



Universidade Federal do Acre  
Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas  
Programa de Mestrado Profissional em  
Matemática em Rede Nacional



Elipse no Plano de Minkowski

Damião Alves da Silva

Rio Branco - AC  
Agosto/2021

# Elipse no Plano de Minkowski

por

Damião Alves da Silva

sob orientação do

Professor Dr. Clebes do Nascimento Brandão

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Acre - PROFMAT/UFAC, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre.

Área de concentração: Matemática.

Rio Branco-Ac

Agosto/2021

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Central da UFAC

---

S586e Silva, Damião Aves da, 1988- .  
Elipse no Plano de Minkowski / Damião Alves da Silva. – 2021.  
62f. : il. ; 30cm.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Acre, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT). Rio Branco, Acre, 2021.  
Orientação: Prof. Dr. Clebes do Nascimento Brandão.  
Inclui referências.

1. Cônicas. 2. Plano de Minkowski. 3. Plano de Minkowski - elipse. I. Brandão, Clebes do Nascimento, Prof. Dr. II. Universidade Federal do Acre. III. PROFMAT IV. Título.

CDD: 510



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO ACRE – UFAC**  
Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas - CCET  
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

### **Elipse no plano de Minkowski**

Autor (a): Damião Alves da Silva

Orientador (a): Prof. Dr. Clebes do Nascimento Brandão

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Acre – PROFMAT/UFAC, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre.

Examinado (a) por:



Prof. Dr. Clebes do Nascimento Brandão  
Orientador e Presidente da Banca - UFAC



Prof. Dr. Sérgio Brazil Júnior  
Membro Interno – UFAC



Prof. Dr. Elzimar de Oliveira Rufino  
Membro Externo - UFRR

Rio Branco, Acre  
Agosto de 2021

*Dedico este trabalho ao meus pais José Alves da Silva  
e Maria das Graças da Silva (In Memoriam)*

# Agradecimentos

A Deus, por minha vida e pela força me dada para superar as dificuldades ao longo do curso.

A toda minha família, pelos incentivos e pela paciência nos momentos difíceis, em especial à minha querida esposa Rosânia Silveira.

Ao meu orientador, professor Clebes do Nascimento Brandão pela paciência, pelo suporte e por suas preciosas indicações e incentivos durante a pesquisa, bem como assistência durante o processo de construção deste trabalho.

A banca examinadora, composta pelos professores doutores, Clebes Brandão, Sérgio Brazil, Elzimar Rufino e Manoel Neto por sua presença e contribuições.

Aos professores do PROFMAT, pelos ensinamentos e conhecimentos passados durante o curso.

Aos colegas de curso, que tanto me ajudaram e incentivaram a estudar para o exame.

Aos amigos Lucas Motta de Freitas e Ismael Dourado de Assis, pelo auxílio dado quando estava com dificuldades nas disciplinas.

A coordenação do curso pelo atendimento quando precisamos.

*“Eis que a mão do senhor não está encolhida, para que não possa salvar; nem o seu ouvido agravado, para não poder ouvir”.*

*Bíblia Sagrada*

# Resumo

O presente trabalho está fundamentado em um artigo devido a Shonoda [20], e trata do estudo das elipses no plano de Minkowski, também chamadas de  $\mathcal{M}$ -elipses. Após definir o plano espaço-tempo de Minkowski, destacamos as principais definições e propriedades da geometria do referido plano, bem como construímos alguns exemplos com a finalidade de distingui-lo do plano euclidiano. Usando a conhecida definição algébrica de elipse da geometria euclidiana, definimos a  $\mathcal{M}$ -elipse, em seguida, deduzimos suas equações reduzidas e gerais fazendo exemplos com o intuito de obter uma representação geométrica das mesmas.

**Palavras-chave:** *Cônicas. Plano de Minkowski. Elipse no Plano de Minkowski..*



# Abstract

The present work is based on an article due to Shonoda [20] and deals with the study of ellipses in the Minkowski plane, also called  $\mathcal{M}$ -ellipses. After defining Minkowski space-time plane, we highlight the main definitions and properties of the geometry of that plane, as well as build some examples in order to distinguish it from the euclidean plane. Using the well-known algebraic definition of  $\mathcal{M}$ -ellipse from euclidean geometry, we define the ellipse, then deduce its reduced and general equations by making examples in order to obtain a geometric representation of them.

