UNIVERSIDADE FEDERAL DO VALE DO SÃO FRANCISCO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

JOÃO JAMESON LOPES CORDEIRO

RÉGUAS DE CÁLCULO E SEU POTENCIAL PARA O ENSINO DAS PROPRIEDADES LOGARÍTMICAS

JUAZEIRO – BA
2021

JOÃO JAMESON LOPES CORDEIRO

RÉGUAS DE CÁLCULO E SEU POTENCIAL PARA O ENSINO DAS PROPRIEDADES LOGARÍTMICAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Vale do São Francisco, como requisito necessário à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Prof. Dr. Edson Leite de Araújo
(Orientador)

JUAZEIRO – BA

2021

RÉGUAS DE CÁLCULO E SEU POTENCIAL PARA O ENSINO DAS PROPRIEDADES LOGARÍTMICAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Vale do São Francisco, como requisito necessário à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Dissertação aprovada em 18 de novembro de 2021

BANCA EXAMINADORA

Edson Leite Araújo

Prof. Dr. Edson Leite de Araújo

Orientador – PROFMAT/UNIVASF

Lino Marcos da Silva

Prof. Dr. Lino Marcos da Silva

Examinador Interno – UNIVASF

Marta Élid Amorim Mateus

Prof. Dr. Marta Élid de Amorim Mateus

Examinador Externo – UFS

JUAZEIRO – BA

2021

Cordeiro, João Jameson Lopes
C794r Réguas de cálculo e seu potencial para o ensino das propriedades logarítmicas /João Jameson Lopes Cordeiro. – Juazeiro - BA, 2021.
xiii; 78 f.: il. 29 cm.

Dissertação – (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Universidade Federal do Vale do São Francisco, Campus Juazeiro – BA.

Orientador: Prof. Dr. Edson Leite de Araújo.

1. Matemática - estudo e ensino. 2. Logaritmos. 3. Réguas de Cálculo I. Título. II. Araújo, Edson Leite. III. Universidade Federal do Vale do São Francisco.

CDD 510.07

Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema Integrado de Biblioteca SIBI/UNIVASF
Bibliotecário: Márcio Pataro. CRB - 5 / 1369.

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho a minha família que sempre acreditou no meu potencial e compreendeu todos os momentos em que não pude estar presente.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por tudo de bom que vem proporcionando em minha vida.

A toda minha família, em especial à minha esposa Thaís Nayra, minha filha Maria Clara, aos meus pais Francisca Neuma e José Ivan e minha irmã Francisca Jamila, pelo incentivo e apoio nas horas difíceis.

Aos amigos de curso, por todos os momentos que passamos juntos.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Edson Leite de Araújo, pelos ensinamentos, incentivo, atenção e suporte dado durante a realização deste trabalho.

Aos professores do curso, pelos conhecimentos compartilhados.

Ao meu ex-professor e amigo Me. Robson Franklin pelo incentivo e conhecimentos compartilhados.

Ao meu primo, Vinícius Cordeiro pelas contribuições com o trabalho na parte tecnológica.

À Escola de Referência em Ensino Médio José Caldas Cavalcanti, em nome da diretora Lucélia Lopes, pela compreensão nos momentos de falta e incentivo aos estudos.

“Percebendo que não há nada mais trabalhoso na prática da matemática, nem que mais prejudique e atrapalhe os calculadores, do que as multiplicações, as divisões, as extrações do quadrado e do cubo dos números muito grande... comecei a considerar em minha mente através de que tipo de arte certa e rápida poderia remover essas dificuldades”

John Napier.

RESUMO

A régua de cálculo criada no século XVII tornou-se peça de museu após o advento das modernas calculadoras portáteis. Seu uso proporcionou grandes avanços à época. Construída basicamente de escalas logarítmicas facilitava a realização de cálculos de forma prática, rápida e precisa. O presente trabalho tem como objetivo restaurar o conhecimento acerca deste dispositivo trazendo para professores e alunos material didático que possa auxiliar o ensino-aprendizagem, proporcionando reflexões sobre o uso de objetos e materiais manipuláveis na transmissão/aquisição de conhecimento matemático, mostrar como surgiram conceitos que originaram os logaritmos e como desencadearam a construção da régua de cálculo. Para o alcance de tais objetivos, investigou-se mediante pesquisa bibliográfica a história de John Napier e de William Oughtred, o desenvolvimento prático das réguas e como ocorre seu manuseio para facilitação de cálculos. O trabalho foi realizado através de uma pesquisa de campo, em duas turmas do terceiro ano do ensino médio, numa escola na cidade de Cabrobó – PE. Numa das turmas aplicou-se uma sequência didática diferenciada baseada no uso das Réguas de Cálculo enquanto na outra o ensino ocorreu na forma tradicional. A pesquisa tem abordagem qualitativa baseada em observações, análise de resultados e questionários. Os resultados mostram melhor desempenho na turma em que foram utilizadas as réguas. O planejamento e aplicação da sequência didática favoreceram a compreensão do conteúdo abordado nos levando a concluir que este recurso didático possui potencial para o ensino das propriedades logarítmicas.

Palavras-chave: História da Matemática, Régua de Cálculo, Logaritmos.

ABSTRACT

The slide rule created in the 17th century became a museum piece after the advent of modern portable calculators. Its use provided great advances at the time. Basically built of logarithmic scales, it facilitated the calculations in a practical, fast and accurate way. The present work aims to restore knowledge about this device by bringing didactic material to teachers and students that can help teaching and learning, providing reflections on the use of manipulable objects and materials in the transmission/acquisition of mathematical knowledge, showing how concepts emerged that originated the logarithms and how they triggered the construction of the slide rule. To achieve these objectives, the history of John Napier and William Oughtred, the practical development of rulers and how they are handled to facilitate calculations was investigated through a bibliographical research. The work was carried out through a field research, in two classes of the third year of high school, in a school in the city of Cabrobó – PE. In one of the classes, a differentiated didactic sequence was applied based on the use of Rulers, while in the other the teaching took place in the traditional way. The research has a qualitative approach based on observations, analysis of results and questionnaires. The results show better performance in the class in which the rulers were used. The planning and application of the didactic sequence favored the understanding of the content covered, leading us to conclude that this didactic resource has potential for teaching logarithmic properties.

Keywords: History of Mathematics, Calculation Rule, Logarithms.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE SIGLAS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Os *logaritmos* fazem parte dos conteúdos a serem vistos durante o Ensino Médio e há muito preocupa educadores matemáticos e estudiosos da educação que se debruçam em pesquisas para encontrar uma forma moderna e agradável de ensiná-los (PARANÁ, 2012, p.5).

O ensino dos *logaritmos* baseia-se geralmente, em longas e tediosas resoluções de equações e inequações, tornando-o frustrante tanto para professores quanto para alunos (RAMOS, 2015, p.1). Sua notação diferenciada, a quantidade de propriedades e o comportamento desta função, assustam por sair do padrão reta/parábola e faz com que a proposta tradicional não alcance os alunos de forma esperada (WENDLAND, 2019, p.13).

Dias, Meira e Silva (2016), alegam que ao longo da história da educação, destacam-se pesquisas dedicadas ao estudo de instrumentos que auxiliem no ensino da matemática e atestam isso os diversos jogos e materiais manipuláveis existentes. Entre estas pesquisas está o trabalho de Rodrigues (2016) que observou na utilização de materiais concretos uma compreensão e assimilação de forma mais significativa. Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) destacam ainda que “os recursos didáticos, como livros, vídeos, televisão, rádio, calculadora, computadores, jogos e outros materiais, têm um papel importante no processo de ensino e aprendizagem” (BRASIL, 1998, p. 57).

Vários trabalhos sobre o ensino da matemática foram desenvolvidos enfatizando o uso de material manipulável nas aulas. Para Rodrigues (2016, p. 5) o uso de materiais concretos nas aulas de matemática leva o estudante a raciocinar, despertar curiosidades, criar soluções e conceitos. Osório (2019, p.16) afirma que facilita a compreensão e diminui a abstração dos conteúdos matemáticos. Pinheiro (2014, p.93) por sua vez observou que o ensino se tornou mais atraente, tornando as aulas mais dinâmicas e participativas.

Ao longo da história da matemática, vários instrumentos foram projetados e aperfeiçoados para facilitar cálculos. Entre estes, estão as *Réguas de Cálculos*, criadas por William Oughtred após Napier inventar os *logaritmos* (FONSECA; PEREIRA, 2015, p.1). Tais artefatos fazem uso das propriedades *logarítmicas* e permitem a realização de cálculos de forma prática, rápida e precisa.

As *Réguas de Cálculo* podem ser elemento mediador do ensino e aprendizagem da matemática para os níveis Fundamental e Médio, possibilitando sua aplicação em conteúdos que envolvam a aritmética e o estudo dos *logaritmos* (PEREIRA 2015, p.57), o que enseja a motivação deste trabalho que tem por objetivo elaborar e aplicar uma sequência didática baseado no uso das *Réguas de Cálculo* como facilitadora do ensino e aprendizagem das propriedades dos *logaritmos.*

Seguindo as Orientações Curriculares para o Ensino Médio que espera que os estudantes percebam “a matemática como um conhecimento social e historicamente construído” (BRASIL 2006, p.69) propomos o seguinte questionamento:

Como utilizar as Réguas de Cálculo para tornar o ensino dos *logaritmos* prazeroso, eficiente e significativo?

Tendo esta pergunta como propósito norteador e as observações feitas anteriormente, propõe-se como objetivo geral:

Resgatar o conhecimento acerca das *Réguas de Cálculo* trazendo para professores e alunos material extra, útil ao processo de ensino e aprendizagem, proporcionando, conhecimento matemático incorporado através do manuseio desse artefato.

Para alcançar este objetivo, propõem-se os seguintes objetivos específicos:

1. Pesquisar o processo histórico que desencadeou a invenção da *Régua de Cálculo*;
2. Criar uma sequência didática que utilize as *Réguas de Cálculo* como auxílio no ensino das propriedades *logarítmicas*;
3. Aplicar a sequência didática e verificar sua eficiência;

Este trabalho está estruturado em 6 capítulos, sendo esta introdução como primeiro. O capítulo seguinte está dividido em 4 seções onde a primeira aborda os documentos oficiais e outros trabalhos sobre o ensino dos *logaritmos*; a segunda traz um levantamento histórico das ideias que desencadearam a invenção dos *logaritmos;* a terceira conta a história de Jonh Napier, criador dos *logaritmos* e, por fim, a última seção traz o relato histórico sobre as *Réguas de Cálculo*. O terceiro capítulo traz um manual de uso das *Réguas de Cálculo* linear e circular. O capítulo de número 4 aborda a metodologia utilizada bem como a apresentação da sequência didática e sua aplicação nos encontros realizados na pesquisa. O capítulo 5 expõe os resultados obtidos e sua análise. Por fim, no 6° capítulo são feitas as considerações a respeito desta pesquisa, suas contribuições para a comunidade acadêmica e ideias para trabalhos futuros.

2. LOGARITMOS

Este capítulo descreve o que dizem os documentos oficiais a respeito da importância do ensino dos *logaritmos,* o que relatam alguns trabalhos sobre o tema, a importância do uso de materiais concretos no processo ensino-aprendizagem e o potencial das *Réguas de Cálculo* para o ensino das propriedades logarítmicas. Serão expostos também os relatos históricos que desencadearam a criação dos *logaritmos* e das *Réguas de Cálculo*.

2.1. DOCUMENTOS OFICIAIS E OUTROS

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) define as diretrizes de aprendizagem que devem ser desenvolvidas ao longo da Educação Básica e norteia as redes de ensino na elaboração de um currículo com propostas pedagógicas que promovam uma educação de qualidade. Este documento encontra-se organizado em competências e habilidades (BRASIL, 2018, p.7) e ressalta a importância dos *logaritmos* para o ensino médio em uma das habilidades da competência específica três:

> Resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas nos quais é necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como os de abalos sísmicos, pH, radioatividade, Matemática Financeira, entre outros (BRASIL, 2018, p.528).

As Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+) destacam a importância de se estudar os *logaritmos* na Educação Básica, exemplificando que estes servem de linguagem para representação de fenômenos ligados a outras ciências:

> [...] o uso do *logaritmo*, operação que dá origem a funções matemáticas, mas que também é linguagem de representação em todas as ciências. Ao se ensinar este conceito, operação ou função, o professor de Matemática, inicialmente, mostra que dez milhões – 10.000.000 – é dez vezes dez, sete vezes seguidas, ou seja, dez à potência 7, ou seja, 10^7. Uma operação inversa é o *logaritmo* na base 10, ou seja, $\log_{10}(10\,000\,000) = 7$, que, conhecido o número dez milhões, determina qual a potência de 10 que resulta nele.
>
> Esse aprendizado, no entanto, perderia contexto se não se explicitasse a importância dos logaritmos, em questões tecnológicas e em outras ciências, para expressar grandezas cujo intervalo de variação é exponencial. Por exemplo, o ouvido humano pode ouvir ruídos um trilhão de vezes menores do que o mais intenso a que resiste, no limite da dor. Para conseguir abranger esse imenso intervalo criou-se, a partir da potência

> sonora, a escala *logarítmica* de decibéis. Usando essa escala, pode-se situar sons com intensidades variando de 1 a 1 trilhão em um gráfico com só treze divisões, e não um trilhão delas.
>
> Também é *logarítmica* a escala Richter dos abalos sísmicos. Um aluno que compreender o caráter *logarítmico* dessa escala saberá que um terremoto caracterizado pelo nível 7 não tem uma intensidade só acrescida em 3, relativamente a um abalo de nível 4, mas sim mil vezes esta intensidade, ou seja, multiplicada por 10^3. Usa-se ainda uma escala *logarítmica* para definir o pH de substâncias, coeficiente que caracteriza a condição mais ácida ou mais básica de soluções. Também populações de micro-organismos podem variar exponencialmente, tornando a escala *logarítmica* igualmente conveniente em Biologia (BRASIL, 2006, p.26).

Segundo Ferreira (2006), em seu exercício do magistério foi possível observar que a maioria dos alunos do Ensino Médio apresentavam dificuldades relacionadas à assimilação e compreensão do conceito de *logaritmos*.

Grande parte das dificuldades apresentadas no aprendizado dos *logaritmos* decorre de uma defasagem no conceito de *potenciação* e da pouca habilidade algébrica no manuseio de *equações exponenciais* (VIDIGAL, 2014, p.96). Além disso, ao iniciar o estudo dos *logaritmos,* os alunos são confrontados com raciocínios complexos e fórmulas extensas, ocasionando desinteresse pelo assunto (SILVA, 2019, p. 105).

Em busca de promover a superação dos problemas mencionados, professores buscam estratégias e recursos didáticos capazes de proporcionar outras formas de aprender e fazer matemática (D'AVILA, 2018, p.15). Pereira (2015, p.14) menciona que "a construção, utilização e realização de atividades com recursos didáticos, permitem ao aluno visualizar as relações entre conceitos da matemática e outras ciências, possibilitando assim, a aprendizagem dos conteúdos ensinados".

A *Régua de Cálculo* criada no século XVII por Oughtred se destaca neste contexto pela utilização das propriedades *logarítmicas* em seu manuseio:

> A *Régua de Cálculo,* criadas em 1622 por William Oughtred é um artefato simples, que no século XVII, foi de grande utilidade para matemáticos e astrônomos nos extensos cálculos realizados na época, e que hoje pode ser utilizada como estudo das propriedades dos logaritmos (ALVES, SILVA e MARTINS, 2016, p.1).

Alves, Silva e Martins (2016) destacam que o estudo dos *logaritmos* através da *Régua de Cálculo*, torna o processo de aprendizagem mais fácil, devido à manipulação do instrumento:

> Com a escolha de manipular a *Régua de Cálculo* o professor proporciona aos alunos aplicar as propriedades de *logaritmos* e exprimir o desenvolvimento histórico dos *logaritmos*, o contexto cultural e

> socioeconômico a qual os *logaritmos* foram criados, respondendo os *porquês* tão frequentes na sala de aula. Por muitas vezes a matemática pode ser abstrata e complexa, desse modo, quando é possível atrelar o ensino do conteúdo a uma aplicação prática, o professor estará auxiliando seus alunos no entendimento do assunto (ALVES, SILVA e MARTINS, 2016, p.7).

Alves, Silva e Martins (2016) relatam também que os alunos participantes da sua pesquisa atribuíram ao manuseio da *Régua de Cálculo* um elemento facilitador do ensino dos *logaritmos*, dado que agrega importância ao seu uso em conjunto com a parte algébrica e por isso, consideram ser mais fácil a compreensão do assunto estudado.

Segundo Fonseca e Pereira (2015) trabalhar conceitos matemáticos a partir de um artefato manipulável, no caso a *Régua de Cálculo,* foi bem recebida pelos alunos. Algo que pôde ser percebido em função do enorme empenho destes, durante a realização de sua pesquisa.

2.2. ASPECTOS HISTÓRICOS

O século XVII foi importante na história da matemática. Vários campos de pesquisa foram criados, a sociedade sofreu transformações políticas, econômicas e sociais. Houve grandes invenções nesse período, dentre elas os *logaritmos*:

> Muitos dos campos nos quais os cálculos numéricos são importantes, como a astronomia, a navegação, o comércio, a engenharia e a guerra fizeram com que as demandas para que esses cálculos se tornassem cada vez mais rápidos e precisos crescessem sempre e continuamente. Quatro notáveis invenções vieram atender sucessivamente essas demandas crescentes: a notação indo-arábico, as frações decimais, os *logaritmos* e os modernos computadores (EVES, 2004, p.341).

Os *logaritmos* se espalharam rapidamente pela comunidade científica devido à facilidade que proporcionavam na realização de cálculos aritméticos.

> O reconhecimento universal caiu sobre seu inventor e a invenção foi adotada rapidamente por toda a Europa e até mesmo a distante China. Um dos primeiros a utilizar os *logaritmos* foi o astrônomo Johannes Kepler, que utilizou com grande sucesso em seus elaborados cálculos das órbitas planetárias (MAOR, 2008, p.25)

Inventores perceberam que um engenho mecânico poderia ser construído para realizar cálculos usando as propriedades que os *logaritmos* possuíam (MAOR, 2008). O autor afirma ainda que “a ideia de usar duas escalas *logarítmicas* que pudessem se mover uma em relação à outra, originou-se com Willian Oughtred (1574 – 1660)”. Essa ideia permitiu a invenção do instrumento batizado como *Régua de Cálculo*. Foram construídas duas versões: uma *Régua de Cálculo Linear*, composta por duas escalas logarítmicas que poderiam deslizar uma sobre a outra, e outra *Circular*, também com duas escalas, porém dispostas em discos que podiam girar em torno de um eixo comum.

