UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CAMPUS FLORIANÓPOLIS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL-PROFMAT

Valmiré de Aguiar

MATRIZES E SISTEMAS LINEARES NO ENSINO MÉDIO

Florianópolis

2021

Valmiré de Aguiar

MATRIZES E SISTEMAS LINEARES NO ENSINO MÉDIO

Dissertação submetida ao Programa de Mestrado Profissional de Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal de Santa Catarina como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre em Matemática. Com área de concentração no Ensino de Matemática.
Orientador: Prof. Dr. Vinícius Viana Luiz Albani

Florianópolis

2021

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

de Aguiar, Valmiré
MATRIZES E SISTEMAS LINEARES NO ENSINO MÉDIO / Valmiré de Aguiar ; orientador, Vinícius Viana Luiz Albani, 2021.
101 p.

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada, Florianópolis, 2021.

Inclui referências.

1. Matemática Pura e Aplicada. 2. Matemática Pura e Aplicada. 3. Matrizes e Sistemas Lineares. 4. Ensino remoto. 5. Ensino de Matemática. I. Viana Luiz Albani, Vinícius . II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada. III. Título.

Valmiré de Aguiar

MATRIZES E SISTEMAS LINEARES NO ENSINO MÉDIO

O presente trabalho em nível de mestrado foi avaliado e aprovado por banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. Dr. Celso Melchiades Doria
UFSC

Profª. Drª. Maria Inez Cardoso Gonçalves
UFSC

Prof. Dr. Wagner Barbosa Muniz
UFSC

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de mestre em Matemática.

ICP-Edu
Documento assinado digitalmente
Maria Inez Cardoso Goncalves
Data: 30/11/2021 17:07:52-0300
CPF: 908.897.119-68
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Profª. Drª. Maria Inez Cardoso Gonçalves
Coordenadora do Programa

ICP-Edu
Documento assinado digitalmente
Vinicius Viana Luiz Albani
Data: 30/11/2021 23:05:20-0300
CPF: 100.707.267-95
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Prof. Dr. Vinícius Viana Luiz Albani
Orientador

Florianópolis, 25 de novembro 2021.

Este trabalho é dedicado ao meu companheiro Vanderlei, minha mãe Madalena e meus colegas de classe.

AGRADECIMENTOS

A Deus, pela forma como o seu amor é presente em minha vida.

A meus avós, Maria Ferreira e Pedro Ozório, *in memoriam*, que muito ajudaram em minha educação.

À minha mãe, Maria Madalena, que sempre plantou, com muito custo, as sementes da boa educação formal e informal. Todo fruto que possa nascer de mim, antes, é dela.

A Vanderlei Nazário, companheiro admirado e coluna de sustentação, por todo amor, incentivo, paciência e carinho.

As minhas amigas do Mestrado Graça e Angelita, pela partilha das vitórias, dificuldades e amizade que transcende o mestrado.

À professora, Dra. Maria Inez Cardoso Gonçalves, pelo exemplo de profissional e compromisso com a educação.

Ao meu orientador, Profº. Dr. Vinícius Viana Luiz Albani por toda dedicação, paciência, contribuição e incentivo.

Ao IMPA, pela ousadia do programa.

À CAPES, pelo financiamento deste trabalho e fomento à pesquisa científica no Brasil.

À UFSC, pela oportunidade.

A teoria sem a prática vira 'verbalismo', assim como a prática sem a teoria, vira 'ativismo'. No entanto, quando se une a prática com a teoria tem-se a práxis, a ação criadora e modificadora da realidade.

(Paulo Freire)

RESUMO

O ensino de matrizes no ensino médio rotineiramente é apresentado como operações entre tabelas e sem relacioná-las com sistemas lineares, muitas vezes o último não chega a ser ensinado. Esta abordagem fragmentada e sem aplicações, causa desinteresse por parte dos alunos. Este trabalho apresenta matrizes como ferramenta para resolução de sistemas lineares, bem como suas aplicações em modelagem matemática. Indica ferramentas para o ensino da matemática seja no remoto ou híbrido, decorrente da pandemia ocasionada pelo vírus SARS-CoV-2 causador da doença Covid-19.
Palavras-chave: Matrizes e Sistemas Lineares. Ensino remoto. Ensino de Matemática.

ABSTRACT

The teaching of matrices in high school is routinely presented as operations between tables and without relating them to linear systems, the latter is often not taught. This fragmented and applicationless approach causes disinterest on the part of students. This work presents matrices as a tool for solving linear systems, as well as their applications in mathematical modeling. It indicates tools for teaching mathematics, whether remote or hybrid, resulting from the pandemic caused by the SARS-CoV-2 virus that causes the Covid-19 disease.
Keywords: Matrices and Linear Systems. Remote teaching. Teaching of Mathematics.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Ao lecionar por 18 anos na rede pública estadual de Santa Catarina verifiquei que muitos conteúdos do Ensino Médio são ensinados de forma fracionada e sem relação entre si. O ensino de matrizes é abordado de forma isolada, apenas como operações entre tabelas, sem relacioná-las com sistemas lineares e muitas vezes o último não chega a ser abordado.

Esta fragmentação e consequentemente falta de aplicação do conteúdo causa desinteresse e apatia nos estudantes que veem o conhecimento formalmente abstrato e distante de sua realidade.

Ao trabalhar como redator da área de Matemática e suas Tecnologias no Currículo Base do Território Catarinense - CBTC, constatei que a Base Nacional Comum Curricular - BNCC não trás competências e habilidades sobre matrizes e sistemas lineares. Por serem conteúdos muito importantes e com inúmeras aplicações, com a colaboração dos demais redatores, incluí no CBTC habilidades que contemplassem estes objetos do conhecimento.

No Cap. 2 proponho para o professor do Ensino Médio como abordar o conteúdo, nos seguintes passos:

a. Parto de um exemplo simples: sistema com 2 equações e 2 incógnitas, conteúdo visto no 8° ano do Ensino Fundamental, defino as manipulações algébricas usadas para resolução como transformações elementares;

b. Com o aumento do número de equações e incógnitas o uso das transformações elementares mais dispendioso, apresento então, toda álgebra matricial, vista no Ensino Médio, como ferramentas básicas para resolução de sistemas lineares;

c. Volto aos sistemas lineares aplicando os conteúdos de matrizes na resolução dos mesmos.

Neste capítulo apresento pequenas demonstrações de propriedades da álgebra matricial, de fácil compreensão aos alunos do Ensino Médio.

No Cap. 3 trago exemplos de modelos lineares para alunos do Ensino Médio com as ferramentas apresentadas, tornado-os totalmente compreensíveis.

a. Dieta equilibrada para perda de peso, apresento a dieta de Cambridge, onde precisa determinar a quantidade de nutrientes necessários para perda de peso que é modelada por um sistema linear;

b. Transformações geométricas no plano, onde apresento como modelar, através de operações com matrizes as 3 transformações básicas: translação, rotação e escala;

c. Equações de diferenças lineares, o qual apresento e modelo o estudo migratório entre a população urbana e rural de determinada cidade. Neste modelo uso o conceito de recorrência e operações matriciais.

Tais exemplos podem ser apresentados aos alunos no decorrer dos estudos sobre sistemas lineares. No presente trabalho os modelos foram apresentados em um capítulo a parte para facilitar a consulta dos professores.

No Cap. 4 apresento os modelos em forma de apostila, facilitando o trabalho do professor, bem como, as ferramentas utilizadas no ano de 2020 em minhas aulas de forma remota, detalhando sobre a mesa digitalizadora e plataformas de gravações de vídeos.

2 MATRIZES E SISTEMAS LINEARES

Este capítulo trata do tema central da Álgebra Linear: a resolução de equações lineares (STRANG, Gilbert, 2010).

Desde a antiguidade, muitos problemas do tipo : dois números reais, cuja soma é 40 e a diferença é 4, os mesmos são modelados por um sistema simples, com 2 equações e 2 incógnitas.

$$\begin{cases} x + y = 40 \\ x - y = 4 \end{cases}. \tag{2.1}$$

Para resolvê-lo podemos somar as duas equações eliminando assim y, deixando uma equação em x.

$$\begin{cases} 2x = 44 \\ x - y = 4 \end{cases}. \tag{2.2}$$

Logo temos que $x = 22$, basta substituir na segunda equação $x - y = 4$:

$$22 - y = 4. \tag{2.3}$$

Obtendo $y = 18$, verificamos que o par $(x, y) = (22, 18)$ é solução do sistema, pois obtemos as igualdades:

$$\begin{cases} 22 + 18 = 40 \\ 22 - 18 = 4 \end{cases}. \tag{2.4}$$

Por outro lado, a solução depende dos seis números nas equações 1, 1, 40, 1, -1 e 4, e pode ser obtida através de uma razão de determinantes, apresentada diretamente abaixo:

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 40 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{1 \cdot 4 - 1 \cdot 40}{1 \cdot (-1) - 1 \cdot 1} = \frac{-26}{-2} = 18. \tag{2.5}$$

Da mesma forma, podemos calcular o valor de x

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 40 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{40 \cdot (-1) - 4 \cdot 1}{1 \cdot (-1) - 1 \cdot 1} = \frac{-44}{-2} = 22. \tag{2.6}$$

Comparando os dois métodos, e "considerando futuros problemas reais com número de equações muito maior (1000 é um número bastante moderado no cálculo científico)"(HEFEZ, 2016), no segundo método (chamado Regra de Cramer), temos que calcular o determinante de uma matriz 1000 x 1000, o que é por si só muito dispendioso com custo computacional da ordem de $n! = 1000! \approx 4 \times 10^{2567}$, além de termos que fazer o cálculo de um determinante de mesma ordem para encontrar o valor das outras 999 incógnitas. No primeiro método (da eliminação de Gauss) para determinar as 1000 variáveis, fazemos operações elementares para chegar à forma reduzida e retro-substituições similares à Equação (2.3), o que se mostra ser mais eficiente com custo computacional da ordem de $n^3 = 1000^3 = 10^9$. Aqui podemos interpretar o custo computacional como o número de multiplicações entre números reais necessárias em cada método.

O primeiro método é conhecido como **Eliminação de Gauss** ou **Eliminação Gaussiana**, sistemas com duas equações lineares, já eram considerados pelos babilônios por volta de 1800 a.c e eram resolvidos desta maneira (FERNANDES, Cecília de Souza; HEFEZ, Abramo, 2016).

Generalizando para Sistemas Lineares com m equações e n incógnitas teremos:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}, \tag{2.7}$$

onde, os a_{ij}'s e os b_{ij}'s, para $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$, são números reais.

Seja:

$$S = \{(c_1, c_2, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n; a_{i1}c_1 + a_{i2}c_2 + \cdots + a_{in}c_n = b_i, 1 \leq i \leq m\}.$$

O conjunto S é chamado de **conjunto solução** do sistema (2.7).

Acompanhe a resolução do sistema a seguir:

$$\begin{cases} x + y = 20 \\ x - y = 4 \end{cases}. \tag{2.8}$$

Ao somarmos a segunda equação com a primeira, obtemos:

$$\begin{cases} 2x = 24 \\ x - y = 4 \end{cases}.$$

seguindo com as "transformações", encontramos a solução desejada:

$$\begin{cases} 2x = 24 \\ x - y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 12 \\ x - y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 12 \\ x - y - x = 4 - 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 12 \\ y = 8 \end{cases}.$$

Na resolução do Sistema (2.8) usamos as chamadas **transformações elementares**, tornando-o em um sistema mais simples de ser resolvido, defini-se transformações elementares como uma das seguintes operações:

1. Trocar a posição relativa de duas equações do sistema;

$$\begin{cases} x + y = 20 \\ x - y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 4 \\ x + y = 20 \end{cases}.$$

2. Trocar uma equação pela soma membro a membro da própria equação com um múltiplo da outra;

$$\begin{cases} x + y = 20 \\ x - y = 4 \end{cases} . \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 24 \\ x - y = 4 \end{cases}.$$

3. Multiplicar ambos os membros da equação por um número real não nulo.

$$\begin{cases} x + y = 20 \\ x - y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 20 \\ 2x - 2y = 8 \end{cases}.$$

Definição 1 *Dados dois sistemas lineares, quando um pode ser obtido do outro através de uma sequência finitas de transformações elementares, dizemos que eles são sistemas equivalentes.*

Definição 2 *Dado um conjunto X, uma relação de equivalência em X é uma relação $\sim$ que satisfaz as seguintes propriedades:*
1. reflexiva: $x \sim x$, para todo $x \in X$;
2. transitiva: se $x \sim y$ e $y \sim z \Rightarrow x \sim z$;
3. simétrica: se $x \sim y \Rightarrow y \sim x$.

Nos sistemas semelhantes temos uma relação de equivalência, pois:

1. reflexiva: basta multiplicar uma das equações por 1;

2. transitiva: basta concatenar uma sequência de transformações elementares com uma outra;

3. simétrica: podemos desfazer uma transformação elementar com uma outra.

Assim sendo, temos que Sistemas de equações lineares equivalentes possuem o mesmo conjunto solução.

Um tipo de sistema se destaca, o chamado *Sistema Homogêneo*, sistema como o (2.7), mas com todos b_i's iguais a zero.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} . \tag{2.9}$$

Uma peculiaridade importante do Sistema Homogêneo é que o Vetor $(0, 0, ..., 0)$ pertente ao conjunto S de soluções do Sistema.

Os sistemas lineares (2.7) e (2.9) podem ser expressos pelas equações matriciais:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad e \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

e

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$A\mathbf{x} = 0,$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad e \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

As matrizes A, $\mathbf{x}$ e $\mathbf{b}$ são chamadas, respectivamente, de matriz dos coeficientes, matriz das incógnitas e matriz dos termos independentes. Podemos também organizar os coeficientes das equações e os termos independentes em uma única matriz Chamada Matriz Ampliada do Sistema.
Segue a matriz ampliada do sistema (2.7)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}. \tag{2.10}$$

Quando o sistema é homogêneo (2.9) temos:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Note que foi eliminado a coluna de zeros que ficaria a direita da Matriz (2.10).

"As Matrizes surgiram por volta do ano 200 a.C. com os chineses, motivados pelo interesse de calcular soluções de sistemas lineares com mais de quatro equações"(FERNANDES, Cecília de Souza; HEFEZ, Abramo, 2016, p.10), era utilizado um método de resolução semelhante ao escalonamento (será apresentado na próxima seção), operando apenas sistemas com o mesmo números de equações e incógnitas.

2.1 MATRIZES E DETERMINANTES

Segundo HEFEZ (2016, p.11), "as matrizes são ferramentas básicas da Álgebra Linear, pois fornecem meios para a resolução dos sistemas lineares". Por isso, apresento a álgebra matricial na forma como é apresentada nos livros didáticos do Ensino Médio.

Definição 3 *Dados m e n números em $\mathbb{N}$ (conjunto dos números naturais $\{1, 2, 3, \ldots\}$), defino uma matriz real de ordem m por n (denotada $m \times n$) como uma tabela formada por elementos de $\mathbb{R}$ distribuídos em m linhas e n colunas.*

A matriz retangular m por n é um quadro constituído por elementos dispostos em m linhas e n colunas, (FAINGUELERNT, Estela Kufman; GOTTLIEB, Franca Cohen, 2004).

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Como visto na seção anterior, os coeficientes de um sistema linear podem ser distribuídos em uma Matriz, observe o sistema a seguir:

$$\begin{cases} 2x + 3y - 2z = 3 \\ 3x - 2y + 11z = -2 \end{cases}.$$

Ele possui 2 equações e 3 incógnitas, a solução deste sistema depende dos valores numéricos que nele aparecem. Podemos representar estes valores na matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 & 3 \\ 3 & -2 & 11 & -2 \end{bmatrix}.$$

A notação fica da seguinte forma:

$A = (a_{ij})$ onde $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$, podemos também escrever entre parênteses, colchetes ou barra dupla.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \text{ ou } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}, A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{Vmatrix}.$$

2.1.1 Tipos de Matrizes

1. **Matriz Quadrada**: é a matriz cujo número de linhas e colunas é o mesmo ($m = n$), neste caso, dizemos que é uma matriz quadrada de ordem n.

Exemplo 1:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} : \text{ Matriz Quadrada de ordem 3, pois } m = n = 3.$$

Em matrizes quadradas, temos:

Diagonal Principal: são os elementos a_{ij}, em que $i = j$.

Diagonal Secundária: são os elementos a_{ij}, em que $i + j = n + 1$.

Exemplo 2:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \\ 0 & 7 & 5 \end{pmatrix} \text{ Diagonal principal destacada em vermelho.}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \\ 0 & 7 & 5 \end{pmatrix} \text{ diagonal secundária destacada em azul.}$$

2. **Matriz Diagonal**: é uma matriz quadrada, cujos elementos não pertencem à diagonal principal são nulos.

   Exemplo 3:

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} : \text{ Matriz diagonal de ordem 4.}$$

   Note que B, pode ser interpretada como a matriz dos coeficientes do sistema homogêneo a seguir:

$$\begin{cases} 3x + 0y + 0z + 0w = 0 \\ 0x + 2y + 0z + 0w = 0 \\ 0x + 0y + 3z + 0w = 0 \\ 0x + 0y + 0z + 6w = 0 \end{cases}, \text{ ou seja } \begin{cases} 3x = 0 \\ 2y = 0 \\ 3z = 0 \\ 6w = 0 \end{cases}.$$

3. **Matriz identidade**: é uma matriz diagonal, cujas entradas da diagonal principal são todas iguais a 1.