**Keywords:** Conics. Minkowski Plan. Ellipse in the Minkowski Plan.

# Conteúdo

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>6</b>
1.1 O plano de Minkowski e sua geometria . . . . .	6
1.2 O caráter causal de um vetor em $\mathcal{M}^2$ . . . . .	11
1.3 O cone de luz . . . . .	13
1.4 A $\mathcal{M}$ -norma . . . . .	16
1.5 A $\mathcal{M}$ -distância . . . . .	19
1.5.1 O $\mathcal{M}$ -círculo . . . . .	21
<b>2 Elipse no plano de Minkowski</b>	<b>24</b>
2.1 $\mathcal{M}$ -elipse . . . . .	25
2.2 Equações reduzidas da $\mathcal{M}$ -elipse . . . . .	25
2.2.1 A reta focal da $\mathcal{M}$ -elipse de centro na origem coincide com o eixo $OX$ . . . . .	26
2.2.2 A reta focal da $\mathcal{M}$ -elipse de centro na origem coincide com o eixo $OY$ . . . . .	35
2.3 Equações gerais da $\mathcal{M}$ -elipse . . . . .	38
<b>Considerações Finais</b>	<b>49</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>50</b>

# Introdução

A Matemática é uma das cinco áreas do conhecimento que compõe a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e a mesma é de fundamental importância para o progresso da Ciência e da Tecnologia. Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) reconhecem isso ao afirmar que

A Matemática é uma ciência viva, não apenas no cotidiano dos cidadãos, mas também nas universidades e centros de pesquisas, onde se verifica, hoje, uma impressionante produção de novos conhecimentos que, a par de seu valor intrínseco, de natureza lógica, têm sido instrumentos úteis na solução de problemas científicos e tecnológicos da maior importância (PCN, p. 24).

Essa afirmação corrobora com o que consta na primeira das oito competências específicas de Matemática da BNCC para o ensino fundamental, a saber:

A Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho. (BNCC, p. 267).

Antes de prosseguir com essas considerações, gostaríamos de observar que há uma diferença entre a “ciência Matemática” e a “disciplina Matemática”. Esta distinção é oportuna, pois enquanto a primeira vem se desenvolvendo de forma bastante acelerada, a segunda, aparentemente, está estagnada no tempo tornando-se, do ponto de vista da maioria dos alunos, fatigante e pouco atraente. Nas palavras de Ribeiro [12], “A matemática vem se desenvolvendo de forma acelerada e a disciplina Matemática ensinada nas escolas se apresenta cada vez mais com aspectos bastante distintos daqueles apresentados pela academia”. Jesus & Silva [13] também nos trás a seguinte reflexão:

Porque estudar matemática? Aonde que eu vou usar isto? É uma pergunta que não raras vezes escutamos em sala de aula, e também não raras vezes nos faltam exemplos concretos que permitam convencê-los de que vale a pena aprender, mesmo que o matemática não seja de imediata utilidade e aplicabilidade.(JESUS e SILVA, 2004, p.1)

Em relação à contribuição do educador no processo de ensino de Matemática, Valério [21] comenta que

O ensino da matemática exige, por parte dos educadores, um grande empenho a fim de propiciar aos alunos práticas metodológicas diversificadas, dentre elas, variáveis antes pouco conhecidas ou pouco usuais na atualidade surgem com o objetivo de estimular o discente a buscar diferentes caminhos, pensar e enxergar fatos e formas matemáticas de uma maneira simples e objetiva (...) Nesse contexto, o educador deve proporcionar ao discente a assimilação do conteúdo e, posteriormente, deixar que ele crie possibilidades, que descubra novos caminhos dentro do processo de construção ao qual está inserido(VALÉRIO, 2017, p. 12).

Mas será que apenas o esforço por parte do educador será suficiente para mudar a realidade do ensino básico no que diz respeito à disciplina de Matemática? Será que não é o momento de se mudar ou acrescentar conteúdos que possam dar aos alunos a percepção, compreensão, descrição e interação com o espaço em que se vivem?

