UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CAMPUS BLUMENAU
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

Maria Cláudia Schmitt Araujo

Uma discussão formal sobre frações na Educação Básica

Blumenau
2021

Maria Cláudia Schmitt Araujo

Uma discussão formal sobre frações na Educação Básica

Dissertação submetida ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do título de Mestra em Matemática.
Orientador: Prof. Luiz Rafael dos Santos, Dr.

Blumenau
2021

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Araujo, Maria Cláudia Schmitt
Uma discussão formal sobre frações na Educação Básica / Maria Cláudia Schmitt Araujo ; orientador, Luiz Rafael dos Santos, 2021.
84 p.

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Federal de Santa Catarina, Campus Blumenau, Programa de Pós Graduação em Matemática, Blumenau, 2021.

Inclui referências.

1. Matemática. 2. Ensino de Frações. 3. Definições formais. 4. Educação Básica . I. Santos, Luiz Rafael dos. II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós Graduação em Matemática. III. Título.

Maria Cláudia Schmitt Araujo

Uma discussão formal sobre frações na Educação Básica

O presente trabalho em nível de Mestrado foi avaliado e aprovado por banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. André Vanderlinde da Silva, Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina

Profa. Louise Reips, Dra.
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Junior Cesar Alves Soares, Dr.
Universidade do Estado do Mato Grosso

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de Mestra em Matemática.

ICP-Edu
Documento assinado digitalmente
Marcio de Jesus Soares
Data: 16/08/2021 11:45:35-0300
CPF: 270.670.858-10
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Prof. Márcio de Jesus Soares, Dr.
Coordenador do Programa

GOV.BR
Documento assinado digitalmente
Luiz Rafael dos Santos
Data: 16/08/2021 10:48:33-0300
CPF: 034.737.869-26
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Prof. Luiz Rafael dos Santos, Dr.
Orientador

Blumenau, 2021.

Este trabalho é dedicado à minha família e aos meus parceiros de Mestrado.

AGRADECIMENTOS

Sempre aprendi que devemos ser gratos por tudo que acontece em nossas vidas; tudo tem uma razão de ser. Além disso, todas as pessoas passam pela nossa vida por algum motivo.

Sou grata à minha família, especialmente meu pai e minha mãe, por sempre acreditarem em mim e nos meus sonhos.

Sou grata aos amigos que cruzaram meu caminho. Alguns desde o início, outros a pouco tempo, mas todos marcaram essa trajetória me incentivando e me encorajando.

Sou grata às escolas em que trabalho ou tive a alegria em trabalhar. Todas fazem parte da minha formação como educadora e foram entusiastas deste processo.

Sou grata aos meus super parceiros do mestrado, guerreiros de todas as sextas-ferias e desses meses de dedicação às inúmeras aulas on-line juntamente com a produção desta dissertação.

Sou grata aos professores que nos ensinaram tanto nos dois anos de aulas, especialmente ao meu orientador, Luiz Rafael. Por não ter desistido de mim e por me fazer acreditar que daria certo, mesmo quando eu mesma já não acreditava mais.

Sou grata a Deus, por mesmo nas adversidades me mostrar que vale a luta e o caminho.

"They have to teach something, they can't just teach."
(Hung-Hsi Wu, 2014)

RESUMO

Este trabalho visa fazer uma discussão formal a respeito do ensino de frações no Ensino Fundamental – Anos Finais. Para tanto, frações são precisamente definidas com a utilização de pressupostos geométricos. Além disso, resultados importantes relacionados a frações, bem como às suas quatro operações básicas são enunciados e derivados. Com base nestes argumentos, em conjunto com as habilidades de matemática propostas pela Base Nacional Comum Curricular, alguns livros didáticos de Matemática de 5º, 6º e 7º anos são analisados e apreciados. Finalmente, é proposta uma sequência didática para o ensino de frações no 6º ano que tem como base as reflexões levantadas nesta dissertação. A sequência proposta utiliza o Tangram, um quebra cabeça milenar Chinês.

Palavras-chave: Ensino de frações. Definições formais. Ensino Fundamental. Sequência didática.

ABSTRACT

This work aims to produce a formal discussion about the teaching of fractions in Brazilian Elementary School – Final Years. The concept of fractions is precisely defined by means of geometric axioms. Moreover, important results related to fractions, as well as its four basic operation are stated and derived. Based on these arguments, in combination with mathematical skills proposed by the *Base Nacional Comum Curricular*, a few 5th, 6th and 7th grade Math textbooks are reviewed and appreciated. Finally, a didactic sequence for the teaching of fractions in the 6th grade is proposed, based on the questions raised in this dissertation. In this didactic sequence, we make use of the Tangram, an ancient Chinese puzzle.
Keywords: Teaching of fractions. Formal definitions. Elementary School. Didactic sequence.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Há muito tempo a Matemática vem sendo apontada como a "Bruxa" do período escolar e por isso, muitos professores encaram novas batalhas a cada ano para desmistificar esse pensamento e auxiliar seus alunos da melhor maneira possível. Um dos conteúdos que mais causa esse sentimento é o de Frações. Isso não causa nenhuma estranheza, visto que é um dos primeiros contatos com a abstração e, consequentemente, a busca pelo concreto acarreta um conflito de definições, intensificando o problema em questão.

Neste trabalho, as frações serão consideradas *números* que serão apresentados a partir da ideia de *reta numérica*, uma reta tal que cada um de seus pontos está biunivocamente identificado com um número (veja Axioma B.6).

Em muitos livros didáticos do Ensino Básico temos a apresentação dos números racionais da seguinte forma:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}.$$

Assim, os números racionais seriam as frações cujos numeradores e denominadores são inteiros e os denominadores sejam não nulos. Entretanto, geralmente, não há a discussão formal do conceito de fração.

Também é bastante comum no ensino escolar, associarmos uma fração a um pedaço de uma pizza ou bolo. Entretanto, tal pensamento nos leva a questionar, será que isso é suficiente para bem definirmos uma fração? Por exemplo, se quisermos computar $\frac{2}{3}$ de 55 km, qual é a relação disto com pizzas ou bolos?

A discussão sobre frações, proposta pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC), considera três significados distintos para frações (BRASIL, 2017):

1. PARTE-TODO: $\frac{2}{3}$ significa que o todo foi particionado em 3 partes iguais e foram tomadas 2 delas.

2. QUOCIENTE: $\frac{2}{3}$ é o quociente $2 \div 3$. Podemos pensar em duas bolachas para dividir entre 3 pessoas. Dividimos cada bolacha em $\frac{1}{3}$ e, logo, cada pessoa ganhará $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ da bolacha. Portanto, $2 \div 3 = \frac{2}{3}$.

3. RAZÃO: $\frac{2}{3}$ representa uma razão. Por exemplo, podemos ter em uma sala de aula, uma razão de 2 meninas para cada 3 meninos.

No livro Understanding numbers in elementary school mathematics (2011), Hung-Hsi Wu aborda o problema das frações e comenta que esses significados não são satisfatórios do ponto de vista matemático, pois não podemos definir precisamente frações através de três conceitos diferentes. Imagine que algum químico descreva uma nova substância dizendo apenas que é dura como o aço, leve como o ar e transparente como o vidro. Certamente soaria estranho, para dizer pouco. Além disso, a operação $a \div b$ só faz sentido para números inteiros se a for múltiplo de b. Ademais, alunos e alunas dos anos iniciais não sabem ainda o que de fato $2 \div 3$ significa. Desta forma, alguns autores acreditam que "definir $2 \div 3$ como $\frac{2}{3}$ é matematicamente ilegítimo e pedagogicamente desastroso" (WU, 2011, p. 178).

Mas quem é Hung-Hsi Wu? O professor Wu é um geômetra diferencial por profissão. Ele ensinou na Universidade Berkeley da Califórnia, Estados Unidos, entre os anos de 1965 e 2009, e hoje é Professor Emérito desta mesma instituição. Foi também um dos percursores da Reforma Educacional Americana, principalmente nas propostas feitas no estado da Califórnia. A partir de 1998, ele começou a trabalhar ativamente na proposição de políticas educacionais, inicialmente como um crítico e, após, como membro de vários comitês estaduais e nacionais. Foram muitos textos voltados para professores da educação básica, principalmente na formação destes professores. Sua luta é pela formação correta dos professores de Matemática[1]. Ele afirma que as universidades que formam professores de Matemática devem ensinar o que os professores precisam aprender e não o que a universidade tem a oferecer. Por seu histórico, o professor Wu foi um grande inspirador deste trabalho tanto que a obra Understanding numbers in elementary school mathematics (2011) serviu como base para repensarmos o modo como frações são ensinadas no Ensino Fundamental em nosso sistema educacional. Estas reflexões são as origens que nos levaram a proceder com a pesquisa que resultou nesta dissertação.

Com efeito, este trabalho tem por objetivo geral definir formalmente frações e derivar resultados que garantam a validade das operações básicas de frações contribuindo para estabelecer fundamentos que auxiliem o processo de ensino-aprendizagem de frações na Educação Básica.

Para alcançar tal fim, propomos os seguintes objetivos específicos:

- Definir precisamente frações, através de axiomas de geometria, como um ponto na reta dos números.
- Enunciar e demonstrar resultados que caracterizam frações e suas quatro operações básicas: adição, subtração, multiplicação e divisão.
- Comparar e discutir uma definição formal de frações em contraste com os conceitos de fração apresentados na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e em livros didáticos usados no Brasil e no exterior.
- Elaborar atividades didáticas que contemplem o conceito de frações e algumas de suas operações.

Esta dissertação se divide da seguinte forma: No Capítulo 2 apresentamos a definição precisa de fração escolhida para este trabalho, bem como demonstramos e discutimos

[1] No Apêndice A fizemos um breve histórico sobra as mudanças propostas pelo professor Wu para o ensino da Matemática no estado da Califórnia.

resultados obtidos a partir desta definição. No Capítulo 3 fazemos uma análise comparativa de alguns livros didáticos do Ensino Fundamental - Anos Finais em relação aos conceitos desenvolvidos no Capítulo 2. Alguns pontos da última versão da BNCC (BRASIL, 2017) em relação às habilidades correspondentes ao ensino de frações também são comentados neste capítulo. Na sequência, o Capítulo 4 traz uma proposta de sequência didática para o ensino de frações no 6º ano do Ensino Fundamental, com o uso de Tangram. Por fim, apresentamos nossas considerações finais no Capítulo 5.

2 UMA DEFINIÇÃO FORMAL DE FRAÇÃO E SUAS OPERAÇÕES

Como dito no capítulo anterior, durante os meus anos na docência, percebi que as Frações têm sido tratadas como uma das grandes vilãs na Matemática Escolar. Como contraponto, nesta dissertação, propomos atividades para seu ensino com uma abordagem de frações fortemente baseada em uma noção formal. Para tanto, neste capítulo expomos uma definição formal de frações, bem como construímos as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão de frações com base nesta definição. Demonstramos resultados importantes, que muitas vezes são subtraídos dos livros didáticos. Este capítulo é escrito com base na livro Understanding numbers in elementary school mathematics (2011).

Para bem definir as frações, assim como derivar as propriedades aritméticas e algébricas necessárias para operarmos com frações, vamos nos utilizar de axiomas e definições de geometria Euclidiana. O Apêndice B apresenta os resultados geométricos que são necessários para boa compreensão deste capítulo.

Como vimos, a proposta deste trabalho é definir os números como pontos em uma reta numérica. Para tanto, consideraremos neste capítulo k, ℓ, m, n inteiros não-negativos (denotado por $\mathbb{Z}^+$). Utilizaremos números inteiros não-negativos, pois é necessário começar pelo 0. Relembremos o conceito de ordem nos inteiros. Dizemos que $m < n$ (lê-se m menor que n) se m estiver à esquerda de n na reta numérica. Usaremos a notação $m \leq n$ para denotar a afirmação $m < n$ *ou* $m = n$. Além disso, o número inteiro 1 está identificado com o segmento $[0, 1]$, já que $[0, 1]$ é o *segmento unitário* por excelência (Veja Definição B.3). Uma representação destas identificações encontra-se na Figura 1.

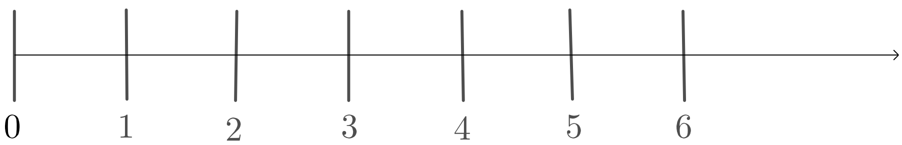


Figura 1 – Reta numérica.[1]

[1] As figuras deste trabalho que não possuem indicação de fonte, foram elaboradas pela autora desta dissertação.

Com isto, podemos introduzir a ideia de fração. Por exemplo, dizemos que $\frac{1}{3}$ é o número associado ao ponto da reta numérica correspondente ao extremo à direita do primeiro segmento que divide o segmento $[0,1]$ em 3 partes iguais. A Figura 2 ilustra este ponto. Além disso, como $\frac{1}{3}$ é o primeiro ponto da divisão de $[0,1]$ à direita de 0, $\frac{2}{3}$ será o segundo, $\ldots$, $\frac{m}{3}$ será o m-ésimo ponto da divisão e assim por diante. Veremos, com efeito, que cada $\frac{k}{3}$ é um múltiplo de $\frac{1}{3}$, para todo k inteiro não-negativo. Esta ideia é formalmente apresentada a seguir.

Figura 2 – Representação de $\dfrac{1}{3}$

Definição 2.1 (Fração)**.** Sejam k, ℓ inteiros não-negativos, $\ell > 0$. Suponha que cada segmento $[0,1],[1,2],[2,3],\ldots$ da reta seja dividido em ℓ segmentos de igual tamanho. Estes pontos de divisão em conjunto com os números inteiros formam uma sequência infinita de pontos igualmente espaçados entre si na reta numérica. O primeiro ponto à direita de 0 é $\frac{1}{\ell}$, o segundo $\frac{2}{\ell}$, o terceiro $\frac{3}{\ell}$, e assim sucessivamente, tal que o k-ésimo ponto é $\frac{k}{\ell}$. A coleção de todos os números biunivocamente associados aos pontos $\frac{k}{\ell}$, para todo $k, \ell \in \mathbb{Z}^+$ e $\ell > 0$ é chamada de *conjunto das frações*.

Note que o conjunto das frações refere-se ao conjunto dos números racionais não-negativos. A construção de todos os números racionais não será trabalhada aqui, isto é, trataremos frações apenas olhando para o lado direito da reta numérica. Uma construção axiomática diferente da utilizada nesta dissertação e que engloba todos os números racionais pode ser vista nos livros do professor Elon Lages Lima (2013, 2019).

Dada uma fração $\frac{k}{\ell}$, chamamos o número k de *numerador* e o número ℓ de *denominador*. Note que pela definição acima, k, ℓ são inteiros, logo, não faz sentido considerarmos os números $\frac{\sqrt{2}}{3}$ e $\frac{1}{\sqrt{3}}$ frações, pois nesse caso, temos números irracionais como *numerador* ou *denominador*.

Como vimos, existe uma ordem entre os números inteiros. Seria possível definir uma relação de ordem entre as frações? Afirmamos que é possível e o faremos a seguir.

Considere primeiramente as frações $\frac{1}{\ell}$ e $\frac{1}{n}$, tal que $\ell > n$. Ao dividirmos o segmento de reta $[0,1]$ em ℓ segmentos de tamanho $\frac{1}{\ell}$ e também dividirmos este mesmo segmento em n segmentos de tamanho $\frac{1}{n}$, teremos uma quantidade maior de segmentos múltiplos $\frac{1}{\ell}$ do que de $\frac{1}{n}$. Consequentemente, o segmento representado por $\frac{1}{\ell}$ tem tamanho menor do que o representado por $\frac{1}{n}$. Naturalmente então, estabelecemos uma ordem entre estas frações, isto é, $\frac{1}{\ell} < \frac{1}{n}$. O mesmo raciocínio pode ser feito para qualquer segmento $[0,k], k \in \mathbb{Z}$.

Desta forma, temos como estabelecer, com base na ordem dos números inteiros. a seguinte ordem para frações com mesmo numerador e denominadores diferentes:

$$\frac{k}{\ell} < \frac{k}{n}, \text{ sempre que } \ell > n. \tag{1}$$

Para que possamos estabelecer a relação de ordem de frações para quaisquer duas frações, vamos precisar do conceito de frações equivalentes.

2.1 FRAÇÕES EQUIVALENTES

É comum encontrarmos nos livros didáticos uma definição para frações equivalentes como frações diferentes, mas que representam a mesma parte do todo (Veja **p.176**; Centurión, Teixeira e Rodrigues (2019)). Porém, como estamos ressaltando a importância de conceitos formais, é contraditório aceitar uma definição tão vaga.

Observação 2.2. No capítulo 3 faremos uma comparação entre as definições apresentadas por alguns livros didáticos e as consideradas neste capítulo. Doravante, ao nos referirmos a *livros didáticos* de maneira geral, consideramos o conjunto de livros tratados naquele capítulo.

Como, neste texto, as frações são números associados a pontos na reta numérica, definiremos frações equivalentes usando este pressuposto.

Definição 2.3 (Frações equivalentes)**.** A igualdade $\frac{k}{\ell} = \frac{m}{n}$ significa que os símbolos $\frac{k}{\ell}$ e $\frac{m}{n}$ representam o mesmo ponto, isto é, a mesma fração na reta numérica. Quando isto ocorre, dizemos que $\frac{k}{\ell}$ e $\frac{m}{n}$ são *frações equivalentes.*

Comumente, mesmo que $\frac{k}{\ell}$ e $\frac{m}{n}$ representem a mesma fração, entendida como ponto na reta numérica, estas são tratadas como se fossem frações "diferentes". Então, por abuso de linguagem, dizemos "$\frac{k}{\ell}$ e $\frac{m}{n}$ *são frações equivalentes*". Por isso, talvez a terminologia mais adequada seria *símbolos fracionários equivalentes.* Todavia, seguiremos utilizando a terminologia usual. (WU, 2011, p. 197)

A principal questão que temos aqui é: como identificar se duas frações são de fato equivalentes? No estudo de frações, os alunos do Ensino Fundamental aprendem que, dada uma fração, por exemplo, $\frac{2}{6}$, podemos obter uma fração equivalente multiplicando numerador e denominador desta fração pelo mesmo número, desde que seja um inteiro não-negativo. De fato, em geral, isso é apresentado da seguinte forma

$$\frac{2^{(\times 2)}}{6^{(\times 2)}} = \frac{4}{12} \text{ ou então } \frac{2}{6} = \frac{1^{(\times 2)}}{3^{(\times 2)}}. \tag{2}$$

Neste caso, o expoente $^{(\times 2)}$ representa que estamos multiplicando o numerador e o denominador da fração por 2.

Este procedimento responde de maneira satisfatória a questão da identificação. Entretanto, é necessário apresentar a razão para que este procedimento seja válido. Para tal usaremos o teorema abaixo, conhecido como *Lei do Cancelamento*.

Teorema 2.4 (Lei do Cancelamento)**.** *Dadas duas frações* $\frac{m}{n}$ *e* $\frac{k}{\ell}$*, suponha que exista um inteiro positivo* c*, tal que* $k = c \times m$ *e* $\ell = c \times n$*. Então,*

$$\frac{m}{n} = \frac{c \times m}{c \times n} = \frac{k}{\ell}. \tag{3}$$

Note que (3) justifica o procedimento representado em (2), com $c = 2$. Vamos agora à demonstração do teorema.

Demonstração. Considere as frações $\frac{m}{n}$ e $\frac{k}{\ell}$, tal que $k = c \times m$, $\ell = c \times n$ para algum c inteiro não negativo. Pela definição de frações, temos que $\frac{m}{n}$ representa m cópias de $\frac{1}{n}$ e queremos provar que também representa $c \times m$ cópias de $\frac{1}{c \times n}$.

Na reta numérica, considere primeiro todos os múltiplos de $\frac{1}{n}$, isto é $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \ldots$ e então todos os múltiplos de $\frac{1}{c \times n}$, isto é $\frac{1}{c \times n}, \frac{2}{c \times n}, \frac{3}{c \times n}, \ldots$. Observe que cada segmento, dentre os múltiplos consecutivos de $\frac{1}{n}$, tem comprimento $\frac{1}{n}$ e, analogamente, cada segmento tem comprimento $\frac{1}{c \times n}$.

Usando (1), obtemos $\frac{1}{c \times n} \leq \frac{1}{n}$, uma vez que $c \times n \geq n$. Então, para cada segmento situado entre os múltiplos consecutivos de $\frac{1}{n}$, os segmentos de tamanho $\frac{1}{c \times n}$ dividem-no em c partes iguais, isto é, cada segmento entre os múltiplos consecutivos de $\frac{1}{n}$ é a concatenação dos c segmentos de comprimento $\frac{1}{c \times n}$. Desta forma, $\frac{1}{n}$ é constituído de c cópias de $\frac{1}{c \times n}$. Como $\frac{m}{n}$ é m cópias de $\frac{1}{n}$ e $\frac{1}{n}$ é c cópias de $\frac{1}{c \times n}$, segue que $\frac{m}{n}$ é $c \times m$ cópias de $\frac{1}{c \times n}$. Assim, como $\frac{c \times m}{c \times n}$ é $c \times m$ cópias de $\frac{1}{c \times n}$, temos que $\frac{m}{n} = \frac{c \times m}{c \times n}$. Finalmente, $\frac{m}{n} = \frac{k}{\ell}$. □

Nos livros didáticos, temos o termo "Lei do Cancelamento" apenas naqueles indicados ao sétimo ano do Ensino Fundamental, no momento em que inicia-se as operações de multiplicação e divisão de frações. Tal assunto é compreendido como uma maneira de simplificar a as frações antes de resolver as operações. Porém, a ideia de fração equivalente é introduzida nos livros de quinto ano, quando utiliza-se apenas a definição informal falada acima.

Argumentamos que seria possível (e talvez necessário) introduzir a ideia da *Lei do Cancelamento* em conjunto com a ideia de *Frações Equivalentes*, para que faça realmente sentido e siga a lógica das definições formais. Além disso, nos livros didáticos, é comum que a apresentação da Frações Equivalentes utilize áreas de retângulos, sem falar explicitamente em área. É o clássico exemplo de dividir o retângulo em partes iguais. Na realidade, implicitamente, utiliza-se a área de uma unidade. Tome como exemplo um quadrado de área 1. A fração $\frac{5}{2}$ pode ser representada como a área de 5 meios quadrados, conforme a região hachurada da Figura 3. O uso de áreas relacionadas à Frações é abordado neste capítulo, quando da definição de multiplicação de frações.

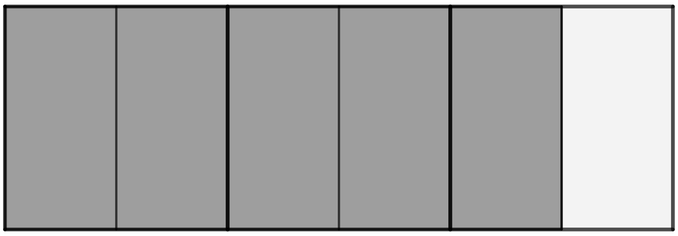


Figura 3 – Representação de $\dfrac{5}{2}$

Sabendo que $15 = 3 \times 5$ e $6 = 3 \times 2$, considerando o mesmo quadrado de área 1, podemos dividir agora cada unidade de área horizontalmente em três partes iguais, tendo então seis pequenos retângulos congruentes em cada unidade de área.

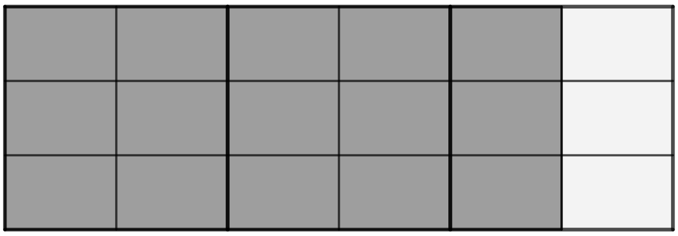


Figura 4 – Representação de $\dfrac{15}{6}$

Agora, vemos que esta nova região hachurada, representada pela Figura 4, consiste em $3 \times 5 = 15$ pequenos retângulos, todos congruentes entre si. Por outro lado, seis desses retângulos formam uma unidade de área, então, temos que a área do retângulo pequeno é $\frac{1}{6}$ e a área da região sombreada é $\frac{15}{6}$. Segue, por fim, que $\frac{15}{6} = \frac{5}{2}$.

Fato fundamental para Frações Equivalentes (FFFE)

Pela perspectiva do desenvolvimento conceitual de frações, a essência do Teorema 2.4 é que, dadas duas frações quaisquer, podemos utilizar o símbolo de igualdade, ou seja, são representadas como frações equivalentes, utilizando o mesmo denominador. Este fato também é conhecido como *Fato fundamental para Frações Equivalentes*, que veremos na forma do próximo corolário, uma vez que é uma aplicação direta do Teorema 2.4.

Corolário 2.5 (Fato Fundamental para Frações Equivalentes (FFFE))**.** *Quaisquer duas frações podem ser denotadas pelo símbolo de frações que possuem o mesmo denominador. Formalmente, dadas as frações* $\frac{k}{\ell}$ *e* $\frac{m}{n}$*, em que* k, ℓ, m, n *são inteiros não-negativos, então tais frações são iguais a* $\frac{k \times n}{\ell \times n}$ *a* $\frac{\ell \times m}{\ell \times n}$*, respectivamente.*

Então, ao invés de utilizar $\frac{4}{3}$ e $\frac{9}{7}$, podemos utilizar $\frac{28}{21}$ e $\frac{27}{21}$ para representar essas frações, com a vantagem de terem o mesmo denominador 21. Em muitas situações, ter uma alternativa de representação como essa é uma recurso decisivo.

Finalmente, podemos estabelecer a relação de ordem entre duas frações quaisquer. Vimos que a fração $\frac{4}{3}$ é o vigésimo oitavo múltiplo de $\frac{1}{21}$ e que estará à direita de $\frac{9}{7}$ na reta numérica, que por sua vez, é o vigésimo sétimo múltiplo de $\frac{1}{21}$. Por definição, então, temos que $\frac{9}{7} < \frac{4}{3}$. Sem o uso do FFFE, esta desigualdade não é tão facilmente verificável.