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad I_n \text{ é a Matriz identidade de ordem } n.$$

Exemplo 4:

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad I_3 \text{ é Matriz identidade de ordem 3.}$$

Observe que I_3 representa os coeficientes do seguinte sistema:

$$\begin{cases} 1x + 0y + 0z = 0 \\ 0x + 1y + 0z = 0 \\ 0x + 0y + 1z = 0 \end{cases}, \text{ ou seja } \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}.$$

4. **Matriz triangular superior**: é uma matriz quadrada de ordem n em que todos os elementos abaixo da diagonal principal são iguais a zero, ou seja, $A = (a_{ij})$ com $a_{ij} = 0$, sempre que $i > j$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Exemplo 5:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} : \text{ Matriz triangular superior de ordem 4.}$$

5. **Matriz triangular inferior**: é uma matriz quadrada de ordem n em que todos

os elementos acima da diagonal principal são iguais a zero, ou seja, $A = (a_{ij})$ com $a_{ij} = 0$, sempre que $i < j$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Exemplo 6:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -9 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 5 & 6 & 0 \\ 1 & -6 & 0 & -2 & -6 \end{bmatrix} : \text{Matriz triangular inferior de ordem 5.}$$

6. **Matriz linha e Matriz coluna**: Toda matriz de ordem $1 \times n$ é chamada de matriz linha e toda matriz de ordem $m \times 1$ é chamada de matriz coluna.

Exemplo 7:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 9 & \sqrt{2} & 0 & -3 \end{bmatrix} : \text{Matriz linha de ordem } 1 \times 5.$$

$$C = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ \sqrt{7} \\ 0 \end{bmatrix} : \text{Matriz coluna de ordem } 4 \times 1.$$

7. **Matriz Nula**: é uma matriz cujas entradas são todas iguais a zero.

Exemplo 8:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} : \text{Matriz nula de ordem } 2 \times 5.$$

2.1.2 Igualdade de Matrizes

Segundo (BEAN, Sonia Elena P. Castro; KOZAKEVICH, Daniel Norberto, 2008), duas matrizes $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ de ordem $m \times n$, são ditas iguais se todos os seus elementos são iguais. Isto pode se expressar com a seguinte relação de igualdade:

$$a_{ij} = b_{ij} \text{ para todo } i \in \{1, 2, \cdots, m\} \text{ e para todo } j \in \{1, 2, \cdots, n\}.$$

Exemplo 9: Se x e y denotam números reais, temos:

$A = \begin{bmatrix} x & 3 \\ 2 & y \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ são iguais quando $x = -1$ e $y = 4$.

2.1.3 Operações com Matrizes

Baseadas nos estudos de (BEAN, Sonia Elena P. Castro; KOZAKEVICH, Daniel Norberto, 2008), (FAINGUELERNT, Estela Kufman; GOTTLIEB, Franca Cohen, 2004) e (IEZZI, Gelson et al., 2016) serão definidas, a seguir as operações entre matrizes:

1. **Adição:** Sejam duas Matrizes de mesma ordem $m \times n$, $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$, a soma de A com B (denotada por $A+B$) é a matriz $C = (c_{ij})$, em que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, para todo $i \in \{1, 2, \cdots, m\}$ e para todo $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$. Em outras palavras, a matriz C é de mesma ordem que A e B,portanto, cada um de seus elementos é a soma de elementos correspondentes de A e B.

   Exemplo 10:
   Sejam as Matrizes: $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$.

   $$A + B = \begin{bmatrix} -1+1 & 3+3 & -3+(-5) \\ 2+2 & 2+4 & 4+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 6 & -8 \\ 4 & 6 & 7 \end{bmatrix}.$$

2. **Matriz Oposta:** Seja a matriz $A = (a_{ij})$ de ordem $m \times n$. Chama-se *oposta de A* a matriz representada por $-A$, tal que $A + (-A) = 0$, sendo 0 a matriz nula $m \times n$. Definição baseada em (IEZZI, Gelson et al., 2016).

Exemplo 11:

Sejam as Matrizes: $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$; então $-A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & -4 \end{bmatrix}$.

3. **Subtração:** Sejam duas Matrizes de mesma ordem $m \times n$, $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$, a diferença entre A e B (denotada por $A - B$) é a soma da matriz A com a oposta de B.

Exemplo 12:

Sejam as Matrizes: $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$.

$$A - B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -7 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

4. **Propriedades da Adição de Matrizes:** Sejam as matrizes A, B e C, todas de mesma ordem, ou seja, $m \times n$ e $0_{m \times n}$ a matriz nula também $m \times n$ valem as seguintes propriedades:

(i) Comutatividade: $A + B = B + A$;

(ii) Associatividade: $(A + B) + C = A + (B + C)$;

(iii) Existência do Elemento neutro: existe uma matriz M tal que $A + M = M + A = A$, observe que, a matriz $M = 0_{m \times n}$;

(iv) Existência da oposta: existe uma matriz A' tal que $A + A' = A' + A = 0_{m \times n}$.

Para exemplificar, observe a demonstração da propriedade **(ii)**.

$$(A + B) + C = A + (B + C).$$

Dadas as matrizes $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ e $C = (c_{ij})$, todas de mesma ordem $m \times n$, temos:

$$(A + B) + C = D = (d_{ij}) \quad \text{e} \quad (A + B) + C = E = (e_{ij}).$$

Queremos mostrar que $D = E$.

Para todo $i \in \{1, 2, \cdots, m\}$ e para todo $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$,temos:

$$d_{ij} = (a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}.$$

Usando a propriedade associativa da adição de números reais, podemos escrever: $d_{ij} = a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij}) = e_{ij}$, então, $D = E$, isto é, $(A + B) + C = A + (B + C)$. $\square$

5. **Multiplicação por um número Real:** seja a matriz A de ordem $m \times n$, $A = (a_{ij})$ e k um número real. O produto de k pela matriz A (denotado por $k \cdot A$) é a matriz $B = b_{ij}$ também $m \times n$, em que $b = k \cdot a_{ij}$, para todo $i \in \{1, 2, \cdots, m\}$ e para todo $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$, isso significa que a matriz B é obtida de A multiplicando-se k por todos os elementos de A.

Exemplo 13

Se $A = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$, então $-3 \cdot A = \begin{bmatrix} -3\sqrt{2} & -9 \\ -6 & 6 \end{bmatrix}$.

6. **Propriedades da multiplicação por um número real:** sejam k e l números reais e $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ matrizes de ordem $m \times n$. Então valem as seguintes propriedades:
(i) $k \cdot (l \cdot A) = (k \cdot l) \cdot A$;
(ii) $k \cdot (A + B) = k \cdot A + k \cdot B$;
(iii) $(k + l) \cdot A = k \cdot A + l \cdot A$;
(iv) $1.A = A$.
Para exemplificar, vejamos a demonstração da propriedade **(ii)**.
Dadas as matrizes $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ ambas de ordem $m \times n$, e $k \in \mathbb{R}$, temos:
$k \cdot (A + B) = C = (c_{ij})_{m \times n}$; $k \cdot A = D = (d_{ij})_{m \times n}$ e $k \cdot B = E = (e_{ij})_{m \times n}$.

Vou mostrar que $C = D + E$.

Para todo $i \in \{1, 2, \cdots, m\}$ e para todo $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$ temos:

$$c_{ij} = k \cdot (a_{ij} + b_{ij}).$$

Usando a propriedade distributiva da multiplicação em relação a adição para números reais, se obtém:

$$c_{ij} = k \cdot a_{ij} + k \cdot b_{ij} = d_{ij} + e_{ij}.$$

Desta forma, posso concluir que $C = D + E$, isto é: $k \cdot (A + B) = k \cdot A + k \cdot B$. $\square$

7. **Multiplicação de Matrizes:** sejam $A = (a_{ij})$ de ordem $m \times n$ e $B = (b_{ij})$ de or-

dem $r \times p$. O produto AB (nesta ordem) é definido somente quando $n = r$ (número de colunas da primeira matriz tem que ser igual ao número de linhas da segunda matriz). Este produto resulta na matriz $C = (c_{ij})$ de ordem $m \times n$. Cada elemento c_{ij} da matriz C (produto) é obtido somando os produtos de cada elemento da linha i de A pelo correspondente da coluna j de B,ou seja, os elementos c_{ij} são da forma:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj},$$
$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}.$$

Exemplo 14:

Sejam as Matrizes: $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \end{bmatrix}$.

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 3 \cdot 1 + 2 \cdot 5 + (-1) \cdot 6 & 0 + 2 \cdot 3 + (-1) \cdot 4 & 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 \\ 0 + 4 \cdot 5 + 6 \cdot 6 & 0 + 4 \cdot 3 + 6 \cdot 4 & 0 + 4 \cdot 1 + 6 \cdot 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 7 & 2 & 6 \\ 56 & 36 & 16 \end{bmatrix}_{2 \times 3}.$$

Observações:

(a) Note que no exemplo 14, o produto de $B \cdot A$ não esta definido, pois o número de colunas de B é 3 e o número de linhas de A é 2, isto é o número de colunas de B é diferente do número de linhas de A;

(b) O produto de duas matrizes não é comutativo, ou seja, $A \cdot B = B \cdot A$ não é uma propriedade que se verifica sempre, veja o Exemplo 15;

(c) A multiplicação de duas matrizes não nulas, pode resultar em uma matriz nula. Veja o exemplo a seguir:

Exemplo 15:

Sejam as Matrizes $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$, note que:

$A \cdot B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $B \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 14 & 0 \end{bmatrix}$.

(d) Sejam as matrizes $A = (a_{ij})$ uma matriz de ordem $m \times n$, I_m e I_n matrizes Identidade de ordem m e n respectivamente, então:

$$A \cdot I_n = A \quad \text{e} \quad I_m \cdot A = A.$$

(e) Se $A = (a_{ij})$ é uma matriz quadrada de ordem n temos:

$$A \cdot I_n = I_n \cdot A = A.$$

8. **Propriedades da Multiplicação de Matrizes:** sejam A, B e C Matrizes que satisfaçam às condições de multiplicação e adição matricial e $k \in \mathbb{R}$. Então, as seguintes propriedades são verificadas:

(i) Associatividade: $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot A)$;

(ii) Distributividade à direita: $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$;

(iii) Distributividade à esquerda: $C \cdot (A + B) = C \cdot A + C \cdot B$;

(iv) $k \cdot (A \cdot B) = (k \cdot A) \cdot B = A \cdot (k \cdot B)$.

Para exemplificar, vejamos as demonstrações das propriedades **(ii)** e **(iv)**

(ii) $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$.

Sejam as matrizes $A = (a_{ik})_{m \times p}$, $B = (b_{ik})_{m \times p}$ e $C = (c_{kj})_{p \times n}$, então:

$$(A + B) \cdot C = ((a_{ik} + b_{ik}))_{m \times p} \cdot (c_{kj})_{p \times n},$$

usando a definição do produto de matrizes para $A + B$ e C, temos:

$$= \left(\sum_{k=1}^{p} (a_{ik} + b_{ik}) c_{kj} \right)_{m \times n},$$

usando a propriedade distributiva dos números reais:

$$= \left(\sum_{k=1}^{p} (a_{ik} c_{kj} + b_{ik} c_{kj}) \right)_{m \times n},$$

pela propriedade de somatórios e a definição de adição de matrizes:

$$= \left(\sum_{k=1}^{p} a_{ik}c_{kj} + \sum_{k=1}^{p} b_{ik}c_{kj} \right)_{m\times n} = \left(\sum_{k=1}^{p} a_{ik}c_{kj} \right)_{m\times n} + \left(\sum_{k=1}^{p} b_{ik}c_{kj} \right)_{m\times n},$$

Pela definição de produto de matrizes:

$$= A \cdot C + B \cdot C,$$

logo,

$$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C. \qquad \square$$

(iv). $k \cdot (A \cdot B) = (k \cdot A) \cdot B = A \cdot (k \cdot B)$.
Seja $k \in \mathbb{R}$, $A = (a_{ik})_{m\times p}$, e $B = (b_{kj})_{p\times n}$,

$$k \cdot (A \cdot B) = k(a_{ik})_{m\times p} \cdot (b_{kj})_{p\times n} = \left(k \sum_{k=1}^{p} (a_{ik} \cdot b_{kj}) \right)_{m\times n},$$

usando a propriedade de somatório com k sendo uma constante, temos:

$$= \left(\sum_{k=1}^{p} k(a_{ik} \cdot b_{kj}) \right)_{m\times n},$$

pela propriedade associativa de números reais, temos:

$$= \left(\sum_{k=1}^{p} (ka_{ik}) \cdot b_{kj} \right)_{m\times n},$$

e por meio da definição de produto de matrizes e produto de uma matriz por um escalar, temos:

$$= (k \cdot A) \cdot B,$$

logo,

$$k \cdot (A \cdot B) = (k \cdot A) \cdot B. \qquad \square$$

9. **Matriz Transposta**: é uma matriz obtida de uma matriz A, quando permutamos ordenadamente as colunas pelas linhas dessa matriz, e é indicada por A^T, isto é, $B = A^T \Leftrightarrow b_{ij} = a_{ji}$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$.

Exemplo 16:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} & 0 & -3 \\ 9 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ \sqrt{2} & 1 \\ 0 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

10. **Propriedades da Matriz Transposta:** sejam A, B e C matrizes que satisfaçam às condições de multiplicação e adição matricial e $k \in \mathbb{R}$. Então, as seguintes propriedades são verificadas:
(i) $(A^T)^T = A$;
(ii) $(A + B)^T = A^T + B^T$;
(iii) $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$;
(iv) $(k \cdot A)^T = k \cdot A^T$.

11. **Matriz Simétrica**: é uma matriz quadrada de ordem n, em que $a_{ij} = a_{ji}$ para quaisquer valores de i e j, ou seja, $A = A^T$.

Exemplo 17:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 0 & 6 \\ 6 & 3 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & 8 & 9 \\ 6 & 5 & 9 & 5 \end{bmatrix} : \text{ Matriz simétrica de ordem 4.}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} : \text{ Matriz simétrica de ordem 2.}$$

12. **Matriz Anti-simétrica**: é uma matriz quadrada de ordem n, em que $a_{ij} = -a_{ji}$ para quaisquer valores de i e j, ou seja $A = -A^T$.

Exemplo 18:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -6 \\ -2 & 3 & 5 & -5 \\ 3 & -5 & 8 & 9 \\ 6 & 5 & -9 & 5 \end{bmatrix} : \text{ Matriz Anti-simétrica de ordem 4.}$$

$C = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$: Matriz Anti-simétrica de ordem 2.

13. **Potência de uma Matriz:** seja A uma matriz de ordem n, ou seja, quadrada e r um inteiro positivo, A elevado a r, denotado por A^r é definida por:

$$A^r = \underbrace{A \cdot A \cdots A}_{r\ vezes}.$$

Exemplo 19: Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, calcular A^3.

Assim,

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix},$$

$$A^3 = A \cdot A \cdot A = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Observações:

(a) Determinar A^r equivale a calcular $A^{r-1} \cdot A$, assim se quisermos encontrar A^{10}, teremos que calcular antes A^9 e multiplicar o resultado por A,para isso, teríamos que previamente ter calculado A^8 etc;

(b) Por Definição se $r = 0$ e $A \neq 0$, então $A^0 = I$.

14. **Traço de uma Matriz :** seja $A = (a_{ij})$ uma matriz de ordem n, ou seja, quadrada o traço de A denotado por $Tr(A)$, é o número dado pela soma dos elementos diagonais, isto é:

$$Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Exemplo 20: Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 9 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, calcular $Tr(A)$.

Assim,

$$Tr(A) = 5 + 0 + 2 = 7.$$

15. **Propriedades do traço de uma Matriz:** sejam A, B e C matrizes que satisfaçam às condições de multiplicação e adição matricial e $k \in \mathbb{R}$. Então, as seguintes propriedades são verificadas:
(i) $Tr(k \cdot A) = k \cdot Tr(A)$;
(ii) $Tr(A + B) = Tr(A) + Tr(B)$;
(iii) $Tr(A^T) = Tr(A)$;
(iv) $Tr(A \cdot B) = Tr(B \cdot A)$.
Para exemplificar vejamos a demonstração da propriedade **(ii)**

$$Tr(A + B) = Tr(A) + Tr(B).$$

Sejam $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ ambas quadradas e de ordem n. Pela definição de somas de matrizes e de traço, temos:

$$Tr(A + B) = \sum_{i=1}^{n}(a_{ii} + b_{ii}),$$

Usando a propriedade de somatório:

$$= \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \sum_{i=1}^{n} b_{ii}$$

$$= Tr(A) + Tr(B).$$

□

2.1.4 Determinantes

Segundo (IEZZI, Gelson et al., 2016), "os primeiros trabalhos sobre determinantes teriam surgido, quase na mesma época, no Oriente e no Ocidente: em 1683, em um artigo do matemático japonês Seki Kowa (1642-1708) e, dez anos depois, com o alemão Gottfried Leibniz (1646 - 1716)". Ambos matemáticos desenvolveram expressões com os coeficientes das equações de sistemas lineares. No século XVIII, outros matemáticos como Vandermonde, Laplace, Bézout e Cramer publicaram artigos sobre determinantes com valiosas contribuições. Porém, foi somente no século XIX, com os trabalhos de Jacobi (1804-1851) e Cauchy (1789-1857) que a teoria dos Determinantes ganhou notoriedade na Europa. Atribui-se à Cauchy a autoria do termo "determinante"também foi responsável por organizar em 1812 tudo que era conhecido sobre o assunto até então.

Como fiz no início deste capítulo, considero o sistema de duas equações e duas incógnitas:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}, \tag{2.11}$$

multiplicando a 1ª equação por $(-a_2)$ e a 2ª equação por (a_1)

$$\begin{cases} -a_1a_2x - a_2b_1y = -a_2c_1 \\ a_1a_2x + a_1b_2y = a_1c_2 \end{cases},$$

somando,

$$(a_1a_2 - a_1a_2)x + (a_1b_2 - a_2b_1)y = a_1c_2 - a_2c_1,$$

$$y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}. \tag{2.12}$$

Analogamente, obtemos o valor de x, multiplicando a 1ª equação de (2.11) por (b_2) e a 2ª equação de (2.11) por $(-b_1)$ e depois somando.

$$x = \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}. \tag{2.13}$$

Se $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, o sistema tem uma única solução. Nos casos onde $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ temos que o sistema não possui soluções.

Por outro lado, escrevendo a sistema (2.11) como equação matricial, tem-se:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{c}.$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad e \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}.$$

A é uma matriz de ordem 2 formada com os coeficientes de x e y; associo à matriz A o número real D que se obtém da seguinte maneira:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1.$$

Quer dizer, o produto dos elementos da diagonal principal, menos o produto dos elementos da diagonal secundária.