Será feito aqui, um breve relato, descrevendo de forma sucinta a história de Napier, inventor dos *logaritmos* e quais as linhas de pensamento que desencadearam essa invenção.

2.3 JONH NAPIER E OS LOGARITMOS

Figura 01 - John Napier

Fonte: Santos (2017, p.18)

John Napier (Figura 01) filho de Sir Archibald Napier e de sua primeira esposa, Janet Bothwell, nasceu em 1550 (a data exata é desconhecida) na propriedade de sua família, o castelo Merchiston, perto de Edimburgo, na Escócia. Os detalhes de sua infância são imprecisos. Ainda criança foi mandado para a Universidade de St. Andrews, onde estudou religião. Após curta permanência, voltou para sua terra natal em 1571 e casou-se com Elizabeth Stirling, com quem teve dois filhos. Após a morte de sua esposa, em 1579, casou-se com Agnes Chisholm, com quem teve dez filhos (MAOR, 2008, p.16).

As atividades iniciais de Napier não o apontavam como um brilhante matemático. Edwards (1979) relata que ele escreveu um polêmico livro em que se propunha a provar que o papa, na época Clemente VIII, era o anticristo e que o mundo deveria acabar entre 1688 e 1700. Este livro teve várias edições fazendo-o acreditar que essa seria sua maior obra. Também escreveu sobre várias máquinas de guerra prevendo que seriam desenvolvidas peças de artilharia capazes de exterminar criaturas vivas em um raio de aproximadamente 6,4 km, carros de guerra com aberturas capazes de espalhar a destruição e até mesmo dispositivos capazes de navegar debaixo d'água. As metralhadoras, os tanques de guerra e os submarinos respectivamente, vieram a se concretizar.

Polêmicas a parte, Napier era um grande estudioso da matemática. O crescente desenvolvimento da astronomia e das navegações no fim do século XVI exigia longos e laboriosos cálculos aritméticos e apesar do auxílio das frações decimais, ainda era necessário achar um método que permitisse efetuar com facilidade multiplicações, divisões, potenciações e extrações de raízes. Napier tomou como desafio encontrar esse método. Ao que tudo indica, as fórmulas trigonométricas, (Eqs. 1, 2, 3 e 4) foram usadas como inspiração (Eves, 2008).

$$2 \times \cos(A) \times \cos(B) = \cos(A+B) + \cos(A-B) \tag{1}$$

$$2 \times \operatorname{sen}(A) \times \cos(B) = \operatorname{sen}(A+B) + \operatorname{sen}(A-B) \tag{2}$$

$$2 \times \cos(A) \times \operatorname{sen}(B) = \operatorname{sen}(A+B) - \operatorname{sen}(A-B) \tag{3}$$

$$2 \times \operatorname{sen}(A) \times \operatorname{sen}(B) = \cos(A-B) - \cos(A+B) \tag{4}$$

Estas fórmulas permitem que o produto de duas funções trigonométricas possa ser calculado através de somas ou diferenças de outras duas funções trigonométricas. Como é mais fácil somar e subtrair do que multiplicar e dividir, essas fórmulas conduzem à troca de uma operação mais complexa por duas mais simples.

> Segundo o grau de dificuldade, as operações aritméticas podem ser classificadas em três grupos: adição e subtração formam as operações de primeira espécie, multiplicação e divisão são de segunda espécie, enquanto potenciação e radiciação constituem as operações de terceira espécie. Procurava-se então um processo que permitisse reduzir cada operação de segunda ou terceira espécie a uma de espécie inferior e, portanto mais simples (LIMA, 2010, p.1).

O matemático alemão, Michael Stifel tomou duas sequências numéricas: uma progressão aritmética e uma progressão geométrica. Ao colocar essas sequências lado a lado observou que o *produto* de dois termos quaisquer da progressão geométrica correspondia à *soma* dos termos equivalentes da progressão aritmética. Analogamente o *quociente* na progressão geométrica correspondia à *diferença* na progressão aritmética dos termos de mesma posição. Essa relação é conhecida como relação de Stifel (MAOR, 2008, p.18).

Para ilustrar o pensamento de Stifel considere a Tabela 1:

Tabela 1 - Progressões aritmética e geométrica

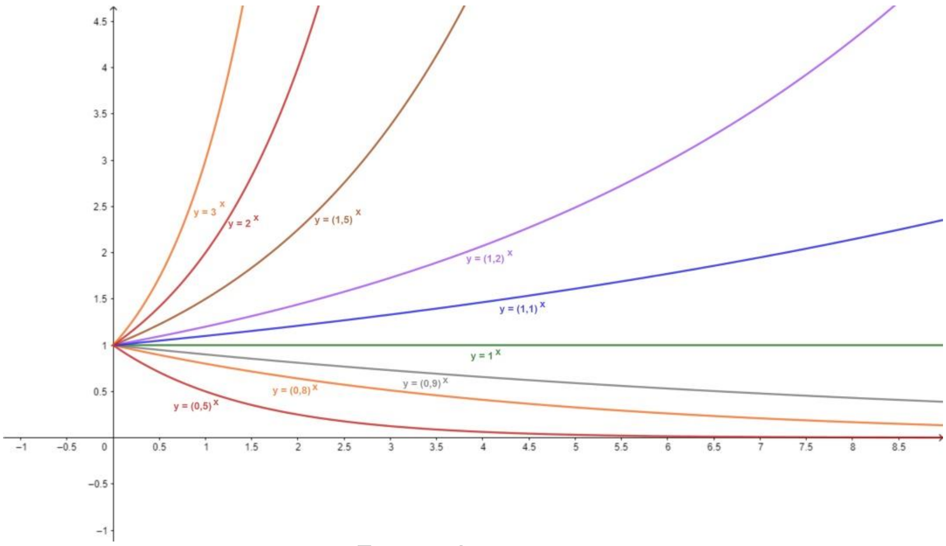
n	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
3^n	**1**	**3**	**9**	**27**	**81**	**243**	**729**

Fonte - Autor

Na primeira linha tem-se uma *progressão aritmética* de razão 1 e primeiro termo 0. Na segunda linha tem-se uma *progressão geométrica* de razão 3 e primeiro termo 1. Suponha que se deseja *multiplicar* 9 por 81. Observe que $9 = 3^2$ (expoente 2) e $81 = 3^4$ (expoente 4). Somando os expoentes encontrados, tem-se 6 e seu correspondente $3^6 = 729$. Portanto $9 \times 81 = 729$. Para efetuar-se a *divisão* de 729 por 243 de modo semelhante, observe que $729 = 3^6$ (expoente 6) e $243 = 3^5$(expoente 5). Subtraindo os expoentes, tem-se $6 - 5 = 1$ e o resultado de $729 \div 243 = 3^1 = 3$. De modo análogo, para calcular 27^2 basta verificar qual é o expoente de 3 que resulta em 27, que no caso é 3, realizando a multiplicação $3 \times 2 = 6$ e $3^6 = 729$, assim $27^2 = 729$. Da mesma forma, para encontrar $\sqrt[3]{729}$ encontra-se o número que está acima de 729 (Tabela 01), que é 6 e divide-se por 3 $\left(\sqrt[3]{729} = 729^{\frac{1}{3}}\right)$ e o resultado será portanto 2. Assim o número que está abaixo do 2 (Tabela 01) será o resultado de $\sqrt[3]{729}$, ou seja 9.

Esse esquema é desnecessário para efetuar cálculos que envolvam apenas números inteiros e a ideia de Napier era estendê-lo para ser usado com quaisquer outros números, inteiros ou fracionários. Para isso, era necessário preencher os espaços entre os números inteiros na Tabela 01 e a ideia foi escolher como base um número suficientemente pequeno de modo que suas potências cresçam de maneira muito lenta (Maor, 2008).

Figura 02 – Gráfico da função a^x, $a = \frac{1}{2}, \frac{4}{5}, \frac{9}{10}, 1, \frac{11}{10}, \frac{12}{10}, \frac{15}{10}$,2 ,3.



Fonte - Autor

Analisando a função $y = a^x$ é possível perceber que quanto mais próximo de 1 é a base a, menor será o crescimento da curva $y = a^x$ (Figura 02).

Para que a correspondência entre as progressões aritméticas e geométricas fosse útil para tais cálculos seria necessário que a razão entre os termos na progressão geométrica estivesse próximo[1] de 1 (Edwards, 1979).

Após anos lutando com esse problema, Napier decidiu-se por $1 - 10^{-7}$. A escolha deste valor parece morar na necessidade de minimizar o uso de frações decimais que, embora fossem conhecidas na época, eram quase sempre escritas como razões entre inteiros. Frações decimais, entre 0 e 1, haviam sido introduzidas recentemente na Europa e seu uso ainda causava insegurança em muitos (Stevin, 1585). Napier recorreu, portanto, a uma prática comum na trigonometria, de dividir o raio do círculo unitário em $10.000.000$ ou 10^7 partes. Observou ainda que

$$
\begin{aligned}
10^7(1-10^{-7})^L &= 10^7(k_0 + k_1 10^{-7} + k_2 10^{-14} + \cdots + k_L 10^{-7L}),\ k_i = (-1)^i \binom{L}{i} \\
&= k_0 10^7 + k_1 + k_2 10^{-7} + \cdots + k_L 10^{-7(L-1)} \\
&= 10^7 - L + k_2 10^{-7} + \cdots + k_L 10^{-7(L-1)} \\
&\cong 10^7 - L
\end{aligned}
$$

[1] O problema é que uma PG de razão 1 não cresce, nem decresce: é constante

ou seja, é possível calcular $10^7(1-10^{-7})^L$ por aproximação usando apenas subtrações recorrentes e o erro cometido nessa aproximação ocorre da oitava casa decimal em diante. Erro aceitável para sua época, tendo em vista a inexistência de ferramentas de cálculo com tal precisão.

Napier definiu, portanto que o *logaritmo* de um número *N* seria o *expoente L* tal que

$$N = 10^7(1-10^{-7})^L \tag{5}$$

e, delegou a si próprio a tarefa de construir a sua tabela de logaritmos, consistindo sua primeira versão de 101 entradas, sendo $10^7(1-10^{-7})^0$ a primeira e $10^7(1-10^{-7})^{100}$, a ultima. Publicou ainda outras 3 tabelas contendo 51, 21 e 68 entradas, respectivamente. Tal tarefa, considerada uma das menos inspiradoras já executadas por um cientista, tomou de Napier 20 anos (1594-1614) para ser concluída.

É possível observar que essa notação difere da atual, que foi introduzida por Leonardo Euller em 1728 (MAOR, 2008, p.22). Além disso, os valores de alguns *logaritmos* são diferentes dos *logaritmos* atuais, a exemplo disso o *logaritmo* de 10^7, que pela notação de Napier é 0 $\left(10^7 = 10^7\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^0\right)$ e o de $10^7\left(1-\frac{1}{10^7}\right)$ é 1 $\left(10^7\left(1-\frac{1}{10^7}\right) = 10^7\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^1\right)$.

É importante destacar que as regras básicas das operações com *logaritmos* (a exemplo $\log(A \times B) = \log A + \log B$) não é válida para a definição de Napier. Perceba que se $N_1 = 10^7$ e $N_2 = 10^7\left(1-\frac{1}{10^7}\right)$ tem-se

$$N_1 \times N_2 = [10^7] \times \left[10^7\left(1-\frac{1}{10^7}\right)\right] = 10^{14}\left(1-\frac{1}{10^7}\right),$$

onde, na relação determinada por Napier tem-se

$$10^{14}\left(1-\frac{1}{10^7}\right) = 10^7\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^L \Rightarrow L \neq 1$$

Porém, pela notação atual,

$$\begin{aligned} \log N_1N_2 &= \log N_1 + \log N_2 \\ &= \log 10^7 + \log 10^7\left(1-\frac{1}{10^7}\right) \\ &= 0 + 1 \\ &= 1 \Rightarrow L = 1 \end{aligned}$$

Napier publicou o seu trabalho em 1614 num texto intitulado *Merifice logarithmorum canonis descripto* (Construção do maravilhoso cânone dos *logaritmos*) (WENDLAND, 2019) (Figura 03).

Figura 03 - Merifice logarithmorum canonis descripto

MIRIFICI

Logarithmorum
Canonis deſcriptio,

Ejuſque uſus, in utraque
Trigonometria; ut etiam in
omni Logiſtica Mathematica,
Amplißimi, Facillimi, &
expeditißimi explicatio.

Authore ac Inventore,
IOANNE NEPERO,
Barone Merchiſtonii,
&c. Scoto.

EDINBVRGI,
Ex officinâ ANDREÆ HART
Bibliopôlæ, CIↃ. DC. XIV.

Fonte: WENDLAND (2019, p.30)

O trabalho despertou interesse imediato em toda a comunidade científica e no ano seguinte à sua publicação, Henry Briggs (1561 – 1631), professor de geometria em Londres, viajou ao encontro de Napier para “dar o tributo de seu reconhecimento ao inventor dos *logaritmos*”. Foi nesse encontro que Napier e Briggs concordaram que os *logaritmos* fariam mais sentido se fossem alterados de modo que o *logaritmo* de 1 fosse 0 e o de 10 fosse uma potência conveniente de 10, uma vez que o sistema de numeração usado é decimal. Foi assim que nasceram os *logaritmos briggsianos*, os *logaritmos* dos dias de hoje (EVES, 2008).

> A palavra *logaritmo* significa “número de razão” e foi introduzida por Napier depois de ter usado inicialmente a expressão número artificial. Briggs introduziu a palavra mantissa, que é um termo latino de origem etrusca que significa inicialmente “adição” ou “contrapeso”. O termo *característica* também foi sugerido por Briggs (EVES, 2008, p.346).

Imediatamente Briggs começou o trabalho de construção das tabelas de *logaritmos* e em 1624 publicou uma tabela com precisão de 14 casas decimais. Apesar de um pouco mais rápido, a construção dessa tabela tomou 7 anos da vida de Briggs que publicou sua primeira tábua em 1617 e só depois publicou uma versão bem mais ampliada desta primeira tabela (ÁVILA, 1994).

Segundo Ávila (1994) os *logaritmos* decimais sugeriam uma definição como a que nos é apresentada hoje:

Definição: O *logaritmo de um número **N** numa* base ***a** é o expoente **r** a que se deve elevar* a base para se *obter **N**, isto é, **N = a**^{r}.*

Porém, essa formatação não aparece nos trabalhos de Napier e Briggs pois em sua época ainda não se usavam expoentes fracionários ou irracionais. “Na realidade, os *logaritmos* foram inventados antes da notação exponencial” (LIMA, 2010, p.8).

Pedrosa (2018) destaca que ao pegar-se a primeira versão dos *logaritmos* escrita por Napier (Eq. 5) e dividir ambos os lados da igualdade por 10^7 encontrar-se-ia um sistema de *logaritmos* de base $\frac{1}{e}$. Segundo a autora, Napier não tinha o conceito de base de um sistema de *logaritmo*, pois sua definição era totalmente diferente da atual nem tampouco incluía o número e.

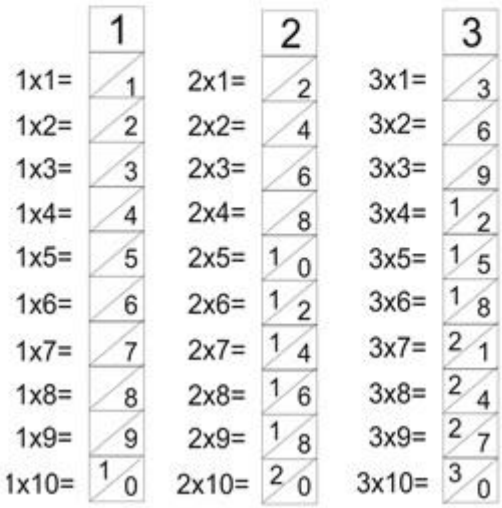
2.4. O SURGIMENTO DA RÉGUA DE CÁLCULO

Os *logaritmos* logo tomaram conta da Europa sendo divulgados por grandes cientistas.

> A maravilhosa invenção de Napier foi entusiasticamente adotada por toda a Europa. Na astronomia, em particular, já estava passando da hora para essa descoberta; pois, como afirmou Laplace, a invenção dos *logaritmos* “ao diminuir o trabalho, dobrou a vida dos astrônomos”. Bonaventura Cavalieri empenhou-se em divulgar os *logaritmos* na Itália. Trabalho análogo foi prestado por Johann Kepler na Alemanha e Edmund Wingate na França (EVES, 2008, p.346).

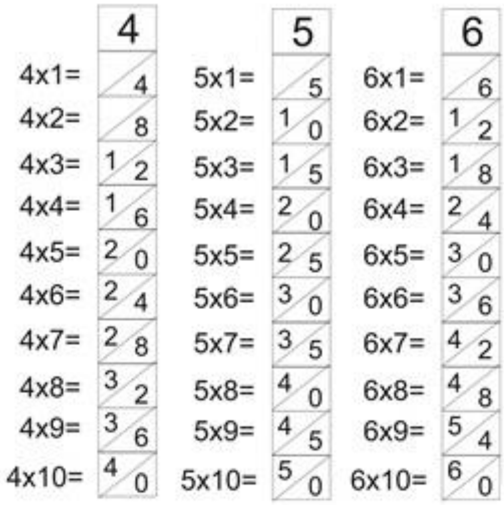
Após a criação dos *logaritmos*, alguns inventores construíram objetos que, usando as propriedades dos *logaritmos,* agilizavam os cálculos aritméticos. Alves e Pereira (2018) relatam que John Napier elaborou um recurso para o auxílio de cálculos aritméticos que ficou conhecido como *As Barras de Napier* (Figuras 04, 05 e 06).