Uma outra propriedade importante é a que relaciona frações equivalentes com o produto cruzado entre os respectivos numeradores e denominadores. É comum estabelecermos que como $6 \times 24 = 9 \times 16$ então deveríamos ter $\frac{6}{9} = \frac{16}{24}$. Mas como essa multiplicação cruzada surge? Qual é o argumento formal que permite afirmamos que as frações são, de fato, iguais?

Para responder essas questões, primeiro observe que a igualdade $\frac{6}{9} = \frac{16}{24}$ diz que *seis* cópias de $\frac{1}{9}$ são iguais a *dezesseis* cópias de $\frac{1}{24}$. Isso não é intuitivo. Note que, pelo FFFE, sabemos como reescrever as frações, utilizando um mesmo denominador, ou seja, $\frac{6}{9} = \frac{24 \times 6}{24 \times 9}$ e $\frac{16}{24} = \frac{9 \times 16}{9 \times 24}$. Agora, vemos que os produtos 6×24 e 16×9 surgem naturalmente e também o porquê de os produtos serem iguais. Vamos provar este resultado, em geral.

Teorema 2.6 (Algoritmo da multiplicação cruzada)**.** *Dadas duas frações* $\frac{m}{n}$ *e* $\frac{k}{\ell}$*, então,*

$$\frac{m}{n} = \frac{k}{\ell} \text{ se, e somente se, } m \times \ell = n \times k \tag{4}$$

Demonstração. Suponha que $\frac{m}{n} = \frac{k}{\ell}$. Pelo FFFE podemos reescrever as frações como $\frac{m \times \ell}{n \times \ell} = \frac{n \times k}{n \times \ell}$. Então, o $m \times \ell$-ésimo múltiplo de $\frac{1}{n \times \ell}$ é igual ao $n \times k$-ésimo múltiplo da mesma fração $\frac{1}{n \times \ell}$. Isso é possível somente se $m \times \ell = n \times k$.

Por outro lado, suponha que $m \times \ell = n \times k$. Então, $\frac{m \times \ell}{n \times \ell} = \frac{n \times k}{n \times \ell}$ pela propriedade da divisão da igualdade. Pelo Teorema 2.4, o lado direito será $\frac{m}{n}$ e o lado esquerdo será $\frac{k}{\ell}$, logo, segue que $\frac{m}{n} = \frac{k}{\ell}$. □

O Algoritmo da multiplicação cruzada é um algoritmo básico no estudo das frações, assim como os algoritmos Euclidiano e Euclidiano estendido. Tal algoritmo é frequentemente utilizado apenas como uma habilidade mecânica, sem explicação ou raciocínio do motivo pelo qual ele está bem definido e logo, porque funciona. Atualmente é encontrado apenas em livros didáticos indicados ao sétimo ano, dentro do conteúdo de razão e proporção.

Sob nossa perspectiva, no entanto, dadas as relações discutidas até aqui, tal ideia já poderia ser introduzida a estudantes de quinto ano, momento no qual eles têm o primeiro contato com frações equivalentes.

Um questionamento relacionado ao uso do Algoritmo da multiplicação cruzada e sua justificativa é se seria apropriado apresentar o FFFE aos alunos logo no primeiro contato com frações equivalentes?

A ideia básica por trás do FFFE é permitir comparar quaisquer duas frações através de uma desigualdade, isto é, permitir ordená-las. Por exemplo, sejam as frações $\frac{4}{3}$ e $\frac{3}{5}$ e suponha que queremos saber qual das duas é a maior. Por definição, sabemos que $\frac{4}{7}$ é quatro cópias de $\frac{1}{7}$ e $\frac{3}{5}$ é três cópias de $\frac{1}{5}$, o que não facilita muito a tarefa da comparação, pois $\frac{1}{7}$ e $\frac{1}{5}$ representam unidades diferentes.

Agora, imagine que sabemos que $\frac{4}{7}$ são vinte cópias de $\frac{1}{35}$ e $\frac{3}{5}$ são vinte e uma cópias de $\frac{1}{35}$. Então, conseguimos imediatamente ver que $\frac{4}{7}$ está à esquerda de $\frac{3}{5}$ pois, considerando os múltiplos de $\frac{1}{35}$, $\frac{4}{7}$ é um múltiplo a menos que $\frac{3}{5}$ e, portanto, está à esquerda de $\frac{3}{5}$. Isso sugere que, se pudermos expressar $\frac{1}{7}$ e $\frac{1}{5}$ em termos da mesma unidade, então o trabalho está feito.

A principal justificativa para o FFFE é justamente preencher essa necessidade de mostrar o que se diz a respeito das frações $\frac{1}{7}$ e $\frac{1}{5}$:

$$\frac{1}{7} \text{ é o quinto múltiplo de } \frac{1}{35}. \tag{5}$$
$$\frac{1}{5} \text{ é o sétimo múltiplo de } \frac{1}{35}. \tag{6}$$

Portanto, $\frac{1}{35}$ é a unidade comum que procuramos. Desta perspectiva entendemos agora porque $\frac{4}{7}$ é vinte cópias de $\frac{1}{35}$ e $\frac{3}{5}$ é vinte e uma cópias de $\frac{1}{35}$.

A ideia de obter uma unidade comum para duas quantidades diferentes é bastante razoável. Por exemplo, considere que queremos descobrir qual distância é maior: 3500 jardas ou 3,2 quilômetros. Claramente precisamos expressar as duas distâncias na mesma unidade de medida. Se 1 jarda é equivalente a 0,9144 metros e 1 quilômetro é equivalente a 1000 metros, então

$$3500 \text{ jardas} = 3200{,}4 \text{ metros e} \tag{7}$$
$$3{,}2 \text{ quilômetros} = 3200 \text{ metros.} \tag{8}$$

Com isso, concluímos que 3500 jardas é maior que 3,2 quilômetros. Esse tipo de raciocínio não difere fundamentalmente do FFFE. A partir do FFFE podemos, então, estabelecer a relação de ordem entre as frações.

2.2 RELAÇÃO DE ORDEM ENTRE FRAÇÕES

Com o algoritmo da multiplicação cruzada dado no Teorema 2.6 conseguimos verificar quando duas frações são equivalentes. Agora, vamos estender esse algoritmo para saber quando uma fração é maior que a outra, estabelecendo a relação de ordem das frações.

Nada obstante, consideramos as frações como pontos da reta numérica. Logo, a ordem estabelecida será *geométrica* e é dada na próxima definição.

Definição 2.7 (Relação de ordem entre frações)**.** Uma fração A *é menor que* uma fração B se A está à esquerda de B como pontos da reta numérica. Denotaremos este fato por $A < B$.

A definição acima é possível uma vez que afirmar que $A < B$ corresponde a alegar que o segmento $[0, A]$ é menor que o segmento $[0, B]$. Com isso, na sequência demonstramos as condições (algébricas) para estabelecer a relação de ordem entre as frações.

Segue diretamente da Definição 2.13 acima que 0 está à esquerda de toda fração não-nula A, isto é, $0 < A$. Além disso, continuam válidas para as frações os seguintes dois fatos que são válidos para os números inteiros:

- *Transitividade*: Se A, B, C são frações tal que $A < B$ e $B < C$, então $A < C$.
- *Tricotomia*: Dadas duas frações A e B, apenas uma das afirmações é verdadeira:
  (i) $A = B$
  (ii) $A < B$
  (iii) $A > B$

Com efeito, como $A < B$, temos que o segmento $[0, A]$ é menor que o segmento $[0, B]$. Desde que $B < C$, temos que o segmento $[0, B]$ é menor que o segmento $[0, C]$. Logo, o segmento $[0, A]$ será menor que o segmento $[0, C]$ e, então, temos que $A < C$. Além disso, um dos seguintes fatos pode ocorrer: os segmentos $[0, A]$ e $[0, B]$ podem ter o mesmo comprimento, ou seja, representam o mesmo ponto na reta numérica; o segmento $[0, A]$ pode ser maior que o segmento $[0, B]$; ou ainda, o segmento $[0, A]$ pode ser menor que o segmento $[0, B]$

Assim como nos números inteiros não-negativos, a desigualdade $A \leq B$ significa que A é menor que ou igual a B. Mais que isso, considerando que a Tricotomia implica a Irreflexividade, isto é, que $A < A$ é sempre falso, a relação estabelecida na Definição 2.7 é de fato, uma *relação de ordem parcial estrita* [2].

Entretanto, a Definição 2.7 nos dá apenas a noção geométrica de ordem, o que não é necessariamente prático quando queremos fazer "contas" com frações. Portanto, veremos a seguir como caminhar na direção de uma visão algébrica. Isso será feito por equivaler a ordenação das frações com a ordenação de número inteiros.

---

[2] Para mais sobre relações de ordem veja Domingues e Iezzi (2003, Cap. III.3)

Primeiramente, se duas frações $\frac{k}{\ell}$ e $\frac{m}{\ell}$ tem o mesmo denominador ℓ, então a relação de ordem fica simples:

$$\frac{k}{\ell} < \frac{m}{\ell} \text{ é equivalente a } k < m$$
$$\frac{k}{\ell} = \frac{m}{\ell} \text{ é equivalente a } k = m.$$

Isto ocorre porque $\frac{k}{\ell}$ é o k-ésimo múltiplo de $\frac{1}{\ell}$, ou seja, representa um segmento de comprimento $[0, \frac{k}{\ell}]$ e $\frac{m}{\ell}$ é o m-ésimo múltiplo do mesmo $\frac{1}{\ell}$, que significa ser um segmento de comprimento $[0, \frac{m}{\ell}]$, e desde que os múltiplos de um número crescem da esquerda para a direita, temos que o k-ésimo múltiplo está à esquerda do m-ésimo múltiplo se, e somente se o segmento $[0, \frac{k}{\ell}]$ for menor que o segmento $[0, \frac{m}{\ell}]$ e dois múltiplos representam o mesmo ponto se, e somente se seus comprimentos são iguais.

Existe um aspecto do processo anterior que deve ser destacado: o fato de que nos esforçamos para explicar porque $k < m$ implica que $\frac{k}{\ell} < \frac{m}{\ell}$. A razão dada para isso é porque os múltiplos de $\frac{1}{\ell}$ crescem da esquerda para a direita tal que o k-ésimo múltiplo $(\frac{k}{\ell})$ está à esquerda do m-ésimo múltiplo $(\frac{m}{\ell})$ desde que $k < m$. Acima, já falamos sobre a igualdade e agora nos concentramos na inequação.

Considere duas frações $\frac{k}{\ell}, \frac{m}{n}$ com denominadores diferentes ℓ e n. Pelo Teorema 2.5 temos que as frações podem ser reescritas utilizando o mesmo denominador, ou seja,

$$\frac{k}{\ell} = \frac{k \times n}{\ell \times n} \text{ e } \frac{m}{n} = \frac{\ell \times m}{\ell \times n}.$$

Tendo as frações o mesmo denominador, podemos então enunciar o teorema a seguir, que também chamaremos de *Algoritmo da multiplicação cruzada.*

Teorema 2.8 (Algoritmo da multiplicação cruzada)**.** *Dadas duas frações $\frac{m}{n}$ e $\frac{k}{\ell}$, segue que*

$$\frac{m}{n} < \frac{k}{\ell} \textit{ se, e somente se, } m \times \ell < n \times k \tag{9}$$

Demonstração. Se $\frac{m}{n} < \frac{k}{\ell}$, então o ponto $\frac{m}{n}$ está à esquerda de $\frac{k}{\ell}$ na reta numérica. Pelo Teorema 2.5 temos que $\frac{m}{n}$ é o $m \times \ell$-ésimo múltiplo de $\frac{1}{n \times \ell}$ $\left(\frac{m \times \ell}{n \times \ell}\right)$ e $\frac{k}{\ell}$ é o $n \times k$-ésimo múltiplo de $\frac{1}{n \times \ell}$ $\left(\frac{n \times k}{n \times \ell}\right)$. Como os múltiplos de um ponto crescem da esquerda para a direita, temos que $m \times \ell < n \times k$.

Por outro lado, suponha que $m \times \ell < n \times k$. Então, o $m \times \ell$-ésimo múltiplo de $\frac{1}{n \times \ell}$ está à esquerda do $n \times k$-ésimo múltiplo do mesmo número $\frac{1}{n \times \ell}$. Então, por definição de uma fração ser menor que outra, $\frac{m \times \ell}{n \times \ell} < \frac{n \times k}{n \times \ell}$. Pela Teorema 2.4, isto implica que $\frac{m}{n} < \frac{k}{\ell}$. □

Assim como o Teorema 2.6, o Teorema 2.8 não vem mais sendo abordado em livros didáticos. Uma das razões disso acontecer é que os livros didáticos normalmente não definem explicitamente o que significa uma fração ser maior que a outra. Veremos mais sobre isso no Capítulo 3.

Na literatura educacional, a maneira de comparar $\frac{k}{\ell}$ e $\frac{m}{n}$ é, primeiramente, reescrever as frações com um denominador comum, por exemplo $\frac{k\times n}{\ell\times n}$ e $\frac{\ell\times m}{\ell\times n}$ e então afirmar que $\frac{k}{\ell} < \frac{m}{n}$ se $\frac{k\times n}{\ell\times n} < \frac{\ell\times m}{\ell\times n}$. Portanto, a definição apresentada pelos livros é de que "uma fração é maior que a outra quando, após as frações serem reescritas com um denominador comum, o numerador de uma fração é maior que o numerador da outra fração". O que podemos considerar inexato nesta definição?

Primeiramente, no lugar de explicar o que significa *uma fração ser maior que a outra*, a definição acima diz-nos para efetuarmos um processo mecânico e, então, determinaremos a maior fração. Wu (2011, p. 241) declara que é conceitualmente errado ensinar frações dessa maneira.

Veja alguns exemplos para melhor compreensão. Comparando as frações $\frac{5}{6}$ e $\frac{4}{5}$ temos que, pelo Teorema 2.8, $5\times 5 = 25 > 6\times 4 = 24$ e, então, $\frac{5}{6} > \frac{4}{5}$. Agora, analisando as frações $\frac{6}{7}$ e $\frac{8}{9}$ temos que $6\times 9 = 54 < 7\times 8 = 56$. Logo, pelo Teorema 2.8, segue que $\frac{6}{7} < \frac{8}{9}$. Por fim, com as frações $\frac{9}{51}$ e $\frac{51}{289}$ temos que $9 \times 289 = 2601 = 51 \times 51 = 2601$, portanto $\frac{9}{51} = \frac{51}{289}$. Os dois primeiros exemplos podem ser comparados até sem necessidade o Teorema 2.8, porém, o terceiro exemplo necessita de suporte do Teorema 2.6. Argumentamos que o uso deste Teorema faz falta para os alunos, e o mesmo poderia estar nos livros didáticos.

Agora, como verificarmos qual dentre as frações $\frac{1}{24}$ e $\frac{1}{25}$ é maior? É intuitivo que se você divide algo em uma quantidade maior de partes iguais, cada parte será cada vez menor. Em sala de aula, é possível ter essa ideia a partir de uma atividade prática dividindo um mesmo segmento de reta em duas partes iguais, depois em três partes iguais e assim por diante. Deste modo, podemos dizer que $\frac{1}{25}$ é menor que $\frac{1}{24}$. Será que isto é suficiente para convencer um aluno do Ensino Fundamental sobre tal fato?

Mais ainda, é possível convencer-se a si mesmo que $\frac{1}{12345678}$ é menor que $\frac{1}{12345677}$? Seria melhor ter uma razão válida para que, se $k > m$, para números inteiros positivos k e m, então $\frac{1}{k} < \frac{1}{m}$.

Uma maneira para explicar é começar com o ponto $\frac{1}{24}$ na reta numérica. Seu vigésimo quarto múltiplo é o ponto 1. Entretanto, se começarmos com o ponto $\frac{1}{25}$, seu vigésimo quarto múltiplo será o ponto $\frac{24}{25}$, que é (obviamente) menor que 1. Desta forma, $\frac{1}{25}$ é menor que $\frac{1}{24}$.

Outra maneira para argumentarmos é utilizar o Algoritmo da Multiplicação Cruzada. Porém, seria melhor não utilizá-lo com os alunos menores, logo após ensinado, pois caso o aluno não esteja totalmente convencido sobre o Algoritmo, esta utilização não será tão persuasiva. Pedagogicamente, Wu (2011, p. 243) defende que a melhor estratégia seria utilizar a ideia por trás do Teorema 2.8 e, então, utilizando o Teorema 2.4, obtemos $\frac{1}{25} = \frac{24}{24\times 25}$ e $\frac{1}{24} = \frac{25}{24\times 25}$. Desde de que ao comparar os numeradores nas frações obtidas a partir do Teorema 2.4, temos $24 < 25$, podemos concluir que $\frac{1}{24} > \frac{1}{25}$.

A partir daí podemos concluir que, dadas as frações $\frac{1}{m}$ e $\frac{1}{k}$, com $m > k$, segue que $\frac{1}{m} = \frac{k}{m \times k}$ e $\frac{1}{k} = \frac{m}{m \times k}$ e então $\frac{1}{m} < \frac{1}{k}$.

Podemos então generalizar esta conclusão para as frações com denominador diferente de 1. Uma vez que os próximos resultados são consequência do Teorema 2.8, iremos agora utilizar a Equação (9) de maneira repetida em argumentos algébricos, e não mais apenas geométricos, como vinhamos fazendo até aqui.

Teorema 2.9. *Considere duas frações $\frac{m}{n}$ e $\frac{k}{\ell}$ com m, n, k, ℓ inteiros não nulos. Se $\frac{m}{n} < \frac{k}{\ell}$ então $\frac{n}{m} > \frac{\ell}{k}$*

Demonstração. Pela Equação (9), $\frac{m}{n} < \frac{k}{\ell}$ implica $m \times \ell < n \times k$, que pode ser reescrito como $\ell \times m < k \times n$. Novamente por (9), podemos ter $\frac{\ell}{k} < \frac{n}{m}$ que é equivalente a $\frac{n}{m} > \frac{\ell}{k}$. □

Importante ressaltar que, dada a fração $\frac{m}{n}$, com m e n não nulos, a fração $\frac{n}{m}$ é chamada de *inverso de* $\frac{m}{n}$.

Acima chegamos na conclusão de que tomando os inversos das frações, o sinal da inequação inverte. Isto pode ser mais intuitivo se olharmos para um caso simples, com inteiros não nulos. Considere $3 < 5$. Como $3 = \frac{3}{1}$, o inverso de 3 será $\frac{1}{3}$. Do mesmo modo, o inverso de 5 será $\frac{1}{5}$. Claramente $\frac{1}{3} > \frac{1}{5}$, então, a inequação inverte utilizando o inverso dos números. Com essa ideia temos o Teorema a seguir.

Teorema 2.10. *As afirmações seguintes são equivalentes para quaisquer inteiros não-negativos m, n, k, ℓ com $n \neq 0$ e $\ell \neq 0$.*

(i) $\frac{m}{n} < \frac{k}{\ell}$

(ii) $\frac{m}{m+n} < \frac{k}{k+\ell}$

(iii) $\frac{m+n}{n} < \frac{k+\ell}{\ell}$

Demonstração. Começaremos provando que (i) implica (ii). Considere $\frac{m}{n} < \frac{k}{\ell}$. Então, pelo Teorema 2.8, segue que $m \times \ell < n \times k$. Adicionando $m \times k$ em ambos os lados, temos que $m \times k + m \times \ell = m \times k + n \times k$. Novamente pelo Teorema 2.8 temos que $\frac{m}{m+n} < \frac{k}{k+\ell}$.

Por outro lado, para provar que (ii) implica (iii), se $\frac{m}{m+n} < \frac{k}{k+\ell}$ temos que $m \times (k + \ell) < k \times (m + n)$ pelo Teorema 2.8. Logo, aplicando a propriedade distributiva da multiplicação, temos que $m \times k + m \times \ell < m \times k + n \times k$. Com a propriedade da subtração da igualdade, segue $m \times \ell < n \times k$. Adicionando $n \times \ell$ em ambos os lados, ficaremos com $m \times \ell + n \times \ell < n \times k + n \times \ell$. Por fim, aplicando a fatoração e o usando o mesmo Teorema acima, segue $\ell \times (m + n) < n \times (k + \ell)$ e $\frac{m+n}{n} < \frac{k+\ell}{\ell}$.

Por fim, provaremos que (iii) implica (i). Agora considere que $\frac{m+n}{n} < \frac{k+\ell}{\ell}$. Pelo mesmo Teorema utilizado acima, temos $\ell \times (m+n) < n \times (k+\ell)$. Aplicando a propriedade distributiva, segue que $m \times \ell + n \times \ell < n \times k + n \times \ell$. Logo, $m \times \ell < n \times k$ e, finalmente, pelo Algoritmo da Multiplicação Cruzada, $\frac{m}{n} < \frac{k}{\ell}$. □

2.3 ADIÇÃO DE FRAÇÕES

A fim de abordar a adição de frações, comecemos pensando na adição com números inteiros não-negativos. Neste caso, devemos calcular a combinação de dois grupos de objetos e isso se resume a apenas um problema de contagem. Com as frações não é tão simples assim. Aqui, a adição de frações será pensada como a concatenação dos segmentos dos quais cada uma dessas frações é ponto extremo à esquerda. Ou seja, novamente vamos utilizar proposições e definições geométricas para então chegarmos em uma conclusão algébrica.

Definição 2.11 (Adição de frações)**.** Dadas as frações $\frac{k}{\ell}$ e $\frac{m}{n}$, definimos a *adição* dessas frações como sendo a fração, denotada por $\frac{k}{\ell} + \frac{m}{n}$, que é o ponto extremo à direita do segmento que tem ponto extremo à esquerda o ponto 0 e que tem como comprimento o mesmo comprimento do segmento que surge da concatenação dos segmentos de comprimento $\frac{k}{\ell}$ e $\frac{m}{n}$.

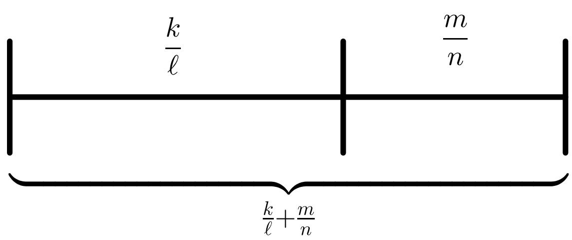


Figura 5 – Representação da adição de $\frac{k}{\ell}$ e $\frac{m}{n}$.

A Figura 5 representa pictograficamente a Definição 2.11. Caso os denominadores das frações envolvidas forem iguais, digamos que trata-se das frações $\frac{k}{\ell}, \frac{m}{\ell}$, segue da Definição 2.11 que $\frac{k}{\ell} + \frac{m}{\ell} = \frac{k+m}{\ell}$, pois ambos os lados são iguais ao comprimento da concatenação de $k + m$ segmentos, cada um com comprimento $\frac{1}{\ell}$. Isso nos mostra como realizar a soma de duas frações com o mesmo denominador. Por outro lado, se temos duas frações $\frac{k}{\ell}$ e $\frac{m}{n}$, não há nenhuma garantia de que os denominadores ℓ e n sejam iguais. Para contornar este problema, podemos utilizar o FFFE dado no Teorema 2.5 para reescrever as frações com o mesmo denominador.

Sabemos que $\frac{k}{\ell} = \frac{k\times n}{\ell\times n}$ e $\frac{m}{n} = \frac{\ell\times m}{\ell\times n}$. Logo, pela equação acima, temos que

$$\frac{k}{\ell} + \frac{m}{n} = \frac{k\times n}{\ell\times n} + \frac{\ell\times m}{\ell\times n} = \frac{k\times n + \ell\times m}{\ell\times n}. \tag{10}$$

Em outras palavras, expressando ambas as frações como múltiplos da mesma fração $\frac{1}{\ell\times n}$ conseguimos explicitar uma forma algébrica para a adição de frações. Podemos então estabelecer (10) como a *fórmula geral para a adição de frações*.

De fato, esta fórmula vale inclusive se $\ell = n$ pois daí segue que $\frac{k}{\ell} + \frac{m}{\ell} = \frac{k\times\ell+\ell\times m}{\ell\times\ell} = \frac{\ell\times(k+m)}{\ell\times\ell} = \frac{k+m}{\ell}$ que é a fórmula que encontramos para quando os denominadores são iguais. Note que o uso desta fórmula é diferente da fórmula usual em que adição de frações é apresentada nos livros didáticos no Brasil, uma vez que é mais comum que se peça o cálculo do Mínimo Múltiplo Comum (MMC) dos denominadores ℓ e n. Pretendemos aqui comentar essa diferença.

Primeiramente, perceba que a adição de frações satisfaz as propriedades comutativa e associativa. A propriedade associativa diz que $(A+B)+C = A+(B+C)$ para qualquer fração A, B e C. A validade desta afirmação fica clara na Figura 6. Do mesmo modo, podemos verificar a propriedade comutativa pela Figura 7.

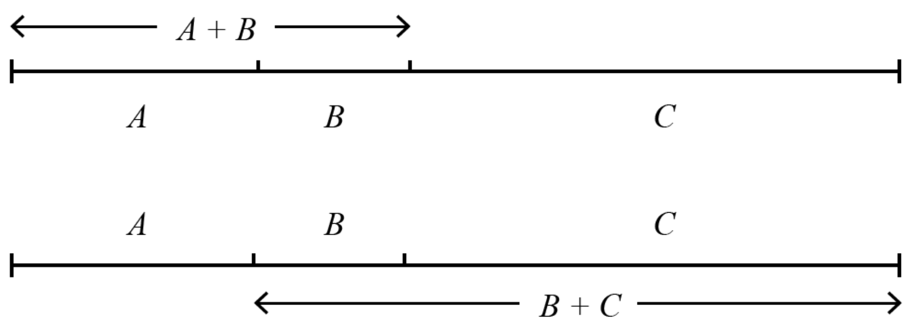


Figura 6 – Representação da propriedade associativa

Precisamos salientar que a fórmula $\frac{k}{\ell} + \frac{m}{n} = \frac{k\times n+\ell\times m}{\ell\times n}$ foi obtida por um processo dedutivo que é conceitualmente simples e natural. Temos um caminho muito mais longo para explicar porque a adição de frações não pode ser da forma:

$$\frac{k}{\ell} + \frac{m}{n} = \frac{k+m}{\ell+n} \tag{11}$$

Por exemplo, tome $k = m = 1$ e $\ell = n = 2$. Então, pela definição de adição, o lado esquerdo é a concatenação de dois segmentos, cada um com comprimento um meio, e juntos tem segmento 1. O lado direito seria igual a $\frac{1+1}{2+2} = \frac{1}{2}$, o que é diferente de 1. Moral da história: se dermos aos alunos a definição clara de que a adição de frações significa, eles terão a chance de decidir eles mesmos o que é certo e o que é errado.