Se substituirmos em D os coeficientes de x, a_1 e a_2, respectivamente, pelos termos conhecidos c_1 e c_2, obtém-se Dx:

$$Dx = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1b_2 - c_2b_1.$$

Analogamente, obtém-se Dy, substituindo em D os coeficientes de y, b_1, respectivamente, pelos termos conhecidos c_1 e c_2:

$$Dy = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - a_2c_1.$$

Se $D \neq 0$, resulta que $x = \frac{Dx}{D}$ e $y = \frac{Dy}{D}$, basta comparar com (2.12) e (2.13), obtidas anteriormente, e o sistema tem uma única solução.

A número D é chamado de *Determinante do sistema* (2.11).

Para representar o determinante de uma matriz quadrada usamos um par de barras simples e a disposição dos elementos respeitando a da matriz dada.

Seja matriz A quadrada de ordem n

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Então seu determinante é denotado por:

$$det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix}.$$

Observação: Quando a ordem da matriz for um, o valor de $det(A)$ é seu único elemento. Assim se $A = (a_{11}) \Rightarrow det(A) = |a_{11}| = a_{11}$.

1. **Cofator de uma Matriz:** dada a matriz M de ordem n:

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{i1} & a_{12} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Se eliminarmos na matriz M a linha i e a coluna j, obteremos outra matriz de ordem $(n-1)$, cujo determinante multiplicado por $(-1)^{i+j}$ é denominado cofator de a_{ij} e é indicado por M_{ij}.

$$M_{ij} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1(j-1)} & a_{1(j+1)} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ a_{(i-1)1} & \dots & a_{(i-1)(j-1)} & a_{(i-1)(j+1)} & \dots & a_{(i-1)n} \\ a_{(i+1)1} & \dots & a_{(i+1)(j-1)} & a_{(i+1)(j+1)} & \dots & a_{(i+1)n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n(j-1)} & a_{n(j+1)} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

2. **Determinante usando Cofatores - Desenvolvimento de Laplace:** o determinante de uma matriz de ordem n é o número real obtido da soma de produtos dos elementos de uma linha ou coluna por seus cofatores.

   (i) Caso $n = 2$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

desenvolvendo segundo os elementos da 1ª linha temos:

$$det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}(-1)^{1+1}|a_{22}| + a_{12}(-1)^{1+2}|a_{21}| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Ou seja, o determinante de uma matriz de ordem 2 é o produto dos termos da diagonal principal, menos o produto dos termos da diagonal secundária.

(ii) Caso $n = 3$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

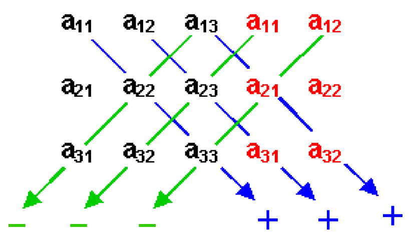
desenvolvendo segundo os elementos da 1ª linha temos:

$$det(A) = a_{11}(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$
$$det(A) = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{11})$$
$$det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Olhando atentamento o resultado acima, nota-se que três termos são positivos e três termos são negativos.

Podemos obter facilmente os termos acima, adotando a seguinte disposição, denominada **Regra de Sarrus**, repetimos as 2 primeiras colunas, conforme Figura 1:

Figura 1: Regra de Sarrus



.

Fonte: Elaborada pelo autor.

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Exemplo 21: Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, calcular $det(A)$:

Desenvolvendo segundo os elementos da 3ª linha, temos:

$$det(A) = 3(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} + 1(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + 2(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 3(8-0) - 1(28-6) + 2(0-4) = -6.$$

Ou podemos usar a Regra de Sarrus:

$$det(A) = 7 \cdot 0 \cdot 2 + 2 \cdot 4 \cdot 3 + 3 \cdot 2 \cdot 1 - 3 \cdot 0 \cdot 3 - 1 \cdot 4 \cdot 7 - 2 \cdot 2 \cdot 2 = -6.$$

3. **Propriedades do determinante:** sejam A e B matrizes que satisfaçam às condições de multiplicação e adição matricial e $k \in \mathbb{R}$. Então, as seguintes propriedades são verificadas:
   (i) Se A possui uma coluna (linha) composta apenas por zeros, então $det(A) = 0$;
   (ii) Se A possui duas colunas (linhas) iguais ou proporcionais, então $det(A) = 0$;
   (iii) Se multiplicarmos k por uma linha (coluna) da matriz A, obtendo uma matriz B, então $det(B) = k \cdot det(A)$;
   (iv) Se trocarmos as posições relativas de 2 linhas (colunas) da matriz A, obtendo uma Matriz B, então $det(B) = -det(A)$;
   (v) Se substituirmos a linha (coluna), por ela somada a um múltiplo escalar de outra linha (coluna), obtendo a matriz B, então $det(B) = det(A)$;
   (vi) $det(A) = det(A^T)$;
   (vii) $det(AB) = det(A)det(B)$;
   (viii) Se A é uma matriz triangular, então determinante de A se reduz ao produto dos elementos da diagonal principal.

2.1.5 Matriz Adjunta

Seja A uma matriz de ordem n, a matriz adjunta de A é dada por:

$$Adj(A) = (Cof(A))^T,$$

$Cof(A)$ é a matriz onde cada elemento é cofator (i,j) do elemento a_{ij} da matriz A.

Exemplo 22:

Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ então: $Cof(A) = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$,

assim:

$$Adj(A) = (Cof(A))^T = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}.$$

A seguir, enunciarei o teorema que será útil posteriormente, o mesmo não será demonstrado, pois o objetivo é apenas utilizar o seu resultado.

Teorema 2.1.1 (Matriz Adjunta) *Se A é uma Matriz de ordem n,*

$$Adj(A).A = A.Adj(A) = det(A).I_n.$$

2.2 MATRIZES INVERSÍVEIS

Definição 4 *Uma matriz é dita singular, se seu determinante for nulo.*

Exemplo 23:
A matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$ é Singular pois $det(A) = 0$.

Definição 5 *Seja A uma matriz quadrada de ordem n. A é inversível se, e somente se, existir uma matriz quadrada B de ordem n tal que $A \cdot B = I_n = B \cdot A$.*
A matriz B é chamada de inversa da matriz A, representado por $B = A^{-1}$.
Observe, que no caso das matrizes inversíveis $A = B^{-1}$.

Exemplo 24:
A inversa da matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ é $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$,
pois $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$.

Propriedades da Inversa de uma Matriz: se A e B são matrizes inversíveis, então, as seguintes propriedades são verificadas:
(i) Se A é Inversível, então $det(A) \neq 0$;
(ii) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;
(iii) $(A^{-1})^{-1} = A$;
(iv) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$;
(v) $det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}$.

Para exemplificar, apresento as demonstrações das propriedades **(i)** e **(ii)**.

(i) Se A é Inversível, então $det(A) \neq 0$.
Vamos supor que $det(A) = 0$, e devemos chegar a uma contradição. Assim usando a propriedade **(vii)** do determinante:

$$det(AB) = det(A) \cdot det(B)$$

$$det(AB) = 0 \cdot det(B)$$

$$det(AB) = 0.$$

Por outro lado, temos por hipótese que A é inversível, logo existe uma matriz B de modo que $AB = I$, assim temos:

$$det(AB) = det(I)$$

$$det(AB) = 1.$$

Obtemos $0 = 1$, o que é uma contradição. Logo $det(A) = 0$. $\square$

(ii) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
Verifica-se a existência de $(AB)^{-1}$, através do $det(AB)$:

$$det(AB) = det(A)det(B).$$

Pela hipótese, A e B são inversíveis, ou seja, $det(A) \neq 0$ e $det(B) \neq 0$. Logo $det(AB) \neq 0$, com isso $\exists (AB)^{-1}$, isto é,

$$(AB)(AB)^{-1} = I,$$

como B é inversível

$$B \cdot B^{-1} = I,$$

multiplicamos pela direita por A^{-1}, em ambos os lados

$$(B \cdot B^{-1}) \cdot A^{-1} = I \cdot A^{-1},$$

usando a propriedade associativa e efetuando a multiplicação por I,

$$B \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1}) = A^{-1},$$

multiplicamos à esquerda por A:

$$A \cdot (B \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1})) = A \cdot A^{-1},$$

usando novamente a associativa e efetuando $A \cdot A^{-1} = I$,

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = I,$$

como AB admite inversa, multiplicamos ambos os lados por $(AB)^{-1}$ pela esquerda:

$$(AB)^{-1}(AB)(B^{-1}A^{-1}) = (AB)^{-1}I,$$

sabendo-se que $(AB)^{-1}(AB) = I$,

$$I(B^{-1}A^{-1}) = (AB)^{-1}I,$$

efetuando a Multiplicação por I

$$(B^{-1}A^{-1}) = (AB)^{-1}.$$

□

2.2.1 Métodos de cálculo da Matriz Inversa no Ensino Médio

Apresento a seguir, os métodos encontrados comumente nos livros didáticos do Ensino Médio, para cálculo da Matriz Inversa. Primeiramente oriento a calcular o determinante, pois se o mesmo for nulo, a matriz não admitirá inversa.

1. **Método Matriz Adjunta:** pelo Teorema 2.1.1 obtemos o resultado:

$$A \cdot \left(Adj(A) \cdot det(A)^{-1}\right) = \left(Adj(A) \cdot det(A)^{-1}\right) \cdot A = I_n.$$

Escolhendo a igualdade (Escolhendo a outra o resultado seria análogo):

$$A \cdot \left(Adj(A) \cdot det(A)^{-1}\right) = I_n,$$

multiplicando por A^{-1} pela esquerda, o resultado será:

$$A^{-1} = \left(Adj(A) \cdot det(A)^{-1}\right).$$

Exemplo 25:

Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$, encontrar A^{-1}.

Calculamos primeiramente o $det(A) = 4$ e a matriz Adjunta

$$Adj(A) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$A^{-1} = \left(Adj(A) \cdot det(A)^{-1}\right) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}.$$

2. **Método usando a definição:** é baseado na definição de matriz inversa e resolução de sistemas.

Exemplo 26:

Verificar a existência da matriz inversa de $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$, em caso positivo, determine a inversa.

Primeiramente calculamos o determinante de A.

$det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 5 = 1 \neq 0$, logo admite inversa.

Agora determine $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, tal que $A \cdot A^{-1} = I_2$.

assim:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2a + c & 2b + d \\ 5a + 3c & 5b + 3d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Do conceito de igualdade de matrizes, seguem os sistemas:

$\begin{cases} 2a + c = 1 \\ 5a + 3c = 0 \end{cases}$, cuja solução é $a = 3$ e $c = -5$.

$\begin{cases} 2b + d = 0 \\ 5b + 3d = 1 \end{cases}$, cuja solução é $b = -1$ e $d = 2$. Logo $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$.

Exemplo 27:

Verificar a existência da matriz inversa de $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$, em caso positivo, determine-a. Primeiramente calculo o determinante de B.

$det(B) = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0$, logo a matriz B não é inversível.

Obviamente, o exercício termina aqui. Vamos aplicar a definição e verificar o que acontece na resolução do sistema.

Tentaremos determinar $B^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, tal que $B \cdot B^{-1} = I_2$.
assim:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 4a+2c & 4b+2d \\ 6a+3c & 6b+3d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Do conceito de igualdade de matrizes seguem os sistemas:

$$\begin{cases} 4a+2c=1 \\ 6a+3c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a+2c=1\cdot(-6) \\ 6a+3c=0\cdot(4) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -24a-12c=-6 \\ 24a+12c=0 \quad \bigoplus. \\ \hline 0a \ + \ 0c=-6 \end{cases}$$

O Sistema acima não admite soluções,pois não existem a e c reais tais que
$0 \cdot a + 0 \cdot c = -6$.

$$\begin{cases} 4b+2d=0 \\ 6b+3d=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4b+2d=0\cdot(-6) \\ 6b+3d=1\cdot(4) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -24b-12d=0 \\ 24b+12d=4 \quad \bigoplus. \\ \hline 0b \ + \ 0d=4 \end{cases}$$

De forma análoga, o segundo sistema também não admite soluções. Como já sabia inicialmente, devido $det(B) = 0$ a matriz B não é inversível.

2.2.2 Transformações Elementares de Matrizes

Denotamos por L_i a i-ésima linha de uma matriz $A = (a_{ij})$ de ordem $m \times n$ com $1 \leq i \leq m$. HEFEZ (2016) define as *transformações elementares nas linhas* da matriz A como:

(i) Multiplicar uma linha L_i por um número real c não nulo, denotada por $L_i \to cL_j$;

(ii) Permutar duas linhas L_i e L_j, denotada por $L_i \leftrightarrow L_j$;

(iii) Substituir uma linha L_i, pela adição da mesma com c vezes um outra linha L_j, denotada por $L_i \to L_i + cL_j$.

Exemplo 28: Amostra de transformações elementares por linhas na matriz:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix},$$

permutar as linhas L_1 e L_3

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \underset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 5 & 6 \end{bmatrix},$$

multiplicar a linha L_2 por 3

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \underset{L_2 \to 3L_2}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 5 & 6 \end{bmatrix},$$

substituir a linha L_3, pela adição dela mesma com a linha L_1

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \underset{L_3 \to L_3 + L_1}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & 6 \\ 6 & 2 & 8 & 6 \end{bmatrix}.$$

Definição 6 *Sejam A e B matrizes de ordem $m \times n$. Se B pode ser obtida de A através de um número finito de transformações elementares sobre linhas, dizemos que A é equivalente por linhas à matriz B.*

Exemplo 29:

As matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 5 & 11 & 8 \\ 2 & 4 & 13 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$,

são equivalentes por linhas, pois:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 5 & 11 & 8 \\ 2 & 4 & 13 \end{bmatrix} \underset{L_2 \to L_2 - 5L_1}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 13 \end{bmatrix} \underset{L_3 \to L_3 - 2L_1}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} = B.$$

Note "que a noção de equivalência de matrizes por linhas corresponde à noção de equivalência de sistemas lineares quando se efetuam as respectivas transformações sobre as equações"(FERNANDES, Cecília de Souza; HEFEZ, Abramo, 2016, p.27) apresentado no início do capítulo, veja:

$$\begin{cases} 1x + 2y + 2z = 0 \\ 5x + 11y + 8z = 0 \\ 2x + 4y + 13z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1x + 2y + 2z = 0 \\ 0x + 1y - 2z = 0 \\ 2x + 4y + 13z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1x + 2y + 2z = 0 \\ 0x + 1y - 2z = 0 \\ 0x + 0y + 9z = 0 \end{cases}.$$

Quando aplicamos as transformações elementares em uma matriz identidade I_n, obtemos uma *matriz elementar de ordem n*, denotada por:

$$E = e(I_n),$$

onde e é uma transformação elementar.

Exemplo 30: Segundo HEFEZ (2016), a matriz identidade é uma matriz elementar e as matrizes:

$E_1 = e(I_3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, onde $e : L_1 \leftrightarrow L_3$ e.

$E_2 = e(I_2) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, onde $e : L_1 \to L_1 + 2L_2$, são matrizes elementares.

Proposição 2.2.1 *Sejam A uma matriz invertível de ordem n e $e_1, e_2, ...e_r$ transformações elementares tais que $e_r(...(e_2(e_1(A)))...) = I_n$. Então essa mesma sequência de transformações elementares aplicada a I_n produz A^{-1}.*

Uso o resultado acima para outro método de cálculo da inversa de uma matriz, apresentada através de exemplos na Subseção 2.2.5.

2.2.3 Matriz na forma escalonada

Nesta subseção, uso o fato de que "toda matriz pode ser transformada por meio de uma sequência de transformações elementares sobre linhas em uma forma muito especial, a forma escalonada"(FERNANDES, Cecília de Souza; HEFEZ, Abramo, 2016, p.28), que no Ensino Médio utilizamos para cálculo de inversa de matrizes e resolução de sistemas lineares.

Definição 7 *Seja a matriz A de ordem $m \times n$, dizemos que ela está na forma escalonada, se o número de zeros que precede o primeiro elemento não nulo (denominado pivô) de cada linha, aumenta de cada linha para a seguinte abaixo, podendo restar ou não apenas linhas nulas. Caso A seja uma matriz quadrada, ela será uma matriz triangular superior.*

Exemplo 31: A seguir temos exemplos de matrizes na forma escalonada e seus respectivos pivôs em destaque.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & -5 \\ 0 & 7 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Definição 8 *Dizemos que uma matriz está na forma escalonada reduzida, quando:*
(i) *Esta na forma escalonada;*
(ii) *Todos os pivôs são iguais a 1;*
(iii) *Toda coluna que contêm um pivô, os demais elementos da mesma são iguais a zero.*

Exemplo 32: As matrizes a seguir estão na forma escalonada reduzida.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2.2.4 Aplicação do escalonamento no cálculo de determinante

Ao escalonarmos uma matriz quadrada de ordem n, transformamos a mesma em uma matriz triangular superior, pela propriedade **(viii)** dos determinantes, basta multiplicar os elementos da diagonal principal para obter o determinante. Neste processo são usados as demais propriedades dos determinantes.

Exemplo 33: Exemplo adaptado do livro Matrizes e Determinantes de Fainguelernt página 37.

Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 5 & 9 & 8 \\ 7 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, calcule o determinante pelo processo de escalonamento.

$det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 5 & 9 & 8 \\ 7 & 2 & 1 \end{vmatrix}$; fazendo $L_1 \to \frac{1}{2}L_1$, temos $det(A) = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 9 & 8 \\ 7 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

$det(A) = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 9 & 8 \\ 7 & 2 & 1 \end{vmatrix}$; fazendo $L_2 \to L_2 - 5L_1$, obtemos $det(A) = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -7 \\ 7 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

$det(A) = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -7 \\ 7 & 2 & 1 \end{vmatrix}$; fazendo $L_3 \to L_3 - 7L_1$, obtemos $det(A) = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -7 \\ 0 & -12 & -20 \end{vmatrix}$.

