever $f(x)$ da seguinte maneira:

$$f(x) = (x - a) \cdot q(x) + r(x).$$

onde $q(x)$ é o quociente e $r(x)$ o resto. Se $f(x)$ é divisível por $(x - a)$, então $r(x) = 0$:

$$f(x) = (x - a) \cdot q(x).$$

$f(a)$ pode ser encontrado fazendo $x = a$, como se segue:

$$f(a) = (a - a) \cdot q(a)$$

$$f(a) = 0 \cdot q(a) = 0.$$

Portanto, se $f(x)$ é divisível por $(x - a)$, então $f(a) = 0$.

(\Leftarrow) Segue do Teorema do Resto que $f(x) = (x - a) \cdot q(x) + f(a)$. Como, $f(a) = 0$, temos que $f(x) = (x - a) \cdot q(x)$, ou seja, $f(x)$ é divisível por $x - a$. \square

Para compreender a fatoração, apresentada mais adiante, se faz necessário conhecer o conceito de “polinômio irredutível”:

Definição 1.2.4. *Diz-se que um polinômio não constante $f(x)$ é irredutível sobre \mathbb{R} se é impossível expressar $f(x)$ como um produto $g(x) \cdot h(x)$ de dois polinômios $g(x)$ e $h(x)$ cujos graus são ambos maiores ou iguais a 1.*

Ainda sobre polinômios irredutíveis, tem-se a seguinte proposição:

Proposição 1.2.5. *Um polinômio $f \in \mathbb{R}$ é irredutível sobre \mathbb{R} se, e somente se, o grau de f é 1 ou 2, e seu discriminante ($\Delta = b^2 - 4ac$) é menor que zero.*

A demonstração desta proposição pode ser vista em [17].

Segue do Teorema de D'Alembert que, se a é raiz de uma função polinomial f de grau n , então podemos decompor f da forma:

$$f(x) = (x - a) \cdot q(x), \tag{1.2}$$

onde $q(x)$ é uma função polinomial com grau $n - 1$.

De modo geral, segue a proposição:

Proposição 1.2.6. *Se f tem grau n e possui k raízes distintas, a_1, \dots, a_k , então f pode ser fatorada da forma:*

$$f(x) = (x - a_1) \cdot (x - a_2) \cdot \dots \cdot (x - a_k) \cdot q(x), \quad (1.3)$$

onde $q(x)$ é uma função polinomial com grau igual a $n - k$.

Demonstração. Seja $f(x)$ uma função de grau n com k raízes distintas $a_1, a_2, a_3, \dots, a_k$. Segue que, como a_1 é raiz de f , então f pode ser escrita da forma:

$$f(x) = (x - a_1) \cdot q_1(x)$$

onde $q_1(x)$ tem grau $n - 1$. Note que, se $a_1 \neq a_2$, então a_2 é raiz de $q_1(x)$, e $q_1(x)$ pode ser escrito como:

$$q_1(x) = (x - a_2) \cdot q_2(x)$$

onde $q_2(x)$ tem grau $n - 2$. De forma análoga, a_3 é raiz de $q_2(x)$, que pode ser escrito como:

$$q_2(x) = (x - a_3) \cdot q_3(x)$$

onde $q_3(x)$ tem grau $n - 3$. E assim sucessivamente, até que a_k seja raiz de $q_n(x)$. Portanto, $f(x)$ pode ser escrita como:

$$f(x) = (x - a_1) \cdot (x - a_2) \cdot \dots \cdot (x - a_k) \cdot q(x).$$

□

Deste resultado, segue o corolário:

Corolário 1.2.7. *Se f tem grau n e possui $n - 2$ raízes então f pode ser fatorada da forma:*

$$f(x) = (x - a_1) \cdot (x - a_2) \cdot \dots \cdot (x - a_{n-2}) \cdot q(x),$$

onde $q(x)$ é uma função polinomial irredutível com grau igual a 2.

Analisando $f(x) = (x - a_1) \cdot q_1(x)$, pode ocorrer, por exemplo, de a_1 ser também raiz de $q_1(x)$. Nesse caso, teríamos

$$q_1(x) = (x - a_1) \cdot q_2(x)$$

e conseqüentemente, $f(x)$ é escrita como:

$$f(x) = (x - a_1) \cdot q_1(x) = (x - a_1) \cdot (x - a_1) \cdot q_2(x) = (x - a_1)^2 \cdot q_2(x).$$

Neste caso, diz-se que a_1 é raiz dupla de $f(x)$ ou que a raiz a_1 tem multiplicidade 2, se não for raiz de q_2 . Caso a_1 ainda seja raiz de $q_2(x)$, diz-se então que tem multiplicidade 3, se não for raiz de q_3 , e assim por diante.

De modo geral, segue que

Proposição 1.2.8. *Seja f uma função polinomial de grau n , cujas raízes são a_1, a_2, \dots, a_k , de multiplicidades n_1, n_2, \dots, n_k , respectivamente, então:*

$$f(x) = (x - a_1)^{n_1} \cdot (x - a_2)^{n_2} \cdot \dots \cdot (x - a_k)^{n_k} \cdot q(x), \quad (1.4)$$

onde $q(x)$ é uma função polinomial com grau igual a $n - (n_1 + n_2 + \dots + n_k)$.

Exemplo 1.2.10. *A função $f(x) = x^2 + 5x + 6$, cujas raízes são 2 e 3, pode ser escrita como*

$$f(x) = (x - 2) \cdot (x - 3).$$

Exemplo 1.2.11. *A função $f(x) = x^6 - 3x^5 + 2x^4 + 16x^2 - 48x + 32$, possui raízes 1 e 2, e pode ser escrita como*

$$f(x) = (x - 1) \cdot (x - 2) \cdot (x^4 + 16).$$

Observação: *Note que $(x^4 + 16)$ apesar de não ter raízes reais, é redutível sobre os reais. De fato,*

$$(x^4 + 16) = (x^2 - 2\sqrt{2}x + 4)(x^2 + 2\sqrt{2}x + 4).$$

1.2.3.1 Raiz de Funções de Primeiro Grau

Uma função de grau 1 ou de 1º grau possui uma única raiz. Seja $f(x) = ax + b$. Para determinar a raiz desta função, note que $f(x) = 0$ é equivalente à:

$$ax + b = 0.$$

Logo, resolvendo-se a equação de primeiro grau, obtém-se

$$x = -\frac{b}{a}.$$

Note que a função de primeiro grau sempre possui, exatamente, uma única raiz.

Exemplo 1.2.12. *Considere a função $f(x) = 3x + 1$. Fazendo $f(x) = 0$, obtém-se*

$$3x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}.$$

A raiz da função $f(x) = 3x + 1$ é $-\frac{1}{3}$.

1.2.3.2 Raízes de Funções de Segundo Grau

Uma função de grau 2 ou de 2º grau, ou ainda função quadrática, do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$, possui no máximo duas raízes. A quantidade de raízes (zero, uma ou duas) está diretamente relacionada ao discriminante da função, denotado por Δ e definido por $\Delta = b^2 - 4ac$:

- i) $\Delta > 0$: a função possui duas raízes;
- ii) $\Delta = 0$: a função possui uma única raiz (com multiplicidade 2);
- iii) $\Delta < 0$: a função não possui raízes.

Para determinar a raiz ou as raízes de uma função de 2º grau, basta resolver $f(x) = 0$. Pode-se então usar um método geral, a bem conhecida “Fórmula de Bháskara”, ou pode-se analisar os casos particulares.

A Fórmula de Bháskara é dada em função dos coeficientes a , b , c e do discriminante Δ , como acentuado na proposição abaixo:

Proposição 1.2.9. *Seja f uma função de segundo grau da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$. As raízes de f podem ser determinadas através de*

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}. \quad (1.5)$$

Demonstração. Seja $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$. Fazendo $f(x) = 0$, tem-se que

$$ax^2 + bx + c = 0. \quad (1.6)$$

Dividindo toda a equação acima por a , segue que

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}. \quad (1.7)$$

O objetivo aqui é obter um trinômio quadrado perfeito do lado esquerdo da equação (1.7). Para isto, basta completar o quadrado somando-se um número conveniente. Para obter este número procede-se do seguinte modo:

Divide-se $\frac{b}{a}$ por 2, encontrando

$$\frac{\frac{b}{a}}{2} = \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{2} = \frac{b}{2a}, \quad (1.8)$$

Elevando o resultado (1.8) ao quadrado, obtém-se

$$\left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2}.$$

Soma-se, então, $\frac{b^2}{4a^2}$ em ambos os membros da equação (1.7) obtém-se:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}. \quad (1.9)$$

Escreve-se o primeiro membro como um produto notável e simplifica-se o segundo membro o máximo possível, fazendo-se a soma através do mínimo múltiplo comum:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{-4ac + b^2}{4a^2}.$$

Extraindo-se a raiz quadrada de ambos os membros da equação, segue que

$$\begin{aligned} \sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} &= \sqrt{\frac{-4ac + b^2}{4a^2}} \\ \left(x + \frac{b}{2a}\right) &= \pm \frac{\sqrt{-4ac + b^2}}{\sqrt{4a^2}} \\ x + \frac{b}{2a} &= \pm \frac{\sqrt{-4ac + b^2}}{2a}. \end{aligned}$$

Isolando x , obtêm-se

$$x = \pm \frac{\sqrt{-4ac + b^2}}{2a} - \frac{b}{2a}.$$

Reorgizando os termos, observa-se que o discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ é encontrado dentro da raiz quadrada. Desta forma,

$$\begin{aligned} x &= -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{-4ac + b^2}}{2a} \\ x &= \frac{-b \pm \sqrt{-4ac + b^2}}{2a} \\ x &= \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}. \end{aligned}$$

Desta forma, concluí-se a dedução da Fórmula de Báskara. \square

Exemplo 1.2.13. Considere a função $f(x) = x^2 + 2x - 3$. Fazendo $f(x) = 0$, pode-se utilizar a fórmula de Bháskara para determinar suas raízes, se existirem. Note que os coeficientes de f são $a = 1$, $b = 2$, $c = -3$. Desta forma, o discriminante é dado por:

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4 \cdot a \cdot c \\ &= 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) \\ &= 4 + 12 = 16. \end{aligned}$$

Como $\Delta = 16 > 0$, segue que a função $f(x) = x^2 + 2x - 3$ possui duas raízes. Utilizando a fórmula de Bháskara, tem-se:

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{-2 \pm 4}{2}. \end{aligned}$$

Desta forma, as raízes são:

$$x_1 = \frac{-2 + 4}{2} = \frac{2}{2} = 1 \quad e \quad x_2 = \frac{-2 - 4}{2} = \frac{-6}{2} = -3.$$

Há dois casos particulares de funções quadráticas, cujas raízes podem ser encontradas sem utilizar a fórmula de Bháskara: i) quando $b = 0$; ii) quando $c = 0$. Veja estes casos a seguir:

i) Quando $b = 0$.

Neste caso, a função apresenta a estrutura

$$f(x) = ax^2 + c.$$

Para encontrar as raízes desse tipo de função, tomando $f(x) = ax^2 + c = 0$, basta adicionar $-c$ de ambos lados:

$$\begin{aligned} f(x) = ax^2 + c &= 0 \\ ax^2 + c - c &= 0 - c. \end{aligned}$$

Em seguida, divide-se ambos os lados da igualdade por $a \neq 0$:

$$\begin{aligned} ax^2 &= -c \\ x^2 &= -\frac{c}{a}. \end{aligned}$$

Caso a expressão $-\frac{c}{a} < 0$, então a equação não tem solução e, conseqüentemente, não possui raízes. Caso a expressão $-\frac{c}{a} > 0$, extra-se a raiz quadrada e obtém-se:

$$x_1 = -\sqrt{\frac{c}{a}} \quad e \quad x_2 = +\sqrt{\frac{c}{a}}.$$

Quando $c = 0$, a raiz da função é única: $x_1 = x_2 = 0$.

Exemplo 1.2.14. Considere a função $f(x) = 2x^2 - 32$. Fazendo $f(x) = 0$, vem que:

$$\begin{aligned} 2x^2 - 32 &= 0 \\ 2x^2 &= 32 \\ x^2 &= \frac{32}{2} = 16. \end{aligned}$$

Portanto, as raízes da função $f(x) = 2x^2 - 32$ são 4 e -4.

ii) Quando $c = 0$.

Neste caso, a função apresenta a estrutura

$$f(x) = ax^2 + bx.$$

Para encontrar as raízes desse tipo de função, tomando $f(x) = ax^2 + bx = 0$, basta colocar x em evidência, e analisar as partes que compõem a multiplicação da expressão:

$$ax^2 + bx = x(ax + b) = 0.$$

Para que esta multiplicação resulte em zero, uma das parcelas deve ser, necessariamente, zero. Desta forma, conclui-se que:

$$x = 0 \quad \text{ou} \quad ax + b = 0.$$

Resultando em duas raízes:

$$x_1 = 0 \quad \text{e} \quad x_2 = -\frac{b}{a}.$$

Exemplo 1.2.15. Considere a função $f(x) = 2x^2 + 5x$. Fazendo $f(x) = 0$, vem que:

$$\begin{aligned} 2x^2 + 5x &= 0 \\ x(2x + 5) &= 0. \end{aligned}$$

Considerando que uma das parcelas tem que, impreterivelmente, ser igual a zero, tem-se que:

$$x = 0 \quad \text{ou} \quad 2x + 5 = 0.$$

Portanto, as raízes da função $f(x) = 2x^2 + 5x$ são 0 e $-\frac{5}{2}$.

1.2.3.3 Raízes de Funções de Terceiro Grau

Uma função de grau 3 ou de 3º grau, ou ainda função cúbica, admite no máximo três raízes. Seja $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, a função f pode possuir:

- uma única raiz (simples ou de multiplicidade 1);
- uma única raiz com multiplicidade 3;
- duas raízes (sendo uma delas com multiplicidade 2);
- três raízes;

Note que, no caso de funções de terceiro grau, estas possuem no mínimo uma raiz.

Há numerosos e variados métodos para determinar as raízes de uma função cúbica, incluindo a análise de casos particulares, mas nenhum destes tão popular quanto à Fórmula de Bháskara, por exemplo. Seguem alguns destes métodos, enumerados a seguir: i) quando $b = c = 0$; ii) quando $d = 0$; iii) fatoração por agrupamento; iv) as Relações de Girard; v) raízes racionais; vi) análise pelo discriminante.

Tais métodos estão expostos e exemplificados como se segue:

i) Quando $b = c = 0$

Neste caso particular, a função cúbica apresenta a estrutura

$$f(x) = ax^3 + d.$$

Para encontrar as raízes desse tipo de função, tomando $f(x) = ax^3 + d = 0$, basta adicionar $-d$ de ambos os lados, depois dividir ambos os membros da igualdade por $a \neq 0$ e por fim extrair raiz cúbica:

$$\begin{aligned} ax^3 + d &= 0 \\ ax^3 + d - d &= 0 - d \\ ax^3 &= -d \\ x^3 &= -\frac{d}{a}. \end{aligned}$$

Independente do sinal da expressão $-\frac{d}{a}$, a função terá uma única raiz da função, dada por:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{d}{a}}.$$

Exemplo 1.2.16. *Seja a função $f(x) = 3x^3 + 24$. Fazendo $f(x) = 0$, vem que*

$$\begin{aligned} 3x^3 + 24 &= 0 \\ 3x^3 &= -24 \\ x^3 &= -\frac{24}{3} = -8. \end{aligned}$$

Portanto, a raiz da função $f(x) = 3x^3 + 24$ é -2 .

ii) Quando $d = 0$

Neste caso, a função apresenta a estrutura

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx.$$

Para encontrar as raízes desse tipo de função, tomando $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx = 0$, basta colocar x em evidência, e analisar as partes que compõem a multiplicação da expressão:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx = x(ax^2 + bx + c) = 0.$$

Para que esta multiplicação resulte em zero, uma das parcelas deve ser, necessariamente, zero. Desta forma:

$$x = 0 \quad \text{ou} \quad ax^2 + bx + c = 0.$$

A segunda parcela pode ser resolvida utilizando os métodos vistos anteriormente. Resultando então, nas raízes:

1) Se $\Delta < 0 \Rightarrow$ uma única raiz (multiplicidade 1): $x = 0$;

2) Se $\Delta = 0 \Rightarrow$ duas raízes: $x = 0$ e $x = \frac{-b}{2a}$, esta última com multiplicidade 2;

3) Se $\Delta > 0 \Rightarrow$ três raízes: $x = 0$, $x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$.

Onde Δ é o discriminante de $ax^2 + bx + c$.

Exemplo 1.2.17. *Seja a função $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x$. Fazendo $f(x) = 0$, vem que:*

$$\begin{aligned} x^3 + 2x^2 - 3x &= 0 \\ x(x^2 + 2x - 3) &= 0. \end{aligned}$$

Considerando que uma das parcelas tem que, impreterivelmente, ser igual a zero, tem-se que:

$$x = 0 \quad \text{ou} \quad x^2 + 2x - 3 = 0.$$

Resolvendo a segunda equação por Bháskara, tem-se que as raízes da função $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x$ são 0, 1 e -3.

iii) Fatoração por agrupamento

Esta técnica consiste em fatorar o polinômio de 3º grau, agrupando-o em duas partes, e caso tenha um termo em comum colocá-lo em evidência para chegar em uma multiplicação de dois fatores, podendo assim, analisar cada fator separadamente. O impasse desta técnica é que nem sempre, quando se agrupa o polinômio de 3º grau em duas partes, encontra-se um termo em comum, não sendo possível a aplicação desta técnica.

Exemplo 1.2.18. *Seja $f(x) = x^3 + 3x^2 - 6x - 18$. Tomando $f(x) = 0$, para se determinar suas raízes, pode-se usar a fatoração por agrupamento:*

$$x^3 + 3x^2 - 6x - 18 = 0 \iff (x^3 + 3x^2) + (-6x - 18) = 0. \quad (1.10)$$

Percebe-se que na primeira parte $(x^3 + 3x^2)$, x^2 é um termo em comum, e que na segunda parte, $(-6x - 18)$, -6 é um termo em comum. Evidenciando os termos em comum, a equação do lado direito em (1.10) se torna em:

$$x^2(x + 3) - 6(x + 3) = 0.$$

Como as duas partes contêm um fator em comum, pode-se agrupá-lo, obtendo-se:

$$(x^2 - 6)(x + 3) = 0$$

Para que esta multiplicação resulte em zero, uma das parcelas deve ser, necessariamente, zero. Desta forma:

$$x^2 - 6 = 0 \quad \text{ou} \quad x + 3 = 0.$$

Resolvendo-se as duas equações separadamente, conclui-se então que as raízes da função $f(x) = x^3 + 3x^2 - 6x - 18$ são -3 , $\sqrt{6}$ e $-\sqrt{6}$.

iv) As Relações de Girard

Estas apresentam uma relação entre os coeficientes e as raízes da função cúbica $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. De fato, esta relação é apresentada na proposição que se segue.

Proposição 1.2.10. *Se x_1 , x_2 e x_3 são raízes de uma função cúbica f e $a \neq 0$, então x_1 , x_2 e x_3 satisfazem o sistema*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}, \\ x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3 = \frac{c}{a}, \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -\frac{d}{a}. \end{cases}$$

Demonstração. Considere uma função do terceiro grau na forma $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, com $a \neq 0$, cujas raízes são x_1 , x_2 e x_3 . Então $f(x)$ pode ser fatorada como:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3).$$

Desenvolvendo o produto do segundo membro da equação, obtêm-se

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = a \cdot [x^3 - x^2 \cdot (x_1 + x_2 + x_3) + x \cdot (x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3) - x_1 \cdot x_2 \cdot x_3].$$

Dividindo ambos os membros da equação por a , vem que

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = x^3 - x^2 \cdot (x_1 + x_2 + x_3) + x \cdot (x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3) - x_1 \cdot x_2 \cdot x_3.$$

Pela igualdade de polinômios, tem-se portanto, que:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= -\frac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3 &= \frac{c}{a} \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 &= -\frac{d}{a} \end{aligned}$$

□

As relações de Girard podem ser um método bastante útil para resolução de uma função cúbica se uma das raízes já for conhecida. Se nenhuma raiz for conhecida, o método se torna trabalhoso, pois o sistema que se forma é de difícil resolução.

Exemplo 1.2.19. Considere a função $f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 4$. Fazendo $f(x) = 0$ e sabendo que 2 é uma das raízes da função, pode-se encontrar as outras pelas relações de Girard:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -\frac{d}{a}. \end{cases}$$

Substituindo a raiz $x_1 = 2$, e os coeficientes $a = 1$, $b = -5$ e $d = 4$:

$$\begin{cases} 2 + x_2 + x_3 = \frac{5}{1} \\ 2 \cdot x_2 \cdot x_3 = -\frac{4}{1}. \end{cases}$$

Simplificando o sistema de equações:

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = 3 \\ x_2 \cdot x_3 = -2. \end{cases}$$

Resolvendo este sistema de equações, conclui-se portanto, que as raízes da função $f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 4$ são 2, $\frac{3 - \sqrt{17}}{2}$ e $\frac{3 + \sqrt{17}}{2}$.

v) Raízes racionais

Seja $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ uma função cúbica que apresenta todos os seus coeficientes inteiros não-nulos. Este método leva em consideração os divisores do termo independente (coeficiente d , com $d \in \mathbb{Z}$) e do coeficiente dominante (coeficiente a , com $a \in \mathbb{Z}$): a divisão de um dos divisores do termo independente por um dos divisores do coeficiente dominante poderá ser a raiz do polinômio, sendo que os divisores de d e a considerados devem ser primos entre si (dois números são considerados primos entre si quando seu único divisor em comum é o 1). Esta técnica fornece apenas candidatos a raízes racionais, mas não garante que haverá de fato uma raiz entre os candidatos.

Encontrada uma raiz x_1 , basta fazer a divisão do polinômio por $(x - x_1)$ e reduzir o polinômio à um polinômio de segundo grau, e então usar as técnicas já vistas para resolução, ou ainda, utilizar as relações de Girard para encontrar as outras duas raízes, se existirem. **Observação:** Este método pode ser utilizado para encontrar raízes de funções polinomiais de outros graus, seguindo procedimento análogo ao descrito aqui.

Exemplo 1.2.20. Considere a função $f(x) = x^3 + 3x^2 - 6x - 18$. Os divisores do coeficiente $d = -18$ são: 1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6, 9, -9, 18 e -18. Como $a = 1$, o divisor de a

é apenas o 1, e desta forma, a divisão dos divisores de d pelos divisores de a resultará nos próprios divisores de d . Substituindo-se os valores na função, e sabendo que a função assume valor zero no ponto onde é raiz, constata-se que -3 é uma das raízes dessa função.

$$\begin{aligned} f(-3) &= (-3)^3 + 3(-3)^2 - 6(-3) - 18 \\ &= -27 + 27 + 18 - 18 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Efetuada a divisão do polinômio $f(x) = x^3 + 3x^2 - 6x - 18$ por $(x + 3)$ tem-se que $f(x)$ pode ser escrita como:

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 6x - 18 = (x + 3)(x^2 - 6).$$

Tomando-se $f(x) = (x + 3)(x^2 - 6) = 0$, para que esta multiplicação resulte em zero, uma das parcelas, deve necessariamente, ser igual a zero. Desta forma,

$$x + 3 = 0 \quad \text{ou} \quad x^2 - 6 = 0.$$

Resolvendo-se as equações, conclui-se que as raízes da função $f(x) = x^3 + 3x^2 - 6x - 18$ são -3 , $\sqrt{6}$ e $-\sqrt{6}$.

vi) Análise pelo discriminante (Método de Cardano)

Considere a função cúbica $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Sejam as constantes p , q e o discriminante D definidos em razão dos coeficientes da função cúbica:

$$\begin{aligned} p &= \frac{-b^2 + 3ac}{3a^2} \\ q &= \frac{2b^3 - 9abc + 27a^2d}{27a^3} \\ D &= \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}. \end{aligned}$$

As constantes definidas acima fornecem informações sobre as raízes da função:

(a) Se $D = 0$ a função cúbica possui, no máximo, duas raízes distintas.

De forma mais precisa,

a.1) Se $p = q = 0$, a função possui uma única raiz dada por

$$x = -\frac{b}{3a}.$$

a.2) Se $pq \neq 0$ a função possui duas raízes distintas dadas por

$$x_1 = \frac{3q}{p} - \frac{b}{3a} \quad \text{e} \quad x_2 = -\frac{3q}{2p} - \frac{b}{3a}.$$

(b) Se $D > 0$ a função cúbica possui uma única raiz dada por

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{D}} - \frac{b}{3a}.$$

(c) Se $D < 0$ a função cúbica possui três raízes dadas por

$$\begin{aligned} x_1 &= 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cdot \cos\left(\frac{\theta}{3}\right) - \frac{b}{3a} \\ x_2 &= 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cdot \cos\left(\frac{\theta + 2\pi}{3}\right) - \frac{b}{3a} \\ x_3 &= 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cdot \cos\left(\frac{\theta + 4\pi}{3}\right) - \frac{b}{3a} \end{aligned}$$

Onde

$$\theta = \arccos \left[\frac{\left(-\frac{q}{2}\right)}{\sqrt{-\frac{p^3}{27}}} \right].$$

Mais informações sobre esse método e as demonstrações destas fórmulas podem ser vistas, por exemplo, em [18] e [19].

Exemplo 1.2.21. Considere a função $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 2$. As raízes desta função podem ser determinadas pela análise do discriminante. Os coeficientes da função são $a = 1$, $b = -1$, $c = -4$ e $d = 2$. Desse modo, as constantes p e q serão:

$$p = \frac{-b^2 + 3ac}{3a^2} = -\frac{13}{3} \quad \text{e} \quad q = \frac{2b^3 - 9abc + 27a^2d}{27a^3} = \frac{74}{27}.$$

Logo, o discriminante D será igual a

$$D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = -\frac{92}{81}.$$

Como $D < 0$, a função possui três raízes. Para calculá-las é preciso definir θ :

$$\theta = \arccos \frac{\left(-\frac{q}{2}\right)}{\sqrt{-\frac{p^3}{27}}} = \arccos \frac{-\frac{\left(\frac{74}{27}\right)}{2}}{\sqrt{-\frac{\left(-\frac{13}{3}\right)^3}{27}}} = \arccos(-0,789381) \approx \frac{79}{100}\pi.$$

Deste modo, as raízes são dadas por:

$$x_1 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cdot \cos\left(\frac{\theta}{3}\right) - \frac{b}{3a} = 2\sqrt{-\frac{\left(\frac{-13}{3}\right)}{3}} \cdot \cos\left(\frac{\frac{79}{100}\pi}{3}\right) - \frac{(-1)}{3 \cdot 1} \approx 2,$$

$$x_2 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cdot \cos\left(\frac{\theta + 2\pi}{3}\right) - \frac{b}{3a} = 2\sqrt{-\frac{\left(\frac{-13}{3}\right)}{3}} \cdot \cos\left(\frac{\frac{79}{100}\pi + 2\pi}{3}\right) - \frac{(-1)}{3 \cdot 1} \approx -2 \quad e$$

$$x_3 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cdot \cos\left(\frac{\theta + 4\pi}{3}\right) - \frac{b}{3a} = 2\sqrt{-\frac{\left(\frac{-13}{3}\right)}{3}} \cdot \cos\left(\frac{\frac{79}{100}\pi + 4\pi}{3}\right) - \frac{(-1)}{3 \cdot 1} \approx 1.$$

Portanto, as raízes da função $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 2$ são, aproximadamente, 2, -2 e 1.

1.2.4 Gráficos das Funções Polinomiais

“Normalmente, um gráfico é a melhor maneira de representar uma função em razão da transmissão de muita informação em um relance”, Stewart [11].

Cada função polinomial tem características específicas e um modelo de gráfico bem definido, como explícitos adiante, mas duas características são comuns a todos os gráficos de funções polinomiais:

- i) interceptam o eixo das ordenadas (eixo y) no termo independente da função;
- ii) interceptam o eixo das abscissas (eixo x) na raiz ou nas raízes da função, caso existam.

As características dos gráficos de funções polinomiais destacadas a seguir, representam, em sua maioria, o “roteiro” de construção de gráficos, trabalhado hoje no Ensino Médio.

O método descrito por esta dissertação traz a construção e a representação de outros gráficos, através dos conceitos explanados e defendidos, adiante no Capítulo 3.

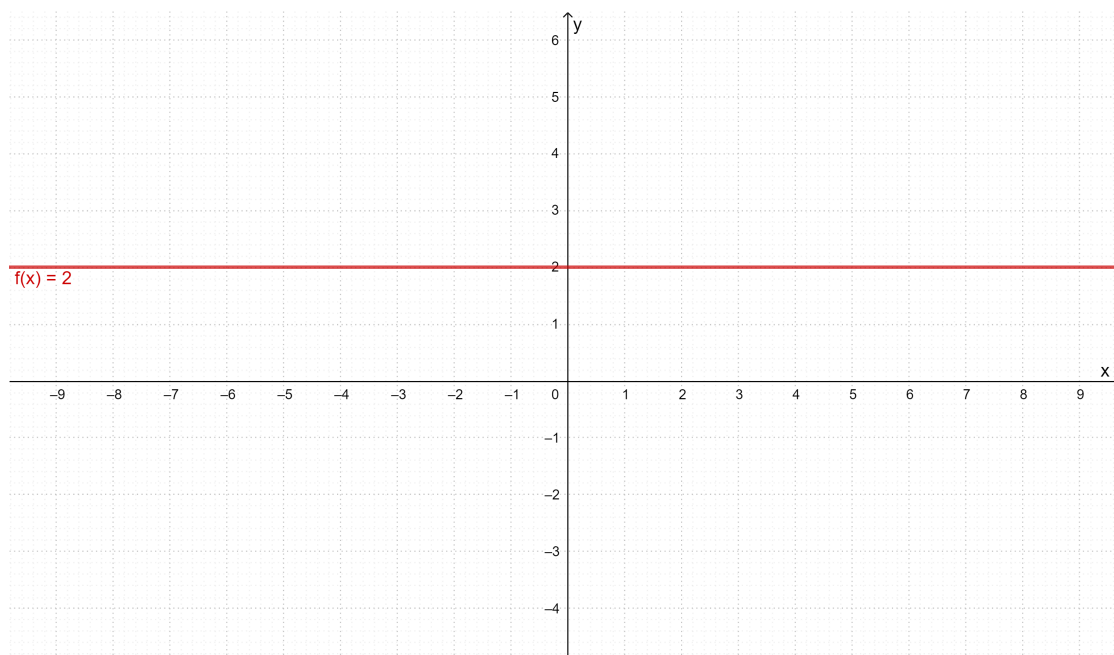
- **Gráfico da Função Constante**

A função constante

$$f(x) = k$$

tem seu gráfico como uma reta paralela ao eixo das abscissas sobre o ponto $y = k$. Isso acontece porque a imagem é constante, ou seja, para qualquer $x \in \mathbb{R}$, a função assume o valor k .

Exemplo 1.2.22. O gráfico da função $f(x) = 2$ é uma reta paralela ao eixo x sobre o ponto $y = 2$, como pode ser observado na Figura 3.

Figura 3 – Gráfico da função $f(x) = 2$.

Fonte: Produzido pela autora no *software Geogebra*.

• Gráfico de Funções Afins

O gráfico da função de primeiro grau

$$f(x) = ax + b, \quad a \neq 0$$

é uma reta que não é perpendicular ao eixo das abscissas e nem ao das ordenadas.

O coeficiente dominante (coeficiente a) é também chamado de coeficiente angular, pois é a medida que caracteriza a declividade da reta em relação ao eixo das abscissas. O coeficiente independente, também chamado de coeficiente linear (ou intercepto) é o ponto aonde o gráfico intercepta o eixo y e a raiz da função é o ponto aonde o gráfico intercepta o eixo x .

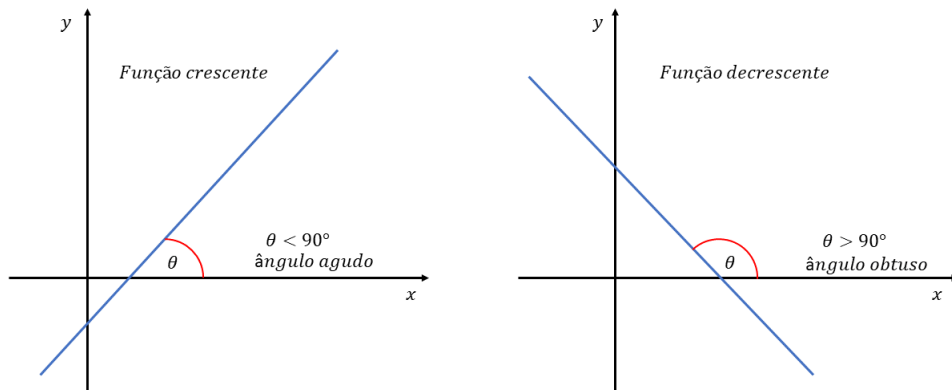
O coeficiente angular também determina o crescimento ou o decréscimo da reta, conforme descrito abaixo:

- i) Se $a > 0$, a função é crescente, isto é, à medida que x cresce, $f(x)$ também cresce. No gráfico da função de primeiro grau crescente, a reta faz um ângulo agudo (menor que 90°) com o eixo das abscissas, medido do eixo das abscissas até a reta no sentido anti-horário.
- ii) Se $a < 0$, a função é decrescente, isto é, à medida que x cresce, $f(x)$ decresce. No gráfico da função de primeiro grau decrescente, a reta faz um ângulo obtuso (maior

que 90°) com o eixo das abscissas, medido do eixo das abscissas até a reta no sentido anti-horário.

A Figura 4 a seguir ilustra essas duas situações.

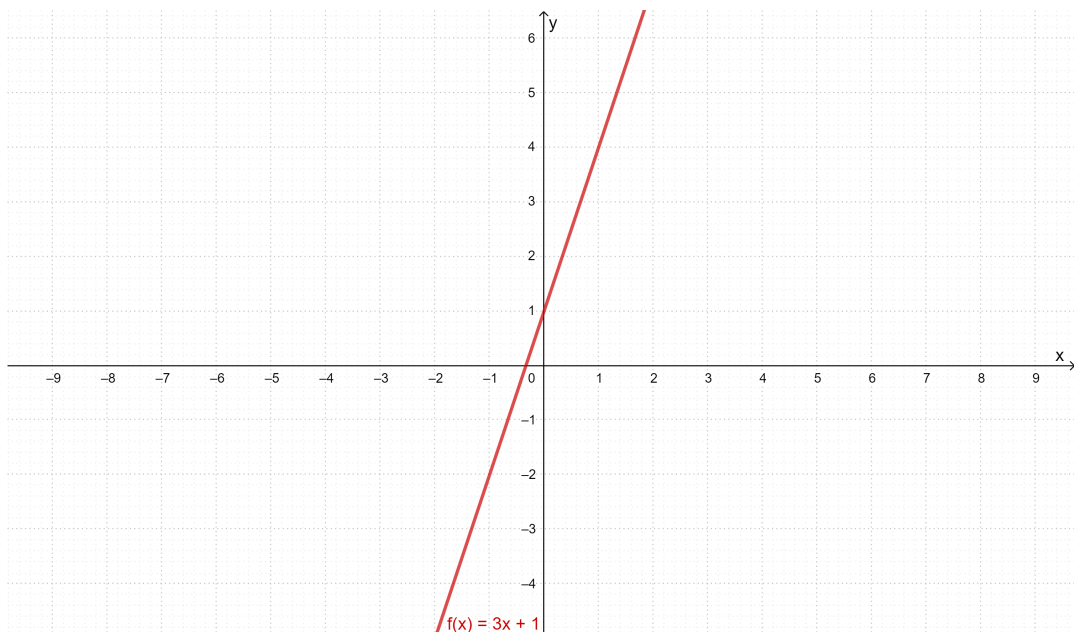
Figura 4 – Funções Afins crescente (esquerda) e decrescente (direita).



Fonte: Produzido pela autora.

Exemplo 1.2.23. O gráfico da função $f(x) = 3x + 1$ é representado na Figura 5, e como pode ser notado, é uma reta que intercepta o eixo das ordenadas em $y = 1$, e intercepta o eixo das abscissas em $x = -\frac{1}{3}$, raiz da função. Como $a = 3 > 0$, a função é crescente, e de fato, a reta que define a função faz um ângulo menor que 90° com o eixo das abscissas.

Figura 5 – Gráfico da função $f(x) = 3x + 1$.



Fonte: Produzido pela autora no software Geogebra.

• Gráfico de Funções Lineares

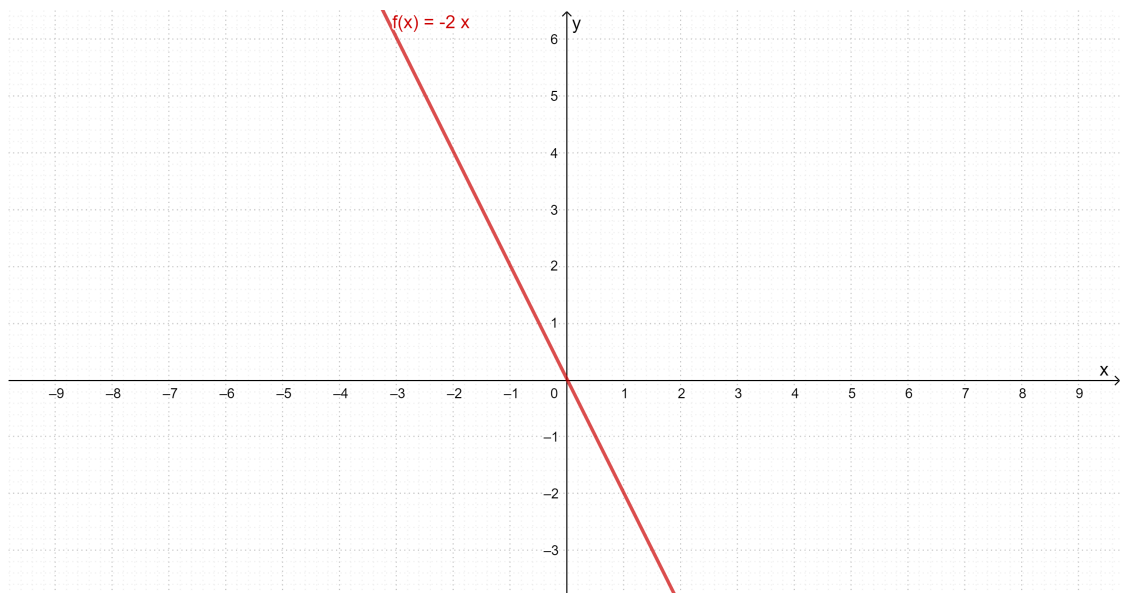
Particularmente nas funções lineares,

$$f(x) = ax, \quad a \neq 0$$

pelo fato do coeficiente linear ser igual a zero ($b = 0$), a reta da função passa pela origem do plano cartesiano, o que significa que sua raiz também é zero. A análise restante se dá como no caso das funções afins.