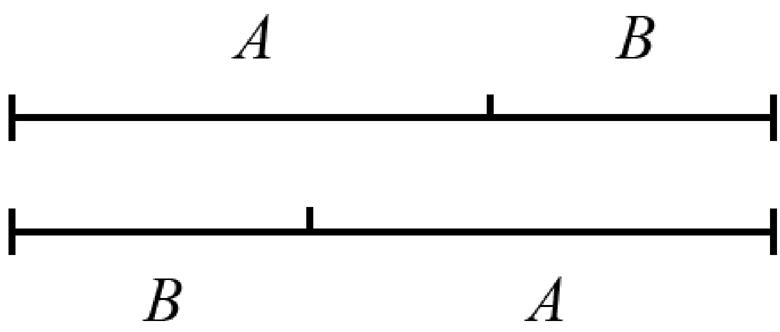


Figura 7 – Representação da propriedade comutativa

Refinamento da Fórmula da Adição de Frações

Muitos livros didáticos trazem outras maneiras de calcular a adição de frações. Em alguns casos, essas maneiras podem facilitar o processo de adição de frações quando os denominadores são diferentes. Vamos analisar dois desses casos: quando um denominador for múltiplo do outro e quando encontramos o MMC dos denominadores.

Quando um denominador for múltiplo do outro, podemos utilizar o maior denominador e, assim, resolver a adição. Considere a adição $\frac{1}{4} + \frac{7}{16}$. Note que, pelo Teorema 2.5, podemos escrever a fração $\frac{1}{4}$ como $\frac{4}{16}$, logo, segue que:

$$\frac{1}{4} + \frac{7}{16} = \frac{4}{16} + \frac{7}{16} = \frac{11}{16}.$$

De maneira geral, temos que

$$\frac{m}{n \times \ell} + \frac{k}{\ell} = \frac{m + n \times k}{n \times \ell}.$$

Comparando com a fórmula encontrada em (10), que determinamos anteriormente, segue:

$$\frac{m}{n \times \ell} + \frac{k}{\ell} = \frac{m \times \ell + n \times k \times \ell}{n \times \ell \times \ell} = \frac{m \times \ell + n \times k \times \ell}{\ell \times (n\ell)} = \frac{\ell \times (m + n \times k)}{\ell \times (n \times \ell)} = \frac{m + n \times k}{n \times \ell}$$

O segundo caso especial exige uma discussão mais elaborada. Iremos inicialmente analisar um exemplo. Pela fórmula de adição de frações, temos:

$$\frac{5}{6} + \frac{3}{4} = \frac{20 + 18}{24} = \frac{38}{24}.$$

Utilizando o FFFE, podemos escrever o resultado como $\frac{38}{24} = \frac{19}{12}$. De todo modo, neste caso, não é necessário utilizar a fração $\frac{1}{24}$ como uma unidade comum das frações $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{6}$. Note que $\frac{1}{4} = \frac{3}{12}$ e $\frac{1}{6} = \frac{2}{12}$, então, podemos utilizar $\frac{1}{12}$ como uma unidade comum para as frações anteriores. Com isso, iremos resolver a adição das frações $\frac{5}{6} + \frac{3}{4}$ novamente.

$$\frac{5}{6}+\frac{3}{4}=\frac{10}{12}+\frac{9}{12}=\frac{19}{12}.$$

Este exemplo nos mostra que a maneira para resolução apresentada nos livros didáticos também está dentro da proposta deste trabalho. Todavia, nada obsta apresentar aos alunos do ensino básico a fórmula formal (10) primeiramente e a utilização de múltiplos comuns como uma variação da fórmula.

Vamos encontrar a mesma fórmula da adição de frações (10), utilizando o denominador comum como sendo o MMC dos denominadores. Suponha que sejam dadas as frações $\frac{k}{\ell}$ e $\frac{m}{n}$ e, suponha também que existe um inteiro não-negativo A tal que continue sendo um múltiplo de n e ℓ, porém, diferente de $n \times \ell$. No exemplo anterior podemos considerar que $\ell = 6$, $n = 4$ e $A = 12$. Daí, temos que $A = n \times N = \ell \times L$ para os números inteiros não-negativos N e L. Logo, segue que $\frac{k}{\ell} = \frac{k \times L}{\ell \times L} = \frac{k \times L}{A}$ e $\frac{m}{n} = \frac{m \times N}{n \times N} = \frac{m \times N}{A}$. Com isso, temos que

$$\frac{k}{\ell}=\frac{m}{n}=\frac{k\times L}{A}+\frac{m\times N}{A} \text{ em que } A = n\times N = \ell \times L.$$

Se A for o MMC de n e ℓ, temos a fórmula que comumente encontramos nos livros didáticos e como muitos professores ensinam seus alunos. Acrescentamos aqui o uso da sentença ”divide pelo de baixo e multiplica pelo de cima”, que torna a adição de frações um processo mecânico e sem o entendimento do processo.

Entendemos a importância de explicar os alunos que esta também é uma maneira possível, porém, é importante que os alunos saibam o que estão fazendo e o porquê de cada passo. Segundo Wu (2011, p. 228), definir a adição de frações deste modo é um erro, pois para ele os alunos concluem que frações são um tipo diferente de número, além de que muitos dos estudantes confundem a ideia de MMC com a de Máximo Divisor Comum (MDC) e definir a adição desta forma tende a piorar essa confusão.

Em frações com denominadores sendo números “grandes”, o uso do MMC pode auxiliar na resolução da operação, já que possibilita que numeradores e denominadores sejam números potencialmente menores. Veja o exemplo abaixo.

Exemplo 2.12. Considere a adição das frações $\frac{3}{154}+\frac{4}{91}$. Pela Fórmula (10) teremos

$$\frac{3}{154}+\frac{4}{91}=\frac{3\times 91+4\times 154}{154\times 91}=\frac{273+616}{14014}=\frac{889}{14014}.$$

Agora, note que $154 = 2\times 7\times 11$ e $91 = 7\times 13$, logo, o MMC de 154 e 91 será $2\times 7\times 11\times 13$. Segue então,

$$\frac{3}{154}+\frac{4}{91}=\frac{3\times 13+4\times 2\times 11}{2\times 7\times 11\times 13}=\frac{39+88}{2002}=\frac{127}{2002}.$$

Vamos agora verificar que, de fato, as frações dos resultados são equivalentes. Temos que $889 = 7 \times 127$ e $14014 = 7 \times 2002$. Portanto, segue que $\frac{889}{14014} = \frac{7\times 127}{7\times 2002} = \frac{127}{2002}$. Assim, temos que as frações são equivalentes e logo, os resultados representam o mesmo número.

2.4 NÚMEROS MISTOS

A ideia de número misto é apresentada, pelo currículo escolar, como um "tipo de fração", em geral quando se apresentam os conceitos de fração própria e imprópria. Tradicionalmente, os livros didáticos trazem que o número misto é uma combinação de um número inteiro com uma fração própria. Porém, é omitido o fato de que temos, com efeito, simplesmente uma adição de fração com um número inteiro não-negativo e que o número misto é nada mais do que uma notação.

Considere a fração $\frac{35}{6}$. Como $35 = 5 \times 6 + 5$, temos que

$$\frac{35}{6} = \frac{(5 \times 6) + 5}{6} = \frac{5 \times 6}{6} + \frac{5}{6} = 5 + \frac{5}{6}.$$

Temos então que $5 + \frac{5}{6} = 5$ inteiros e $\frac{5}{6}$. A Definição abaixo dá uma notação especial para números deste tipo.

Definição 2.13 (Número misto)**.** Dados um número inteiro não-negativo q e uma fração própria $\frac{k}{\ell}$, a notação $q\frac{k}{\ell}$ é chamada de *número misto* e representa a adição de q com $\frac{k}{\ell}$, isto é,

$$q\frac{k}{\ell} := q + \frac{k}{\ell} \tag{12}$$

Podemos argumentar que faz sentido apresentar aos alunos tal definição após a explicação de adição de frações. Com a definição de número misto feita de forma clara e no momento apropriado, a conversão para fração imprópria, ou vice-versa, acontece com mais naturalidade.

Por exemplo, considerando a fração $\frac{36}{7}$. Temos que $36 = 5 \times 7 + 1$ pela divisão Euclidiana. Portanto,

$$\frac{36}{7} = \frac{(5 \times 7) + 1}{7} = \frac{5 \times 7}{7} + \frac{1}{7} = 5 + \frac{1}{7} = 5\frac{1}{7},$$

em que a última igualdade é devida à Equação (12). Da mesma forma, dado $6\frac{2}{3}$, sabemos por definição que

$$6\frac{2}{3} = 6 + \frac{2}{3} = \frac{(6 \times 3)}{3} + \frac{2}{3} = \frac{18}{3} + \frac{2}{3} = \frac{20}{3}.$$

Seria possível fazermos a adição de frações com números mistos? Importante ressaltar que com a Definição 2.13, adicionar números mistos é o mesmo que adicionar frações. De maneira formal, a adição de duas frações em que elas estão no formato de números mistos, considerando as frações $q\frac{k}{\ell}$ e $p\frac{m}{n}$, será dada por:

$$q\frac{k}{\ell} + p\frac{m}{n} = q + \frac{k}{\ell} + p + \frac{m}{n} = (q + p) + \left(\frac{k}{\ell} + \frac{m}{n}\right) = (q + p) + \frac{k \times n + m \times \ell}{\ell \times n}$$

Note que foram utilizadas as propriedades associativa e comutativa da adição na derivação desta fórmula.

Podemos também somar dois números mistos fazendo primeiro a conversão destes para frações impróprias e então utilizar a fórmula de adição de frações, encontrada no Teorema 10. Teremos então,

$$\begin{aligned}
q\frac{k}{\ell}+p\frac{m}{n} &= \frac{(q\times\ell)+k}{\ell}+\frac{(p\times n)+m}{n}=\frac{n\times(q\ell+k)}{\ell\times n}+\frac{\ell\times(pn+m)}{\ell\times n}\\
&= \frac{q\times\ell\times n+k\times n}{\ell\times n}+\frac{p\times\ell\times n+m\times\ell}{\ell\times n}\\
&= \frac{q\times\ell\times n}{\ell\times n}+\frac{k\times n}{\ell\times n}+\frac{p\times\ell\times n}{\ell\times n}+\frac{m\times\ell}{\ell\times n}\\
&= q+\frac{k\times n}{\ell\times n}+p+\frac{m\times\ell}{\ell\times n}\\
&= (q+p)+\frac{k\times n+\ell\times m}{\ell\times n}.
\end{aligned}$$

Vejamos alguns exemplos para verificarmos a aplicação de um ou outro método.

Exemplo 2.14. Vamos calcular $3\frac{4}{9}+\frac{5}{8}$. Isto corresponde a adicionar um número misto e uma fração própria. Note que as frações próprias podem ser representadas como $0+\frac{m}{n}=\frac{m}{n}$. Como o 0 é o elemento neutro da adição, não há necessidade de escrever o número quando estamos realizando esta operação. Segue então que:

$$\begin{aligned}
3\frac{4}{9}+\frac{5}{8} &= 3+\left(\frac{4}{9}+\frac{5}{8}\right)\\
&= 3+\left(\frac{32}{72}+\frac{45}{72}\right)\\
&= 3+\left(\frac{77}{72}\right)\\
&= 3+1+\frac{5}{72}=4\frac{5}{72}
\end{aligned}$$

Considere agora $3\frac{3}{4}+4\frac{2}{5}$, que corresponde a adicionar dois números mistos. Segue que:

$$\begin{aligned}
3\frac{3}{4}+4\frac{2}{5} &= (3+4)+\left(\frac{3}{4}+\frac{2}{5}\right)\\
&= 7+\left(\frac{15}{20}+\frac{8}{20}\right)=7+\left(\frac{23}{20}\right)\\
&= 7+1+\frac{3}{20}=8\frac{3}{20}.
\end{aligned}$$

Apesar de, tradicionalmente, o currículo escolar insistir que toda fração imprópria pode ser convertida para um número misto sem haver uma razão matemática para essa prática, apresentamos acima um modo de adicionar duas frações sem a necessidade da conversão. Sendo assim, há motivos para forçar que os alunos resolvam sempre utilizando aquele processo? Não seria melhor apresentar aos alunos as duas maneiras, sem fazer a conversão e fazendo a conversão, para que então eles possam decidir de qual maneira irão resolver?

Vejamos agora, os mesmo exemplos anteriores, porém, utilizando a conversão para frações impróprias antes de resolver a adição.

Exemplo 2.15.

$$3\frac{4}{9}+\frac{5}{8}=\frac{27+4}{9}+\frac{5}{8}=\frac{31}{9}+\frac{5}{8}=\frac{248}{72}+\frac{45}{72}=\frac{293}{72}$$

Novamente, utilizando a conversão de número misto para fração imprópria:

$$3\frac{3}{4}+4\frac{2}{5}=\frac{12+3}{4}+\frac{20+2}{5}=\frac{15}{4}+\frac{22}{5}=\frac{75}{20}+\frac{88}{20}=\frac{163}{20}$$

Note que $293 = 4\times 72+5$, logo $\frac{293}{72} = 4\frac{5}{72}$. Do mesmo modo, temos que $163 = 8\times 20+3$ e, então $\frac{163}{20} = 8\frac{3}{20}$. Portanto, como era de se esperar, os resultados serão iguais, independente da maneira de resolução que seja escolhida.

Importante ressaltar que o intuito aqui não é o de forçar uma única maneira de resolução ou exigir uma reescrita dos livros didáticos. Nossa proposta é que seja apresentado aos alunos os conceitos formais e, além disso, maneiras diferentes que possam ser utilizadas. Nosso ponto é que definir e utilizar números mistos da forma dada na Definição 2.13 auxilia os alunos a revisitarem outros conceitos relacionados. Por exemplo, tal ideia ajuda na localização dos números na reta numérica. Com efeito, é muito fácil verificar que $\frac{36}{7}$ está entre 5 e 6, se o escrevermos como $5\frac{1}{7}$.

2.5 SUBTRAÇÃO DE FRAÇÕES

Utilizamos a seguir alguns argumentos da adição de frações para bem definir a subtração. Suponha as frações $\frac{k}{\ell}$ e $\frac{m}{n}$, com $\frac{k}{\ell} \geq \frac{m}{n}$. Definimos a *diferença* $\frac{k}{\ell}-\frac{m}{n}$ como a fração

$$\left(\frac{k}{\ell}-\frac{m}{n}\right)+\frac{m}{n}=\frac{k}{\ell}.$$

Geometricamente, $\frac{k}{\ell}-\frac{m}{n}$ é o comprimento do segmento restante quando um segmento de comprimento $\frac{m}{n}$ é removido de outro segmento com comprimento $\frac{k}{\ell}$.

Pelo Teorema 2.5 temos que

$$\frac{k}{\ell}-\frac{m}{n}=\frac{k\times n}{\ell\times n}-\frac{m\times \ell}{\ell\times n}$$

é o comprimento do segmento restante quando $\ell\times m$ cópias de $\frac{1}{\ell\times n}$ são removidas de $k\times n$ cópias de $\frac{1}{\ell\times n}$, ou seja, é o comprimento de $(k\times n-\ell\times m)$ cópias de $\frac{1}{\ell\times n}$. Segue então que, se $\frac{k}{\ell}\geq\frac{m}{n}$, então

$$\frac{k}{\ell}-\frac{m}{n}=\frac{k\times n-\ell\times m}{\ell\times n}. \tag{13}$$

Um detalhe interessante para examinar na Equação (13) é o fato de que se a subtração entre os inteiros positivos $k\times n$ e $\ell\times m$ só pode acontecer se $k\times n\geq \ell\times m$.

Como fazer então para que $\frac{k}{\ell} - \frac{m}{n}$ seja possível? Para tanto, pedimos a hipótese $\frac{k}{\ell} \geq \frac{m}{n}$, já que pelo Algoritmo da Multiplicação Cruzada (Teorema 2.6) temos que $k \times n \geq \ell \times m$.

A fórmula para a subtração de frações apresentada na Equação (13) pode ser também aplicada à números mistos. Porém, alguns casos merecem atenção especial.

Exemplo 2.16. Considere a subtração $13\frac{1}{4} - 8\frac{4}{5}$. Utilizando a conversão temos:

$$\begin{aligned} 13\frac{1}{4} - 8\frac{4}{5} &= \frac{4 \times 13 + 1}{4} - \frac{5 \times 8 + 4}{5} \\ &= \frac{53}{4} - \frac{44}{5} \\ &= \frac{53 \times 5 - 44 \times 4}{4 \times 5} \\ &= \frac{265 - 176}{20} = \frac{89}{20}. \end{aligned}$$

Por outro lado, sem utilizar a conversão, encontramos um problema.

$$13\frac{1}{4} - 8\frac{4}{5} = (13 - 8) + \left(\frac{1}{4} - \frac{4}{5}\right)$$

Note que $\frac{1}{4} > \frac{4}{5}$. Portanto, desta maneira não podemos utilizar a Fórmula (13). Uma saída seria utilizarmos 1 inteiro dos 13 inteiros de $13\frac{1}{4}$ para converter $\frac{4}{4} + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$, isto é, escrevermos

$$\begin{aligned} 13\frac{1}{4} - 8\frac{4}{5} &= (12 + 1) + \frac{1}{4} - 8\frac{4}{5} \\ &= (12 - 8) + \left(\frac{5}{4} - \frac{4}{5}\right) \\ &= 4 + \frac{5 \times 5 - 4 \times 4}{4 \times 5} \\ &= 4 + \frac{25 - 16}{20} = 4\frac{9}{20}. \end{aligned}$$

Segue ainda que $\frac{89}{20} = 4\frac{9}{20}$ e, portanto, os resultados são iguais, como esperado.

Exemplo 2.17. Vamos verificar se o mesmo acontece com as frações $4\frac{1}{10} - 2\frac{3}{4}$. Utilizando a conversão temos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{10} - 2\frac{3}{4} &= \frac{10 \times 4 + 1}{10} - \frac{4 \times 2 + 3}{4} \\ &= \frac{41}{10} - \frac{11}{4} \\ &= \frac{41 \times 4 - 11 \times 10}{10 \times 4} \\ &= \frac{164 - 110}{40} = \frac{54}{40} = \frac{27}{20} \end{aligned}$$

Por outro lado, sabendo que $1 + \frac{1}{10} = \frac{10}{10} + \frac{1}{10} = \frac{11}{10}$ e sem realizar a conversão anterior, teremos:

$$\begin{aligned} 4\frac{1}{10} - 2\frac{3}{4} &= (3-2) + \frac{11}{10} - \frac{3}{4} \\ &= 1 + \frac{11 \times 4 - 3 \times 10}{10 \times 4} \\ &= 1 + \frac{44-30}{40} = 1\frac{14}{40} = 1\frac{7}{20} \end{aligned}$$

Note que $\frac{27}{20} = 1\frac{7}{20}$, e assim chegamos aos mesmo resultado.

2.6 MULTIPLICAÇÃO DE FRAÇÕES

Algumas das aplicações de frações acessíveis aos alunos em idade escolar utilizam outras duas operações: a multiplicação e a divisão de frações. Um dos problemas que surge quando se apresentam essas aplicações é o fato de que muitos alunos apresentam dificuldade na compreensão acerca das operações com frações, em particular da multiplicação e divisão.

Isto se dá pelo fato de que os estudantes aprendem a maneira mecânica da resolução. No caso da multiplicação: *multiplicar numerador de uma fração pelo numerador da outra*; e no caso da divisão: *multiplicar a primeira fração pelo inverso da segunda.* Tudo isso é feito sem que eles tenham ao menos entendido o real conceito de *multiplicar* duas frações e o conceito de *inversão* de frações. Apresentamos nesta seção uma definição formal de multiplicação de frações que seria acessível aos alunos do ensino básico.

Antes mesmo de discutir como multiplicar frações, precisamos conversar sobre o que essa operação significa. Quando trabalhamos com números inteiros não-negativos, multiplicação é a soma de parcelas iguais, ou seja, considerando 5×4 temos $4+4+4+4+4$. Claramente esta definição não pode ser aplicada para frações, pois, por exemplo, $\frac{3}{7} \times \frac{2}{5}$ não pode ser representado como a adição de parcelas iguais a $\frac{2}{5}$ por $\frac{3}{7}$ vezes.

Habitualmente os livros didáticos trazem apenas a maneira de chegar ao resultado da multiplicação de frações sem qualquer explicação do porquê resolver dessa maneira. É apenas apresentado o algoritmo geral, isto é, deve-se multiplicar numerador da primeira fração com o numerador da segunda fração e, da mesma forma, denominador com denominador, isto é, dadas duas frações $\frac{m}{n}$ e $\frac{k}{\ell}$ computa-se o produto de duas frações como

$$\frac{m}{n} \times \frac{k}{\ell} = \frac{m \times k}{n \times \ell} \tag{14}$$

Wu (2011, p. 262) afirma que existem, pelo menos, outras duas interpretações para a multiplicação de frações que deveriam ser conhecidas por alunos que completam o ensino básico. A primeira é utilizando a área de retângulos e a segunda com o conceito de $\frac{m}{n}$ de alguma quantidade.

Ambas as interpretações são importantes e falaremos delas neste trabalho, porém separadamente. Considerando o objetivo deste trabalho de propor uma Matemática escolar que seja formalmente correta, quando uma delas for utilizada como definição para a multiplicação, a outra deverá ser demonstrada como teorema. Além disso, aqui novamente utilizaremos uma noção geométrica (agora a noção de *área*) para bem definir o produto das frações.

O modelo de área

O produto de dois números inteiros não-negativos m e n, denotado por $m \times n$, pode ser interpretado, ou identificado, como a área de um retângulo de lados m e n, mais precisamente, retângulo com base m e altura n. Note que um retângulo de base n e altura m tem área $n \times m$, que é igual à área do retângulo de base m e altura n. Dessa forma, temos a comutatividade da multiplicação, isto é, $m \times n = n \times m$. Do mesmo modo, podemos obter a associatividade da multiplicação, ou seja, $(m \times n) \times k = m \times (n \times k)$.

Observação 2.18. A fim de deixar o texto mais claro, faremos abuso de linguagem ao nos referirmos ao retângulo de lados de comprimento A e B simplesmente como o retângulo de lados A e B.

Se as medidas dos lados de um retângulo forem frações, logicamente a área desse retângulo ainda existe. Logo, em vista do que acabamos de ver, podemos naturalmente utilizar a área de retângulos com lados fracionários para definir o produto de frações. Para alcançar tal objetivo, no axioma a seguir alguns fatos básicos a respeito de área de regiões (ou figuras) planas são enunciados.

Axioma 2.1. *São válidas as seguintes sentenças sobre áreas de regiões planas:*

(i) *A área de uma região plana é sempre um número não-negativo;*

(ii) *A área do quadrado unitário (lado de tamanho* 1*) é identificada com o número* 1*;*

(iii) *Se duas regiões são congruentes, então suas áreas são iguais.*

Vamos agora argumentar, a partir de alguns exemplos, que a identificação de frações com área de figuras planas é pertinente, de modo que o produto de duas frações, ao ser identificado com área, resulta em uma fração. Na Figura 9 temos um quadrado unitário e considere que as regiões triangulares sejam congruentes entre si, de modo que, pelo Axioma 2.1(iii), essas quatro regiões tenham áreas iguais. Logo, o quadrado apresentado, que pela propriedade (ii) do Axioma 2.1 é identificado com o número 1, foi dividido em quatro partes iguais, isto é, cada triângulo corresponde à *quarta parte da unidade.*

Pela Definição 2.1, a fração $\frac{1}{4}$ representa o ponto da reta numérica que corresponde ao segmento com extremos em 0 e no ponto que representa a *quarta parte da unidade*. Nestes termos, também identificamos aqui cada região triangular da Figura 9 com a fração

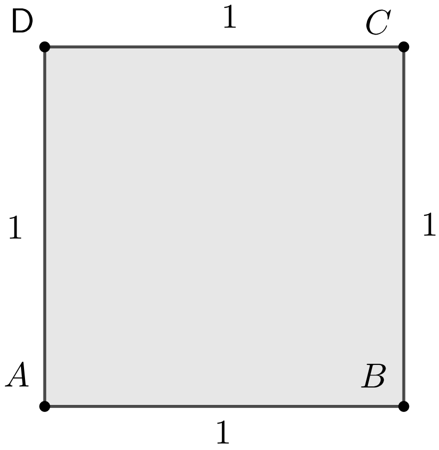


Figura 8 – Quadrado unitário

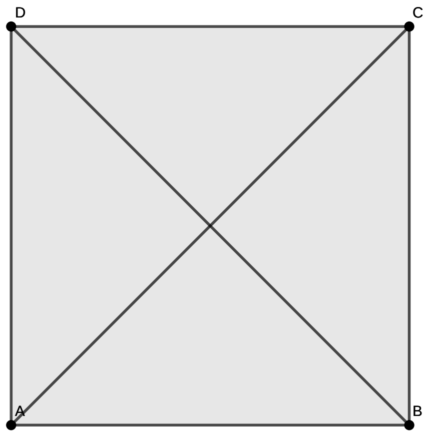


Figura 9 – Quadrado unitário dividido em 4 partes

$\frac{1}{4}$. Pode-se entender que tal ideia é óbvia, porém, talvez não seja óbvio para uma criança de quarto ano, que está aprendendo sobre frações pela primeira vez.

Podemos também, usando áreas de outras figuras planas, fazer representações diferentes para a fração $\frac{1}{4}$. Note que os quadrados da Figura 10 são quadrados unitários e as regiões hachuradas possuem mesma área $\frac{1}{4}$.