$det(A) = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -7 \\ 0 & -12 & -20 \end{vmatrix}$; fazendo $L_2 \to -1L_2$, obtemos $det(A) = 2 \cdot (-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & -12 & -20 \end{vmatrix}$.

$det(A) = 2 \cdot (-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & -12 & -20 \end{vmatrix}$; fazendo $L_3 \to L_3 + 12L_2$, obtemos

$det(A) = 2 \cdot (-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 64 \end{vmatrix}$. Logo, $det(A) = 2 \cdot (-1) \cdot 1 \cdot 1 \cdot 64 = -128$.

2.2.5 Aplicação do escalonamento no cálculo da inversa.

Utilizando a Proposição 2.2.1, apresento o método prático ensinado aos alunos no Ensino Médio:

$$[A \vdots I] \xrightarrow{\text{transf. elementares}} [I \vdots A^{-1}]$$

Dada uma matriz A de ordem n invertível, coloque a sua direita uma matriz identidade de ordem n, aplicamos transformações elementares simultaneamente nas duas matrizes até que A se torne a matriz identidade, à direita teremos a matriz A^{-1}.

Exemplo 34: Usar o métodos apresentado anteriormente para calcular a inversa da matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 \to L_3 - 2L_1]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{L_2 \to \frac{1}{3}L_2 \\ L_3 \to -\frac{1}{3}L_3}]{}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{array}\right] \xrightarrow[L_1 \to L_1 - 2L_3]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{array}\right].$$

Logo $A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$.

2.3 SISTEMAS LINEARES

Após termos visto toda álgebra matricial vista no Ensino Médio, posso iniciar os métodos de resolução dos sistemas lineares. Como visto no início do capítulo, um sistema linear com m equações e n incógnitas

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}.$$

onde os a_{ij}'s e os b_{ij}'s, para $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$, são números reais. O mesmo tem o conjunto solução definida pelo conjunto S:

$$S = \{(c_1, c_2, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n; a_{i1}c_1 + a_{i2}c_2 + \cdots + a_{in}c_n = b_i, 1 \leq i \leq m\}.$$

O sistema acima pode ser escrito na forma de equação matricial:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad e \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

O sistema está associado a duas matrizes A e C

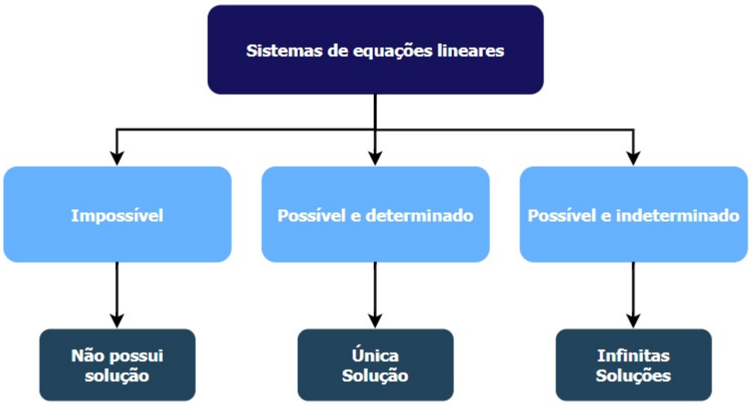
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}, \text{ chamada de matriz incompleta.}$$

$$C = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}, \text{ chamada de matriz completa.}$$

2.3.1 Classificação de um Sistema Linear

Podemos classificar um sistema, quanto ao número de soluções conforme a Figura 2:

Figura 2: Classificação de Sistemas Lineares



Fonte: Elaborada pelo autor.

Se o sistema for homogênio, ele sempre será possível, pois admite a solução trivial: $(0; 0; 0; 0; ...; 0)$.

Quando o sistema possui n equações e n incógnitas, a matriz incompleta A associada ao mesmo, é quadrada, logo possui determinante. Se o $det(A) \neq 0$, então o sistema possui uma única solução.

2.3.2 Interpretação geométrica de um sistema 2x2

Cada equação de um sistema 2×2 pode ser interpretada como uma reta em $\mathbb{R}^2$, acompanhe os sistemas a seguir:

$$\textbf{I.} \begin{cases} 2x + y = 0 \\ 5x + 3y = 1 \end{cases}.$$

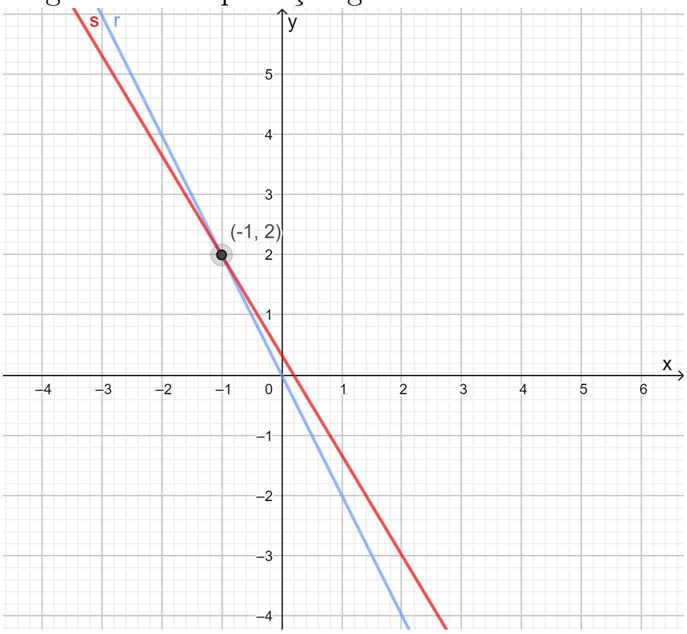
A primeira equação do sistema é equivalente à $y = -2x$ representada pela reta r. Já segunda equação é equivalente à $y = -\frac{5x}{3} + \frac{1}{3}$, representada pela reta s. As retas r e s estão representadas na Figura 3.

As retas r e s são concorrentes e se intersectam em um único ponto $(-1, 2)$ que é solução do sistema I, pois satisfaz simultaneamente as duas equações. Neste caso, o sistema é *possível e determinado.* e tem apresenta solução $S = (-1, 2)$.

$$\textbf{II.} \begin{cases} 2x + y = 5 \\ 4x + 2y = 1 \end{cases}.$$

A primeira equação é equivalente à $y = -2x + 5$, a segunda equação é equivalente

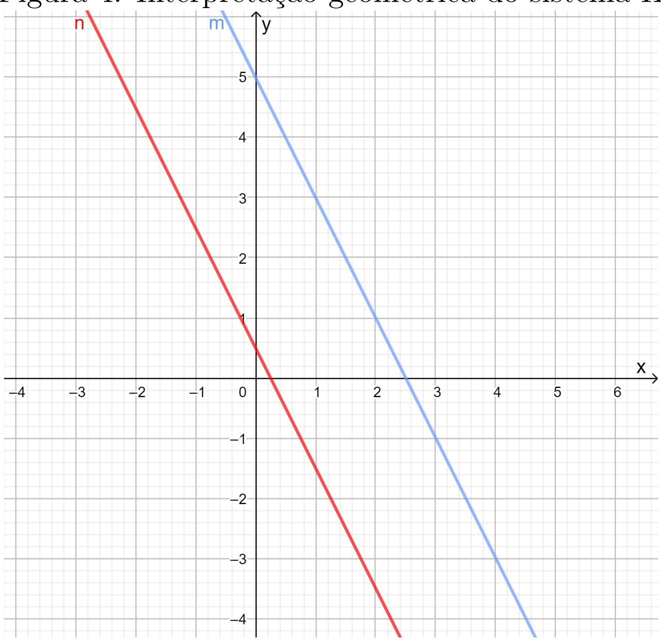
Figura 3: Interpretação geométrica do sistema I



Fonte: Elaborada pelo autor.

à $y = -2x + \frac{1}{2}$, ambas representadas pelas retas m e n respectivamente na Figura 4.

Figura 4: Interpretação geométrica do sistema II



Fonte: Elaborada pelo autor.

Se fossemos resolver o sistema pelo método algébrico,

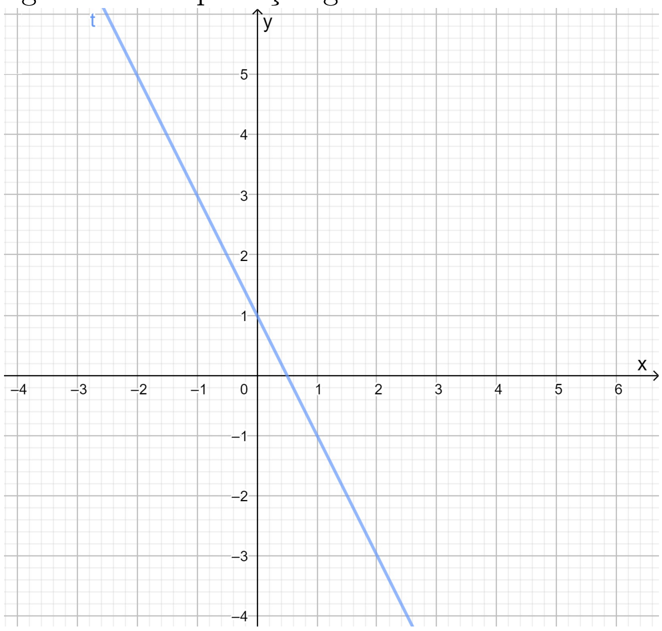
$$\begin{cases} 2x & + & y = 5 \cdot (-2) \\ 4x & + & 2y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4x & - & 2y = -10 \\ 4x & + & 2y = 1 \\ \hline 0x & + & 0y = -9 \end{cases} \bigoplus .$$

verificaria-se-ia não existirem x e y reais tais que $0 \cdot x + 0 \cdot y = -9$, logo o sistema é *impossível* e seu conjunto solução é $S = \emptyset$. Neste caso as retas são paralelas.

III. $\begin{cases} 2x & + & y = 1 \\ 4x & + & 2y = 2 \end{cases}$.

Note que ambas as equações são equivalentes à $y = -2x + \frac{1}{2}$, ou seja, têm por gráfico retas coincidentes, portanto possuem como interseção todos os pontos da reta t, logo o sistema admite infinitas soluções, conforme Figura 5.

Figura 5: Interpretação geométrica do sistema III



Fonte: Elaborada pelo autor.

2.3.3 Regra de Cramer

A regra de "...Cramer é um dos métodos diretos de resolução de sistemas de equações lineares mais conhecidos. Embora, bastante restritivo na sua aplicação (exige matriz quadrada com determinante não nulo), desempenha um papel importante dentro dessa teoria"(ANDRADE, 2019, p.1). Recebe este nome devido a Gabriel Cramer (1704 –1752) que publicou este resultado em 1750.

Sendo assim, as incógnitas do sistema a seguir:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases},$$

podem ser calculadas por:

$$x = \frac{D_x}{D};\ y = \frac{D_y}{D}\ e\ z = \frac{D_z}{D},\ D \neq 0.$$

Onde, D é o determinante da matriz incompleta associada ao sistema:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

D_x, D_y e D_z são calculados, substituindo cada coluna da matriz incompleta de interesse pelos termos independentes do sistema.

$$D_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix};\ D_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix} \text{ e } D_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}.$$

Exemplo 35: Resolva o sitema abaixo, usando a Regra de Cramer, utilizando a teoria de matrizes e determinantes.

$$\begin{cases} x + 2y = 7 \\ -x - 3y - z = -9 \\ 2x - y + z = -2 \end{cases}.$$

Primeiro, calculo o determinante da matriz incompleta:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -6,$$

agora determinamos o valor de D_x, D_y e D_z:

$$D_x = \begin{vmatrix} 7 & 2 & 0 \\ -9 & -3 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -6;\ D_y = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 0 \\ -1 & -9 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -18 \text{ e}$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ -1 & -3 & -9 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 6,$$

logo:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{(-6)}{(-6)} = 1; \ y = \frac{D_y}{D} = \frac{(-18)}{(-6)} = 3 \ e \ z = \frac{D_z}{D} = \frac{(6)}{(-6)} = -1.$$

2.3.4 Sistema escalonado

Definição 9 *Sistemas escalonados apresentam as seguintes características:*
(i) Em todas as equações, existe um coeficiente não nulo;
(ii) O número de coeficientes nulos, antes do primeiro não nulo, aumenta em relação a equação anterior.

Os sistemas abaixo apresentam estas características, por isso, são chamados de *sistemas escalonados*.

$$I. \begin{cases} 4x + 2y + 2z = 1 \\ \quad\quad 6y + 3z = 0 \\ \quad\quad\quad\quad 3z = 2 \end{cases} \quad II. \begin{cases} 3x - y + 2z = 1 \\ \quad\quad 6y + z = 0 \end{cases} \quad III. \begin{cases} 4x + 2y + 2z + w = 1 \\ \quad\quad 6y + 3z - w = 0 \\ \quad\quad\quad\quad 3z + w = 2 \end{cases}.$$

2.3.5 Método do escalonamento para resolução de sistemas

Este método consiste em escalonar a matriz completa relacionada ao sistema, tornando o mesmo em um sistema escalonado.

Exemplo 36: Adaptado de (FERNANDES, Cecília de Souza; HEFEZ, Abramo, 2016, p.38).Resolva o sistema a seguir, pelo método de escalonamento de matrizes.

$$\begin{cases} x + y - 2z + 3w = 4 \\ 2x + 3y + 3z - w = 3 \\ 5x + 7y + 4z + w = 5 \end{cases}. \tag{2.14}$$

Aplicando transformações elementares à matriz completa associada ao sistema (2.14), temos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 & \vdots & 4 \\ 2 & 3 & 3 & -1 & \vdots & 3 \\ 5 & 7 & 4 & 1 & \vdots & 5 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \longrightarrow \\ L_2 \to L_2 - 2L_1 \\ L_3 \to L_3 - 5L_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & -2 & 3 & \vdots & 4 \\ 0 & 1 & 7 & -7 & \vdots & -5 \\ 0 & 2 & 14 & -14 & \vdots & -15 \end{array}\right) \underset{L_3 \to L_3 - 2L_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & -2 & 3 & \vdots & 4 \\ 0 & 1 & 7 & -7 & \vdots & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & -5 \end{array}\right).$$

A última matriz na forma escalonada está associada ao seguinte sistema (2.15):

$$\left\{\begin{array}{l} 1x + 1y - 2z + 3w = 4 \\ 0x + 1y + 7z - 7w = 3 \\ 0x + 0y + 0z + 0w = 5 \end{array}\right. \; ou \left\{\begin{array}{r} x + y - 2z + 3w = 4 \\ y + 7z - 7w = 3 \\ 0 = 5 \end{array}\right. . \tag{2.15}$$

Note, que os sistemas (2.14) e (2.15) são equivalentes, pois foram feitas operações elementares no primeiro para obter o segundo. Sendo assim, eles tem o mesmo conjunto solução. nota-se que não existem x, y, z e w reais tais que $0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z + 0 \cdot w = 5$. Logo o sistema é *impossível* e seu conjunto solução é $S = \emptyset$.

3 EXEMPLOS DE MODELOS LINEARES PARA O ENSINO MÉDIO

Neste capítulo apresento problemas que podem ser modelados, através de equações lineares, na forma vetorial ou matricial. Tem-se por finalidade apresentar aplicabilidade ao conteúdo visto no Ensino Médio, pois, nesta etapa da Educação Básica os alunos sempre questionam "Onde irei usar isso?"ou "Onde se aplica este conteúdo".

3.1 DIETA EQUILIBRADA PARA PERDA DE PESO

O primeiro modelo vem da nutrição, ao apresentar a "fórmula para Dieta de Cambridge, uma dieta popular nos anos 80, foi baseada em anos de pesquisa"(LAY, David C., 2007). O estudo clínico foi desenvolvido pela universidade de Cambridge, pelo Dr. Alan H. Horward, durante 8 anos de trabalho clínico com pacientes obesos.

Para obter as quantidades e proporções corretas, a pesquisa precisou incorporar muitos tipos de alimentos, cada tipo fornece uma determina quantidade de nutrientes, porém não nas proporções corretas. A Tabela 2 ilustra o problema em pequena escala, nela temos 3 alimentos com suas respectivas quantidades de proteína,carboidrato e gordura. Também consta a quantidade determinada destes nutrientes segundo a dieta de Cambridge.

Tabela 1: Quantidade (Gramas) fornecidas por 100g de ingredientes.

Nutrientes (g)	Leite desnatado	Farinha de soja	Soro do leite	Dieta de Cambridge
Proteína	36	51	13	33
Carboidrato	52	34	74	45
Gordura	0	7	1,1	3

Fonte: Elaborada pelo autor com base em (LAY, David C., 2007)

O problema consiste em determinar, se possível, a combinação de leite desnatado, farinha de soja e soro do leite, de maneira a alcançar as quantidades de nutrientes, segundo a Tabela 1.

Solução: Sejam x, y e z, respectivamente o número de unidade de 100 gramas de leite desnatado, farinha de soja e soro de leite.

Seja a Equação matricial:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} 36 & 51 & 13 \\ 52 & 34 & 74 \\ 0 & 7 & 1,1 \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 33 \\ 45 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Está equação matricial esta associada ao seguinte sistema:

$$\begin{cases} 36x + 51y + 13z = 33 \\ 52x + 34y + 74z = 45 \\ 0x + 7y + 1,1z = 3 \end{cases}.$$

Para resolver o problema, basta encontrar a solução do sistema. Como vimos nos capítulos anteriores, podemos escalonar a matriz completa associada ao sistema:

$$\begin{pmatrix} 36 & 51 & 13 & \vdots & 33 \\ 52 & 34 & 74 & \vdots & 45 \\ 0 & 7 & 1,1 & \vdots & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[transf.\ elementares]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 0,277 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 0,392 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0,233 \end{pmatrix}.$$

Assim, para consumir a quantidade de nutrientes, a dieta requer 0,277 unidades de leite desnatado, 0,392 unidades de farinha de soja e 0,233 unidades de soro de leite.