Figura 04 - Barras de Napier (1, 2 e 3)



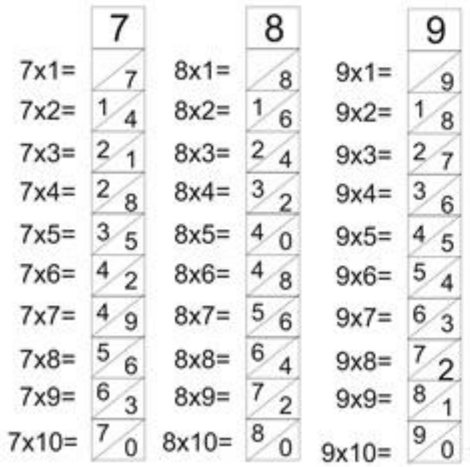
Fonte - Autor

Figura 05 - Barras de Napier (4, 5 e 6)



Fonte - Autor

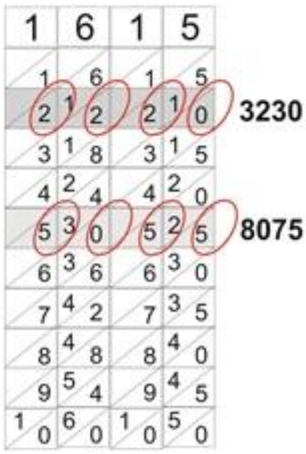
Figura 06 - Barras de Napier (7, 8 e 9)



Fonte - Autor

Napier publicou em 1617 sua obra Rabdologiae que explicava como funcionavam suas barras. Tomando-se o número 1615; por exemplo, selecionam-se as barras com os números 1, 6, 1 e 5 e as coloca em ordem (Figura 07). As barras mostram, na primeira linha, o número 1615. Na segunda linha está o produto deste número por 2, na terceira, está o produto por 3 e assim por diante. O resultado de 1615×2 será o número formado pelos algarismos $2 + 1$, 2, $2 + 1$ e 0, ou seja, 3230. De modo semelhante, o resultado de 1615×5 será o número com os algarismos $5 + 3$, 0, $5 + 2$ e 5, ou seja, 8075 (NAPIER, 1617).

Figura 07 – Multiplicação por 2 e por 5, usando as *Barras de Napier*



Fonte - Autor

As *Barras de Napier* representaram um grande avanço à época, porém não resolviam operações que envolviam números fracionários, uma vez que estas não operavam com esse tipo de número.

Edumund Günter (1581 - 1626), professor de astronomia da faculdade de Gresham, Londres, com base nas escalas logarítmicas de Briggs também criou um instrumento (Figura 08) que facilitava os cálculos aritméticos e que ficou conhecido como *Escala de Günter* (PEREIRA,2015).

Figura 08 - Régua de Günter e compasso

Fonte: MARTINS, PEREIRA, FONSECA (2016, p.52)

Esse engenho era formado por uma única escala logarítmica ao longo de um pedaço de madeira:

> A "Ecala de Günter" é uma linha reta, com os números dispostos de 1 a 10 de uma extremidade à outra, de tal forma que a distância ao longo da linha

> não são proporcionais aos números nele, mas sim os *logaritmos* dos referidos números [...] Sua utilização ainda agregava um par de compassos que marcavam adição e subtração das distâncias na escala de acordo com as propriedades dos *logaritmos*, ou seja, o produto e o quociente dos números (PEREIRA, 2015, p.41).

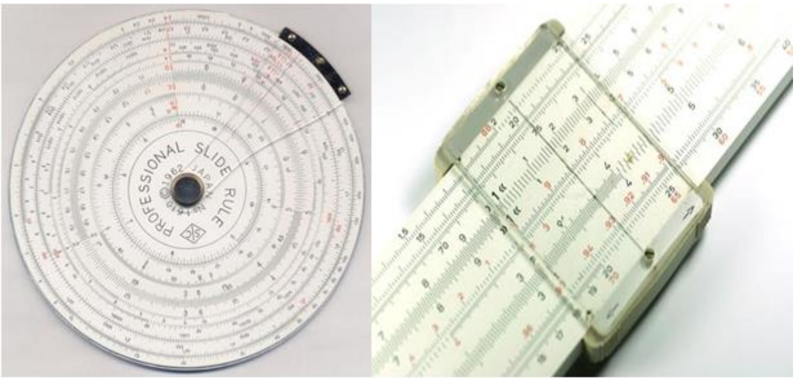
Seu propósito era a realização de operações com números não inteiros e baseava-se na soma de segmentos. Com o compasso era feita a medida da distância entre números na reta e assim, com a soma dessa distância havia a possibilidade de efetuar operações de multiplicação entre estes números, utilizando as propriedades logarítmicas (MARTINS, PEREIRA e FONSECA, 2016).

Apesar da Escala de Günter ser útil em seu propósito, o dispositivo não obteve sucesso devido a três dificuldades: desenhar as linhas com exatidão, manuseio dos compassos e sua portabilidade, dada à grande dimensão do equipamento (cerca de 66 cm). Em 1622, Wilian Oughtred estendeu a ideia de Gunter e montou um dispositivo substituindo o compasso por duas escalas logarítmicas, em que uma deslizava sobre a outra (TANONAKA, 2008).

Oughtred publicou em 1632 o documento *The New Artificial Gauging Line or Rod e Circles of Proportion and The Horizontal Instrument* (A Nova Linha de Medição Artificial ou Haste e Círculo de Proporção e o Instrumento Horizontal) no qual descreveu seu instrumento que, além de efetuar operações, era também capaz de trabalhar com proporções simples e compostas, resolver questões tanto na aritmética, geometria e astronomia como aferir qualquer tipo de recipiente tendo como referência o galão de vinho (TANONAKA, 2008).

A questão da autoria na invenção das *Réguas de Cálculo* (Figura 09) teve um processo conturbado. Richard Delamain foi o primeiro a produzir um exemplar escrito para o público que falava sobre o instrumento, entretanto, Delamain fora aluno de Oughtred e quando comentou sobre seu trabalho, Oughtred e outros alunos alegaram que já conheciam o instrumento (EVES, 2008).

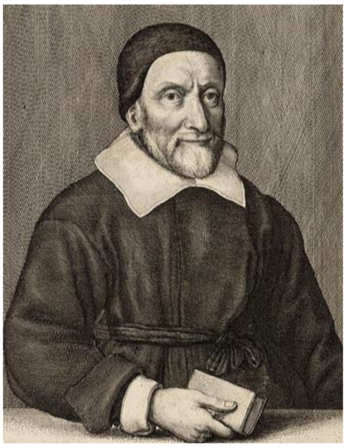
Figura 09 - Réguas de Cálculo Circular e Linear



Fonte: Autor

“Willliam Oughtred (Figura 10) foi um clérigo anglicano e matemático inglês, responsável pela criação da *Régua de Cálculo* e a introdução do símbolo $\times$ para indicar a multiplicação. Atuou nas áreas de Álgebra e Cálculo bem como no ensino de matemática” (PEREIRA, 2015, p.70).

Figura 10 - William Oughtred



Fonte: PEREIRA (2015, p.70)

As *Réguas de Cálculo*, em suas muitas versões, foram companheiras dos estudantes durante 350 anos, sendo presenteadas muitas vezes, pelos pais, a seus filhos, quando se graduavam no ginásio:

> Durante anos ensinou-se a calcular com *logaritmos* na escola de segundo grau ou no inicio dos cursos superiores de matemática; também por muitos anos a *Régua de Cálculo logarítmica*, pendurada no cinto, num bonito estojo de couro, foi o símbolo do estudante de engenharia do campus universitário (EVES, 2008, p.347).

A forma atual da *Régua de Cálculo* foi projetada, em 1850, por Amedee Mannheim (1831 – 1906), oficial da artilharia francesa e professor de Geometria Descritiva na École Polytechinque (Escola Politécnica), na França, que padronizou a versão “moderna” da régua. Na década de 70 apareceram as primeiras calculadoras eletrônicas manuais e em pouco tempo a *Régua de Cálculo* tornou-se um objeto de museu (PEREIRA, 2015).

3. RÉGUAS DE CÁLCULO

Devido tamanha importância que as *Réguas de Cálculo* tiveram para a agilidade com os cálculos aritméticos, neste capítulo serão apresentadas as *Réguas de Cálculo* e como realizar operações de multiplicações, divisões, potências quadradas ou cúbicas, extração de raízes quadradas ou cúbicas, cálculo de senos, cossenos e tangentes, bem como a divisão em partes proporcionais e porcentagens.

3.1. A RÉGUA LINEAR E SEUS COMPONENTES

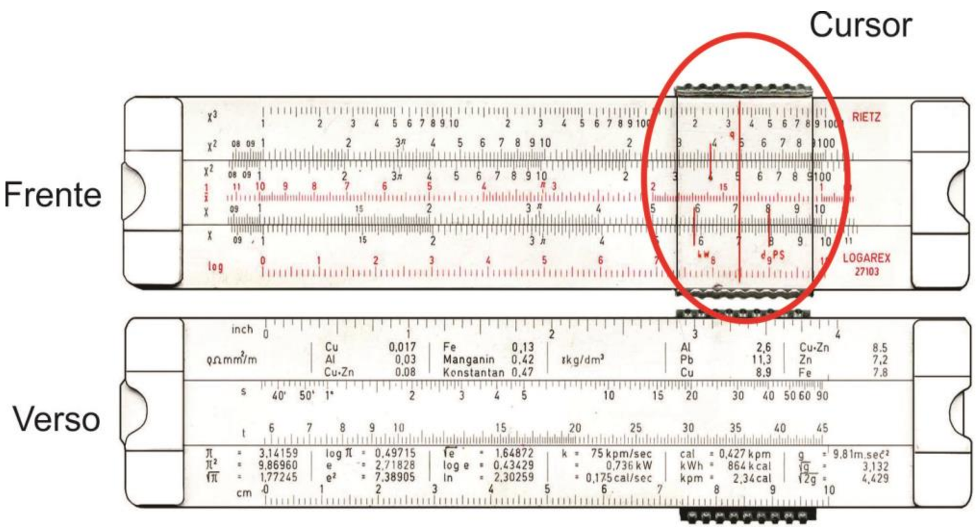
A *Régua de Cálculo Linear* (Figura 11) faz uso das propriedades logarítmicas e é composta por 3 partes:

i) o *corpo* (ou *parte fixa*) (Figura 12) que é a régua propriamente dita, possui marcações x^3 e x^2 na parte superior, x e log na parte inferior, indicando as escalas cúbica, quadrática, linear e logarítmica, respectivamente;

ii) a *parte deslizante* ou *parte móvel* (Figura 13), com as marcações x^2, $\frac{1}{x}$ e x na parte central da régua e que se move dentro do encaixe do *corpo*, indicando as escalas quadrática, inversa e linear, respectivamente;

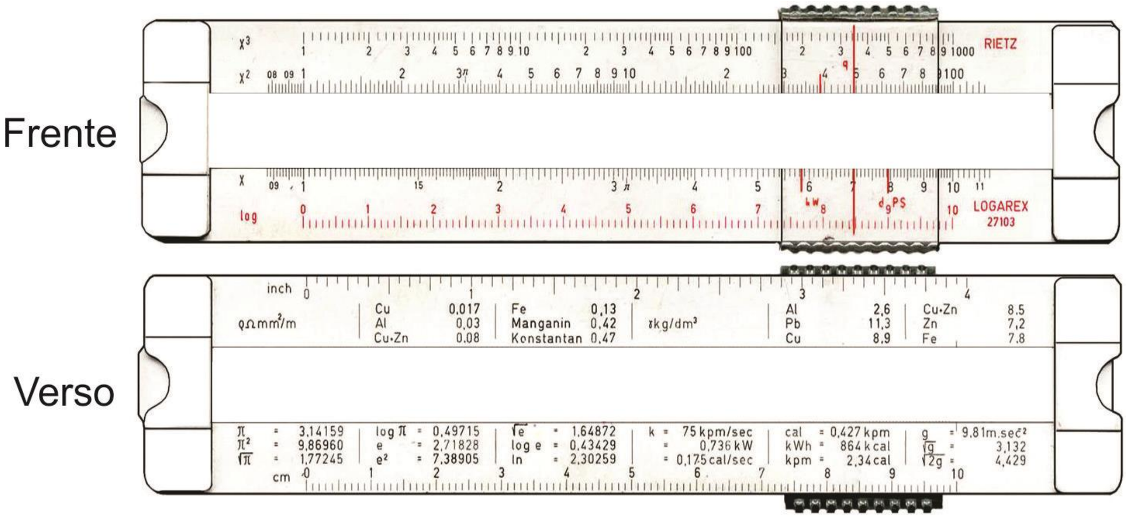
iii) o *cursor* (Figura 11) que pode ser deslocado de uma extremidade à outra e possui quatro indicações em vermelho que facilitam a localização de numerações na régua.

Figura 11 - Régua de Cálculo Linear Logarex 27103



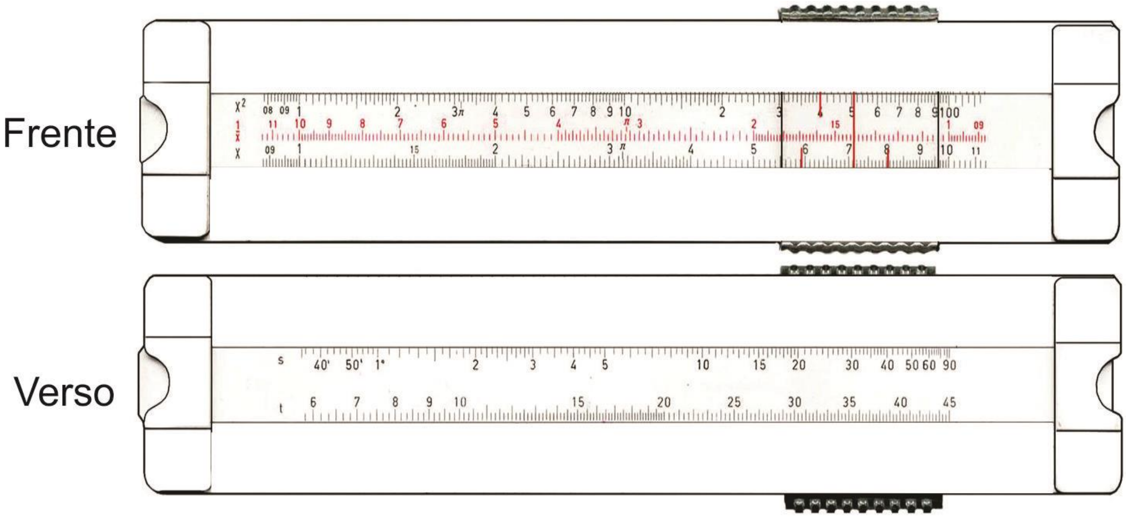
Fonte - https://www.sliderulemuseum.com/HSRC/16041.jpg

Figura 12 - *Corpo* da Régua de Cálculo Linear



Fonte - Autor

Figura 13 - *Parte deslizante* Régua de Cálculo Linear



Fonte - Autor

Na parte superior do verso do *corpo* da régua (Figura 14), encontra-se uma régua comum graduada em polegadas. Logo abaixo, está a resistividade de alguns condutores e também a densidade de alguns materiais. Na parte inferior, tem-se valores úteis em cálculos e uma régua comum graduada em centímetros.

Figura 14 - Verso da Régua de Cálculo Linear

Fonte - Autor

No verso da *parte deslizante* (Figura 15) encontram-se as escalas do *seno*, indicada com a letras *s*, e da *tangente*, indicada com a letra *t*.

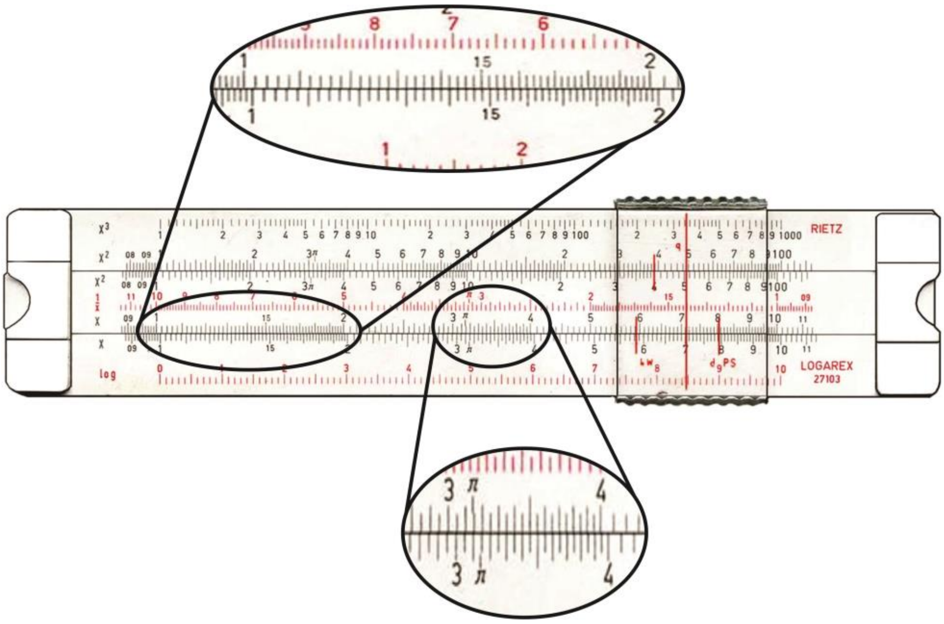
Figura 15 - Verso da *parte deslizante*

Fonte - Autor

É importante destacar que as marcações estão de acordo com a escala logarítmica. Por este motivo é possível perceber um espaçamento maior entre os números 1 e 2 quando comparado ao espaçamento entre os números 2 e 3. Ressalta-se também que as *Réguas de Cálculo* trabalham com os conceitos de *mantissa* e *característica*. De modo que, o *logaritmo* de 1 na base 10 se diferencia do logaritmo de 10 na base 10 apenas por sua *característica*, logo o número 1 também representará os números 10, 100, 1000 e assim por diante, da mesma forma que o número 2 representará os números 20, 200, 2000, etc. Valendo a regra para os demais números escritos na régua. Isto explica porque as *Réguas de Cálculo* não indicam a posição da vírgula.

Para as operações de *multiplicação* e *divisão*, usa-se a escala que está à frente do x (escala linear) no *corpo* da *Régua de Cálculo* e na *parte deslizante*. É importante observar que os intervalos estão definidos por marcações assinaladas com os números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 e 11. O intervalo entre 1 e 2 está divido em dez partes com intervalos diminuindo da esquerda para a direita. Esses intervalos são subdivididos em cinco partes, também diminuindo no mesmo sentido. Os intervalos entre 2-3 e 3-4 estão divididos em dez partes cada um com subdivisões em 2 partes, os intervalos 4-5, 5-6, 6-7, 7-8, 8-9 e 9-10 estão subdivididos em dez partes cada um e por fim o intervalo 10-11 está dividido em cinco partes (Figura 16).