A utilização de material manipulável é ótima no auxílio da compreensão dos alunos. Ao fazer uso desses materiais pode-se ajudar os estudantes a compreender melhor o conceito de frações: fatias de pizza, partes de um quadrado ou círculo, coleção de pontos; utilização de metáforas, analogias. Porém, o objetivo principal deve ser que o aluno deve ser capaz de formular argumentos utilizando a definição formal de frações como um ponto na reta numérica.

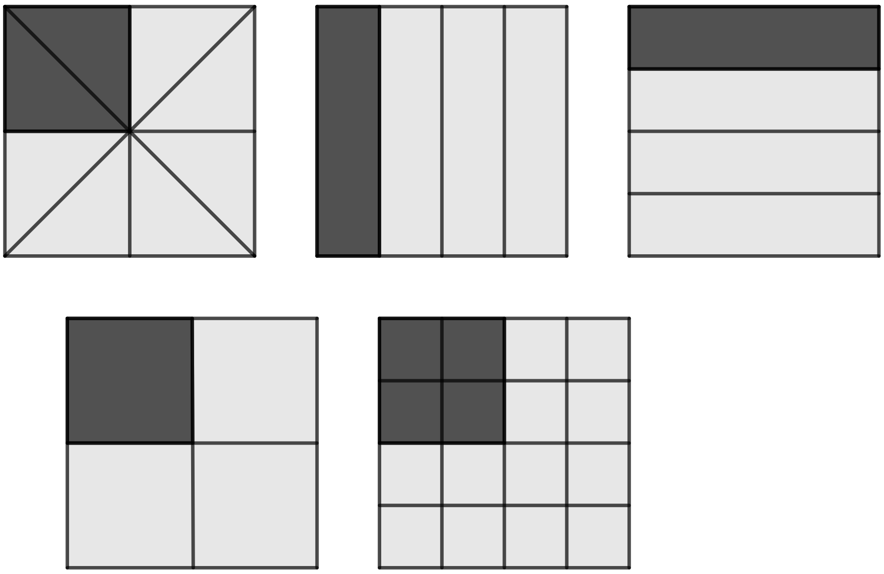


Figura 10 – Representações de $\frac{1}{4}$

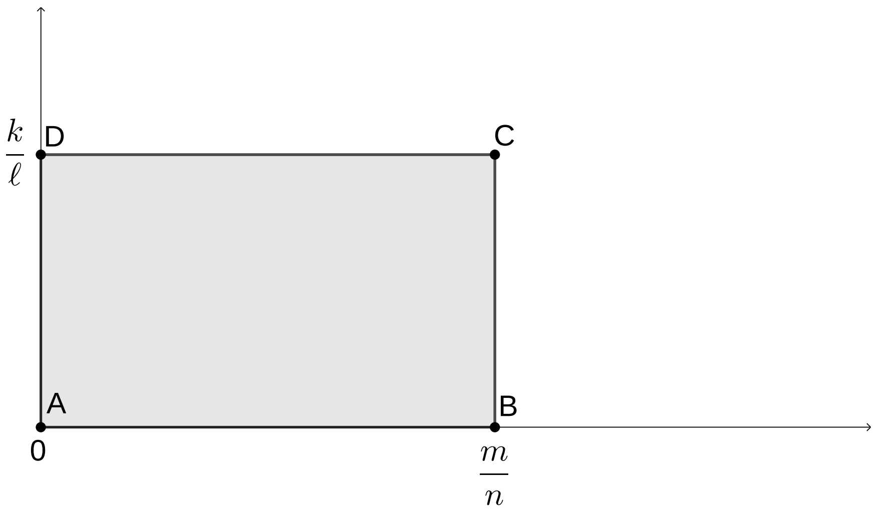


Figura 11 – Retângulo de lados $\frac{m}{n}$ e $\frac{k}{\ell}$

Estabelecida a relação de frações com áreas vamos agora provar a validade da fórmula do produto de duas frações dada em (14). Dadas duas frações $\frac{m}{n}$ e $\frac{k}{\ell}$, iremos representar o produto dessas frações utilizando a reta numérica. Considere a rotação de 90^{o} no sentido anti-horário de uma cópia da reta numérica, ou seja, teremos uma reta na horizontal e outra na vertical. Chamaremos essas retas de eixo horizontal e eixo vertical, respectivamente. As frações $\frac{m}{n}$ e $\frac{k}{\ell}$ estão indicadas na Figura 11 pelos pontos B e D, respectivamente.

Sendo assim, temos o retângulo $ABCD$ de base $\frac{m}{n}$ e altura $\frac{k}{\ell}$. Logo, a área do retângulo $ABCD$ será representada como o produto $\frac{m}{n} \times \frac{k}{\ell}$. Formalmente temos a seguinte

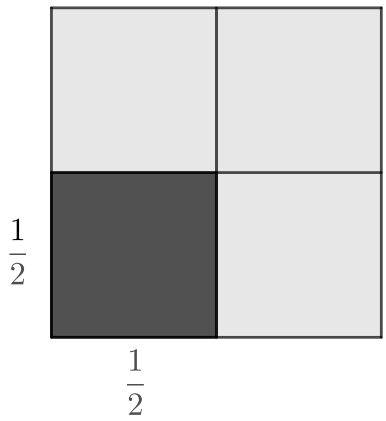


Figura 12 – Quadrado unitário dividido em lados medindo $\frac{1}{2}$

definição.

Definição 2.19 (Multiplicação de frações)**.** O *produto* ou *multiplicação* de duas frações $\frac{m}{n}$ e $\frac{k}{\ell}$ é dada pela área do retângulo de lados $\frac{m}{n}$ e $\frac{k}{\ell}$ e é denotado por $\frac{m}{n} \times \frac{k}{\ell}$.

A Definição 2.19 é baseada no fato de que dadas A, B, C e D frações que satisfazem $A = B$ e $C = D$ então, $A \times C = B \times D$. De fato, um retângulo de lados A e C é congruente a um retângulo de lados B e D e, segue do Axioma 2.1(iii) que tais retângulos possuem a mesma área. Portanto, de fato vale a igualdade entre produto das frações, isto é, $A \times C = B \times D$. Usaremos este fato algébrico repetidas vezes.

Até o momento não sabemos qual o resultado de um produto simples como $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$. Mas quem quer que tenha passado por bancos escolares sabe que para resolver esta multiplicação devemos fazer apenas o que determina (14) obtendo $\frac{1\times 1}{2\times 2}$, ou seja, $\frac{1}{4}$.

Porém, o que buscamos aqui é dar o argumento matemático deste resultado ser verdadeiro a partir da Definição 2.19. Dessa forma, precisamos mostrar, de acordo com a definição de $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ o porquê de a área de um quadrado de lado $\frac{1}{2}$ ter área $\frac{1}{4}$. O argumento, com efeito, segue a ideia geral apresentada anteriormente. Na Figura 12, em que o quadrado representa o quadrado unitário e os lados dos quatro quadrados menores possuem comprimento $\frac{1}{2}$, a área do quadrado unitário é dividida em quatro partes de mesma área. Como o quadrado unitário possuem área igual a 1, cada um dos quadrados menores terão área igual a sua quarta parte, isto é $\frac{1}{4}$. Temos então que a área sombreada será dada por

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \text{ área do quadrado de lado } \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Antes de argumentarmos completamente sobre o produto $\frac{m}{n} \times \frac{k}{\ell}$, iremos abordar alguns casos mais simples para auxiliar a compreensão.

Caso $1 \times \frac{k}{\ell}$

Vamos mostrar primeiramente que $1 \times \frac{1}{\ell} = \frac{1}{\ell}$, pois a área de um retângulo de lados 1 e $\frac{1}{\ell}$ é igual a $\frac{1}{\ell}$. Com efeito, pelo o que já argumentamos, isto se dá pois dividimos o quadrado unitário em ℓ retângulos congruentes e portanto, temos a divisão da unidade 1 em ℓ retângulos congruentes. Logo, cada retângulo de lados 1 e $\frac{1}{\ell}$ possui área igual a ℓ-ésima parte da unidade: $\frac{1}{\ell}$. Vejamos um exemplo.

Exemplo 2.20. Seja $\ell = 5$, isto é, queremos encontrar $1 \times \frac{1}{5}$. Nesse caso, nosso quadrado unitário será dividido em 5 retângulos de mesma área $\frac{1}{5}$; veja Figura 13.

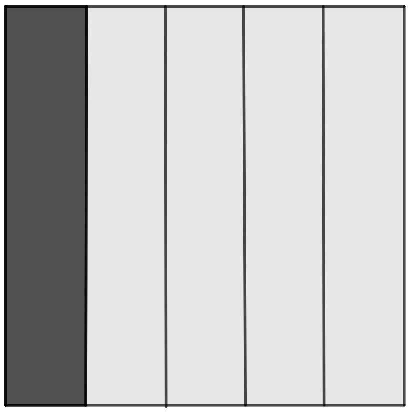


Figura 13 – Quadrado unitário dividido em 5 retângulos congruentes

De maneira mais geral, $1 \times \frac{k}{\ell}$ é, por definição, a área do retângulo de lados 1 e $\frac{k}{\ell}$, que resulta em $\frac{k}{\ell}$. Antes de provarmos essa afirmação, considere o seguinte exemplo.

Exemplo 2.21. Se $k = 2$ e $\ell = 5$ temos o retângulo destacado no quadrado da Figura 14. Então $1 \times \frac{2}{5}$ é igual à área do retângulo destacado na Figura 14, que é igual à soma da área dos retângulos de lados 1 e $\frac{1}{5}$, que é igual a $\frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$.

O exemplo anterior já nos dá o argumento geral, apesar de utilizarmos $k = 2$, que é menor que $\ell = 5$. O raciocínio é válido independente de k ser maior ou menor que ℓ. Com efeito, para quaisquer k, ℓ, $1 \times \frac{k}{\ell}$ é igual a área de k retângulos cada um com lados 1 e $\frac{1}{\ell}$, e, portanto,

$$\underbrace{\frac{1}{\ell} + \frac{1}{\ell} + \ldots + \frac{1}{\ell}}_{k \text{ vezes}} = \frac{k}{\ell}.$$

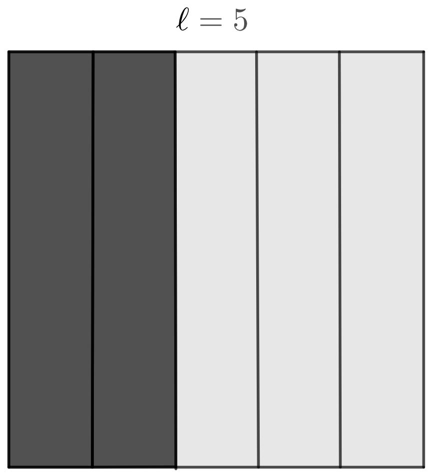


Figura 14 – Representação de $\frac{2}{5}$

Caso $\frac{1}{n} \times \frac{1}{\ell}$

Para o caso $\frac{1}{n} \times \frac{1}{\ell}$, fixe primeiramente $n = 2$ e $\ell = 5$ e investiguemos o produto $\frac{1}{2} \times \frac{1}{5}$. Considere o quadrado unitário. Vamos dividi-lo na vertical em duas partes iguais e na horizontal em cinco partes iguais. Juntando essas divisões, teremos o quadrado unitário dividido em $2 \times 5 (= 10)$ partes iguais, conforme a Figura 15. Por construção, cada um dos retângulos possui lado igual a $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{5}$ e a área, por definição, é o produto dos dois lados, isto é, a fração $\frac{1}{2} \times \frac{1}{5}$.

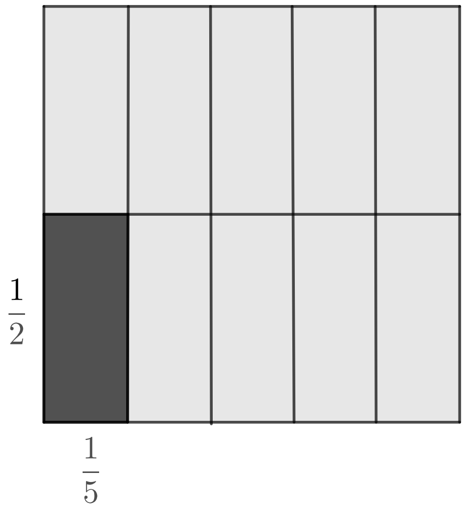


Figura 15 – Representação de $\frac{1}{2} \times \frac{1}{5}$

De todo modo, lembre que a área total desses 2×5 retângulos é igual a área do quadrado unitário, isto é, 1. Com isto, o retângulo sombreado é uma das parte da partição do quadrado unitário em 2×5 retângulos de mesma área. Portanto, pelo argumento

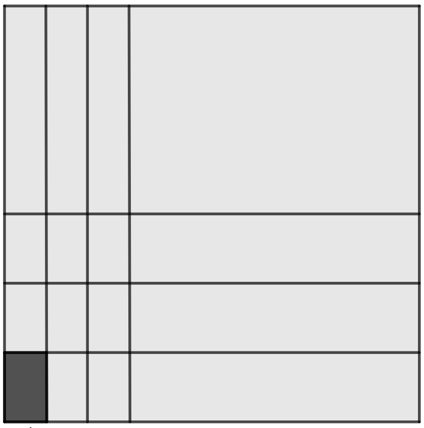


Figura 16 – Representação de $\frac{1}{n} \times \frac{1}{\ell}$

geométrico apresentado anteriormente, temos que a área do retângulo sombreado é $\frac{1}{2\times 5}$ e, então, segue que $\frac{1}{2} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{2\times 5} = \frac{1}{10}$.

Através do próximo lema, vamos provar este caso para qualquer denominador. Tal resultado será pedra angular para o resultado geral de multiplicação de frações.

Lema 2.22. *Dados quaisquer inteiros não-negativos $\ell > 0$ e $n > 0$ temos que*

$$\frac{1}{n} \times \frac{1}{\ell} = \frac{1}{n \times \ell}. \tag{15}$$

Demonstração. Divida os dois lados verticais do quadrado unitário em n partes iguais e os dois lados horizontais do quadrado unitário em ℓ partes iguais. Juntando os pontos correspondentes destas divisões, teremos a partição do quadrado unitário em $n \times \ell$ retângulos congruentes conforme a Figura 16. Como esses retângulos possuem lados $\frac{1}{n}$ e $\frac{1}{\ell}$ por construção, a área de cada uma será $\frac{1}{n} \times \frac{1}{\ell}$ por definição de área de retângulo. Além disso, com essa partição do quadrado unitário em $n \times \ell$ retângulos congruentes, os $n \times \ell$ retângulos terão área $\frac{1}{n\times\ell}$, conforme a Definição 2.1. Consequentemente, $\frac{1}{n} \times \frac{1}{\ell} = \frac{1}{n\times\ell}$. □

Caso $\frac{m}{n} \times \frac{k}{\ell}$

Finalmente, vamos encontrar uma forma algébrica para $\frac{m}{n} \times \frac{k}{\ell}$. Para fixar as ideias, antes disso, vamos analisar um exemplo.

Exemplo 2.23. Considere a multiplicação $\frac{2}{5} \times \frac{3}{4}$. Pela Definição 2.19, isto representa a área de um retângulo de lados $\frac{2}{5}$ e $\frac{3}{4}$. Desta vez não iremos utilizar a partição do quadrado unitário. Sejam pequenos retângulos de lados $\frac{1}{5}$ e $\frac{1}{4}$. Utilizaremos esses retângulos para construir um retângulo de lados $\frac{2}{5}$ e $\frac{3}{4}$. Sabemos que, pela Definição 2.1, $\frac{3}{4}$ é a concatenação de três segmentos de comprimento $\frac{1}{4}$. Do mesmo modo, $\frac{2}{5}$ é a concatenação de dois segmentos de comprimento $\frac{1}{5}$. Podemos ver na Figura 17 que a união dos pontos

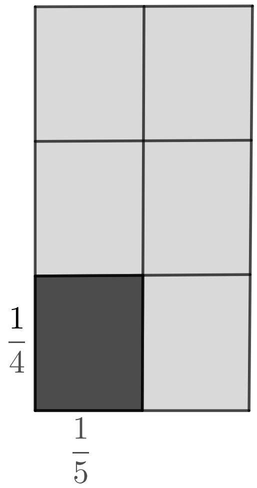


Figura 17 – Representação de $\frac{1}{5} \times \frac{1}{4}$

correspondentes nos lados opostos resulta em uma partição do retângulo original em 2×3 pequenos retângulos congruentes, cada um com lados $\frac{1}{5}$ e $\frac{1}{4}$. Pelo Teorema 2.22 cada retângulo da partição possui área $\frac{1}{5\times 4}$. Sabendo que o retângulo original contém 2×3 retângulos congruentes, sua área, em relação à unidade de área 1, será

$$\underbrace{\frac{1}{5 \times 4} + \frac{1}{5 \times 4} + \ldots + \frac{1}{5 \times 4}}_{2\times 3 \text{ vezes}} = \frac{2 \times 3}{5 \times 4}.$$

Portanto, temos que $\frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{2\times 3}{5\times 4} = \frac{6}{20}$.

A seguir, provamos que a forma do Exemplo acima vale geralmente.

Teorema 2.24 (Fórmula para multiplicação de frações)**.** *Dadas as frações $\frac{m}{n}$ e $\frac{k}{\ell}$, então o do produto de $\frac{m}{n}$ por $\frac{k}{\ell}$ é dado por* (14).

Demonstração. Seja um retângulo com lados $\frac{m}{n}$ e $\frac{k}{\ell}$. O lado com comprimento $\frac{m}{n}$ é a concatenação de m segmentos de comprimento $\frac{1}{n}$ e, do mesmo modo, o lado de comprimento $\frac{k}{\ell}$ é a concatenação de k segmentos de comprimento $\frac{1}{\ell}$ pela Definição 2.1. Fazendo a união dos pontos correspondentes nos lados opostos temos a partição do retângulo em $m \times k$ retângulos menores que são congruentes (veja a Figura 18).

Como tais retângulos menores possuem lados $\frac{1}{n}$ e $\frac{1}{\ell}$, a área de cada um deles será $\frac{1}{n\times\ell}$, pelo Lema 2.22. Porém, o retângulo maior está dividido, como vimos, em $m \times k$ retângulos menores, ou seja, a área do retângulo maior será dada por

$$\underbrace{\frac{1}{n \times \ell} + \ldots + \frac{1}{n \times \ell}}_{m\times k \text{ vezes}} = \frac{m \times k}{n \times \ell},$$

o que finaliza a nossa demonstração. $\square$

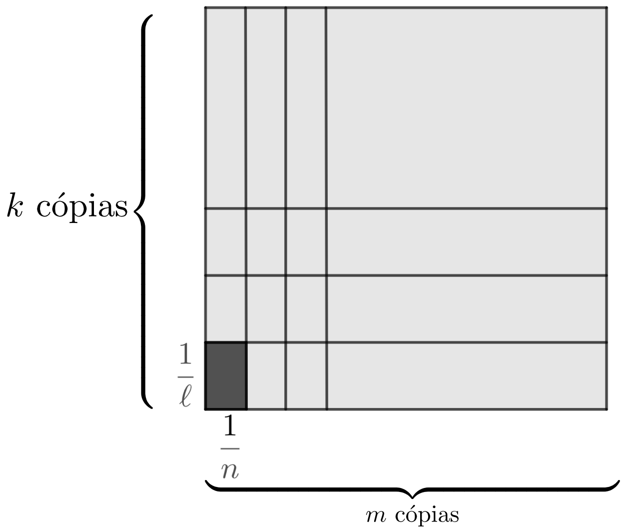


Figura 18 – Representação de $\frac{m}{n} \times \frac{k}{\ell}$

O conceito de $\frac{m}{n}$ de $\frac{k}{\ell}$

Uma das aplicações mais conhecidas utilizando a multiplicação de frações é a ideia de "$\frac{m}{n}$ de algo". O que significa dizer "comi $\frac{3}{8}$ de uma pizza"? Considerando uma pizza redonda e desprezando a sua grossura, podemos cortar esta pizza em 8 fatias de mesma área e, então, a afirmação "comi $\frac{3}{8}$ de uma pizza" significaria comi três fatias dessa pizza.

No contexto de aplicações do cotidiano, vamos supor que a unidade de medida esteja explícita, então $\frac{m}{n}$ de algo com tamanho x significa m partes do segmento $[0, x]$ dividido em n partes iguais, em que x está na reta numérica de unidade 1 como medida escolhida.

Vamos agora definir a ideia de $\frac{m}{n}$ de algo com precisão matemática.

Definição 2.25 (Fração de uma outra fração)**.** A fração $\frac{m}{n}$ de uma fração outra $\frac{k}{\ell}$ é correspondente ao comprimento da concatenação de m das n partes iguais que é dividido o segmento $\left[0, \frac{k}{\ell}\right]$.

Por esta definição, podemos dizer então que qualquer fração $\frac{m}{n}$ é igual a $\frac{1}{n}$ de m. Ainda não identificamos a multiplicação de frações na relação $\frac{m}{n}$ de $\frac{k}{\ell}$, nem relacionamos com área, conforme a Definição 2.19. Iremos primeiramente analisar alguns exemplos.

Exemplo 2.26. O que é $\frac{1}{4}$ de $\frac{8}{9}$? Sabemos que $\frac{8}{9}$ representa 8 cópias de $\frac{1}{9}$, então, a quarta parte será apenas 2 cópias de $\frac{1}{9}$, isto é, $\frac{2}{9}$, pois podemos representar 8 como $8 = 4 \times 2$, em que 8 é 4 grupos de 2.

O que podemos dizer sobre $\frac{3}{4}$ de $\frac{12}{13}$? Temos que dividir o segmento $[0, \frac{12}{13}]$ em 4 segmentos de mesmo comprimento e então concatenamos três desses segmentos. Assim, $\frac{12}{13}$ é 12 cópias de $\frac{1}{13}$ e 12 consiste em 3 grupos iguais de 4 segmentos de comprimento

Figura 19 – Representação de $\frac{3}{4}$ de $\frac{12}{13}$

$\frac{1}{13}$. Segue que $\frac{12}{13}$ é a concatenação de 4 segmentos, onde cada um desses segmentos é a concatenação de 3 cópias de $\frac{1}{13}$, como ilustrado na Figura 19. Portanto, $\frac{3}{4}$ de $\frac{12}{13}$ será $\frac{9}{13}$.

Agora, como encontrar $\frac{1}{5}$ de $\frac{6}{7}$? Supostamente deveríamos dividir 6 cópias de $\frac{1}{7}$ em 5 partes de mesmo comprimento. Mas 6 não é divisível por 5, o que dificulta o nosso trabalho. Uma das maneiras de encontrar a solução é utilizando o Teorema 2.4. Podemos reescrever a fração $\frac{6}{7}$ de forma que o numerador seja divisível por 5, ou seja,

$$\frac{6}{7} = \frac{5 \times 6}{5 \times 7} = \frac{30}{35}$$

e então, temos que $\frac{6}{7}$ pode ser representado como 30 cópias de $\frac{1}{35}$. Agora, 30 é cinco grupos iguais de 6. Logo, o segmento $[0, \frac{6}{7}]$ será particionado em 5 partes de mesmo comprimento e cada parte será 6 cópias de $\frac{1}{35}$, isto é, de comprimento $\frac{6}{35}$. Concluímos então que $\frac{1}{5}$ de $\frac{6}{7}$ é $\frac{6}{35}$. Note que $\frac{6}{35} = \frac{1 \times 6}{5 \times 7} = \frac{1}{5} \times \frac{6}{7}$. Logo, temos que $\frac{1}{5}$ de $\frac{6}{7}$ é o produto de $\frac{1}{5}$ por $\frac{6}{7}$.

Vamos ver que este é sempre o caso. Dada a fração $\frac{k}{\ell}$, suponha que queremos encontrar $\frac{m}{n}$ de $\frac{k}{\ell}$. O numerador k de $\frac{k}{\ell}$ pode não ser divisível por n, mas, novamente utilizando o Teorema 2.4 temos que

$$\frac{k}{\ell} = \frac{n \times k}{n \times \ell}$$

e o numerador $n \times k$ da fração $\frac{n \times k}{n \times \ell}$ agora será divisível por n. Daí, a n-ésima parte de $\frac{k}{\ell}$ é a n-ésima parte de $\frac{n \times k}{n \times \ell}$, que será $\frac{k}{n \times \ell}$, isto é, k cópias de $\frac{1}{n \times \ell}$. Logo, $\frac{m}{n}$ de $\frac{k}{\ell}$ sendo m cópias da n-ésima parte de $\frac{k}{\ell}$ será $m \times k$ cópias de $\frac{1}{n \times \ell}$, ou seja, $\frac{m \times k}{n \times \ell}$. Acabamos de provar o seguinte resultado.

Teorema 2.27. *Dadas as frações $\frac{m}{n}$ e $\frac{k}{\ell}$, a fração $\frac{m}{n}$ de $\frac{k}{\ell}$ é igual a $\frac{m \times k}{n \times \ell}$.*

Utilizando o Teorema 2.27, podemos então encontrar o seguinte Corolário.

Corolário 2.28. *Como $\frac{m}{n}$ de $\frac{k}{\ell}$ é $\frac{m \times k}{n \times \ell}$ que por sua vez, pela Equação (14), é o produto de frações, segue que $\frac{m}{n}$ de $\frac{k}{\ell}$ é o produto destas mesmas frações.*

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 2.29. Encontre $\frac{2}{3}$ de $\frac{5}{7}$. Para isso, utilizaremos o Teorema 2.27, logo $\frac{2}{3} \times \frac{5}{7} = \frac{2\times 5}{3\times 7} = \frac{10}{21}$.

Exemplo 2.30. Considere as frações $\frac{6}{13}$ e $\frac{15}{7}$. Pelo Corolário 2.28 temos que $\frac{6}{13}$ de $\frac{12}{7}$ será o produto $\frac{6}{13} \times \frac{15}{7} = \frac{6\times 12}{13\times 7} = \frac{72}{91}$.