O PCN divide os conteúdos matemáticos a serem trabalhados no ensino fundamental em cinco unidades temáticas: Álgebra, Geometria, Números, Grandezas e Medidas e Probabilidade e Estatística. No Ensino Médio a divisão é feita pela BNCC em quatro grupos um pouco mais generalizados, a saber: *Linguagens e suas Tecnologias*, *Matemática e suas Tecnologias*, *Ciências da Natureza e suas Tecnologias* e *Ciências Humanas e suas Tecnologias*.

A Geometria, por sua importância histórica e aplicabilidade, compõe uma parte dos estudos da Matemática e suas Tecnologias. Porém, na esmagadora maioria das escolas e cursos de graduação das universidades brasileiras a única geometria estudada é aquela estabelecida por Euclides, fazendo com que o estudo das chamadas geometrias não-euclidianas seja totalmente ignorado. Mas isso tende a mudar, não apenas no Brasil, mas em muitos países pelo mundo. De fato, segundo Kaleff & Nascimento [14],

Nas duas últimas décadas, nos meios educacionais têm sido criadas oportunidades para a inclusão de conteúdos advindos das diversas Geometrias, Euclidiana e não-Euclidianas, aos conhecimentos geométricos escolares considerados como adequados à formação de alunos para o século XXI. Estes conteúdos têm sido objeto de discussão entre os membros de várias associações de profissionais da Matemática: matemáticos, professores, e educadores matemáticos, de vários países (Mammanna & Villani, 1998). Os resultados e as conseqüências destas interações têm sido apresentados em documentos emitidos por grupos internacionais de pesquisa sobre currículos para a Geometria Escolar, bem como em documentos governamentais norteadores da prática educacional do professor de Matemática (KALEFF e NASCIMENTO, 2004, p.1).

Tratando exclusivamente do cenário brasileiro, Cruz [7] esclarece que “nos últimos anos, programas de Pós-Graduação de importantes universidades do país (como os programas da UEM, UNICAMP, PUC-SP, UFF e UNESP-Rio Claro) vêm realizando pesquisas e discutindo a importância de se abordar as Geometrias Não Euclidianas desde as séries iniciais até as séries finais da Educação Básica”. No estado do Paraná, a Secretaria Estadual de Educação - SEED com sua política educacional, iniciou em 2003 um amplo debate com os professores das disciplinas de tradição curricular que resultou na elaboração dos textos de Diretriz Curricular, e incluindo o ensino das geometrias não-euclidianas em sua grade curricular. Para justificar a inclusão dessas novas geometrias, Paraná [17] comenta que:

Muitos dos problemas do cotidiano e do mundo científico só são resolvidos pelas geometrias não-euclidianas. Um exemplo são os estudos que resultaram na Teoria da Relatividade, em que a geometria do espaço, usada por Albert Einstein, foi uma geometria não-euclidiana, de modo que conceitos, como a luz se propaga ao longo de geodésicas e a curvatura do espaço é determinada pela natureza da matéria que o preenche, foram fundamentais(PARANÁ, 2008, p.56).

De fato, com a descoberta das geometrias não-euclidianas foi possível introduzir novos objetos matemáticos para representar o mundo físico e, além disso, conforme Eduardo [9] uma das ciências que mais se beneficiou com o surgimento dessas geometrias foi a Física. A afirmativa de Paraná é também reforçada por Eduardo [9] ao destacar que

Os conceitos da Teoria da Relatividade de Albert Einstein (1879 - 1955) estão fortemente ligados aos conceitos das geometrias não-euclidianas. O desenvolvimento da nova física de Einstein só foi possível com uma mudança radical de paradigma da concepção de espaço, o qual por sua vez só foi possível devido ao surgimento das geometrias não-euclidianas(EDUARDO, 2013, p.19).