Figura 16 - Divisões dos intervalos



Fonte - Autor

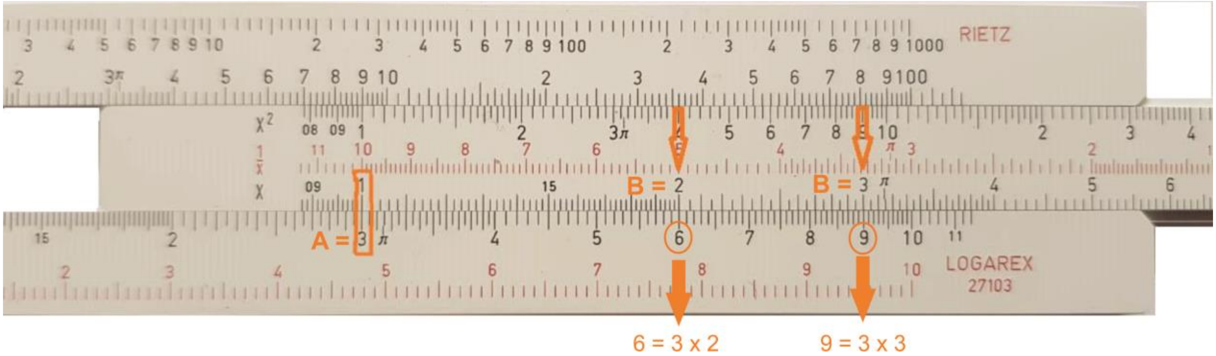
Sendo a marcação do *cursor* bastante precisa em relação aos intervalos entre dois números da escala, é possível definir frações de intervalos após alguma prática.

3.1.1. Multiplicações

Regra Básica 1: *Para efetuar o produto* $A \times B$ *deve-se deslocar a parte deslizante para a direita até que o número* 1 *esteja alinhado ao número A na parte inferior do corpo da régua, na escala linear. O resultado da operação será encontrado, também na escala linear do corpo da régua, que está alinhado ao número B da parte deslizante.*

Para encontrar o produto de um número qualquer por 3, por exemplo, faz-se com que a *parte deslizante* se desloque para a direita de modo que o 1 fique alinhado com o 3 do *corpo* na escala linear (Figura 17).

Figura 17 - 3×2 e 3×3 na Régua Linear



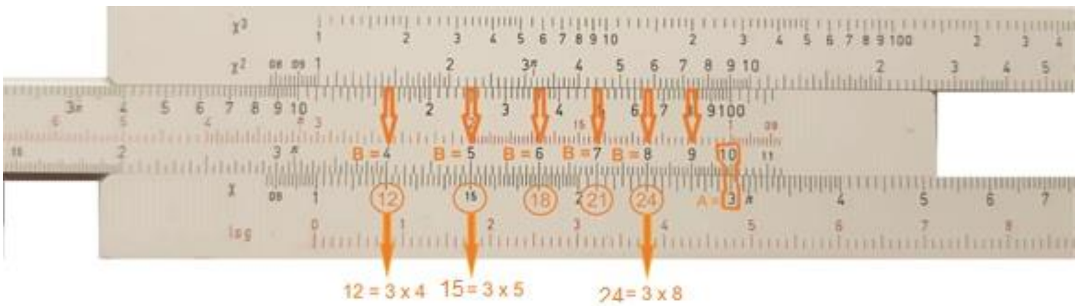
Fonte - Autor

Nota-se que o 2 da *parte deslizante* se alinha com o 6 da escala linear no *corpo* fornecendo assim o resultado do produto 2×3. Da mesma forma o 3 da *parte deslizante* se alinha com o 9 exibindo o resultado do produto 3×3.

Regra Básica 2*: Se ao alinhar o A com o 1 da parte deslizante e o B não se alinhar a nenhum outro da escala linear no corpo, deve-se deslocar a parte deslizante para a esquerda até que o 10 fique alinhado ao número A. O resultado da operação é o número da escala linear alinhado ao número B da parte deslizante.*

Para encontrar o produto de um número maior ou igual a 4 por 3, ou seja: produto cujo resultado é maior que 10, alinha-se o 10 da *parte deslizante* ao 3 do *corpo* deslizando-a para a esquerda (Figura 18).

Figura 18 - Multiplicação por 3 na Régua de Cálculo Linear, cujo resultado é maior que 10.

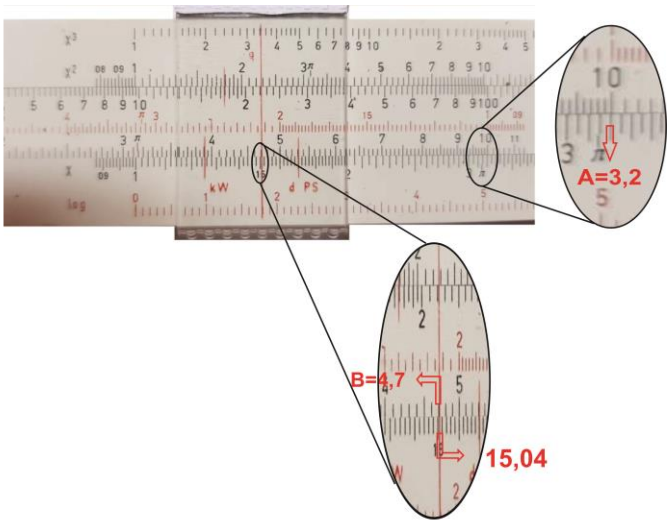


Fonte - Autor

Note que o 4 da *parte deslizante* alinhou-se com a marcação do $1{,}2$ do *corpo* que representa também o 12, expondo assim o resultado do produto de 3 por 4. O mesmo acontece com os números 5, 6, 7, 8 e 9.

Suponha agora que se deseja encontrar o produto 32×47. Como a *Régua de Cálculo* é enumerada de 1 a 10 e não indica a posição da vírgula, ao alinhar o 1 da *parte deslizante* ao $3{,}2$ (número que representa 32, 320, ...) do *corpo* deslocando a *parte deslizante* para a direita, percebe-se que o $4{,}7$ (número que representa 47, 470, ...) da *parte deslizante,* não se alinha a nenhum número do *corpo*. Desta forma desloca-se a *aparte deslizante* para a esquerda fazendo com que o 10 da mesma se alinhe ao $3{,}2$ do *corpo*. Verifica-se que o $4{,}7$ fica entre os números $1{,}5$ e $1{,}51$. Nesse caso pode-se usar o *cursor* para melhora a precisão da resposta. Fazendo com que uma das linhas do *cursor* fique sobre o $4{,}7$ é possível perceber que no *corpo*, esta linha se aproxima do $1{,}5$ sugerindo um valor igual a $15{,}04$ onde o resultado do produto desejado (32×47) é 1504 (Figura 19).

Figura 19 - Multiplicação de 32 por 47 na Régua de Cálculo Linear.



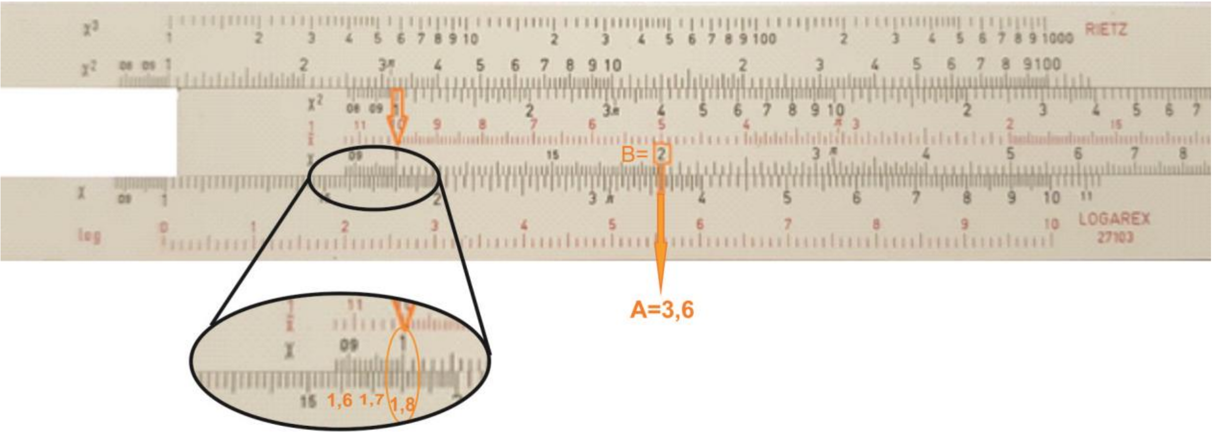
Fonte - Autor

3.1.2. Divisões

Regra Básica: *Para efetuar* $A \div B$ *deve-se deslocar o número* B *da parte deslizante para direita ou para a esquerda, alinhando-o com o número A da escala* x *no corpo* *da régua. Se for deslocado para a direita então o quociente estará alinhado ao número* 1 *da parte deslizante. Se, por outro lado, o deslocamento ocorrer para a esquerda então o quociente estará alinhado ao* 10 *da parte deslizante.*

Para efetuar-se a divisão $36 \div 2$, desloca-se a *parte deslizante* para a direita até que o número 2 fique alinhado com o número 3,6 da escala x (Figura 20).

Figura 20 - $32 \div 2$ na Régua de Cálculo Linear.

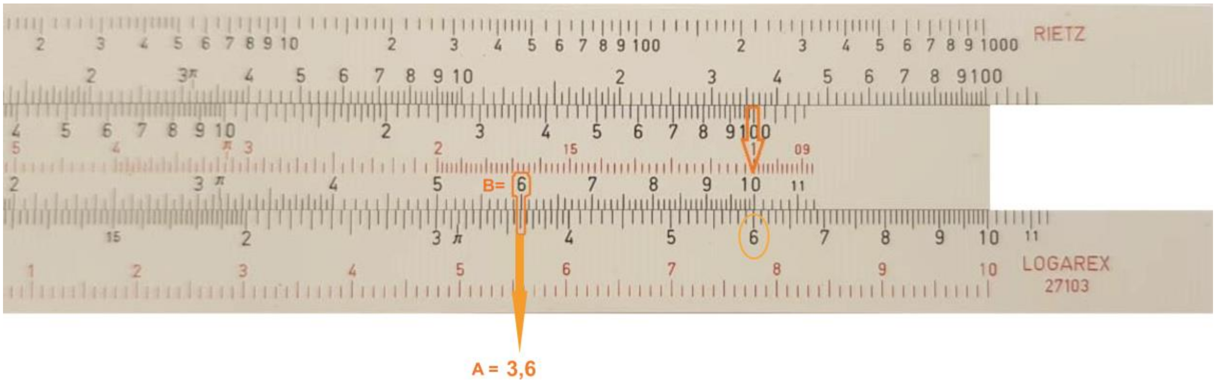


Fonte - Autor

Alinhando o 2 da *parte deslizante* ao $3{,}6$ do *corpo*, percebe-se que o número 1 da *parte deslizante* se alinhou a marcação do $1{,}8$. Desta forma, 18 é o resultado da operação.

Do mesmo modo, para realizar a divisão $36 \div 6$, deve-se deslocar a *parte deslizante* até que o 6 se alinhe ao $3{,}6$ da escala linear. Alinhando o 6 da *parte deslizante* ao $3{,}6$ do *corpo*, percebe-se que o número 10 da *parte deslizante* alinha-se ao número 6, mostrando assim o quociente desejado (Figura 21).

Figura 21 - Divisão 36 por 6 na Régua de Cálculo Linear.

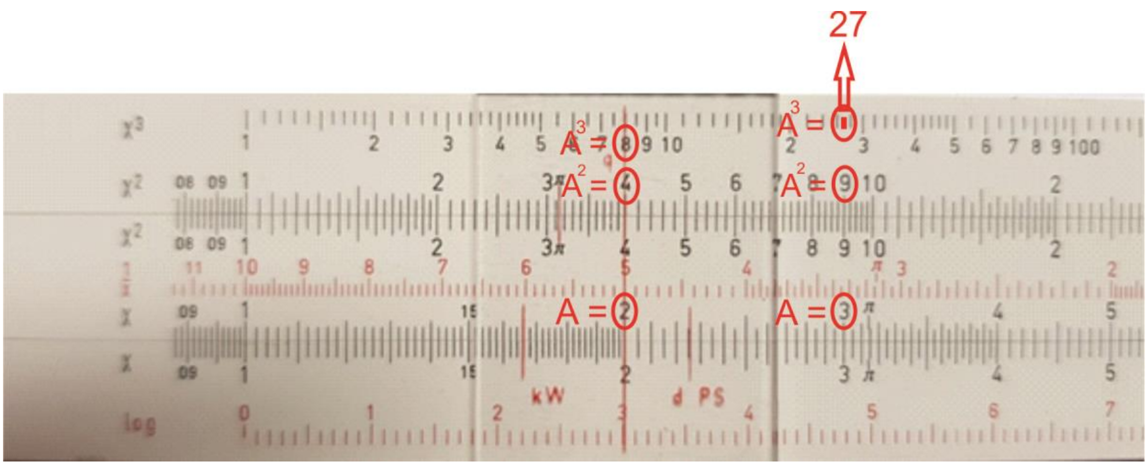


Fonte - Autor

3.1.3. Quadrados, Raízes Quadradas, Cubos e Raízes Cúbicas

Regra Básica: *Estando as escalas da parte fixa e móvel alinhadas, para encontrar A^2 e consequentemente A^3 coloca-se o traço maior do cursor sobre o valor de A na escala linear e o resultado da operação é o número alinhado com o traço sobre a escala x^2 e a escala x^3,* respectivamente*.*

Figura 22 - Calculando potências de expoentes 2 e 3.



Fonte - Autor

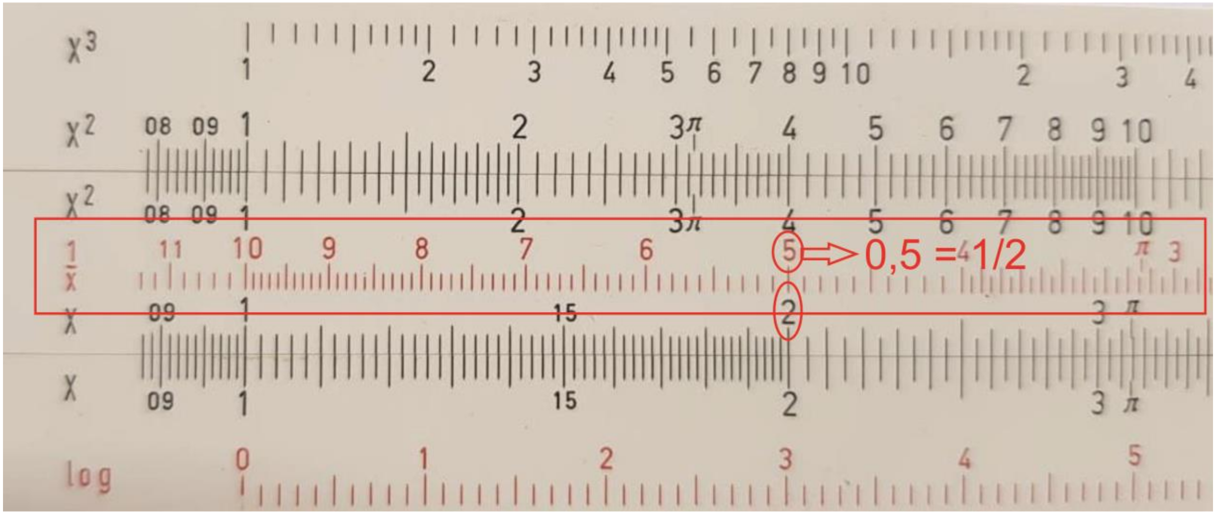
Observe que cada número da escala linear se alinha ao seu *quadrado* na escala x^2 e com seu *cubo* na escala x^3 (Figura 22), ou seja, colocando o traço maior do *cursor* sobre o 2 na escala x, este traço se alinha com o 4 na escala x^2 e com o 8 na escala x^3.

Para calcular *raízes*, basta realizar o procedimento inverso, uma vez que a radiciação é o inverso da potenciação. Desta forma, é suficiente alinhar o traço maior do *cursor* com o número que se deseja encontrar sua *raiz quadrada* (na escala x^2) ou sobre o número que se deseja encontrar sua *raiz cúbica* (na escala x^3). O resultado desta operação será encontrado na escala x.

3.1.4. Escala dos Inversos

A escala dos inversos está graduada no sentido contrário ao da escala linear. Assim, cada número tomado na escala linear, tem seu respectivo inverso, na escala $\frac{1}{x}$, quando alinhados (Figura 23). Sendo assim, o inverso de 2 é $\frac{1}{2}$. Como as demais escalas, apresenta valores inteiros, sendo necessário que se ajuste o resultado encontrado para a potência de 10 adequada.

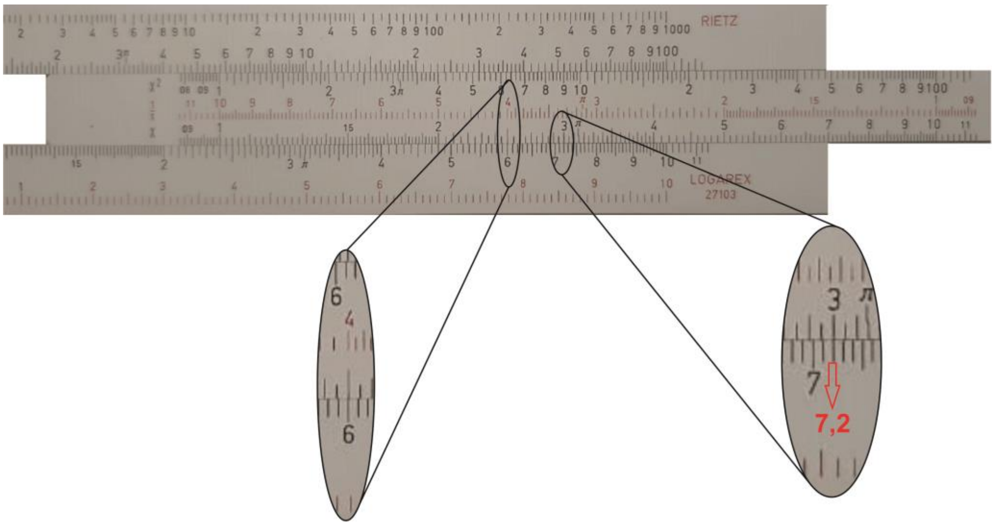
Figura 23 - Escala dos inversos na Régua de Cálculo Linear.



Fonte - Autor

A vantagem da escala dos inversos é a facilidade em se efetuar dois produtos sucessivos. Suponha que se deseja efetuar a operação $4 \times 6 \times 3$. Alinha-se o 4 da escala dos inversos ao 6 na escala linear. O resultado destes produtos está alinhado ao 3 da escala linear da *parte deslizante* (Figura 24), ou seja, $7{,}2$ que também representa na régua o 72, resultado da operação.