2.7 DIVISÃO DE FRAÇÕES

Da forma como apresentaremos, a divisão de frações é bastante similar à divisão de números inteiros. Com efeito, apenas uma característica se difere: enquanto na divisão (exata) de números inteiros o dividendo deve ser múltiplo do divisor, na divisão de frações não precisamos desta hipótese.

Iremos primeiramente apresentar uma breve discussão intuitiva para então definirmos formalmente a divisão de frações. Vale ressaltar que a divisão é para a multiplicação o mesmo que a subtração é para a adição. Vamos analisar os conceitos de subtração e divisão utilizando números inteiros não-negativos, para então estender estas ideias para as frações. Para tanto, seguem as definições abaixo.

Definição 2.31 (Subtração de inteiros)**.** Sejam a e b inteiros não-negativos. $a - b$ é o inteiro c tal que $a = c + b$.

Definição 2.32 (Divisão de inteiros)**.** Sejam a e b inteiros não-negativos. $a \div b$ é o inteiro c tal que $a = c \times b$.

Note que, simplesmente trocando os símbolos da adição por multiplicação e a subtração por divisão na Definição 2.31 temos a Definição 2.32. Vamos agora utilizar essa ideia com as frações. A divisão pode ser vista como uma alternativa equivalente de expressar a multiplicação. De fato, $12 \div 3 = 4$ pois 4 é o número inteiro não-negativo tal que $4 \times 3 = 12$. Segue daí a afirmação de que 12 dividido por 3 é o inteiro não-negativo tal que quando multiplicado por 3 tem resultado 12. Podemos escrever esta afirmação como $(12 \div 3) \times 3 = 12$.

De maneira geral, dados dois inteiros não-negativos a e b, com $b \neq 0$, queremos que a divisão $a \div b$ seja um inteiro de modo que $a = (a \div b) \times b$. Esta afirmação apenas é verdadeira quando a for múltiplo de b. Iremos então aprimorar a Definição 2.32 de forma precisa, como segue.

Definição 2.33 (Divisão de inteiros)**.** Dados inteiros não-negativos a e b, com $b \neq 0$, e a sendo um múltiplo de b, então, denotamos por $a \div b$ o inteiro não-negativo que satisfaz a igualdade $(a \div b) \times b = a$.

Uma consequência desta definição será que se denotarmos $a \div b$ por c, então $a = c \times b$. Por outro lado, se temos os inteiros não-negativos de modo que $a = c \times b$, então c é $a \div b$.

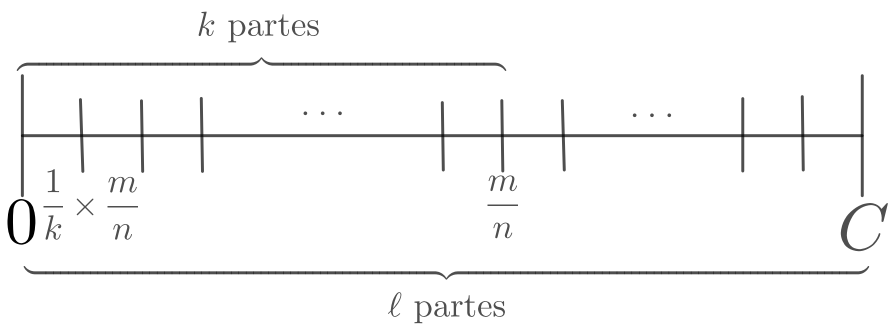


Figura 20 – Representação do Lema 2.34

Juntando essas duas afirmações, temos que, dados a, b e c, com $b \neq 0$, a igualdade $a \div b = c$ é equivalente a $a = c \times b$. Utilizaremos esse resultado para demonstrar o lema a seguir antes de entrar na discussão sobre a divisão de frações.

Lema 2.34. *Dadas as frações A e B, com $B \neq 0$, então existe uma única fração C tal que $A = C \times B$.*

Demonstração. Sejam as frações $A = \frac{m}{n}$ e $B = \frac{k}{\ell}$. Estamos procurando uma fração C tal que

$$\frac{m}{n} = C \times \frac{k}{\ell}. \tag{16}$$

Reescrevendo a Equação (16) como $\frac{m}{n} = \frac{k}{\ell} \times C$ (lembre que a comutatividade é válida na multiplicação de frações), temos que $\frac{k}{\ell} \times C$ é o comprimento da concatenação de k partes quando particionamos o segmento $[0, C]$ em ℓ partes iguais. Então, $\frac{m}{n}$ é o comprimento da concatenação dessas k partes; veja Figura 20. Seja D uma das ℓ partes em que o segmento $[0, C]$ foi dividido. Note que D também representa uma das k partições do segmento $[0, \frac{m}{n}]$, isto é, D é $\frac{1}{k}$ de $\frac{m}{n}$; veja a Figura 20.

Do Teorema 2.27 deduzimos que D é igual $\frac{1}{k} \times \frac{m}{n}$. Desta forma, o segmento $[0, C]$ é composto de ℓ cópias de D. Logo, utilizando a associatividade da multiplicação, obtemos

$$C = \ell \times D = \ell \times \left(\frac{1}{k} \times \frac{m}{n}\right) = \frac{\ell}{k} \times \frac{m}{n}.$$

Isto mostra que, se uma fração C satisfaz $\frac{m}{n} = C \times \frac{k}{\ell}$, então, necessariamente,

$$C = \frac{\ell}{k} \times \frac{m}{n}. \tag{17}$$

Note que o valor de C funciona na igualdade: $\frac{m}{n} = \left(\frac{\ell}{k} \times \frac{m}{n}\right) \times \frac{k}{\ell}$, isto é, $A = \left(\frac{\ell}{k} \times \frac{m}{n}\right) \times B$, logo, C será único, o que finaliza a nossa demonstração. $\square$

A demonstração do Lema 2.34 nos dá o valor exato da fração C, tal que $A = C \times B$. Considere $A = \frac{m}{n}$ e $B = \frac{k}{\ell}$. Temos pela Equação (17) que $C = \frac{\ell}{k} \times \frac{m}{n}$ ou ainda, usando a comutatividade da multiplicação,

$$C = \frac{m}{n} \times \frac{\ell}{k}. \tag{18}$$

Ainda, o Lema 2.34 diz que toda fração A é uma fração "múltipla" de B no sentido de que $A = C \times B$ para alguma fração C. Se $A = 1$, o Lema 2.34 também implica que existe uma única fração, que multiplicada por $B = \frac{k}{\ell}$ resulta em 1. Denotaremos tal fração por B^{-1} e a chamaremos de *inverso de* B, ou mais precisamente, *inverso multiplicativo de* B. Note que, necessariamente, $B^{-1} = \frac{\ell}{k}$. Com esta notação, em vista da Equação (18) podemos escrever a expressão de C como

$$C = A \times B^{-1}.$$

Vejamos um exemplo.

Exemplo 2.35. Se $A = \frac{9}{4}$ e $B = \frac{13}{7}$, então a fração C que satisfaz $A = C \times B$ será $A \times B^{-1} = \frac{9}{4} \times \frac{7}{13} = \frac{63}{52}$. Podemos verificar que $\frac{9}{4} = \frac{63}{52} \times \frac{13}{7}$.

Estamos prontos para definir a divisão de frações. A ideia será a mesma da divisão de inteiros, com a exceção de que o Lema 2.34 nos garante que não é necessário assumir primeiramente que A seja uma fração múltipla de B, no sentido dos números inteiros. Além disso, note que $12 \div 3 = 4$ e $\frac{12}{3}$ representam o mesmo ponto na reta numérica, ou seja, podemos representar $A \div B$ como $\frac{A}{B}$.

Definição 2.36 (Divisão de frações)**.** Se A, B são frações, com $B \neq 0$, a divisão de A por B, ou o quociente de A por B, denotado por $\frac{A}{B}$, é a fração tal que $A = \left(\frac{A}{B}\right) \times B$.

O fato de que exite uma única fração $\frac{A}{B}$ não é uma dúvida, por conta do Lema 2.34. Então, a definição é significativa. Por conseguinte, temos que $A \div B = A \times B^{-1}$. Além disso, dadas as frações $\frac{k}{\ell}$ e $\frac{m}{n}$, a igualdade (18) implica no seguinte teorema, que finaliza este capítulo.

Teorema 2.37 (Multiplicação pelo inverso)**.** *Sejam as frações* $\frac{m}{n}$ *e* $\frac{k}{\ell}$*, temos que*

$$\frac{\frac{m}{n}}{\frac{k}{\ell}} = \frac{m}{n} \times \frac{\ell}{k}. \tag{19}$$

Demonstração. Como aplicação direta do Lema 2.34 temos que $\frac{A}{B} = C$ e $C = \frac{m}{n} \times \frac{\ell}{k}$. Considerando $A = \frac{m}{n}$ e $B = \frac{k}{\ell}$, segue que $\frac{A}{B} = \frac{\frac{m}{n}}{\frac{k}{\ell}} = C$ e, então, $\frac{\frac{m}{n}}{\frac{k}{\ell}} = \frac{m}{n} \times \frac{\ell}{k}$, como queríamos demonstrar. □

O teorema acima corresponde à famosa regra da "*Multiplicação pelo inverso*" para divisão de frações. Conseguimos ver que não existe nada de misterioso sobre essa regra, é apenas uma consequência da definição correta da divisão de frações.

Vamos analisar um exemplo.

Exemplo 2.38. Considere as frações $\frac{4}{5}$ e $\frac{6}{11}$. Pelo Teorema 2.37, o quociente de $\frac{4}{5}$ por $\frac{6}{11}$ será dado por:

$$\frac{\frac{4}{5}}{\frac{6}{11}} = \frac{4}{5} \times \frac{11}{6} = \frac{4 \times 11}{5 \times 6} = \frac{44}{30}.$$

A Equação (19) mostra que a definição de

$$\frac{\dfrac{m}{n}}{\dfrac{k}{\ell}}$$

independe de usarmos frações equivalentes. Considere as frações $\frac{m}{n} = \frac{M}{N}$ e $\frac{k}{\ell} = \frac{K}{L}$, então,

$$\frac{\dfrac{m}{n}}{\dfrac{k}{\ell}} = \frac{\dfrac{M}{N}}{\dfrac{K}{L}}.$$

Temos que o lado esquerdo da igualdade acima é a área do retângulo de lados $\frac{m}{n}$ e $\frac{k}{\ell}$ enquanto o lado direito é a área do retângulo de lados $\frac{M}{N}$ e $\frac{K}{L}$. Além disso, sabemos que os lados $\frac{m}{n}$ e $\frac{M}{N}$ possuem o mesmo comprimento (veja Definição 2.3). Mais que isso, os lados $\frac{\ell}{k}$ e $\frac{L}{K}$ também possuem o mesmo comprimento, o que pode ser verificado através do Algoritmo da Multiplicação Cruzada uma vez que $\frac{k}{\ell} = \frac{K}{L}$. Como as áreas de retângulos com lados de mesmo comprimento devem ser ser iguais, a afirmação está provada.

Neste capítulo, definimos frações de maneira formal como pontos na reta numérica. Além disso, derivamos desta definição a definição formal de frações equivalentes, bem como apresentamos a multiplicação cruzada como maneira de verificar quando duas frações são equivalentes. Estabelecemos a relação de ordem entre frações, utilizando a reta numérica na comparação de frações e ainda, derivamos as fórmulas usuais para as as quatro operações básicas com base nestas formalizações. No próximo capítulo, vamos comparar estas ideias formais com o modo como frações e suas operações aparecem em livros didáticos.

3 FRAÇÕES EM LIVROS DIDÁTICOS DO ENSINO FUNDAMENTAL

O livro didático é um dos recursos amplamente utilizado nas escolas como facilitador da aprendizagem, dando suporte à prática pedagógica do educador. Em muitas escolas têm-se este uso, por outro lado, em tantas outras, os livros didáticos são utilizados, erroneamente, como elemento central. O Ministério da Educação elabora um guia para auxiliar as escolas na escolha de seus livros didáticos, literários e pedagógicos chamado Programa Nacional do Livro Didático (PNLD). O PNLD é essencialmente desenvolvido para as instituições de ensino públicas (BRASIL, 2020), porém muitas escolas privadas também se apoiam neste guia para a escolha do material utilizado.

As escolas públicas devem escolher, a cada triênio, duas opções de livro para cada disciplina. Essas escolhas são submetidas ao Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE), responsável pela aquisição do material conforme a disponibilidade e o planejamento financeiro (BRASIL, 2021). Caso não seja possível a aquisição de primeira escolha, o FNDE adquire a segunda opção.

Destaca-se aqui a importância de que ambas as escolhas sejam rigorosas e atendam às necessidades de alunos e professores. A distribuição destes livros didáticos, literários e pedagógicos aos alunos é de obrigação da escola, todavia, é de responsabilidade dos alunos prezar pelo cuidado e conservação destes materiais, visto que eles são apenas de uso anual, sendo devolvidos à escola ao final do período letivo.

Por outro lado, as escolas privadas fazem suas escolhas com base na combinação do guia do PNLD e as parcerias firmadas com as editoras. Ademais, diferentemente das escolas públicas, no caso das escolas particulares a aquisição dos materiais é de responsabilidade exclusiva de cada aluno no início do ano letivo, bem como a sua conversação e cuidado. Por fazerem a compra deste material, os alunos permanecem com ele ao final do período letivo.

Neste capítulo analisaremos algumas abordagens, definições, teoremas e exemplos apresentados nos livros didáticos usados no 5º ano do Ensino Fundamental:

- Porta aberta para o mundo: Matemática (2019) de Centurión, Teixeira e Rodrigues (2019), e
- Matemática: Joamir (2017) de Souza (2017);

para o 6º ano do Ensino Fundamental:

- A conquista da Matemática (2019a) de Giovanni, Giovanni Jr. e Castrucci (2019a),
- Matemática e Realidade (2018) de Iezzi, Machado e Doce (2018), e A conquista da Matemática (2015) de Giovanni, Giovanni Jr. e Castrucci (2015);

e ainda, no 7º ano do Ensino Fundamental:

- A conquista da Matemática (2019b) de Giovanni, Giovanni Jr. e Castrucci (2019b).

Dos livros citados acima, apenas os livros de Giovanni, Giovanni Jr. e Castrucci (2015, 2019a,b) são contemplados pelo PNLD. Além disso, também analisamos dois livros didáticos escritos em língua inglesa:

- Max Maths Primary (2018) de Hansen *et al.* (2018), e
- Mathematics for the international student (2014) de Haese *et al.* (2014),

de modo a comparar a proposta deste trabalho e a realidade encontrada pelos professores em seus materiais de apoio no Brasil e fora dele, visto que a autora deste trabalho leciona em Escola Internacional, fazendo o uso deste material.

Ressaltamos que o objetivo aqui é de sugerir propostas de trabalho que combinem este texto com o que é apresentado nos livros didáticos e nos documentos oficiais para educação. Portanto, não pretendemos fechar questão em relação ao *que é certo ou o que é errado*. As críticas tecidas aqui são exclusivamente parte da contribuição deste trabalho.

Além dos livros didáticos "tradicionais", iremos também analisar a proposta do projeto Livro Aberto[1] intitulada Frações no Ensino Fundamental (2017) de Ripoll *et al.* (2017). O projeto Livro Aberto engloba propostas didáticas e reúne reflexões e discussões propostas por professores e estudantes de Licenciatura para várias etapas escolares. Em relação às frações, uma das bases sobre a qual o texto de Ripoll *et al.* (2017) está fundamentada é o livro Understanding numbers in elementary school mathematics (2011), de Wu (2011), que também foi utilizado para as construções formais do Capítulo 2. O livro de Ripoll *et al.* (2017)[2] é considerado colaborativo, pois é possível propor alterações ou sugerir outras atividades, que após submetidas ao grupo de autores, podem ser acrescentadas ao documento.

Combinada com o texto deste trabalho e a análise dos livros didáticos, utilizaremos como referência a Base Nacional Comum Curricular (BNCC). A BNCC é um documento que define o conjunto de aprendizagens essenciais em cada etapa escolar, podemos dizer então que este documento é um guia para a educação básica.

Para a Matemática, são enunciados cinco unidades temáticas: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e medidas, e Probabilidade e estatística. Para cada unidade temática apresentam-se objetos do conhecimento. Estes estabelecem a ênfase que deve ser dada em cada ano da escolarização. Ainda temos as habilidades, que indicam a expectativa de aprendizagem para cada objeto do conhecimento. (BRASIL, 2017)

Nas seções que seguem iremos analisar as habilidades relacionadas a frações contidas na BNCC em conjunto com a abordagem destes conteúdos (ou objetos do conhecimento) constante nos livros didáticos e a formalização das frações derivadas no Capítulo 2. Inicialmente, vamos verificar a abordagem de alguns livros sobre a definição de fração.

[1] Veja o site do projeto em https://umlivroaberto.org/.
[2] Nesta seção, vamos nos referir a esta específica obra também com o termo *Livro aberto*.

3.1 DEFINIÇÃO DE FRAÇÃO

A maior parte dos livros didáticos iniciam os capítulos com a abordagem dos conteúdos apresentando aplicações ou pequenas discussões para ideias intuitivas, para na sequência "definirem" estes conteúdos, e, finalmente, mostrar resultados importantes e exemplos. No caso das Frações, os livros didáticos dos autores Souza (2017), Giovanni, Giovanni Jr. e Castrucci (2019a) e Centurión, Teixeira e Rodrigues (2019), apresentam alguns exemplos utilizando segmentação de figuras em partes iguais, indicam o que seria o numerador e o denominador de uma fração, porém não apresentam uma definição, sequer informal, de fração. Apenas no livro de Iezzi, Machado e Doce (2018, p. 181), cujo Capítulo 12 é intitulado "O que é fração?", temos a seguinte afirmação informal sobre o que é uma fração: "Podemos dizer, então, que fração é um número que representa partes de um inteiro."

Podemos afirmar que *não há definição para Frações nestes livros analisados*. Como fazer com que alunos do ensino básico entrem em contato com matemática formal se nem ao menos definições são apresentadas pelo material de apoio aos professores? A ideia intuitiva de dividir uma figura em partes iguais é válida, todavia, poderia ser combinada com uma definição formal de frações, por exemplo, utilizando a reta numérica como sugerido no Capítulo 2.

Ressaltamos que na BNCC temos a seguinte habilidade que deve ser trabalhada com alunos de 5º ano:

> (EF05MA03) Identificar e representar frações (menores e maiores que a unidade), associando-as ao resultado de uma divisão ou à ideia de parte de um todo, **utilizando a reta numérica como recurso**. (BRASIL, 2017, p. 295, grifo nosso).

No Capítulo 1 falamos sobre as principais ideias relacionadas a Frações pela BNCC: parte-todo, quociente e razão. Também citamos que trazer essas três abordagens não é satisfatório, visto que temos três ideias diferentes para um mesmo elemento. De toda forma, ressaltamos aqui que a BNCC evidencia o uso da reta numérica.

Nos livros citados acima, apenas em Centurión, Teixeira e Rodrigues (2019) têm-se uma atividade fazendo o uso da reta numérica, conforme Figura 21. Esta atividade é apresentada sem qualquer orientação prévia, apenas solicita ao aluno que identifique qual fração está representada em cada reta numérica.

Quando visitamos o Livro Aberto de Ripoll *et al.* (2017), percebemos a apresentação do conteúdo como parte-todo, utilizando área de figuras planas, inicialmente com frações unitárias. Na sequência faz a relação entre a área das figuras fazendo uso de material concreto como pizzas, barras de chocolates, entre outros, e a representação na reta numérica, para então indicar que as frações podem ser representadas na reta numérica, fazendo referência ao comprimento de segmentos. Aproveitando o gancho, trabalha com a relação de ordem das frações com o uso dos pontos na reta. Para tanto, destacamos

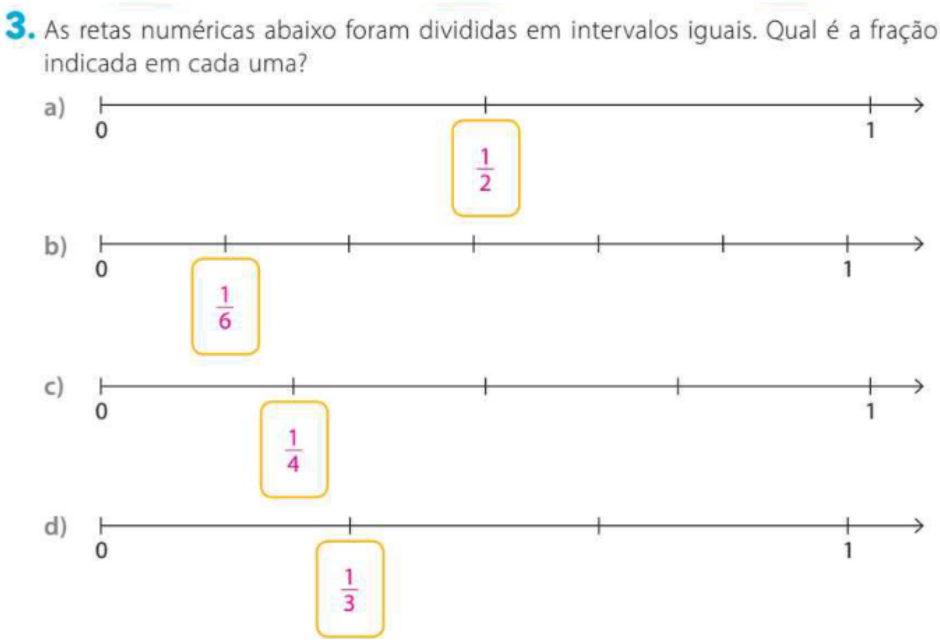


Figura 21 – Fonte: Centurión, Teixeira e Rodrigues (2019, p. 166)

a Atividade 11 (RIPOLL *et al.*, 2017, p. 43), apresentada da Figura 22, a qual sugere a construção de um varal, em que os alunos devem posicionar corretamente os números (inteiros não-negativos e frações) contidos em cartões, utilizando um barbante como varal. Esta atividade propõe, de maneira concreta, a localização dos números na reta numérica, o que vai ao encontro da relação de ordem entre frações, dada pela Definição 2.7.

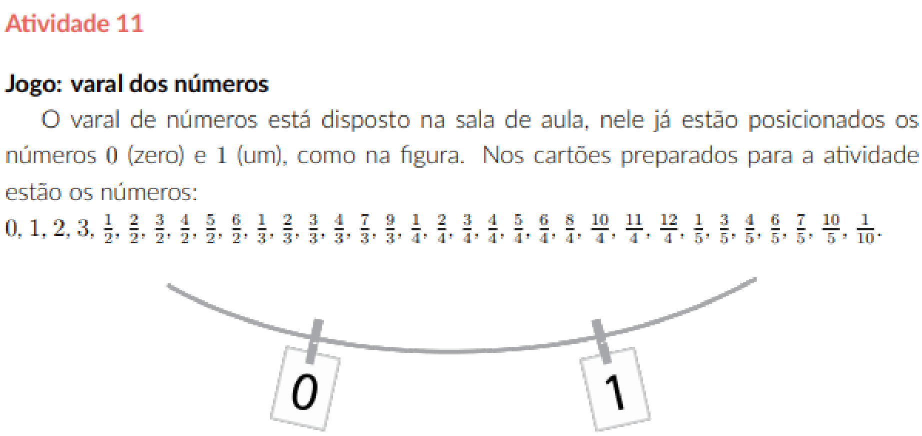


Figura 22 – Fonte: Ripoll *et al.* (2017, p. 43)

A relação entre frações, segmentos de reta e pontos da reta numérica poderia ser apresentada aos alunos, e neste caso, a Definição 2.1 faria bastante sentido.

É importante que os livros didáticos, de maneira geral, sirvam de suporte e auxílio aos professores e alunos. Quando este material não apresenta algo tão importante quanto a definição de frações abre-se uma lacuna para diferentes interpretações, assim evidenciando essa defasagem quando é perguntado o que é, de fato, uma fração.

3.2 FRAÇÕES EQUIVALENTES

Agora, vamos focar nossa análise em *frações equivalentes*. De acordo com a Definição 2.3, frações equivalentes representam o mesmo ponto na reta numérica. Como visto anteriormente, poucos livros apresentam a ideia de localizar as frações na reta numérica. Segue o que é falado em alguns dos que analisamos

Segundo Souza (2017, p. 256): "Quando duas ou mais frações representam a mesma parte do todo, dizemos que essas são frações equivalentes." Ou então, conforme Giovanni, Giovanni Jr. e Castrucci (2019a, p. 142): "Duas ou mais frações que representam a mesma porção da unidade são chamadas frações equivalentes". Ainda, segundo Centurión, Teixeira e Rodrigues (2019, p. 176): "As frações que representam a mesma parte do todo são chamadas frações equivalentes". Já na página seguinte, Centurión, Teixeira e Rodrigues (2019), em uma nota na margem, declara que "**Equivalente** significa ter igual valor. Frações equivalentes indicam um mesmo número." (CENTURIÓN; TEIXEIRA; RODRIGUES, 2019, p. 177, grifo do autor). Por outro lado, temos em Haese *et al.* (2014, p. 131): "Two fractions are equal if they describe the same amount. They lie at the same place on the number line."

Todas estas definições utilizam a ideia de parte-todo. Apenas em Haese *et al.* (2014) temos a ideia de mesmo ponto na reta numérica, conforme a Definição 2.3 e em Centurión, Teixeira e Rodrigues (2019) chegamos mais perto da ideia de mesmo ponto na reta numérica indicando que frações equivalentes indicam o mesmo número. Destacamos aqui as habilidades da BNCC referentes à Frações Equivalentes para 5º ano:

> (EF05MA04) Identificar frações equivalentes.
>
> (EF05MA05) Comparar e ordenar números racionais positivos (representações fracionária e decimal), **relacionando-os a pontos na reta numérica.** (BRASIL, 2017, p. 295, grifo nosso)

Mais que isso, para o 6º ano tem-se a seguinte habilidade conforme a BNCC:

> (EF06MA07) Compreender, comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros e resultado de divisão, identificando frações equivalentes. (BRASIL, 2017, p. 301)

Aparentemente, a BNCC recomenda a utilização da reta numérica apenas para estabelecer a relação de ordem entre frações. A definição de frações equivalentes fica vaga pois, não há clareza de como apresentar este conceito aos alunos no 5º ano. Já para o 6º ano não há mais a ideia de reta numérica, apenas se utiliza a relação de ordem relacionada com parte-todo e divisão. Como visto anteriormente, além de não possuírem a definição de frações, os livros didáticos consultados também não trazem a relação entre a reta numérica e as frações.