Além de sua importância para outras ciências, bem como para facilitar nosso entendimento do mundo físico, muitos autores defendem veementemente que a inserção das geometrias não-euclidianas nas salas de aula facilitam o entendimento da geometria euclidiana. De acordo com Krause [15] “com ensino das geometrias não-euclidianas seria possível compreender melhor muitas relações matemáticas e a própria geometria euclidiana”. Indo nesta mesma direção, Vieira, Batista & Tavares [22] destacam que

As Geometrias não-euclidianas apresentam uma dinâmica única e rica, que permite ao aluno analisar diversos aspectos geométricos, simultaneamente às características da Geometria Euclidiana, permitindo a construção do conhecimento não apenas por experimentação, mas também por comparação (VIEIRA, BATISTA e TAVARES, 2020, p.38).

Por fim, segundo Ribeiro [12]

um olhar mais amplo sobre um conhecimento normalmente favorece o entendimento de algo mais específico. Assim, tem-se que o ensino de conceitos de geometrias não-euclidianas favorece o ensino da geometria euclidiana e do próprio pensamento matemático. O mesmo pressuposto (teórico) indica ainda que uma visão que encare o conhecimento científico sem se prender às limitações da escola, favorece a própria ação pedagógica escolar (RIBEIRO, 2013, p. 12).

Nós não encontramos nenhuma referência direta na BNCC [4] sobre as geometrias não-euclidianas, mas observamos que este assunto não passou despercebido no PCN, e destacamos abaixo um texto retirado do mesmo.

[A Matemática] Desenvolveu-se com movimentos de idas e vindas, com rupturas de paradigmas. Frequentemente um conhecimento foi amplamente utilizado na ciência ou na tecnologia antes de ser incorporado a um dos sistemas lógicos formais do corpo da Matemática. Exemplos desse fato podem ser encontrados no surgimento dos números negativos, irracionais e imaginários. Uma instância importante de mudança de paradigma ocorreu quando se superou a visão de uma única geometria do real, a geometria euclidiana, para aceitação de uma pluralidade de modelos geométricos, logicamente consistentes, que podem modelar a realidade do espaço físico (PCN, 1988, p. 25).

Com base no que foi posto, acreditamos que é apenas questão de tempo para que o ensino das geometrias não-euclidianas se faça presente nos cursos de graduação em Matemática das universidades brasileiras e nas escolas do ensino básico. Portanto, visando contribuir com a produção de material para futuras referências resolvemos fazer um singelo estudo (e aqui estamos sendo muito sinceros) sobre a elipse no plano de Minkowski.

Assim que este estudo foi proposto por meu orientador, buscamos na literatura alguma referência para que pudéssemos nos basear e encontramos um interessante trabalho devido a Shonoda [20] que trata do estudo das cônicas e das curvas de Cassini no plano de Minkowski.

O plano de Minkowski é basicamente um espaço vetorial real de dimensão 2 munido com um produto escalar diferente daquele já conhecido da geometria euclidiana. O plano de Minkowski é uma geometria não euclidiana por suas noções geométricas diferirem daquelas estabelecidas por Euclides. A importância de seu estudo vem do fato de que o mesmo serve como preparação para o estudo da teoria da relatividade especial já que o espaço ambiente naquela teoria é basicamente o espaço vetorial real de dimensão 4 munido com a métrica definida como no plano de Minkowski.

Nosso interesse pelo tema deste trabalho se dá pelo fato de que as cônicas sempre ocuparam um lugar especial dentro da história da Matemática. E, ao iniciar nosso estudo ficamos felizes ao descobrir que já existe um trabalho de conclusão de curso no PROFMAT tratando sobre o plano de Minkowski, de autoria de Alves [2].

O presente trabalho está dividido da seguinte forma: no primeiro capítulo apresentamos os pré-requisitos algébricos e geométricos que serão necessários para compreensão dos assuntos abordados. Definimos produto escalar pseudo-euclidiano, o qual é conhecido como produto escalar de Lorentz ou métrica de Minkowski. Mostramos alguns exemplos em que se pode notar um paralelo com o produto interno euclidiano. Definimos a norma pseudo-euclidiana neste plano, de onde provém a noção de distância de Minkowski.