Exemplo 1.2.24. *O gráfico da função $f(x) = -2x$ é uma reta que passa pela origem, como representado na Figura 6. Como $a = -2 < 0$, a função é decrescente, e sua reta faz um ângulo maior que 90° com o eixo das abscissas.*

Figura 6 – Gráfico da função $f(x) = -2x$.



Fonte: Produzido pela autora no *software Geogebra*.

• Gráfico de Funções Quadráticas

O gráfico da função de segundo grau,

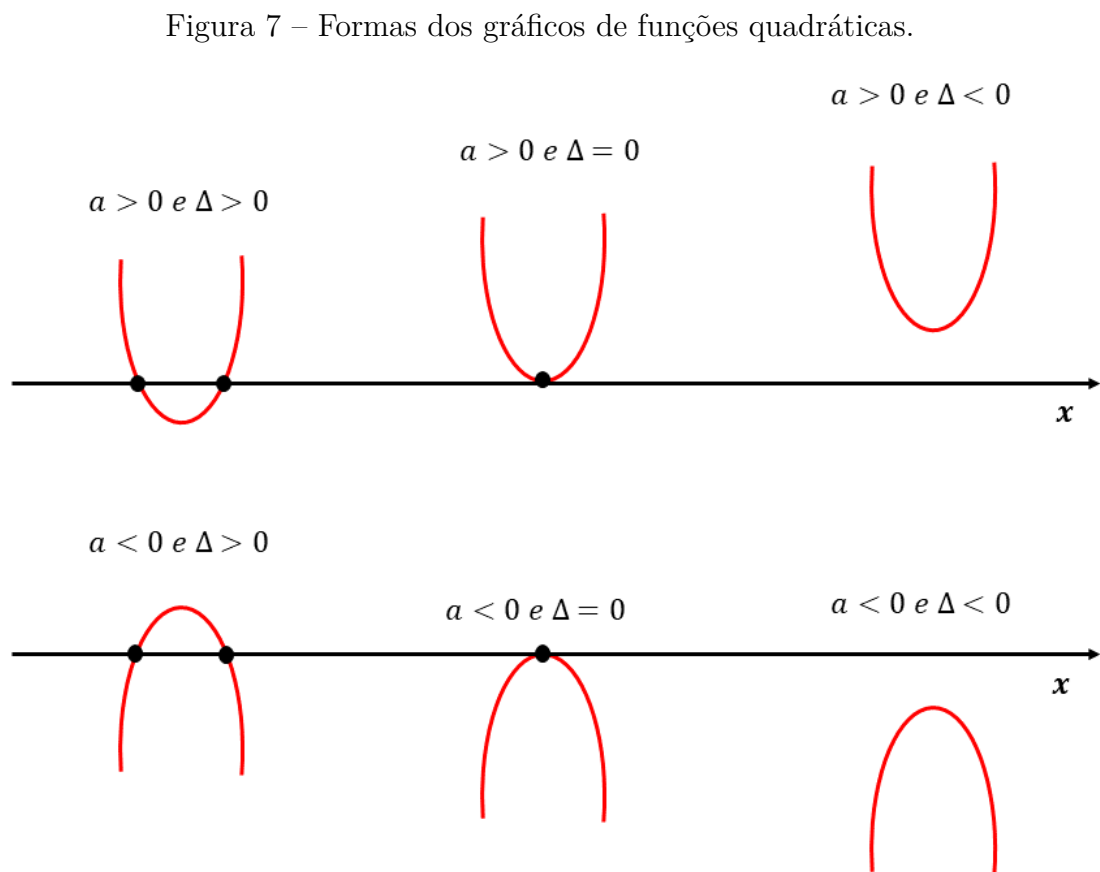
$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$$

é uma parábola [11]. O coeficiente a e o valor do discriminante da função, $\Delta = b^2 - 4ac$, determinam suas características:

- i) $a > 0$ e $\Delta > 0$: parábola com concavidade voltada para cima, interceptando o eixo x em dois pontos distintos (raízes de multiplicidade 1);

- ii) $a > 0$ e $\Delta = 0$: parábola com concavidade voltada para cima, tangenciando o eixo x em um único ponto (raiz de multiplicidade 2);
- iii) $a > 0$ e $\Delta < 0$: parábola com concavidade voltada para cima, sem interceptar o eixo x (neste caso, f não tem raiz);
- iv) $a < 0$ e $\Delta > 0$: parábola com concavidade voltada para baixo, interceptando o eixo x em dois pontos distintos (raízes de multiplicidade 1);
- v) $a < 0$ e $\Delta = 0$: parábola com concavidade voltada para baixo, tangenciando o eixo x em um único ponto (raiz de multiplicidade 2);
- vi) $a < 0$ e $\Delta < 0$: parábola com concavidade voltada para baixo, sem interceptar o eixo x (neste caso, f não tem raiz);

As situações descritas acima, estão ilustradas na Figura 7 a seguir.



Fonte: Produzido pela autora.

A interseção do eixo de simetria (linha imaginária que divide a parábola em duas partes simétricas) com a parábola é um ponto chamado vértice. O vértice então, é o ponto em que a parábola muda de sentido de crescimento: de crescente para decrescente, ou vice-versa, ou ainda o ponto em que a função assume o maior ou o menor valor.

- i) Quando $a > 0$, a função quadrática é decrescente até o vértice, e crescente após o vértice. Desta forma, o vértice é o ponto de mínimo da função.
- ii) Quando $a < 0$, a função quadrática é crescente até o vértice, e decrescente após o vértice. Desta forma, o vértice é o ponto de máximo da função.

Proposição 1.2.11. *Dada uma função quadrática qualquer $f(x) = y = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, usando a técnica de completar os quadrados, pode-se reescrevê-la como:*

$$y = a(x - x_0)^2 + y_0. \quad (1.11)$$

Demonstração. Seja

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0. \quad (1.12)$$

Soma-se e subtrai-se o termo conveniente $\frac{b^2}{4a}$ em (1.12), obtendo

$$f(x) = ax^2 + bx + c + \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{4a}.$$

Reorganiza-se os termos, deixando o termo independente como o último termo da equação

$$f(x) = ax^2 + bx + \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{4a} + c.$$

Utiliza-se de um artifício algébrico, e substitui-se o termo c por $\frac{4ac}{4a}$:

$$f(x) = ax^2 + bx + \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{4a} + \frac{4ac}{4a}.$$

Agrupam-se então as três primeiras parcelas e as outras duas subsequentes da forma

$$f(x) = \left(ax^2 + bx + \frac{b^2}{4a} \right) - \left(\frac{b^2}{4a} - \frac{4ac}{4a} \right).$$

Tendo agora duas parcelas, coloca-se a em evidência na primeira parcela, saindo para fora do parênteses e organiza-se a segunda parcela, obtendo

$$f(x) = a \cdot \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} \right) - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a} \right). \quad (1.13)$$

Como o termo que multiplica a é um trinômio quadrado perfeito, pode-se reescrever (1.13) como:

$$f(x) = a \cdot \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a} \right).$$

Faz-se então

$$x_0 = \frac{-b}{2a} \quad \text{e} \quad y_0 = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{\Delta}{4a}.$$

Obtendo-se (1.11):

$$f(x) = a \cdot (x - x_0)^2 - y_0.$$

□

Proposição 1.2.12. *Seja $f(x) = ax^2 + bx + c = a \cdot (x - x_0)^2 - y_0$. O par ordenado (x_0, y_0) é o vértice da parábola.*

Demonstração. Seja

$$y = a \cdot (x - x_0)^2 - y_0. \quad (1.14)$$

A parcela $(x - x_0)^2$ é igual ou maior que zero. Caso $a > 0$, então o produto

$$a \cdot (x - x_0)^2 \geq 0. \quad (1.15)$$

Desta forma, o valor mínimo que y assume em (1.14) é y_0 , que é quando o produto (1.15) é igual a zero. Garante-se assim que y_0 é o menor valor que a função y assume, portanto, é a coordenada y do vértice. Tem-se $y = y_0$ quando $x = x_0$, ou seja, as coordenada do vértice são (x_0, y_0) .

De modo análogo, se faz essa análise para $a < 0$. □

Conforme visto acima, as coordenadas do vértice de uma função quadrática podem ser encontradas através das fórmulas:

$$X_v = -\frac{b}{2a} \quad \text{e} \quad Y_v = -\frac{\Delta}{4a}.$$

Há ainda, uma outra forma de encontrar o vértice da parábola, caso a função tenha raízes. Suponha x_1 e x_2 , raízes da função quadrática. O ponto médio entre as raízes será a coordenada x do vértice:

$$X_v = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

De fato, tem-se $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$.

Daí, $x_1 + x_2 = \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a}$, donde $X_v = \frac{-2b}{2a} = \frac{x_1 + x_2}{2}$.

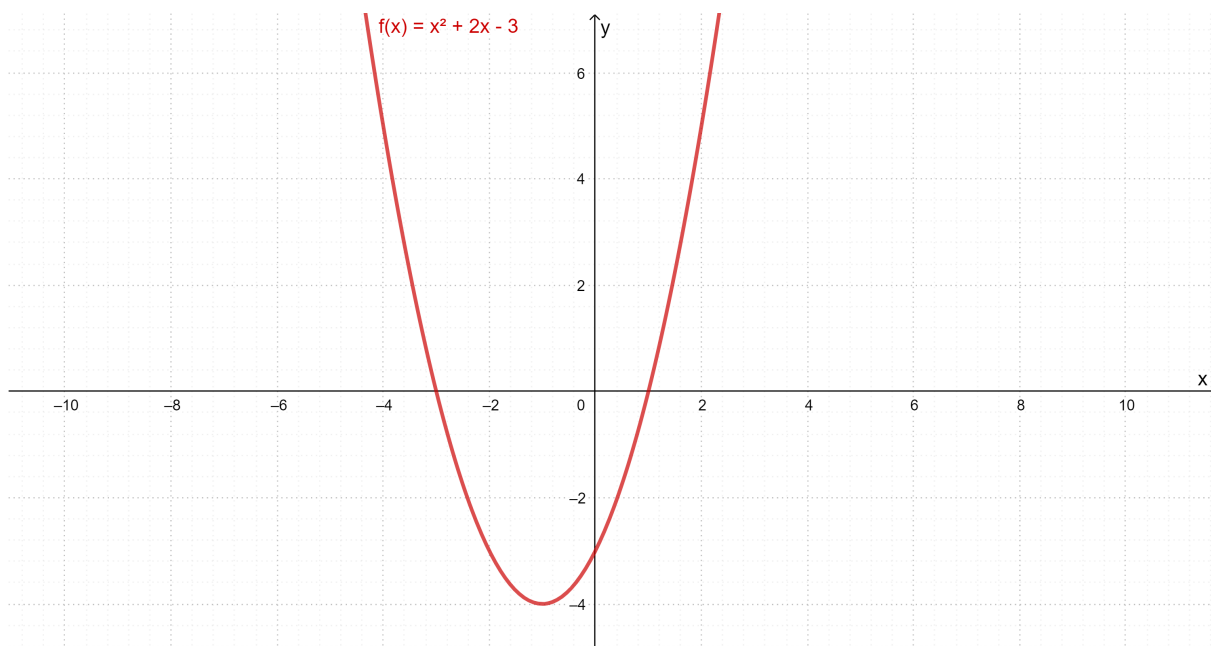
Note que, se a função possuir apenas uma raiz, então ali será a coordenada x do vértice da parábola, pois neste caso $\Delta = 0$ e $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$.

Diante disso, basta encontrar a imagem desse valor por meio da própria função analisada:

$$Y_v = f(X_v) = a \cdot X_v^2 + b \cdot X_v + c.$$

Exemplo 1.2.25. *O gráfico da função $f(x) = x^2 + 2x - 3$ é uma parábola com concavidade para cima, que intercepta o eixo x em dois pontos distintos: $x = 1$ e $x = -3$, raízes da função, e intercepta o eixo y em $y = -3$, como mostra a Figura 8. Pelo fato de $a = 1 > 0$, a parábola tem valor mínimo no vértice, cujas coordenadas são $(-1, -4)$, e eixo de simetria em $x = -1$.*

Figura 8 – Gráfico da função $f(x) = x^2 + 2x - 3$.



Fonte: Produzido pela autora no *software Geogebra*.

• Gráfico de Funções Cúbicas

O gráfico da função cúbica

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \quad a \neq 0$$

não tem uma denominação especial, podendo interceptar o eixo x em três pontos, dois pontos ou em um único ponto, a depender da quantidade de raízes.

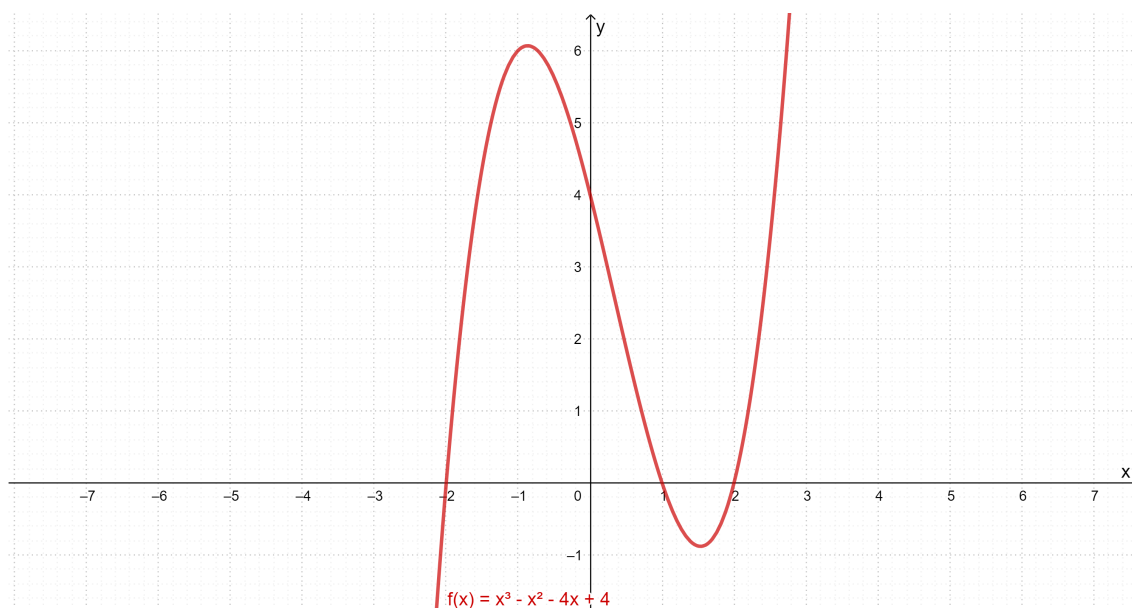
Exemplo 1.2.26. A função $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$ tem seu gráfico representado na Figura 9, e como pode ser observado, este intercepta o eixo x em três pontos distintos: $x = -2$, $x = 1$ e $x = 2$, raízes da função, e intercepta o eixo y em $y = 4$.

1.2.5 Comportamento da Função no Infinito

Uma característica geral dos gráficos de funções polinomiais é que seu comportamento para x tendendo a infinito ou menos infinito está atrelado ao grau da função polinomial.

A fim de apresentar tal relação, primeiramente, será explicado de forma um pouco intuitiva a terminologia: x tende (tendendo) a infinito e x tende (tendendo) a menos infinito.

Figura 9 – Gráfico da função $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$.



Fonte: Produzido pela autora no *software Geogebra*.

- x tende (tendendo) a infinito: $x \rightarrow \infty$. Isso significa dizer que x assume valores superiores a qualquer número real, em outras palavras, que x está “caminhando” para valores cada vez maiores.
- x tende (tendendo) a menos infinito: $x \rightarrow -\infty$. Isso significa dizer que x assume valores inferiores a qualquer número real, em outras palavras, que x está “caminhando” para valores cada vez menores (grandes em módulo, porém negativos).

O gráfico de uma função polinomial de grau par tem a característica que, em ambas as extremidades do gráfico ($x \rightarrow \infty$ e $x \rightarrow -\infty$), o gráfico tem o mesmo comportamento (ou tende a infinito ou tende a menos infinito).

De forma geral, caso o grau da função polinomial seja par:

- se o coeficiente dominante for positivo, as extremidades do gráfico tendem a infinito; e
- se o coeficiente dominante for negativo, as extremidades do gráfico tendem a menos infinito.

Já o gráfico de uma função polinomial de grau ímpar tem a característica de apresentar comportamentos diferentes nas extremidades do gráfico.

De forma geral, caso o grau da função polinomial seja ímpar:

- se o coeficiente dominante for positivo, quando x tende a infinito a a função também tende a infinito, e quando x tende a menos infinito, a função tende a menos infinito; e
- se o coeficiente dominante for negativo, o comportamento é inverso: quando x tende a infinito, a função tende a menos infinito, e quando x tende a menos infinito, a função

tende a infinito.

Exemplo 1.2.27. *Análise do comportamento da função $f(x) = x^2 + 2x - 3$ quando x tende a infinito.*

De forma intuitiva, pode-se analisar esse comportamento atribuindo-se valores cada vez maiores para x , como visto na Tabela 1.

Tabela 1 – Comportamento de $f(x) = x^2 + 2x - 3$ quando x tende a infinito.

x	$f(x)$
1.000	1.001.997
10.000	100.019.997
100.000	10.000.199.997
1.000.000	1.000.001.999.997

Fonte: Produzido pela autora.

Conclui-se portanto que, quando x tende a infinito, a função $f(x) = x^2 + 2x - 3$ tende a infinito. Como o grau da função é par, então quando x tende a menos infinito, a função $f(x)$ tende a infinito.

Uma análise mais detalhada sobre esse conceito intuitivo de “tender”, e mais exemplos sobre o comportamento da função quando x tendo ao infinito e à menos infinito, podem ser vistos na Seção 2.1.

Com esse tópico de gráficos e suas respectivas características, antecidas por outras definições importantes, finaliza-se aqui este capítulo dedicado ao estudo das funções polinomiais. Todos os conceitos abordados serão úteis e de fundamental importância para o entendimento do conteúdo relacionado à derivada, percorrido adiante no próximo capítulo.

2 Derivada e Conceitos Relacionados

Hoje em dia, o conteúdo de derivada é bastante abordado em cursos superiores nas áreas das ciências da natureza, engenharias e tecnologias. Sua importância se dá devido à grande aplicabilidade em diversas áreas do conhecimento, como ressaltava Sousa [20]:

Desenvolvido há cerca de 300 anos por Newton e Leibniz, o cálculo é uma das ferramentas matemáticas mais utilizadas pelas ciências para reduzir a complexidade de problemas diversos. O estudo do Cálculo Diferencial e Integral é considerado um dos conteúdos matemáticos mais influentes no desenvolvimento científico e tecnológico atual. Permitiu a obtenção de novos processos, equipamentos, métodos no processo de transformação da natureza, entre outros (p. 45).

Simmons [21] ainda destaca a importância da derivada em relação a outros conceitos físicos da natureza:

(...) é uma das três ou quatro ideias mais fecundas que qualquer matemático já tenha tido, pois sem ela, não haveria o conceito de velocidade ou aceleração ou força física, nem dinâmica ou astronomia newtoniana, nem ciência física de qualquer natureza, excerto como uma mera descrição verbal de fenômenos, e certamente não teríamos a idade moderna de engenharia e tecnologia (p. 72).

A derivada, portanto, possui uma abundância de aplicações e pode ser interpretada de múltiplas formas. E ainda, dispõe de uma variedade de outros conceitos que estão relacionados à ela, como mencionado no decorrer deste capítulo.

Uma das formas de definir a derivada é através do conceito de limite, assim como Sousa [20] enuncia em seu trabalho:

Em matemática, o mais usual é utilizar o conceito de limite para descrever o comportamento de uma função à medida que o seu argumento se aproxima de um determinado valor, assim como o comportamento de uma sequência de números reais, à medida que o índice (da sequência) vai crescendo e tende para infinito. Os limites são usados no cálculo diferencial e em outros ramos da análise matemática para definir derivadas e a continuidade de funções (p. 54).

Silva [22] reafirma a ideia de que, para entender o conceito de derivada é preciso entender primeiramente o conceito de limite:

Para compreender a definição de derivada, em linguagem matemática, é necessário que o aluno se aproprie do entendimento do que é um limite, ou seja, o discente precisa entender que o limite de uma função é uma aproximação infinitesimal de algum valor, mas sem que seja exatamente aquele valor (p. 23).

2.1 Noção Intuitiva de Limite

Como mencionado anteriormente, “o cálculo é um ramo extremamente poderoso da matemática, com um grande número de aplicações (...). O que torna o cálculo tão poderoso e o distingue da álgebra é a noção de limite” (p. 48), Bradley e Hoffman [13].

“A ideia de limite é utilizada no intuito de expor o comportamento de uma função nos momentos de aproximação de determinados valores”, Neves [23]. Bradley e Hoffman [13] também solidificam essa ideia: “Falando de maneira geral, o processo de determinar o limite consiste em investigar o comportamento de uma função $f(x)$ quando x se aproxima de um número c que pode ou não pertencer ao domínio da função f ”.

O primeiro contato do aluno de Ensino Médio com a noção intuitiva de limite é no estudo das progressões geométricas, as “P.G.’s”, que pode ser exemplificado com a análise da sequência $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}$, com $n \in \mathbb{N}$, quando n tende ao infinito, isto é, à quando n cresce ilimitadamente, o valor de $\frac{1}{2^n}$ se aproxima cada vez mais de zero (quanto maior o valor de n , maior a expressão 2^n , e a divisão de 1 por números cada vez maiores resulta em valores cada vez mais próximos de zero). Ou seja, quando n tende ao infinito o limite da expressão $\frac{1}{2^n}$ é zero. [24]. Matematicamente, escreve-se essa análise como:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0.$$

Outro modo que permite compreender o conceito de limite é por aproximação, que pode ser exemplificado pela análise do comportamento da função $f(x) = x^2 - x + 2$ para valores de x próximos a 2. Na Tabela 2 a seguir constam alguns valores de x que ficam cada vez mais próximos de 2, e os respectivos valores que a função $f(x)$ assume para cada valor atribuído a x :

Tabela 2 – Comportamento de $f(x) = x^2 - x + 2$ quando x se aproxima de 2.

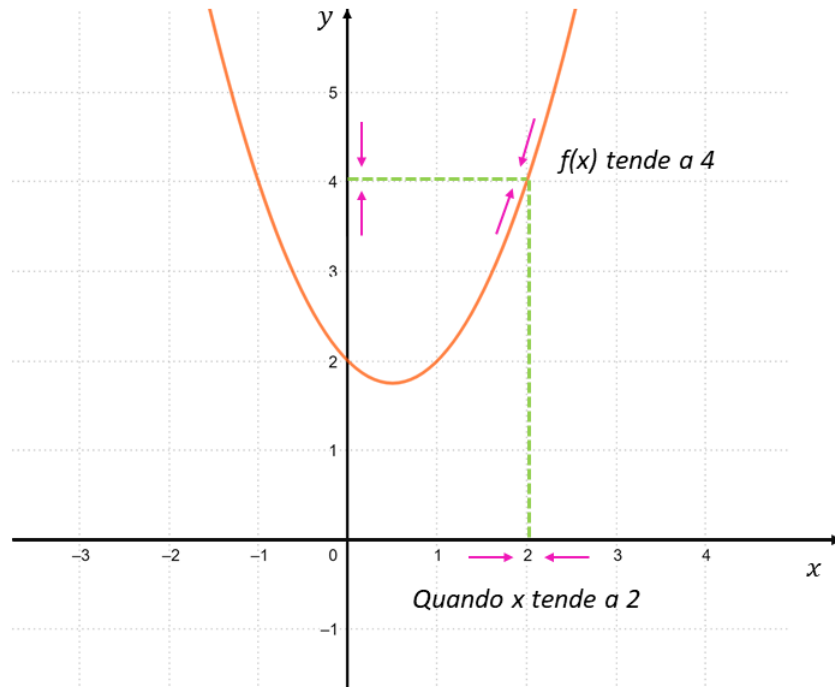
x	$f(x)$	x	$f(x)$
1,0	2,000000	3,0	8,000000
1,5	2,750000	2,4	5,750000
1,8	3,440000	2,2	4,640000
1,9	3,710000	2,1	4,310000
1,95	3,852500	2,05	4,152500
1,99	3,970100	2,01	4,030100
1,995	3,985025	2,005	4,015025
1,999	3,997001	2,001	4,003001

Fonte: Produzido pela autora com base em um exemplo extraído de [11].

Da Tabela 2, vê-se que quando x está próximo de 2 (tanto para valores que se aproximam de 2 pela esquerda, que no caso são valores menores que 2, quanto para valores

que se aproximam de 2 pela direita, que no caso são valores maiores que 2), a função $f(x)$ está caminhando (se aproximando cada vez mais) a 4, ou seja, $f(x)$ tenderá a 4. “De fato, parece que podemos tornar os valores de $f(x)$ tão próximos de 4 quanto quisermos, ao tornar x suficientemente próximo de 2” [11]. Observa-se isso na Figura 10:

Figura 10 – Análise da função $f(x) = x^2 - x + 2$ para valores de x próximos a 2.



Fonte: Produzido pela autora com base em um exemplo extraído de [11].

Expressa-se isso dizendo que “o limite da função $f(x) = x^2 - x + 2$ quando x tende a 2 é igual a 4”. Matematicamente, pode ser escrito como:

$$\lim_{x \rightarrow 2} x^2 - x + 2 = 4.$$

Em vista disso, Stewart [11] define limite como:

Definição 2.1.1. *Suponha que $f(x)$ seja definido quando x está próximo ao número a . (Isso significa que f é definido em algum intervalo aberto que contenha a , exceto possivelmente no próprio a). Então escrevemos:*

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

e dizemos “o limite de $f(x)$, quando x tende a “ a ”, é igual a L ”, se pudermos tornar os valores de $f(x)$ arbitrariamente próximos de L (tão próximos de L quanto quisermos), tornando x suficientemente próximo de a (por ambos os lados de a), mas não igual a “ a ”.

Stewart [11] ainda complementa a definição, explanando que:

Grosso modo, isso significa que os valores de $f(x)$ tendem a L quando x tende a a . Em outras palavras, os valores de $f(x)$ tendem a ficar cada vez mais próximos do número L à medida que x tende ao número a (por qualquer lado de a), mas $x \neq a$ (p. 81).

Exemplo 2.1.1. *Estime o valor de $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1}$.*

A função $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$ não é definida para $x = 1$, mas isso não importa, já que para determinar o $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, toma-se valores próximos a 1, mas não de fato o próprio 1. Fazendo o estudo deste limite por aproximação, pode-se montar a seguinte tabela com valores de x e os respectivos valores para $f(x)$:

Tabela 3 – Comportamento de $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$ quando x se aproxima de 1.

x	$f(x)$	x	$f(x)$
0,5	0,666667	1,5	0,400000
0,9	0,526316	1,1	0,476190
0,99	0,502513	1,01	0,497512
0,999	0,500250	1,001	0,499750
0,9999	0,500025	1,0001	0,499975

Fonte: Produzido pela autora.

Conclui-se, portanto, pela análise da tabela que à medida que x se aproxima de 1, os valores de $f(x)$ tendem a 0,5. Desse modo,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1} = 0,5.$$

Exemplo extraído de [11].

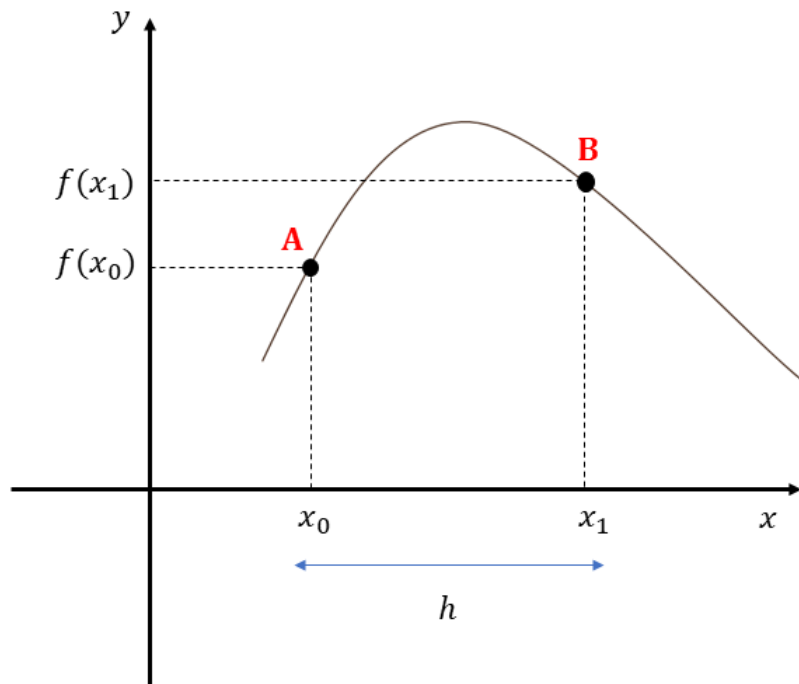
Ressalta-se aqui que este método, que consiste em montar a tabela de valores próximos ao valor que x está tendendo no limite e analisar como a função se comporta para tais valores, pode levar a erros graves no cálculo de limites, sendo utilizado apenas para desenvolver essa ideia intuitiva. Observe, porém, que funciona relativamente bem para polinômios.

Conhecendo essa ideia intuitiva de limite, é possível abordar o conceito de derivada.

2.2 Definindo a Derivada

Dada uma função $f(x)$, considere dois pontos quaisquer $A = (x_0, f(x_0))$ e $B = (x_1, f(x_1))$ no gráfico de f , onde x_0 e x_1 pertencem a $D(f)$ ou ao domínio de f , com $x_0 < x_1$, representados na Figura 11 a seguir:

Figura 11 – Gráfico com os pontos A e B.



Fonte: Produzido pela autora.

Considerando h como a distância entre os pontos x_0 e x_1 , x_1 pode ser escrito como:

$$x_1 = x_0 + h.$$

E conseqüentemente,

$$f(x_1) = f(x_0 + h).$$

onde h é conhecido como o deslocamento no eixo das abscissas, ocorrido do ponto A ao ponto B.

Seja S a reta secante ao gráfico de f que passa pelos pontos A e B, como na Figura 12.

Sabe-se que o coeficiente angular da reta S é expresso pela razão:

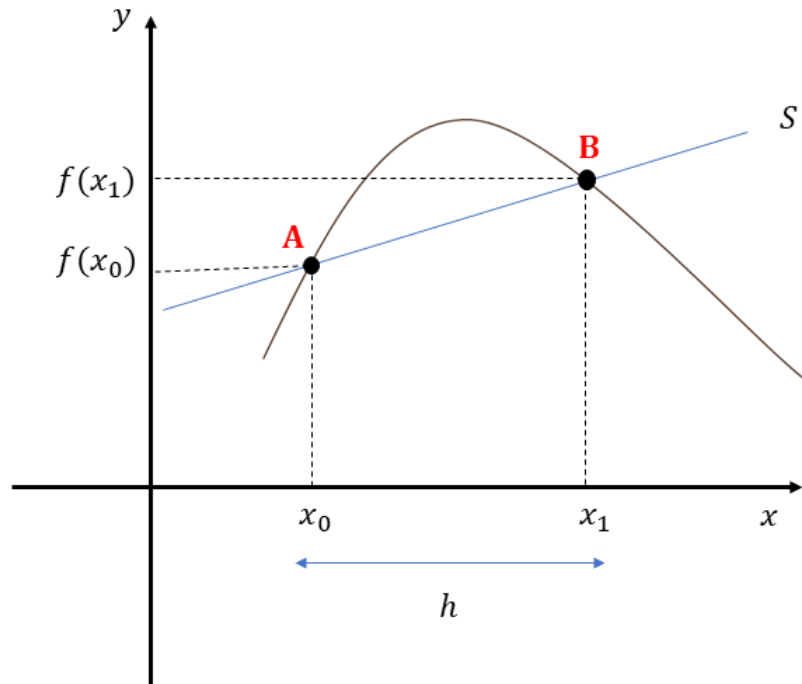
$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}. \quad (2.1)$$

Fixando-se o ponto $A = (x_0, f(x_0))$, e “levando” o ponto $B = (x_1, f(x_1)) = (x_0 + h, f(x_0 + h))$ de encontro ao ponto A, de modo x_1 tenda a x_0 , isto é, de modo que h se aproxime de zero, tem-se que o coeficiente angular de S tende a

$$\lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Quando h se aproxima de zero, ou seja, quando x_1 se aproxima de x_0 , obtém-se várias retas secantes, que se aproximam cada vez mais da reta tangente em x_0 . Quando

Figura 12 – Gráfico com reta secante S.



Fonte: Produzido pela autora.

h se aproxima de zero, o quociente $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ se aproxima de um valor, que é o coeficiente angular da reta tangente.

Deste modo, o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função f no ponto A , denotado por m , é expresso por

$$m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

quando este limite existe.

Esses princípios resultam na definição de derivada de f em x_0 , como ressalta Bianco [24] em sua dissertação:

Definição 2.2.1. *Sejam f uma função e x_0 um ponto de seu domínio. O limite*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

quando existe e é finito, denomina-se derivada de f em x_0 e indica-se por $f'(x_0)$.

Caso este limite exista, diz-se que a função é diferenciável (ou derivável) no ponto x_0 .

Exemplo 2.2.1. *Encontre a derivada da função $f(x) = x^2 - 8x + 3$ no ponto $x_0 = 3$.*

De acordo com a Definição 2.2.1, a derivada da função $f(x) = x^2 - 8x + 3$ no ponto $x_0 = 3$, se existir, pode ser encontrada através do limite:

$$\begin{aligned}
 f'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}. \quad \text{Logo,} \\
 f'(3) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3 + h) - f(3)}{h} \\
 &\quad \text{Sendo } f(3 + h) = (3 + h)^2 - 8 \cdot (3 + h) + 3 \text{ e } f(3) = 3^2 - 8 \cdot 3 + 3 = -12 \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[(3 + h)^2 - 8 \cdot (3 + h) + 3] - (-12)}{h} \\
 &\quad \text{Fazendo } (3 + h)^2 = 9 + 6h + h^2 \text{ e } 8 \cdot (3 + h) = 24 + 8h \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[9 + 6h + h^2 - 24 - 8h + 3] - (-12)}{h} \\
 &\quad \text{Reorganizando os termos e simplificando a expressão} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 - 2h}{h} \\
 &\quad \text{Fazendo uma manipulação algébrica e colocando } h \text{ em evidência} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \cdot (h - 2)}{h} \\
 &\quad \text{Dividindo toda a expressão por } h \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} h - 2 \\
 &\quad \text{Substituindo } h \text{ por } 0, \text{ a expressão se torna:} \\
 &= 0 - 2 = -2.
 \end{aligned}$$

Portanto, a derivada da função $f(x) = x^2 - 8x + 3$ no ponto $x_0 = 3$, denotada por $f'(3)$, é igual a -2 :

$$f'(3) = -2.$$

Com esse resultado, pode-se afirmar que a função $f(x) = x^2 - 8x + 3$ é derivável no ponto $x_0 = 3$.

Segue mais um exemplo do cálculo de derivada no ponto através de sua definição:

Exemplo 2.2.2. Encontre a derivada da função $g(x) = 5x + 1$ no ponto $x_0 = 0$.

De acordo com a Definição 2.2.1, a derivada da função $g(x) = 5x + 1$ no ponto $x_0 = 0$, se existir, pode ser encontrada através do limite:

$$\begin{aligned}
 g'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h}. \quad \text{Logo,} \\
 g'(0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(0 + h) - g(0)}{h} \\
 &\quad \text{Sendo } g(0 + h) = 5 \cdot (0 + h) + 1 = 5h + 1 \text{ e } g(0) = 5 \cdot 0 + 1 = 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[5h + 1] - (1)}{h} \\
&\quad \textit{Reorganizando os termos e simplificando a expressão} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{5h}{h} \\
&\quad \textit{Simplificando} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} 5 = 5.
\end{aligned}$$

Portanto, a derivada da função $g(x) = 5x + 1$ no ponto $x_0 = 0$, denotada por $g'(0)$ é igual a 5:

$$g'(0) = 5.$$

Com esse resultado, pode-se afirmar que a função $g(x) = 5x + 1$ é derivável no ponto $x_0 = 0$.

Não cabe aqui entrar em detalhes nas resoluções de limites, pois o foco deste trabalho se dá em calcular derivadas de uma forma mais simples, adequada ao nível de ensino em questão. Para mais informações sobre limites e cálculo de limites, veja, por exemplo, [11], [12] e [13].