Conforme as citações acima, podemos observar que a definição de frações equivalentes se dá como frações diferentes que representam a mesma parte do todo ou da unidade.

É possível mostrar aos alunos que esta definição pode ser estendida à reta numérica, como frações que representam o mesmo ponto na reta, como apresentado por Haese *et al.* (2014). Assim, contempla-se a Definição 2.3.

O Livro Aberto de Ripoll *et al.* (2017), propõe algumas atividades com a ideia intuitiva de mesma parte do todo. Após essa discussão, entra-se na apresentação da reta numérica, identificando quando duas frações representam o mesmo ponto. Na sequência, o resultado do nosso Teorema 2.4, isto é, dadas duas frações $\frac{m}{n}$ e $\frac{k}{\ell}$, temos a igualdade $\frac{m}{n} = \frac{cm}{cn}$ com c um inteiro não-negativo, é apresentado. A demonstração do Teorema 2.4 foi suprimida, porém, fica claro o uso do mesmo para encontrar frações equivalentes; veja na Figura 23.

REFLETINDO

Você deve ter observado que as atividades 5 e 6 são muito parecidas. A diferença é que, nesta última foram utilizadas figuras retangulares (na atividade 5 foram usadas figuras circulares). Ao resolver esta atividade você deve ter percebido que

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{5}{10} = \frac{8}{16},$$

pois todas as frações representam a mesma quantidade: a medida da área da região retangular cinza em relação à área do retângulo do encarte, isto é, quando a unidade considerada é a área do retângulo do encarte. Observe ainda que as igualdades acima podem ser reescritas do seguinte modo:

$$\frac{1}{2} = \frac{1\times 1}{1\times 2} = \frac{2\times 1}{2\times 2} = \frac{3\times 1}{3\times 2} = \frac{4\times 1}{4\times 2} = \frac{5\times 1}{5\times 2} = \frac{8\times 1}{8\times 2}.$$

Na verdade, para qualquer subdivisão da fração $\frac{1}{2}$ em p partes iguais, deve-se considerar p dessas novas partes para obter uma fração igual à anterior. Matematicamente falando, isto significa que:

$$\frac{1}{2} = \frac{p\times 1}{p\times 2}$$

qualquer que seja p um número natural maior que zero. De modo geral, para qualquer fração de numerador n e denominador d, temos que

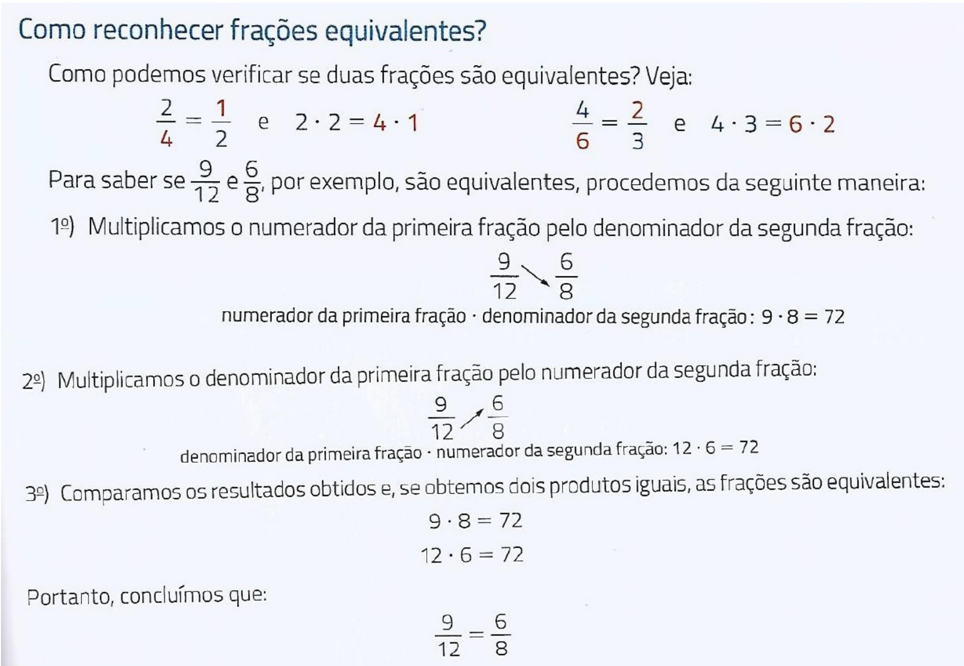
$$\frac{n}{d} = \frac{1\times n}{1\times d} = \frac{2\times n}{2\times d} = \frac{3\times n}{3\times d} = \frac{4\times n}{4\times d} = \frac{5\times n}{5\times d} = \cdots = \frac{p\times n}{p\times d} = \cdots$$

qualquer que seja o número natural $p > 0$. Com isso, você aprendeu uma técnica para obter frações que representam a mesma quantidade que uma fração dada: basta multiplicar o numerador e o denominador da fração dada por um mesmo número natural $p > 0$.

Isto será muito útil para a realização de outras atividades com frações.

Figura 23 – Fonte: Ripoll *et al.* (2017, p. 61)

Vale ressaltar como os livros indicam a maneira de encontrar frações equivalentes. Em sua maioria, utiliza-se a multiplicação, ou divisão, do numerador e do denominador pelo mesmo número. Apenas em Iezzi, Machado e Doce (2018) temos a apresentação do Teorema 2.6, sem de fato falar em Multiplicação Cruzada, conforme a Figura 24. Os livros ainda indicam que quando dividimos numerador e denominador pelo mesmo número estamos aplicando o processo de simplificação das frações e este processo é feito até que as frações fiquem em sua forma *irredutível*. Em alguns livros temos a definição de frações irredutíveis, todavia, não há uma indicação do porquê utilizar este processo. Em nosso ponto de vista, o uso de frações na forma irredutível é válido, contudo trata-se de um processo *estético*, ou seja, não há perda de formalismo matemático caso o aluno não o faça, entretanto, que pode importar na *prática*, com vimos no Capítulo 2.



Como reconhecer frações equivalentes?

Como podemos verificar se duas frações são equivalentes? Veja:

$\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ e $2 \cdot 2 = 4 \cdot 1$ $\qquad$ $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ e $4 \cdot 3 = 6 \cdot 2$

Para saber se $\frac{9}{12}$ e $\frac{6}{8}$, por exemplo, são equivalentes, procedemos da seguinte maneira:

1º) Multiplicamos o numerador da primeira fração pelo denominador da segunda fração:

$\frac{9}{12} \searrow \frac{6}{8}$

numerador da primeira fração · denominador da segunda fração: $9 \cdot 8 = 72$

2º) Multiplicamos o denominador da primeira fração pelo numerador da segunda fração:

$\frac{9}{12} \nearrow \frac{6}{8}$

denominador da primeira fração · numerador da segunda fração: $12 \cdot 6 = 72$

3º) Comparamos os resultados obtidos e, se obtemos dois produtos iguais, as frações são equivalentes:

$9 \cdot 8 = 72$

$12 \cdot 6 = 72$

Portanto, concluímos que:

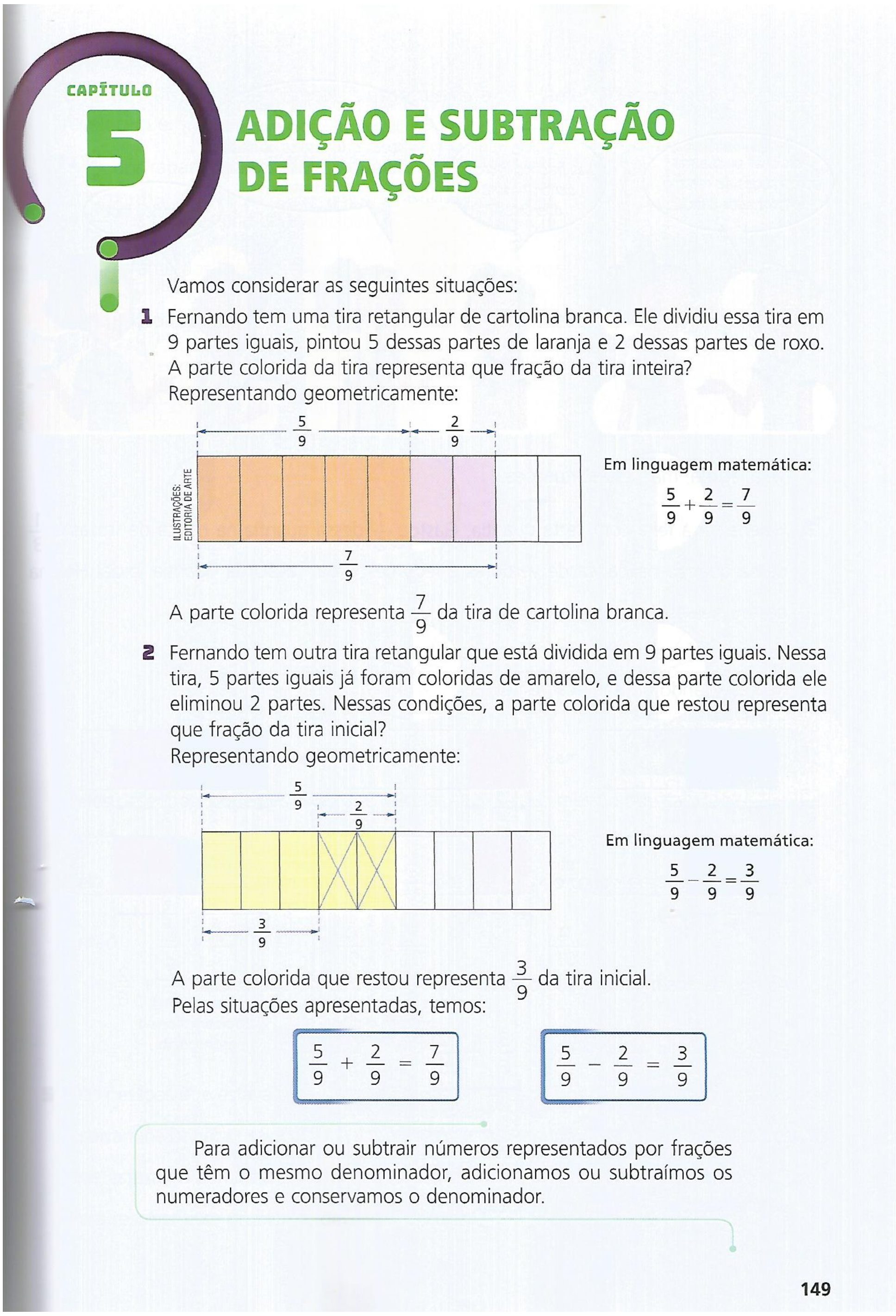
$$\frac{9}{12} = \frac{6}{8}$$

Figura 24 – Fonte: Iezzi, Machado e Doce (2018, p. 192-193)

3.3 ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO DE FRAÇÕES

A adição e a subtração de frações são pontos muito importantes no ensino de frações. Anterior à BNCC, eram utilizados os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) (BRASIL, 1997), em que estava indicado o ensino de operações com frações já no 5º ano. Com a BNCC, houve a alteração do ano escolar "responsável" pelo ensino de adição e subtração de frações, passando do 5º para o 6º ano. Já a abordagem da multiplicação e da divisão de frações do 6º passou para o 7º ano. Lembramos que as escolas possuem autonomia para irem além do que é proposto pela BNCC, sendo os conteúdos tratados na BNCC como o essencial para cada etapa escolar.

Num primeiro momento, os livros de 6º ano analisados apresentam a adição e a subtração de frações de mesmo denominador, fazendo referência à soma de parcelas iguais e diferença entre parcelas. Além disso, trazem a utilização da área de figuras planas para *demonstrar* essas operações; veja, por exemplo, a Figura 25. Como fechamento do assunto, trazem que o resultado da adição e da subtração de frações com mesmo denominador é equivalente a operar apenas com os numeradores.



CAPÍTULO 5

ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO DE FRAÇÕES

Vamos considerar as seguintes situações:

1 Fernando tem uma tira retangular de cartolina branca. Ele dividiu essa tira em 9 partes iguais, pintou 5 dessas partes de laranja e 2 dessas partes de roxo. A parte colorida da tira representa que fração da tira inteira?
Representando geometricamente:

Em linguagem matemática:

$\frac{5}{9} + \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$

A parte colorida representa $\frac{7}{9}$ da tira de cartolina branca.

2 Fernando tem outra tira retangular que está dividida em 9 partes iguais. Nessa tira, 5 partes iguais já foram coloridas de amarelo, e dessa parte colorida ele eliminou 2 partes. Nessas condições, a parte colorida que restou representa que fração da tira inicial?
Representando geometricamente:

Em linguagem matemática:

$\frac{5}{9} - \frac{2}{9} = \frac{3}{9}$

A parte colorida que restou representa $\frac{3}{9}$ da tira inicial.
Pelas situações apresentadas, temos:

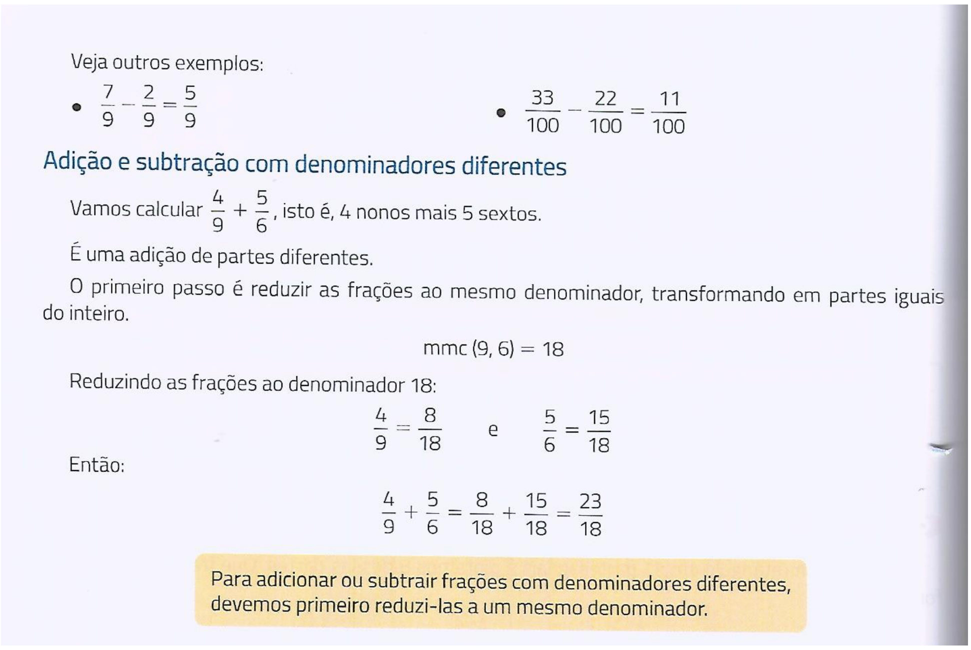
$\boxed{\frac{5}{9} + \frac{2}{9} = \frac{7}{9}}$ $\boxed{\frac{5}{9} - \frac{2}{9} = \frac{3}{9}}$

Para adicionar ou subtrair números representados por frações que têm o mesmo denominador, adicionamos ou subtraímos os numeradores e conservamos o denominador.

149

Figura 25 – Fonte: Giovanni, Giovanni Jr. e Castrucci (2019a, p. 149)

Em ambos os livros de Giovanni, Giovanni Jr. e Castrucci (2019a) e Iezzi, Machado e Doce (2018), após a adição e a subtração de frações com denominadores iguais, temos a apresentação da operação, agora com denominadores diferentes. Os autores utilizam o termo *redução ao mesmo denominador*, como ilustrado na Figura 26. Os livros indicam este processo como uma maneira de reescrever as frações utilizando frações equivalentes, de maneira que elas tenham o mesmo denominador. Iezzi, Machado e Doce (2018, p. 206) falam em utilizar o mínimo múltiplo comum dos denominadores para a redução ao mesmo denominador. Já Giovanni, Giovanni Jr. e Castrucci (2019a, p. 147) utilizam a área de figuras planas como maneira de mostrar que temos frações equivalentes e, na sequência, utilizam o método apresentado na Seção 3.2. Após este processo, com as frações possuindo o mesmo denominador, volta-se ao caso descrito acima.



Veja outros exemplos:

- $\frac{7}{9} - \frac{2}{9} = \frac{5}{9}$
- $\frac{33}{100} - \frac{22}{100} = \frac{11}{100}$

Adição e subtração com denominadores diferentes

Vamos calcular $\frac{4}{9} + \frac{5}{6}$, isto é, 4 nonos mais 5 sextos.

É uma adição de partes diferentes.

O primeiro passo é reduzir as frações ao mesmo denominador, transformando em partes iguais do inteiro.

$$\text{mmc}\,(9, 6) = 18$$

Reduzindo as frações ao denominador 18:

$$\frac{4}{9} = \frac{8}{18} \quad \text{e} \quad \frac{5}{6} = \frac{15}{18}$$

Então:

$$\frac{4}{9} + \frac{5}{6} = \frac{8}{18} + \frac{15}{18} = \frac{23}{18}$$

Para adicionar ou subtrair frações com denominadores diferentes, devemos primeiro reduzi-las a um mesmo denominador.

Figura 26 – Fonte: Iezzi, Machado e Doce (2018, p. 206)

Por sua vez, o Livro Aberto inicia com uma discussão sobre a importância de possuir a mesma unidade, comparando dois recipientes diferentes. Na sequência é apresentada a discussão quando é utilizada a mesma unidade. Por fim, mostra-se a adição e a subtração de frações utilizando frações equivalentes. Ressaltamos ainda que o Livro Aberto apresenta a ideia destas operações na reta numérica, como a soma ou diferença entre segmentos.

Comparando os livros brasileiros aqui analisados com Haese *et al.* (2014), que é australiano, percebemos a mesma sequência didática. A apresentação da adição e da subtração de frações com o mesmo denominador como área de figuras e, após, operando as frações apenas nos numeradores, mantendo o denominador. Na sequência, quando os denominadores diferem, é proposto que sejam encontradas frações equivalentes, de modo que as frações sejam reescritas com o mesmo denominador, para então voltar ao caso inicial.

A proposta da Fórmula geral apresentada na Equação (10) não está presente em nenhum dos três livros para o sexto ano aqui analisados. De toda forma, é possível que professores mostrem esta equação como outra maneira para encontrar a soma ou a diferença entre duas frações. O método da redução ao mesmo denominador encaixa-se na Subseção 2.3, ou seja, é válida no ensino destas operações também.

Segundo a BNCC, não há uma maneira determinada de como resolver a adição e a subtração de frações. Apenas a seguinte habilidade deve ser desenvolvida:

> (EF06MA10) Resolver e elaborar problemas que envolvam adição ou subtração com números racionais positivos na representação fracionária. (BRASIL, 2017, p. 301)

Todas as maneiras apresentadas aqui são válidas. O objetivo principal é de que os alunos compreendam o processo, não o façam apenas de maneira mecânica. Nos livros didáticos e neste texto faz-se a utilização de frações equivalentes para que, quando os denominadores forem diferentes, as frações sejam reescritas com o mesmo denominador. Desta forma, os conceitos passam a fazer sentido e a fixação por parte dos alunos é concreta. Quando utiliza-se fórmulas prontas, sem uma explicação prévia, o processo transforma-se em algo puramente mecânico e maçante para os alunos. Sendo assim, não há compreensão concreta dos conceitos e, consequentemente, não há fixação por parte dos estudantes.

Neste texto apresentamos as frações na forma de números mistos após a adição de frações, como parte integrante da adição. Nos livros didáticos, em sua maioria, os números mistos são apresentados separadamente, como uma seção única. Em Iezzi, Machado e Doce (2018, p. 186) temos a seção "Tipos de frações", em que são expostas frações próprias com numerador menor que o denominador, frações impróprias com numerador maior que o denominador e frações aparentes com numerador múltiplo do denominador. Sem citar o que seria um número misto, é apresentado na página 189 como transformar um número misto em fração imprópria.

Já em Centurión, Teixeira e Rodrigues (2019, p. 181) inicia-se o capítulo com o título "Frações maiores que a unidade", sendo utilizado material concreto para indicar a relação entre frações impróprias e números mistos, como sanduíches e fatias de pizza. Destacamos aqui um atividade muito interessante na página 183, em que os alunos devem localizar os números mistos na reta numérica, como ilustrado na Figura 27.

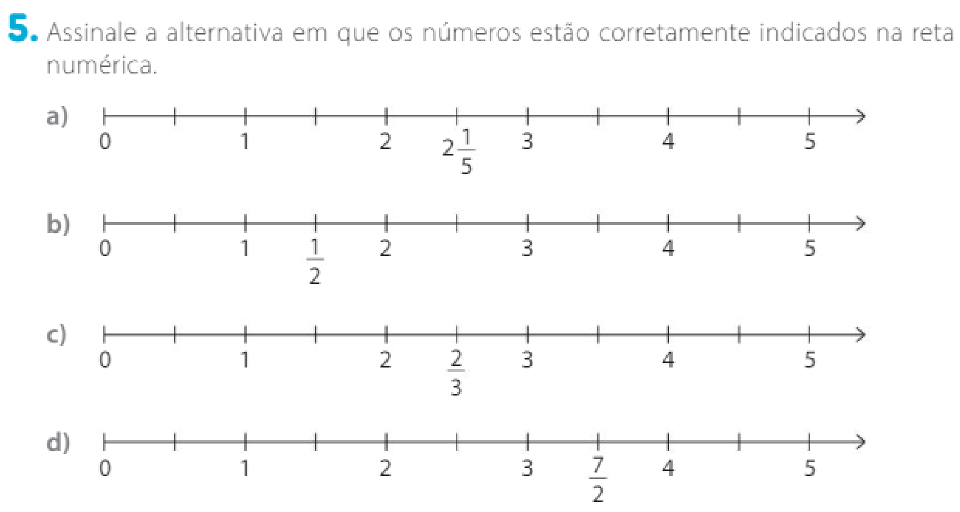


Figura 27 – Fonte: Centurión, Teixeira e Rodrigues (2019, p. 183)

Considerando os livros em língua inglesa, em Hansen *et al.* (2018, p. 153) fala-se apenas em mudar uma fração imprópria para número misto. Ao final da página tem-se a indicação que para mudar um número misto para uma fração imprópria devemos multiplicar e para mudar uma fração imprópria para número misto devemos dividir.

Segue que, assim como a definição de frações, a definição de números mistos está ausente nos livros analisados. Os alunos são apresentados apenas a ideia intuitivas e com transformações diretas, ou seja, de maneira mecânica. É citado sobre a adição estar presente nos números mistos, mas este conceito se perde pelo capítulo.

3.4 MULTIPLICAÇÃO E DIVISÃO DE FRAÇÕES

Como citado anteriormente, a multiplicação e a divisão de frações, pela BNCC, passou de objeto do conhecimento do 6º para o 7º ano. Para uma melhor análise, iremos utilizar os livros A conquista da Matemática (2019b) de Giovanni, Giovanni Jr. e Castrucci (2019b), que faz parte do guia atual do PNLD e A conquista da Matemática (2015) de Giovanni, Giovanni Jr. e Castrucci (2015), versão anterior do livro do 6º ano, em que a multiplicação e a divisão estavam presentes. Nesta seção não teremos a análise do Livro Aberto de Ripoll *et al.* (2017), pois o mesmo não possui as operações de multiplicação e divisão de frações.

Enunciando a habilidade da BNCC referente à multiplicação e divisão de frações, temos:

> (EF07MA11) Compreender e utilizar a multiplicação e a divisão de números racionais, a relação entre elas e suas propriedades operatórias. (BRASIL, 2017, p. 305)

Note que não há especificação da maneira como estes conteúdos devem ser expostos aos alunos. De toda forma, a BNCC trás estas operações utilizando as representações fracionária e decimal como uma única habilidade.

Iniciaremos analisando as páginas referentes a multiplicação. Fazendo uma comparação rápida entre os livros Giovanni, Giovanni Jr. e Castrucci (2019b) e Giovanni, Giovanni Jr. e Castrucci (2015) percebemos que não houve alteração na abordagem. Os textos continuam idênticos de uma obra para outra, conforme as Figuras 28 e 29.

> Para multiplicar um número natural por um número representado por uma fração, multiplicamos o número natural pelo numerador da fração e conservamos o denominador.

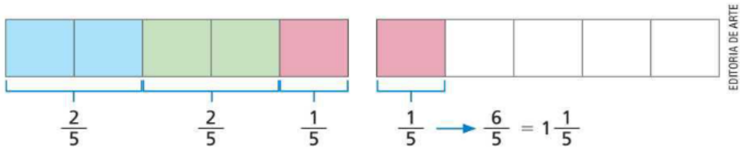
Figura 28 – Fonte: Giovanni, Giovanni Jr. e Castrucci (2015, p. 188)

Nota-se uma separação na abordagem da multiplicação entre fração por um inteiro e da multiplicação entre duas frações. Na primeira abordagem, temos a representação da

Para resolver esse problema, podemos fazer $3 \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{5} + \frac{2}{5} + \frac{2}{5} = \frac{6}{5}$ ou $1\frac{1}{5}$

Então: $3 \cdot \frac{2}{5} = \frac{3 \cdot 2}{5} = \frac{6}{5}$

Geometricamente, podemos representar assim:



Gabriela vai usar $\frac{6}{5}$ de metro ou 1 metro e $\frac{1}{5}$ de metro de fita.

Para multiplicar um número inteiro por um número racional na forma de fração, multiplicamos o número inteiro pelo numerador da fração e conservamos o denominador.

Figura 29 – Fonte: Giovanni, Giovanni Jr. e Castrucci (2019b, p. 107)

multiplicação como soma de parcelas iguais através da área de figuras (veja a Figura 29), como também realizado no Capítulo 2. Já na segunda abordagem, temos a ideia $\frac{m}{n}$ de $\frac{k}{\ell}$, também apresentada no Capítulo 2, juntamente com a representação por área de figuras planas, conforme as Figuras 30 e 31.