Figura 24 - $4 \times 6 \times 3$

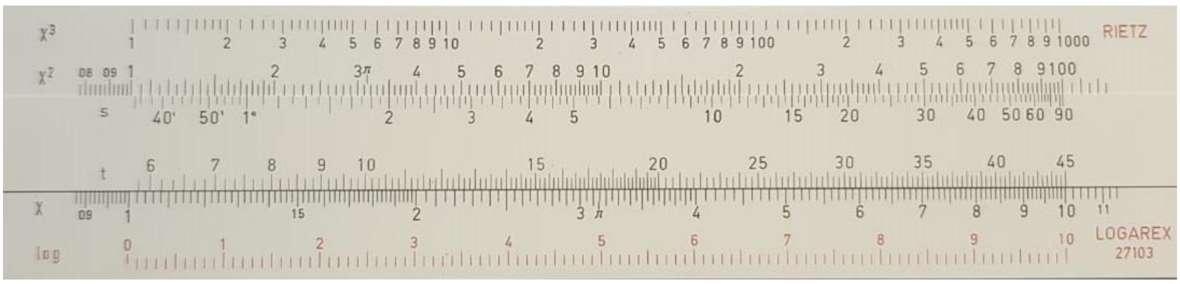


Fonte - Autor

3.1.5. Escalas Trigonométricas

Para o uso das escalas trigonométricas é necessário retirar a *parte deslizante* e encaixá-la novamente de modo que o seu verso fique na frente do *corpo* da *Régua de Cálculo* (Figura 25).

Figura 25 - Escalas Trigonométricas na Régua de Cálculo Linear.



Fonte - Autor

Perceba que na *escala dos senos* o ângulo de $90°$ ficou alinhado ao número 100 da escala x^2 que também representa o número 1. Com isto, tem-se o resultado do $sen\ 90^0$. Na *escala das tangentes*, o 45 ficou alinhado ao 10 da escala linear que também representa o 1, desta forma $tg\ 45^0 = 1$.

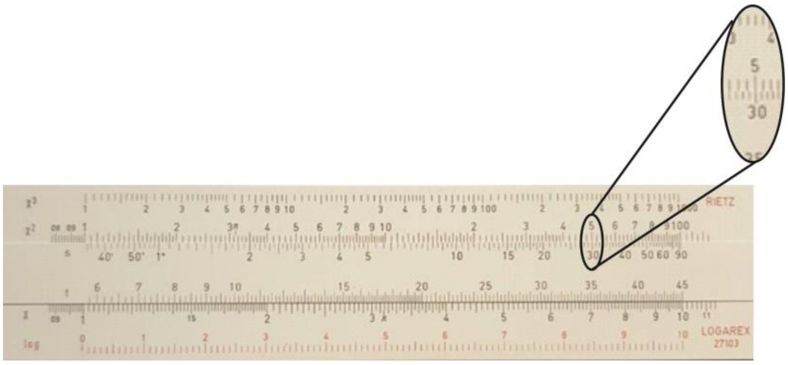
Para maior precisão dos resultados nos cálculos dos *senos* e *tangentes* de outros ângulos pode-se fazer uso do *cursor* alinhando um dos traços com o ângulo que se deseja calcular o *seno* ou a *tangente*.

A escala trigonométrica também é eficiente para calcular *cossenos*. Para isso, é necessário apenas que se tenha conhecimento da relação:

$$sen\ (90° - x) = \cos x.$$

Assim, desejando-se encontrar o valor de $\cos 60°$, encontra-se o $sen\ 30°$ que é $0{,}5$ (Figura 26).

Figura 26 – $sen\ 30°$

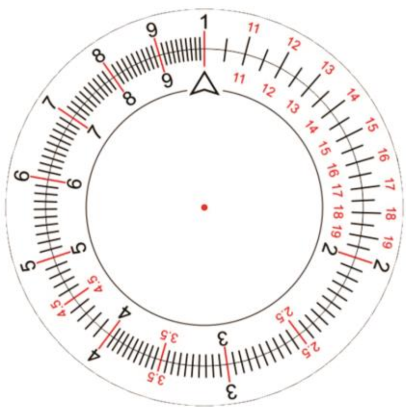


Fonte - Autor

3.2. RÉGUA DE CÁLCULO CIRCULAR

A *Régua de Cálculo Circular* é composta por dois círculos que se movem em torno de um centro comum (Figura 27).

Figura 27 - Régua de Cálculo Circular

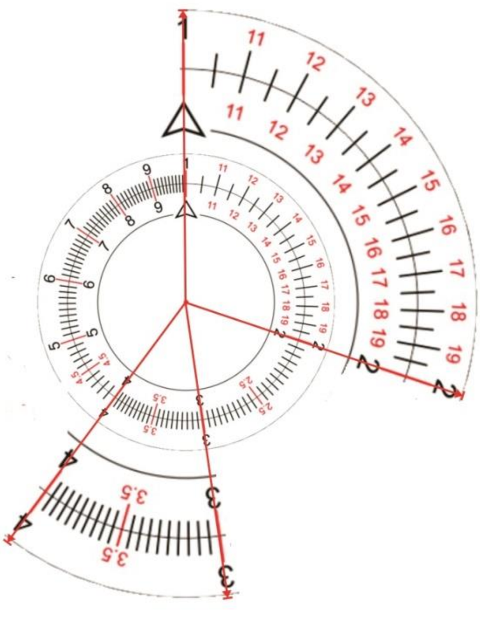


Fonte - Autor

Em cada círculo estão marcados os números de 1 a 9. Note que o 1 do círculo menor está representado por uma seta e que o comprimento do arco formado pelos números 1 e 2 (medido do 1 ao 2 no sentido horário) é maior que o arco formado pelos números 2 e 3 (medido do 2 ao 3 no sentido horário). Isto ocorre porque os números estão espaçados de acordo com valor dos seus *logaritmos*, ou seja, em escala *logarítmica*. O comprimento do arco entre os números 1 e 2 é igual ao $\log_{10} 2$, ao tempo que o comprimento do arco entre números 1 e 3 é igual ao $\log_{10} 3$. Da mesma forma foram espaçados os demais números, sempre contados no sentido horário. Vale ressaltar que as *Réguas de Cálculo Circular*, como a *linear*, trabalham com os conceitos de mantissa e característica. De modo que, o número 1 representará os números 10, 100, 1000 e assim por diante. Da mesma forma, o número 2 representará os números 20, 200, 2000... Valendo a regra para os demais números. Por este motivo as *Réguas de Cálculo Circular* também não indicam a posição da vírgula.

Perceba que os arcos dos números 1-2, 2-3 e 3-4 estão divididos em vinte espaços, ao tempo que os arcos 4-5, 5-6, 6-7, 7-8, 8-9 e 9-1 estão divididos em dez partes (Figura 28).

Figura 28 - Divisão dos Arcos



Fonte - Autor

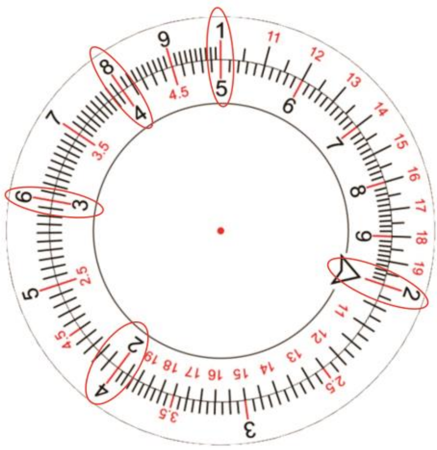
A regra utilizada para realizar multiplicações e divisões serve para outros modelos de *Régua de Cálculo*, observando apenas o cuidado com a utilização correta das escalas.

3.2.1. Multiplicações

Regra Básica: *Para efetuar o produto $A \times B$ deve-se alinhar o número 1 do círculo menor ao valor A no círculo maior. O resultado do produto é o número do círculo maior que está alinhado ao B do círculo menor.*

Suponha que se deseja fazer a multiplicação de um número qualquer por 2. Alinha-se o número 1 do círculo interno com o número 2 do círculo externo (Figura 29).

Figura 29 - Multiplicação por 2 na Régua de Cálculo Circular



Fonte - Autor

Perceba que ao alinhar-se os números 1 do círculo menor com o 2 do círculo maior, o número 2 do circulo menor (fazendo a substituição por B na regra) fica alinhado com o número 4 (resultado do produto). Assim como o 3 fica alinhado com o 6, o 4 com o 8 e o 5 alinha-se com o 1 do círculo maior, que nesse caso, também representa o 10.

É importante destacar que as multiplicações do tipo $20 \times 14 = 280$, podem ser feitas como $(2 \times 10) \times (1{,}4 \times 10) = (2 \times 1{,}4) \times (10 \times 10)$, assim, é suficiente observar que o número $1{,}4$ do círculo menor estará alinhado com o número $2{,}8$ do círculo maior, assim deslocando a vírgula duas casas para a direita, devido à multiplicação por 100, encontra-se o resultado desejado.

3.2.2. Divisões

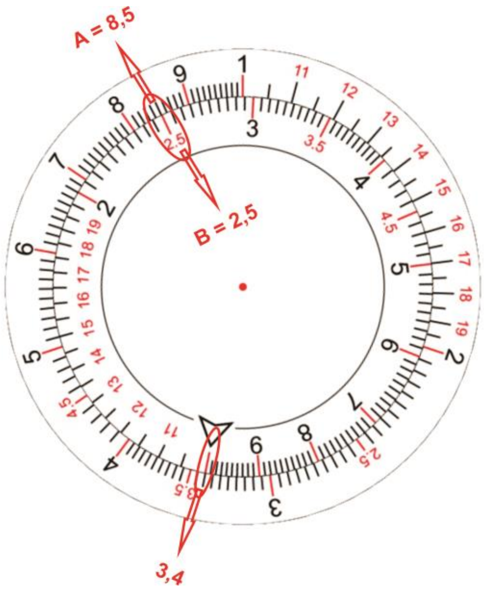
Regra Básica: *Para efetuar a divisão $A \div B$ deve-se alinhar o número A do círculo maior ao número B do círculo menor. O quociente é o resultado do círculo maior que está alinhado ao 1 do círculo menor.*

Para se efetuar a divisão de 850 por 25, alinha-se o $8{,}5$ (aqui sendo o valor A) no círculo maior ao $2{,}5$ (aqui sendo B) do círculo menor, pois:

$$\frac{850}{25} = \frac{8{,}50 \times 100}{2{,}5 \times 10} = \frac{8{,}50}{2{,}5} \times \frac{100}{10} = 3{,}4 \times 10 = 34 \qquad (6)$$

A resposta, é o número do círculo maior que está alinhado ao 1 do circulo menor, no caso $3{,}4$. Ou seja o quociente procurado é 34 (Figura 30).

Figura 30 - Divisão de 850 por 25 na Régua de Cálculo Circular



Fonte - Autor

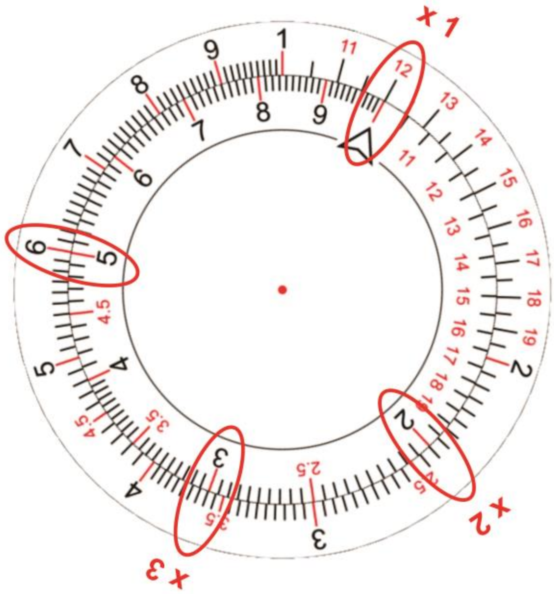
3.2.3. Multiplicações e Divisões simultâneas

A *Régua de Cálculo Circular* possui um método simples para cálculos que envolvem divisões e multiplicações simultâneas. Suponha que se deseja efetuar o seguinte cálculo

$$\frac{(3 \times 6)}{5} = 3{,}6 \tag{7}$$

Alinhe-se o número 5 do círculo menor ao 6 do círculo maior (divisão $6 \div 5$), a resposta da operação é o número do círculo maior que está alinhado com o 3 (multiplicação por 3) do círculo menor (Figura 31).

Figura 31 - Divisão e Multiplicação simultânea na Régua de Cálculo Circular



Fonte - Autor

Esse mesmo cálculo pode ser realizado também se alinhando o 5 do círculo menor ao 3 do circulo maior e obtém-se como resposta o número do círculo maior alinhado ao 6 do círculo menor, ou seja, $3{,}6$.

3.2.4. Divisão diretamente proporcional

Sabendo que as proporções são igualdades entre duas ou mais divisões, as *Réguas de Cálculo* são capazes de efetuar divisões em partes proporcionais. Suponha que se deseja dividir o número 36 em partes diretamente proporcionais aos números 2, 4 e 6. Essa divisão faz-se somando os números, $2 + 4 + 6 = 12$. Alinhando-se o número $1{,}2$ do círculo menor ao número $3{,}6$ do circulo maior $(36 \div$

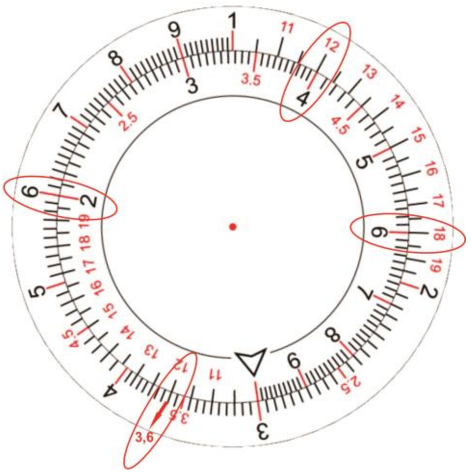
$12)$ verificam-se quais os números do círculo maior alinhados aos números 2, 4 e 6 do círculo menor (Figura 32).

Esta relação se verifica pelas propriedades das proporções, em que é possível escrever

$$\frac{36}{12} = \frac{x}{2}, \frac{36}{12} = \frac{y}{4} \text{ e } \frac{36}{12} = \frac{z}{6},$$

com as letras x, y e z representando as partes proporcionais aos números 2, 4 e 6.

Figura 32 - Divisão diretamente proporcional na Régua de Cálculo Circular

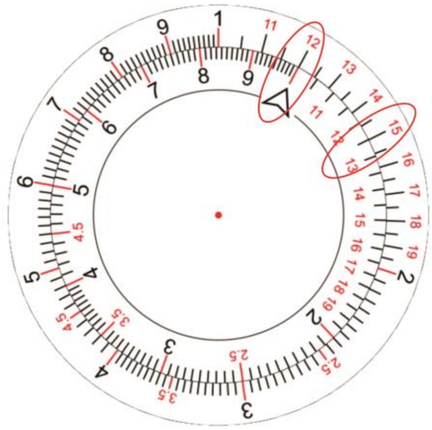


Fonte - Autor

3.2.5. Aumento e desconto percentual.

Uma vez que os cálculos de porcentagens são, na verdade, feitos através de multiplicações e divisões, a *Régua de Cálculo Circular*, pode também ser usada para este fim. Suponha que se deseja determinar o preço de um produto que custava $R\$ \, 120{,}00$ e sofreu aumento de 25%. Para obter o valor do produto após aumento alinha-se o 1 do círculo menor ao $1{,}2$ do círculo maior. O valor do produto é o número do círculo maior que está alinhado ao $1{,}25$ $(100\% + 25\% = 125\% = 1{,}25)$ do círculo menor (Figura 33).

Figura 33 - Porcentagem na Régua de Cálculo Circular



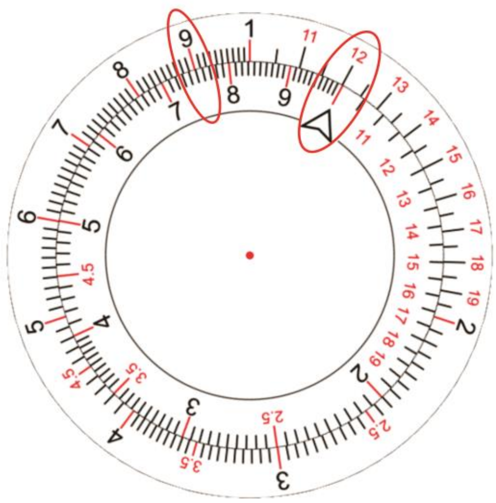
Fonte - Autor

Este processo é válido porque

$$
\begin{aligned}
120 + 25\%\ de\ 120 &= 120 + \frac{25}{100} \times 120 \\
&= 120 \times (1 + 0{,}25) \\
&= 120 \times 1{,}25
\end{aligned}
$$

De maneira análoga é possível calcular o valor do produto com desconto de 25%. Nesse caso o valor é o número do círculo maior que está alinhado ao $0{,}75$ $(100\% - 25\% = 75\% = 0{,}75)$ do círculo menor que no caso é o 9. Desta forma o novo valor do produto será de $R\$\ 90{,}00$.

Figura 34 - Cálculo de desconto



Fonte - Autor

Concluímos assim uma tentativa de explanar o uso das *Réguas de Cálculo Linear* e *Circular*. Muito ainda há por ser explorado e deixamos como indicação a referência RÉGUAS DE CALCULO[2] (2006). Neste site, há uma variedade extensa de manuais e modelos de *Réguas de Cálculo* em diversos idiomas que podem ser baixados livremente.

Diante do exposto, esperamos ter deixado nítida à importância que este instrumento teve para o desenvolvimento dos cálculos aritméticos. Ao trabalhar com esse artefato é possível explorar o conteúdo *logaritmos*, fazer uso da história da matemática contextualizando os acontecimentos do século XII, período em que foi criado o artefato e fazer uma análise histórica e social da época, além é claro de mostrar como a matemática pode ser dinâmica e atraente.

[2] https://reglasdecalculo.com/manuales.html

4. METODOLOGIA

4.1. CARACTERIZAÇÃO E SUJEITOS DA PESQUISA

A pesquisa foi realizada com dois grupos de estudantes do 3º ano do Ensino Médio de uma escola pública estadual do município de Cabrobó - PE, durante o segundo semestre do ano letivo de 2020. Cada grupo possuía 19 estudantes, sendo o primeiro denominado **turma A** e o segundo **turma B.** Ou seja, 38 estudantes com faixa etária entre 16 e 18 anos de idade, participaram desta investigação. Nas duas turmas foi apresentado o conteúdo sobre *logaritmos,* sendo que na **turma B** na maneira tradicional, ou seja, utilizando a sequência trazida nos livros didáticos. Na outra turma foi utilizada a *Régua de Cálculo* como ferramenta auxiliar na aplicação de uma sequência didática diferenciada (Seção 4.2), elaborada com o objetivo de resgatar os conhecimentos acerca deste artefato e apresentar as propriedades logarítmicas através do seu manuseio. A escolha da turma na qual foi aplicada a sequência didática foi aleatória. Foi realizado levantamento bibliográfico para aprofundamento do tema, aplicação da sequência e em seguida aplicado um questionário (Apêndice A) para a comprovação da eficácia das *Réguas de Cálculo* para o ensino de tais propriedades.