Viu-se até aqui a definição de derivada de uma função em um ponto. Quando não há um ponto especificado, a derivada de uma função resulta em uma nova função, como segue:

Definição 2.2.2. *Seja f uma função e D o conjunto dos x para os quais se tenha $f'(x)$, ou seja, o limite da Definição 2.2.1 existe. A função $f' : D \rightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada valor de $x \in D$ o número $f'(x)$ é denominada função derivada de f , ou simplesmente, derivada de f .*

Seguem alguns exemplos de derivadas de função:

Exemplo 2.2.3. *Encontre a derivada da função $f(x) = x^3 + x^2$.*

De acordo com a Definição 2.2.2, a derivada da função $f(x) = x^3 + x^2$ pode ser encontrada através do limite:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&\text{Sendo } f(x+h) = (x+h)^3 + (x+h)^2 \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[(x+h)^3 + (x+h)^2] - [x^3 + x^2]}{h} \\
&\text{Desenvolvendo as expressões na forma de produtos notáveis} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 + x^2 + 2xh + h^2 - x^3 - x^2}{h} \\
&\text{Reorganizando e simplificando a expressão} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3 + 3xh^2 + 3x^2h + 2xh + h^2}{h} \\
&\text{Colocando } h \text{ em evidência} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \cdot (h^2 + 3xh + 3x^2 + 2x + h)}{h} \\
&\text{Dividindo toda a expressão por } h \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} h^2 + 3xh + 3x^2 + 2x + h \\
&\text{Substituindo } h \text{ por } 0, \text{ a expressão se torna:} \\
&= 0^2 + 3x0 + 3x^2 + 2x + 0 = 3x^2 + 2x.
\end{aligned}$$

Portanto, a derivada da função $f(x) = x^3 + x^2$, é $f'(x) = 3x^2 + 2x$.

Exemplo 2.2.4. Encontre a derivada da função $g(x) = 2x^2 - 5x$.

De modo análogo ao exemplo anterior, e utilizando a Definição 2.2.2, a derivada da função $g(x) = 2x^2 - 5x$ pode ser encontrada através do cálculo do seguinte limite:

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
&\text{Sendo } g(x+h) = 2 \cdot (x+h)^2 - 5 \cdot (x+h) \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[2 \cdot (x+h)^2 - 5 \cdot (x+h)] - [2x^2 - 5x]}{h} \\
&\text{Desenvolvendo as expressões na forma de produtos notáveis} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[2 \cdot (x^2 + 2xh + h^2) - 5x - 5h] - [2x^2 - 5x]}{h} \\
&\text{Reorganizando e simplificando a expressão} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2x^2 + 4xh + 2h^2 - 5x - 5h - 2x^2 + 5x}{h} \\
&\text{Colocando } h \text{ juntando os termos de mesmo grau em } x \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4xh + 2h^2 - 5h}{h} \\
&\text{Colocando } h \text{ em evidência} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \cdot (4x + 2h - 5)}{h} \\
&\text{Dividindo toda a expressão por } h \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} 4x + 2h - 5 = \lim_{h \rightarrow 0} 4x + 2 \cdot 0 - 5 = 4x - 5.
\end{aligned}$$

Portanto, a derivada da função $g(x) = 2x^2 - 5x$, é $g'(x) = 4x - 5$.

2.2.1 Regras de Derivação

O cálculo de derivadas usando a definição, pode, muitas das vezes, se tornar um processo trabalhoso. Em razão disso, as regras de derivação permitem calcular, com mais facilidade, as derivadas de funções polinomiais, funções racionais, funções algébricas, funções exponenciais, funções logarítmicas e funções trigonométricas. São elas: Regra da constante; Regra da potência; Regra da multiplicação por uma constante; Regra da soma e da diferença; Regra do produto; e Regra do quociente; enunciadas a seguir:

- **Regra da Constante**

Proposição 2.2.3. *Se f é uma função constante, $f(x) = c$, com $c \in \mathbb{R}$, então*

$$f'(x) = 0.$$

Demonstração. Seja uma função constante $f(x) = c$. Por definição, sua derivada é encontrada pelo limite:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Como a função é constante para todo $x \in \mathbb{R}$, então $f(x+h) = c$. Substituindo na definição acima, obtem-se

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0.$$

□

Exemplo 2.2.5. *Encontre a derivada da função $f(x) = 5$.*

Sendo $f(x) = 5$ uma função constante, então

$$f'(x) = 0.$$

Exemplo 2.2.6. *Encontre a derivada da função $g(x) = -2\pi$.*

Sendo $g(x) = -2\pi$ uma função constante, então

$$g'(x) = 0.$$

- **Regra da Potência**

Proposição 2.2.4. *Se n é um número inteiro positivo e $f(x) = x^n$, então*

$$f'(x) = n \cdot x^{n-1}.$$

Demonstração. Seja $f(x) = x^n$, sua derivada será dada através do limite:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}. \quad (2.2)$$

Sabe-se que $(x+h)^n$ pode ser desenvolvido pelo Teorema Binomial como

$$(x+h)^n = x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \dots + nxh^{n-1} + h^n.$$

Substituindo a relação acima, no limite (2.2), tem-se

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left[x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \dots + nxh^{n-1} + h^n \right] - x^n}{h}.$$

Efetuando a diferença no numerador da fração, obtém-se

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \dots + nxh^{n-1} + h^n}{h}.$$

Dividindo numerador e denominador por h , segue que

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + \dots + nxh^{n-2} + h^{n-1}.$$

Todos os termos, exceto o primeiro, tem o fator h . Logo, quando $h \rightarrow 0$, estes termos tendem a 0. Conclui-se então que este limite é igual a

$$f'(x) = nx^{n-1}.$$

□

A regra da potência é popularmente conhecida como regra do tombamento.

Observação: É importante ressaltar aqui que, a regra da potência também pode ser aplicada para expoentes inteiros negativos e expoentes fracionários. A prova destes casos, não será apresentada, contudo alguns exemplos estão elucidados no final desta seção.

Exemplo 2.2.7. Encontre a derivada da função $f(x) = x^3$.

Se $f(x) = x^3$, então pela regra da potência,

$$f'(x) = 3 \cdot x^{3-1} = 3x^2.$$

Exemplo 2.2.8. Encontre a derivada da função $g(x) = x^5$.

Se $g(x) = x^5$, então pela regra da potência,

$$g'(x) = 5 \cdot x^{5-1} = 5x^4.$$

• **Regra da Multiplicação por uma Constante**

Proposição 2.2.5. *Sejam $g(x) = c \cdot f(x)$, onde $c \in \mathbb{R}$ é uma constante e f uma função derivável (quando sua derivada existe em cada ponto do seu domínio), então*

$$g'(x) = c \cdot f'(x).$$

Demonstração. Seja $g(x) = c \cdot f(x)$. Então, sua derivada é dada pelo limite:

$$g'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c \cdot f(x+h) - c \cdot f(x)}{h}.$$

Colocando c em evidência segue que

$$g'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c \cdot [f(x+h) - f(x)]}{h}.$$

Pelas propriedades de limite, esse c pode sair do limite, multiplicando toda a estrutura, como segue

$$g'(x) = c \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = c \cdot f'(x).$$

□

Em outras palavras, a fórmula anterior nos diz que a derivada de uma constante vezes uma função é a constante vezes a derivada da função.

Exemplo 2.2.9. *Encontre a derivada da função $f(x) = 5x^2$.*

Seguindo a regra da multiplicação por uma constante juntamente com a regra da potência, a derivada da função f é igual a

$$f'(x) = 5 \cdot (2x^{2-1}) = 5 \cdot 2x = 10x.$$

Exemplo 2.2.10. *Encontre a derivada da função $g(x) = \frac{1}{2}x^4$.*

Neste caso, a constante é o $\frac{1}{2}$ que multiplica o x^4 . De acordo com a regra da multiplicação por uma constante juntamente com a regra da potência, a derivada da função g é igual a

$$g'(x) = \frac{1}{2} \cdot (4x^3) = \frac{4}{2}x^3 = 2x^3.$$

Exemplo 2.2.11. *Encontre a derivada da função $h(x) = 2x$.*

A função h pode ser reescrita como $h(x) = 2x^1$. Desta forma, fica mais claro perceber que a constante 2 multiplica uma potência. Aplicando a regra da multiplicação por uma constante juntamente com a regra da potência, a derivada de h é

$$h'(x) = 2 \cdot (1x^0) = 2 \cdot 1 = 2.$$

(Lembre-se aqui que $x^0 = 1$).

• **Regra da Soma e da Diferença**

Proposição 2.2.6. *Seja $H(x) = f(x) + g(x)$, onde $f(x)$ e $g(x)$ são funções deriváveis. A derivada de $H(x)$ é*

$$H'(x) = f'(x) + g'(x).$$

Demonstração. Seja $H(x) = f(x) + g(x)$. Então, sua derivada é dada pelo limite:

$$H'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{H(x+h) - H(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(x+h) + g(x+h)] - [f(x) + g(x)]}{h}.$$

Agrupando os termos “semelhantes”, segue que

$$H'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(x+h) - f(x)] + [g(x+h) - g(x)]}{h}.$$

Pelas propriedades de limite, pode-se separar essa soma em dois limites, da forma

$$H'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}.$$

Que resulta em

$$H'(x) = f'(x) + g'(x).$$

□

Em outras palavras, a regra nos diz que a derivada de uma soma de funções é a soma das derivadas das funções.

A diferença é dada de forma análoga. Seja $h(x) = f(x) - g(x)$, onde $f(x)$ e $g(x)$ são funções deriváveis, então a derivada de $h(x)$ é dada por:

$$h'(x) = f'(x) - g'(x).$$

Exemplo 2.2.12. *Encontre a derivada da função $h(x) = 2x^2 + 5$.*

Note que h é a soma de duas funções deriváveis $f(x) = 2x^2$ e $g(x) = 5$. E que, para derivá-las, serão usadas as regras de derivação anteriores: regra da constante, regra da potência e regra da multiplicação por uma constante. Desta forma, a derivada de f é

$$h(x) = 2 \cdot (2x) + 0 = 4x.$$

Exemplo 2.2.13. *Encontre a derivada da função $h(x) = 4x^3 - x^2$.*

Note que h é a diferença de duas funções deriváveis $f(x) = 4x^3$ e $g(x) = x^2$. E que, de forma análoga ao exemplo anterior, para derivá-las serão usadas regras de derivação anteriores. Desta forma, a derivada de h é

$$h'(x) = 4 \cdot (3x^2) - 2x = 12x^2 - 2x.$$

Exemplo 2.2.14. Encontre a derivada da função $h(x) = 2x^5 + 3x^3 - 4x^2 + 2x$.

A função h é formada pela soma e diferença de várias funções. Da mesma forma que nos exemplos anteriores, deriva-se termo a termo, mantendo as operações de soma e diferença. A derivada de h é

$$h'(x) = 2 \cdot (5x^4) + 3 \cdot (3x^2) - 4 \cdot (2x) + 2 = 10x^4 + 9x^2 - 8x + 2.$$

• Regra do Produto

Ao contrário da regra da soma e da diferença, que são de certa forma “intuitivas”, a derivada do produto de funções não é o produto das derivadas das mesmas funções. Ou seja,

$$(f \cdot g)' \neq f' \cdot g'.$$

A fórmula correta para encontrar tal derivada foi descoberta por Leibniz, e é conhecida como Regra do Produto.

Proposição 2.2.7. Seja H uma função determinada pelo produto das funções deriváveis f e g , assumindo a forma $H(x) = f(x) \cdot g(x)$. Sua derivada é dada por

$$H'(x) = f(x) \cdot g'(x) + g(x) \cdot f'(x).$$

Demonstração. Seja $H(x) = f(x) \cdot g(x)$. Então, sua derivada é dada pelo limite:

$$H'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{H(x+h) - H(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(x+h) \cdot g(x+h)] - [f(x) \cdot g(x)]}{h}.$$

Utilizando-se de um artifício algébrico, subtrai-se e soma-se o termo $f(x+h) \cdot g(x)$, como se segue

$$H'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x+h) \cdot g(x) + f(x+h) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x)}{h}.$$

Colocando $f(x+h)$ em evidência entre os dois primeiros termos e $g(x)$ em evidência nos dois últimos termos, obtém-se

$$H'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \left[f(x+h) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + g(x) \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right].$$

Pelas propriedades de limite, esse limite pode ser separado como se segue

$$H'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} g(x) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Que resulta em

$$H'(x) = f(x) \cdot g'(x) + g(x) \cdot f'(x).$$

□

Em outras palavras, a Regra do Produto diz que a derivada de um produto de duas funções é a derivada da primeira função vezes a segunda função mais a primeira função vezes a derivada da segunda função.

Exemplo 2.2.15. *Encontre a derivada da função $f(x) = 2x^2 \cdot (3x^4 + x^3)$.*

Como se percebe, a função f é o produto da função $2x^2$ pela função $3x^4 + x^3$. Portanto, pela Regra do Produto, a derivada de $f(x)$ é

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x^2 \cdot (12x^3 + 3x^2) + 4x \cdot (3x^4 + x^3) \\ &= (24x^5 + 6x^4) + (12x^5 + 4x^4) \\ &= 36x^5 + 10x^4. \end{aligned}$$

Note que aqui, como as duas funções são polinomiais, poderia ter feito a multiplicação entre elas utilizando a propriedade distributiva, e derivado posteriormente:

$$f(x) = 2x^2 \cdot (3x^4 + x^3) = 6x^6 + 2x^5.$$

Logo,

$$f'(x) = 36x^5 + 10x^4.$$

Independente de como se faça, o resultado é o mesmo. A Regra do Produto se torna muito útil em funções mais complexas, quando envolve exponenciais, logarítmicas e trigonométricas.

Exemplo 2.2.16. *Encontre a derivada da função $g(x) = (3x - 2) \cdot (2x^2 + 5x)$.*

Como se percebe, a função g é o produto da função $3x - 2$ pela função $2x^2 + 5x$. Portanto, pela Regra do Produto, a derivada de $g(x)$ é

$$\begin{aligned} g'(x) &= (3x - 2) \cdot (4x + 5) + 3 \cdot (2x^2 + 5x) \\ &= (12x^2 + 15x - 8x - 10) + (6x^2 + 15x) \\ &= 18x^2 + 22x - 10. \end{aligned}$$

• Regra do Quociente

Assim como na Regra da Produto, a derivada do quociente entre duas funções não é o quociente das derivadas, ou seja,

$$\left(\frac{f}{g}\right)' \neq \frac{f'}{g'}.$$

A fórmula para encontrar a derivada de um quociente é conhecida como Regra do Quociente.

Proposição 2.2.8. *Seja H uma função determinada pelo quociente das funções deriváveis f e g , com $g \neq 0$, assumindo a forma $H(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$. Sua derivada é encontrada através da fórmula:*

$$H'(x) = \frac{g(x) \cdot f'(x) + f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

Demonstração. Seja $H(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, com $g(x) \neq 0$. Então, sua derivada é dada pelo limite:

$$H'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{H(x+h) - H(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h}.$$

Efetuando-se a diferença no numerador do limite (através do mínimo múltiplo comum), obtém-se

$$H'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{g(x) \cdot f(x+h) - f(x) \cdot g(x+h)}{g(x) \cdot g(x+h)}}{h}. \quad (2.3)$$

A fração dentro do limite em (2.3) pode ser reescrita como

$$H'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{g(x) \cdot f(x+h) - f(x) \cdot g(x+h)}{h}}{g(x) \cdot g(x+h)}.$$

Utilizando-se de um artifício algébrico, soma-se e subtrai-se o termo $f(x) \cdot g(x)$, como se segue

$$H'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{g(x) \cdot f(x+h) - f(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x+h)}{h}}{g(x) \cdot g(x+h)}.$$

Colocando $g(x)$ em evidência entre os dois primeiros termos e $f(x)$ em evidência nos dois últimos termos, obtém-se

$$H'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{g(x) \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f(x) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h}}{g(x) \cdot g(x+h)} \right].$$

Pelas propriedades de limite, esse limite pode ser separado como se segue

$$\begin{aligned} H'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{g(x) \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}{g(x) \cdot g(x+h)} \right] - \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(x) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h}}{g(x) \cdot g(x+h)} \right]. \\ H'(x) &= \frac{1}{g(x)} \left\{ g(x) \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{g(x+h)} \right] - f(x) \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{g(x+h) - g(x)}{g(x+h)} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Como

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x), \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = g'(x) \quad \text{e} \quad \lim_{h \rightarrow 0} g(x+h) = g(x)$$

Segue da equação anterior, que:

$$H'(x) = \frac{g(x) \cdot f'(x) + f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

□

Em outros termos, a Regra do Quociente diz que a derivada de um quociente é a derivada do numerador vezes o denominador menos o numerador vezes a derivada do denominador, todos divididos pelo quadrado do denominador.

Exemplo 2.2.17. Encontre a derivada da função $h(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x^3 + 6}$.

Como se percebe, a função h é o quociente da função $f(x) = x^2 + x - 2$ pela função $g(x) = x^3 + 6$. Portanto, pela Regra do Quociente, a derivada de $h(x)$ é

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{(x^3 + 6) \cdot (2x + 1) - (x^2 + x - 2) \cdot (3x^2)}{(x^3 + 6)^2} \\ &= \frac{(2x^4 + 12x + x^3 + 6) - (3x^4 + 3x^3 - 6x^2)}{(x^3 + 6)^2} \\ &= \frac{-x^4 - 2x^3 + 6x^2 + 12x + 6}{(x^3 + 6)^2}. \end{aligned}$$

Exemplo 2.2.18. Encontre a derivada da função $h(x) = \frac{x}{x-1}$.

Como se percebe, a função h é o quociente da função $f(x) = x$ pela função $g(x) = x - 1$. Portanto, pela Regra do Quociente, a derivada de $h(x)$ é

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{(x-1) \cdot 1 - x \cdot 1}{(x-1)^2} \\ &= \frac{(x-1) - x}{(x-1)^2} \\ &= \frac{-1}{(x-1)^2}. \end{aligned}$$

As regras de derivação nos permitem calcular com relativa facilidade as derivadas de funções polinomiais, funções racionais, exponenciais, logarítmicas e trigonométricas. Além das regras mencionadas aqui, vale ressaltar que muitas derivadas podem ser encontradas através da Tabela de Derivadas, facilmente encontrada em livros de cálculos, como em [11], [12] e [13]. Seguem mais alguns exemplos do cálculo de derivadas:

Exemplo 2.2.19. Encontre a derivada da função $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

A derivada da função f pode ser encontrada através da Regra do Quociente, mas pode ser encontrada também pela Regra da Potência, se reescrita de outra forma. Pelas regras de potenciação,

$$f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2}.$$

Agora, utilizando a Regra da Potência,

$$f'(x) = -2 \cdot x^{-2-1} = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}.$$

Exemplo 2.2.20. Encontre a derivada da função $g(x) = \sqrt[3]{x^2}$.

A função g tem uma raiz cúbica de uma potência, e ainda pelas regras de potenciação, a função g pode ser reescrita como

$$g(x) = \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}.$$

Agora, utilizando a Regra da Potência,

$$g'(x) = \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}.$$

Que por sua vez, pode ser reescrita novamente na forma radical

$$g'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}} = \frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{x}}.$$

2.2.2 Derivadas Sucessivas ou de Ordem Superior

Se f for uma função derivável, então sua derivada f' também é uma função, de modo que f' pode ter sua própria derivada, denotada por $(f')' = f''$. Esta nova função, f'' , é chamada de segunda derivada de f ou derivada de ordem 2 de f .

De modo análogo, pode-se definir as demais: a derivada de f'' , denotada por f''' , é a terceira derivada ou derivada de ordem 3 de f ; a derivada de f''' , denotada por $f^{(4)}$, é a quarta derivada ou derivada de ordem 4 de f ; e assim, sucessivamente.

Observação: Observe que funções polinomiais possuem derivadas de todas as ordens.

Exemplo 2.2.21. Seja $f(x) = 4x^3 + 2x^2 - 5x + 8$. Suas derivadas sucessivas, até ordem 4, são:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 12x^2 + 4x - 5, \\ f''(x) &= 24x + 4, \\ f'''(x) &= 24, \\ f^{(4)}(x) &= 0. \end{aligned}$$

Exemplo 2.2.22. *Seja $g(x) = -2x^4 + 6x^2 + 7$. Suas derivadas sucessivas, até ordem 5, são:*

$$\begin{aligned}g'(x) &= -8x^3 + 12x, \\g''(x) &= -24x^2 + 12, \\g'''(x) &= -48x, \\g^{(4)}(x) &= -48, \\g^{(5)}(x) &= 0.\end{aligned}$$

2.3 Conceitos Relacionados à Derivada

Consequente, “a derivada é um conceito que pode ser explorado a partir de diferentes focos: derivada como um limite, como inclinação da reta tangente a uma curva em um ponto dado, (...)” (p. 31) [22].

A derivada fornece informações importantes e precisas quanto ao comportamento de uma função. Tais informações viabilizam o esboço do gráfico que representa a função, pois indicam a continuidade, o comportamento da função em um determinado intervalo, o crescimento ou o decréscimo e os pontos críticos, além de outras características, abordadas no decorrer deste tópico [22].

Silva [22] menciona Ávila (2006) em um trecho em que o referido autor defende o ensino do conceito de derivada no ensino médio, como uma grande vantagem no estudo de funções, e ainda complementa que:

(...) o ensino do cálculo é de grande valor, pois além de ajudar no tratamento de inúmeras propriedades das funções e de ter aplicações interessantes em problemas de máximo e mínimo, crescimento e decréscimo, dentre outros, integra-se harmoniosamente com muitas das ciências conhecidas, pois o Cálculo pode tornar o estudo de alguns destes tópicos mais simples e compreensíveis para os alunos do Ensino Médio. (p. 32).

2.3.1 Continuidade de uma Função

“A definição matemática de continuidade tem correspondência bem próxima ao significado da palavra continuidade no uso comum. (Um processo contínuo é aquele que ocorre gradualmente, sem interrupções ou mudanças abruptas.)” (p. 109) [11].

Definição 2.3.1. *Uma função f é contínua em um ponto a se*

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Ou seja, da Definição 2.3.1, segue que para que uma função seja contínua, as três condições a seguir devem ser satisfeitas:

- a) $f(a)$ é definida (a pertence ao domínio da função f);
- b) $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe;
- c) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Definição 2.3.2. *Uma função f é contínua em um intervalo se for contínua em todos os pontos do intervalo.*

“Se uma função f é derivável em $x = a$, a curva de f possui uma tangente não-vertical no ponto $P(c, f(a))$ e em todos os pontos próximos de P . Isto sugere que a função é contínua em $x = a$, (...)” [13]. A relação entre continuidade e derivabilidade pode ser resumida em:

Proposição 2.3.3. *Se a função f é derivável em $x = a$, então f é contínua em $x = a$.*

Demonstração. Demonstra-se que f é contínua em c , mostrando que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. Isto é comprovado quando a diferença $f(x) - f(a)$ tende a 0.

Se f é diferenciável em a , então

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad (2.4)$$

existe. Quando $x \neq a$, pode-se escrever $f(x) - f(a)$ como:

$$f(x) - f(a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a). \quad (2.5)$$

Usando a equação (2.5), e partindo-se do limite de $f(x) - f(a)$ quando x tende a a , vem que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) - f(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a).$$

Pelas propriedades de limite, esse limite acima pode ser separado em

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) - f(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \lim_{x \rightarrow a} (x - a).$$

O primeiro limite é a própria definição de derivada. Deste modo, portanto,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) - f(a) = f'(a) \cdot \lim_{x \rightarrow a} (x - a) = f'(a) \cdot 0 = 0. \quad (2.6)$$

Conclui-se portanto que, f é contínua em a . □

Esta última proposição relaciona o conceito de continuidade da função à derivada da função. Ainda sobre polinômios, foco deste trabalho, tem-se que:

Proposição 2.3.4. *Se $f(x)$ é um polinômio, então*

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Demonstração. Seja $f(x)$ um polinômio do tipo $f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} (a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0).$$

Pelas propriedades de limite, o limite acima pode ser separado termo a termo como segue

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} (a_n \cdot x^n) + \lim_{x \rightarrow a} (a_{n-1} \cdot x^{n-1}) + \dots + \lim_{x \rightarrow a} (a_2 \cdot x^2) + \lim_{x \rightarrow a} (a_1 \cdot x) + \lim_{x \rightarrow a} a_0.$$

Ainda pelas propriedades de limite, tem-se:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = a_n \cdot \lim_{x \rightarrow a} x^n + a_{n-1} \cdot \lim_{x \rightarrow a} x^{n-1} + \dots + a_2 \cdot \lim_{x \rightarrow a} x^2 + a_1 \cdot \lim_{x \rightarrow a} x + \lim_{x \rightarrow a} a_0.$$

Que resulta em

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = a_n \cdot a^n + a_{n-1} \cdot a^{n-1} + \dots + a_2 \cdot a^2 + a_1 \cdot a + a_0 = f(a).$$

□

O último resultado equivale a dizer que as funções polinomiais são contínuas em todos os pontos em que são definidas.

No que se segue, enuncia-se aqui duas propriedades importantes sobre funções contínuas.

- P.1) Se f é contínua em a e $f(a) > 0$ (< 0), então $f(x) > 0$ (< 0) para todo x suficientemente próximo de a , isto é, existe um intervalo aberto contendo a e $f(x) > 0$ (< 0) para todo x neste intervalo.
- P.2) Uma função contínua não muda de sinal sem assumir o valor zero.

Estas propriedades são conhecidas, respectivamente, por Teorema da Permanência do Sinal e Teorema do Anulamento (ou de Bolzano). E a prova dos mesmos podem ser encontradas na maioria dos livros de cálculo, como por exemplo em [25].

2.3.2 Intervalos de Crescimento e Decrescimento

Intuitivamente, sabemos que uma função $f(x)$ é crescente quando a curva de f se inclina para cima, e decrescente quando a curva de f se inclina para baixo. Matematicamente, uma função pode ser classificada como crescente, decrescente ou constante; de acordo com as definições a seguir:

Definição 2.3.5. Uma função f é dita crescente em um determinado intervalo I se, para quaisquer x_1 e x_2 pertencentes a I , tais que $x_1 < x_2$, tem-se $f(x_1) < f(x_2)$.

Definição 2.3.6. Uma função f é dita decrescente em um determinado intervalo I se, para quaisquer x_1 e x_2 pertencentes a I , tais que $x_1 < x_2$, tem-se $f(x_1) > f(x_2)$.

Definição 2.3.7. Uma função f é dita constante em um determinado intervalo I se, para quaisquer x_1 e x_2 pertencentes a I , tem-se $f(x_1) = f(x_2)$.

O Teorema do Valor Médio, enunciado abaixo, se faz necessário para entender a relação entre os intervalos de crescimento e decrescimento com a derivada da função.

Teorema 2.3.8. Seja f uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e derivável no intervalo aberto (a, b) . Então existe pelo menos um número $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Ou, de maneira equivalente,

$$f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a).$$

A demonstração desse teorema pode ser vista em [11].

A derivada de uma função pode ser usada para determinar se a função é crescente ou decrescente em um intervalo, como mostra o Teorema a seguir.

Teorema 2.3.9. Seja f uma função contínua em $[a, b]$:

- i) Se $f'(x) > 0$ para todo x em (a, b) , então f é crescente em $[a, b]$;
- ii) Se $f'(x) < 0$ para todo x em (a, b) , então f é decrescente em $[a, b]$;
- iii) Se $f'(x) = 0$ para todo x em (a, b) , então f é constante em $[a, b]$.

Demonstração. Seja $x_1, x_2 \in [a, b]$, com $x_1 < x_2$. Como f é contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b) , então, claramente, f é contínua em $[x_1, x_2]$ e derivável em (x_1, x_2) . Pelo Teorema do Valor Médio tem-se que, existe $c \in (x_1, x_2)$ tal que $f(x_2) - f(x_1) = f'(c) \cdot (x_2 - x_1)$. Segue análise caso a caso:

- i) Se $f'(c) > 0$, e sendo $(x_2 - x_1) > 0$, já que $x_1 < x_2$, então $f(x_2) - f(x_1)$ é igual a multiplicação de dois valores positivos, resultando em $f(x_2) - f(x_1) > 0$ ou que $f(x_2) > f(x_1)$, concluindo que $f(x_1)$ é crescente.
- ii) Se $f'(c) < 0$, e sendo $(x_2 - x_1) > 0$, já que $x_1 < x_2$, então $f(x_2) - f(x_1)$ é igual a multiplicação de um valor positivo por um valor negativo, resultando em $f(x_2) - f(x_1) < 0$ ou que $f(x_2) < f(x_1)$, concluindo que $f(x_1)$ é decrescente.
- iii) Se $f'(c) = 0$, então $f'(c) \cdot (x_2 - x_1) = 0$, o que equivale a dizer que $f(x_2) - f(x_1)$ também é igual a zero, concluindo-se que $f(x_1)$ é constante.

□

Pautado nas propriedades $P.1$ e $P.2$ da Seção 2.3.1, sob algumas condições, pode-se analisar o sinal da derivada de uma função f em um intervalo, calculando seu valor em um ponto c qualquer deste intervalo, como ressalta [13], no trecho a seguir:

Se assinalarmos em uma reta de números todos os números x para os quais $f'(x)$ é descontínua ou $f'(x) = 0$, a reta será dividida em intervalos nos quais $f'(x)$ não muda de sinal. Assim, se escolhermos um número de teste c pertencente a um dos intervalos e constatamos que $f'(c) > 0$, ficamos sabendo que $f'(x) > 0$ para todos os números x pertencentes a este intervalo e $f(x)$ é crescente em todo o intervalo. Se, por outro lado, $f'(c) < 0$, ficamos sabendo que $f(x)$ é decrescente em todo o intervalo (p. 156).

Estas observações podem ser resumidas da seguinte forma:

Para determinar os intervalos em que a função $f(x)$ é crescente ou decrescente,

1) determine todos os valores de x para os quais $f'(x) = 0$ ou $f'(x)$ não é contínua e assinale estes valores em uma reta numérica, dividindo a reta em um certo número de intervalos abertos;

2) Escolha um número de teste c para cada intervalo, e calcule $f(c)$.

i) se $f'(c) > 0$, a função $f(x)$ é crescente naquele intervalo; e ii) se $f'(c) < 0$, a função $f(x)$ é decrescente naquele intervalo.

Exemplo 2.3.1. *Determine os intervalos em que a função $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 7$ é crescente ou decrescente.*

Primeiramente, encontra-se a derivada da função $f(x)$:

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12.$$

Analisando $f'(x)$, que é uma função polinomial de segundo grau, tem-se que a mesma se anula em $x = 1$ e $x = -2$, raízes da função $f'(x)$. Estes números dividem o eixo horizontal (eixo x) em três intervalos abertos:

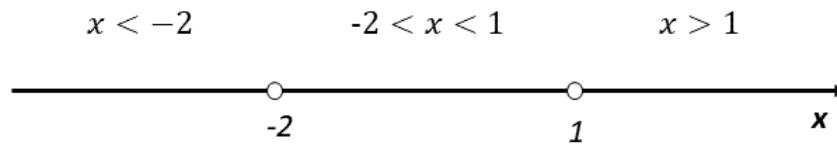
- $(-\infty, -2)$ ou o intervalo onde $x < -2$;
- $(-2, 1)$ ou o intervalo onde $-2 < x < 1$;
- $(1, \infty)$ ou o intervalo onde $x > 1$.

Conforme a Figura 13 a seguir.

Em cada um destes intervalos, escolhe-se um número de teste c , como por exemplo:

- $c = -3$, para o intervalo $(-\infty, -2)$;

Figura 13 – Intervalos definidos pelos pontos $x = 1$ e $x = -2$.



Fonte: Produzido pela autora.

- $c = 0$, para o intervalo $(-2, 1)$;
- $c = 2$, para o intervalo $(1, \infty)$.

Em seguida, calcula-se o valor de $f'(c)$ para cada número teste:

$$f'(-3) = 24 > 0, \quad f'(0) = -12 < 0, \quad e \quad f'(2) = 24 > 0.$$

Conclui-se, então, que a função $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 7$ é crescente nos intervalos $(-\infty, -2)$ e $(1, \infty)$; e decrescente no intervalo $(-2, 1)$, conforme explícito na Tabela 4 abaixo.

Tabela 4 – Intervalo de crescimento e decrescimento da função $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 7$.

Intervalo	Número de teste c	$f'(c)$	Conclusão
$(-\infty, -2)$	-3	$f'(-3) = 24 > 0$	crescente
$(-2, 1)$	0	$f'(0) = -12 < 0$	decrescente
$(1, \infty)$	2	$f'(2) = 24 > 0$	crescente

Fonte: Produzido pela autora com base em um exemplo de [13].

Exemplo extraído de [13].

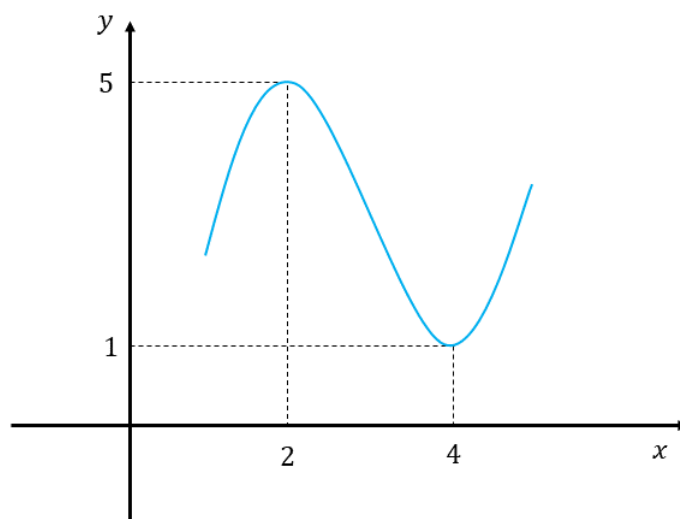
2.3.3 Valores Máximos e Mínimos

Seja f a função cujo gráfico está ilustrado na Figura 14 a seguir. O ponto mais alto do gráfico é o ponto $(2, 5)$, ou seja, o maior valor que a função f assume é 5 ou $f(x) = 5$ em $x = 2$. E, de forma análoga, o menor valor que a função f assume é 1 em $x = 4$.

Definição 2.3.10. *Seja c um número pertencente ao domínio D de uma função f . Então $f(c)$ é o*

- valor máximo absoluto de f em D se $f(c) \geq f(x)$ para todo x em D ;
- valor mínimo absoluto de f em D se $f(c) \leq f(x)$ para todo x em D .

Figura 14 – Gráfico com pontos de máximo e mínimo.



Fonte: Produzido pela autora

Os valores máximos e mínimos de f são chamados de valores extremos de f . Se um valor c não é um máximo absoluto, mas é o maior valor que a função assume dentro de um “sub-intervalo” contido no domínio da função, diz-se portanto que, o valor c é um máximo local. De forma análoga, define-se mínimo local:

Definição 2.3.11. *O número $f(c)$ é um*

- *valor máximo local de f se $f(c) \geq f(x)$ quando x está próximo de c ;*
- *valor mínimo local de f se $f(c) \leq f(x)$ quando x está próximo de c .*

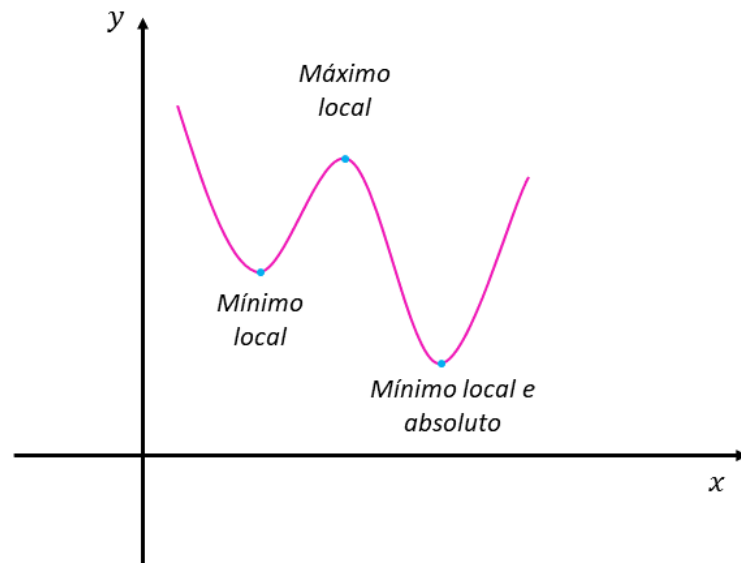
Todo mínimo absoluto ou máximo absoluto é um mínimo ou máximo local, respectivamente, mas nem todo mínimo ou máximo local é um mínimo ou máximo absoluto. Tal situação pode ser vista na Figura 15 a seguir.

Exemplo 2.3.2. *O esboço do gráfico da função $f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2$, com $-1 \leq x \leq 4$ está mostrado na Figura 16.*

Para a referida função representada na Figura 16, percebe-se então, diante das definições de mínimo e máximo local e absoluto que, no intervalo $[1, 4]$ o ponto $(-1, 37)$ é ponto máximo absoluto; $(0, 0)$ é ponto de mínimo local; o ponto $(1, 5)$ é ponto máximo local; o ponto $(3, -27)$ é ponto mínimo local e mínimo absoluto, e o ponto $(4, 32)$ é ponto de máximo local.