No segundo capítulo, encontramos o lugar geométrico dos pontos no plano de Minkowski que satisfaz a conhecida definição de elipse, o qual chamamos de  $\mathcal{M}$ -elipse e denotamos por  $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ . A partir da definição fazemos um tratamento analítico da  $\mathcal{M}$ -elipse determinando suas equações reduzida e geral, bem como fazemos sua classificação. Para as construções das figuras, utilizamos uma ferramenta bastante útil no ensino de geometria, o software Geogebra versão 5.0. O mesmo está disponível para acesso em [10].

# Capítulo 1

## Preliminares

Neste capítulo definimos o plano de Minkowski, que será o ambiente onde estão contidos os objetos geométricos que serão estudados posteriormente. Após a definição e terminologia, introduzimos uma nova noção de ortogonalidade e, a partir daí, apresentamos as noções básicas da geometria do referido plano. Para este empreendimento, fizemos uso das referências Couto & Lymeropoulos [6], Lee [16], Ratcliffe [19] e Biezuner [3].

### 1.1 O plano de Minkowski e sua geometria

O *plano espaço-tempo de Minkowski*, ou simplesmente *plano de Minkowski*, é o par  $\mathcal{M}^2 = (\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{M}})$ , formado pelo espaço vetorial real  $\mathbb{R}^2$  e o seguinte produto escalar

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{M}} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\rightsquigarrow \langle u, v \rangle_{\mathcal{M}}, \end{aligned}$$

onde  $\langle u, v \rangle_{\mathcal{M}} = x_1x_2 - y_1y_2$ , com  $u = (x_1, y_1)$  e  $v = (x_2, y_2)$ . De acordo com Couto & Lymeropoulos [6] o produto escalar  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{M}}$  é conhecido na literatura como o *produto escalar de Lorentz* ou *métrica de Minkowski*. Gostaríamos de observar que ao nos referir ao conjunto  $\mathbb{R}^2 = \{(x, y); x, y \in \mathbb{R}\}$  como um espaço vetorial, está implícito que o mesmo está munido de uma lei de composição interna

$$\begin{aligned} + : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (u, v) &\rightsquigarrow u + v, \end{aligned}$$



onde  $u + v = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$ , denominada *adição de vetores*; e uma lei de composição externa

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (\lambda, u) &\rightsquigarrow \lambda u, \end{aligned}$$

onde  $\lambda u = (\lambda x, \lambda y)$ , com  $u = (x, y)$ , denominada *multiplicação por escalar*, as quais satisfazem as seguintes propriedades:

I- Propriedades de adição

- (A<sub>1</sub>) Comutatividade da adição: Para todos  $u, v \in \mathbb{R}^2$  tem-se  $u + v = v + u$ .
- (A<sub>2</sub>) Associatividade da adição: Para todos  $u, v, w \in \mathbb{R}^2$  tem-se  $(u+v)+w = u+(v+w)$ .
- (A<sub>3</sub>) Existência do elemento neutro: Existe (e é único) o elemento  $O \in \mathbb{R}^2$  tal que  $u + O = O + u = u \ \forall u \in \mathbb{R}^2$ .
- (A<sub>4</sub>) Existência do elemento simétrico: Para cada  $u \in \mathbb{R}^2$  existe (um único)  $u' \in \mathbb{R}^2$  tal que  $u + u' = u' + u = O$ .

II- Propriedade da multiplicação por escalar

- (M<sub>1</sub>) A identidade da multiplicação por escalar: Para todo  $u \in \mathbb{R}^2$ , tem-se  $1u = u$ .
- (M<sub>2</sub>) Para todo  $u \in \mathbb{R}^2$  tem-se  $0u = O$ .
- (M<sub>3</sub>) Associatividade da multiplicação por escalar: Para todo  $u \in \mathbb{R}^2$  e  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , tem-se  $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u$ .
- (D<sub>1</sub>) Distributividade em relação a adição de escalares: Para todo  $u \in \mathbb{R}^2$  e  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , tem-se  $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$ .
- (D<sub>2</sub>) Distributividade em relação a adição de vetores: Para todos  $u, v \in \mathbb{R}^2$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$  tem-se  $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$ .