3.2 TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS NO PLANO

Na computação gráfica, transformações em 2D (duas dimensões), são muito usadas para produzir imagens e construir figuras. Estas imagens podem ser vistas em efeitos especiais, sejam eles em filmes ou animações de aplicativos. Apresento 3 transformações básicas: translação, rotação e escala adaptadas de (IEZZI, Gelson et al., 2016).

Vamos representar um ponto $P(x, y)$ pela matriz coluna:

$$P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

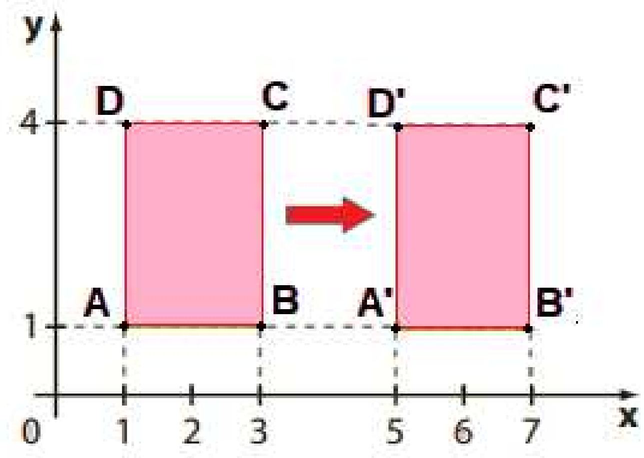
E o ponto $P'(x', y')$, obtido por determinada transformação por:

$$P' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}.$$

Cada transformação se dará por meio de uma matriz T, que relacionará P e P'.

1. **Translação:** desloca a imagem em certa direção, sem alterar sua dimensão e forma. Observe que na transformação apresentada na Figura 12, o quadrilátero ABCD é

Figura 6: Translação



Fonte: Elaborada pelo autor com base em (IEZZI, Gelson et al., 2016)

transformado no quadrilátero A'B'C'D' por um deslocamento horizontal. Cada abcissa do quadrilátero ABCD é deslocada 4 unidades para direita, enquanto sua ordenada não sofre alteração.

Nota-se que: $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}.$

Ou seja, $P' = P + T$, sendo $T = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$ a matriz desta transformação.

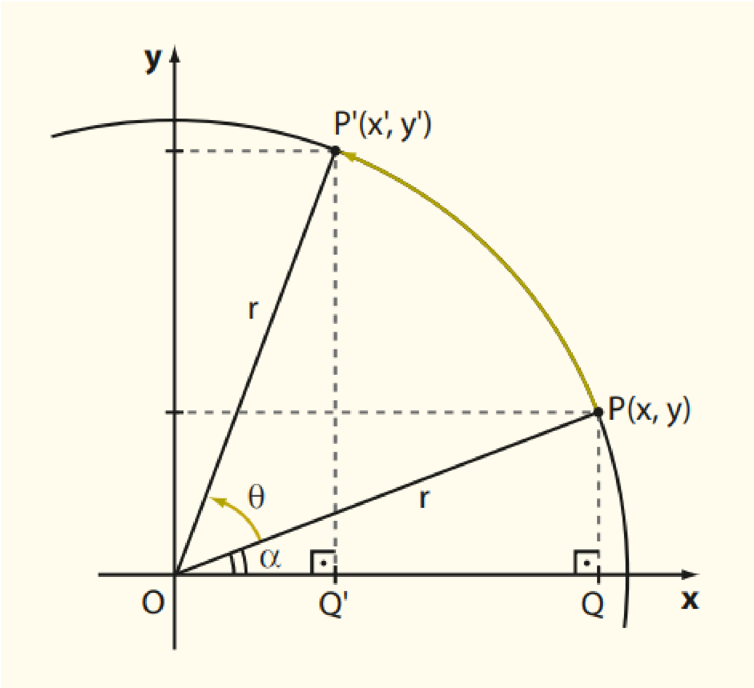
2. **Rotação:** Considero apenas "a rotação de um ponto $P(x, y)$, em torno da origem, de um ângulo de medida θ graus ($\theta > 0$), tomando o sentido anti-horário."(IEZZI, Gelson et al., 2016)

Na Figura 7, vemos que de acordo com o ΔOPQ podemos expressar as coordenadas de $P(x, y)$ por:

$$x = r.cos\ \alpha, \tag{3.1}$$

$$y = r.sen\ \alpha. \tag{3.2}$$

Figura 7: Rotação



Fonte: Elaborada pelo autor com base em (IEZZI, Gelson et al., 2016)

Onde, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ representa a medida raio da circunferência que passa por P e P', com centro na origem.
Ao rotacionarmos, o ponto P em um ângulo de θ graus ele se transforma em P'.

Observando o $\Delta OP'Q'$, temos:

$$cos(\alpha + \theta) = \frac{x'}{r} \Rightarrow x' = r \cdot cos(\alpha + \theta) = r \cdot (cos\ \alpha \cdot cos\ \theta - sen\ \alpha \cdot sen\ \theta),$$

pelas equações (3.1) e (3.2):

$$x' = r \cdot \left(\frac{x}{r}\, cos\ \theta - \frac{y}{r}\, sen\ \theta\right) \Rightarrow x' = x \cdot cos\ \theta - y \cdot sen\ \theta,$$

também por $\Delta OP'Q'$, temos:

$$sen(\alpha + \theta) = \frac{y'}{r} \Rightarrow y' = r \cdot sen(\alpha + \theta) = r \cdot (sen\ \alpha \cdot cos\ \theta + sen\ \theta \cdot cos\ \alpha),$$

pelas equações (3.1) e (3.2):

$$y' = r \cdot \left(\frac{y}{r}\, cos\ \theta + sen\ \theta \cdot \frac{y}{r}\right) \Rightarrow y' = y \cdot cos\ \theta + x \cdot sen\ \theta,$$

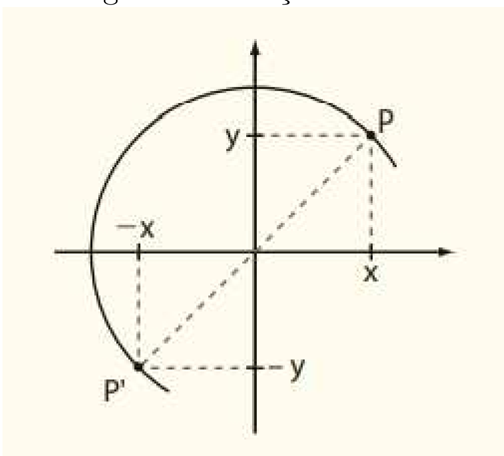
assim, podemos escrever:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\,\theta & -sen\,\theta \\ sen\,\theta & cos\,\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Ou seja, $P' = T \cdot P$, sendo $T = \begin{bmatrix} cos\,\theta & -sen\,\theta \\ sen\,\theta & cos\,\theta \end{bmatrix}$ a matriz desta transformação.

Na Figura 8, observa-se o ponto $P(x, y)$ rotacionado de 180° no sentido anti-horário, em torno da origem. Quais seriam as coordenadas de $P'(x', y')$?

Figura 8: Rotação de 180°



Fonte: Elaborada pelo autor com base em (IEZZI, Gelson et al., 2016)

Temos que $\theta = 180°$, logo:

$$T = \begin{bmatrix} cos\,180° & -sen\,180° \\ sen\,180° & cos\,180° \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$ a matriz desta transformação.

Assim, $P' = T \cdot P \Rightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow x' = -x \; e \; y' = -y.$

3. **Escala:** Nesta transformação, geramos uma nova figura semelhante ou não à original, através de uma ampliação ou redução.

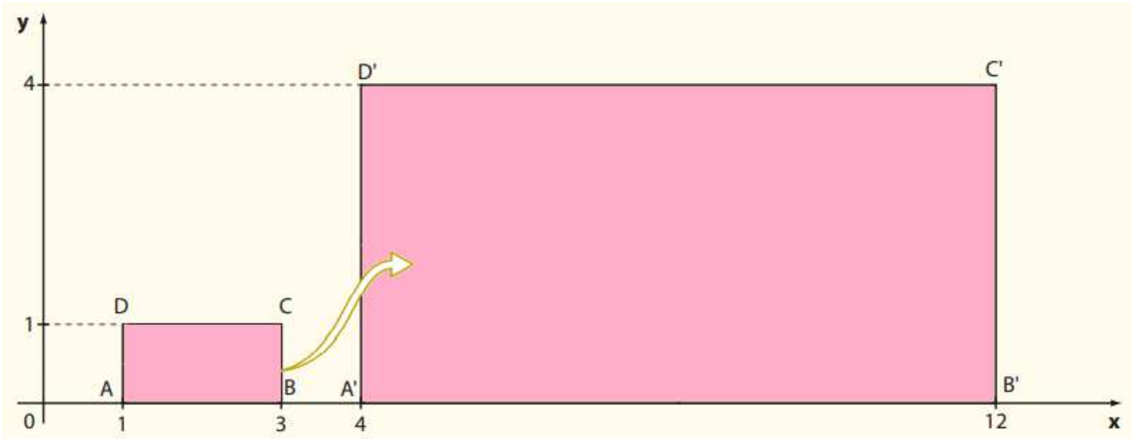
Na Figura 9, temos cada ponto $P(x, y)$ do retângulo $ABCD$ é transformado no ponto $P'(x', y')$ do retângulo $A'B'C'D'$, onde $x' = 4 \cdot x$ e $y' = 4 \cdot y$.

Note que, os retângulos $ABCD$ e $A'B'C'D'$ são semelhantes.

Assim,

$P' = T \cdot P \Rightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, onde T é a matriz transformação.

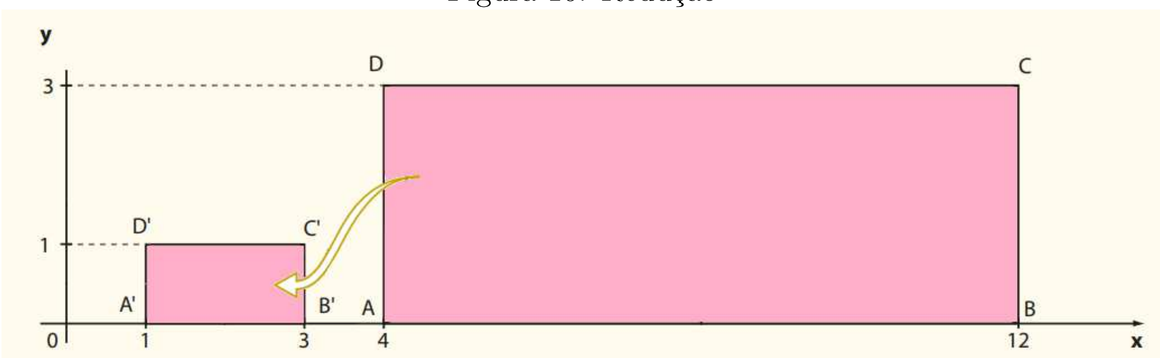
Figura 9: Ampliação



Fonte: Elaborada pelo autor com base em (IEZZI, Gelson et al., 2016)

Na Figura 10 cada ponto $P(x, y)$ do retângulo $ABCD$ é transformado no ponto $P'(x', y')$ do retângulo $A'B'C'D'$, onde $x' = \frac{1}{4} \cdot x$ e $y' = \frac{1}{3} \cdot y$.

Figura 10: Redução



Fonte: Elaborada pelo autor

Note que, os retângulos $ABCD$ e $A'B'C'D'$ não são semelhantes.

Assim,

$P' = T \cdot P \Rightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, onde T é a matriz transformação.

3.3 EQUAÇÕES DE DIFERENÇAS LINEARES

Problemas ligados a engenharia, economia e ecologia, muitas vezes necessitam de um modelo matemática dinâmico, ou seja que evolui com o passar do tempo. As características deste modelo, quando medidas em intervalos discretos de tempo, produzem uma sequência de vetores $\mathbf{x_0}, \mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \cdots, \mathbf{x_n}$, onde $\mathbf{x_n}$, mostra o estado do sistema na n-ésima medida.

Se existe a matriz T tal que $\mathbf{x_1} = T \cdot \mathbf{x_0}$, $\mathbf{x_2} = T \cdot \mathbf{x_1}$ e em geral

$$\mathbf{x_{n+1}} = T \cdot \mathbf{x_n} \ para \ n = 0, 1, 2... \tag{3.3}$$

Dizemos que (3.3) é uma equação de diferenças linear ou relação de recorrência, com ela, podemos determinar $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \cdots, \mathbf{x_n}$, desde que saibamos o valor de $\mathbf{x_0}$.

Segundo (LAY, David C., 2007) "um objeto de interesse para os demógrafos é o movimento de populações, ou grupo de pessoas de uma região para outra". Adapto um modelo simples para mostrar a variação da população urbana e rural apresentado no livro (LAY, David C., 2007).

Fixo o ano inicial 2000 e denoto por u_0 e r_0 as populações urbana e rural, respectivamente. Seja $\mathbf{x_0}$ o vetor de população inicial:

$$\mathbf{x_0} = \begin{bmatrix} u_0 \\ r_0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} P.\ inicial\ urbana,\ 2000. \\ P.\ inicial\ rural,\ 2000. \end{array}$$

Para 2001 e anos seguintes, as populações das zonas urbanas e rurais, são denotadas pelos vetores:

$$\mathbf{x_1} = \begin{bmatrix} u_1 \\ r_1 \end{bmatrix}, \mathbf{x_2} = \begin{bmatrix} u_2 \\ r_2 \end{bmatrix}, \mathbf{x_3} = \begin{bmatrix} u_3 \\ r_3 \end{bmatrix} \cdots$$

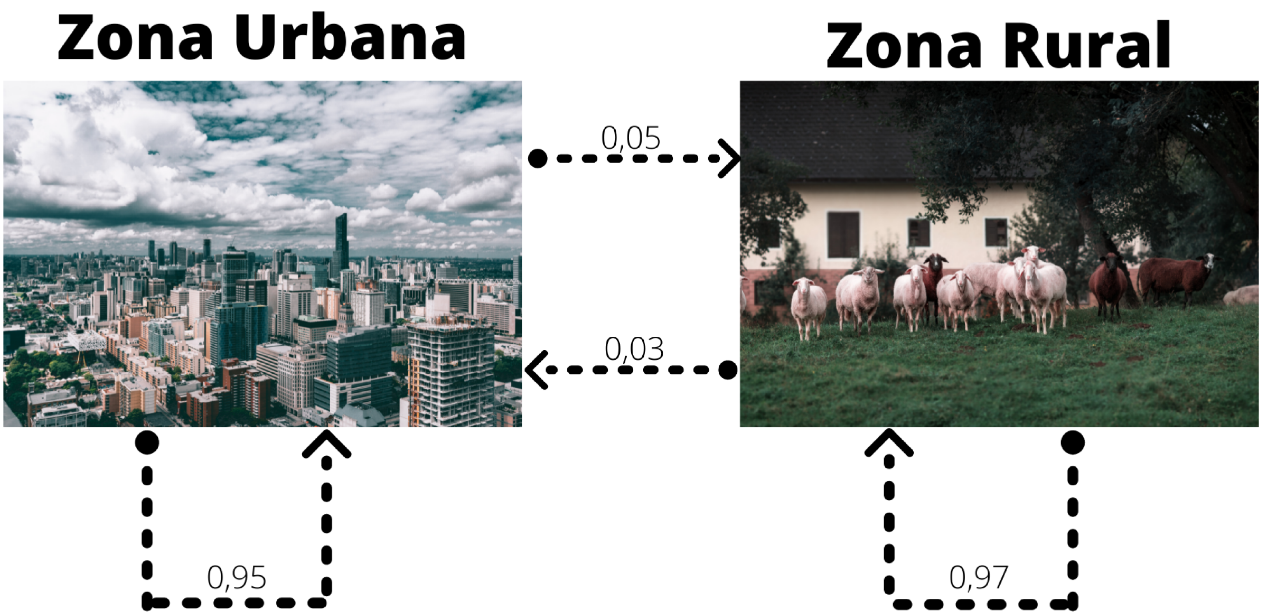
Iremos descrever matematicamente a relação entre estes vetores.

Vamos supor que estudos migratórios demonstrem que todos os anos, conforme Figura 11, aproximadamente 5% da população urbana migra para a zona rural, ou seja 95% permanecem na cidade, ao mesmo tempo que 3% da população rural migra para a cidade, ou seja 97% persiste na zona rural.

Passado um ano, a população inicial urbana u_0, está disseminada entre urbana e rural da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} 0,95u_0 \\ 0,05u_0 \end{bmatrix} = u_0 \begin{bmatrix} 0,95 \\ 0,05 \end{bmatrix} \begin{matrix} \textit{Persistem na zona urbana.} \\ \textit{Migram para zona rural.} \end{matrix} . \tag{3.4}$$

Figura 11: Porcentagem anual de migração entre as zonas Urbana e Rural



Fonte: Elaborada pelo autor com base em (LAY, David C., 2007)

Da mesma forma, após um ano, a população rural inicial de 2000 fica assim distribuída:

$$\begin{bmatrix} 0,03r_0 \\ 0,97r_0 \end{bmatrix} = r_0 \begin{bmatrix} 0,03 \\ 0,97 \end{bmatrix} \begin{matrix} \textit{Migram para zona urbana.} \\ \textit{Persistem na zona rural.} \end{matrix} . \tag{3.5}$$

Os vetores (3.4) e (3.5), juntos ilustram a população de 2001. Veja:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ r_1 \end{bmatrix} = u_0 \begin{bmatrix} 0,95 \\ 0,05 \end{bmatrix} + r_0 \begin{bmatrix} 0,03 \\ 0,97 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,95 & 0,03 \\ 0,05 & 0,97 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ r_0 \end{bmatrix},$$

logo,

$$\mathbf{x_1} = T \cdot \mathbf{x_0}. \tag{3.6}$$

Onde, $T = \begin{bmatrix} 0,95 & 0,03 \\ 0,05 & 0,97 \end{bmatrix}$, chamaremos de matriz migração.