A pesquisa realizada classifica-se como *qualitativa* uma vez que o enfoque dado não esteve relacionado à representatividade numérica nas respostas apresentadas pelos estudantes nas situações que envolviam propriedades logarítmicas, com ou sem o uso das Réguas de Cálculo. Segundo Goldenberg (2007 apud Wendland, 2019, p.20) na pesquisa *qualitativa* “a preocupação do pesquisador não é com a representatividade numérica do grupo pesquisado, mas com o aprofundamento da compreensão de um grupo social, de uma organização, de uma instituição, de uma trajetória, etc”.

Este trabalho gera conhecimentos sobre como as *Réguas Cálculo* podem auxiliar o professor em sua prática em sala de aula, sua aplicação prática e seu uso para o ensino. Sua finalidade é portanto *aplicada.* Além disto, é uma pesquisa *exploratória* levando-se em consideração a busca pelo aperfeiçoamento do tema. Gil (2002, p.41) destaca que “estas pesquisas têm como objetivo principal o aprimoramento de ideias ou a descoberta de intuições”.

Com relação às estratégias de coletas de dados, que foram obtidos por meio de observações análise das respostas dos questionários, a pesquisa se classifica como uma *pesquisa de campo*. “Esta pesquisa é utilizada com o objetivo de conseguir informações e/ou conhecimento a cerca de um problema para qual procuramos uma resposta” (PRODANOV e FREITAS 2013, p. 59).

Devido às medidas de segurança contra a COVID-19, foi necessário a criação de um aplicativo/online[3] que permite sua utilização em aparelhos celulares e/ou computadores para a concretização deste trabalho. Em razão disto, fizemos a transposição de dois modelos de *Réguas de Cálculo* para a internet para que pudessem ser manuseadas pelos participantes da pesquisa.

A aplicação desta pesquisa ocorreu durante três encontros realizados remotamente nos dias 27 de novembro e 04 e 11 de dezembro de 2020, através do aplicativo Google Meet, com duração de 2 horas cada.

4.2. A SEQUÊNCIA DIDÁDICA

1° Encontro

Objetivos: Fazer com que os participantes reflitam, por meio da construção das tábuas de *logaritmos* sobre as dificuldades que existiam para se efetuar os cálculos aritméticos em uma época em que não existiam calculadoras.

Levar os estudantes a desenvolver tábuas de *logaritmos* com bases diferentes.

Perceber que multiplicações, divisões e potências com os termos de uma progressão geométrica (PG) podem ser feitos com adição, subtração e multiplicação respectivamente com os termos de uma progressão aritmética (PA) e posteriormente associado ao seu valor a partir de uma correspondência.

Tarefas: *Como você efetuaria os cálculos numéricos sem o uso das calculadoras?*
Para encontrar uma resposta, foi pedido aos estudantes que construíssem uma tabela com 20 linhas e 3 colunas, onde a primeira coluna seria preenchida com os

[3] https://reguasdecalculo.com.br/

números de 1 a 20, a segunda coluna da tabela preenchida com uma PA crescente que começasse com zero e na terceira coluna, uma PG crescente com termo inicial um. As razões das progressões ficaram a critério de cada um. Cada participante deveria construir suas sequências sem o uso de calculadoras.

Feito o preenchimento da tabela, foi sugerido aos estudantes que efetuassem as seguintes operações com suas tabelas.

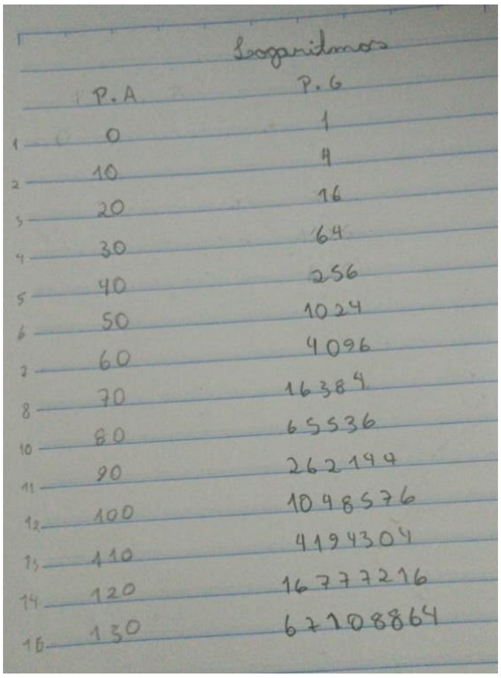
- Multiplique o termo da PG na linha 4 pelo termo na linha 10;
- Multiplique o termo da PG na linha 2 pelo termo na linha 8;
- Divida o termo da PG na linha 15 pelo termo na linha 10;
- Divida o termo da PG na linha 15 pelo termo na linha 14;
- Eleve ao quadrado o termo da PG na linha 6;

O encontro foi concluído sugerindo aos alunos que chamassem os termos da PA de *logaritmos* dos termos da PG.

Ensino: Foi exposto algumas dificuldades que a comunidade científica possuía nas operações de multiplicação, divisão, potenciação e extração de raízes que ocorreram no século XII e que levaram ao desenvolvimento da matemática, em especial dos *logaritmos*. Foi apresentado também o conceito de progressões aritméticas e geométricas, como se calcular suas razões e seus termos. Foi introduzido também o conceito de *logaritmos*.

Resultado: Percebeu-se nesta etapa que alguns estudantes tiveram dificuldades na construção da PG, dado que alguns escolheram razão quatro e os números a partir da linha dez já ficaram enormes e segundo eles difícil de serem operados. Então foi sugerido que aqueles que tivessem dificuldades nas operações preenchessem a PG até a linha quinze (Figura 35).

Figura 35 - Exemplo das progressões aritmética e geométrica preenchida até a linha quinze.



Logaritmos

P.A	P.G
0	1
10	4
20	16
30	64
40	256
50	1024
60	4096
70	16384
80	65536
90	262144
100	1048576
110	4194304
120	16777216
130	67108864

Fonte - Autor

Depois de solicitado as operações com os termos da PG uma estudante questionou o porquê da PA se elas não estão sendo utilizadas. Foi informado à estudante que poderia utilizar as progressões aritméticas para facilitar os cálculos solicitados. Novamente a estudante questionou de que forma, e foi sugerido que observassem o que acontecia com os termos da PA que estavam localizados nas linhas correspondentes aos termos da PG sugerido em cada operação. Depois de algum tempo, outra estudante percebeu que a soma dos termos da PA nas respectivas linhas correspondiam ao produto dos termos correspondentes da PG. Depois desta constatação, foi questionado se o mesmo acontecia com as divisões e as potências e de imediato dois estudantes perceberam que as divisões na PG se transformavam em subtrações na PA e que as potências em multiplicações.

Diante destas observações, foi sugerido aos estudantes chamar os termos da progressão aritmética de *logaritmos* dos termos da progressão geométrica. Para melhor compreensão do que se estava pedindo, foi apresentado aos estudantes a seguinte tabela (Tabela 2) preenchida:

Tabela 2 - Progressões

Linha	P.A	P.G
1	0	1
2	3	2
3	6	4
4	9	8
5	12	16
6	15	32
7	18	64
8	21	128
9	24	256
10	27	512
11	30	1024
12	33	2048
13	36	4096
14	39	8192
15	42	16384
16	45	32768
17	48	65536
18	51	131072
19	54	262144
20	57	524288

Fonte - Autor

Diante da analogia apresentada, foi informado aos alunos que o *logaritmo* de 1 é o 0; o l*ogaritmo* de 2 é 3 e assim sucessivamente. Desta forma, a soma do logaritmo de 512, que é 27, com o logaritmo de 64, que é 18, resulta em 45 e este é o logaritmo de 32728, resultado do produto de 512 por 64. Algo semelhante acontece com a divisão: dividir dois termos da PG equivale a subtrair os logaritmos dos termos equivalentes na PA; elevar os termos da PG a uma potência, significa multiplicar por essa potência o termo da PA; e extrair a raiz quadrada de um termo da PG (caso ela exista) significa dividir os termos correspondentes da PA. E caso a raiz não exista, então a divisão não estará na PA. Com estas observações foi encerrando o primeiro encontro.

2° Encontro

Objetivos: Apresentar aos estudantes a definição atual de *logaritmos*

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b \text{ com } b > 0,\ a > 0 \text{ e } a \neq 1$$

e a história relacionada à sua criação.

Analisar o pensamento de Napier e a construção das tábuas de *logaritmos* construídas no primeiro encontro.

Tarefa: Resolver exemplos de questões que envolvessem a definição e as propriedades dos *logaritmos* (Apêndice B).

Ensino: Foi mostrado a definição atual de *logaritmos*, suas propriedades e consequências.

i) Logaritmo do produto

$$\log_a(b\,.\,c) = \log_a b + \log_a c$$

ii) Logaritmo do quociente

$$\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$$

iii) Logaritmo da potência

$$\log_a b^n = n\,.\log_a b$$

iv) Mudança de base

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

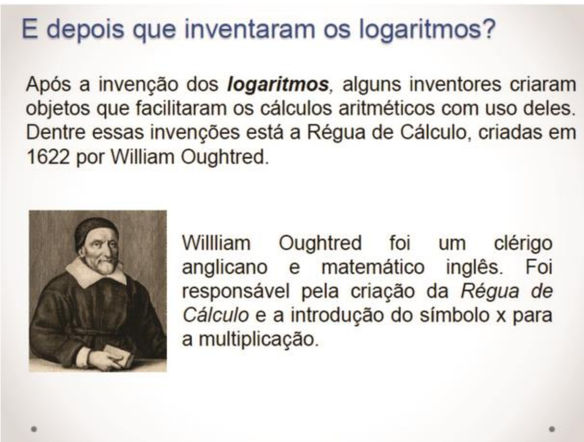
Resultado: Este encontro, dedicado a apresentar a história dos *logaritmos,* sua definição e propriedades foi marcado por queixas com relação ao conteúdo. Antes de apresentar a história, os alunos foram instigados a falar sobre o tema e foi possível ouvir relatos como: “os *logaritmos* são chatos porque as propriedades são difíceis e confundem a gente” ou ainda “ele aparece pouco no ENEM e quando aparece, é necessário saber muita matemática básica", se referindo as regras de potenciação. Questionados sobre a opinião deles com relação à importância que tinham os *logaritmos,* alguns relataram "só serve pra resolver as questões difíceis", "pra resolver as equações exponenciais que não tem como ficar com mesmo número (base)" ou ainda "pra usar em juros compostos".

3° Encontro

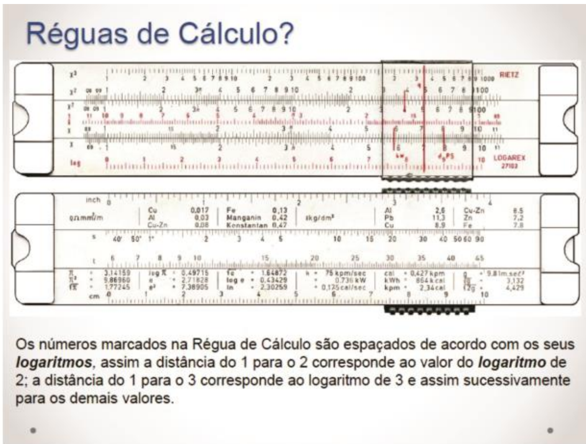
Objetivos: Contar a história das *Réguas de Cálculo* (Figura 36 a) e apresentá-las aos participantes da pesquisa (Figura 36 b).

Figura 36 - Terceiro encontro.

(a)



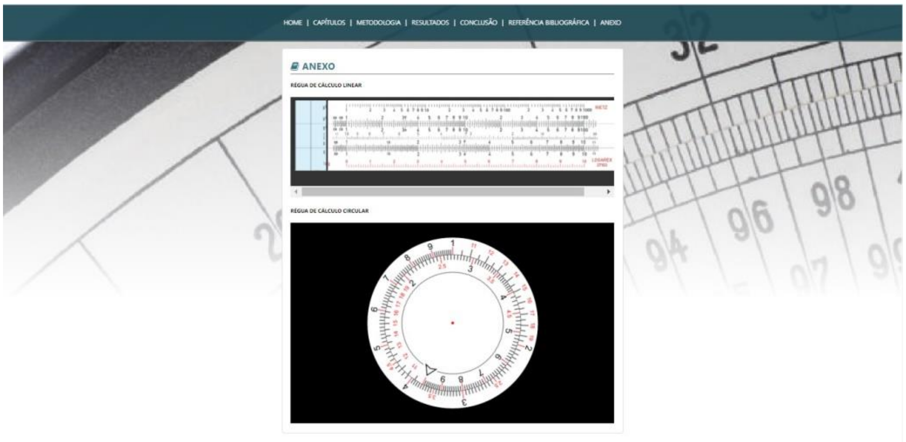
(b)



Fonte - Autor

Mostrar como esses artefatos podem ser utilizados para a realização das operações de multiplicação, divisão, potenciação e extração de raízes cúbicas e quadradas. Foram disponibilizados para os estudantes os links com as *Réguas de Cálculo* para que eles pudessem fazer o manuseio das mesmas (Figura 37).

Figura 37 – Interface do aplicativo.



Fonte - Autor

Tarefa: Para a familiarização com o manuseio das *Réguas de Cálculo* foi solicitado que os participantes da pesquisa realizassem as seguintes operações:

a) $25\ x\ 15$ c) $48 \div 4$ d) $\sqrt{225}$

b) $32\ x\ 47$ d) $\frac{6x2}{4}$ e) $\sqrt[3]{343}$

Ensino: Foi ensinado aos participantes como manusear as *Réguas de Cálculo*.

Resultado: O terceiro encontro, dedicado a apresentar as *Réguas de Cálculo,* deixou muitos estudantes curiosos com as calculadoras antigas. Vários ficaram surpresos e um relatou que nunca tinha ouvido falar em uma "aplicação prática" dos *logaritmos,* chegando a pensar que "eles serviam apenas para resolver questões".

Depois de apresentadas às réguas e como manuseá-las, foram solicitadas as operações. Das questões apresentadas (Tarefa), os participantes não sentiram dificuldades na resolução das questões nas letras *a*, *c, d* e *e.* Na realização da operação 32×47, alguns estudantes alegaram que os números envolvidos não se alinhavam na *Régua de Cálculo linear*. Neste momento foi informado que as *Réguas de Cálculo* fornecem valores aproximados dos resultados. Na realização da operação $\frac{6\times2}{4}$, vários alunos realizaram primeiro a multiplicação, levando-os a ter que realizar dois "movimentos" para encontrar a resposta final, sendo que ao realizar primeiro a divisão, com apenas um único "movimento" seria possível realizar o cálculo. Alguns questionaram se existia um modelo de *Régua de Cálculo circular* que fosse capaz de extrair raízes e foi respondido que sim, porém este modelo linear foi mais prático para a implementação do aplicativo/online.

Este encontro foi encerrado com um questionário sobre *logaritmos* (Apêndice A) para ambas as turmas, tendo por objetivo comparar o número de respostas corretas dadas pelos participantes em relação ao uso das réguas e a forma tradicional.

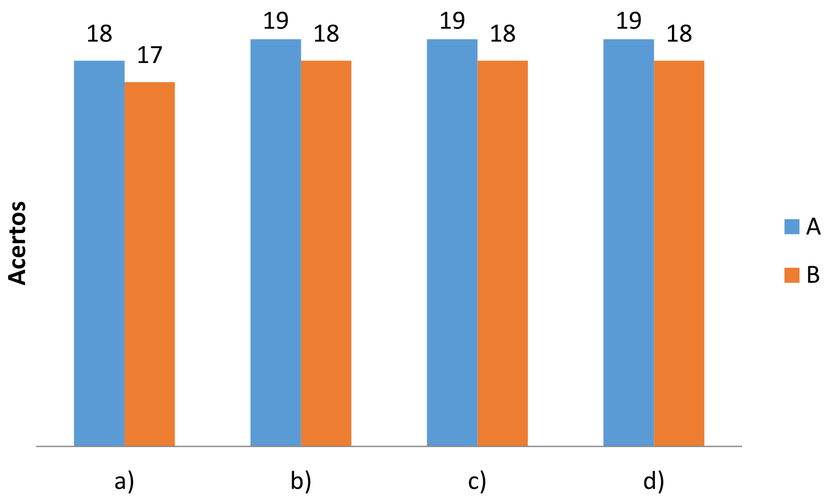
5. RESULTADOS

Neste capítulo será apresentada a análise dos resultados obtidos pelas turmas no questionário aplicado sobre os *logaritmos*.

O questionário (Apêndice A), composto de 15 questões, foi elaborado de modo a contemplar níveis diferentes de dificuldades que envolvessem a definição e as propriedades logarítmicas.

O primeiro exercício envolve conhecimentos acerca da definição de *logaritmos* com quatro itens a), b), c) e d). Os resultados, conforme o Gráfico 1, revelam resultados próximos para as duas turmas. Vale ressaltar que não houve distinção na forma como a definição foi apresentada para as duas turmas.

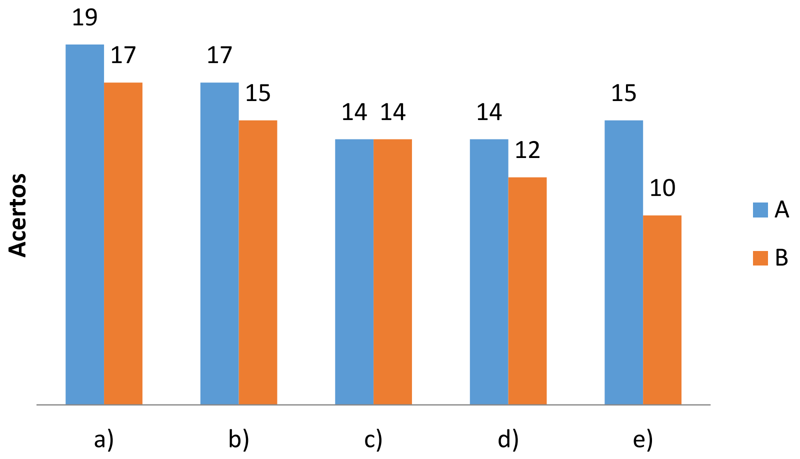
Gráfico 1 – Questão 1



A primeira questão (Gráfico 1) não apresentava problemas de interpretação, visto que foi solicitado aos estudantes apenas o uso da definição para sua solução.