Lembre-mo-nos, da geometria euclidiana, que o conjunto  $B = \{e_1, e_2\}$ , formado pelos vetores  $e_1 = (1, 0)$  e  $e_2 = (0, 1)$  constitui uma base ortonormal para o plano de Euclides  $\mathbb{E}^2 = (\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , onde  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  é o produto interno usual da geometria euclidiana (ver por exemplo, Hoffman & Kunzer [11]). Como veremos mais a diante, essa mesma

base também satisfaz a definição de  $\mathcal{M}$ -ortonormalidade, isto é, os vetores  $e_1$  e  $e_2$  são ortonormais no sentido de Minkowski. Para este propósito, começamos destacando que a métrica de Minkowski satisfaz às seguintes propriedades:

( $P_1$ ) Bilinearidade: Para todo  $k \in \mathbb{R}$  e para todos  $u, v, w \in \mathbb{R}^2$ , tem-se  $\langle ku + v, w \rangle_{\mathcal{M}} = k\langle u, w \rangle_{\mathcal{M}} + \langle v, w \rangle_{\mathcal{M}}$

( $P_2$ ) Comutatividade: Para todos  $u, v \in \mathbb{R}^2$ , tem-se  $\langle u, v \rangle_{\mathcal{M}} = \langle v, u \rangle_{\mathcal{M}}$

( $P_3$ ) Não-degenerescência: Para cada vetor não nulo  $u \in \mathcal{M}^2$  existe  $v \in \mathcal{M}^2$  tal que  $\langle u, v \rangle_{\mathcal{M}} \neq 0$ .

As propriedades ( $P_1$ ) e ( $P_2$ ) acima são imediatas a partir das propriedades do conjunto dos números reais. Para se verificar a propriedade ( $P_3$ ), para cada vetor não nulo  $u = (x, y)$ , basta tomar  $v = (a, b)$  não nulo, de modo que  $ax \neq by$ .

É conveniente destacar aqui a diferença conceitual entre produto escalar e produto interno. Por produto escalar entende-se uma forma satisfazendo as propriedades ( $P_1$ ), ( $P_2$ ) e ( $P_3$ ) acima. Um produto interno é um produto escalar que tem a propriedade adicional de ser positivo-definido. A métrica de Minkowski, por exemplo, é um produto escalar, mas não é um produto interno. A métrica de Euclides é, como sabemos, um produto interno (veja por exemplo, Couto & Lymberopoulos [6] e Ramos [18]). Nos exemplos 1.3 e 1.4 explicaremos melhor o significado do termo “positivo-definido”.

**Exemplo 1.1** *Encontre os vetores  $v \in \mathcal{M}^2$  tais que  $\langle u, v \rangle_{\mathcal{M}} = 0$ , onde*

(a)  $u = (1, 2)$

(b)  $u = (6, 2)$

**Solução.** Denotemos por  $x$  e por  $y$  a primeira e a segunda coordenada do vetor  $v \in \mathcal{M}^2$ .

(a) Pela definição de  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{M}}$ , temos que

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle_{\mathcal{M}} = 0 &\iff x - 2y = 0 \\ &\iff y = \frac{x}{2}. \end{aligned}$$

Portanto, qualquer vetor do tipo  $v = (x, \frac{x}{2})$  é tal que  $\langle u, v \rangle_{\mathcal{M}} = 0$ .

(b) Fazendo como no item (a), temos que

qualquer vetor do tipo  $v = (x, 3x)$  satisfaz  $\langle u, v \rangle_{\mathcal{M}} = 0$ .

A primeira diferença entre os planos de Euclides e de Minkowski é o conceito de ortogonalidade.