A equação (3.6) mostra a variação da população do 2000 para 2001. Caso os percentuais fiquem fixos a descrição de variação de 2001 para 2002 será dada por:

$$\mathbf{x_2} = T \cdot \mathbf{x_1}.$$

Podemos seguir de forma análoga de 2002 para 2003 e assim sucessivamente. De forma geral teremos:

$$\mathbf{x_{k+1}} = T \cdot \mathbf{x_k}.$$

Assim, a sequência $\{\mathbf{x_0}, \mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \cdots\}$ representa as populações urbanas e rurais de um certo período de tempo.

Exemplo 35 - Calcule as populações urbana e rural do modelo descrito acima, para os anos de 2001 e 2002, dados que em 2000 as populações urbanas e rurais eram 300 000 e 100 000 respectivamente.

A população inicial, em 2000 é $\mathbf{x_0} = \begin{bmatrix} 300000 \\ 100000 \end{bmatrix}$.

Em 2001,

$$\mathbf{x_1} = \begin{bmatrix} 0,95 & 0,03 \\ 0,05 & 0,97 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 300000 \\ 100000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 288000 \\ 112000 \end{bmatrix} \begin{matrix} Pop.\ urbana. \\ Pop.\ rural. \end{matrix} .$$

Para 2002,

$$\mathbf{x_2} = T \cdot \mathbf{x_1} = \begin{bmatrix} 0,95 & 0,03 \\ 0,05 & 0,97 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 288000 \\ 112000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 276960 \\ 123040 \end{bmatrix} \begin{matrix} Pop.\ urbana. \\ Pop.\ rural. \end{matrix} .$$

4 APOSTILA: APLICAÇÕES DE MATRIZES E SISTEMAS LINEARES NO ENSINO MÉDIO

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

APOSTILA: APLICAÇÕES DE MATRIZES E SISTEMAS LINEARES NO ENSINO MÉDIO

VALMIRÉ DE AGUIAR

Florianópolis, 2021

Sumário

SOBRE A APOSTILA DE APLICAÇÃO DE MATRIZES E SISTEMAS LINEARES NO ENSINO MÉDIO

Esta apostila foi desenvolvida pelo professor Valmiré de Aguiar para a Dissertação de Mestrado apresentada no programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC) sob orientação do professor Dr. Vinícius Viana Luiz Albani.

O ensino de matrizes no Ensino Médio, rotineiramente, é apresentado como operações entre tabelas e sem relacioná-las com sistemas lineares, muitas vezes, o último não chega a ser abordado. Esta abordagem fragmentada e sem aplicação causa desinteresse por parte dos alunos. Tem-se por finalidade apresentar aplicabilidade ao conteúdo visto no Ensino médio, pois nesta etapa da Educação Básica, os alunos sempre questionam "Onde irei usar isso?"ou "Onde se aplica este conteúdo".

Esta apostila apresenta exemplos de modelos lineares para alunos do ensino médio:

1. Dieta equilibrada para perda de peso, apresento a dieta de Cambridge, onde precisamos determinar a quantidade de nutrientes necessários para perda de peso, que é modelada por um sistema linear;

2. Transformações geométricas no plano, onde apresento como modelar, através de operações com matrizes, de 3 transformações básicas: translação, rotação e escala.

3. Equações de diferenças lineares, o qual apresento e modelo o estudo migratório entre a população urbana e rural de determinada cidade. Neste modelo usamos o conceito e recorrência e operações matriciais.

Ao final, indico ferramentas para o ensino da matemática, seja no remoto ou híbrido, decorrente da pandemia ocasionada pelo vírus SARS-CoV-2 causador da doença Covid-19, tais ferramentas foram ministradas pelo autor em suas aulas remotas no ano de 2020.

Aula 1: DIETA EQUILIBRADA PARA PERDA DE PESO

O primeiro modelo vem da nutrição, ao apresentar a "fórmula para Dieta de Cambridge, uma dieta popular nos anos 80, foi baseada em anos de pesquisa"(LAY, David C., 2007). O estudo clínico foi desenvolvido pela universidade de Cambridge, pelo Dr. Alan H. Horward, durante 8 anos de trabalho clínico com pacientes obesos.

Para obter as quantidades e proporções corretas, a pesquisa precisou incorporar muitos tipos de alimentos, cada tipo fornece uma determina quantidade de nutrientes, porém não nas proporções corretas. A Tabela 2, ilustra o problema em pequena escala, nela temos 3 alimentos com suas respectivas quantidades de proteína,carboidrato e gordura. Também consta a quantidade determinada destes nutrientes segundo a dieta de Cambridge.

Tabela 2: Quantidade (Gramas) fornecidas pela porção 100g de ingredientes.

Nutrientes (g)	Leite desnatado	Farinha de soja	Soro do leite	Dieta de Cambridge
Proteína	36	51	13	33
Carboidrato	52	34	74	45
Gordura	0	7	1,1	3

Fonte: Elaborada pelo autor com base em (LAY, David C., 2007)

O problema consiste em determinar, se possível, a combinação de leite desnatado, farinha de soja e soro do leite de maneira a alcançar as quantidades de nutrientes, segundo a Tabela 2.

Solução: Sejam x, y e z, respectivamente o número de unidade de 100 gramas de leite desnatado, farinha de soja e soro de leite.

Seja a Equação matricial:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} 36 & 51 & 13 \\ 52 & 34 & 74 \\ 0 & 7 & 1,1 \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 33 \\ 45 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Esta equação matricial está associada ao seguinte sistema:

$$\begin{cases} 36x + 51y + 13z = 33 \\ 52x + 34y + 74z = 45 \\ 0x + 7y + 1,1z = 3 \end{cases}.$$

Para resolver o problema, basta encontrar a solução do sistema. Como vimos nos capítulos anteriores, podemos escalonar a matriz completa associada ao sistema:

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 36 & 51 & 13 & 33 \\ 52 & 34 & 74 & 45 \\ 0 & 7 & 1,1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[transf.\ elementares]{} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 0,277 \\ 0 & 1 & 0 & 0,392 \\ 0 & 0 & 1 & 0,233 \end{array}\right).$$

Assim, para consumir a quantidade de nutrientes, a dieta requer 0,277 unidades de leite desnatado, 0,392 unidades de farinha de soja e 0,233 unidades de soro de leite.

Aula 2: TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS NO PLANO

Na computação gráfica, transformações em 2D (duas dimensões), são muito usadas para produzir imagens e construir figuras. Estas imagens podem ser vistas em efeitos especiais, sejam eles em filmes ou animações de aplicativos. Apresento 3 transformações básicas: translação, rotação e escala adaptadas de (IEZZI, Gelson et al., 2016).

Vamos representar um ponto $P(x, y)$ pela matriz coluna:

$$P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

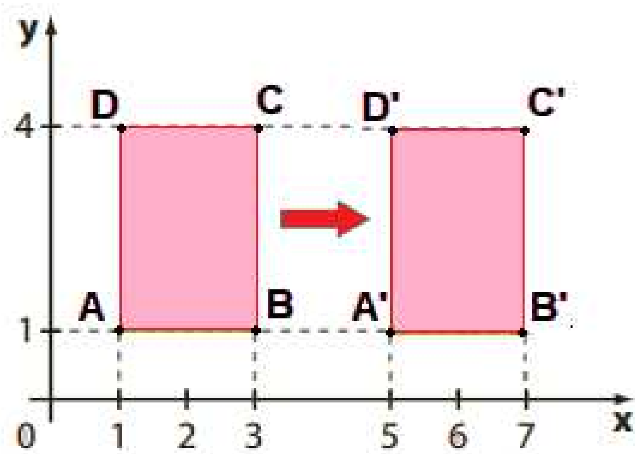
E o ponto $P'(x', y')$, obtido por determinada transformação por:

$$P' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}.$$

Cada transformação se dará por meio de uma matriz T, que relacionará P e P'.

1. **Translação:** desloca a imagem em certa direção, sem alterar sua dimensão e forma. Observe que na transformação apresentada na Figura 12, o quadrilátero ABCD é

Figura 12: Exemplo de translação



Fonte: Elaborada pelo autor com base em (IEZZI, Gelson et al., 2016)

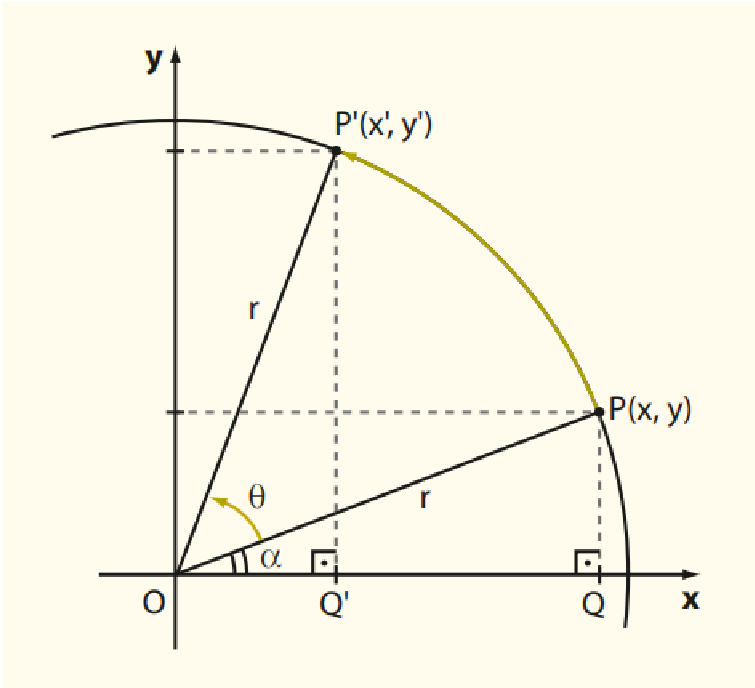
transformado no quadrilátero A'B'C'D' por um deslocamento horizontal. Cada abcissa do quadrilátero ABCD é deslocada 4 unidades para direita, enquanto sua ordenada não sofre alteração.

Nota-se que: $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Ou seja: $P' = P + T$, sendo $T = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$ a matriz desta transformação.

2. **Rotação:** Consideraro apenas "a rotação de um ponto $P(x, y)$, em torno da origem, de um ângulo de medida θ graus ($\theta > 0$), tomando o sentido anti-horário."(IEZZI, Gelson et al., 2016)

Figura 13: Exemplo de rotação



Fonte: Elaborada pelo autor com base em (IEZZI, Gelson et al., 2016)

Na Figura 13, vemos que de acordo com o ΔOPQ, podemos expressar as coordenadas de $P(x, y)$ por:

$$x = r.cos\ \alpha. \tag{4.1}$$

$$y = r.sen\ \alpha. \tag{4.2}$$

Onde, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ representa a medida raio da circunferência que passa por P e P', com centro na origem.

Ao rotacionarmos o ponto P em um ângulo de θ graus, ele se transforma em P'.

Observando o $\Delta OP'Q'$, temos:

$$cos(\alpha + \theta) = \frac{x'}{r} \Rightarrow x' = r \cdot cos(\alpha + \theta) = r \cdot (cos\ \alpha \cdot cos\ \theta - sen\ \alpha \cdot sen\ \theta),$$

pelas equações (3.1) e (3.2):

$$x' = r \cdot \left(\frac{x}{r}\, cos\; \theta - \frac{y}{r}\, sen\; \theta\right) \Rightarrow x' = x \cdot cos\; \theta - y \cdot sen\; \theta,$$

também por $\Delta OP'Q'$, temos:

$$sen(\alpha + \theta) = \frac{y'}{r} \Rightarrow y' = r \cdot sen(\alpha + \theta) = r \cdot (sen\; \alpha \cdot cos\; \theta + sen\; \theta \cdot cos\; \alpha),$$

pelas equações (3.1) e (3.2):

$$y' = r \cdot \left(\frac{y}{r}\, cos\; \theta + sen\; \theta \cdot \frac{y}{r}\right) \Rightarrow y' = y \cdot cos\; \theta + x \cdot sen\; \theta,$$

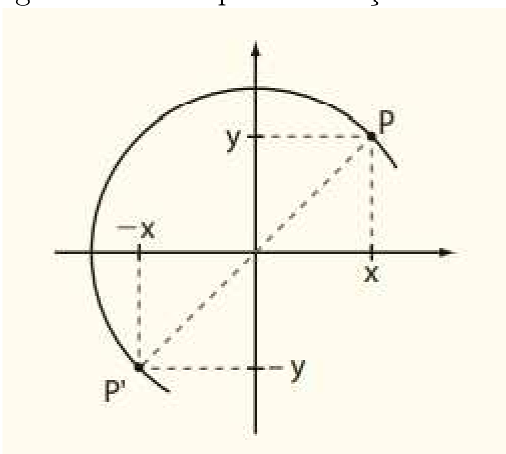
assim, podemos escrever:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\; \theta & -sen\; \theta \\ sen\; \theta & cos\; \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Ou seja, $P' = T \cdot P$, sendo $T = \begin{bmatrix} cos\; \theta & -sen\; \theta \\ sen\; \theta & cos\; \theta \end{bmatrix}$ a matriz desta transformação.

Na Figura 14, observa-se o ponto $P(x, y)$ rotacionado de 180° no sentido anti-horário, em torno da origem. Quais seriam as coordenadas de $P'(x', y')$?

Figura 14: Exemplo de rotação de 180°



Fonte: Elaborada pelo autor com base em (IEZZI, Gelson et al., 2016)

Temos que $\theta = 180°$, logo:

$$T = \begin{bmatrix} cos\; 180° & -sen\; 180° \\ sen\; 180° & cos\; 180° \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$ a matriz desta transformação.

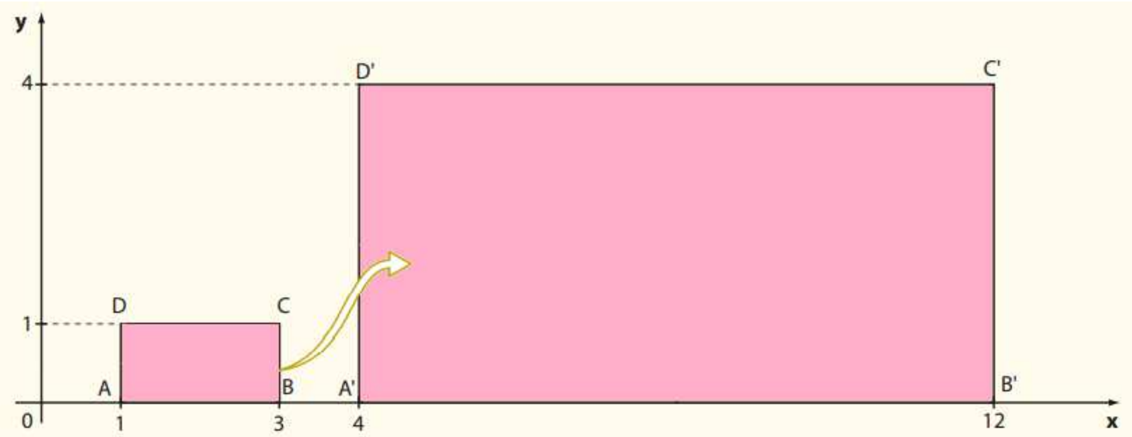
Assim, $P' = T \cdot P \Rightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow x' = -x \; e \; y' = -y.$

3. **Escala:** Nesta transformação, geramos uma nova figura semelhante ou não à original, através de uma ampliação ou redução.

Na Figura 15, temos cada ponto $P(x, y)$ do retângulo $ABCD$ é transformado no ponto $P'(x', y')$ do retângulo $A'B'C'D'$, onde $x' = 4 \cdot x$ e $y' = 4 \cdot y$.
Note que, os retângulos $ABCD$ e $A'B'C'D'$ são semelhantes.

Assim,
$P' = T \cdot P \Rightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, onde T é a matriz transformação.

Figura 15: Exemplo de ampliação

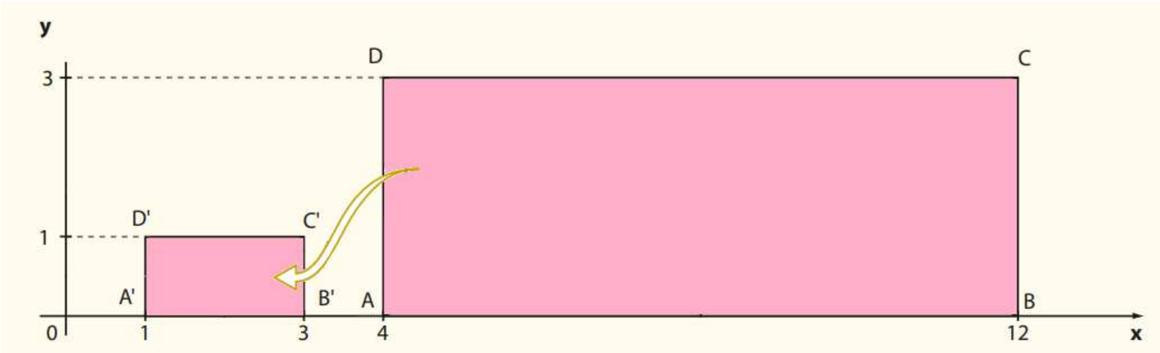


Fonte: Elaborada pelo autor com base em (IEZZI, Gelson et al., 2016)

Na Figura 16 cada ponto $P(x, y)$ do retângulo $ABCD$ é transformado no ponto $P'(x', y')$ do retângulo $A'B'C'D'$, onde $x' = \frac{1}{4} \cdot x$ e $y' = \frac{1}{3} \cdot y$.

Note que, os retângulos $ABCD$ e $A'B'C'D'$ não são semelhantes.
Assim,
$P' = T \cdot P \Rightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, onde T é a matriz transformação.

Figura 16: Exemplo de redução



Fonte: Elaborada pelo autor

Aula 3: EQUAÇÕES DE DIFERENÇAS LINEAR

Problemas ligados a engenharia, economia e ecologia, muitas vezes necessitam de um modelo matemática dinâmico, ou seja que evolui com o passar do tempo. As características deste modelo, quando medidas em intervalos discretos de tempo, produzem uma sequência de vetores $\mathbf{x_0}, \mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \cdots, \mathbf{x_n}$, onde $\mathbf{x_n}$, mostra o estado do sistema na n-ésima medida.