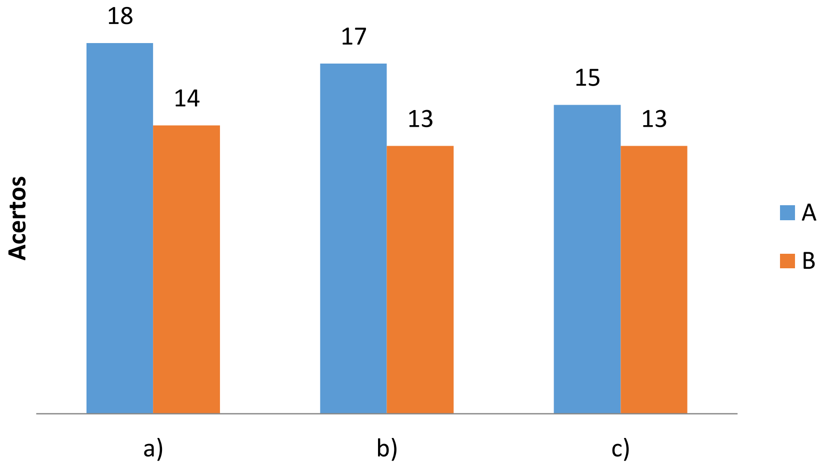
A **Questão 2** dividida em cinco itens (a, b, c, d, e), exigia o uso das propriedades logarítmicas do produto e do quociente. É possível perceber que os estudantes da **Turma A** tiveram melhores resultados (Gráfico 2). Apenas no item c, que envolvia o produto de três números, os estudantes de ambas as turmas obtiveram a mesma quantidade de acertos. Questionados, alguns estudantes da **Turma A** relataram “uma confusão” na hora de realizar a operação por três números, acreditando que este item seria resolvido com o produto de dois valores como os itens anteriores.

Gráfico 2 - Questão 2



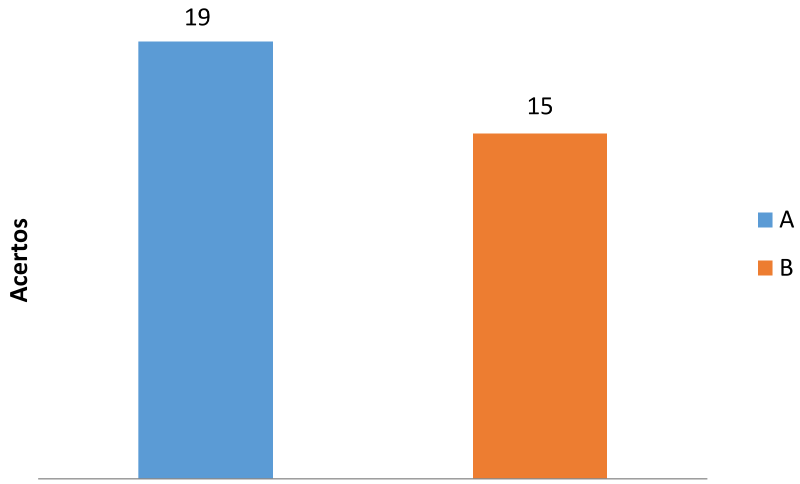
A **Questão 3**, dividia em três partes (a, b e c), exigia o uso da propriedade da potência. Novamente, os estudantes que utilizaram as *Réguas de Cálculo* obtiveram resultados melhores (Gráfico 3).

Gráfico 3 - Questão 3



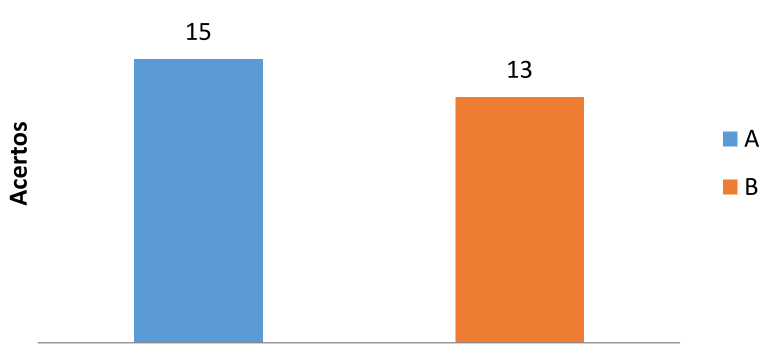
A **Questão 4** fazia uso das propriedades do produto e de mudança de base. Apesar das *Réguas de Cálculo* não fazerem uso da mudança de base, ainda assim foi possível perceber melhor desempenho dos estudantes da **Turma A**, na qual todos os estudantes acertaram (Gráfico 4).

Gráfico 4 - Questão 4



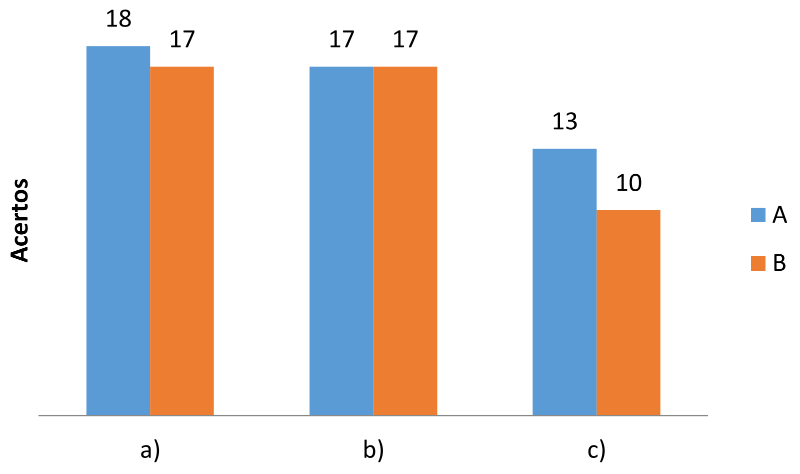
A **Questão 5** fazia uso da propriedade da potência, porém, diferente do item (c) da Questão 3, exigia ainda que o estudante encontrasse dois números cujo quociente resultasse em 0,2. A exigência de escrita desta fração na forma de uma potência de expoente negativo leva-nos a crer que este tenha sido o motivo de 4 estudantes da **Turma A** terem errado o problema (Gráfico 5)**.** Já dos 6 estudantes da **Turma B**, 1 cometeu confusão na transformação do 0,2 em fração e os outros 5 não associaram a questão com o uso da propriedade da potência.

Gráfico 5 - Questão 5



A sexta questão, divida em três partes, exigia o uso das propriedades da potência, do produto e do quociente. O destaque desta questão está no uso de incógnitas para representar os números, levando-os a adequar-se aos *logaritmos* fornecidos para chegar à resposta.

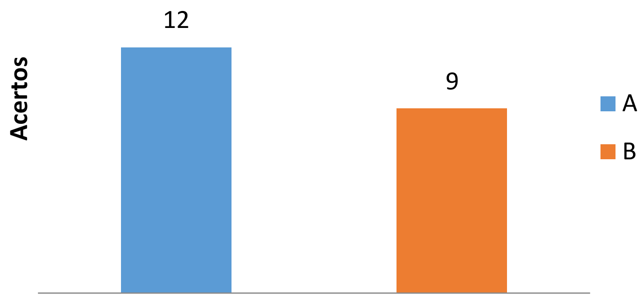
Gráfico 6 - Questão 6



Nota-se que apenas 13 estudantes da **Turma A** acertaram o item (c) (Gráfico 6). Acredita-se que o número de erros tenha sido maior neste item devido à presença de dois radicais aninhados e na quantidade de vezes em que se faz necessário o uso da propriedade da potência para chegar-se ao resultado. Dos 9 estudantes da **Turma B**, 3 cometeram erros na conversão dos radicais e os outros 6 não conseguiram associar a questão ao uso da propriedade da potência.

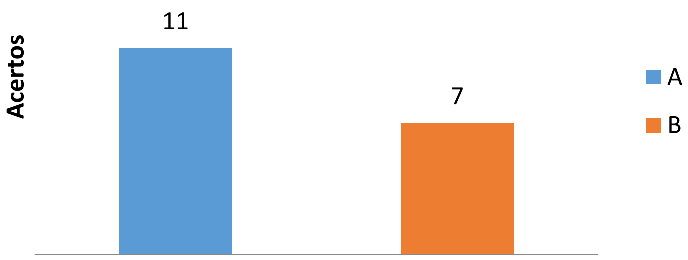
A sétima questão exigia que se identificasse a recíproca da propriedade da potência, fornecendo uma expressão no segundo membro da igualdade equivalente ao primeiro membro. O resultado demonstra dificuldades dos estudantes nesse tipo de exercício. Ainda assim é possível notar uma quantidade de acertos superior na **Turma A** (Gráfico 7).

Gráfico 7 - Questão 7



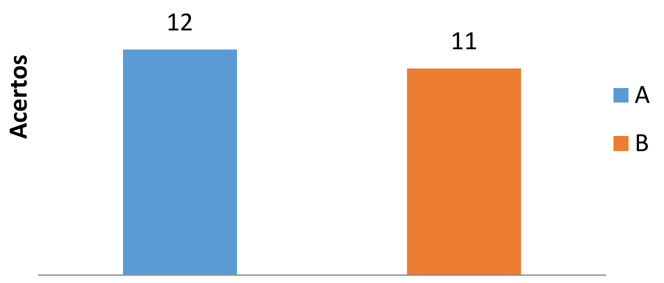
A **Questão 8**, além de exigir o uso das propriedades do produto e da potência exigia ainda escrever um valor em função de outros valores. A presença da expressão *"em função de"* ocasionou um baixo desempenho (Gráfico 8) por parte dos estudantes das duas turmas uma vez que as questões anteriores que exigiam as mesmas propriedades apresentaram desempenho satisfatório.

Gráfico 8 - Questão 8



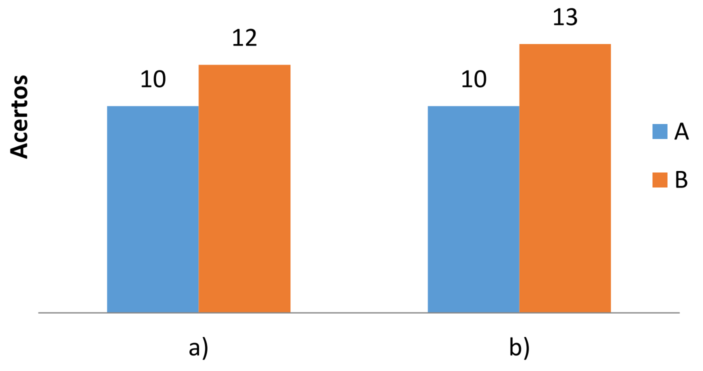
A nona questão tratava da solução de um sistema que envolvia *logaritmos*. Exigia uso da definição e da propriedade do produto gerando uma equação do segundo grau. Os resultados das duas turmas foram próximos (Gráfico 9). Os estudantes de ambas apresentaram o mesmo modelo de resolução isolando uma incógnita na primeira equação e substituindo na segunda. Isto resultou, por parte de alguns, no erro de usar a reciprocidade da propriedade do quociente e/ou no uso da definição após a aplicação da propriedade do produto.

Gráfico 9 - Questão 9



Na décima questão, dividida em duas partes, se fazia necessário o uso da propriedade de mudança de base além das propriedades do produto e da potência. A **Turma B** obteve melhores resultados (Gráfico 10). Acredita-se que esses resultados tenham acontecido pelo fato das *Réguas de Cálculo* não fazerem uso da propriedade necessária (mudança de base) para a solução da questão e isto pode ter gerado um desinteresse por parte dos estudantes da **Turma A**.

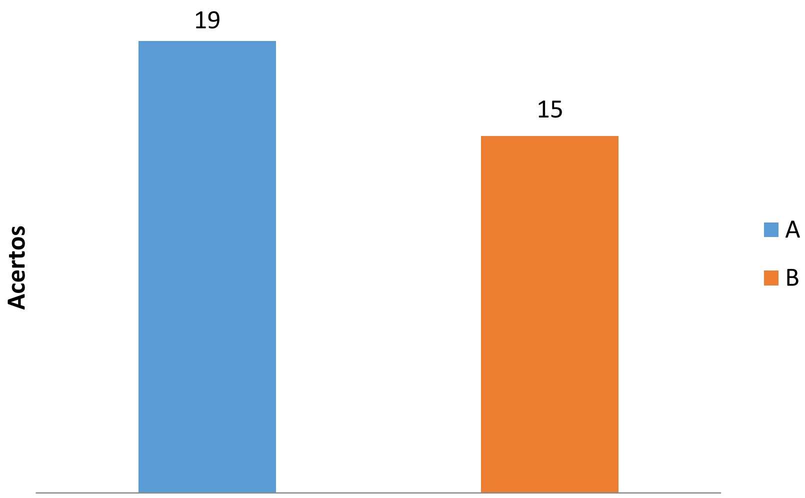
Gráfico 10 - Questão 10



As questões 11, 12, 13, 14 e 15 exigiam além dos conhecimentos sobre as propriedades logarítmicas, a interpretação dos enunciados uma vez que as soluções estão associadas a alguma informação ali apresentada.

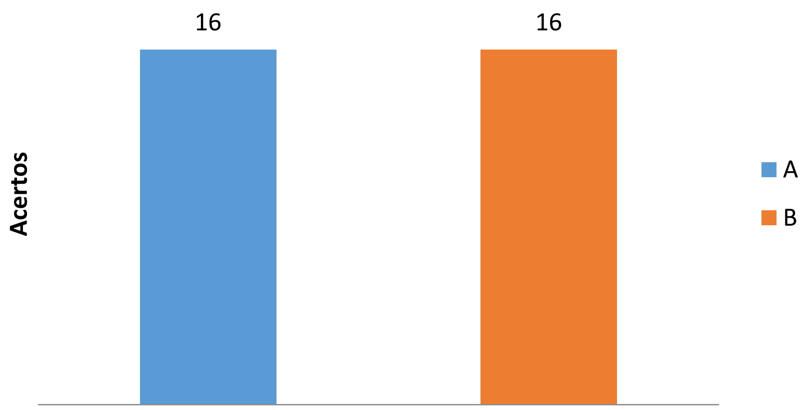
A questão 11, aplicada no ENEM de 2018, para resolvê-la era necessário o uso da definição de *logaritmos* e do conceito de razão. Abordava o uso dos *logaritmos* para medir a magnitude dos terremotos (Gráfico 11). Acredita-se que a apresentação da definição utilizando a história e as construções das tábuas (Seção 4.2) tenham dado mais significado ao uso dos *logaritmos*. Isto pode ser comprovado nos resultados da questão uma vez que todos os estudantes da **Turma A** conseguiram solucionar a questão de forma correta.

Gráfico 11 - Questão 11



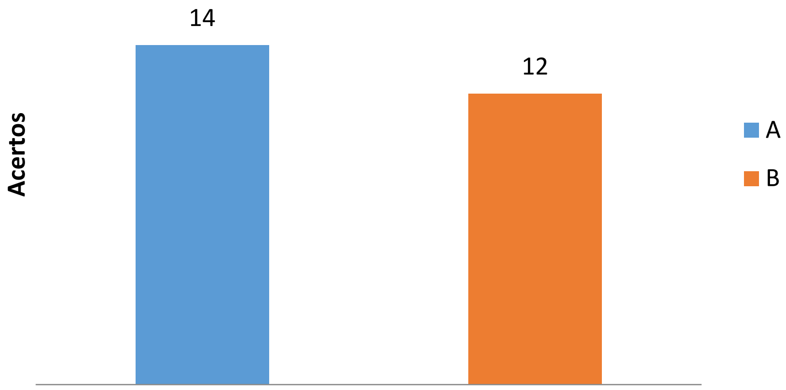
A **Questão 12** tratava do pH das soluções. Para resolução faz uso das propriedades do produto, do quociente e da potência. O uso da quantidade de propriedades causou confusão na solução da questão (Gráfico 12).

Gráfico 12 - Questão 12



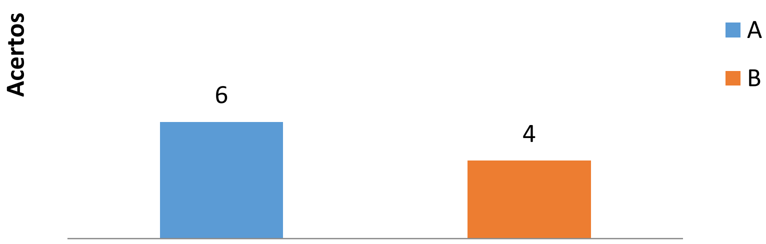
A **Questão 13** exige o uso da definição de *logaritmos* para sua solução e trata da evolução de uma planta. É dado um modelo matemático da altura em função do tempo e a questão pede para encontrar o valor deste tempo para uma altura dada. Alguns estudantes acreditaram que o valor apresentado era para ser substituído no lugar do tempo causando os erros na solução (Gráfico 13).

Gráfico 13 - Questão 13



A décima quarta questão, aplicada no ENEM de 2018, teve um baixo índice de acertos (Gráfico 14) por parte das duas turmas. A questão exigia, além da interpretação e uso das propriedades logarítmicas, conhecimentos sobre cálculo de porcentagens. A presença do *logaritmo* neperiano [4]e da exigência do cálculo de desconto foram os responsáveis pelo baixo desempenho das turmas.

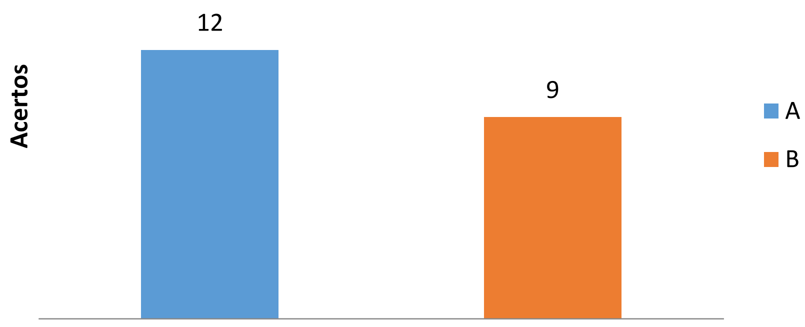
Gráfico 14 - Questão 14



[4] Algo desnecessário para alunos do ensino básico e médio.

A décima quinta questão também exigia conhecimentos sobre porcentagens, porém, segundo os estudantes era mais fácil de ser interpretada. A questão tratava da temperatura de ligas metálicas e exigia o uso de *logaritmos* para a solução de equações exponenciais. Os resultados mostraram melhor desempenho na **Turma A** (Gráfico 15).