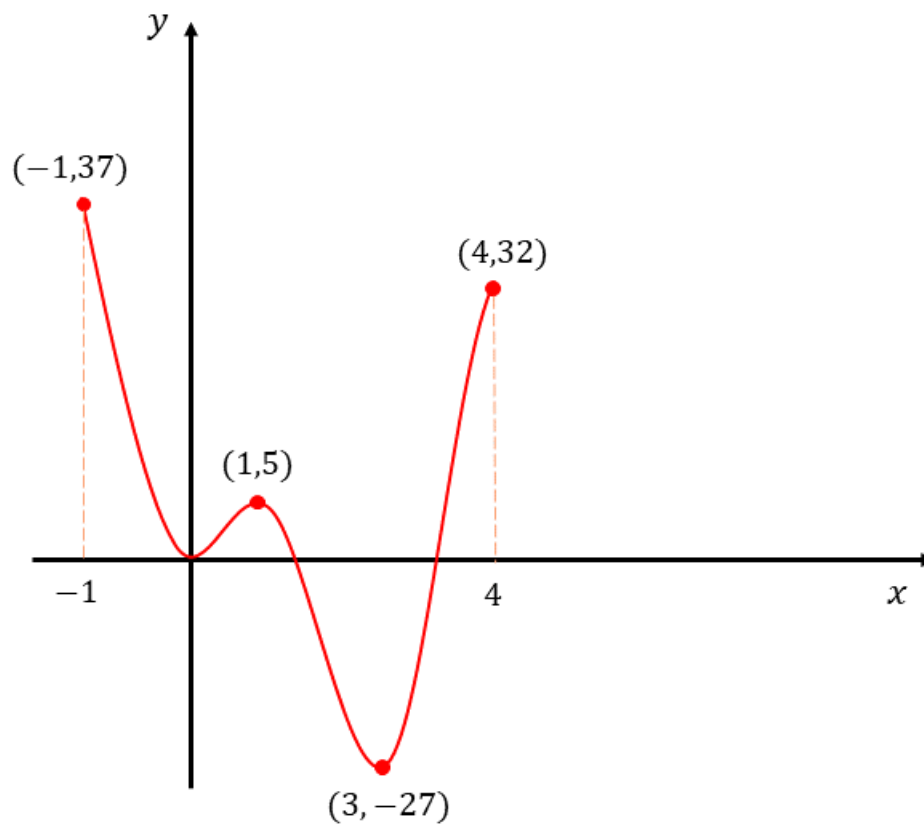
O Teorema do Valor Extremo, ou Teorema de Weierstrass, enunciado a seguir, afirma que qualquer função contínua em um intervalo fechado é limitada, e também que esta tem um máximo e um mínimo neste intervalo.

Figura 15 – Gráfico com pontos de máximo de mínimo locais e absolutos.



Fonte: Produzido pela autora.

Figura 16 – Esboço do gráfico de $f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2$, com $-1 \leq x \leq 4$.



Fonte: Produzido pela autora

Teorema 2.3.12. *Se f for contínua em um intervalo fechado $[a, b]$, então f assume um valor máximo absoluto $f(c)$ e um valor mínimo absoluto $f(d)$ em certos valores c e d em $[a, b]$.*

A prova deste teorema pode ser encontrada em [11].

Embora o Teorema do Valor Extremo afirme que uma função contínua em um intervalo fechado tem um valor máximo e um mínimo, ele não diz como encontrá-los. No entanto, o Teorema de Fermat relaciona os máximos e mínimos locais à derivada da função, da seguinte forma:

Teorema 2.3.13. *Se f tiver um máximo ou um mínimo local em c e se $f'(c)$ existir, então $f'(c) = 0$.*

A demonstração do Teorema de Fermat pode ser encontrada em [11].

Todavia, a recíproca do Teorema de Fermat não é verdadeira. Apenas o fato de $f'(c) = 0$ não garante que c seja um ponto de máximo ou mínimo local da função f . De certo modo, o Teorema de Fermat sugere que devemos, pelo menos, “começar procurando” por valores extremos de f nos pontos c onde $f'(c) = 0$ ou onde $f'(c)$ não existe. Esses números têm um nome especial, são denominados pontos críticos ou números críticos.

Definição 2.3.14. *Um número crítico de uma função f é um número c no domínio de f tal que ou $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existe.*

Exemplo 2.3.3. *Encontre os pontos críticos da função $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 9$. Primeiro, deve-se encontrar a derivada da função $f(x)$:*

$$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12.$$

Fazendo $f'(x) = 0$, encontra-se $x = 1$ e $x = 2$, ou seja, para esses valores a função $f'(x)$ se anula. Desta forma, os números (ou pontos) críticos da função $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 9$ são 1 e 2.

Para encontrar um máximo ou mínimo absoluto de uma função contínua em um intervalo fechado, observa-se que:

- i) ou este é um ponto de máximo ou mínimo local, e neste caso, ocorre em um ponto crítico, conforme visto acima no Teorema de Fermat;
- ii) ou acontece em uma extremidade do intervalo.

O procedimento a seguir, denominado como “Método do Intervalo Fechado”, enunciado em [11], fornece um algoritmo para encontrar o máximo e mínimo absoluto de uma função contínua em um intervalo fechado.

Método do Intervalo Fechado

Para encontrar os valores máximo e mínimo absolutos de uma função contínua f em um intervalo fechado $[a, b]$:

- 1) Encontre os valores de f nos números críticos de f em (a, b) ;
- 2) Encontre os valores de f nas extremidades do intervalo;
- 3) O maior valor entre as etapas 1 e 2 é o valor máximo absoluto, ao passo que o menor desses valores é o valor mínimo absoluto.

Exemplo 2.3.4. *Encontre os valores máximo e mínimo absoluto da função $f(x) = 3x^2 - 12x + 5$, com $0 \leq x \leq 3$.*

Visto que a função $f(x)$ é uma função polinomial de grau 2, e que em consequência disto, é uma função contínua, pode-se usar o Método do Intervalo Fechado.

Desta forma, primeiro encontra-se a derivada da função $f(x)$:

$$f'(x) = 6x - 12.$$

Uma vez que $f'(x)$ existe para todo x , os pontos críticos de f ocorrem quando $f'(x) = 0$, ou seja, em $x = 2$. O valor de f neste ponto crítico é:

$$f(2) = -7.$$

Os valores de f nas extremidades do intervalo são:

$$f(0) = 5 \quad e \quad f(3) = -4.$$

Comparando esses números, vê-se que o valor máximo absoluto é 5 e ocorre em $x = 0$ e o valor mínimo absoluto é -7 e ocorre em $x = 2$.

2.3.4 O Teste da Primeira Derivada: Intervalos de Crescimento e Máximos e Mínimos locais

Como já visto anteriormente, a derivada de uma função diz quando a mesma é crescente, decrescente ou até mesmo constante.

Para determinar onde uma função f é crescente e decrescente, divide-se a reta real, ou o intervalo onde f está definida, em intervalos cujas extremidades são os pontos críticos da função f . Analisa-se portanto, o valor que a derivada da função f assume dentro de cada intervalo.

Nos casos em que há uma mudança no sentido de crescimento de um intervalo para outro intervalo subsequente, então o ponto crítico que delimita esses dois intervalos é um

ponto de máximo ou mínimo local. Tal fato é formulado no Teste da Primeira Derivada, enunciado a seguir.

Teste da Primeira Derivada

Suponha que c seja um número crítico de uma função contínua f .

- Se o sinal de f' mudar de positivo para negativo em c , então f tem um máximo local em c ;
- Se o sinal de f' mudar de negativo para positivo em c , então f tem um mínimo local em c ;
- Se f' não mudar de sinal em c (isto é, se em ambos os lados de c f' for positivo ou negativo), então f não tem máximo ou mínimo locais em c .

Portanto, o Teste da Primeira Derivada fornece um método, ou um algoritmo, para encontrar os máximos e mínimos locais de uma função contínua f , conforme o exemplo a seguir.

Exemplo 2.3.5. *Encontre os pontos críticos da função $f(x) = 2x^4 - 4x^2 + 3$, e classifique-os como máximo local, mínimo local, ou nem mínimo e nem máximo local.*

A derivada da função $f(x)$ é

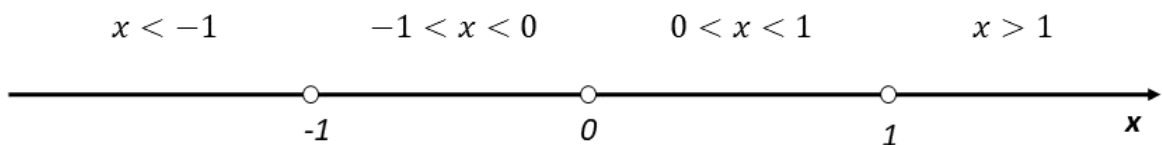
$$f'(x) = 8x^3 - 8x.$$

Como $f'(x)$ é contínua, os pontos críticos são aqueles para os quais $f'(x) = 0$, que são

$$x = 0, \quad x = 1 \quad e \quad x = -1.$$

Estes números dividem o eixo x em quatro intervalos: $(-\infty, -1)$ ou onde $x < -1$, $(-1, 0)$ ou onde $-1 < x < 0$, $(0, 1)$ ou onde $0 < x < 1$ e $(1, \infty)$ ou onde $x > 1$, como se vê na Figura 17.

Figura 17 – Intervalos divididos pelos pontos críticos de $f(x) = 2x^4 - 4x^2 + 3$.



Fonte: Produzido pela autora.

Escolhendo-se um número de teste c em cada um destes intervalos (como por exemplo, -2 , $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ e 2 , respectivamente), e calculando-se o valor de $f'(c)$ para cada número de teste, tem-se os valores:

$$f'(-2) = -48, \quad f'\left(-\frac{1}{2}\right) = 3, \quad f'\left(\frac{1}{2}\right) = -3 \quad e \quad f'(2) = 48$$

Desta forma, a curva da função $f(x)$ é decrescente para $x < -1$; crescente para $-1 < x < 0$; decrescente para $0 < x < 1$; e crescente para $x > 1$.

A Tabela 5 a seguir, permite uma melhor visualização destes resultados:

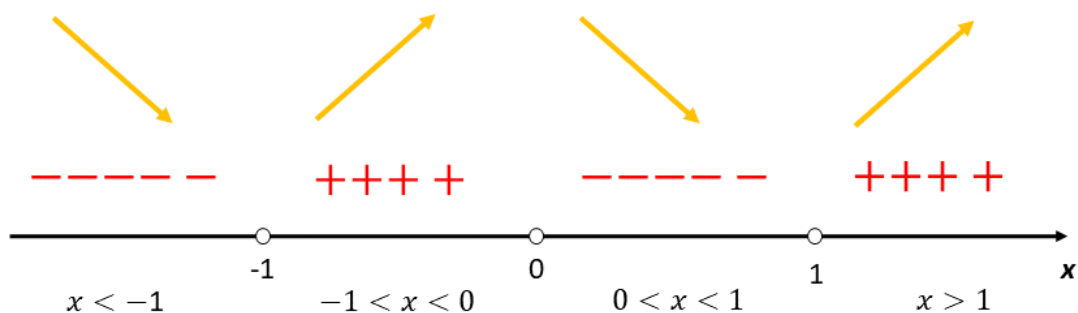
Tabela 5 – Intervalo de crescimento e decrescimento da função $f(x) = 2x^4 - 4x^2 + 3$.

Intervalo	Número de teste c	$f'(c)$	Conclusão
$(-\infty, -1)$	-2	$f'(-2) = -48 < 0$	decrescente
$(-1, 0)$	$-\frac{1}{2}$	$f'\left(-\frac{1}{2}\right) = 3 > 0$	crescente
$(0, 1)$	$\frac{1}{2}$	$f'\left(\frac{1}{2}\right) = -3 < 0$	decrescente
$(1, \infty)$	2	$f'(2) = 48 > 0$	crescente

Fonte: Produzido pela autora.

A análise indica que houve mudança de sentido na curva de $f(x)$ do intervalo $(-\infty, -1)$ para o intervalo $(-1, 0)$; assim como do intervalo $(-1, 0)$ para o intervalo $(0, 1)$ e do intervalo $(0, 1)$ para o intervalo $(1, \infty)$, como indica as setas da Figura 18 a seguir.

Figura 18 – Intervalos de crescimento e decrescimento da função $f(x) = 2x^4 - 4x^2 + 3$.



Fonte: Produzido pela autora.

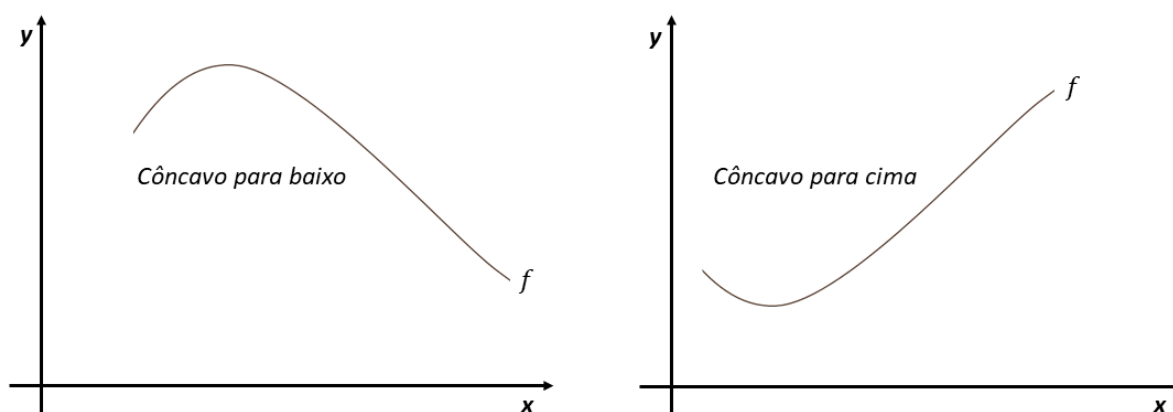
Conclui-se portanto que, pela análise dos pontos críticos, existe um máximo local em $x = 0$, e mínimos locais em $x = -1$ e $x = 1$.

Exercício extraído de [13] e resolvido pela autora.

2.3.5 O Teste da Segunda Derivada: Análise da Concavidade

A propriedade do gráfico de uma função curvar-se para cima ou para baixo é denominada de concavidade. Como pode se observar na Figura 19, a concavidade pode ocorrer para cima ou para baixo.

Figura 19 – Concavidade de uma função.



Fonte: Produzido pela autora.

Definição 2.3.15. *Seja f uma função diferenciável em um intervalo aberto I . O gráfico de f é*

1. *Côncavo para cima em I se f' for crescente no intervalo;*
2. *Côncavo para baixo em I se f' for decrescente no intervalo.*

Geometricamente, uma curva é côncava para cima se está acima de todas as suas retas tangentes, e é côncava para baixo se está abaixo de todas as suas retas tangentes, conforme mostra a Figura 20.

Este teste visual da concavidade é útil quando o gráfico da função é dado. Para determinar a concavidade sem ver o gráfico, é necessário um teste analítico.

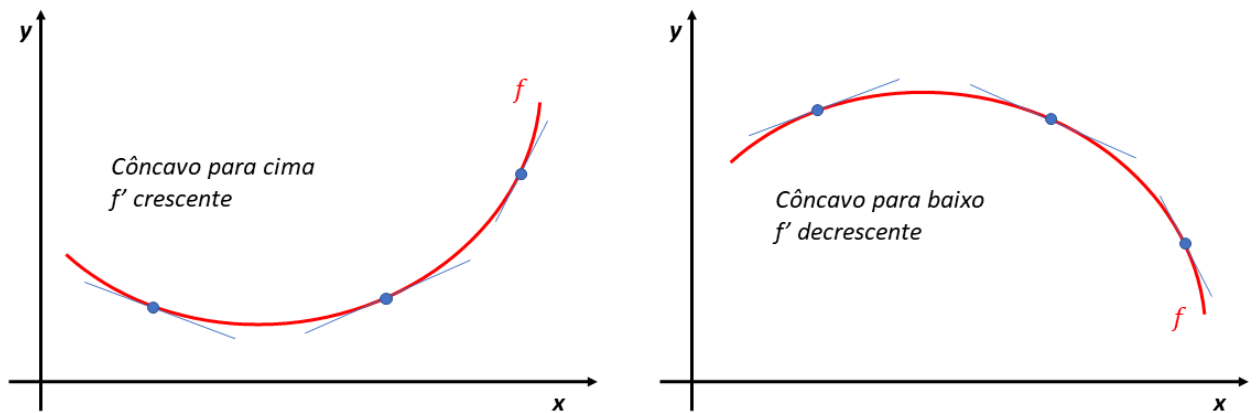
O Teste da Concavidade, enunciado abaixo, fornece um método para determinar em quais intervalos o gráfico de uma função contínua f tem concavidade para cima ou para baixo.

Teste da Concavidade

Seja f uma função cuja segunda derivada exista em um intervalo aberto I .

- a) Se $f''(x) > 0$ para todo $x \in I$, então o gráfico de f é côncavo para cima em I ;

Figura 20 – Comparativo entre a concavidade e as retas tangentes do gráfico de uma função.



Fonte: Produzido pela autora.

- b) Se $f''(x) < 0$ para todo $x \in I$, então o gráfico de f é côncavo para baixo em I .
- c) Se $f''(x) = 0$ para todo $x \in I$, então o gráfico de f não tem concavidade em I , ou seja, é um segmento de reta neste intervalo.

Exemplo 2.3.6. Analise a concavidade do gráfico da função $f(x) = x^2$.

A segunda derivada da função $f(x)$ é

$$f''(x) = 2.$$

Como $f''(x)$ é positiva para todos os valores de x , conclui-se que o gráfico da função $f(x)$ é côncavo para cima em toda a reta real.

Exemplo 2.3.7. Estude a concavidade da função $f(x) = 2x^4 - 8x^3 + 7x - 3$.

Primeiramente, a derivada segunda deverá ser encontrada:

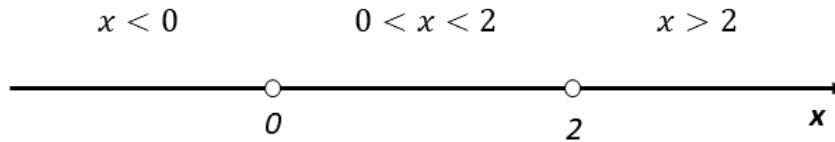
$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^4 - 8x^3 + 7x - 3, \\ f'(x) &= 8x^3 - 24x^2 + 7, \\ f''(x) &= 24x^2 - 48x. \end{aligned}$$

A derivada segunda $f''(x)$ é contínua para qualquer valor de x , e esta se anula ($f''(x) = 0$) em $x = 0$ e $x = 2$. Estes números dividem a reta real em três intervalos, conforme Figura 21.

Calculando o valor de $f''(x)$ para números de teste em cada um destes intervalos, tem-se os seguintes resultados:

Tais resultados podem ser mais facilmente interpretados na Figura 22. O gráfico da função $f(x) = 2x^4 - 8x^3 + 7x - 3$ tem concavidade para cima para $x < 0$ e $x > 2$; e tem concavidade para baixo para $0 < x < 2$.

Figura 21 – Representação dos intervalos definidos pelos pontos críticos da derivada de $f(x) = 2x^4 - 8x^3 + 7x - 3$.



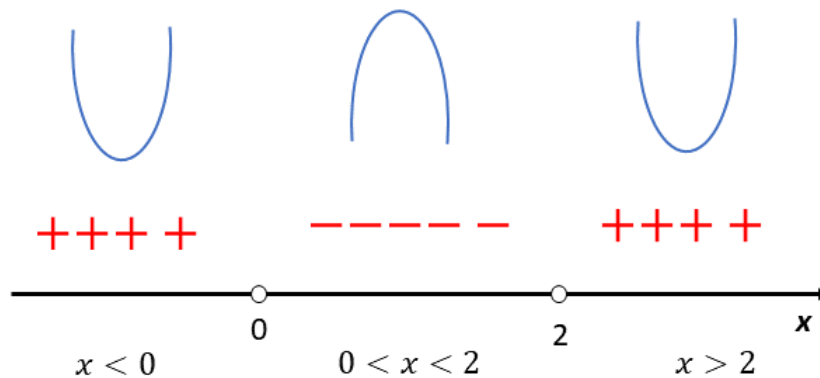
Fonte: Produzido pela autora.

Tabela 6 – Análise da Concavidade da função $f(x) = 2x^4 - 8x^3 + 7x - 3$.

Intervalo	Número de teste c	$f''(c)$	Conclusão
$(-\infty, 0)$	-2	$f''(-2) = 192 > 0$	côncavo para cima
$(0, 2)$	1	$f''(1) = -24 < 0$	côncavo para baixo
$(2, \infty)$	3	$f''(3) = 72 > 0$	côncavo para cima

Fonte: Produzido pela autora.

Figura 22 – Análise de Concavidade da função $f(x) = 2x^4 - 8x^3 + 7x - 3$.



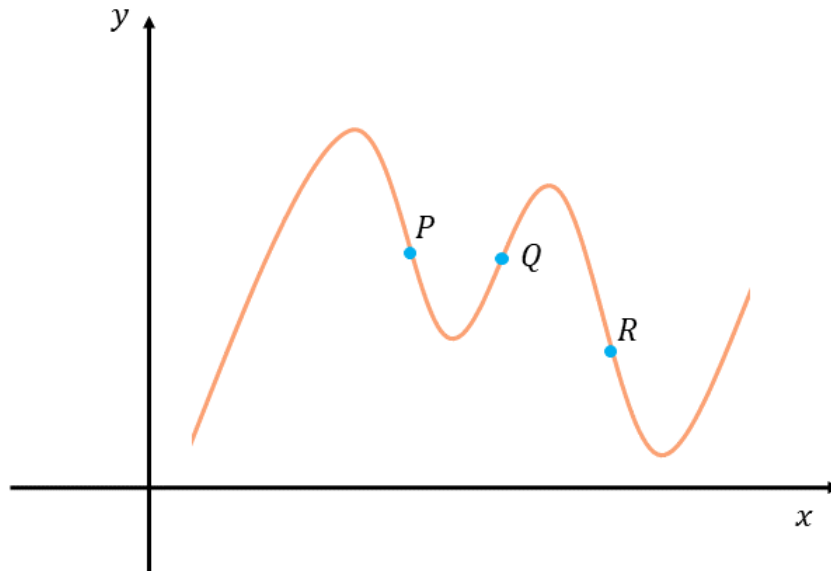
Fonte: Produzido pela autora.

Outro conceito importante no estudo das derivadas é o de ponto de inflexão. Sua definição segue abaixo.

Definição 2.3.16. Um ponto P na curva $y = f(x)$ é chamado ponto de inflexão para o gráfico de f se f é contínua no ponto e a curva mudar de côncava para cima para côncava para baixo ou vice-versa em P .

De forma geral, um ponto de inflexão é aquele em que a curva do gráfico muda a direção de sua concavidade. Na Figura 23, percebe-se que os pontos P , Q e R são pontos de inflexão.

Figura 23 – Pontos de Inflexão.



Fonte: Produzido pela autora.

Relacionando o ponto de inflexão com o Teste da Concavidade, há um ponto de inflexão sempre que a segunda derivada mudar de sinal.

Uma propriedade dos pontos de inflexão, mencionada a seguir, se torna um importante método na determinação dos mesmos:

Propriedade dos pontos de inflexão

Seja $(c, f(c))$ um ponto de inflexão do gráfico de uma função f , então $f''(c) = 0$ ou $f''(c)$ não é definido.

Exemplo 2.3.8. *Determine todos os pontos de inflexão da função $f(x) = 3x^5 - 5x^4 - 1$.*

A partir de $f(x)$, a primeira e a segunda derivada podem ser encontradas:

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x^5 - 5x^4 - 1, \\ f'(x) &= 15x^4 - 20x^3, \\ f''(x) &= 60x^3 - 60x^2. \end{aligned}$$

Desta forma, $f''(x)$ é contínua para qualquer valor de x e $f''(x) = 0$ para $x = 0$ e $x = 1$. Tais pontos resultam em três intervalos na reta real: $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$ e $(1, \infty)$. Escolhendo números de testes pertencentes a cada intervalo, tem-se os resultados mostrados na Tabela 7.

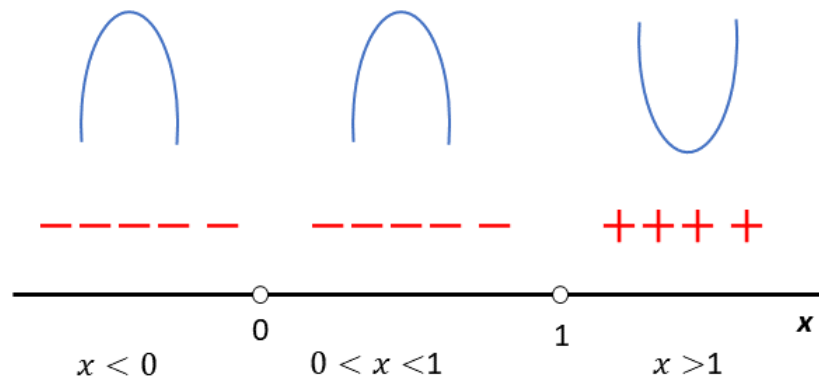
O mesmo resultado pode ser ilustrado através do diagrama da figura 24.

Percebe-se que a concavidade não muda em $x = 0$, mas muda de “côncavo para baixo” para “côncavo para cima” em $x = 1$. Desta forma, conclui-se que $x = 1$ é um ponto de inflexão do gráfico de $f(x) = 3x^5 - 5x^4 - 1$.

Tabela 7 – Análise de Concavidade da função $f(x) = 3x^5 - 5x^4 - 1$.

Intervalo	Número de teste c	$f''(c)$	Conclusão
$(-\infty, 0)$	-2	$f''(-2) = -720 < 0$	côncavo para baixo
$(0, 1)$	$\frac{1}{2}$	$f''(\frac{1}{2}) = -\frac{15}{2} < 0$	côncavo para baixo
$(1, \infty)$	2	$f''(2) = 240 > 0$	côncavo para cima

Fonte: Produzido pela autora.

Figura 24 – Análise de Concavidade da função $f(x) = f(x) = 3x^5 - 5x^4 - 1$.

Fonte: Produzido pela autora.

Exercícios extraído de [14] e resolvido pela autora.

Outra aplicação da segunda derivada é o Teste da Segunda Derivada, que é uma consequência do Teste da Concavidade.

Teste da Segunda Derivada

Suponha que f'' seja contínua na proximidade de c .

- Se $f'(c) = 0$ e $f''(c) > 0$, então f tem um mínimo local em c ;
- Se $f'(c) = 0$ e $f''(c) < 0$, então f tem um máximo local em c .

O Teste da Segunda Derivada é inconclusivo para quando $f''(c) = 0$. Neste caso, este pode ser um ponto de máximo ou mínimo local, ou nenhum dos dois. O teste também falha quando $f''(c)$ não existe. Em ambas as ocorrências, o Teste da Primeira Derivada pode ser utilizado.

Exemplo 2.3.9. Examine a curva $y = x^4 - 4x^3$ em relação à concavidade, aos pontos de inflexão, mínimos e máximos locais.

Se $f(x) = x^4 - 4x^3$, então a primeira e a segunda derivada são dadas por

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2,$$

$$f''(x) = 12x^2 - 24x.$$

Fazendo $f'(x) = 0$, encontra-se $x = 0$ e $x = 3$, números (ou pontos) críticos da função $f(x)$. Para usar o Teste da Segunda Derivada, calcula-se f'' nesses pontos críticos:

$$f''(0) = 0 \quad f''(3) = 36 > 0.$$

Como $f'(3) = 0$ e $f''(3) = 36 > 0$, então $f(3) = -27$ é um mínimo local. Já para o número crítico 0 , como $f''(0) = 0$, o Teste da Segunda Derivada é inconclusivo. Neste caso, pode-se usar o Teste da Primeira Derivada para mostrar que f não tem um máximo e nem um mínimo local em 0 .

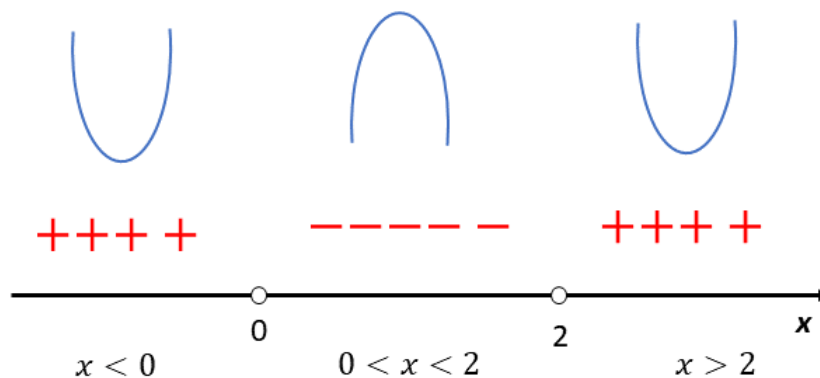
Fazendo $f''(x) = 0$, encontra-se $x = 0$ e $x = 2$, que dividem a reta real em três intervalos e, seguindo o procedimento para análise da concavidade e determinação dos pontos de inflexão, tem-se a Tabela 8. Tais resultados geram o diagrama da figura 25.

Tabela 8 – Análise Concavidade da função $f(x) = x^4 - 4x^3$.

Intervalo	Número de teste c	$f''(c)$	Conclusão
$(-\infty, 0)$	-2	$f''(-2) = 96 > 0$	côncavo para cima
$(0, 2)$	1	$f''(1) = -12 < 0$	côncavo para baixo
$(2, \infty)$	3	$f''(3) = 240 > 0$	côncavo para cima

Fonte: Produzido pela autora.

Figura 25 – Análise Concavidade da função $f(x) = x^4 - 4x^3$.



Fonte: Produzido pela autora.

Conclui-se, portanto, que os pontos $x = 0$ e $x = 2$ são pontos de inflexão do gráfico de $f(x)$.

Exemplo extraído de [11], adaptado e resolvido pela autora.

Com este último exemplo, encerra-se aqui este capítulo sobre a derivada e conceitos relacionados. Conceitos estes, que serão fundamentais para a construção do método abordado neste trabalho explanado no capítulo a seguir.

Ademais, percebe-se que além de conhecimento sobre a ferramenta matemática, é necessária uma análise crítica das funções estudadas, que exigem interpretação, conhecimento, técnica e pensamento crítico de quem está analisando. As derivadas e todos os seus conceitos representam um importante instrumento de resoluções de problemas nas mais diversas áreas de conhecimento. Para mais informações e exemplos de derivadas, consulte [11], [12], [13], [14], dentre outros.

3 Construções Gráficas

O conceito de funções foi um marco que revolucionou o estudo dos fenômenos da natureza onde se relacionam duas ou mais grandezas, como já exposto anteriormente na introdução e no Capítulo 1 deste trabalho. As funções estão presentes em nosso cotidiano, desde situações corriqueiras até grandes e complexos projetos de engenharia.

Nesse contexto, observa-se então a grande importância das representações gráficas, como citado por Barbosa [26] em um trecho de sua dissertação:

Percebe-se a grande importância do estudo de funções, bem como da sua representação gráfica, uma vez que esta ilustra todos os pontos, raízes e características do comportamento daquela função, além de traduzir por imagem, a solução e compreensão de um problema (p. 21).

O objetivo deste trabalho consiste em apresentar um material de apoio à professores do Ensino Médio que desejem trabalhar o conteúdo de “Construções gráficas de funções polinomiais” de uma forma alternativa, similar à que é trabalhada no Ensino Superior. Através da derivada e conceitos à ela relacionados, tais construções se dariam de forma mais expressiva, permitindo uma análise contextualizada e enriquecedora por parte do aluno, como ressalta Bianco [24]:

Em particular o uso de derivadas no ensino médio pode e deve ser trabalhada para facilitar os esboços de gráficos dos polinômios e fazer com que os alunos tenham uma aprendizagem significativa sobre esses conceitos (p. 12).

Biano [24] ainda salienta que há uma dificuldade dos alunos em fazer esboços de gráficos de funções polinomiais, e por vezes, também uma dificuldade dos professores em apresentarem tais conceitos:

Durante a prática docente nós professores percebemos que os alunos têm uma enorme dificuldade em esboçar gráficos de polinômios de primeiro e segundo grau. Já os gráficos de terceiro grau na maioria das vezes não são trabalhados em sala de aula e quando trabalhados, são expostos de maneira errônea pelos professores, que pedem para que os alunos atribuam valores quaisquer para x e achem um valor correspondente para y (p. 11).

O método apresentado aqui fornece ferramentas e técnicas para fazer um esboço do gráfico de funções polinomiais. Tal processo é apresentado na forma de um “roteiro”, afim de facilitar a compreensão do leitor, e logo em seguida serão apresentados alguns exemplos utilizando o método descrito.

3.1 Roteiro para esboço de gráficos de funções polinomiais

Dada uma função polinomial, como na Definição 1.1, o esboço do seu gráfico poderá ser feito seguindo o descritivo a seguir.

- **Passo 1.** Observe características básicas do polinômio.

É importante reconhecer a função a ser trabalhada e identificar características que serão importantes, como por exemplo, o grau do polinômio, existência de todos coeficientes e o domínio a ser considerado.

- **Passo 2.** Identifique e marque o coeficiente linear.

O coeficiente linear, ou termo independente, é o ponto aonde o gráfico do polinômio interceptará o eixo y . Identifique-o e marque-o sobre o eixo y do plano cartesiano

- **Passo 3.** Encontre as raízes.

A quantidade de raízes está diretamente ligada com o grau da função: uma função de segundo grau, pode ter até duas raízes reais; uma função de terceiro grau, pode ter até três raízes reais; e assim por diante, ou seja, se a função tem grau n , então terá no máximo n raízes reais. As raízes, caso existam, são os pontos aonde o gráfico do polinômio interceptará o eixo x .

Mais informações sobre as raízes, e como encontrá-las, estão descritos na Seção 1.2.3. Aplique o método que melhor se enquadrar à função polinomial em questão. De posse das raízes, marque-as sobre o eixo x do plano cartesiano.

- **Passo 4.** Determine os intervalos de crescimento e decrescimento.

Neste passo, calcule a derivada da função polinomial, e se necessário, determine seus pontos críticos. Em seguida, fazendo uso de um número de teste, determine os intervalos de crescimento e decrescimento da função. Veja este procedimento na Seção 2.3.2.

- **Passo 5.** Encontre os máximos e mínimos locais.

Encontre os pontos críticos da função (valores para os quais $f'(x) = 0$ ou $f'(x)$ não é definida), caso não tenham sido encontradas no passo anterior, e use o Teste da Primeira Derivada para determinar os máximos e mínimos locais. Veja este procedimento na Seção 2.3.3. Marque os pontos no plano cartesiano.

- **Passo 6.** Analise a concavidade e identifique os pontos de inflexão.

Encontre a segunda derivada da função polinomial e use o Teste da Concavidade para analisar a concavidade da função. Identifique os pontos de inflexão e, caso existam, marque-os no plano cartesiano. Veja este procedimento na Seção 2.3.5.

- **Passo 7.** Analise e observe o comportamento do polinômio para valores suficientemente próximos dos extremos do domínio.

Analise o comportamento da função para valores suficientemente próximos dos extremos do domínio da função, quando o domínio considerado da função for um intervalo (fechado ou aberto); ou analise o comportamento da função quando x tende ao infinito e quando x tende a menos infinito, quando o domínio da função for o conjunto dos números reais. Mais informações sobre esta análise podem ser vistas na Seção 1.2.5.

- **Passo 8.** Esboce a curva.

Esboce a curva do gráfico, fazendo com que ela passe por todos os pontos marcados: ponto de intersecção com o eixo y , ponto(s) de intersecção com o eixo x , pontos de máximos e mínimos locais e pontos de inflexão, respeitando o sentido de crescimento e decrescimento e a concavidade de acordo com os resultados obtidos nos passos anteriores.

.....

O método aqui descrito, através deste passo-a-passo, representa um roteiro para o esboço de gráficos de polinômios, entretanto não deve ser engessado e interpretado como um roteiro rígido. Cabe muito da observação do estudante, analisar os passos aqui descritos, se cabem ou não à função em questão e apresentar a melhor solução para o esboço do gráfico.

A seguir, alguns exemplos de construções gráficas utilizando o roteiro acima.

3.2 Exemplos de esboços de gráficos pelo método apresentado

Os exemplos aqui apresentados visam ilustrar o procedimento descrito. Para facilitar o entendimento, os passos serão percorridos minuciosamente, nomeando-os conforme o roteiro, acompanhados de algumas observações e análises.

3.2.1 Exemplo 1 - Esboço do gráfico de $f(x) = 3x + 1$

Conforme o esquema descrito na seção anterior, segue-se o passo-a-passo:

Passo 1. Observando as características básicas do polinômio.

Analisando a função $f(x) = 3x + 1$, observa-se que esta é uma função polinomial de grau 1, que apresenta todos os coeficientes não nulos e que o domínio é o conjunto dos números reais ($x \in \mathbb{R}$).

Passo 2. Identificando o coeficiente linear.

O coeficiente linear é 1, ou seja, é nesse ponto que o gráfico intercepta o eixo y . Marca-se este ponto sobre o eixo y no plano cartesiano, indicado por A na Figura 26 a seguir.