Se existe a matriz T tal que $\mathbf{x_1} = T \cdot \mathbf{x_0}$, $\mathbf{x_2} = T \cdot \mathbf{x_1}$ e em geral

$$\mathbf{x_{n+1}} = T \cdot \mathbf{x_n} \ para \ n = 0, 1, 2... \tag{4.3}$$

Dizemos que (3.3) é uma equação de diferenças linear ou relação de recorrência, com ela, podemos determinar $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \cdots, \mathbf{x_n}$, desde que saibamos o valor de $\mathbf{x_0}$.

Segundo (LAY, David C., 2007) "um objeto de interesse para os demógrafos é o movimento de populações, ou grupo de pessoas de uma região para outra". Adapto um modelo simples para mostrar a variação da população urbana e rural apresentado no livro (LAY, David C., 2007).

Fixo o ano inicial 2000 e denoto por u_0 e r_0 as populações urbana e rural, respectivamente. Seja $\mathbf{x_0}$ o vetor de população inicial:

$$\mathbf{x_0} = \begin{bmatrix} u_0 \\ r_0 \end{bmatrix} \begin{matrix} P.\ inicial\ urbana,\ 2000. \\ P.\ inicial\ rural,\ 2000. \end{matrix} .$$

Para 2001 e anos seguintes, as populações das zonas urbanas e rurais, são denotadas pelos vetores:

$$\mathbf{x_1} = \begin{bmatrix} u_1 \\ r_1 \end{bmatrix}, \mathbf{x_2} = \begin{bmatrix} u_2 \\ r_2 \end{bmatrix}, \mathbf{x_3} = \begin{bmatrix} u_3 \\ r_3 \end{bmatrix} \cdots$$

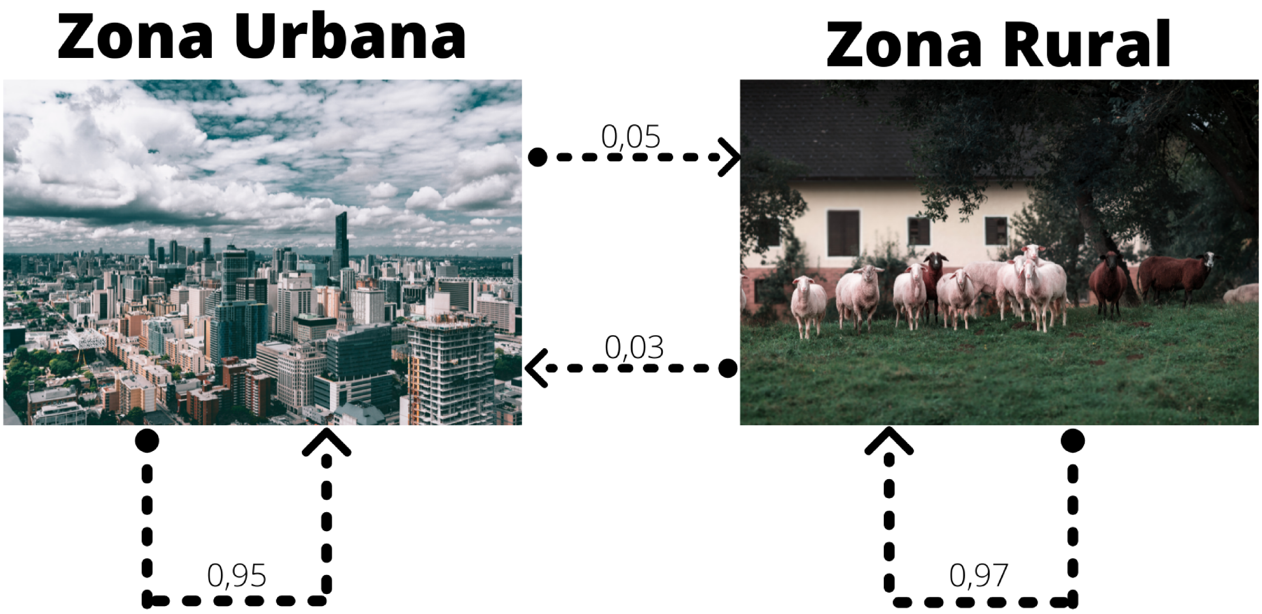
Iremos descrever matematicamente a relação entre estes vetores.

Vamos supor que estudos migratórios demonstrem que todos os anos, conforme Figura 11, aproximadamente 5% da população urbana migra para a zona rural, ou seja 95% permanecem na cidade, ao mesmo tempo que 3% da população rural migra para a cidade, ou seja 97% persiste na zona rural.

Passado um ano, a população inicial urbana u_0, está disseminada entre urbana e rural da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} 0,95u_0 \\ 0,05u_0 \end{bmatrix} = u_0 \begin{bmatrix} 0,95 \\ 0,05 \end{bmatrix} \begin{matrix} \textit{Persistem na zona urbana.} \\ \textit{Migram para zona rural.} \end{matrix} . \tag{4.4}$$

Figura 17: Migração anual entre as zonas urbana e rural em porcentagem



Fonte: Elaborada pelo autor com base em (LAY, David C., 2007)

Da mesma forma, após um ano, a população rural inicial de 2000, fica assim distribuída:

$$\begin{bmatrix} 0,03r_0 \\ 0,97r_0 \end{bmatrix} = r_0 \begin{bmatrix} 0,03 \\ 0,97 \end{bmatrix} \begin{matrix} \textit{Migram para zona urbana} \\ \textit{Persistem na zona rural} \end{matrix} . \tag{4.5}$$

Os vetores (4.4) e (4.5), juntos ilustram a população de 2001. Veja:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ r_1 \end{bmatrix} = u_0 \begin{bmatrix} 0,95 \\ 0,05 \end{bmatrix} + r_0 \begin{bmatrix} 0,03 \\ 0,97 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,95 & 0,03 \\ 0,05 & 0,97 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ r_0 \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$\mathbf{x_1} = T \cdot \mathbf{x_0}. \tag{4.6}$$

Onde, $T = \begin{bmatrix} 0,95 & 0,03 \\ 0,05 & 0,97 \end{bmatrix}$, chamaremos de matriz migração.

A equação (4.6) mostra a variação da população do 2000 para 2001. Caso os percentuais fiquem fixos, a descrição de variação de 2001 para 2002 será dada por:

$$\mathbf{x_2} = T \cdot \mathbf{x_1}.$$

Podemos seguir de forma análoga de 2002 para 2003 e assim sucessivamente. De forma geral, teremos:

$$\mathbf{x_{k+1}} = T \cdot \mathbf{x_k}.$$

Assim, a sequência $\{\mathbf{x_0}, \mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \cdots\}$ representa as populações urbanas e rurais de um certo período de tempo.

Exemplo - Calcule as populações urbana e rural do modelo descrito acima, para os anos de 2001 e 2002, dados que em 2000 as populações urbanas e rurais eram 300 000 e 100 000 respectivamente.

A população inicial, em 2000, é $\mathbf{x_0} = \begin{bmatrix} 300000 \\ 100000 \end{bmatrix}$,

Em 2001

$$\mathbf{x_1} = \begin{bmatrix} 0,95 & 0,03 \\ 0,05 & 0,97 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 300000 \\ 100000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 288000 \\ 112000 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \textit{Pop. urbana} \\ \textit{Pop. rural} \end{array}.$$

Para 2002

$$\mathbf{x_2} = T \cdot \mathbf{x_1} = \begin{bmatrix} 0,95 & 0,03 \\ 0,05 & 0,97 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 288000 \\ 112000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 276960 \\ 123040 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \textit{Pop. urbana} \\ \textit{Pop. rural} \end{array}.$$

EXERCÍCIOS

1- Em determinada cidade, cerca de 4% da população urbana se muda para a zona rural todos os anos, e cerca de 3% da população rural se muda para a zona urbana. Em 1990, existiam 600 000 pessoas na zona urbana e 400 000 na zona rural. Monte uma equação de diferenças que modele este problema, onde $\mathbf{x_0}$ é a população inicial em 1990. Depois faça uma estimativa das populações das zonas urbanas e rurais em 1992, ignorando obviamente outros fatores que possam influenciar a dinâmica de populações. Exercício adaptado de (LAY, David C., 2007).

2 - Em determinada cidade, cerca de 6% da população urbana se muda para a zona rural todos os anos e cerca de 4% da população rural se muda para a zona urbana. Em 2019, existiam 400 000 pessoas na zona urbana e 200 000 na zona rural. Monte uma equação de diferenças que modele este problema, onde $\mathbf{x_0}$ é a população inicial em 2019. Depois faça uma estimativa das populações das zonas urbanas e rurais no ano de 2020, ignorando obviamente, outros fatores que possam influenciar a dinâmica de populações.

3 - Em 1990, a população da Califórnia era de 29 716 000 e a população morando nos EUA, mas fora da Califórnia, era de 218 994 000. Durante o ano, 509 500 pessoas se mudaram da Califórnia para outras cidades do país, enquanto 564 100 pessoas migraram para Califórnia vindo de outras cidades dos EUA.Exercício adaptado de (LAY, David C., 2007)

a) Obtenha uma Matriz de Migração para esta situação, usando 5 casas decimais para modelar a migração para dentro e fora da Califórnia.

b) Calcule as populações previstas para Califórnia e resto dos EUA para o ano de 1991.

4 - Os biscoitos apresentam em suas embalagens o número de calorias e as quantidades de carboidratos, proteínas e gorduras contidas em determinada porção de biscoito. Na tabela a seguir, estas quantidades estão organizadas.

Informação nutricional por porção de biscoito

Nutrientes	Biscoito A	Biscoito B
Calorias	110	130
Proteínas (g)	4	3
Carboidrato (g)	20	18
Gordura (g)	2	5

Suponha que queremos comer os dois biscoitos, porém queremos que as duas porções somadas contenham exatamente 295 calorias, 9 gramas de proteínas, 48 gramas de carboidratos e 8 gramas de gordura.

a) Monte uma equação Matricial correspondente ao problema e descreva o que as variáveis representam.

b) Monte o sistema linear correspondente e determine a quantidade das porções de cada biscoito para obter os nutrientes do problema.

5 - A dieta de Cambridge fornece além dos nutrientes apresentados na aula 1, as quantidades de cálcio fornecidas por 100 gramas dos 3 ingredientes do exemplo: 1,26 g do leite desnatado, 0,19 g da farinha de soja e 0,8 g do soro de leite. Outro ingrediente da dieta é a proteína de soja, que fornece os seguintes nutrientes: 80g de proteínas, 0 g de carboidratos, 3,4 g de gordura e 0,18 g de cálcio. Exercício adaptado de (LAY, David C., 2007).

a) Obtenha a equação matricial, cuja solução determine as quantidades de leite desnatado, farinha de soja, soro de leite e proteína de soja para fornecer as quantidades de proteínas, carboidratos, gordura e cálcio da dieta. Elabore uma frase explicando o que as variáveis representam.

b) Monte o sistema linear correspondente, resolva o mesmo e discuta a solução. Para este sistema em particular, usar uma ferramenta digital para resolução do problema, sugiro: <https://www.calculadoraonline.com.br/sistemas-lineares>

6 - Um médico nutrólogo planejou uma refeição que forneça 100 mg de vitamina C e 300 mg de Cálcio, dois ingredientes serão utilizados com as quantidades medidas em unidades apropriadas. Os nutrientes fornecidos pelos alimentos estão dispostos na tabela a seguir:

Miligramas de nutrientes por Unidade de alimento

Nutrientes	Alimento A	Alimento B
Vitamina C	10	20
Cálcio	50	40

Obtenha a equação matricial e o sistema linear correspondente ao sistema. Determine o que as variáveis significam e depois, resolva a equação.

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS

Questão 1

a)

$$\mathbf{x_{n+1}} = T \cdot \mathbf{x_n} \ \textit{para} \ n = 0, 1, 2...$$

Onde $T = \begin{bmatrix} 0,96 & 0,03 \\ 0,04 & 0,97 \end{bmatrix}$, chamaremos de matriz migração e $\mathbf{x_0} = \begin{bmatrix} 600000 \\ 400000 \end{bmatrix}$.

b) A população em 1992 (quando $n = 2$) deve ser

$$\mathbf{x_2} = \begin{bmatrix} 576840 \\ 423160 \end{bmatrix} \begin{matrix} \textit{Pop. urbana} \\ \textit{Pop. rural} \end{matrix} \quad .$$

Questão 2

a)

$$\mathbf{x_{n+1}} = T \cdot \mathbf{x_n} \ \textit{para} \ n = 0, 1, 2...$$

Onde $T = \begin{bmatrix} 0,94 & 0,04 \\ 0,06 & 0,96 \end{bmatrix}$, chamaremos de matriz migração e $\mathbf{x_0} = \begin{bmatrix} 400000 \\ 200000 \end{bmatrix}$.

b) A população em 2019 (quando $n = 1$) deve ser

$$\mathbf{x_1} = \begin{bmatrix} 384000 \\ 216000 \end{bmatrix} \begin{matrix} \textit{Pop. urbana} \\ \textit{Pop. rural} \end{matrix} \quad .$$

Questão 3

a)

$$\mathbf{x_{n+1}} = T \cdot \mathbf{x_n} \ \textit{para} \ n = 0, 1, 2...$$

Onde $T = \begin{bmatrix} 0,98285 & 0,002576 \\ 0,01715 & 0,997424 \end{bmatrix}$, chamaremos de matriz migração e $\mathbf{x_0} = \begin{bmatrix} 29716000 \\ 218994000 \end{bmatrix}$.

b) A população em 1991 (quando $n = 1$) arredondado para o milhar mais próximo deve ser:

$$\mathbf{x_1} = \begin{bmatrix} 564128 \\ 218939500 \end{bmatrix} \begin{matrix} \textit{Pop. California} \\ \textit{Rest. EUA} \end{matrix} \quad .$$

Questão 4 -

a) Seja a Equação matricial:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} 110 & 130 \\ 4 & 3 \\ 20 & 18 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 295 \\ 9 \\ 48 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

Onde x é o número de porções do biscoita A e y a quantidade de porções do biscoito B.

b)

$$\begin{cases} 110x + 130y = 295 \\ 4x + 3y = 9 \\ 20x + 18y = 48 \\ 2x + 5y = 8 \end{cases}.$$

Resolvendo o sistema temos $x = \frac{3}{2}$ de porção do biscoito A e $y = 1$ porção do biscoito B

Questão 5

a) Seja a Equação matricial:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} 36 & 51 & 13 & 80 \\ 52 & 34 & 74 & 0 \\ 0 & 7 & 1,1 & 3,4 \\ 1,26 & 0,19 & 0,8 & 0,18 \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 33 \\ 45 \\ 3 \\ 0,8 \end{bmatrix}.$$

Onde x, y, z e w representam o número de unidades (100g) utilizadas na mistura de leite desnatado, farinha de soja, soro de leite e proteína de soja respectivamente.

b)

$$\begin{cases} 36x + 51y + 13z + 80w = 33 \\ 52x + 34y + 74z + 0w = 45 \\ 0x + 7y + 1,1z + 3,4w = 3 \\ 1,26x + 0,19y + 0,8z + 0,18w = 0,8 \end{cases}.$$

Resolvendo o sistema temos $x = 0,64$, $y = 0,54$, $z = -0,09$ e $w = -0,21$, esta solução é impraticável, tendo em vista que não é possível usar quantidades negativas de soro de leite e proteína de soja.

Questão 6

Seja a Equação matricial:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 20 \\ 50 & 40 \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 100 \\ 300 \end{bmatrix}.$$

Onde x e y representam o número de unidades utilizadas na mistura dos alimentos A e B respectivamente.

$$\begin{cases} 10x + 20y = 100 \\ 50x + 40y = 300 \end{cases}.$$

Resolvendo o sistema temos $x = \frac{10}{3}$, $y = \frac{10}{3}$ que representam as unidades de 100g que devem ser utilizadas na mistura dos alimentos A e B respectivamente.

O ENSINO DA MATEMÁTICA DE FORMA REMOTA

Devido a pandemia ocasionada pelo vírus SARS-CoV-2 causador da doença Covid-19 (do inglês, Coronavirus Disease 2019), o ano letivo de 2020 foi desafiador para professores da Educação Infantil ao Ensino Superior, tivemos que mudar a forma de ministrar nossas aulas, de presencial à remota. Desafio grandioso, tendo em vista que, a maioria dos educadores não teve formação inicial ou continuada para trabalhar no ensino remoto. Neste formato, o processo de ensino-aprendizagem é mediado por tecnologias que permitem que professores e alunos não estejam no mesmo ambiente físico. Neste capítulo, mostrarei as ferramentas que foram utilizadas no ensino de matrizes. Este material poderá servir de apoio aos demais profissionais da educação.

FERRAMENTAS PARA AULAS *ON-LINE*

Mesa digitalizadora

Uma das ferramentas mais importantes para otimizar as aulas remotas de matemática, a mesa digitalizadora (Figura 18), agiliza a escrita de símbolos e gráficos. Ela permite a simultaneidade de áudio e registro manual, sendo possível fazer relação entre fala e escrita, seja na correção de exercícios ou explicação de conteúdo. Seu uso torna a aula gravada (ou ao vivo) mais próxima da que aconteceria presencialmente em sala.