Gráfico 15 - Questão 15



Apesar de melhores que os resultados da questão anterior, ainda é possível notar deficiência na solução de equações exponenciais que envolvem o uso dos *logaritmos* e acredita-se que este tenha sido o principal motivo para o número de erros.

6. CONCLUSÕES

Os *logaritmos* são considerados, entre os conteúdos de matemática que integram o currículo do Ensino Médio, um dos que os estudantes mais apresentam dificuldades (FERREIRA 2006 apud SILVA 2019). Com isso, a busca por estratégias que facilitem a aprendizagem desse conteúdo se faz necessária. Como uma das alternativas apresentamos neste trabalho as *Réguas de Cálculo*, instrumento histórico que auxilia na contextualização, justificativa e utilização dos *logaritmos* de forma simples, rápida e útil.

Este trabalho atinge o objetivo de resgatar o conhecimento acerca das *Réguas de Cálculo* trazendo para professores e alunos material extra, útil no processo de ensino e aprendizagem, proporcionando conhecimento matemático incorporado através do seu manuseio, que permite explicações a respeito da criação dos *logaritmos* e das próprias réguas.

Nos resultados alcançados é possível notar melhor desempenho dos alunos da **Turma A,** que usaram a sequência, em quase todas as questões, sendo apenas a questão 10 com melhores resultados na **Turma B** e na questão 12 com o mesmo número de acertos. Acreditamos que isso se deve à necessidade do uso da propriedade mudança de base para sua solução que, apesar de ter sido ensinada, não chamou atenção dos estudantes como as demais, uma vez que não tinha aplicação no manuseio das réguas. Desta forma, com a aplicação da sequência foi constatado para os alunos da **Turma A** melhor compreensão do conteúdo e significativa melhora na participação nas aulas.

Acreditamos ser razoável afirmar que o uso das *Réguas de Cálculo* torna as aulas mais participativas devido ao seu manuseio e eficiência em seus cálculos. Ao escolher utilizar as réguas o professor proporciona aos alunos à aplicação das propriedades logarítmicas e ainda expõe os acontecimentos históricos que levaram ao desenvolvimento do conteúdo e do instrumento.

Algumas dificuldades foram encontradas para a realização desta pesquisa. A exemplo disto, destacamos o momento pelo qual estamos passando devido à pandemia que reduziu o número de participantes devido o acesso à internet, meio alternativo que foi utilizado. Os distanciamentos também dificultam o trabalho de observação do professor, uma vez que, de forma remota não havia como acompanhar a realização das atividades.

Por fim, pretendo fazer uso das *Réguas de Cálculo* para o ensino das propriedades logarítmicas nas próximas turmas em que for lecionar o conteúdo. Além disso, como professor, almejo também explorar a construção física destes artefatos, pois acredito que podem abranger outros conteúdos matemáticos. Dito isto, tenho a intenção de aprofundar meus conhecimentos relacionados às réguas tendo em vista tornar as aulas mais dinâmicas, interativas e atraentes.

REFERÊNCIAS

ALVES, Verusca Batista; PEREIRA, Ana Carolina Costa. A matemática por trás da construção física e graduação da régua de cálculo circular. **Caminhos da Educação Matemática em Revista/Oline,** v.8, n.2, 2018. ISSN 2358-4750.

ALVES, Verusca Batista; SILVA, Hosana de Fátima Melo; MARTINS, Eugeniano Brito. A Régua de Cálculo Circular como Instrumento Mediador no Ensino de Logaritmos: Descrição e Construção. *In:* ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 12., 2016, São Paulo – SP. **Anais [...]** São Paulo: Universidade Cruzeiro do Sul, 2016. ISSN: 2178-034X.

ÁVILA, Geraldo. Como se Constrói uma Tábua de Logaritmos. **Revista Professor de Matemática**. Rio de Janeiro, Ed.26, 2º semestre de 1994.

BRASIL, Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais: terceiro e quarto ciclos (PCN)**. Brasília: Secretaria de Educação Fundamental, 1998.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC)**. Brasília, 2018. 578 p.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. **Orientações Curriculares Para o Ensino Médio**. Ciências da Natureza, Matemática e Suas Tecnologias. Secretaria da Educação Básica. Brasília. 2006.

BRASIL. **Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCN+)**. **Ciências da Natureza e Matemática e suas Tecnologias**. Brasília, 2006.

D'AVILA, Cássia Gonçalves. **Uma estratégia didática para o ensino de funções exponenciais e logarítmicas.** 2018. 98f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande (FURG), Programa de Pós-Graduação em Matemática, Rio Grande - RS, 2018.

DIAS, Richelle Kehrle de Paula; MEIRA, Gilmara Gomes; SILVA, Alexandra Barbosa. Importância da Utilização do Material Manipulável nas Aulas de Matemática: O Caso do Jogo "Trilha dos Inteiros". *In:* ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 12., 2016, São Paulo – SP. **Anais [...]** São Paulo: Universidade Cruzeiro do Sul, 2016. ISSN: 2178-034X.

EDWARDS, Charles Henry. **The historical development of the calculus.** New York**:** Springer-Verlag, 1979. Bibliografia: p. ISBN-13: 978-0-387-94313-8. DOI: 10.1007/978-1-4612-6230-5.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática.** Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas-SP: Editora da Unicamp, 2004. 844 p.

FERREIRA, Ronize Lampert. **Uma sequencia de ensino para o estudo de logaritmos usando a Engenharia Didática.** 2006. 149 f. Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Ensino de Física e de Matemática) – Centro Universitário Franciscano de Santa Maria, Santa Maria – RS, 2006.

FONSECA, Paulo Henrique Souza; PEREIRA, Ana Caroline Costa. **A RÉGUA DE CÁLCULO E SEU POTENCIAL NO ENSINO DE CONTEÚDOS MATEMÁTICOS.** *In:* Semana de Educação da Universidade Estadual do Ceará, 22., 2015, Fortaleza. **Anais [...]** Fortaleza: UECE, 2015.

FONSECA, Paulo Henrique Souza; PEREIRA, Ana Caroline Costa. A Régua de Cálculo e seu Potencial no Ensino de Conteúdos Matemáticos. *In:* SEMANA DE EDUCAÇÃO DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ, 22., 2015, Fortaleza – CE. **Anais[...]** Fortaleza: Universidade Estadual do Ceará (UECE), 2015.

GIL, Antônio Carlos. Como elaborar projetos de pesquisa. 4 ed. São Paulo –SP: Atlas, 2002. ISBN 85-224-3169-8.

GIOVANNI, José Ruy; BONJORNO, José Roberto; GIOVANNI JÚNIOR, José Ruy. Matemática fundamental: uma nova abordagem: ensino médio. São Paulo: FTD, 2002.

LAKATOS, Eva Maria; MARCONI, Marina de Andrade. Fundamentos de metodologia científica. 5 ed. São Paulo –SP: Atlas, 2003.

LIMA, Elon Larges. **Logaritmos.** 4ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2010. 118 p.

MAOR, Eli. **e: A história de um número.** Tradução: Jorge Calife. 4ª ed. Rio de Janeiro: Record, 2008. 291 p.

MARTINS, Eugênio Brito; PEREIRA, Ana Carolina Costa; FONSECA, Paulo Henrique Souza. Descobrindo o Conceito de Logaritmo por meio da Construção da Régua de Cálculo Linear. **Revista Eletrônica Debates em Educação Cientifica e Tecnológica.** V.6, N.3, p 47-65, setembro, 2016.

NAPIER, John. **Rabdologiae, Seu Numerationis Per Virgulas Libri Duo**: cum appendice de expeditíssimo Multipli cationes promptuario, quibus acessit e arithmeticea localis liber unus. Edinburg: Andreas Hart, 1617. Disponível em: http://archive.org/details/rabdologiae00napi . Acesso em: 06 de março de 2021.

OLIVEIRA, Maxwell Ferreira de. Metodologia científica: um manual para realização de pesquisas em Administração. Universidade Federal de Goiás. Catalão: UFG, 2011, 72 p.

OSÓRIO, Gerciane das Neves Lima. **O uso de materiais manipuláveis no ensino de princípio multiplicativo e na construção de gráficos de barras e de setores no ensino fundamental.** 2019. 78 f. Dissertação (Mestrado Profissional em

Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Universidade Federal do Vale do São Francisco, Campus Juazeiro – BA, 2019.

PARANÁ, Secretaria de Educação. **O professor e os desafios da escola pública paranaense, 2012.** Secretaria de Estado da Educação. Superintendência de Educação. Programa de desenvolvimento educacional – Curitiba: SEED – Pr, 2014.

PEREIRA, Ana Carolina Costa. **Aspectos históricos da Régua de Cálculo para construção de conceitos matemáticos.** Vol. 1. São Paulo: Livraria da Física, 2015.

PINHEIRO, Daniela Macêdo Damaceno. **A importância da utilização de material concreto no ensino da matemática: uma experiência no ensino de funções.** 2014. 115 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Mestrado Profissional em Rede Nacional, Vitória da Conquista - BA, 2014.

PRADANOV, Cleber Cristiano; FREITAS, Ernani César de. Metodologia do trabalho científico: métodos e técnicas de pesquisa e do trabalho acadêmico. 2 ed. Novo Hamburgo: Feevale, 2003. ISBN 978-7717-158-3.

RAMOS, Simone Sotozono Alonso. **Logaritmos: uma abordagem didática. 2015. 98f.** Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Federal do Paraná. Curitiba – PR, 2015.

REAL, Luana Pereira Villa; RITTER, Denise; BULEGON, Ana Marli. O uso de Jogos para o Ensino de Logaritmos. *In:* Jornada Nacional de Educação e Seminário Interdisciplinar PIBID, 13., 6., 2016. Santa Maria. **Anais [...]** Santa Maria: UFN, 2016. p.1 – 10. ISSN 2175 – 2435.

RODRIGUES, Marta Rejane Reis. **O uso de material concreto para estimular a aprendizagem do conteúdo de frações numa turma da primeira série do ensino médio.** 2016. 28 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Universidade Federal do Vale do São Francisco, Campus Juazeiro – BA, 2016.

SANTOS, Hebson Almeida dos. **Logaritmos: da teoria à aplicação.** 2017. 97f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Pará, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Belém – PA, 2017.

SILVA, Lucimar Lima. Logaritmos: Uma abordagem didática. *In:* Seminário Sul – Mato-Grossense de Pesquisa em Educação Matemática (SESEMAT), 13., 2019, Campo Grande – MS. **Anais [...]** Campo Grande: UFMS, 2019, p.102 – 111. e-ISSN: 2448-2943.

SOARES, Evanildo Costa. **Uma investigação histórica sobre os logaritmos com sugestões didáticas para a sala de aula.** 2011. 141f. Dissertação (Mestrado em

Ensino de Ciências e Naturais e Matemática) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal – RN, 2011.

STEVIN, Simon. **De Thiende**. Leyden: Chriftoffel Plantijn, 1585. Disponível em: http://www.dbnl.org/tekst/stev001thie01_01/stev001thie01_01_scans.pdf. Acesso em 05 de maio de 2021.

TANONAKA, Elisa Missae. **Régua de Cálculo: Uma contribuição de Willian Oughtred para a Matemática.** 2008. 103f. Dissertação (Mestrado História da Ciência) – Pontifícia Universidade de São Paulo (PUC), São Paulo – SP, 2008.

VIDIGAL, Carlos Eduardo Ladeira. **(Re)significando o conceito de logaritmo.** 2014. 133f. Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte – MG, 2014.

WENDLAND, Caroline Vanessa. **Logaritmo e História da Matemática: Elaboração de um Material Paradidático.** Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade do Estado de Santa Catarina (UDESC) no Centro de Ciências Tecnológicas (CCT) – Universidade Estadual de Santa Catarina, Joinville, 2019.

APÊNDICE A – Lista de Exercícios

1°) Usando a definição de logaritmos, calcule o valor dos seguintes logaritmos:

$a)$ $\log_2 16$ b) $\log_5 125$ c) $\log_8 16$ d) $\log_{36} \sqrt{6}$

2°) Considerando $\log 2 = 0{,}301$; $\log 3 = 0{,}477$; $\log 5 = 0{,}699$ e $\log 7 = 0{,}845$ calcule:

$a)$ $\log 15$ b) $\log 14$ c) $\log 42$ d) $\log 0{,}6$ e) $\log 1{,}5$

3°) Calcule os seguintes logaritmos considerando $\log_3 2 = 0{,}63$

$a)$ $\log_3 8$ b) $\log_3 \frac{1}{16}$ c) $\log_3 \sqrt[3]{4}$

4°) Considerando $\log 2 = 0{,}3$ e o $\log 3 = 0{,}4$, calcule $\log_2 6$.

5°) Considerando que $\log_2 5 \cong 2{,}32$, obtenha o valor de $\log_2 \sqrt[3]{0{,}2}$

6°) Sejam x, y e b reais positivos, $b \neq 1$. Sabendo que $\log_b x = -2$ e $\log_b y = 3$, calcule o valor de:

a)$\log_b \left(\frac{y^2}{\sqrt{x}}\right)$ b)$\log_b \left(\frac{x.\sqrt{y}}{b}\right)$ c) $\log_b \sqrt{\sqrt{x}.\,y^3}$

7°) Qual o valor da expressão $\frac{1}{3}\,.\log_{15} 8 + 2\,.\log_{15} 2 + \log_{15} 5 - \log_{15} 9000$?

8°) Sejam $\log 2 = a$ e $\log 5 = b$. Escreva $\log 40$ em função de a e b.

9°) Sabendo que $x > 0$ e $y > 0$ resolva o sistema

$$\begin{cases} x + y = 110 \\ \log x + \log y = 3 \end{cases}$$

10°) Sendo $\log_x a = 6$; $\log_x b = 4$ e $\log_x c = 2$, calcule:

$a)$ $\log_c \sqrt{abc}$ b) $\log_c (a^3\,.\,b^2)$

11°) (ENEM 2018) Em março de 2011, um terremoto de 9,0 graus de magnitude na escala Richter atingiu o Japão matando milhares de pessoas e causando grande destruição. Em janeiro daquele ano, um terremoto de 7,0 graus na escala Richter atingiu a cidade de Santiago Del Estero, na Argentina. A magnitude de um terremoto, medida A pela escala Richter, é

$$R = \log\left(\frac{A}{A_0}\right),$$

em que A é a amplitude do movimento vertical do solo, informado em um sismógrafo, A_0 é uma amplitude de referência e log representa o logaritmo na base 10.

Disponível em: http://earthquake.usgs.gov. Acesso em: 28 fev. 2012 (adaptado).

A razão entre as amplitudes dos movimentos verticais dos terremotos do Japão e da Argentina é:

a) 1,28 b) 2,0 c) $10^{\frac{9}{7}}$ d) 100 e) $10^9 - 10^7$

12°) (UFMG) O pH de uma solução aquosa é definido pela expressão

$$pH = -\log[H^+],$$

em que $[H^+]$ indica a concentração, em mol/l, de íons de hidrogênio na solução e log, o logaritmo na base 10. Ao analisar uma determinada solução, um pesquisador verificou que, nela, a concentração de íons de hidrogênio era $[H^+] = 5{,}4 \,.\, 10^{-8}\, mol/l$. Para calcular o pH dessa solução, ele usou valores aproximados de $0{,}30$, para $\log 2$, e de $0{,}48$, para $\log 3$. Então, o valor que o pesquisador obteve para o pH dessa solução foi:

a)7,26 b) 7,32 c) 7,58 d) 7,74

13°) (UFCar-SP) A altura média do tronco de certa espécie de árvore, que se destina à produção de madeira, evolui, desde de que é plantada, segundo o seguinte modelo matemático:

$$h(t) = 1{,}5 + \log_3(t+1),$$

com $h(t)$ em metros e t em anos. Se uma dessas árvores foi cortada quando seu tronco atingiu 3,5 metros de altura, o tempo (em anos) transcorrido do momento da plantação até o corte foi de:

a) 9 b) 8 c) 5 d) 4 e) 2

14°) (ENEM 2018) Um contrato de empréstimo prevê que quando uma parcela é paga de forma antecipada, conceder-se-á uma redução de juros de acordo com o período de antecipação. Nesse caso, paga-se o valor presente, que é o valor, naquele momento, de uma quantia que deveria ser paga em uma data futura. Um valor presente P submetido a juros compostos com taxa i, por um período de tempo n, produz um valor futuro V determinado pela fórmula

$$V = P\,.\,(1 + i)^n$$

Em um contrato de empréstimo com sessenta parcelas fixas mensais, de R$ 820,00, a uma taxa de juros de 1,32% ao mês, junto com a trigésima parcela será paga antecipadamente uma outra parcela, desde que o desconto seja superior a 25% do valor da parcela.

Utilize 0,2877 como aproximação para $\ln\left(\frac{4}{3}\right)$ e 0,0131 como aproximação para In (1,0132).

A primeira das parcelas que poderá ser antecipada junto com a 30ª é a:

a) 56ª b) 55ª c) 52ª d) 51ª e) 45ª

15°) Uma liga metálica sai do forno a uma temperatura de 3 000 °C e diminui 1% de sua temperatura a cada 30 min.

Use 0,477 como aproximação para $\log_{10}(3)$ e 1,041 como aproximação para $\log_{10}(11)$.

O tempo decorrido, em hora, até que a liga atinja 30 °C é mais próximo de:

a) 22 b) 50 c) 100 d) 200 e) 400

APÊNDICE B – Exemplos utilizados nas aulas

Definição:

1. Usando a definição de logaritmos calcule:

a) $\log_6 36$ b) $\log_{10} 0{,}01$ c) $\log_2 8$ d) $\log_{\frac{1}{4}} 2\sqrt{2}$

2. Determinar o valor de $\log 1{,}4$ sabendo que $10^{0{,}301} = 2$ e $10^{0{,}845} = 7$.

Propriedades:

3. Sabendo que $\log 2 = 0{,}301$ e $\log 3 = 0{,}477$, calcule:

a) $\log 6$ b) $\log 5$ c) $\log 2{,}5$

4. Sendo $\log 2 = 0{,}301$ e $\log 3 = 0{,}477$, encontre os valores de:

a) $\log 7{,}2$ b) $\log \sqrt{3}$

4. Suponha que um carro sofra uma desvalorização de 10% ao ano. Em quanto tempo o valor do carro se reduzirá a um terço do valor inicial? (Use $\log 3 = 0{,}477$)

5. Considerando $\log 2 = 0{,}3$ e $\log 3 = 0{,}4$, determine o valor de $\log_2 6$.

6. Resolva a equação $\log_2 x + \log_4 x + \log_{16} x = 7$ sabendo que $x > 0$.