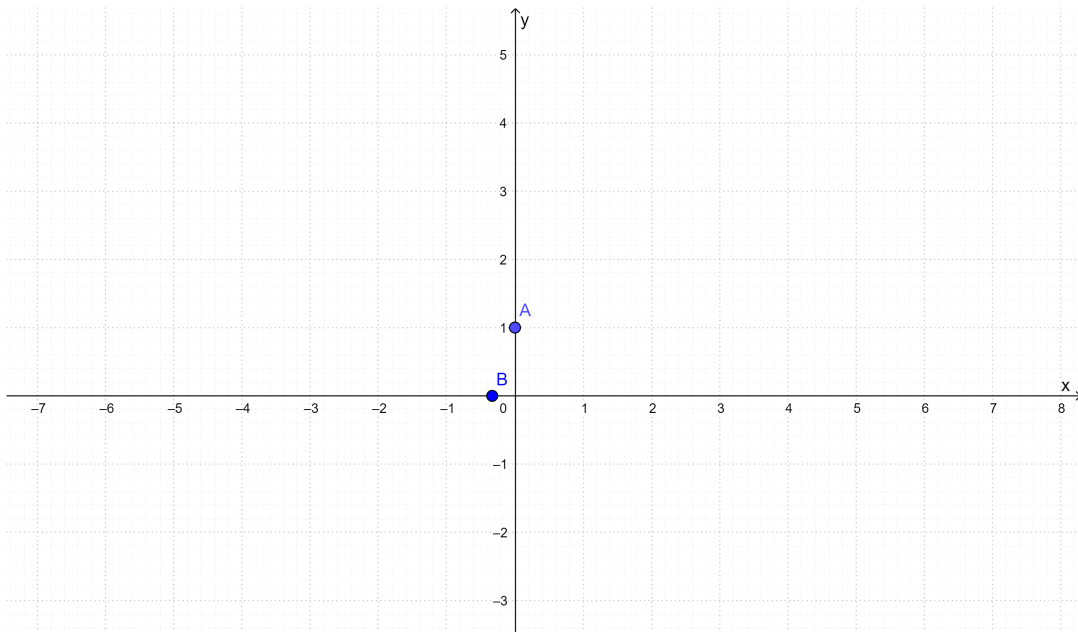
Passo 3. Encontrando as raízes.

Como a função $f(x)$ é um polinômio de grau 1, isso significa que ela terá apenas uma raiz real. A raiz pode ser encontrada, fazendo $f(x) = 0$:

$$3x + 1 = 0 \Rightarrow 3x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}.$$

Ou seja, é no ponto $x = -\frac{1}{3}$ que o gráfico interceptará o eixo x . Marca-se este ponto sobre o eixo x no plano cartesiano, indicado por B na Figura 26.

Figura 26 – Interseção com os eixos x e y de $f(x) = 3x + 1$.



Fonte: Produzido pela autora no *software Geogebra*.

Passo 4. Analisando os intervalos de crescimento e decrescimento.

Para tal, primeiramente, encontra-se a derivada da função $f(x)$:

$$f'(x) = 3.$$

Como a derivada de $f(x)$ é positiva ($f'(x) > 0$) para qualquer x , então conclui-se que $f(x)$ é crescente em \mathbb{R} ou em todo o domínio de f .

Passo 5. Encontrando os máximos e mínimos locais.

Analisando $f'(x)$, percebe-se que a mesma é constante em todo intervalo real, ou seja, não há pontos críticos. Não havendo pontos críticos, podemos concluir então que não há máximos ou mínimos locais.

Passo 6. Analisando a concavidade.

Para tal, encontra-se a segunda derivada da função $f(x)$:

$$f''(x) = 0.$$

Como a $f''(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, pelo item *c* do Teste da Concavidade pode-se concluir que o gráfico de $f(x)$ é uma reta em todo domínio de f .

Passo 7. Analisando o comportamento da função para valores suficientemente próximos dos extremos do domínio.

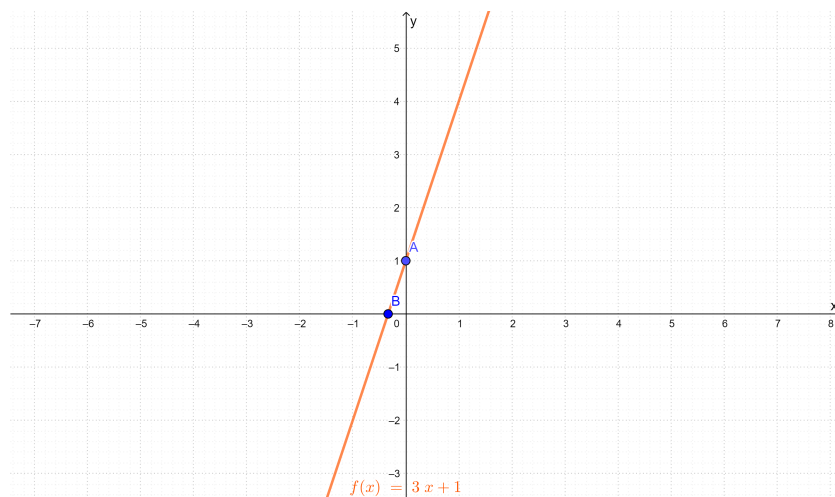
Nesta função, o domínio é \mathbb{R} , portanto deve-se analisar o comportamento da função quando x tende a infinito e quando x tende a menos infinito.

Como o grau da função $f(x)$ é ímpar (grau 1), sabe-se que a função terá comportamentos diferentes quando x tende a infinito e quando x tende a menos infinito. E como o coeficiente dominante é positivo, então quando x tende a infinito, a função $f(x)$ também tende a infinito, e quando x tende a menos infinito, $f(x)$ tende a menos infinito.

Passo 8. Fazendo o esboço do gráfico.

Conclui-se após todos os passos que o gráfico da função $f(x)$ é uma reta crescente, que intercepta o eixo x no ponto $x = -\frac{1}{3}$ e intercepta o eixo y no ponto $y = 1$. O esboço do gráfico é visto na Figura 27.

Figura 27 – Esboço do gráfico de $f(x) = 3x + 1$.



Fonte: Produzido pela autora no *software Geogebra*.

3.2.2 Exemplo 2 - Esboço do gráfico de $f(x) = -2x + 6$

De forma análoga ao exemplo anterior, segue o passo-a-passo descrito anteriormente. (Qualquer dúvida sobre o procedimento, sugere-se o retorno ao roteiro, em 3.1, para melhor entendimento dos passos).

Passo 1. Analisando a função $f(x) = -2x + 6$, observa-se que esta é uma função polinomial de grau 1, que apresenta todos os coeficientes não nulos, cujo domínio é \mathbb{R} .

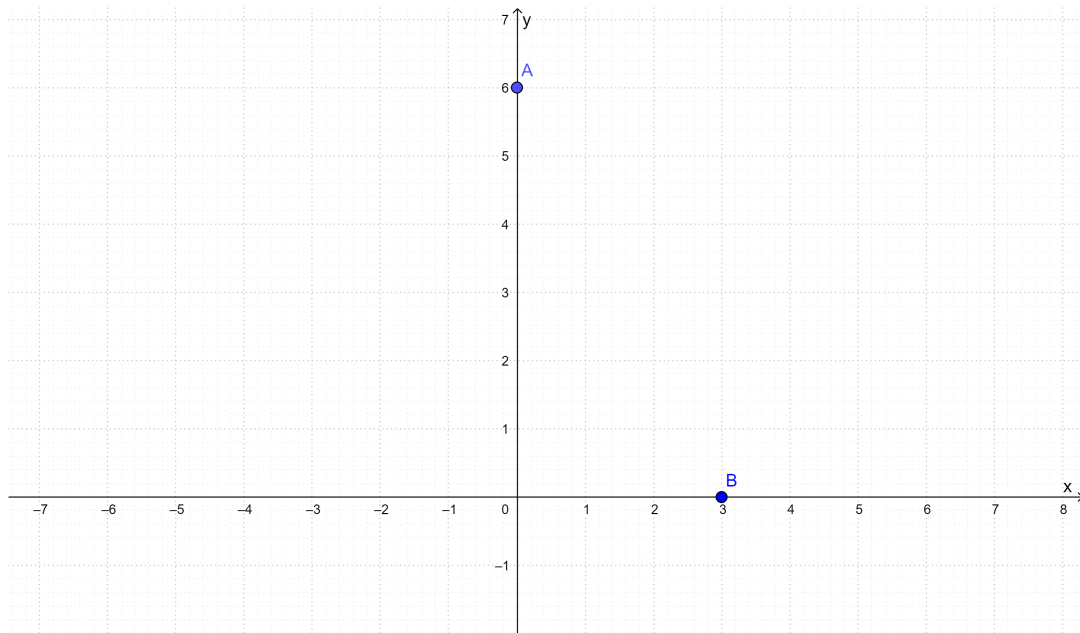
Passo 2. O coeficiente linear é 6, ou seja, é nesse ponto que o gráfico interceptará o eixo y . Marca-se este ponto sobre o eixo y no plano cartesiano, representado por A na Figura 28.

Passo 3. Como a função $f(x)$ é um polinômio de grau 1, isso significa que ela terá apenas uma raiz real. A raiz pode ser encontrada, fazendo $f(x) = 0$:

$$-2x + 6 = 0 \Rightarrow -2x = -6 \Rightarrow x = 3.$$

Ou seja, é no ponto $x = 3$ que o gráfico interceptará o eixo x . Marca-se este ponto sobre o eixo x , representado por B , conforme visto na Figura 28.

Figura 28 – Interseção com os eixos x e y de $f(x) = -2x + 6$.



Fonte: Produzido pela autora no *software Geogebra*.

Passo 4. Para analisar os intervalos de crescimento e decrescimento da função, primeiramente, encontra-se a derivada da função $f(x)$:

$$f'(x) = -2.$$

Como a derivada de $f(x)$ é negativa, $f'(x) < 0$, para qualquer x , então conclui-se que $f(x)$ é decrescente em todo intervalo real.

Passo 5. Analisando $f'(x)$, percebe-se que a mesma é constante em todo intervalo real, ou seja, não há pontos críticos. Não havendo pontos críticos, podemos concluir então que não há máximos ou mínimos locais.

Passo 6. Para realizar a análise da concavidade, encontra-se a segunda derivada da função $f(x)$:

$$f''(x) = 0.$$

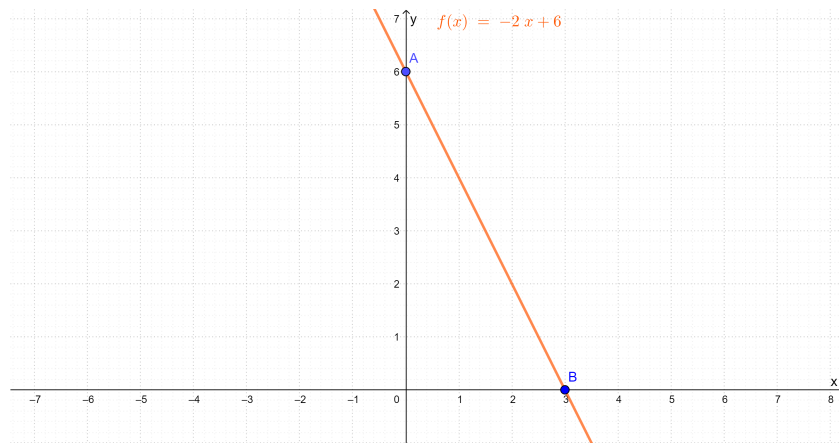
Como a $f''(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, pelo item *c* do Teste da Concavidade pode-se concluir que o gráfico de $f(x)$ é uma reta em todo domínio de f .

Passo 7. Como aqui nesta função, o domínio é \mathbb{R} , deve-se analisar o comportamento da função quando x tende a infinito e quando x tende a menos infinito.

O grau da função $f(x)$ é ímpar (grau 1), então sabe-se que a função terá comportamentos diferentes quando x tende a infinito e quando x tende a menos infinito. E como o coeficiente dominante é negativo, conclui-se que, quando x tende a infinito, a função $f(x)$ tende a menos infinito, e quando x tende a menos infinito, $f(x)$ tende a infinito.

Passo 8. Das análises anteriores, sabe-se então que o gráfico da função $f(x)$ é uma reta decrescente, que intercepta o eixo x no ponto $x = 3$ e intercepta o eixo y no ponto $y = 6$. O esboço do gráfico é visto na Figura 29.

Figura 29 – Esboço do gráfico de $f(x) = -2x + 6$.



Fonte: Produzido pela autora no *software Geogebra*.

3.2.3 Exemplo 3 - Esboço do gráfico de $f(x) = x^2 - 5x + 6$

Passo 1. Observando as características básicas do polinômio.

Ao analisar a função $f(x) = x^2 - 5x + 6$, observa-se que esta é uma função polinomial de grau 2, que apresenta todos os coeficientes não nulos e que o domínio é \mathbb{R} .

Passo 2. Identificando o coeficiente linear.

O coeficiente linear é 6, ou seja, é nesse ponto que o gráfico interceptará o eixo y . Marca-se este ponto sobre o eixo y no plano cartesiano, representado por A , conforme visto na Figura 30.

Passo 3. Encontrando as raízes.

Como a função $f(x)$ é um polinômio de grau 2, isso significa que ela poderá ter até duas raízes reais. As raízes podem ser encontradas, fazendo $f(x) = 0$, e neste caso através da Fórmula de Bháskara.

Calculando o valor de Δ :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1.$$

E agora, usando esse resultado na Fórmula de Bháskara:

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{5 \pm 1}{2} \end{aligned}$$

Desta forma, segue que

$$x_1 = \frac{5 + 1}{2} = 3 \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{5 - 1}{2} = 2.$$

Portanto, as raízes de $f(x) = x^2 - 5x + 6$ são 2 e 3. Marca-se esses pontos sobre o eixo x , representados por B e C , respectivamente, conforme visto na Figura 30.

Passo 4. Analisando os intervalos de crescimento e decrescimento.

Primeiramente, encontra-se a derivada da função $f(x)$:

$$f'(x) = 2x - 5.$$

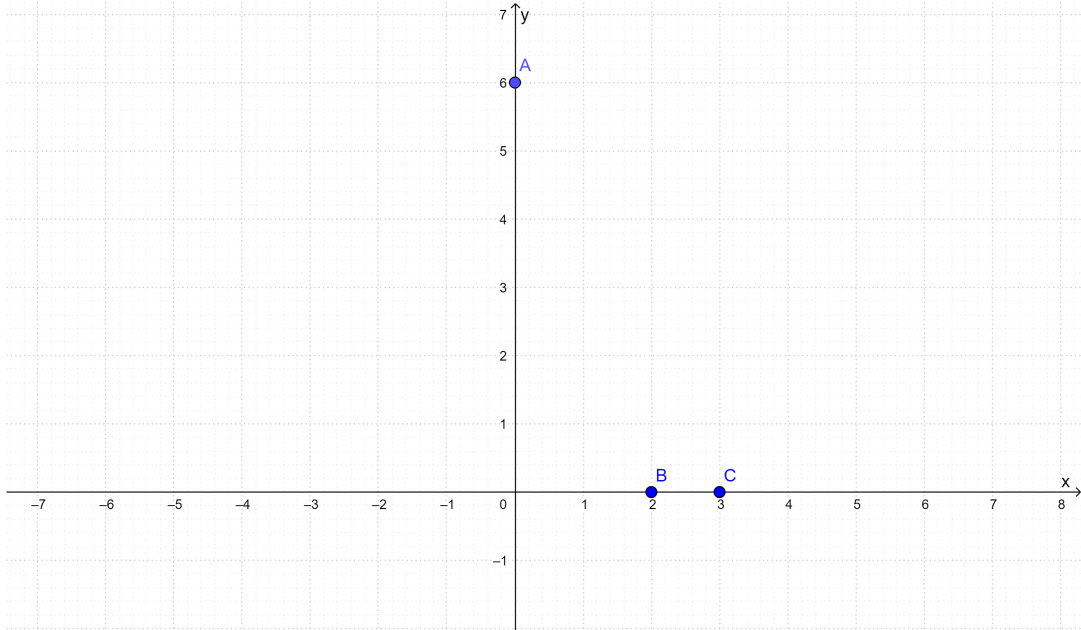
Fazendo $f'(x) = 0$,

$$2x - 5 = 0 \Rightarrow 2x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{2}.$$

tem-se que a mesma se anula em $x = \frac{5}{2}$ (ponto crítico da função). Este resultado divide a reta real em dois intervalos: $(-\infty, \frac{5}{2})$ e $(\frac{5}{2}, \infty)$, conforme representado na Figura 31.

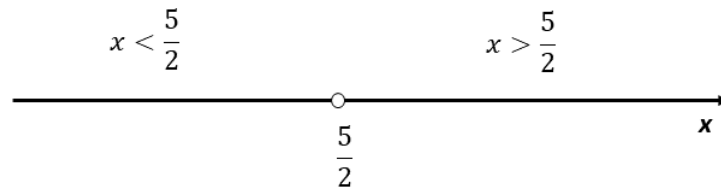
Em cada um destes intervalos, escolhe-se um número de teste c , como por exemplo:

Figura 30 – Interseção com os eixos x e y de $f(x) = x^2 - 5x + 6$.



Fonte: Produzido pela autora no *software Geogebra*.

Figura 31 – Intervalos definidos pelo ponto crítico de $f(x) = x^2 - 5x + 6$.



Fonte: Produzido pela autora.

- $c = 2$, para $x < \frac{5}{2}$;
- $c = 3$, para $x > \frac{5}{2}$.

Calculando o valor de $f'(x)$ para cada número de teste, obtém-se:

$$f'(2) = 2 \cdot 2 - 5 = 4 - 5 = -1.$$

$$f'(3) = 2 \cdot 3 - 5 = 6 - 5 = 1.$$

Conclui-se então que, a função $f(x) = x^2 - 5x + 6$ é crescente no intervalo $(-\infty, \frac{5}{2})$ e decrescente no intervalo $(\frac{5}{2}, \infty)$, como pode ser observado na Tabela 9.

Passo 5. Encontrando os máximos e mínimos locais.

Tabela 9 – Intervalos de crescimento e decrescimento da função $f(x) = x^2 - 5x + 6$.

Intervalo	Número de teste c	$f'(c)$	Conclusão
$(-\infty, \frac{5}{2})$	2	$f'(2) = -1 < 0$	decrescente
$(\frac{5}{2}, \infty)$	3	$f'(3) = 1 > 0$	crecente

Fonte: Produzido pela autora.

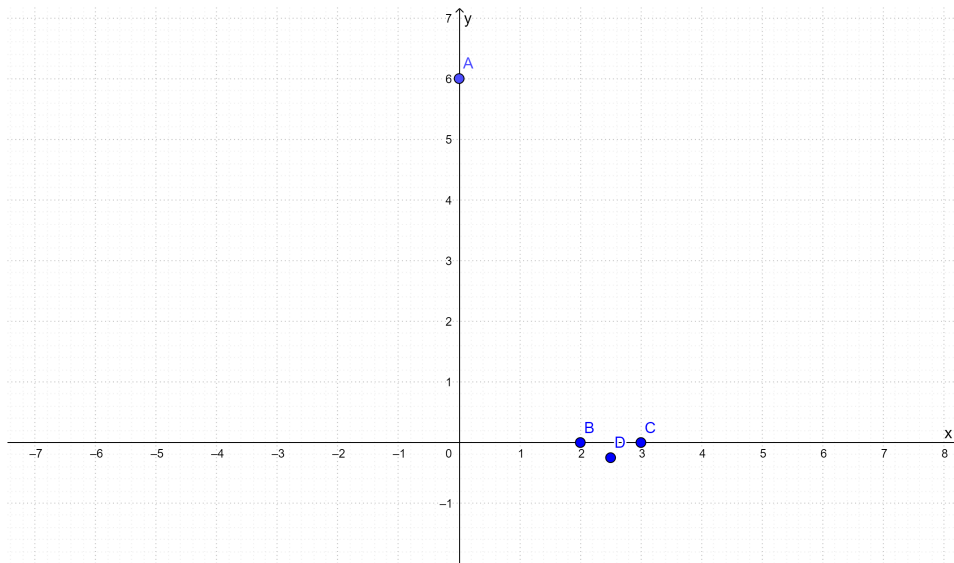
Os pontos críticos são aqueles tais que $f'(x) = 0$, ou seja, para $f(x) = x^2 - 5x + 6$ o ponto crítico é o ponto $x = \frac{5}{2}$.

Como a função $f(x)$ muda de sentido no ponto $x = \frac{5}{2}$, de decrescente para crescente, então conclui-se que $x = \frac{5}{2}$ é mínimo local. A imagem deste ponto é dada por:

$$\begin{aligned}
 f\left(\frac{5}{2}\right) &= \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 5 \cdot \left(\frac{5}{2}\right) + 6 \\
 &= \left(\frac{25}{4}\right) - \left(\frac{25}{2}\right) + 6 \\
 &= \frac{25 - 50 + 24}{4} = -\frac{1}{4}.
 \end{aligned}$$

Portanto, o ponto $(\frac{5}{2}, -\frac{1}{4})$ também deve ser marcado no plano cartesiano, aqui representado por D , conforme visto na Figura 32.

Figura 32 – Mínimo local de $f(x) = x^2 - 5x + 6$.



Fonte: Produzido pela autora no *software Geogebra*.

Passo 6. Analisando a concavidade.

Para analisar a concavidade da função $f(x)$, primeiramente, encontra-se a segunda derivada, dada por:

$$f''(x) = 2.$$

Como $f''(x)$ é positiva em \mathbb{R} , conclui-se que o gráfico de $f(x)$ é côncavo para cima. (Nesse caso, não há pontos de inflexão).

Passo 7. Analisando o comportamento da função para valores suficientemente próximos dos extremos do domínio.

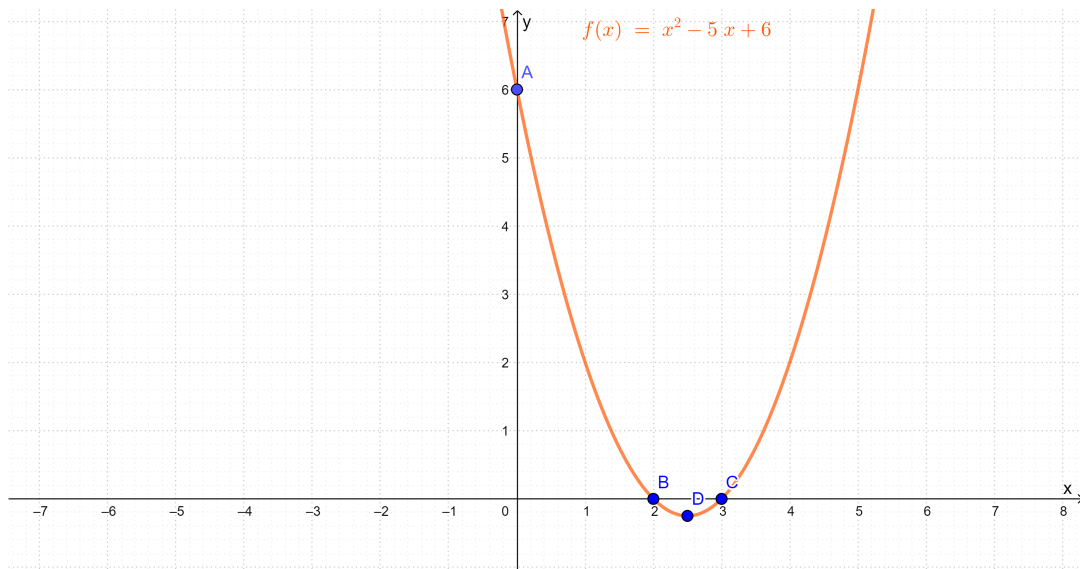
Aqui nesta função, o domínio é \mathbb{R} , então deve-se analisar o comportamento da função quando x tende a infinito e quando x tende a menos infinito.

Como o grau da função $f(x)$ é par (grau 2), sabe-se que a função terá o mesmo comportamento quando x tende a infinito e quando x tende a menos infinito. E neste caso, como o coeficiente dominante é positivo, a função tenderá a infinito.

Passo 8. Fazendo o esboço do gráfico.

Com todos os pontos necessários marcados, o esboço do gráfico de $f(x)$ se dá com a curva que passa por todos os pontos, conforme Figura 33.

Figura 33 – Esboço do gráfico de $f(x) = x^2 - 5x + 6$.



Fonte: Produzido pela autora no *software Geogebra*.

3.2.4 Exemplo 4 - Esboço do gráfico de $f(x) = x^2 + 2x + 3$

De forma análoga aos exemplos anteriores, segue o passo-a-passo para esboço do gráfico da função $f(x)$. (Qualquer dúvida sobre o procedimento, sugere-se o retorno ao roteiro, em 3.1, para melhor entendimento dos passos).

Passo 1. Observando a função $f(x) = x^2 + 2x + 3$, vê-se que esta é uma função polinomial de grau 2, que apresenta todos os coeficientes não nulos, cujo domínio é \mathbb{R} .

Passo 2. O coeficiente linear é 3, ou seja, é nesse ponto que o gráfico interceptará o eixo y . Marca-se este ponto sobre o eixo y no plano cartesiano, representado na Figura 34 como A .

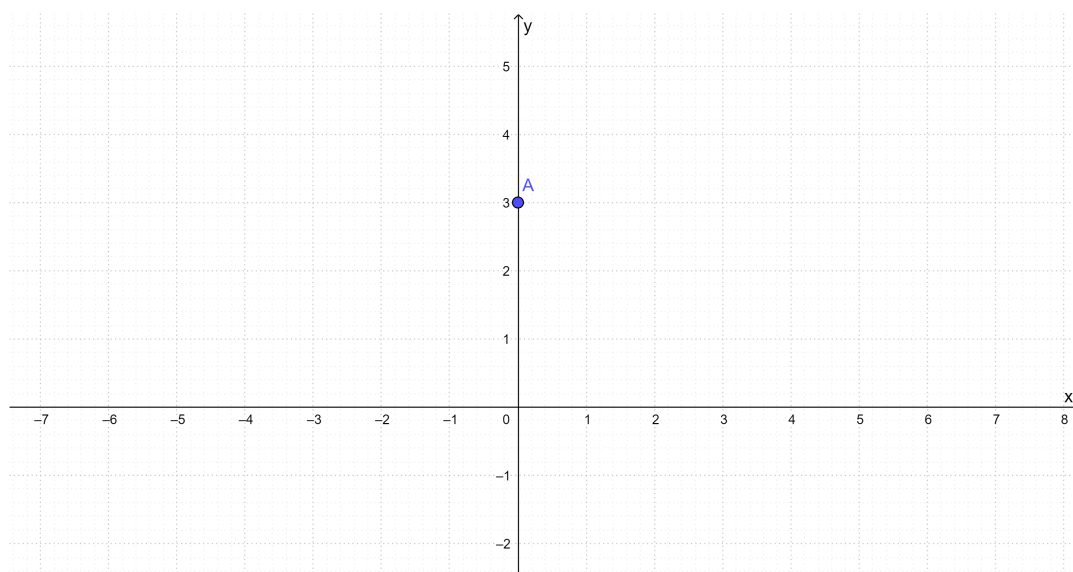
Passo 3. Como a função $f(x)$ é um polinômio de grau 2, isso significa que ela poderá ter até duas raízes reais. As raízes podem ser encontradas, fazendo $f(x) = 0$. Aqui, através da Fórmula de Bháskara, tem-se que:

Calculando o valor de Δ :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 4 - 12 = -8.$$

Como $\Delta = -8 < 0$, pode-se concluir que a função $f(x) = x^2 + 2x + 3$ não tem nenhuma raiz real, ou seja, seu gráfico não intercepta o eixo x . Deste modo, não há nenhum ponto a marcar sobre o eixo x .

Figura 34 – Interseção com os eixos x e y de $f(x) = x^2 + 2x + 3$.



Fonte: Produzido pela autora no *software Geogebra*.

Passo 4. Para analisar os intervalos de crescimento e decréscimo da função $f(x)$, primeiramente, encontra-se a derivada da função $f(x)$:

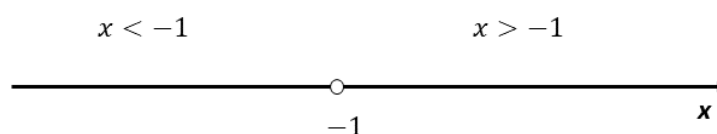
$$f'(x) = 2x + 2.$$

Fazendo $f'(x) = 0$,

$$2x + 2 = 0 \Rightarrow 2x = -2 \Rightarrow x = -1.$$

tem-se que a mesma se anula em $x = -1$ (ponto crítico da função). Este ponto divide a reta real em dois intervalos: $(-\infty, -1)$ e $(-1, \infty)$, conforme representado na Figura 35.

Figura 35 – Intervalos definidos pelo ponto crítico de $f(x) = x^2 + 2x + 3$.



Fonte: Produzido pela autora.

Em cada um destes intervalos, escolhe-se um número de teste c , como por exemplo:

- $c = -2$, para o intervalo $(-\infty, -1)$;
- $c = 2$, para o intervalo $(-1, \infty)$.

Calculando o valor de $f'(x)$ para cada número de teste, obtém-se:

$$\begin{aligned} f'(-2) &= 2 \cdot (-2) + 2 = -4 + 2 = -2. \\ f'(2) &= 2 \cdot 2 + 2 = 4 + 2 = 6. \end{aligned}$$

Conclui-se então que, a função $f(x) = x^2 + 2x + 3$ é decrescente no intervalo $(-\infty, -1)$ e crescente no intervalo $(-1, \infty)$, como pode ser observado na Tabela 10.

Tabela 10 – Intervalos de crescimento e decrescimento da função $f(x) = x^2 + 2x + 3$.

Intervalo	Número de teste c	$f'(c)$	Conclusão
$(-\infty, -1)$	-2	$f'(-2) = -2 < 0$	decrescente
$(-1, \infty)$	2	$f'(2) = 6 > 0$	crescente

Fonte: Produzido pela autora.

Passo 5. Os pontos críticos são aqueles tais que $f'(x) = 0$, ou seja, para $f(x) = x^2 + 2x + 3$ o ponto crítico é o ponto $x = -1$.

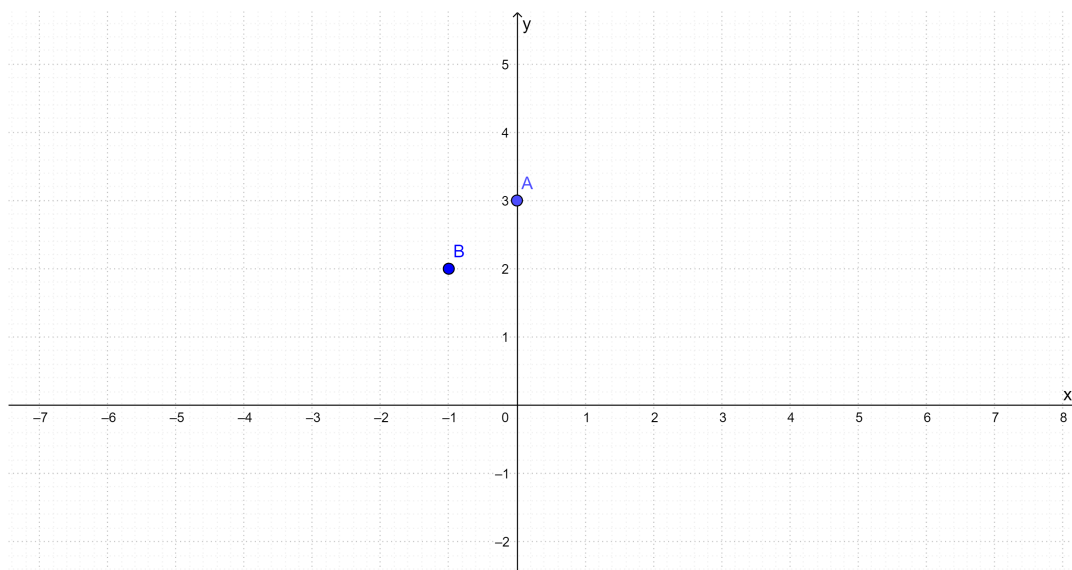
Como a função $f(x)$ muda de sentido no ponto $x = -1$, de decrescente para crescente, então pode-se concluir que $x = -1$ é um ponto de mínimo local. A imagem deste ponto é dada por:

$$f(-1) = (-1)^2 + 2 \cdot (-1) + 3 = 1 - 2 + 3 = 2.$$

Portanto, $(-1, 2)$ é um ponto de mínimo local, e deve ser marcado no plano cartesiano, aqui representado por B como mostra a Figura 36.

Passo 6. Para analisar a concavidade da função, encontra-se primeiro a segunda derivada:

$$f''(x) = 2.$$

Figura 36 – Mínimo local de $f(x) = x^2 + 2x + 3$.

Fonte: Produzido pela autora no *software Geogebra*.

Como $f''(x)$ é positiva em \mathbb{R} , conclui-se que o gráfico de $f(x)$ é côncavo para cima. (Nesse caso, não há pontos de inflexão).

Passo 7. Como aqui nesta função, o domínio é \mathbb{R} , deve-se analisar o comportamento da função quando x tende a infinito e quando x tende a menos infinito.

O grau da função $f(x)$ é par (grau 2), então sabe-se que a função terá o mesmo comportamento quando x tende a infinito e quando x tende a menos infinito. E como o coeficiente dominante é positivo, então a função tende a infinito, tanto à direita quanto à esquerda do plano cartesiano.

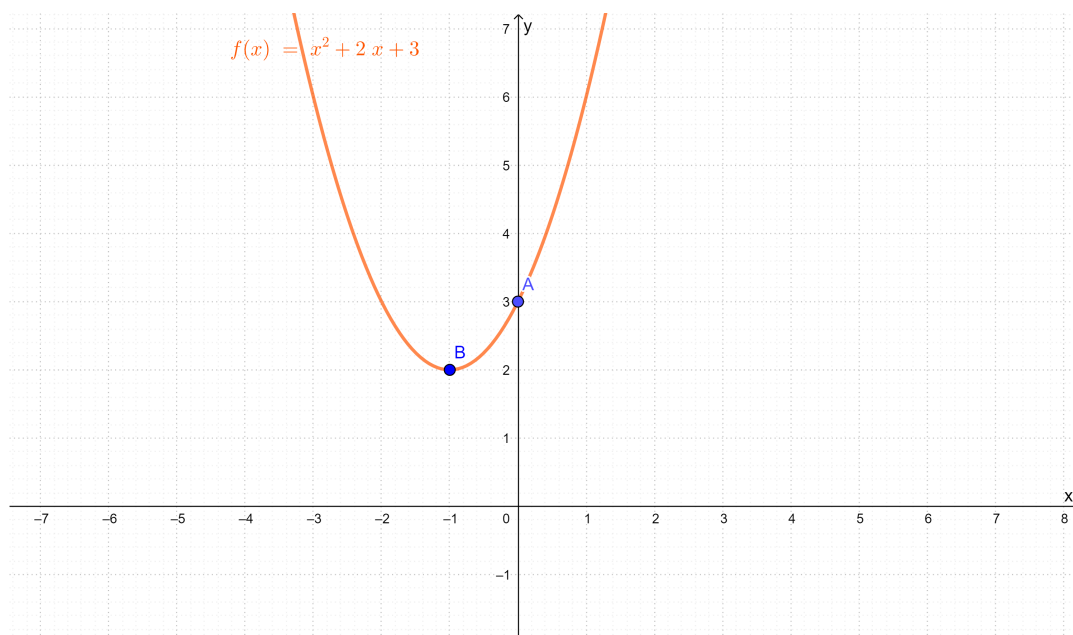
Tabela 11 – Comportamento de $f(x) = x^2 + 2x + 3$ quando $x \rightarrow \infty$ e $x \rightarrow -\infty$.

x	$f(x)$	x	$f(x)$
1.000	1.002.003	-1.000	998.003
10.000	100.020.003	-10.000	99.980.003
100.000	10.000.200.003	-100.000	9.999.800.003
1.000.000	1.000.002.000.003	-1.000.000	999.998.000.003

Fonte: Produzido pela autora.

Passo 8. Com todos os pontos necessários marcados, o esboço do gráfico de $f(x)$ se dá com a curva que passa por todos os pontos, conforme Figura 37.

Figura 37 – Esboço do gráfico de $f(x) = x^2 + 2x + 3$.



Fonte: Produzido pela autora no *software Geogebra*.

3.2.5 Exemplo 5 - Esboço do gráfico $f(x) = -x^2 - 2x$

De forma análoga aos exemplos anteriores, segue o passo-a-passo para esboço do gráfico da função $f(x)$. (Qualquer dúvida sobre o procedimento, sugere-se o retorno ao roteiro, em 3.1, para melhor entendimento dos passos).

Passo 1. Contemplando a função $f(x) = -x^2 - 2x$, observa-se que esta é uma função polinomial de grau 2, que não apresenta todos os coeficientes não nulos (o coeficiente c é igual a 0) e que o domínio é \mathbb{R} .

Passo 2. Percebe-se que na função $f(x) = -x^2 - 2x$ o coeficiente c é 0. Nessa situação, o gráfico interceptará o eixo y na origem do plano cartesiano. Marca-se então este ponto no plano cartesiano, na Figura 38 representado como A .