Temos então, que a abordagem feita pelos livros Giovanni, Giovanni Jr. e Castrucci (2015) e Giovanni, Giovanni Jr. e Castrucci (2019b) estão de acordo com a proposta deste texto. Ambos trazem, ao final da explanação, o resultado apresentando no Teorema 2.24 como a maneira de encontrar o produto entre duas frações, conforme a Figura 30.

Para multiplicar dois números escritos na forma de fração, multiplica-se o numerador de uma pelo numerador da outra e o denominador de uma pelo denominador da outra.

Figura 30 – Fonte: Giovanni, Giovanni Jr. e Castrucci (2015, p. 190)

Para multiplicar números racionais na forma de fração, multiplicam-se os numeradores entre si e multiplicam-se os denominadores entre si.

Figura 31 – Fonte: Giovanni, Giovanni Jr. e Castrucci (2019b, p. 108)

Do mesmo modo, nota-se que a abordagem sobre divisão de frações repete-se de uma edição para outra, conforme as Figuras 32 e 33.

Importante ressaltar que os livros trazem primeiramente a discussão sobre o inverso de uma fração. Após, temos uma apresentação da divisão utilizando área de figuras

Note que a divisão de $\frac{2}{3}$ por $\frac{1}{6}$ dá o mesmo resultado que a multiplicação de $\frac{2}{3}$ pelo inverso de $\frac{1}{6}$, que é $\frac{6}{1}$:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{2}{3} : \frac{1}{6} = 4 \\ \frac{2}{\cancel{3}_{1}} \times \frac{\cancel{6}^{2}}{1} = \frac{4}{1} = 4 \end{array}\right\} \rightarrow \frac{2}{3} : \underbrace{\frac{1}{6} = \frac{2}{3} \times \frac{6}{1}}_{\text{inverso}}$$

Para dividir uma fração por outra fração, diferente de zero, multiplicamos a primeira pelo inverso da segunda.

Figura 32 – Fonte: Giovanni, Giovanni Jr. e Castrucci (2015, p. 195)

Note que a divisão de $\frac{2}{3}$ por $\frac{1}{6}$ tem o mesmo resultado que a multiplicação de $\frac{2}{3}$ pelo inverso de $\frac{1}{6}$, que é $\frac{6}{1}$:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{2}{3} : \frac{1}{6} = 4 \\ \frac{2}{\cancel{3}_{1}} \cdot \frac{\cancel{6}^{2}}{1} = \frac{4}{1} = 4 \end{array}\right] \rightarrow \frac{2}{3} : \underbrace{\frac{1}{6} = \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{1}}_{\text{inverso}}$$

Para dividir uma fração por outra fração, diferente de zero, multiplicamos a primeira pelo inverso da segunda.

Figura 33 – Fonte: Giovanni, Giovanni Jr. e Castrucci (2019b, p. 113)

planas. Na sequência, é exposto que ao dividir duas frações temos o mesmo resultado que multiplicar a primeira fração pelo inverso da segunda, porém, sendo imposto o resultado da divisão. Desta forma, os livros concluem que dividir duas frações é o mesmo que multiplicar a primeira pelo inverso da segunda fração, como apresentamos no Capítulo 2.

Contudo, não é manifestada qualquer discussão referente à relação entre multiplicação e divisão, como visto na Definição 2.33. Temos apenas a utilização do resultado encontrado no Teorema 2.37, sem explicações do porquê o resultado é válido. Sendo assim, os resultados apresentados no Capítulo 2 são utilizados em partes pelos livros.

Uma das poucas diferenças entre os livros A conquista da Matemática (2015) e A conquista da Matemática (2019b) se dá pelo fato de que a edição anterior do 6º ano apresenta apenas a divisão com frações. Já a edição atual do 7º ano possui a inclusão da divisão dos números decimais no mesmo capítulo, visto que o título do capítulo é "Divisão com números racionais". Observa-se nas Figuras 34 e 35 que os exercícios se repetem de uma edição para a outra com o acréscimo dos números racionais na forma decimal, que foram inseridos em alguns exercícios.

Neste capítulo, usando os conceitos formais de frações e suas operações vistos

b) $\frac{5}{8}$: 2

c) $\frac{7}{10}$: 14

e) $0 : \frac{5}{9}$

4. Um pote contém 4 quilogramas de farinha. Quero repartir igualmente essa quantidade usando xícaras que, cheias, podem conter até $\frac{1}{5}$ de quilograma de farinha. De quantas dessas xícaras cheias vou precisar para repartir a quantidade de farinha que há no pote?

5. Em um copo cabe $\frac{1}{6}$ de litro de água. Quantos desses copos são necessários para encher uma jarra com capacidade para $\frac{2}{3}$ de litro?

8. Qual é o resultado de cada divisão a seguir?

a) $\frac{1}{4} : \frac{2}{3}$ **b)** $\frac{7}{8} : \frac{1}{4}$ **c)** $\frac{1}{40} : \frac{1}{30}$

9. Determine o valor de cada expressão numérica.

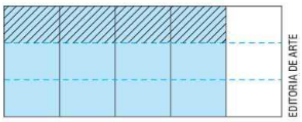
a) $\frac{2}{3} : \frac{4}{5} + \frac{1}{2}$ **b)** $\frac{1}{2} - \frac{5}{8} : \frac{5}{4}$

10. Calcule:

a) $\dfrac{\frac{10}{3}}{\frac{8}{9}}$ **b)** $\dfrac{\frac{4}{1}}{\frac{5}{1}}$ **c)** $\dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{7}}$ **d)** $\dfrac{\frac{7}{4}}{\frac{2}{3}}$

Figura 34 – Fonte: Giovanni, Giovanni Jr. e Castrucci (2015, p. 196)

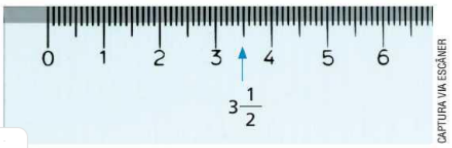
2. A figura seguinte sugere a operação $\frac{4}{5}$: 3. Qual é o resultado dessa divisão?



3. Calcule:

a) $5 : \frac{1}{4}$ **b)** $\frac{5}{8} : 2$ **c)** $1 : \frac{4}{11}$ **d)** $0 : \frac{5}{9}$

4. Observe $3\frac{1}{2}$ centímetros na régua.



para encher uma jarra com capacidade para $\frac{2}{3}$ de litro?

6. Determine o valor de cada expressão numérica.

a) $\frac{2}{3} : \frac{4}{5} + \frac{1}{2}$ **b)** $\frac{1}{2} - \frac{5}{8} : \frac{5}{4}$

7. Calcule:

a) $\dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{7}}$ **b)** $\dfrac{\frac{4}{1}}{\frac{5}{1}}$ c) $\dfrac{\frac{10}{3}}{\frac{8}{9}}$ **d)** $\dfrac{\frac{7}{4}}{\frac{2}{3}}$

8. Descubra o erro em alguns resultados e corrija-os.

a) $\left(-\frac{4}{6}\right) : \left(-\frac{6}{4}\right) = 1$

b) $(+0{,}12) + (-0{,}08) - (-0{,}7) = 0{,}8$

Figura 35 – Fonte: Giovanni, Giovanni Jr. e Castrucci (2019b, p. 114)

no Capítulo 2 como pano de fundo, analisamos e comparamos alguns livro didáticos brasileiros e estrangeiros em relação a este assunto bem como fizemos comentários acerca das habilidades presentes na BNCC.

4 UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE FRAÇÕES

Diante do exposto nos Capítulos 2 e 3, neste capítulo apresentamos uma sequência didática para alunas e alunos do 6º ano do Ensino Fundamental com o objetivo de que apreendam, com o uso de material concreto, o conceito de *frações* e as operações de *adição e subtração de frações*. Tal proposta considera as definições, teoremas e demais resultados descritos no Capítulo 2 e as abordagens encontradas nos livros didáticos analisados no Capítulo 3.

Utilizaremos como ferramenta o Tangram, um famoso quebra cabeça geométrico milenar, de origem chinesa[1]. O Tangram é formado por 7 peças, que são chamadas de *tans*. São elas: 2 triângulos grandes, 2 triângulos pequenos, 1 triângulo médio, 1 quadrado e 1 paralelogramo. Fazendo o uso de todas as peças e sem sobrepô-las é possível formar várias figuras. Fala-se que são mais de 5000 figuras diferentes (WIKIPÉDIA, 2021). Na Figura 36 apresentamos alguns exemplos de figuras que podem ser contruídas com o Tangram. Há no mercado opções de Tangrans em madeira, EVA, entre outros materiais. Além disso, é possível imprimir imagens da internet para recortar os tans. Mais ainda, como veremos em nossa proposta, é possível encontrar as 7 peças por meio de dobras e recortes com um quadrado de papel.

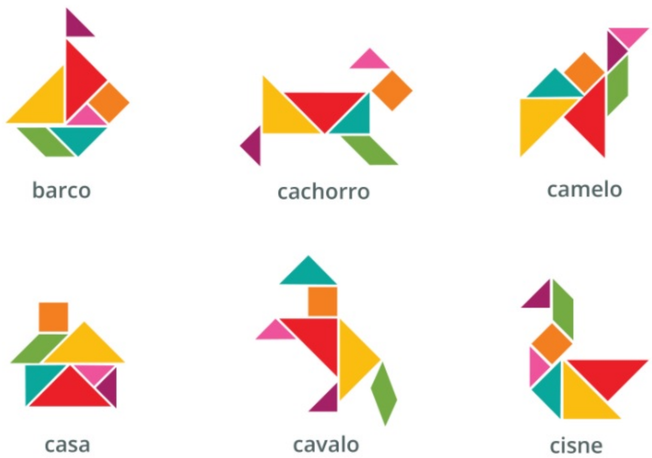


Figura 36 – Figuras formadas pelas 7 peças do Tangram. Fonte: Santos (2021)

Nossos objetivos com esta sequência didática são:

- explorar as figuras que compõe o Tangram;
- compreender o conceito de frações utilizando a reta numérica e a área de figuras planas;
- explorar o conceito de frações equivalentes como mesmo ponto na reta numérica; e

[1] Mais informações podem ser encontradas em https://pt.wikipedia.org/wiki/Tangram.

- calcular a adição e subtração de frações utilizando frações equivalentes.

Antes de iniciar qualquer conteúdo com os alunos, é importante que o professor faça a sondagem. A sondagem é a maneira de verificar as habilidades interiorizadas pelos alunos, para então aprofundar ou prosseguir com o objeto do conhecimento. Além disso, através dela que o professor conseguirá determinar quão significativo foi o aprendizado até então.

De acordo com a BNCC, no 3º ano os alunos iniciam seu contato com frações, entendendo o significado de metade, terça parte, quarta parte, quinta parte e décima parte. Já no 4º ano, temos a exposição da ideia de fração unitária, conforme a habilidade seguinte: "(EF04MA09) Reconhecer as frações unitárias mais usuais $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10} \text{ e } \frac{1}{100}\right)$ como unidades de medida menores do que uma unidade, utilizando a reta numérica como recurso." (BRASIL, 2017, p. 291) Ressaltamos novamente aqui a indicação da utilização da reta numérica como instrumento para a compreensão do conceito de fração.

No 5º ano, temos então a apresentação da representação fracionária dos números racionais, conforme já discutido no Capítulo 3. Sugerimos aqui que a atividade do Varal, proposta no Livro Aberto de Ripoll *et al.* (2017, p. 43), seja realizada com os alunos como atividade de sondagem, de modo a verificar os conhecimentos referentes à identificação das frações na reta numérica e o significado de fração. Esta abordagem é importante para a introdução da definição de frações como pontos na reta numérica, conforme Definição 2.1.

Nossa proposta utiliza a ideia de área de figuras planas para representar frações. Não obstante, é extremamente importante que os alunos sejam capazes de trabalhar com a reta numérica para compreender que a ideia de área é apenas uma extensão do conceito utilizado na reta numérica. Com o conceito de fração como ponto na reta numérica bem definido, propõe-se utilizar a construção do Tangram.

Vamos descrever em seguida a sequência de atividades propostas. A mesma se encontra esquematizada no Apêndice C.

Para começar, cada aluno recebe um quadrado de papel e, a partir deste quadrado, faz-se a construção das sete peças do Tangram. Além disso, é importante que os alunos façam registros do passo-a-passo da atividade, seja no seu próprio caderno ou em uma folha disponibilizada pelo professor (pode-se utilizar o próprio esquema disponibilizado no Apêndice C). Os alunos devem ser esclarecidos de que a área do quadrado que receberam representa o número 1 (veja Figura 37). Assim, a área do quadrado de lado 1 pode ser considerada como a extensão do segmento de comprimento $[0, 1]$. Segue-se então para a construção das peças utilizando dobraduras e recortes. O seguinte roteiro pode ser seguido.

1. Dobrar o quadrado ao meio, de forma que sejam formados dois triângulos e recortar, conforme a Figura 38. Após todos os alunos terem realizado este passo, questioná-los qual fração do quadrado está representada pela área de cada triângulo. Espera-se

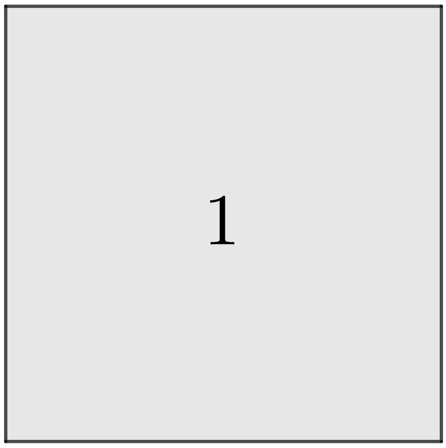


Figura 37 – Quadrado inicial com área 1.

que eles identifiquem que a fração em questão é $\frac{1}{2}$.

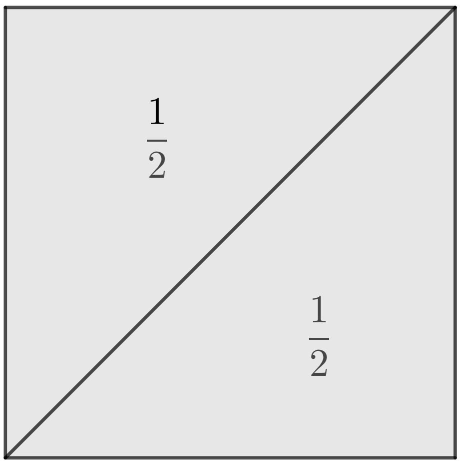


Figura 38 – Primeira dobra a ser feita.

2. Separa-se um dos triângulos. O outro triângulo deve ser dobrado novamente ao meio, formando dois novos triângulos que chamaremos de triângulos grandes, como ilustrado na Figura 39. Os alunos devem chegar a conclusão que estes triângulos representam $\frac{1}{4}$ da área do quadrado.

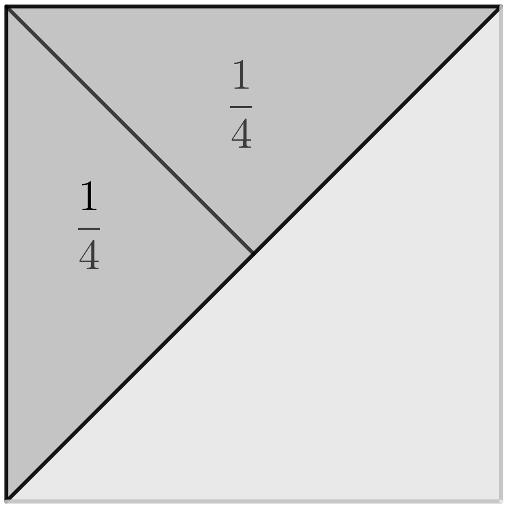


Figura 39 – As primeiras peças encontradas: dois triângulos grandes.

3. Com o triângulo que reservamos, deve-se formar 5 figuras: um triângulo médio, dois triângulos pequenos, um quadrado e um paralelogramo. Lembramos que os alunos de 6º ano ainda não tiveram contato com o Teorema Pitágoras, nem com os conceitos de hipotenusa e catetos. Para tanto, sugere-se citar a hipotenusa como lado maior do triângulo e os cateto como lados que foram o ângulo reto, conceito já conhecido pelos estudantes. Primeiramente então, pedimos aos alunos que encontrem o ponto médio do lado maior. Após, indicamos que eles dobrem o triângulo de maneira que o vértice do ângulo reto coincida com o ponto médio encontrado, em seguida, recortar na dobra feita. Desta maneira encontramos o triângulo médio, veja a Figura 40. Perguntar aos alunos se eles conseguem identificar que fração a área este triângulo representa da área do quadrado original. Aguarda-se que eles identifiquem a fração $\frac{1}{8}$.

4. O triângulo cortado agora terá o formato de trapézio isósceles e do triângulo médio. Orienta-se os alunos a dobrarem este trapézio ao meio e recortarem, tendo então dois trapézios retângulos, conforme Figura 41. Um trapézio será dividido em um quadrado e um triângulo pequeno e o outro em um paralelogramo e um triângulo pequeno.

5. Com um destes trapézios, orienta-se os alunos a dobrarem de maneira que um vértice da base maior coincida com o outro vértice da mesma base. Ao recortar nesta dobra, temos o quadrado e o triângulo pequeno. O outro trapézio deve ser dobrado de modo que o vértice da base maior em que está o ângulo reto, coincida com o vértice oposto, desta forma, ao recortar, teremos o paralelogramo e o triângulo pequeno, consoante

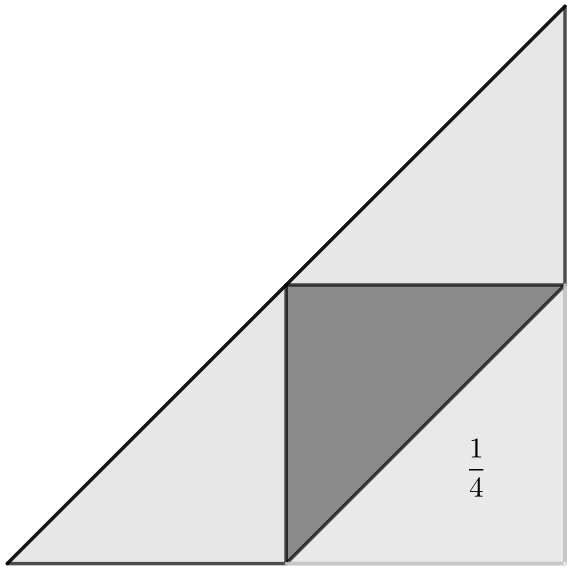


Figura 40 – Dobra para encontrar o triângulo médio.

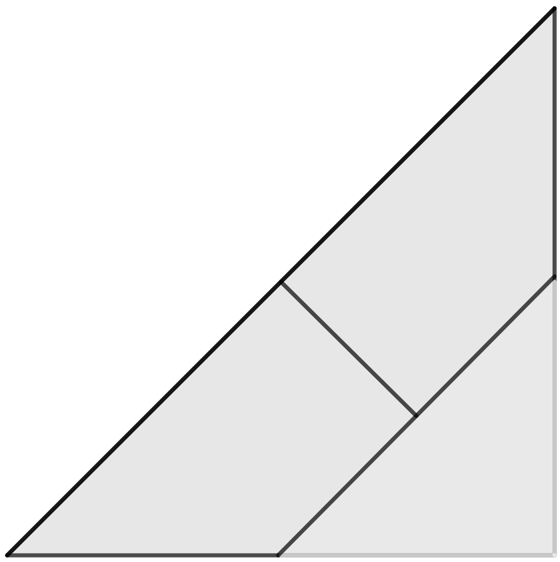


Figura 41 – Após o corte do triângulo médio, o trapézio isósceles.

com a Figura 42. Ao fim, eles devem identificar que fração cada peça representa da área do quadrado inicial. É possível sugerir que eles se ajudem, utilizando as peças recortadas pelos colegas, afim de auxiliá-los a identificar que a área quadrado e do paralelogramo representam cada $\frac{1}{8}$ da área do quadrado original e que a área de cada um dos triângulos pequenos representam $\frac{1}{16}$.

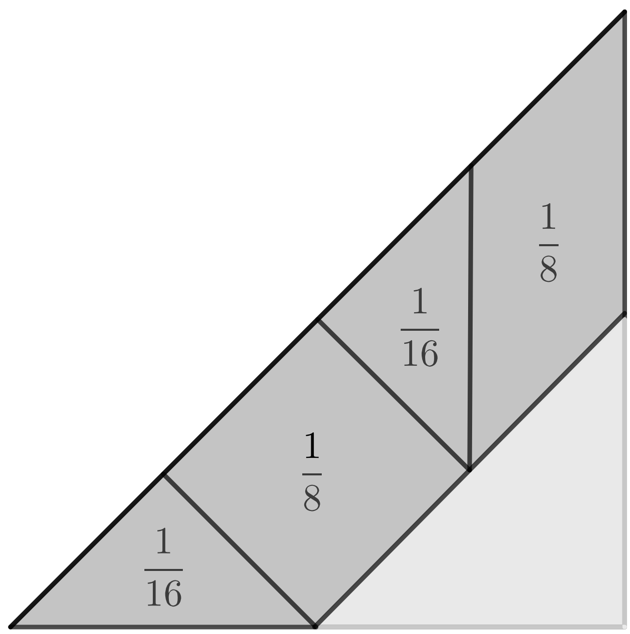


Figura 42 – Dobras para encontrar os triângulos pequenos, o quadrado e o paralelogramo.

Após todos os passos efetuados, espera-se que os alunos tenham encontrado as frações descritas na Figura 43. É imprescindível que o professor faça um acompanhamento próximo para verificar se os alunos estão de fato compreendendo o conceito de fração como área de figuras. Sugere-se que a cada fração encontrada, o professor ilustre as mesmas na reta numérica.

Na sequência, os estudantes utilizarão suas peças para visualizar frações equivalentes e operar frações. Neste momento, sugere-se que a atividade seja realizada em duplas, ou trios, para que eles possam compartilhar suas peças de maneira que encontrem equivalências entre elas.

Primeiramente sugere-se que os alunos descubram quais peças podem formar o triângulo grande, ou seja, quais frações são equivalentes a $\frac{1}{4}$. Eles podem encontrar inúmeras possibilidades, espera-se que algumas sejam imediatas. Podemos citar como exemplos o triângulo médio combinado com os dois triângulos pequenos, ou então o paralelogramos com dois triângulos pequenos, ainda podemos considerar o quadrado com dois triângulos pequenos. Talvez alguns alunos encontrem a equivalência do quadrado, do paralelogramo e do triângulo médio com os dois triângulos pequenos, desta forma, eles podem sugerir que o triângulo grande equivale ao quadrado combinado com o paralelogramo entre outras combinações.

Na sequência pede-se que eles descubram o valor de somar o quadrado com um dos triângulos pequenos. É esperado que os alunos percebam a equivalência entre o quadrado

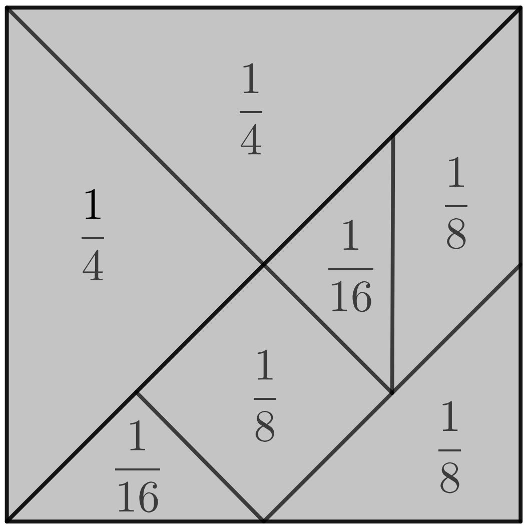


Figura 43 – Identificação das peças do Tangram.

e os dois triângulos pequenos, isto é $\frac{1}{8} = \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{2}{16}$. Desta forma, eles poderão perceber que $\frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{2}{16} + \frac{1}{16} = \frac{3}{16}$.

Por conseguinte, orienta-se os estudantes a encontrar o resultado de somar um triângulo grande com um triângulo pequeno. Novamente, é importante que percebam a equivalência entre as peças, de forma que o triângulo grande corresponda a 4 triângulos pequenos. Aqui, o trabalho em conjunto facilita a visualização deste fato, visto que utilizando as peças do colega é possível justapor os triângulos pequenos sobre o triângulo grande. Sendo assim, teremos que $\frac{1}{4} = \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{4}{16}$. Com isso, almeja-se que eles concluam que $\frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{4}{16} + \frac{1}{16} = \frac{5}{16}$.

Como finalização da atividade, temos como proposta que os alunos localizem as frações representadas pelas peças do Tangram na reta numérica. Desta forma, se estará retomando a Definição 2.1, na qual as frações são pontos da reta numérica.

Após a atividade, sugerimos o Teorema 2.6 seja apresentado como forme de verificar se frações são equivalentes. Além disso, a Equação (10) para resolver a adição e a multiplicação de frações pode ser explorada nas próximas aulas, utilizando ainda as peças do Tangram que foram construídas, uma vez que pode-se retomar o conceito de frações equivalentes.

Neste capítulo apresentamos uma proposta de sequência didática para alunos de 6º ano utilizando o quebra-cabeças chinês: Tangram. A proposta inicia com uso da atividade do varal, presente no Livro Frações no Ensino Fundamental (2017), para bem definir as frações, conforme a Definição 2.1, além de relembrar os alunos sobre a relação de ordem entre frações, como descrito na Definição 2.7. Na sequência, inicia-se a construção das peças dos Tangram por dobraduras e recortes, relacionado a área de figuras planas às frações. Em sequência, é estabelecida a relação entre as frações obtidas, por meio do processo de equivalência, utilizando a Definição 2.3 e o Teorema 2.4. Na etapa seguinte, utiliza-se das peças do Tangram para encontrar a soma de duas frações concluindo, desta forma, com o uso da Fórmula para adição de frações, presente a Equação (10). Como finalização, a localização das frações referentes às peças do Tangram na reta numérica é proposta de modo a firmar novamente a Definição 2.1.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta dissertação se propôs a fazer uma discussão formal acerca do ensino de frações no Ensino Fundamental – Anos Finais. Para tanto, fizemos uma discussão formal de frações utilizando de argumentos e axiomas geométricos. Além disso, enunciamos e demonstramos alguns resultados importantes referente a frações, bem como sobre as quatro operações básicas. Em sequência, também comparamos e discutimos, em relação ao conceito de frações, alguns livros didáticos e algumas habilidades propostas pela BNCC. Finalmente, propomos uma sequência didática utilizando como base os resultados e conceitos expostos até então.