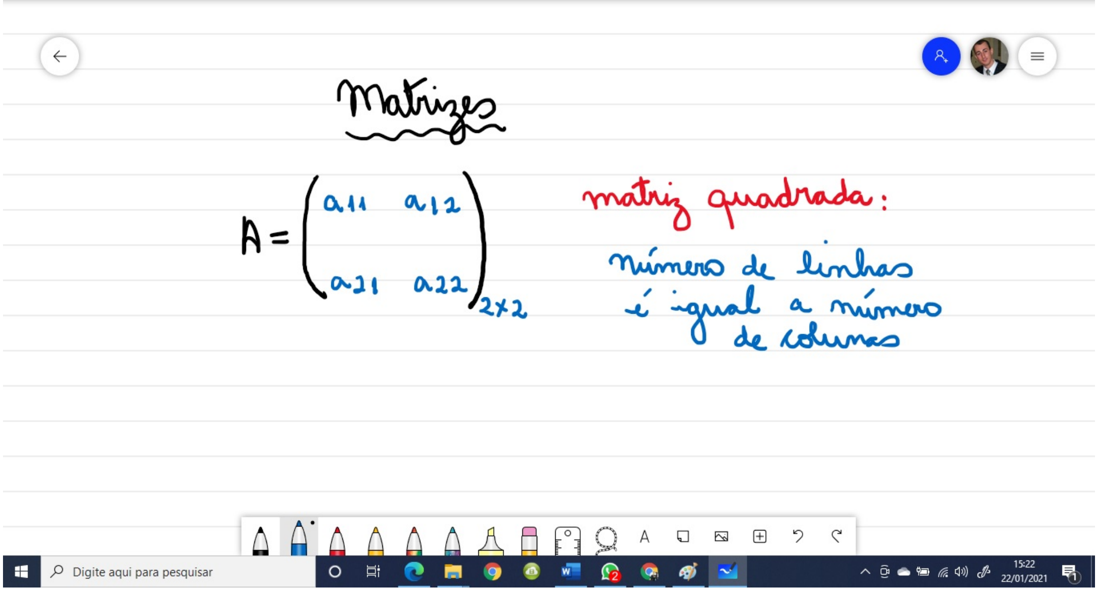
Figura 18: Mesa digitalizadora

Fonte: Site do fabricante[1].

Ao conectar a mesa digitalizadora ao seu computador podemos usar a lousa digital com inúmeras ferramentas - Figura 19, onde podemos escrever as aulas de forma manuscrita. Podes utilizar também arquivos em formato PDF ou DOC, conforme figura 20.

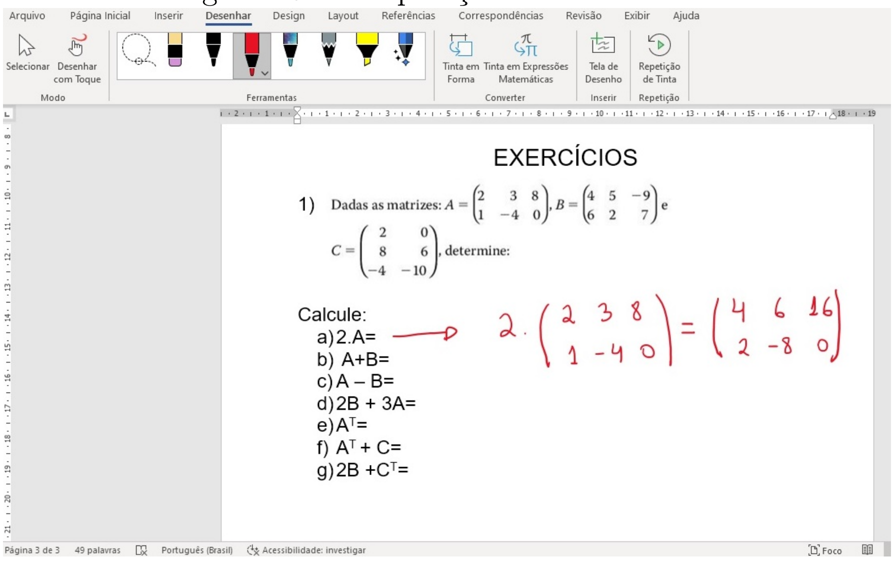
[1]Disponível em:<http://www.wacom.com/pt-br/products/one-by-wacom>. Acesso em: 22 jan.2021.

Figura 19: Lousa Digital



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 20: Manipulação de Documentos

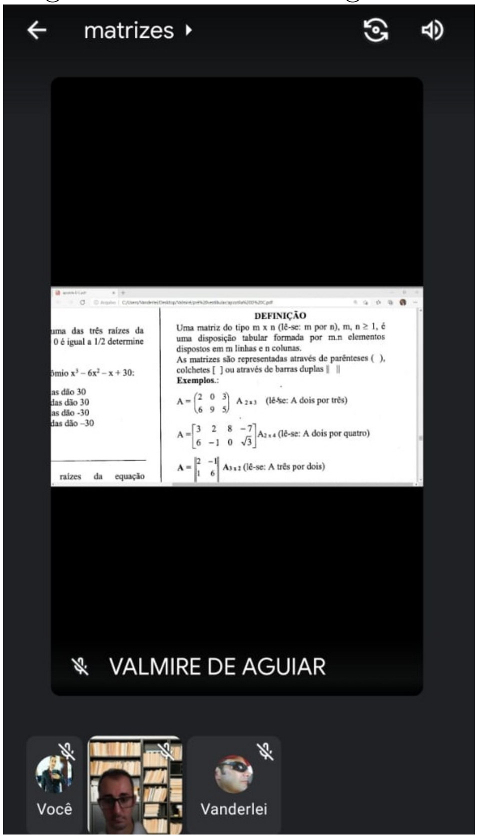


Fonte: Elaborada pelo autor.

Aulas ao vivo ou gravação de vídeo aulas?

Após a aquisição da mesa digitalizadora, era preciso uma ferramenta para distribuição das aulas aos alunos. Inicialmente utilizamos o Google Meet (ferramenta para reuniões com auxílio de vídeo, disponível em: https://meet.google.com), com ele os alunos podem tirar dúvidas e interagir ao vivo durante as aulas. O professor compartilha a tela e com o uso em paralelo da mesa digitalizadora os alunos acompanham o raciocínio das resoluções - Figura 21.

Figura 21: Aula no Google Meet



Fonte: Elaborada pelo autor.

Apesar de inúmeros recursos, o Google Meet esbarrava nos seguintes problemas:

1. Alunos com conexão banda larga instável, acabou fazendo com que a imagem travasse ou o áudio ficasse muito ruim;

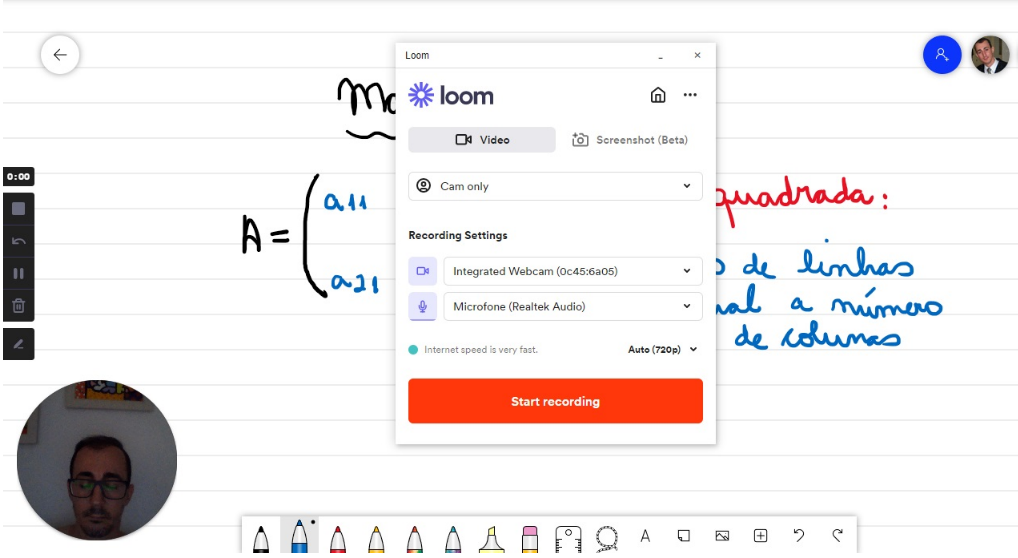
2. Estudantes usando os dados móveis do celular pré-pago, ficaram sem os créditos no meio da aula;

3. Por fim, alunos que usavam o celular de seus pais, sendo que os mesmos trabalham, só estão em casa a noite, inviabilizando o acesso dos filhos;

4. Espaço de apenas 15 gigas no google drive, local onde as aulas gravadas ficam armazenadas.

Neste contexto, o processo de ensino aprendizagem estava prejudicado. Por isso, decidi gravar as aulas. Após muita pesquisa por uma ferramenta prática e gratuita, escolhemos a plataforma Loom (plataforma para gravações de vídeos, disponível em: https://www.loom.com). A mesma libera assinatura completa (sem limites de gravações) para estudantes e professores, para tal, basta usar o e-mail institucional no momento do cadastro. Após confirmação dos dados, basta baixar o aplicativo e com muita facilidade começar a gravar os vídeos - figura 22.

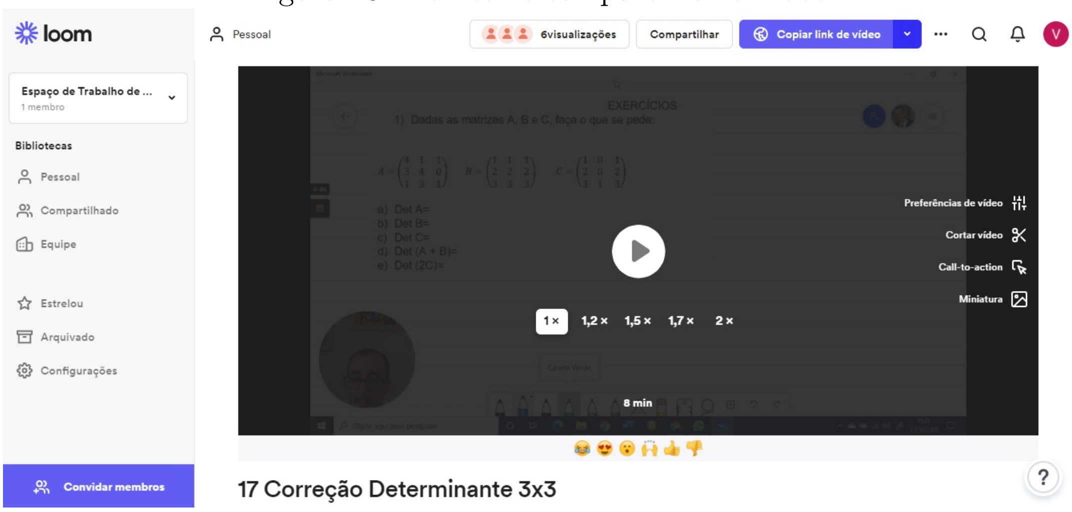
Figura 22: Tela inicial do aplicativo Loom



Fonte: Elaborada pelo autor.

Ao finalizar a gravação, automaticamente abre o navegador, para nomear o vídeo e copiar o link do mesmo para compartilhamento, seja nas redes sociais ou aplicativos de mensagem instantânea, veja Figura 23.

Figura 23: Nomear e compartilhar o vídeo



Fonte: Elaborada pelo autor.

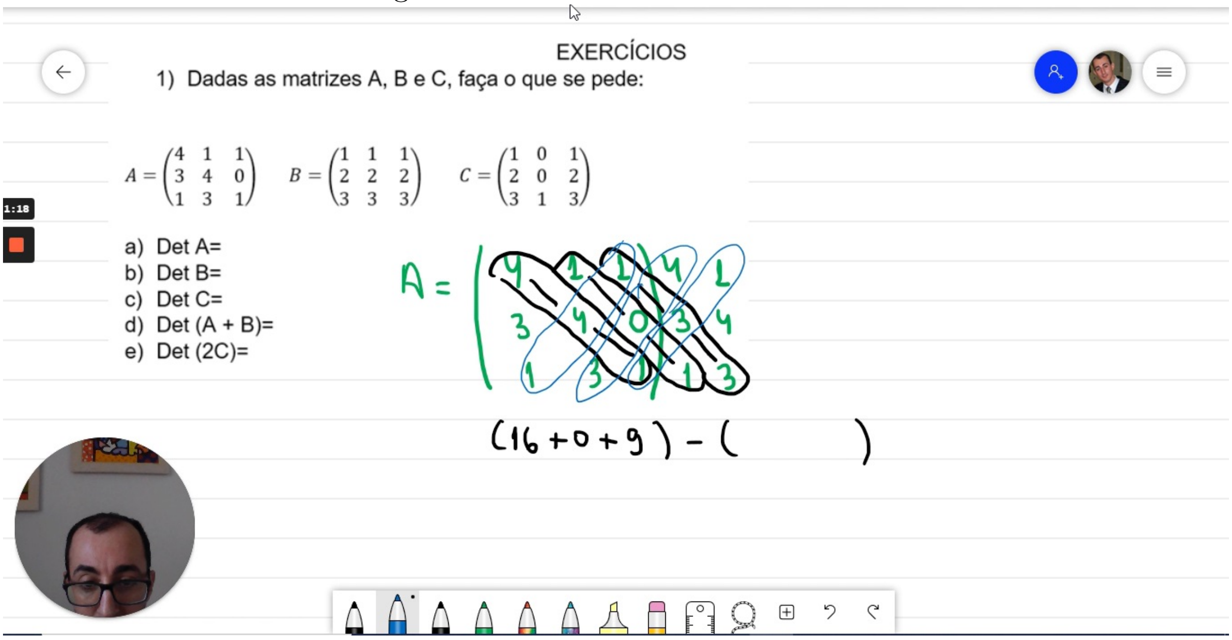
Os vídeos podem ter três formatos:

1. Grava apenas o rosto do professor, usa a imagem da sua *webcam*, este formato é indicado para aulas expositivas, nas quais não seja preciso usar a lousa ou apresentar cálculos;

2. Grava a tela do computador. Pode-se utilizar a lousa digital,um arquivo em: PDF, formato texto, apresentação entre outros;

3. Seria a junção dos itens anteriores, grava a tela que estamos interagindo e o rosto do professor que aparece em um pequeno círculo conforme figura 24 . Este formato é o que mais se aproxima da sala de aula, pois o aluno acompanha o raciocínio e vê o professor explicando.

Figura 24: Vídeo com a tela e rosto

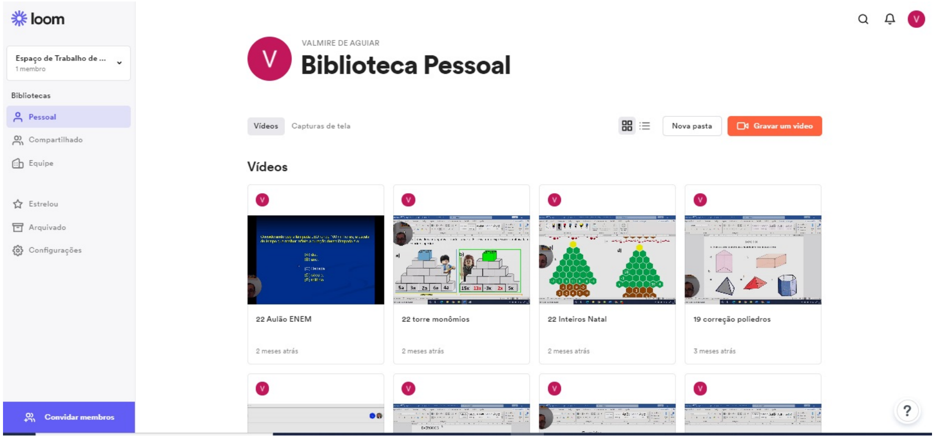


Fonte: Elaborada pelo autor.

A plataforma *Loom* cria uma biblioteca (Figura 25) com todos os vídeos, podendo ser acessada a qualquer momento através do link. Durante as aulas remotas quando era preciso fazer algum tipo de revisão, bastava indicar o vídeo de aulas anteriores ou até mesmo de outras séries.

Espero que as ferramentas apresentadas possam ajudar os professores, tendo em vista que a Pandemia pode se tornar sazonal, introduzindo assim o ensino híbrido na educação básica. Para que tenhamos êxito, teremos que ter investimentos do poder público para oferecer internet e computadores a todos os alunos e professores, pois na escola

Figura 25: Biblioteca das aulas



Fonte: Elaborada pelo autor.

que trabalho, por exemplo, muitos estudantes pegavam apenas atividades impressas na unidade escolar, pois não tinham computador e/ou internet.

5 CONCLUSÃO

Durante a realização da pesquisa, das leituras e das aulas que tive no mestrado, tentei levar todo meu aprendizado para as minhas aulas, mais precisamente as aplicações. Nos livros didáticos dos Ensinos Fundamental e Médio temos poucas aplicações e nenhum incentivo a pesquisa, distanciando muito os alunos da matemática.

Ao estudar Álgebra Linear com a professora Dra. Maria Inez vi sua preocupação em ensinar o conteúdo e de também fazer o link com as aplicações nas diversas áreas. Provocado por todo este movimento pude trazer aos meus alunos exemplos reais, mesmo que algumas vezes eu tenha que ocultar alguns detalhes e demonstrações, percebi o olho de muitos estudantes brilhar e até os que não tem muita afinidade com a disciplina despertar mais interesse. Sendo assim,espero que este trabalho possa inspirar os colegas professores, a buscarem aplicações dos objetos de conhecimento ensinados na escola, contribuindo com a melhora da prática em sala de aula.

REFERÊNCIAS

ANDRADE, D. *Regra de Cramer: por que funciona?* Maringa: DMA-UEM, 2019. <http://www.dma.uem.br/kit/jeepema-1/art1.pdf>. Acessado em 20 jan. 2021.

BEAN, Sonia Elena P. Castro; KOZAKEVICH, Daniel Norberto. *Álgebra Linear I.* Florianópolis: UFSC/EAD/CED/CFM, 2008.

FAINGUELERNT, Estela Kufman; GOTTLIEB, Franca Cohen. *Matrizes e Determinantes:Sistemas Lineares.* Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2004.

FERNANDES, Cecília de Souza; HEFEZ, Abramo. *Introdução à Algebra Linear (Coleção PROFMAT).* Rio de Janeiro: SBM, 2016.

IEZZI, Gelson et al. *Matemática: Ciência e Aplicações.* São Paulo: Saraiva, 2016.

LAY, David C. *Álgebra linear e suas aplicações.* Rio de Janeiro: LTC, 2007.

STRANG, Gilbert. *Álgebra linear e suas aplicações.* São Paulo: Cengage Learning, 2010.