Passo 3. Como a função $f(x)$ é um polinômio de grau 2, isso significa que ela poderá ter até duas raízes reais. As raízes podem ser encontradas, fazendo $f(x) = 0$, através da Fórmula de Bháskara. Ou, como ela apresenta $c = 0$, pode-se colocar termos em comum em evidência e resolver a equação (aqui, a título de variedade, será feito pelo

segundo modo).

$$-x^2 - 2x = 0$$

Colocando x em evidência

$$x \cdot (-x - 2) = 0$$

Tem-se então que, para que o produto resulte em 0,

uma das parcelas deve, necessariamente, ser zero

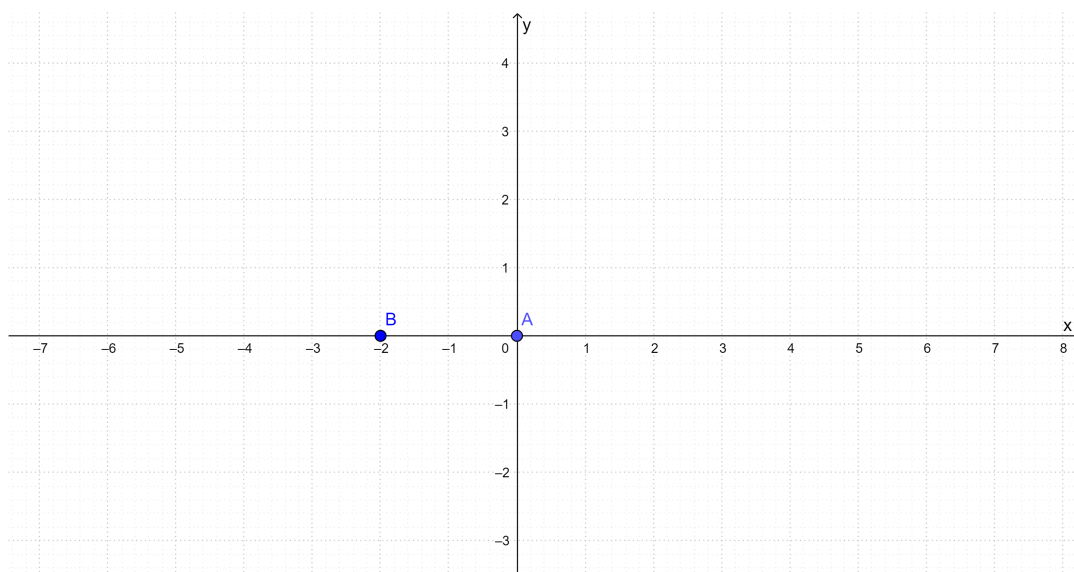
$$x = 0 \quad \text{ou} \quad (-x - 2) = 0$$

este segundo resulta em

$$x = -2.$$

Portanto, as raízes de $f(x) = -x^2 - 2x$ são 0 e -2 . Como o ponto 0 sobre o eixo x é a própria origem, e já foi marcada anteriormente, marca-se somente o segundo ponto sobre o eixo x , representado por B , conforme visto na Figura 38.

Figura 38 – Interseção com os eixos x e y de $f(x) = -x^2 - 2x$.



Fonte: Produzido pela autora no *software Geogebra*.

Passo 4. Primeiramente, encontra-se a derivada da função $f(x)$, para analisar os intervalos de crescimento e decrescimento da função.

$$f'(x) = -2x - 2.$$

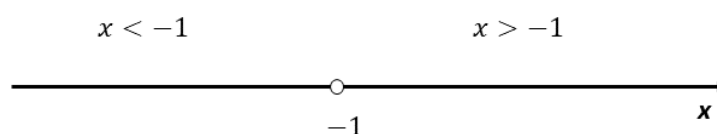
Fazendo $f'(x) = 0$,

$$-2x - 2 = 0 \Rightarrow -2x = 2 \Rightarrow x = -1.$$

tem-se que a mesma se anula em $x = -1$ (ponto crítico da função). Este ponto divide a reta real em dois intervalos: $(-\infty, -1)$ e $(-1, \infty)$, visualizados na Figura 39 a seguir.

Em cada um destes intervalos, escolhe-se um número de teste c , como por exemplo:

Figura 39 – Intervalos definidos pelo ponto crítico de $f(x) = -x^2 - 2x$.



Fonte: Produzido pela autora.

- $c = -3$, para $x < -1$;
- $c = 3$, para $x > -1$.

Calculando o valor de $f'(x)$ para cada número de teste, obtém-se:

$$\begin{aligned} f'(-3) &= -2 \cdot (-3) - 2 = 6 - 2 = 4, \quad e \\ f'(3) &= -2 \cdot 3 - 2 = -6 - 2 = -8. \end{aligned}$$

Conclui-se então que, a função $f(x) = -x^2 - 2x$ é crescente no intervalo $(-\infty, -1)$ e decrescente no intervalo $(-1, \infty)$, como pode ser observado na Tabela 12.

Tabela 12 – Intervalos de crescimento e decrescimento da função $f(x) = -x^2 - 2x$.

Intervalo	Número de teste c	$f'(c)$	Conclusão
$(-\infty, -1)$	-3	$f'(-3) = 4 > 0$	crescente
$(-1, \infty)$	3	$f'(3) = -8 < 0$	decrescente

Fonte: Produzido pela autora.

Passo 5. Os pontos críticos são aqueles tais que $f'(x) = 0$, ou seja, para $f(x) = x^2 + 2x + 3$ o ponto crítico é o ponto $x = -1$.

Como a função $f(x)$ muda de sentido no ponto $x = -1$, de crescente para decrescente, então pode-se concluir que $x = -1$ é um ponto de máximo local. A imagem deste ponto é dada por:

$$f(-1) = -(-1)^2 - 2 \cdot (-1) = -1 + 2 = 1.$$

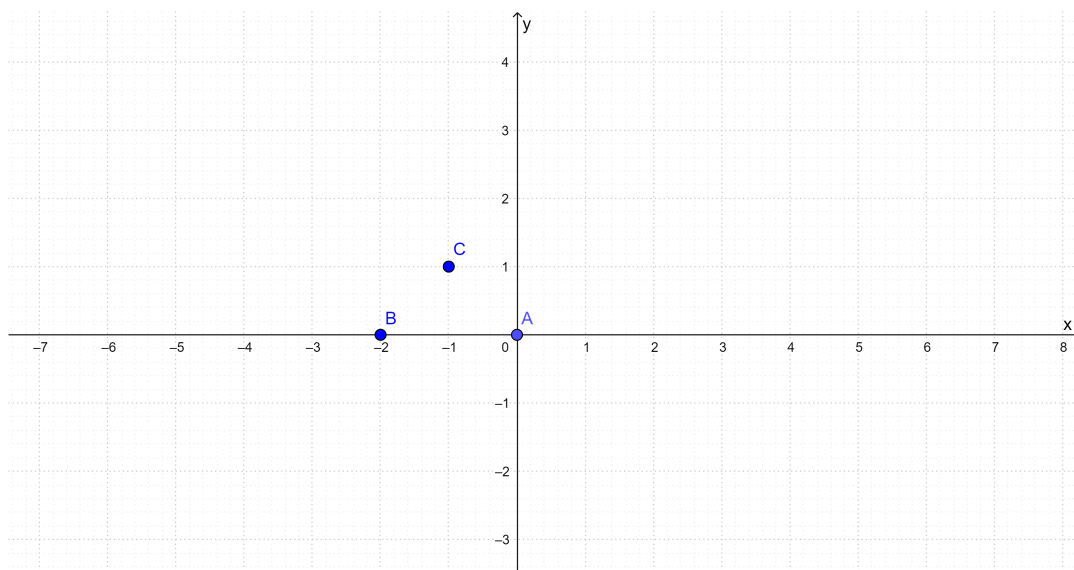
Portanto, $(-1, 1)$ é um ponto de máximo local. Este ponto está representado como C , na Figura 40.

Passo 6. Primeiramente, a segunda derivada é dada por:

$$f''(x) = -2.$$

Como $f''(x)$ é negativa em \mathbb{R} , conclui-se que o gráfico de $f(x)$ é côncavo para baixo. (Nesse caso, não há pontos de inflexão).

Figura 40 – Máximo local de $f(x) = -x^2 - 2x$.



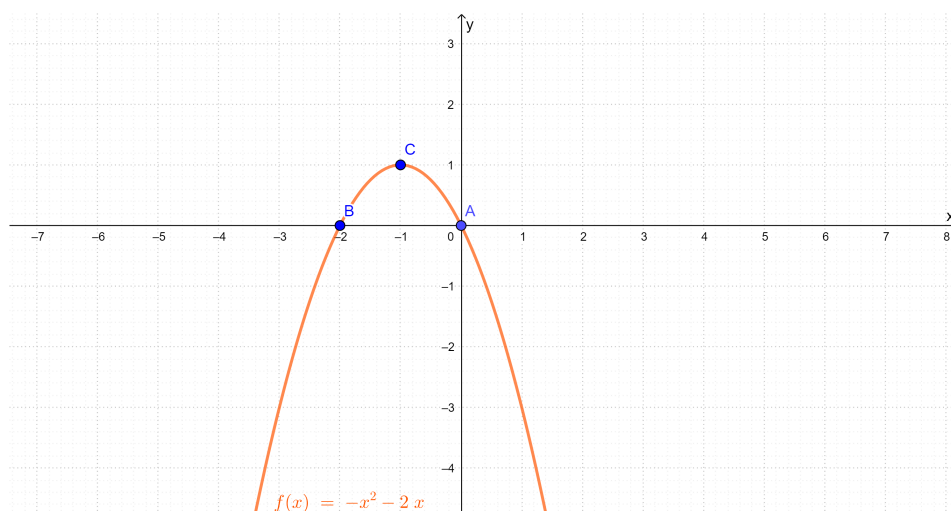
Fonte: Produzido pela autora no *software Geogebra*.

Passo 7. Como aqui nesta função, o domínio é \mathbb{R} , deve-se analisar o comportamento da função quando x tende a infinito e quando x tende a menos infinito.

Como o grau da função $f(x)$ é par (grau 2), sabe-se que a função terá o mesmo comportamento quando x tende a infinito e quando x tende a menos infinito. E como o coeficiente dominante é negativo, então, a função $f(x)$ tende a menos infinito, tanto à direita quanto à esquerda do plano cartesiano.

Passo 8. Com todos os pontos necessários marcados, o esboço do gráfico de $f(x)$ se dá com a curva que passa por todos os pontos, conforme Figura 41.

Figura 41 – Esboço do gráfico de $f(x) = -x^2 - 2x$.



Fonte: Produzido pela autora no *software Geogebra*.

3.2.6 Exemplo 6 - Esboço do gráfico $f(x) = 3x^2 - 3x + 2$ para $-3 \leq x \leq 3$

De forma análoga aos exemplos anteriores, segue o passo-a-passo para esboço do gráfico da função $f(x)$. (Qualquer dúvida sobre o procedimento, sugere-se o retorno ao roteiro, em 3.1, para melhor entendimento dos passos).

Passo 1. Analisando a função $f(x) = 3x^2 - 3x + 2$, nota-se que esta é uma função polinomial de grau 2, que apresenta todos os coeficientes não nulos, cujo domínio está restrito ao intervalo $[-3, 3]$.

Passo 2. Percebe-se que o coeficiente linear da função $f(x)$ é 2, ou seja, é neste ponto que gráfico interceptará o eixo y . Marca-se então este ponto no plano cartesiano, aqui representado por A na Figura 42.

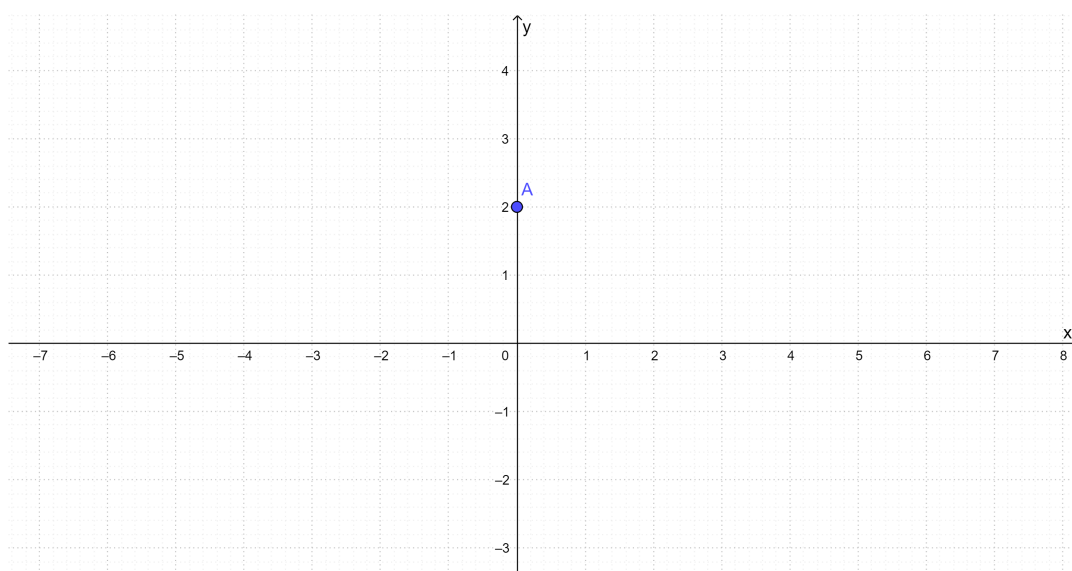
Passo 3. Como a função $f(x)$ é um polinômio de grau 2, isso significa que ela terá até duas raízes reais. As raízes podem ser encontradas, fazendo $f(x) = 0$, através da Fórmula de Bháskara.

Primeiramente, calculando o valor de Δ :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 9 - 24 = -15.$$

Como $\Delta = -15 < 0$, a função $f(x) = 3x^2 - 3x + 2$ não tem nenhuma raiz real, ou seja, seu gráfico não intercepta o eixo x . Deste modo, não há nenhum ponto a marcar sobre o eixo x .

Figura 42 – Interseção com os eixos x e y de $f(x) = 3x^2 - 3x + 2$.



Fonte: Produzido pela autora no *software Geogebra*.

Passo 4. Ao analisar os intervalos de crescimento e decrescimento, primeiramente, encontra-se a derivada da função $f(x)$:

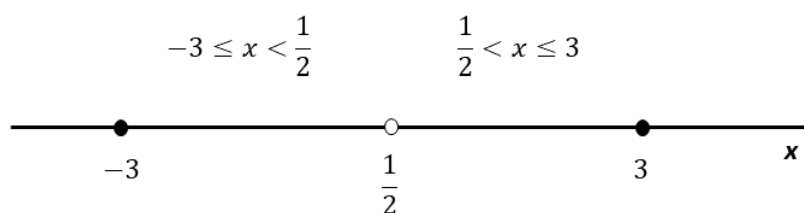
$$f'(x) = 6x - 3.$$

Fazendo $f'(x) = 0$,

$$6x - 3 = 0 \Rightarrow 6x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

tem-se que a mesma se anula em $x = \frac{1}{2}$ (ponto crítico da função). Este ponto divide o domínio da função em dois intervalos: $\left[-3, \frac{1}{2}\right)$ e $\left(\frac{1}{2}, 3\right]$, conforme visto a seguir, na Figura 43.

Figura 43 – Intervalos definidos pelo domínio e ponto crítico de $f(x) = 3x^2 - 3x + 2$.



Fonte: Produzido pela autora.

Em cada um destes intervalos, escolhe-se um número de teste c (lembrando que esse número pode ser qualquer um dentro do interlavo, exceto os extremos do intervalo), como por exemplo:

- $c = 0$, para $-3 \leq x < \frac{1}{2}$;
- $c = 2$, para $\frac{1}{2} < x \leq 3$.

Calculando o valor de $f'(x)$ para cada número de teste, obtém-se:

$$\begin{aligned} f'(0) &= 6 \cdot (0) - 3 = 0 - 3 = -3, & e \\ f'(2) &= 6 \cdot 2 - 3 = 6 - 3 = 3. \end{aligned}$$

Conclui-se então que, a função $f(x) = 3x^2 - 3x + 3$ é decrescente no intervalo $\left[-3, \frac{1}{2}\right)$ e crescente no intervalo $\left(\frac{1}{2}, 3\right]$, como pode ser conferido na Tabela 13.

Tabela 13 – Intervalos de crescimento e decrescimento da função $f(x) = 3x^2 - 3x + 3$.

Intervalo	Número de teste c	$f'(c)$	Conclusão
$\left[-3, \frac{1}{2}\right)$	0	$f'(0) = -3 < 0$	decrescente
$\left(\frac{1}{2}, 3\right]$	2	$f'(2) = 3 > 0$	crescente

Fonte: Produzido pela autora.

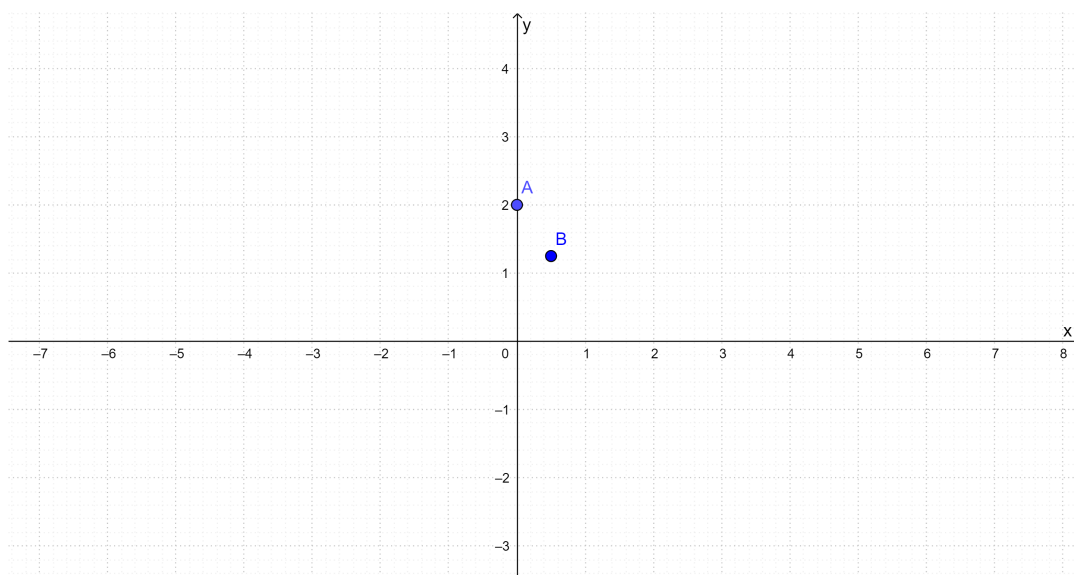
Passo 5. Os pontos críticos são aqueles tais que $f'(x) = 0$, ou seja, para $f(x) = 3x^2 - 3x + 3$ o ponto crítico é o ponto $x = \frac{1}{2}$.

Como a função $f(x)$ muda de sentido no ponto $x = \frac{1}{2}$, de decrescente para crescente, então pode-se concluir que $x = \frac{1}{2}$ é um ponto de mínimo local. A imagem deste ponto é dada por:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{2}\right) &= 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) + 2 \\ &= 3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right) - \left(\frac{3}{2}\right) + 2 \\ &= \frac{3}{4} - \frac{3}{2} + 2 \\ &= \frac{3 - 6 + 8}{4} = \frac{5}{4}. \end{aligned}$$

Portanto, $\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right)$ é um ponto de mínimo local. Este ponto está representado como B , na Figura 44.

Figura 44 – Mínimo local de $f(x) = 3x^2 - 3x + 2$.



Fonte: Produzido pela autora no *software Geogebra*.

Passo 6. A segunda derivada é dada por:

$$f''(x) = 6.$$

Como $f''(x)$ é positiva em \mathbb{R} , conclui-se que o gráfico de $f(x)$ é côncavo para cima. (Nesse caso, não há pontos de inflexão).

Passo 7. Como aqui nesta função, o domínio está restrito ao intervalo $-3 \leq x \leq 3$, deve-se analisar o comportamento da função quando x tende aos extremos do intervalo.

Quando x tende a 3, a função $f(x)$ tende a 20, como visto abaixo:

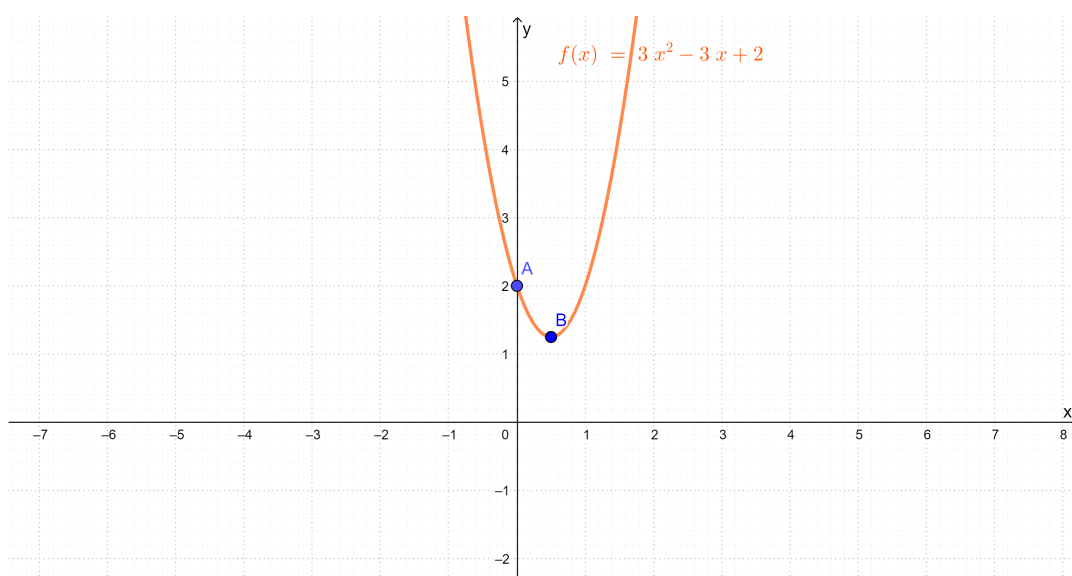
$$\lim_{x \rightarrow 3} 3x^2 - 3x + 2 = 3 \cdot 3^2 - 3 \cdot 3 + 2 = 27 - 9 + 2 = 20$$

Já por outro lado, quando x tende a -3 , a função $f(x)$ tende a 38, como visto abaixo:

$$\lim_{x \rightarrow -3} 3x^2 - 3x + 2 = 3 \cdot (-3)^2 - 3 \cdot (-3) + 2 = 27 + 9 + 2 = 38$$

Passo 8. Com todos os pontos necessários marcados, o esboço do gráfico de $f(x)$ se dá com a curva que passa por todos os pontos que estão dentro do intervalo $-3 \leq x \leq 3$ (domínio da função), conforme visto a seguir na Figura 45.

Figura 45 – Esboço $f(x) = 3x^2 - 3x + 2$ para $-3 \leq x \leq 3$.



Fonte: Produzido pela autora no *software Geogebra*.

3.2.7 Exemplo 7 - Esboço do gráfico $f(x) = -4x^2 + 8$

De forma análoga aos exemplos anteriores, segue o passo-a-passo para esboço do gráfico da função $f(x)$. (Qualquer dúvida sobre o procedimento, sugere-se o retorno ao roteiro, em 3.1, para melhor entendimento dos passos).

Passo 1. Analisando a função $f(x) = -4x^2 + 8$, vê-se que esta é uma função polinomial de grau 2, que não apresenta todos os coeficientes não nulos (aqui o coeficiente b é nulo), cujo domínio é \mathbb{R} .

Passo 2. Percebe-se que o coeficiente linear da função $f(x)$ é 8, ou seja, é neste ponto que gráfico interceptará o eixo y . Marca-se então este ponto no plano cartesiano, sobre o eixo y , aqui representado por A na Figura 46.

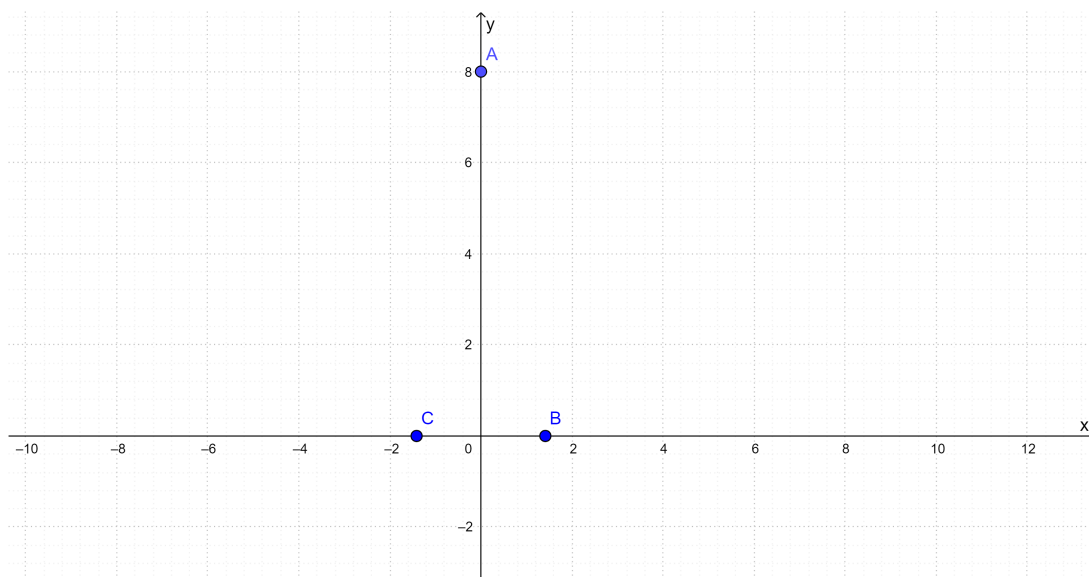
Passo 3. Como a função $f(x)$ é um polinômio de grau 2, isso significa que ela terá até duas raízes reais. As raízes podem ser encontradas, fazendo $f(x) = 0$, através da

Fórmula de Bháskara. Ou, como ela não apresenta todos os coeficientes, pode-se resolver a equação utilizando artifícios algébricos simples (aqui, a título de variedade, será feito pelo segundo modo).

$$\begin{aligned} -4x^2 + 8 &= 0, \\ -4x^2 &= -8, \\ x^2 &= \frac{8}{4}, \\ x^2 &= 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Portanto, as raízes de $f(x) = -4x^2 + 8$ são $\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$. Marca-se esses pontos sobre o eixo x (lembrando que $\sqrt{2}$ é, aproximadamente 1,4142), representados por B e C , respectivamente, conforme visto na Figura 46.

Figura 46 – Interseção com os eixos x e y de $f(x) = -4x^2 + 8$.



Fonte: Produzido pela autora no *software Geogebra*.

Passo 4. Ao analisar os intervalos de crescimento e decréscimo, primeiramente, encontra-se a derivada da função $f(x)$:

$$f'(x) = -8x.$$

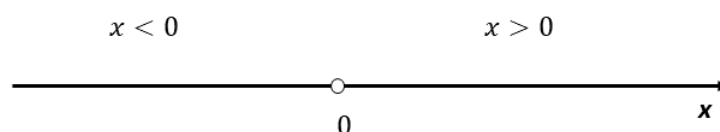
Fazendo $f'(x) = 0$,

$$-8x = 0 \Rightarrow x = 0.$$

tem-se que a mesma se anula em $x = 0$ (ponto crítico da função). Este ponto divide o intervalo real em dois intervalos: $(-\infty, 0)$ e $(0, \infty)$, conforme pode ser visualizado na Figura 47.

Em cada um destes intervalos, escolhe-se um número de teste c , como por exemplo:

Figura 47 – Intervalos definidos pelo ponto crítico de $f(x) = -4x^2 + 8$.



Fonte: Produzido pela autora.

- $c = -4$, para $x < 0$;
- $c = 4$, para $x > 0$.

Calculando o valor de $f'(x)$ para cada número de teste, obtém-se:

$$\begin{aligned} f'(-4) &= -8 \cdot (-4) = 32, \quad e \\ f'(4) &= -8 \cdot (4) = -32. \end{aligned}$$

Conclui-se então que, a função $f(x) = -4x^2 + 8$ é crescente no intervalo $(-\infty, 0)$ e decrescente no intervalo $(0, \infty)$, como colocado na Tabela 14.

Tabela 14 – Intervalos de crescimento e decrescimento da função $f(x) = -4x^2 + 8$.

Intervalo	Número de teste c	$f'(c)$	Conclusão
$(-\infty, 0)$	-4	$f'(-4) = 32 > 0$	crescente
$(0, \infty)$	4	$f'(4) = -32 < 0$	decrescente

Fonte: Produzido pela autora.

Passo 5. Os pontos críticos são aqueles tais que $f'(x) = 0$, ou seja, para $f(x) = -4x^2 + 8$ o ponto crítico é o ponto $x = 0$.

Como a função $f(x)$ muda de sentido no ponto $x = 0$, de crescente para decrescente, então pode-se concluir que $x = 0$ é um ponto de máximo local. Como $x = 0$ está sobre o eixo y , a imagem deste ponto é o próprio coeficiente linear, ou seja, $f(0) = 8$.

Portanto, $(0, 8)$ é um ponto de máximo local. Coincidentemente, esse ponto também é onde o gráfico intercepta o eixo y , que já foi marcado aqui como A .

Passo 6. Ao analisar a concavidade da função, se faz necessário, primeiramente, encontrar a segunda derivada, que neste caso é dada por:

$$f''(x) = -8.$$

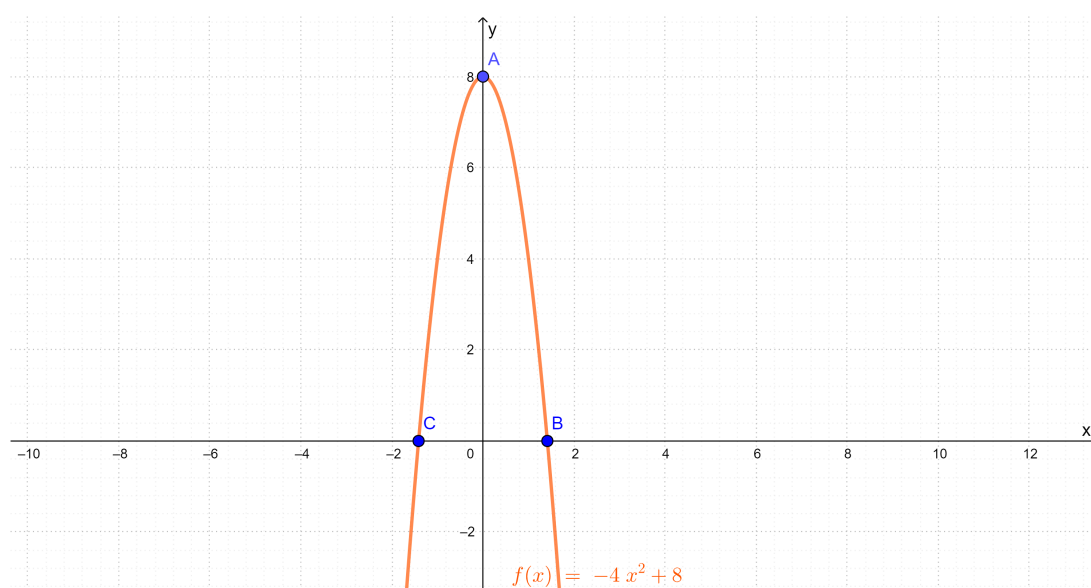
Como $f''(x)$ é negativa em \mathbb{R} , conclui-se que o gráfico de $f(x)$ é côncavo para baixo. (Nesse caso, não há pontos de inflexão).

Passo 7. Como aqui nesta função, o domínio é \mathbb{R} , deve-se analisar o comportamento da função quando x tende a infinito e quando x tende a menos infinito.

Como o grau da função $f(x)$ é par (grau 2), sabe-se que a função terá o mesmo comportamento quando x tende a infinito e quando x tende a menos infinito. E como o coeficiente dominante é negativo, a função $f(x)$ tende a menos infinito, tanto à direita quanto à esquerda do plano cartesiano.

Passo 8. Com todos os pontos necessários marcados, o esboço do gráfico de $f(x)$ se dá com a curva que passa por todos esses pontos, conforme representado na Figura 48.

Figura 48 – Esboço do gráfico de $f(x) = -4x^2 + 8$.



Fonte: Produzido pela autora no *software Geogebra*.

3.2.8 Exemplo 8 - Esboço do gráfico $f(x) = x^3$

Passo 1. Observando as características do polinômio.

Analisando a função $f(x) = x^3$, nota-se que esta é uma função polinomial de grau 3, que não apresenta todos os coeficientes não nulos (aqui os coeficientes b , c e d são nulos), cujo domínio é \mathbb{R} .

Passo 2. Identificando o coeficiente linear.

Percebe-se que o coeficiente linear da função $f(x)$ é 0, ou seja, nesse caso o gráfico interceptará o eixo y na origem do plano cartesiano. Marca-se então este ponto no plano cartesiano, aqui representado por A na Figura 49.

Passo 3. Encontrando as raízes.

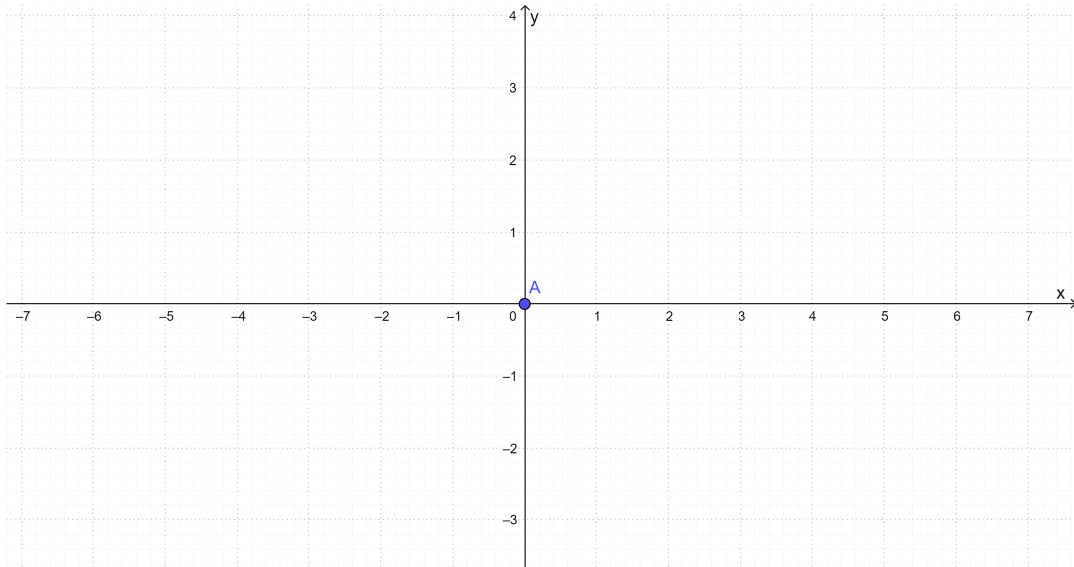
Como a função $f(x)$ é um polinômio de grau 3, isso significa que ela poderá ter até três raízes. Vários métodos de resolução de equações de terceiro grau foram apresentados

na Seção 1.2.3.3. Aqui, pode se fazer:

$$x^3 = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Portanto, a raiz da função $f(x) = x^3$ é 0, e esta tem multiplicidade 3 (a mesma raiz aparece três vezes). Como a raiz é igual ao coeficiente linear, este ponto, representado por A , já está marcado no plano cartesiano, como mostra a Figura 49.

Figura 49 – Interseção com os eixos x e y de $f(x) = x^3$.



Fonte: Produzido pela autora no *software Geogebra*.

Passo 4. Analisando os intervalos de crescimento e decrescimento.

Primeiramente, encontra-se a derivada da função $f(x)$:

$$f'(x) = 3x^2.$$

Fazendo $f'(x) = 0$, tem-se

$$3x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0.$$

ou seja, f' se anula em $x = 0$ (ponto crítico da função). Este ponto divide a reta real em dois intervalos abertos: $(-\infty, 0)$ e $(0, \infty)$, conforme representado na Figura 50.

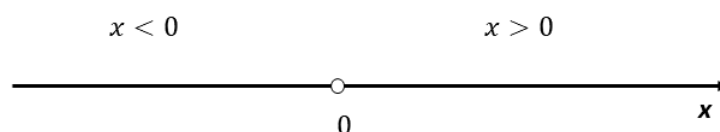
Em cada um destes intervalos, escolhe-se um número de teste c , como por exemplo:

- $c = -2$, para $x < 0$;
- $c = 2$, para $x > 0$.

Calculando o valor de $f'(x)$ para cada número de teste, obtém-se:

$$\begin{aligned} f'(-2) &= 3 \cdot (-2)^2 = 12, \quad e \\ f'(2) &= 3 \cdot (2)^2 = 12. \end{aligned}$$

Figura 50 – Intervalos definidos pelo ponto crítico de $f(x) = x^3$.



Fonte: Produzido pela autora.

Conclui-se então que, a função $f(x) = x^3$ é crescente no intervalo $(-\infty, 0)$ e crescente também no intervalo $(0, \infty)$, como colocado na Tabela 15. Ou seja, a função $f(x) = x^3$ é crescente em todo intervalo real.

Tabela 15 – Intervalos de crescimento e decrescimento da função $f(x) = x^3$.

Intervalo	Número de teste c	$f'(c)$	Conclusão
$(-\infty, 0)$	-2	$f'(-2) = 12 > 0$	crescente
$(0, \infty)$	2	$f'(2) = 12 > 0$	crescente

Fonte: Produzido pela autora.

Passo 5. Encontrando os máximos e mínimos locais.

Os pontos críticos são aqueles tais que $f'(x) = 0$, ou seja, para $f(x) = x^3$ o ponto crítico é o ponto $x = 0$.

Como não houve mudança no sentido de crescimento da função $f(x)$ no ponto $x = 0$, conclui-se então que $x = 0$ não é ponto de máximo e nem de mínimo local.

Passo 6. Analisando a concavidade.

A segunda derivada da função $f(x)$ é dada por:

$$f''(x) = 6x.$$

A $f''(x)$ se anula em $x = 0$. Esse valor divide a reta real em dois intervalos, de forma análoga à análise dos intervalos de crescimento. Calculando o valor de $f''(x)$ para números de teste em cada um destes intervalos, tem-se os seguintes resultados, visualizados na Tabela 16 a seguir.

Conclui-se que o gráfico da função $f(x) = x^3$ tem concavidade para baixo no intervalo $(-\infty, 0)$; e tem concavidade para cima no intervalo $(0, \infty)$. Como o gráfico muda a direção de sua concavidade no ponto $x = 0$, infere-se que $x = 0$ é um ponto de inflexão.

Passo 7. Analisando o comportamento da função para valores suficientemente próximos dos extremos do domínio.

Tabela 16 – Análise da concavidade de $f(x) = x^3$.