A pesquisa e a escrita deste trabalho, concomitante com as aulas do mestrado, serviram como base para uma reflexão profunda acerca da minha prática pedagógica na totalidade, não apenas no ensino de frações. Estes anos foram intensos para repensar a maneira como a Matemática é ensinada aos alunos da educação básica. Durante o ensino de Frações, especificamente, fui implementando as ideias apresentadas no Capítulo 2 e consegui perceber a melhora na compreensão dos alunos acerca das frações. Os estudantes conseguiram desmitificar a ideia de que fração é um "tipo" de número, e passaram a entender que não se trata de um "tipo" e sim apenas de um número.

Por exemplo, tenho apresentado para meus alunos e alunas nas aulas do 6º ano o Teorema da Multiplicação Cruzada (Teorema 2.6) em conjunto com a ideia de multiplicar e dividir as frações pelo mesmo número, conforme apresentado nos livros didáticos, com o objetivo de verificar se duas frações são equivalentes. Curiosamente, em sua maioria, os estudantes escolhem utilizar o Teorema 2.6.

Da mesma forma, quando trabalhamos adição e subtração de frações, apresento a Fórmula geral de adição de frações (Equação (10)) antes mesmo de mostrar a técnica de adição de frações utilizando o mínimo múltiplo comum dos denominadores, técnica esta presente nos livros didáticos. Novamente, eles têm preferido usar a Equação (10).

Quando iniciamos a operação de multiplicação de frações, faço as conexões com a área de retângulos. Primeiramente áreas de figuras com lados medindo números inteiros e, em sequência, lados tendo frações como medida. Tenho percebido maior clareza, por parte dos alunos, no processo da multiplicação.

Tenho refletido que ao explorar as frações tendo como suporte os conceitos descritos no Capítulo 2, os alunos se tornaram mais questionadores e, além de perderem o "medo" das frações, passaram a dizer que, para eles, era o conteúdo preferido em Matemática. Não há nada mais gratificante para um professor do que acompanhar o crescimento dos seus alunos e perceber a diferença que está fazendo no processo de ensino-aprendizagem deles.

Durante a pesquisa, percebemos que os livros didáticos analisados possuem pontos positivos e satisfatórios inclusive em relação às discussões formais acerca de frações. Alguns destes pontos foram abordados no Capítulo 3. Por outro lado, percebemos a ausência de conceitos básicos extremamente necessários, pelo menos do nosso ponto de vista. Por exemplo, nenhum dos livros didáticos analisados possui qualquer definição de fração. De toda forma, vimos que a própria BNCC é vaga em como algumas habilidades devem ser trabalhadas em sala de aula, abrindo precedentes para que os livros didáticos o façam da maneira que os convém. Ao escrever esta dissertação entendemos que também cabe ao professor intermediar e filtrar o uso do livro didático para a melhor compreensão dos alunos, de maneira que todas as habilidades da BNCC sejam contempladas em cada etapa escolar.

De maneira geral, após este período do mestrado, consegui perceber que, em muitos casos, nós professores de matemática apenas transmitimos conhecimento, sem propiciar aos estudantes questionamentos nem ativar neles o pensamento crítico ou despertar a curiosidade. O ensino-aprendizagem da Matemática na escola é muitas vezes uma reprodução de técnicas de forma especialmente mecânica. Entendemos que, para que os estudantes possam ir além, precisamos fazer com que se sintam engajados. Explicar o porquê dos conceitos que está se ensinando pode ser uma forma de encorajar este engajamento.

Ressaltamos que este trabalho foi em parte realizado durante a pandemia de Covid-19. Nestes tempos de pandemia e com os efeitos das aulas “on-line”, apontamos a necessidade de retomar conceitos básicos para a real compreensão e significação do aprendizado. Entendemos que o aluno deva ser protagonista do processo e não apenas coadjuvante. Certamente, a educação está entre as áreas mais afetadas por este período pandêmico e, com a gradual retomada das aulas presenciais, nós, professores, precisamos estimular e encorajar nossos alunos a se dedicarem.

Segundo o Anuário Brasileiro da Educação de 2020, $57,8\%$ dos professores de Matemática do Ensino Fundamental - Anos Finais possui formação na área e 74% dos professores de Matemática do Ensino Médio possuem tal formação (CRUZ; MONTEIRO, 2020). Teria isto algum reflexo na aprendizagem dos alunos? É possível exigir que os estudantes tenham a aprendizagem adequada em matemática[1], se seus professores não possuem formação para tal? Posso afirmar que me sinto privilegiada e muito mais preparada agora do que antes de ingressar no PROFMAT.

Pode parecer clichê, mas os professores, em especial aqueles da educação básica, precisam ser capacitados e apaixonados pelo que fazem. Para mim, a jornada percorrida neste mestrado fez com que eu me apaixonasse ainda mais pela Educação Básica e pela possibilidade de transformar a vida das crianças através da educação.

Além de uma contribuição acadêmica na forma de dissertação, o impacto na minha prática docente desta pesquisa em particular e do curso de mestrado em Matemática em Rede foram de grande importância para o meu aprimoramento na condição de professora de Matemática do Ensino Básico. Considero-me privilegiada em poder me qualificar

[1] Segundo Cruz e Monteiro (2020), de cada 100 alunos que entram na escola, apenas 78 concluem o Ensino Fundamental com até 16 anos e, destes, somente $21,5\%$ possuem aprendizagem adequada em matemática.

e, de certa forma, poder contribuir para o futuro de novas gerações. Nós, professores, ensinamos aos nossos alunos mais do que nossas próprias disciplinas. Além dos conteúdos, ensinamos valores, ativamos o pensamento crítico. Com este mestrado, consegui aprender a importância de perseverança, constância nos estudos, disciplina e responsabilidade. Pretendo repassar estes valores aos meus alunos, inclusive que estamos em constante aprendizado e que precisamos estudar continuamente. Parafraseando o Professor Wu: Nós, professores, devemos ensinar algo. Não podemos apenas ensinar.

REFERÊNCIAS

BARBOSA, João Lucas. **Geometria Euclidiana Plana**. Rio de Janeiro, RJ: SBM, 1995.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, DF, 2017. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 11 set. 2020.

BRASIL. Ministério da Educação. **Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação**. Brasília, DF, 2021. Disponível em: https://www.fnde.gov.br/programas/programas-do-livro. Acesso em: 10 mai. 2021.

BRASIL. Ministério da Educação. **Guia Digital PNLD**. Brasília, DF, 2020. Disponível em: https://pnld.nees.ufal.br/pnld_2020/inicio. Acesso em: 17 jun. 2021.

PARÂMETROS Curriculares Nacionais: Matemática. Brasil. Ministério da Educação. 1997. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf. Acesso em: 11 set. 2020.

CENTURIÓN, Marília Ramos; TEIXEIRA, Júnia La Scala; RODRIGUES, Arnaldo Bento. **Porta aberta para o mundo: Matemática**. São Paulo, SP: Editora FTD, 2019. v. 5.

CRUZ, Priscila; MONTEIRO, Luciano (Org.). **Anuário Brasileiro da Educação Básica – 2020**. São Paulo, SP: Editora Moderna, 2020. Disponível em: https://www.moderna.com.br/anuario-educacao-basica/2020/index.html. Acesso em: 4 jul. 2021.

DOMINGUES, Hygino H.; IEZZI, Gelson. **Álgebra Moderna**. 4. ed. São Paulo, SP: Atual, 2003.

GIOVANNI, José Ruy; GIOVANNI JR., José Ruy; CASTRUCCI, Benedicto. **A conquista da Matemática**. São Paulo, SP: Editora FTD, 2015. v. 6.

GIOVANNI, José Ruy; GIOVANNI JR., José Ruy; CASTRUCCI, Benedicto. **A conquista da Matemática**. São Paulo, SP: Editora FTD, 2019. v. 6.

GIOVANNI, José Ruy; GIOVANNI JR., José Ruy; CASTRUCCI, Benedicto. **A conquista da Matemática**. São Paulo, SP: Editora FTD, 2019. v. 7.

HAESE, Michael *et al.* **Mathematics for the international student**. 6. ed. Marleston, Australia: Haese Mathematics, 2014.

HANSEN, Alice *et al.* **Max Maths Primary**. 5. ed. London, UK: MacMillan Education, 2018.

IEZZI, Gelson; MACHADO, Antonio; DOCE, Osvaldo. **Matemática e Realidade**. São Paulo, SP: Atual Editora, 2018. v. 6.

LIMA, Elon Lages. **Curso de Análise**. 15. ed. Rio de Janeiro, RJ: IMPA, 2019.

LIMA, Elon Lages. **Números e funções reais**. 1. ed. Rio de Janeiro, RJ: SBM, 2013.

RIPOLL, Cydara Cavedon *et al.* **Frações no Ensino Fundamental**. Rio de Janeiro, RJ: IMPA-OS, 2017. v. 1. Disponível em: umlivroaberto.org. Acesso em: 11 set. 2020.

SANTOS, Tayna Elias dos (Curador). **Você já ouviu falar sobre Tangram?** Escola Digital. Disponível em: https://escoladigital.org.br/roteiro-de-estudo/voce-ja-ouviu-falar-sobre-o-tangram-56115. Acesso em: 4 jul. 2021.

SOUZA, Joamir Roberto de. **Matemática: Joamir**. 5. ed. São Paulo, SP: Editora FTD, 2017.

WIKIPÉDIA. **Tangram — Wikipédia, a enciclopédia livre**. [*S.l.*: *s.n.*], 2021. [Online]. Disponível em: https://pt.wikipedia.org/w/index.php?title=Tangram&oldid=61371755. Acesso em: 1 jul. 2021.

WU, Hung-Hsi. The Mathematics Education Reform: Why You Should be Concerned and What You Can Do. **The American Mathematical Monthly**, Mathematical Association of America, v. 104, n. 10, p. 946–954, 1997. ISSN 00029890, 19300972. Disponível em: http://www.jstor.org/stable/2974477.

WU, Hung-Hsi. **Understanding numbers in elementary school mathematics**. Providence, R.I: American Mathematical Society, 2011. ISBN 978-0-8218-5260-6.

Apêndices

APÊNDICE A – A REFORMA EDUCACIONAL NORTE AMERICANA E O PROFESSOR WU

No início do século 20, o alto escalão da educação americana iniciou o que eles chamaram de Math War. A discussão teve início com o atrito entre os conteúdos ensinados e a pedagogia utilizada. Segundo David Klein, o conteúdo é a resposta para a questão de o que ensinar, e a pedagogia responde a pergunta de como ensinar, porém, eles não sabiam por qual deveriam começar o planejamento da proposta pedagógica americana. Mais tarde, em 1940, foi proposto que os estudantes aprendessem apenas o que usariam no futuro, desconsiderando uma educação acadêmica. Os jovens eram instruídos para "casa, lojas, cidadania e saúde". O ensino de Álgebra, Trigonometria e Geometria estava sendo questionado. No ano de 1950, teve início o movimento "New Math", onde matemáticos e psicólogos fomentavam a ênfase na lógica para os conceitos matemáticos ensinados. Foi a primeira vez que matemáticos realmente se envolveram ativamente na construção do currículo do Ensino Básico.

Já nos anos 80, o Conselho Nacional de Professores de Matemática publicou dois relatórios: An Agenda of Action e A Nation Risk. O primeiro recomendava que a solução para o ensino seria o foco na matemática escolar e em uma nova maneira de ensinar. Por outro lado, A Nation Risk falava sobre os livro didáticos, os quais deveriam ser atualizados para incluir conteúdos mais abrangentes. No final dos anos 80, iniciou-se a ideia de uma educação Construtivista, e não mais Progressista, usando como base os estudos de Jean Piaget e Lev Semenovich Vygostsky. Porém, essa ideia não foi bem aceita pelo Conselho Nacional, que insistia em afirmar que os professores deveriam ensinar crianças e não currículos. O Conselho propunha uma educação matemática baseada apenas em conceitos básicos e um currículo menos aprofundado. Então, no início dos anos 90, grupos de pais começaram a se reunir e questionar o que os filhos estavam aprendendo. Queixavam-se de deficiências no currículos. Toda essa discussão foi endossada pela Universidade da Califórnia, onde o professor Hung-HSI Wu publicou o artigo Basic Skills Versus Conceptual Understanding: A Bogus Dichotomy in Mathematics Education, diferentemente do Conselho Nacional, afirmou que não era possível ensinar compreensão conceitual em Matemática sem as habilidades básicas de apoio.

Teve início, a partir de então, um movimento muito forte pela mudança na Educação Matemática na Califórnia. Um Conselho específico do Estado fez uma nova proposta, contrapondo o Conselho Nacional. O Professor Wu fez uma análise cuidadosa da proposta da Califórnia, que foi adotada, e da proposta do Conselho Nacional, que foi rejeitada. Wu encontrou diversos erros matemáticos e falta de clareza e coesão na proposta rejeitada, em contraste com solidez e clareza geral na proposta adotada.

O Conselho Nacional respondeu à essas mudanças com denúncias, afirmando que havia sido um golpe, não enfatizando a educação com resoluções criativas. A imprensa enfatizou essas denúncias, porém, com o passar dos meses, as notícias foram diminuindo e o trabalho para o desenvolvimento da nova proposta seguiu.

R. James Milgram e Hung-Hsi Wu desempenharam papéis fundamentais na parte matemática do documento final, chamado de Mathematics Framework for California Schools, tendo ainda contribuições do psicólogo cognitivo David Geary, da Universidade do Missouri, e o pesquisador educacional Douglas Carnine, juntamente com outros membros do Centro Nacional para Melhorar as Ferramentas dos Educadores (NCITE) da Universidade de Oregon.

O Framework foi adotado pelo Conselho Estadual de Educação da Califórnia em dezembro de 1998, tendo um sistema para adoção de livros didáticos, que incluía painéis com matemáticos e professores de sala de aula, para a discussão e avaliação dos currículos enviados para a implementação em todo o estado.

Com o novo programa implantado na Califórnia, David Klein, Richard Askey, R. James Milgram e Hung-Hsi Wu escreveram uma Carta Aberta ao secretário de Educação dos Estados Unidos, Richard Riley, descrevendo algumas deficiências do currículo americano e de programas propostos pelo governo. Porém, essa carta não foi bem aceita por alguns matemáticos.

A proposta implementada na Califórnia tinha apostas altas, não apenas para o ensino de Matemática nas escolas públicas, mas também nas universidades americanas. Segundo o que o Conselho Nacional defendia, seria um efeito dominó, começando nas séries iniciais do Ensino Fundamental, pois sem fundamentos adequados em habilidades e conceitos aritméticos do Ensino Fundamental, os alunos que ingressassem no Ensino Médio poderiam não progredir para Álgebra. Sem fortes fundamentos em habilidades e ideias algébricas, as portas para os cursos subsequentes de Matemática seriam fechadas. O professor Wu explicou isso em 1997:

> Essa reforma mais uma vez levanta questões sobre os valores de uma educação matemática redefinindo o que constitui a Matemática e defendendo práticas pedagógicas baseadas em opiniões, em vez de pesquisar dados de estudos em larga escala da psicologia cognitiva.A reforma tem o potencial de alterar completamente o currículo de graduação em Matemática e limitar o processo normal de produção de um corpo competente de cientistas, engenheiros e matemáticos. Em algumas instituições, esse potencial já é uma realidade. (WU, 1997)

APÊNDICE B – FUNDAMENTOS DE GEOMETRIA

Os resultados apresentados aqui tomam como base o livro de Barbosa (1995). Aqui consideramos como elementos geométricos primitivos, no plano, os *pontos* e as *retas*. O plano é constituído de pontos e as retas são subconjuntos distintos de pontos do plano. Iremos fazer a separação dos Axiomas de Geometria em dois grupos: Axiomas de Incidência e Ordem e Axiomas sobre Medição de Segmentos.

Podemos relacionar o sistema de Axiomas de Geometria às regras de um jogo. Não há questionamentos quanto às regras do jogo, pois sabe-se que são assim e é assim que o jogo funciona. O objetivo, neste caso, é determinar as propriedades das figuras planas e dos sólidos, que chamamos de Teoremas e Proposições, que são deduzidas através de raciocínio lógico a partir dos axiomas e definições.

Neste trabalho não nos aprofundaremos nos objetivos do jogo, apenas nas suas regras. Para os objetivos, sugere-se a leitura do livro citado acima.

AXIOMAS DE INCIDÊNCIA E ORDEM

Nesta primeira seção iremos postular os axiomas de incidência e ordem. Começando pelos axiomas de incidência.

Axioma B.1. *Qualquer que seja a reta existem pontos que pertencem à reta e pontos que não pertencem à reta.*

Axioma B.2. *Dados dois pontos distintos existe uma única reta que contém estes pontos.*

Considere uma folha de papel representando um plano, que se estende infinitamente. Nesta folha, representamos um ponto como uma marca de lápis e, podemos representar uma reta com o auxílio de uma régua, conforme a Figura 44. É intuitivo, ao estudar Geometria, que se faça o uso desenhos. Porém, esse recurso deve ser apenas um instrumento de auxílio, não podendo ser considerado para validade dos resultados.

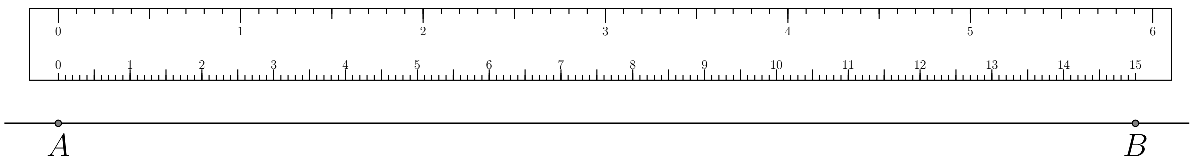


Figura 44 – Régua.

Fonte: Barbosa (1995, pg.2)

Será utilizado letras maiúsculas para determinar pontos e letras minúsculas para retas. Na Figura 45, podemos ver os pontos A, B e C, que estão localizados na reta r.

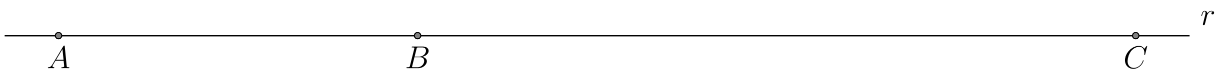


Figura 45 – Reta r.

Dizemos que o ponto C está localizado entre os pontos A e B, ou então que os pontos A e B estão separados pelo ponto C. A noção de *estar entre* é apresentada pelos axiomas de ordem, que seguem.

Axioma B.3. *Dados três pontos de uma reta, um e apenas um deles localiza-se entre os outros dois.*

Este axioma permite definirmos a seguir o conjunto de todos os pontos que estão entre dois pontos dados.

Definição B.1 (Segmento de reta)**.** Dados dois pontos A e B sobre uma reta, dizemos que o *segmento* AB é o conjunto de pontos formado por A, B e por todos os pontos que se encontram entre A e B. Os pontos A e B são denominados *extremos* ou *extremidades* do segmento.

Muitas figuras planas são construídas utilizando segmentos de reta, a mais simples delas é o triângulo, formado por três pontos que não são colineares, que ligados, formam três segmentos. Os pontos são chamados de *vértices* do triângulo, e os segmentos de *lados*. Mas esse é um assunto para outro trabalho.

Agora, vamos estender a ideia de segmento em uma reta, fazendo a união deste com os pontos da reta que estão em um dos lados do segmento. Formalmente temos a seguinte definição.

Definição B.2 (Semirreta)**.** Se A e B são pontos distintos, o conjunto constituído pelos pontos do segmento AB e por todos os pontos C tais que B encontra-se entre A e C, é chamado de *semirreta* de origem A contendo o ponto B. O ponto A é então denominado *origem da semirreta*.

Vejamos agora um axioma de ordem que serve como base deste trabalho para estabelecermos o conceito de número.

Axioma B.4. *Dados dois pontos A e B em uma reta, sempre existem nesta reta: um ponto C entre A e B e um ponto D tal que B está entre A e D.*

Com efeito, uma consequência imediata deste axioma é que, entre quaisquer dois pontos de uma reta, existe uma infinidade de pontos.

AXIOMAS SOBRE MEDIÇÃO DE SEGMENTOS

No ensino de Geometria, em particular nas escola de ensino básico, fazemos o uso de muitos instrumentos, como régua, compasso, esquadro, transferidor. O instrumento utilizado para medir segmentos é a régua graduada. Porém, é necessário entender como a utilizamos.

Na figura a seguir temos os pontos A, B e C. Perceba que o segmento AB mede 5 cm, o segmento AC mede 9 cm e o segmento BC mede 4 cm. Note que o ponto B corresponde na régua ao número 5 e o ponto C ao número 9. A medida do segmento BC corresponde à diferença $9 - 5 = 4$. É evidente que a régua poderia ter sido posicionada de várias maneiras diferentes, mas todas elas indicariam a mesma diferença entre os pontos B e C, que é a medida do segmento BC.

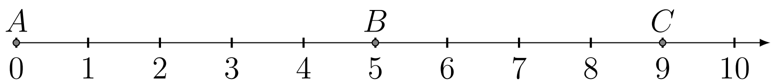


Figura 46 – Segmento AC

Para formalizar essa ideia, traremos agora os axiomas sobre medição de segmentos.

Axioma B.5. *A todo par de pontos do plano corresponde um número maior ou igual a zero. Este número é zero se e só se os pontos são coincidentes.*

O número a que se refere o axioma anterior é chamado de *distância* entre os respectivos pontos ou é denominado como o *comprimento* do segmento determinado por estes pontos. Dados pontos A e B, denotaremos o comprimento do segmento AB como $\overline{AB}$.

Axioma B.6. *Os pontos de uma reta podem ser sempre colocados em correspondência biunívoca com os números reais, de modo que a diferença entre estes números meça a distância entre os pontos correspondentes.*

Ao aplicarmos este axioma, o número que corresponde a um ponto na reta será denominado *coordenada* daquele ponto.

De acordo com o Axioma B.5, o comprimento de um segmento AB será sempre maior que zero. Logo, considerando que a e b são as coordenadas das extremidades deste segmento, o seu comprimento será a diferença entre o maior e o menor deste números. Isto é equivalente a tomar o valor absoluto da diferença em qualquer ordem. Portanto

$$\overline{AB} = |b - a|$$

Vamos definir agora o que é o segmento unitário.

Definição B.3. O segmento AB é chamado unitário se for congruente ao segmento de reta numérica com extremidades 0 e 1.

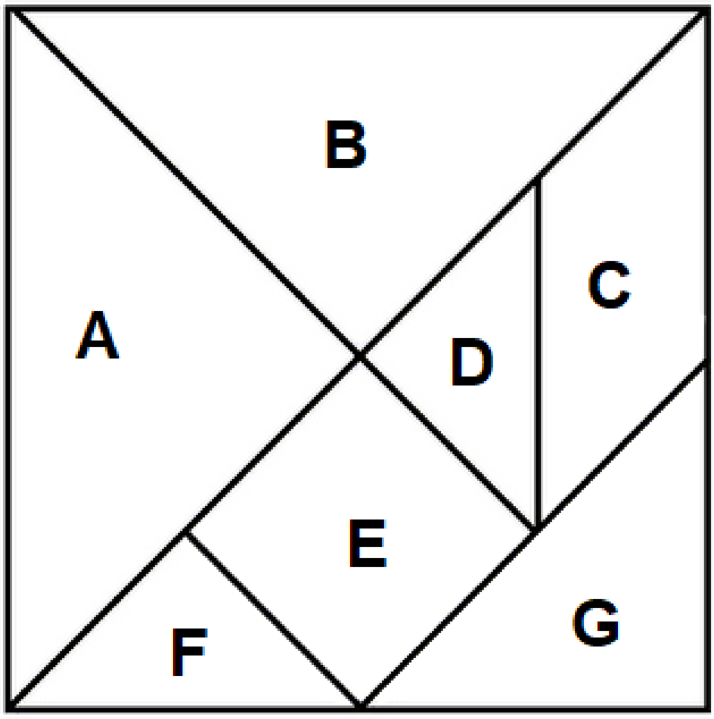
É fácil ver que, uma consequência desta definição, é que se AB é unitário, então $\overline{AB} = 1$.

Axioma B.7. *Se o ponto C encontra-se entre A e B então $\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB}$.*

Essas definições e axiomas irão fazer parte da ideia de fração como um número, ou seja, como um ponto na reta numérica.

APÊNDICE C – ATIVIDADE: TANGRAM E AS FRAÇÕES

Vocês construíram as peças do Tangram e descobriram a fração que representa a área de cada peça do quadrado original. Comparando as áreas das figuras, escreva estas frações abaixo.



- Figura A:
- Figura B:
- Figura C:
- Figura D:
- Figura E:
- Figura F:
- Figura G:

Para responder as perguntas abaixo, utilizem as peças dos seus quebra-cabeças. Nesse primeiro momento não utilizaremos as operações com frações, apenas escreveremos os resultados.

a. Quais peças podemos combinar para obter a peça A? Se necessário, utilize as peças dos seus colegas.

b. Qual o resultado se somarmos as peças D e E?

c. E juntando B com F, qual seria o resultado?

Vimos em aula que as frações podem ser próprias, impróprias ou aparentes. As frações próprias possuem o numerador menor que o denominador, ou seja, representam menos que um inteiro. Já as frações impróprias possuem o numerador maior que o denominador, representando mais que o inteiro ou inteiros. Por fim, as frações aparentes possuem o numerador sendo múltiplo do denominador, representando inteiros. Todas as peças do Tangram representam frações próprias, isso quer dizer que todas são frações menores que o inteiro, logo, menores que 1. Mas como são números positivos, temos que são números maiores que 0. Perceba que todas as frações estão entre 0 e 1. Sabendo disso, localize na reta abaixo as frações correspondentes às peças do Tangram. Se necessário, utilize frações equivalentes.