Intervalo	Número de teste c	$f''(c)$	Conclusão
$(-\infty, 0)$	-2	$f''(-2) = -12 < 0$	côncavo para baixo
$(0, \infty)$	2	$f''(2) = 12 > 0$	côncavo para cima

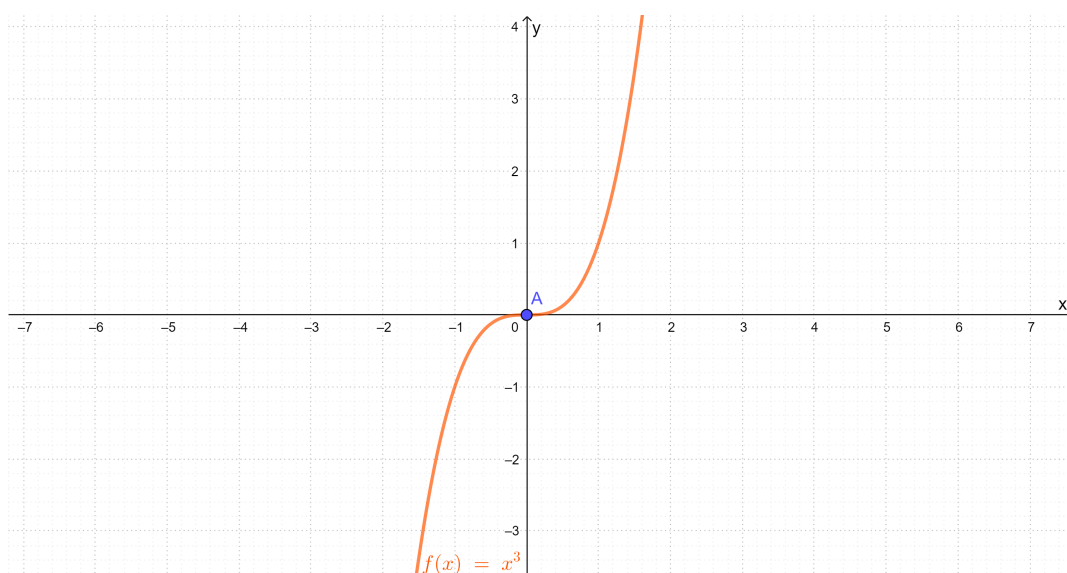
Fonte: Produzido pela autora.

Como aqui nesta função, o domínio é (\mathbb{R}) , deve-se analisar o comportamento da função quando x tende a infinito e quando x tende a menos infinito.

O grau da função $f(x)$ é ímpar (grau 3), então sabe-se que a função terá comportamentos diferentes quando x tende a infinito e quando x tende a menos infinito. Como o coeficiente dominante é positivo, então conclui-se que, quando x tende a infinito, a função $f(x)$ também tende a infinito, e quando x tende a menos infinito, $f(x)$ tende a menos infinito.

Passo 8. Esboço do gráfico.

Com todos os pontos necessários marcados, o esboço do gráfico de $f(x)$ se dá com a curva que passa por todos esses pontos, respeitando o sentido da concavidade analisada no passo 6, conforme representado na Figura 51.

Figura 51 – Esboço de $f(x) = x^3$.

Fonte: Produzido pela autora no *software Geogebra*.

3.2.9 Exemplo 9 - Esboço do gráfico $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x$

De forma análoga aos exemplos anteriores, segue o passo-a-passo para esboço do gráfico da função $f(x)$. (Qualquer dúvida sobre o procedimento, sugere-se o retorno ao

roteiro, em 3.1, para melhor entendimento dos passos).

Passo 1. Analisando a função $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x$, vê-se que esta é uma função polinomial de grau 3, que não apresenta todos os coeficientes não nulos (aqui o coeficiente d é nulo), cujo domínio é \mathbb{R} .

Passo 2. O coeficiente linear da função $f(x)$ é 0, ou seja, nesse caso o gráfico interceptará o eixo y na origem do plano cartesiano. Marca-se então este ponto no plano cartesiano, aqui representado por A na Figura 52.

Passo 3. Como a função $f(x)$ é um polinômio de grau 3, isso significa que ela poderá ter até três raízes. Vários métodos de resolução de equações de terceiro grau foram apresentados na seção 1.2.3.3. Aqui, como a função $f(x)$ não apresenta o coeficiente linear, pode-se colocar x em evidência e resolver a equação de segundo grau que se forma através da Fórmula de Bháskara.

$$x^3 - 5x^2 + 6x = 0$$

Colocando x em evidência

$$x \cdot (x^2 - 5x + 6) = 0$$

Tem-se então que, para que o produto resulte em 0

uma das parcelas deve, necessariamente, ser zero. Desta forma,

$$x = 0 \quad \text{ou} \quad (x^2 - 5x + 6) = 0$$

essa segunda parcela, por Bháskara, resulta em

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$= \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 1}{2}$$

$$x_1 = \frac{5 + 1}{2} = 3 \quad \text{e}$$

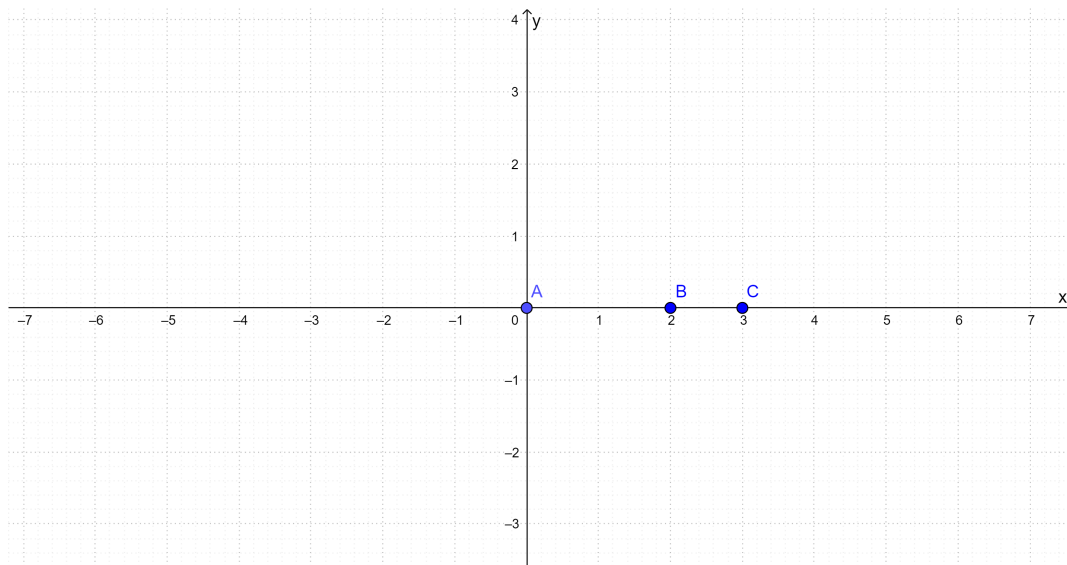
$$x_2 = \frac{5 - 1}{2} = 2.$$

Deste modo, as raízes da função $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x$ são 0, 2 e 3. O gráfico de $f(x)$ interceptará o eixo x nestes três pontos. O ponto 0 é a origem do plano cartesiano, o qual já foi marcado e aqui representado por A . Portanto, marca-se os outros dois sobre o eixo x , representados respectivamente por B e C , como mostrado na Figura 52.

Passo 4. Ao analisar os intervalos de crescimento e decrescimento, faz-se necessário, primeiramente, encontrar a derivada da função $f(x)$:

$$f'(x) = 3x^2 - 10x + 6.$$

Figura 52 – Interseção com os eixos x e y de $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x$.



Fonte: Produzido pela autora no *software Geogebra*.

Fazendo $f'(x) = 0$, tem-se, através da Fórmula de Bháskara

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-10)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 6 = 100 - 72 = 28.$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{-(-10) \pm \sqrt{28}}{2 \cdot 3} = \frac{10 \pm \sqrt{28}}{6} \\ x_1 &= \frac{10 + \sqrt{28}}{6} = \frac{5 + \sqrt{7}}{3}, \text{ e} \\ x_2 &= \frac{10 - \sqrt{28}}{6} = \frac{5 - \sqrt{7}}{3}. \end{aligned}$$

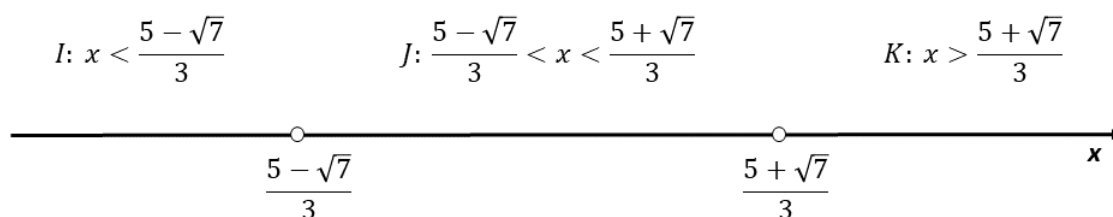
ou seja, f' se anula em $x = \frac{5 + \sqrt{7}}{3} \approx 2,5486$ e $x = \frac{5 - \sqrt{7}}{3} \approx 0,7847$, pontos críticos da função. Estes pontos dividem a reta real em três intervalos:

- I : onde $x < \frac{5 - \sqrt{7}}{3}$;
- J : onde $\frac{5 - \sqrt{7}}{3} < x < \frac{5 + \sqrt{7}}{3}$;
- K : onde $x > \frac{5 + \sqrt{7}}{3}$.

conforme representado na Figura 53.

Em cada um destes intervalos, escolhe-se um número de teste c , como por exemplo:

Figura 53 – Intervalos definidos pelos pontos críticos de $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x$.



Fonte: Produzido pela autora.

- $c = -4$, para o intervalo I ;
- $c = 2$, para o intervalo J ;
- $c = 4$, para o intervalo K .

Calculando o valor de $f'(x)$ para cada número de teste, obtém-se:

$$\begin{aligned} f'(-4) &= 3 \cdot (-4)^2 - 10 \cdot (-4) + 6 = 94, \\ f'(2) &= 3 \cdot (2)^2 - 10 \cdot 2 + 6 = -2, \quad e \\ f'(4) &= 3 \cdot (4)^2 - 10 \cdot 4 + 6 = 14. \end{aligned}$$

Conclui-se então que, a função $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x$ é crescente no intervalo I e K , e decrescente no intervalo J , como melhor visualizado na Tabela 17.

Tabela 17 – Intervalos de crescimento e decrescimento da função $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x$.

Intervalo	Número de teste c	$f'(c)$	Conclusão
I	-4	$f'(-4) = 94 > 0$	crescente
J	2	$f'(2) = -2 < 0$	decrescente
K	4	$f'(4) = 14 > 0$	crescente

Fonte: Produzido pela autora.

Passo 5. Os pontos críticos são aqueles tais que $f'(x) = 0$, ou seja, para $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x$ os pontos críticos são os pontos $x = \frac{5 + \sqrt{7}}{3}$ e $x = \frac{5 - \sqrt{7}}{3}$.

Analisando a Tabela 17 percebe-se que no ponto $x = \frac{5 - \sqrt{7}}{3}$, o gráfico de $f(x)$ muda de crescente para decrescente, portanto este é um ponto de máximo local. Sua imagem é dada por:

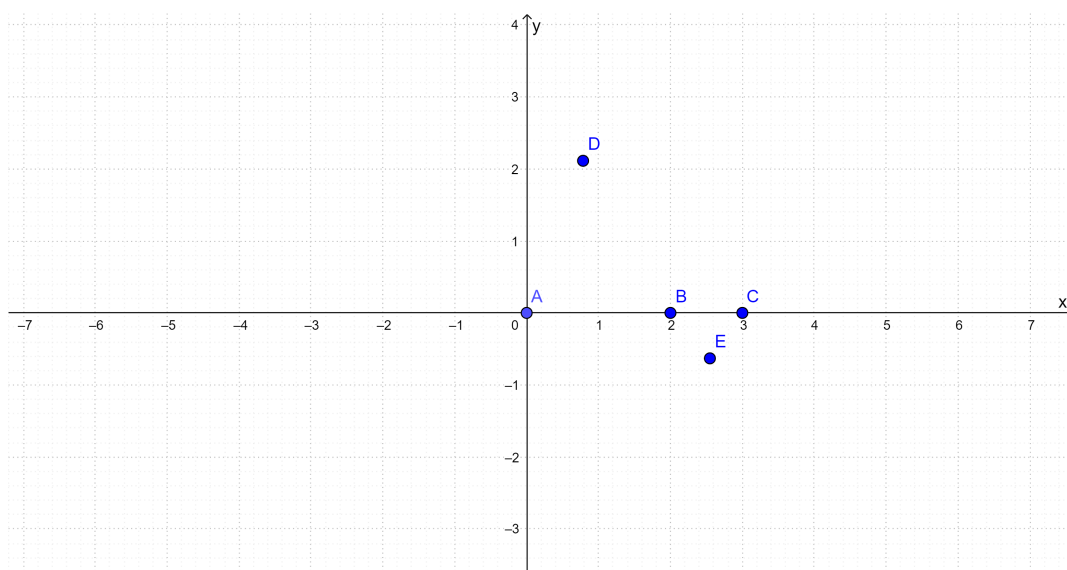
$$f\left(\frac{5 - \sqrt{7}}{3}\right) \approx 2,1126,$$

e no ponto $x = \frac{5 + \sqrt{7}}{3}$ o gráfico de $f(x)$ muda de decrescente para crescente, sendo este então, um ponto de mínimo local. Sua imagem é dada por:

$$f\left(\frac{5 + \sqrt{7}}{3}\right) \approx -0,6311.$$

Os pares ordenados, que representam o máximo e mínimo local, devem ser marcados no plano cartesiano, representados por D e E aqui na Figura 54.

Figura 54 – Máximo e mínimo local de $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x$.



Fonte: Produzido pela autora no *software Geogebra*.

Passo 6. Com a intenção de analisar a concavidade, a segunda derivada da função $f(x)$ é dada por:

$$f''(x) = 6x - 10.$$

A $f''(x)$ se anula em $x = \frac{5}{3}$. Esse ponto divide a reta real em dois intervalos: $(-\infty, \frac{5}{3})$ e $(\frac{5}{3}, \infty)$. Calculando o valor de $f''(x)$ para números de teste em cada um destes intervalos, tem-se os seguintes resultados, visualizados na Tabela 18 a seguir.

Tabela 18 – Análise da concavidade de $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x$.

Intervalo	Número de teste c	$f''(c)$	Conclusão
$(-\infty, \frac{5}{3})$	1	$f''(1) = -4 < 0$	côncavo para baixo
$(\frac{5}{3}, \infty)$	3	$f''(3) = 8 > 0$	côncavo para cima

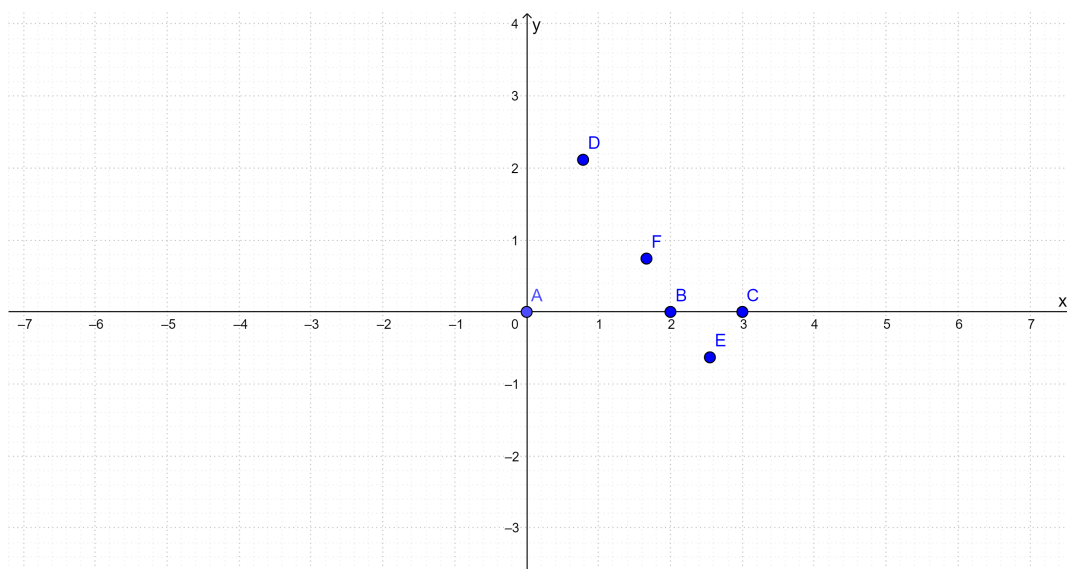
Fonte: Produzido pela autora.

Conclui-se que o gráfico da função $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x$ tem concavidade para baixo no intervalo $(-\infty, \frac{5}{3})$; e tem concavidade para cima no intervalo $(\frac{5}{3}, \infty)$. Como o gráfico

muda a direção de sua concavidade no ponto $x = \frac{5}{3}$, induz-se que este é um ponto de inflexão.

O ponto $x = \frac{5}{3}$ tem como imagem o valor $f\left(\frac{5}{3}\right) \approx 0,74$. Este par ordenado deve ser marcado no plano cartesiano, aqui sendo representado por F , como visto a Figura 55.

Figura 55 – Ponto de inflexão de $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x$.



Fonte: Produzido pela autora no *software Geogebra*.

Passo 7. Como aqui nesta função, o domínio é (\mathbb{R}) , deve-se analisar o comportamento da função quando x tende a infinito e quando x tende a menos infinito.

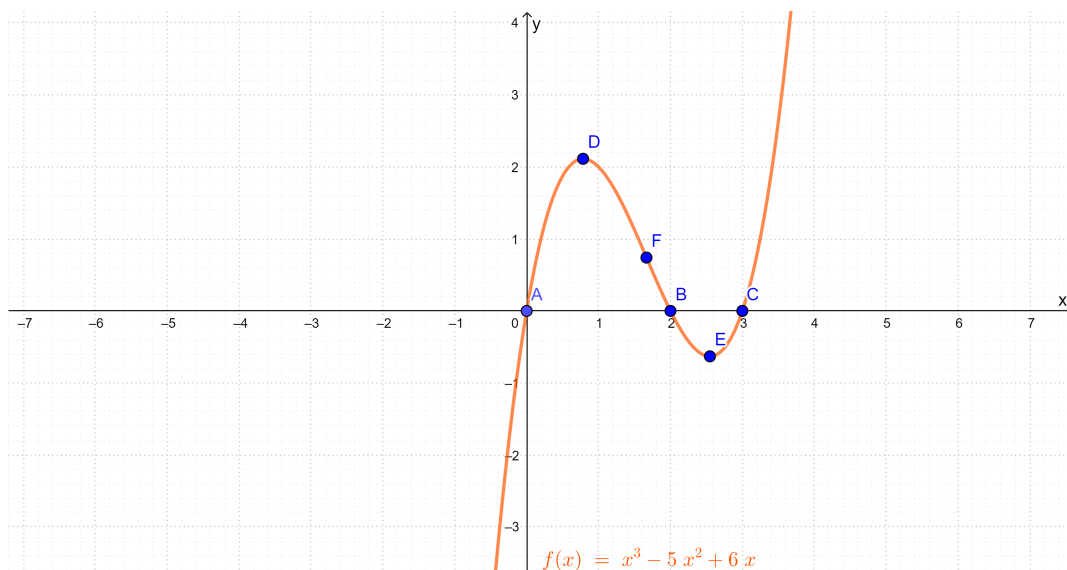
Como o grau da função $f(x)$ é ímpar (grau 3), sabe-se que a função terá comportamentos diferentes quando x tende a infinito e quando x tende a menos infinito. E pelo fato do coeficiente dominante ser positivo, então conclui-se que, quando x tende a infinito, a função $f(x)$ também tende a infinito, e quando x tende a menos infinito, $f(x)$ tende a menos infinito.

Passo 8. Esboço do gráfico.

Com todos os pontos necessários marcados, o esboço do gráfico de $f(x)$ se dá com a curva que passa por todos esses pontos, respeitando o sentido de crescimento e decréscimo, e ainda da concavidade analisada nos passos anteriores, conforme representado na Figura 56.

3.2.10 Exemplo 10 - Esboço do gráfico $f(x) = x^3 - x^2 - 5x - 3$

De forma análoga aos exemplos anteriores, segue o passo-a-passo para esboço do gráfico da função $f(x)$. (Qualquer dúvida sobre o procedimento, sugere-se o retorno ao roteiro, em 3.1, para melhor entendimento dos passos).

Figura 56 – Esboço de $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x$.

Fonte: Produzido pela autora no *software Geogebra*.

Passo 1. Analisando a função $f(x) = x^3 - x^2 - 5x - 3$, percebe-se que esta é uma função polinomial de grau 3, que apresenta todos os coeficientes não nulos, cujo domínio é \mathbb{R} .

Passo 2. O coeficiente linear da função $f(x)$ é -3 , ou seja, é nesse ponto que o gráfico de $f(x)$ interceptará o eixo y . Marca-se então este ponto no plano cartesiano sobre o eixo y , aqui representado por A na Figura 57.

Passo 3. Como a função $f(x)$ é um polinômio de grau 3, isso significa que ela poderá ter até três raízes. Vários métodos de resolução de equações de terceiro grau foram apresentados na Seção 1.2.3.3. Aqui, como a função $f(x)$ tem no coeficiente d um número com poucos divisores, vale a pena tentar encontrar uma das raízes pela método das raízes racionais, descrito no item “v” da Subseção 1.2.3.3. Após encontrar essa raiz, pode se efetuar a divisão do polinômio, fatorando-o, e encontrando as raízes do outro fator (de segundo grau) através da Fórmula de Bháskara.

$$x^3 - x^2 - 5x - 3 = 0$$

Os divisor de $a = 1$ são 1 e -1 , e os divisores de $d = -3$ são 1, -1 , 3 e -3 .

Desta forma, os possíveis candidatos a raiz de $f(x)$ são: 3 e -3 .

Testando a função f para ambos os candidatos:

$$f(3) = 0 \quad \text{e} \quad f(-3) = -24.$$

Como $f(3) = 0$, então 3 é uma das raízes de $f(x)$. Para encontrar as demais, pode-se fatorar o polinômio $f(x)$ dividindo-o por $(x - 3)$:

$$\frac{x^3 - x^2 - 5x - 3}{x - 3} = x^2 + 2x + 1.$$

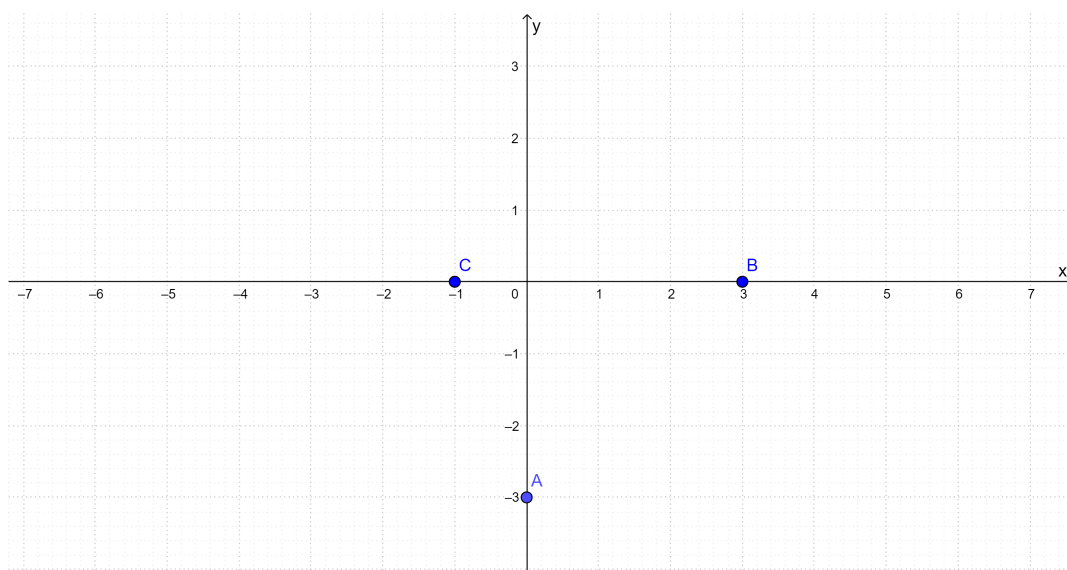
O procedimento de divisão de polinômios pode ser visto na Seção 1.2.

Agora, através da Fórmula de Bháskara:

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac = (2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 4 - 4 = 0. \\ x &= \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{-(2) \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm 0}{2} \\ x_1 &= x_2 = \frac{-2}{2} = -1.\end{aligned}$$

Portanto, as raízes da função $f(x) = x^3 - x^2 - 5x - 3$ são 3 e -1 , esta última com multiplicidade 2. O gráfico de $f(x)$ interceptará o eixo x nestes dois pontos. Logo, marca-se estes pontos sobre o eixo x , representados respectivamente por B e C , como mostrado na Figura 57.

Figura 57 – Interseção com os eixos x e y de $f(x) = x^3 - x^2 - 5x - 3$.



Fonte: Produzido pela autora no *software Geogebra*.

Passo 4. Ao analisar os intervalos de crescimento e decrescimento, faz-se necessário, primeiramente, encontrar a derivada da função $f(x)$:

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 5.$$

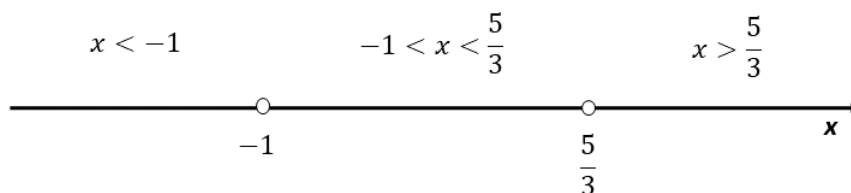
Fazendo $f'(x) = 0$, tem-se, através da Fórmula de Bháskara

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-5) = 4 + 60 = 64.$$

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \\
 &= \frac{-(-2) \pm \sqrt{64}}{2 \cdot 3} = \frac{2 \pm 8}{6} \\
 x_1 &= \frac{2+8}{6} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3} \\
 x_2 &= \frac{2-8}{6} = \frac{-6}{6} = -1.
 \end{aligned}$$

ou seja, f' se anula em $x = \frac{5}{3}$ e $x = -1$, pontos críticos da função. Estes pontos dividem a reta real em três intervalos: $(-\infty, -1)$, $(-1, \frac{5}{3})$ e $(\frac{5}{3}, \infty)$, conforme representado na Figura 58.

Figura 58 – Intervalos definidos pelos pontos críticos de $f(x) = x^3 - x^2 - 5x - 3$.



Fonte: Produzido pela autora.

Em cada um destes intervalos, escolhe um número de teste c , como por exemplo:

- $c = -2$, para $x < -1$;
- $c = 0$, para $-1 < x < \frac{5}{3}$;
- $c = 3$, para $x > \frac{5}{3}$.

Calculando o valor de $f'(x)$ para cada número de teste, obtem-se:

$$\begin{aligned}
 f'(-2) &= 3 \cdot (-2)^2 - 2 \cdot (-4) - 5 = 11, \\
 f'(0) &= 3 \cdot (0)^2 - 2 \cdot 2 - 5 = -5, \quad e \\
 f'(3) &= 3 \cdot (3)^2 - 2 \cdot 4 - 5 = 16.
 \end{aligned}$$

Conclui-se então que, a função $f(x) = x^3 - x^2 - 5x - 3$ é crescente nos intervalos $(-\infty, -1)$ e $(\frac{5}{3}, \infty)$; e decrescente no intervalo $(-1, \frac{5}{3})$, como visualizado na Tabela 19.

Passo 5. Os pontos críticos são aqueles tais que $f'(x) = 0$, ou seja, para $f(x) = x^3 - x^2 - 5x - 3$ os pontos críticos são os ponto $x = -1$ e $x = \frac{5}{3}$.

Tabela 19 – Intervalos de crescimento e decrescimento da função $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x$.

Intervalo	Número de teste c	$f'(c)$	Conclusão
$(-\infty, -1)$	-2	$f'(-2) = 11 > 0$	crescente
$(-1, \frac{5}{3})$	0	$f'(0) = -5 < 0$	decrescente
$(\frac{5}{3}, \infty)$	3	$f'(3) = 16 > 0$	crescente

Fonte: Produzido pela autora.

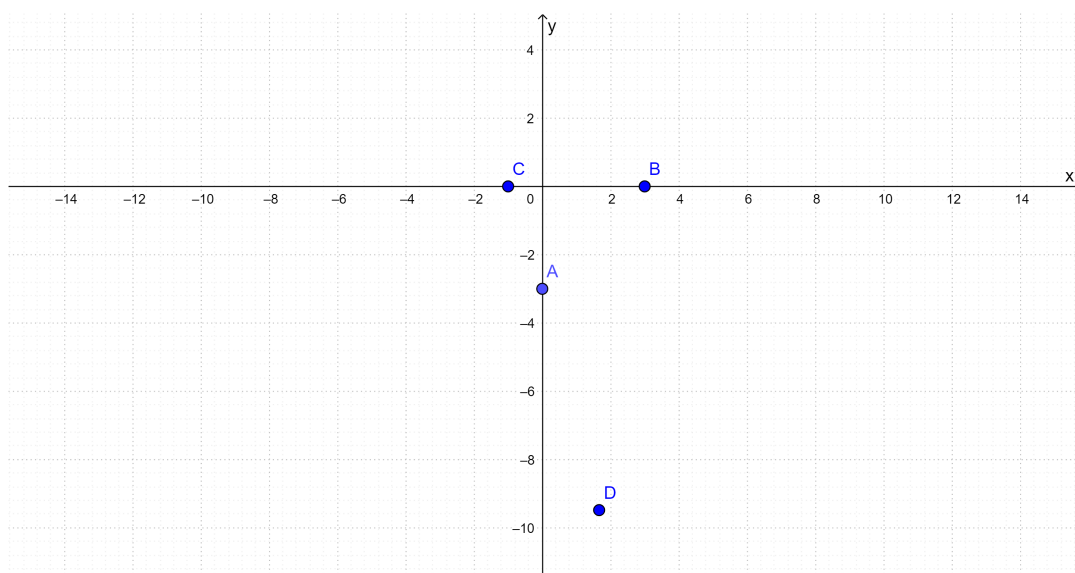
Analisando a tabela 19 percebe-se que no ponto $x = -1$, o gráfico de $f(x)$ muda de crescente para decrescente, portanto este é um ponto de máximo local. Sua imagem é dada por:

$$f(-1) = 0.$$

e no ponto $x = \frac{5}{3}$ o gráfico de $f(x)$ muda de decrescente para crescente, sendo este então, um ponto de mínimo local. Sua imagem é dada por:

$$f\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{-256}{27} \approx -9,4815.$$

Como o par ordenado $(-1, 0)$ já está representado no gráfico como C , marca-se apenas o outro par ordenado correspondente ao mínimo local, aqui representado por D , como visto na Figura 59.

Figura 59 – Máximo e mínimo local de $f(x) = x^3 - x^2 - 5x - 3$.

Fonte: Produzido pela autora no *software Geogebra*.

Passo 6. Com a intenção de analisar a concavidade, a segunda derivada da função $f(x)$ é dada por:

$$f''(x) = 6x - 2.$$

A $f''(x)$ se anula em $x = \frac{1}{3}$. Esse ponto divide a reta real em dois intervalos: $(-\infty, \frac{1}{3})$ e $(\frac{1}{3}, \infty)$. Calculando o valor de $f''(x)$ para números de teste em cada um destes intervalos, tem-se os seguintes resultados, visualizados na Tabela 20 a seguir.

Tabela 20 – Análise da concavidade de $f(x) = x^3 - x^2 - 5x - 3$.

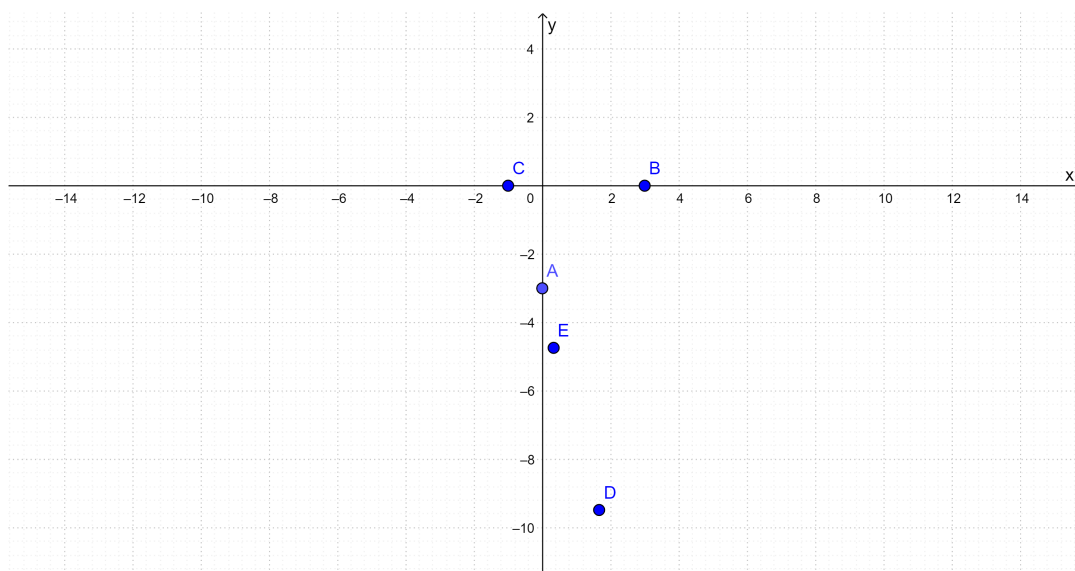
Intervalo	Número de teste c	$f''(c)$	Conclusão
$(-\infty, \frac{1}{3})$	0	$f''(0) = -2 < 0$	côncavo para baixo
$(\frac{1}{3}, \infty)$	2	$f''(2) = 10 > 0$	côncavo para cima

Fonte: Produzido pela autora.

Conclui-se que o gráfico da função $f(x) = x^3 - x^2 - 5x - 3$ tem concavidade para baixo no intervalo $(-\infty, \frac{1}{3})$; e tem concavidade para cima no intervalo $(\frac{1}{3}, \infty)$. Como o gráfico muda a direção de sua concavidade no ponto $x = \frac{1}{3}$, diz-se que este é um ponto de inflexão.

O ponto de inflexão $x = \frac{1}{3}$ tem como imagem $f(\frac{1}{3}) \approx -4,74$. Este par ordenado deve ser marcado no plano cartesiano, sendo representado por E , como mostra a Figura 60.

Figura 60 – Ponto de inflexão $f(x) = x^3 - x^2 - 5x - 3$.



Fonte: Produzido pela autora no *software Geogebra*.

Passo 7. Como aqui nesta função, o domínio é \mathbb{R} , deve-se analisar o comportamento da função quando x tende a infinito e quando x tende a menos infinito.

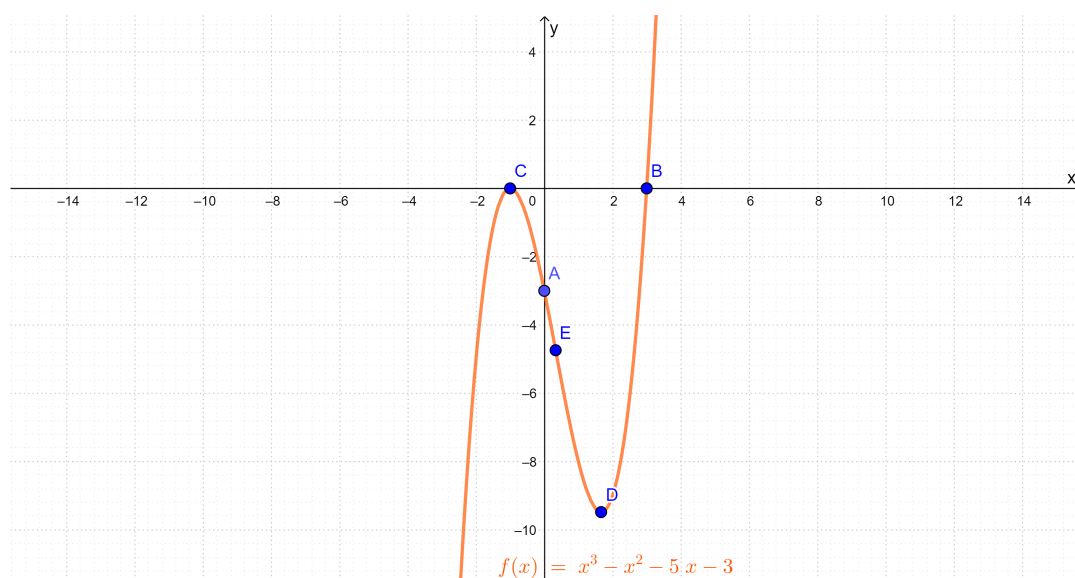
O grau da função $f(x)$ é ímpar (grau 3), então sabe-se que a função terá comportamentos diferentes quando x tende a infinito e quando x tende a menos infinito. Como o coeficiente dominante é positivo, então conclui-se que, quando x tende a infinito, a função

$f(x)$ também tende a infinito, e quando x tende a menos infinito, $f(x)$ tende a menos infinito.

Passo 8. Esboço do gráfico.

Com todos os pontos necessários marcados, o esboço do gráfico de $f(x)$ se dá com a curva que passa por todos esses pontos, respeitando o sentido de crescimento e decréscimo, e ainda da concavidade analisada nos passos anteriores, conforme representado na Figura 61.

Figura 61 – Esboço de $f(x) = x^3 - x^2 - 5x - 3$.



Fonte: Produzido pela autora no *software Geogebra*.

3.2.11 Exemplo 11 - Esboço do gráfico $f(x) = -2x^3 + 4x$

De forma análoga aos exemplos anteriores, segue o passo-a-passo para esboço do gráfico da função $f(x)$. (Qualquer dúvida sobre o procedimento, sugere-se o retorno ao roteiro, na Seção 3.1, para melhor entendimento dos passos).

Passo 1. Observando a função $f(x) = -2x^3 + 4x$, nota-se que $f(x)$ é uma função polinomial de grau 3, que não apresenta todos os coeficientes não nulos (aqui os coeficientes b e d são nulos), onde o domínio é \mathbb{R} .

Passo 2. O coeficiente linear da função $f(x)$ é nulo, ou seja, é o gráfico de $f(x)$ interceptará o eixo y na origem do plano cartesiano. Marca-se então este ponto no plano cartesiano, aqui representado por A na Figura 62.

Passo 3. Como a função $f(x)$ é um polinômio de grau 3, isso significa que ela poderá ter até três raízes. Vários métodos de resolução de equações de terceiro grau foram apresentados na Seção 1.2.3.3. Aqui, como a função $f(x)$ não possui todos os coeficientes

e apresenta o coeficiente d nulo, pode-se fazer $f(x) = 0$, colocando x em evidência como se segue:

$$-2x^3 + 4x = 0$$

Colocando x em evidência, tem-se

$$x \cdot (-2x^2 + 4) = 0$$

Para que o produto acima resulte em zero, um dos fatores deve, necessariamente, ser igual à zero. Portanto,

$$x = 0 \quad \text{ou} \quad (-2x^2 + 4) = 0$$

Ao segundo fator, que é uma função polinomial de segundo grau, pode ser aplicado artifícios algébricos simples:

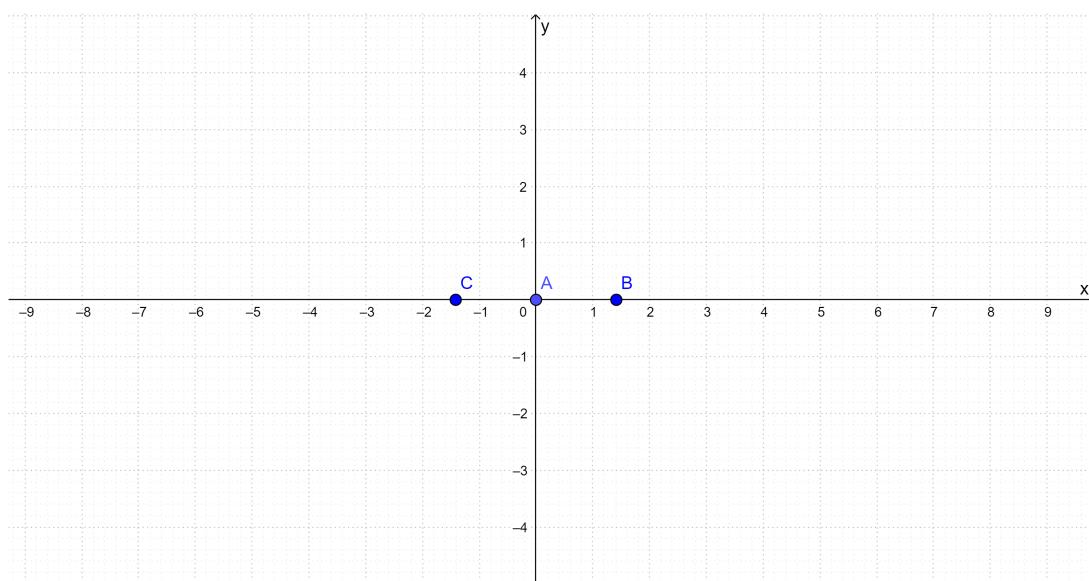
$$-2x^2 + 4 = 0$$

$$2x^2 = 4$$

$$x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}.$$

Logo, as raízes da função $f(x) = -2x^3 + 4x$ são 0 , $\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$. O gráfico de $f(x)$ interceptará o eixo x nestes três pontos. Como $x = 0$ é a origem do plano cartesiano, este já foi marcado e está representado como A . Marca-se portanto os outros dois pontos sobre o eixo x , representados respectivamente por B e C , como mostrado na Figura 62.

Figura 62 – Interseção com os eixos x e y de $f(x) = -2x^3 + 4x$.



Fonte: Produzido pela autora no *software Geogebra*.

Passo 4. Deve-se encontrar a derivada da função $f(x)$, para realizar a análise dos intervalos de crescimento e decrescimento da função em questão. A derivada de $f(x)$ é

dada por:

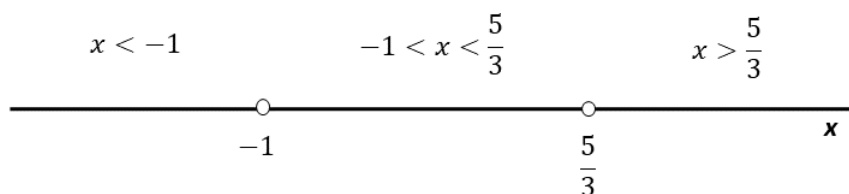
$$f'(x) = -6x^2 + 4.$$

Fazendo $f'(x) = 0$, tem-se

$$\begin{aligned} -6x^2 + 4 &= 0 \\ -6x^2 &= -4 \\ 6x^2 &= 4 \\ x^2 &= \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \\ x &= \pm\sqrt{\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

ou seja, $x = \sqrt{\frac{2}{3}}$ (aproximadamente 0,8165) e $x = -\sqrt{\frac{2}{3}}$ (aproximadamente -0,8165) são pontos críticos da função. Estes pontos dividem a reta real em três intervalos: $(-\infty, -\sqrt{\frac{2}{3}})$, $(-\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}})$ e $(\sqrt{\frac{2}{3}}, \infty)$, representado na Figura 63 adiante.

Figura 63 – Intervalos definidos pelos pontos críticos de $f(x) = -2x^3 + 4x$.



Fonte: Produzido pela autora.

Em cada um destes intervalos, escolhe um número de teste c , como por exemplo:

- $c = -2$, para $x < -\sqrt{\frac{2}{3}}$;
- $c = 0$, para $-\sqrt{\frac{2}{3}} < x < \sqrt{\frac{2}{3}}$;
- $c = 2$, para $x > \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Calculando o valor de $f'(x)$ para cada número de teste, obtém-se:

$$\begin{aligned} f'(-2) &= -6 \cdot (-2)^2 + 4 = -20, \\ f'(0) &= -6 \cdot (0)^2 + 4 = 4, \quad e \\ f'(2) &= -6 \cdot (2)^2 + 4 = -20. \end{aligned}$$

Tabela 21 – Intervalos de crescimento e decrescimento da função $f(x) = -2x^3 + 4x$.

Intervalo	Número de teste c	$f'(c)$	Conclusão
$\left(-\infty, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$	-2	$f'(-2) = -20 < 0$	decrecente
$\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$	0	$f'(0) = 4 > 0$	crecente
$\left(\sqrt{\frac{2}{3}}, \infty\right)$	2	$f'(2) = -20 < 0$	decrecente

Fonte: Produzido pela autora.

A Tabela 21 representa melhor esses resultados.

Passo 5. Os pontos críticos são aqueles tais que $f'(x) = 0$, ou seja, para $f(x) = -2x^3 + 4x$ os pontos críticos são os ponto $x = \sqrt{\frac{2}{3}}$ e $x = -\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Analisando a Tabela 21 percebe-se que no ponto $x = -\sqrt{\frac{2}{3}}$, o gráfico de $f(x)$ muda de decrescente para crescente, logo este é um ponto de mínimo local. Sua imagem é dada por:

$$f\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \frac{-8 \cdot \sqrt{6}}{9} \approx -2,1773.$$

e no ponto $x = \sqrt{\frac{2}{3}}$ o gráfico de $f(x)$ muda de crescente para decrescente, sendo este então, um ponto de máximo local. Sua imagem é dada por:

$$f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \frac{8 \cdot \sqrt{6}}{9} \approx 2,1773.$$

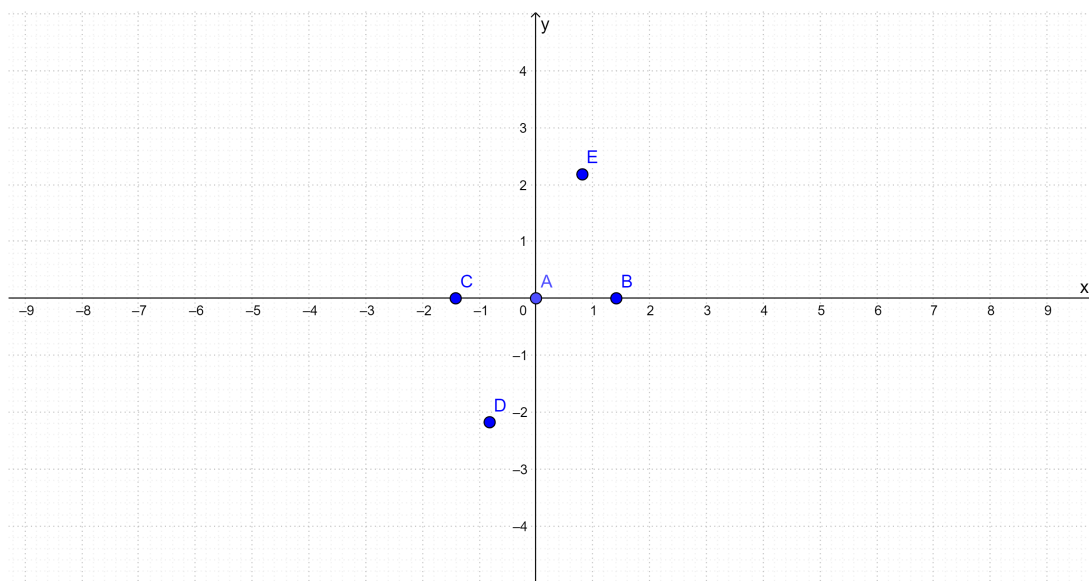
Ambos os pontos, tanto o mínimo quanto o máximo local, e suas respectivas imagens, devem ser marcados no plano cartesiano, representados por D e E aqui na Figura 64.

Passo 6. Para fazer a análise da concavidade, a segunda derivada da função $f(x)$ é encontrada:

$$f''(x) = -12x.$$

A $f''(x)$ se anula em $x = 0$. Esse ponto divide a reta real em dois intervalos: $(-\infty, 0)$ e $(0, \infty)$. Calculando o valor de $f''(x)$ para números de teste em cada um destes intervalos, tem-se os seguintes resultados, visualizados na Tabela 22.

Conclui-se que o gráfico da função $f(x) = -2x^3 + 4x$ tem concavidade para cima no intervalo $(-\infty, 0)$; e tem concavidade para baixo no intervalo $(0, \infty)$. Como o gráfico muda

Figura 64 – Máximo e mínimo local de $f(x) = -2x^3 + 4x$.

Fonte: Produzido pela autora no *software Geogebra*.

Tabela 22 – Análise da concavidade de $f(x) = -2x^3 + 4x$.

Intervalo	Número de teste c	$f''(c)$	Conclusão
$(-\infty, 0)$	-2	$f''(-2) = 24 > 0$	côncavo para cima
$(0, \infty)$	2	$f''(2) = -24 < 0$	côncavo para baixo

Fonte: Produzido pela autora.

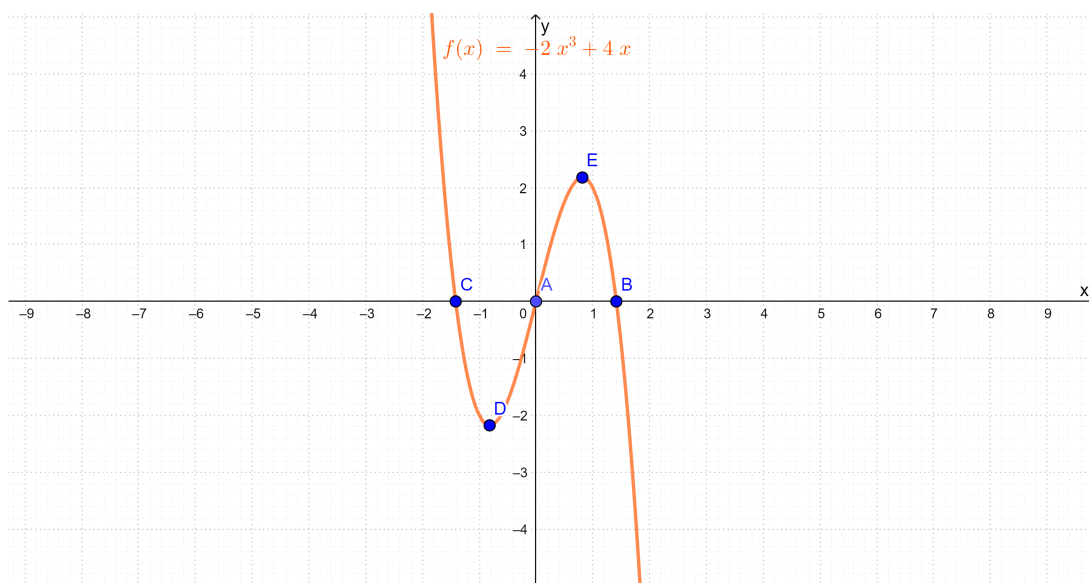
a direção de sua concavidade no ponto $x = 0$, diz-se então que este é um ponto de inflexão, já estando marcado e representado no gráfico como A .

Passo 7. Como aqui nesta função, o domínio é \mathbb{R} , deve-se analisar o comportamento da função quando x tende a infinito e quando x tende a menos infinito.

O grau da função $f(x)$ é ímpar (grau 3), então sabe-se que a função terá comportamentos diferentes quando x tende a infinito e quando x tende a menos infinito. Como o coeficiente dominante é negativo, conclui-se então que, quando x tende a infinito, a função $f(x)$ tende a menos infinito, e quando x tende a menos infinito, $f(x)$ tende a infinito.

Passo 8. Esboço do gráfico.

Com todos os pontos necessários marcados, o esboço do gráfico de $f(x)$ se dá com a curva que passa por todos esses pontos, respeitando o sentido de crescimento e decréscimo, e ainda da concavidade analisada nos passos anteriores, conforme representado na Figura 65.

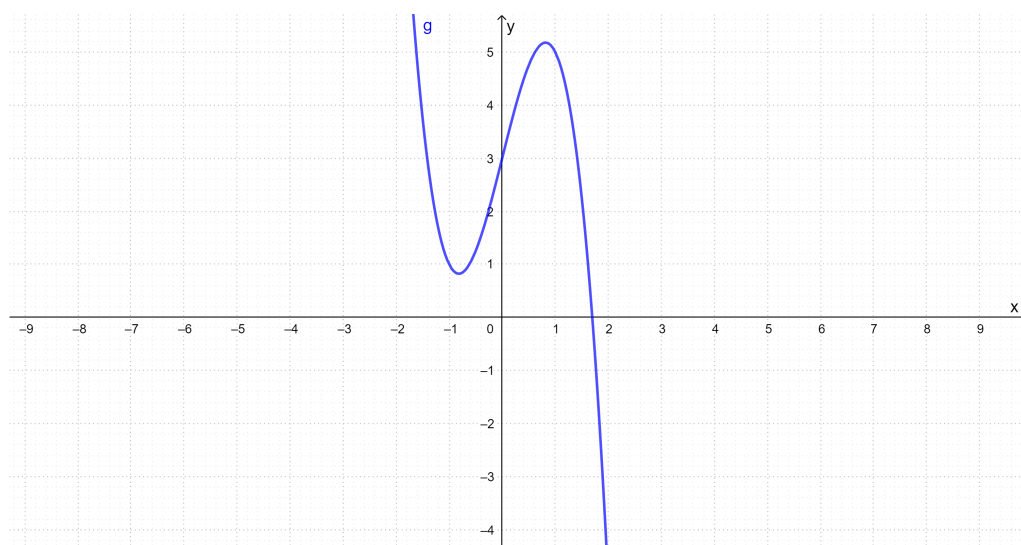
Figura 65 – Esboço de $f(x) = -2x^3 + 4x$.

Fonte: Produzido pela autora no *software Geogebra*.

3.2.12 Exemplo 12 - Análise do gráfico $g(x) = -2x^3 + 4x + 3$

Este exemplo trará uma abordagem diferente da proposta deste trabalho. Aqui, se fará uma análise de um gráfico já pronto com o intuito de observar uma característica interessante, denominada mais adiante, e que em algumas situações possa vir a contribuir com a construção de gráficos.

Seja $g(x) = -2x^3 + 4x + 3$ uma função polinomial de grau 3, cujo domínio é \mathbb{R} . Seu gráfico é visualizado a seguir na Figura 66.

Figura 66 – Gráfico de $g(x) = -2x^3 + 4x + 3$.

Fonte: Produzido pela autora no *software Geogebra*.

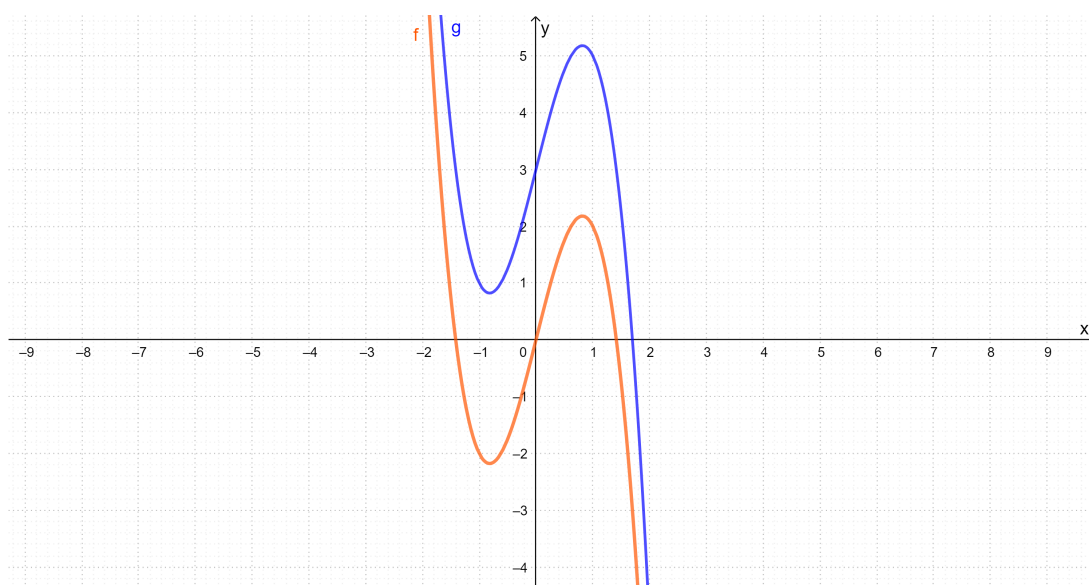
Como pode-se perceber, a função $g(x) = -2x^3 + 4x + 3$ é bem semelhante à função do exemplo anterior, $f(x) = -2x^3 + 4x$. Ou mais precisamente, a função $g(x)$ é a função $f(x)$ acrescida de “+3”. Matematicamente, pode-se expressar tal relação por:

$$g(x) = f(x) + 3.$$

Aqui, a função $g(x)$ é obtida através de operações algébricas com a função $f(x)$ (a soma de três unidades). Neste caso, as operações algébricas correspondem à transformações no gráfico chamadas de translações.

A translação de uma função é uma nova função cujo gráfico tem forma idêntica à primeira função, porém, está numa posição diferente no plano cartesiano. Assim, a translação do gráfico de uma função pode ser no sentido horizontal ou vertical. Colocando o gráfico de $g(x)$ e $f(x)$ no mesmo plano cartesiano, como visto na Figura 67, pode-se comparar e identificar a translação entre elas.

Figura 67 – Gráfico de $g(x) = -2x^3 + 4x + 3$ e $f(x) = -2x^3 + 4x$.



Fonte: Produzido pela autora no *software Geogebra*.

Como pode se observar na Figura 67 acima, o gráfico da função $g(x)$ está deslocado 3 unidades para cima (no sentido vertical) em relação ao gráfico de $f(x)$. Tal fato é facilmente visualizado quando toma-se o eixo y como referência.

De forma geral, pode-se considerar que, seja $f(x)$ uma função polinomial qualquer. O gráfico de

$$g(x) = f(x) + k, \quad k \in \mathbb{R}$$

está deslocado “ k ” unidades no eixo vertical em relação ao gráfico de $f(x)$. E o gráfico de

$$g(x) = f(x + k), \quad k \in \mathbb{R}$$

está deslocado “ $-k$ ” unidades no eixo horizontal em relação ao gráfico de $f(x)$.

4 Sugestões de abordagens de trabalho do material proposto

Admite-se que, embora o Cálculo Diferencial e Integral não faça parte do currículo de matemática do Ensino Médio, este já apresenta um currículo bastante extenso. E nesse sentido, apresenta-se nesta seção alguns sugestões de abordagens que podem ser adotadas pelos professores que queiram utilizar este material de forma parcial.

Não é necessário, portanto, que se utilize este material apenas para construções gráficas de funções polinomiais. Como o conteúdo aqui abordado ficou muito rico em detalhes, pode-se utilizá-lo de forma parcial, em situações específicas, de forma mais assertiva e pontual.

Não é a intenção apresentar um plano de ensino, mas sim oferecer caminhos (possibilidades) para se trabalhar as ferramentas apresentadas nessa dissertação. Como por exemplo, para

i) encontrar raízes de polinômios de terceiro grau:

Na Seção 1.2.3.3 é apresentado uma gama de métodos para resoluções de equações de terceiro grau, sendo que alguns ainda são poucos explorados no Ensino Médio. Ao professor, é uma possibilidade de trabalho com novos procedimentos, promovendo a curiosidade e despertando o aluno para essas relações. Junto aos métodos apresentados, a Seção conta também com pelo menos um exemplo de cada método, auxiliando no entendimento do mesmo.

ii) marcar os pontos de intersecção da função com os eixos x e y :

É apresentado os pontos de intersecção do gráfico de uma função com os eixos x e y , através do coeficiente linear e das raízes da função, respectivamente. Basicamente, segue-se o Roteiro 3.1 até o passo 3. Esse estudo permite uma melhor visualização do aluno em relação aos pontos de intersecção com o eixos e como marcá-los no plano cartesiano. Todos os exemplos deste capítulo trazem essa análise de forma bem detalhada, podendo servir como material de apoio.

iii) analisar intervalos de crescimento e decrescimento da função:

Para promover a análise dos intervalos de crescimento e decrescimento da função pode-se utilizar como base o passo 4 do Roteiro 3.1. Além dos exemplos deste capítulo que trazem este passo na construção os gráficos, há uma seção dedicada ao estudo dos intervalos de crescimento na Seção 2.3.2 e o método de análise pela primeira derivada na Seção 2.3.4.

iv) encontrar e analisar máximos e mínimos da função:

De forma análoga ao item anterior, este conteúdo pode ser abordado através deste material, com foco no passo 5 do Roteiro 3.1, além dos exemplos deste capítulo. Há também uma seção exclusiva sobre máximos e mínimos na Seção 2.3.3, e a explicação e exemplos do método pela primeira derivada na Seção 2.3.4.

v) analisar a concavidade do gráfico:

A análise da concavidade do gráfico da função pode ser trabalhada utilizando-se o passo 6 do Roteiro 3.1, ou na Seção 2.3.5, que traz conteúdo sobre concavidade e o teste da segunda derivada para fazer sua análise;

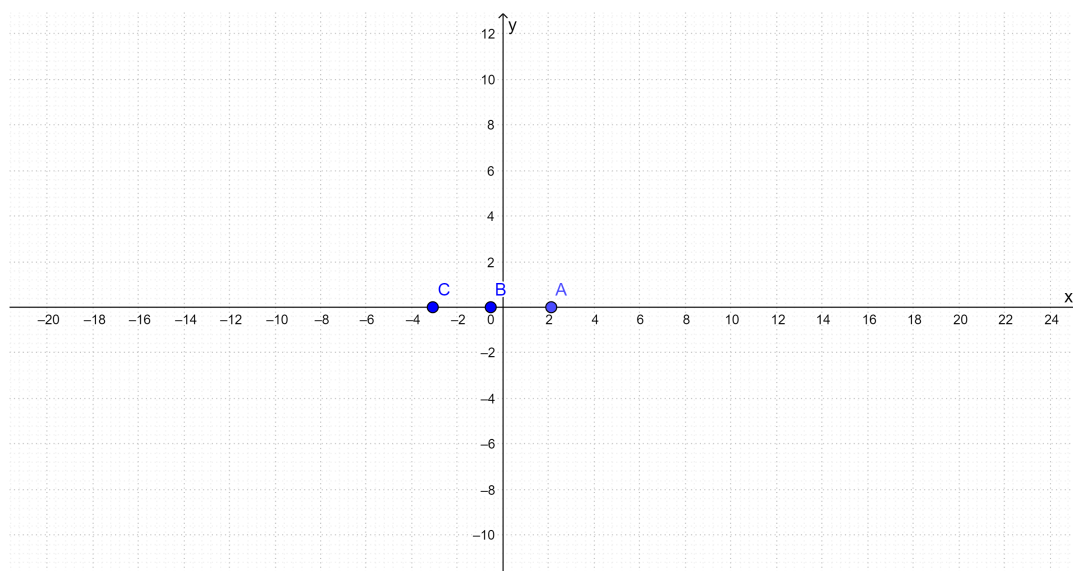
entre outras situações que os professores vierem a identificar.

Além do mais, não é necessário seguir todo o Roteiro descrito em 3.1 para fazer o esboço do gráfico. É possível focar em alguns passos e ter uma visão do que seria o gráfico, com pelo menos sua forma e algumas características importantes. Como por exemplo, focar em intervalos de crescimento e decrescimento e a partir daí, fazer o esboço do gráfico, como pode ser observado no exemplo a seguir.

Exemplo 4.0.1. *Faça o esboço do gráfico da função $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 7$.*

As raízes de $f(x)$ são $x \approx 2,1164$, $x \approx -0,5370$ e $x \approx -3,0793$. Marca-se então estes pontos sobre o eixo x do plano cartesiano, representados respectivamente por A , B e C , conforme visto na Figura 68.

Figura 68 – Raízes de $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 7$.



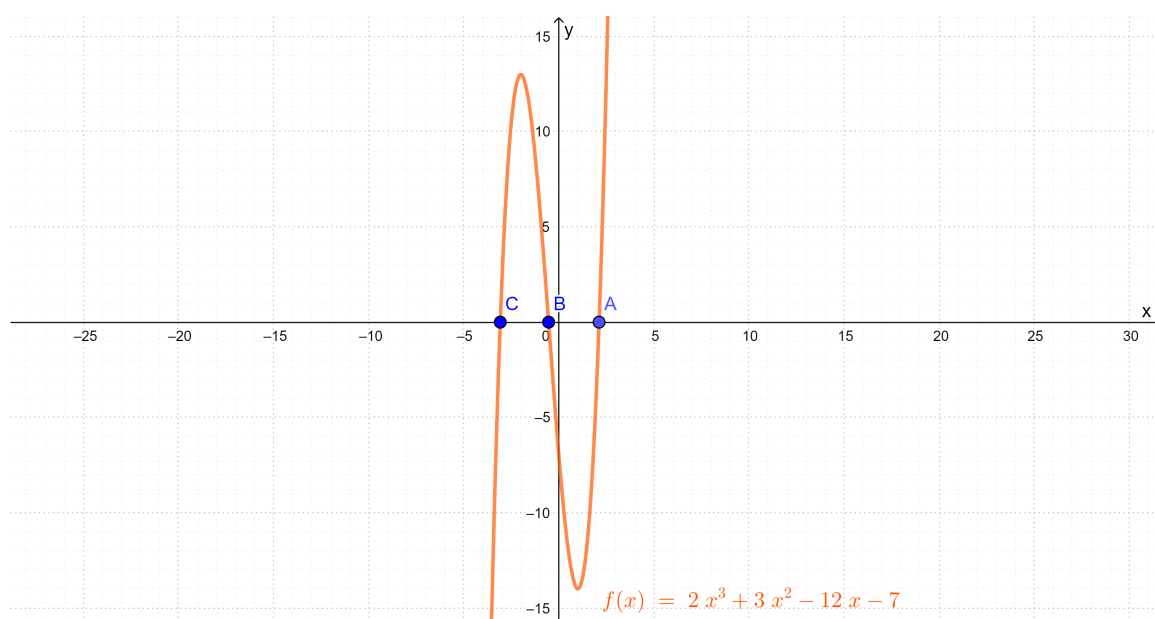
Fonte: Produzido pela autora no *software Geogebra*.

Os intervalos de crescimento ou decrescimento da função $f(x)$ foram analisados e determinados no Exemplo 2.3.1. De lá, tem-se que a função $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 7$ é crescente nos intervalos $(-\infty, -2)$ e $(1, \infty)$; e decrescente no intervalo $(-2, 1)$.

A análise dos intervalos de crescimento e decrescimento da função, já nos dá, de imediato, os pontos de máximo ou mínimo da função. Como a função muda de crescente para decrescente no ponto $x = -2$, então este é um ponto de máximo local; e como a função muda de decrescente para crescente no ponto $x = 1$, então esse é um ponto de mínimo local.

De posse dessas informações, já se consegue fazer o esboço do gráfico. É uma curva que cresce passando pelo ponto C até $x = -2$, de onde decresce passando por B até $x = 1$, crescendo novamente passando por A , como visto na Figura 69.

Figura 69 – Esboço do gráfico de $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 7$.



Fonte: Produzido pela autora no *software Geogebra*.

O exemplo descrito acima nos dá um esboço do gráfico da função, já sendo suficiente para entender as suas características e descrever seu comportamento.

Uma sugestão que deixa-se aqui aos professores, é o uso do *software Geogebra*. O *Geogebra* é um aplicativo gratuito de matemática dinâmico, que combina conceitos de geometria e álgebra. O *software Geogebra* pode ser usado em várias plataformas e também online (sem necessidade de fazer *download*). Fonte: www.geogebra.org.

O *Geogebra*, portanto, se torna uma excelente ferramenta para construção e análise de gráficos, e mais informações sobre seu uso dentro desse contexto pode ser visto em [9], por exemplo.

5 Considerações Finais

O presente trabalho teve como objetivo principal oferecer um material de apoio à professores do Ensino Médio para trabalharem o conteúdo de construções gráficas de funções polinomiais de uma forma inusual para este nível de ensino.

O método aqui apresentado, que tem como base a derivada, já é conhecido e usado no Ensino Superior nas disciplinas de Cálculo. Este trabalho, portanto, vem ao encontro à esse método, o aproximando do Ensino Médio, em uma linguagem mais simples e com exemplos mais detalhados.

Para alcançar o objetivo, este trabalho apresentou os conceitos de funções, funções polinomiais, raízes, gráficos, derivada, intervalos de crescimento e decréscimo, máximos e mínimos e concavidade, até que por fim, chegou ao método de construções gráficas, reunindo e utilizando todos estes outros conceitos apresentados.

Embora o público alvo seja professores do Ensino Médio, este trabalho se aplica também ao Ensino Superior, tanto professores quanto alunos, visto que a abordagem aqui se deu de forma esmiuçada, contando com bastantes exemplos, gráficos, notas e observações, no intuito de facilitar e promover um melhor entendimento do leitor.

E é justamente essa a grande contribuição deste trabalho: a riqueza de detalhes e informações nos exemplos, que foram cuidadosamente discriminados, desde os procedimentos mais simples até os mais complexos. Observa-se que há uma abundância de notas, informações e comentários que vão norteando o leitor ao longo das construções gráficas. Além disso, este trabalho serve como material de apoio para outros conteúdos específicos, como destacado no final do capítulo anterior.

E ainda sobre o ensino de derivadas, vale ressaltar que, apesar de não fazer parte da grade curricular, se vê grandes vantagens em trabalhá-las, sempre que possível, ainda no Ensino Médio. As derivadas são úteis não apenas nas construções gráficas, mas na compreensão de conceitos relacionados às funções, como intervalos de crescimento e decréscimo, máximos e mínimos e concavidade, e ainda podem ser trabalhadas de forma interdisciplinar com a Física, na aprendizagem da cinemática, como velocidade e aceleração.

Acredita-se que o professor que conseguir adicionar e executar pelo menos uma parte dos estudos apresentados neste trabalho em seu plano de ensino estará contribuindo fortemente com o crescimento intelectual dos seus alunos.

Conclui-se portanto, que o objetivo principal deste trabalho foi alcançado com destreza, e coloca-se esse material à disposição dos professores para que o utilizem. Deixa-se,

inclusive, como sugestão para trabalhos futuros, que se façam os planos de ensino das aulas onde o método aqui apresentado será abordado, ou até mesmo que se estenda o método aqui descrito para outras funções, além das funções polinomiais.

Referências

- 1 BOYER, C. B. *História da Matemática*. [S.l.]: São Paulo-SP: Edgar Blucher, ed. da Universidade de São Paulo, 1974. Citado 2 vezes nas páginas [12](#) e [19](#).
- 2 MOREIRA, F. B. *Uma sequência didática para o estudo de derivadas no Ensino Médio*. Dissertação (Mestrado) — Universidade de São Paulo, 2018. Citado 2 vezes nas páginas [12](#) e [13](#).
- 3 REZENDE, W. M. Funções polinomiais e o mundo digital. *Projeto Klein de Matemática*, 2016. Citado 3 vezes nas páginas [12](#), [14](#) e [22](#).
- 4 ÁVILA, G. O ensino de cálculo no segundo grau. *Revista de Professor de Matemática - Sociedade Brasileira de Matemática (SBM)*, 1991. Citado 3 vezes nas páginas [12](#), [14](#) e [15](#).
- 5 MACHADO, N. J. Cálculo diferencial e integral na escola básica: possível e necessária. *FEUSP - Seminários de Ensino de Matemática*, 2008. Citado na página [12](#).
- 6 ARAUJO, S. X. S. *Uma introdução ao estudo de derivadas no ensino médio*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal Rural do Semi-Árido, 2016. Citado na página [12](#).
- 7 FRANCA, I. d. S. Educação matemática: a história da disciplina e as contribuições da produção escolar como fonte para sua compreensão. *Congresso Nacional de Educação - EDUCERE*, 2011. Citado na página [14](#).
- 8 FREITAS, M. V. S. D. A reforma benjamin constant e a educação básica no início do século xx. *II Congresso Nacional de Educação - CONEDU*, 2015. Citado na página [14](#).
- 9 MOLON, J. *Cálculo no ensino médio: Uma abordagem possível e necessária com o auxílio do software geogebra*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Santa Maria, 2013. Citado 2 vezes nas páginas [14](#) e [136](#).
- 10 PEREIRA, V. M. C. *Cálculo no ensino médio: Uma proposta para o problema da Variabilidade*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2009. Citado na página [15](#).
- 11 STEWART, J. *Cálculo, Volume 1, 7ª edição*. [S.l.]: Editora Cengage Learning, 2013. Citado 13 vezes nas páginas [20](#), [21](#), [42](#), [45](#), [53](#), [54](#), [55](#), [59](#), [68](#), [70](#), [73](#), [78](#) e [88](#).
- 12 THOMAS, G. B. *Cálculo. 12ª Edição. ed.* [S.l.]: São Paulo-SP: PEARSON, 2009. Citado 4 vezes nas páginas [20](#), [59](#), [68](#) e [88](#).
- 13 BRADLEY, G.; HOFFMANN, L. *Cálculo: um curso moderno e suas aplicações*. [S.l.]: Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 2008. Citado 9 vezes nas páginas [20](#), [53](#), [59](#), [68](#), [71](#), [74](#), [75](#), [81](#) e [88](#).
- 14 LARSON, R. Cálculo aplicado. *Cengage Learning, São Paulo*, 2011. Citado 3 vezes nas páginas [20](#), [86](#) e [88](#).

- 15 QUEIROZ, L. F. B. d. *Construções gráficas polinomiais fazendo uso de derivadas*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Juiz de Fora, 2016. Citado na página [22](#).
- 16 NANTES, M. A. F. *Polinômios e aproximação de funções: uma abordagem da educação básica ao ensino superior*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal da Grande Dourados, 2018. Citado 2 vezes nas páginas [22](#) e [23](#).
- 17 IEZZI HYGINO H. DOMINGOS. IEZZI, G. *Álgebra moderna. Atual, São Paulo*, 2003. Citado na página [29](#).
- 18 NASCIMENTO, D. A. d. *Métodos para encontrar raízes exatas e aproximadas de funções polinomiais de até o 4º grau*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal da Paraíba, 2015. Citado na página [41](#).
- 19 COSTA, D. N. A. C. *Análise do discriminante em equações de terceiro grau a partir de funções simétricas*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Goiás, 2020. Citado na página [41](#).
- 20 SOUSA, K. d. Q. S. *Cálculo: Uma proposta possível para o ensino médio*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Mato Grosso, 2014. Citado na página [52](#).
- 21 SIMMONS, G. F. *Cálculo com Geometria Analítica*. [S.l.]: São Paulo-SP: PEARSON, 2010. Citado na página [52](#).
- 22 SILVA, E. d. N. *Um introdução ao estudo das derivadas no Ensino Médio*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal Rural do Semi-árido, 2016. Citado 2 vezes nas páginas [52](#) e [70](#).
- 23 NEVES, P. d. T. S. *Introdução ao ensino do cálculo e aplicações da derivada no ensino médio*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Amapá, 2016. Citado na página [53](#).
- 24 BIANO, A. d. A. *O esboço de gráficos de 2º e 3º graus usando derivadas*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Mato Grosso, 2015. Citado 3 vezes nas páginas [53](#), [57](#) e [89](#).
- 25 GUIDORIZZI, H. L. *Um curso de cálculo: volume 1. Rio de Janeiro. LTC—Livros Técnicos e Científicos. 5ª edição*, 2001. Citado na página [72](#).
- 26 BARBOSA, J. L. *Uma nova técnica para o ensino de gráfico de funções*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de São João del-Rei, 2020. Citado na página [89](#).