**Definição 1.1** *Dois vetores  $u$  e  $v$  em  $\mathcal{M}^2$  são chamados Minkowski-ortogonais (ou simplesmente  $\mathcal{M}$ -ortogonais) se  $\langle u, v \rangle_{\mathcal{M}} = 0$ .*

Conforme visto no Exemplo 1.1 todos os vetores  $v_1 = (x, \frac{x}{2})$ ;  $x \in \mathbb{R}$ , são  $\mathcal{M}$ -ortogonais ao vetor  $u_1 = (1, 2)$  e todos os vetores  $v_2 = (x, 3x)$  são também  $\mathcal{M}$ -ortogonais ao vetor  $u_2 = (6, 2)$ . Observe que usando o produto interno usual da geometria euclidiana, exceto para o caso em que  $x = 0$ , os vetores do tipo  $v_1 = (x, \frac{x}{2})$  e  $v_2 = (x, 3x)$  não são ortogonais aos vetores  $u_1 = (1, 2)$  e  $u_2 = (6, 2)$ , respectivamente. De fato,

$$\begin{aligned}\langle (1, 2), (x, \frac{x}{2}) \rangle &= x + x \\ &= 2x \neq 0, \text{ se } x \neq 0.\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}\langle (6, 2), (x, 3x) \rangle &= 6x + 6x \\ &= 12x \neq 0, \text{ se } x \neq 0.\end{aligned}$$

É conhecido na geometria euclidiana que, se  $u = (x, y) \in \mathbb{E}^2$ , então,  $v = (-y, x)$  é ortogonal a  $u$ . Para o plano de Minkowski temos seguinte exemplo.

**Exemplo 1.2** *Para quaisquer números reais  $a$  e  $c$ , os vetores  $u = (a, c)$  e  $v = (c, a)$  são  $\mathcal{M}$ -ortogonais. Em particular, os vetores  $e_1 = (1, 0)$  e  $e_2 = (0, 1)$  da base canônica (ortonormal) de  $\mathbb{E}^2$  são  $\mathcal{M}$ -ortogonais.*

**Observação 1.1** *Para o caso em que  $c \neq 0$  no Exemplo 1.2, e motivados pelo Exemplo 1.1, observamos facilmente que todos os vetores  $v = (x, \frac{ax}{c})$  são  $\mathcal{M}$ -ortogonais ao vetor  $u = (a, c)$ .*

**Observação 1.2** *Como visto no caso dos vetores  $e_1$  e  $e_2$ , existem vetores em  $\mathbb{R}^2$  que são ao mesmo tempo ortogonais (no sentido euclidiano) e  $\mathcal{M}$ -ortogonais. Em verdade,*

dois vetores  $u$  e  $v$  são ortogonais e  $\mathcal{M}$ -ortogonais simultaneamente se, e somente se, um deles for múltiplo do vetor  $e_1$  e o outro for múltiplo do vetor  $e_2$ .

Os Exemplos 1.3 e 1.4 a seguir mostram a principal diferença entre a métrica de Minkowski e o produto interno euclidiano, a saber,  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{M}}$  não satisfaz a propriedade de ser positiva definida. Ou seja, não vale que  $\langle u, u \rangle_{\mathcal{M}} \geq 0 \forall u \in \mathcal{M}^2$ , com a igualdade ocorrendo se, e somente se,  $u = 0$ .

**Exemplo 1.3** *Seja  $c$  um número real qualquer. Se  $u = (0, c)$ , então  $\langle u, u \rangle_{\mathcal{M}} \leq 0$ . Se  $u = (c, 0)$ , então  $\langle u, u \rangle_{\mathcal{M}} \geq 0$ .*

*De fato, para  $u = (0, c)$ , temos*

$$\langle u, u \rangle_{\mathcal{M}} = \langle (0, c), (0, c) \rangle_{\mathcal{M}} = 0 - c^2 = -c^2 \leq 0.$$

*Analogamente, para  $u = (c, 0)$ , obtemos*

$$\langle u, u \rangle_{\mathcal{M}} = \langle (c, 0), (c, 0) \rangle_{\mathcal{M}} = c^2 - 0 = c^2 \geq 0.$$

**Exemplo 1.4** *Verifique que:*

- (a) *Dois vetores quaisquer da reta  $y = x$  são sempre  $\mathcal{M}$ -ortogonais.*
- (b) *Dois vetores quaisquer da reta  $y = -x$  são sempre  $\mathcal{M}$ -ortogonais.*
- (c) *Vetores não nulos da reta  $y = x$  nunca são  $\mathcal{M}$ -ortogonais a vetores não nulos da reta  $y = -x$ .*

**Solução:**

- (a) De fato. Para quaisquer dois vetores  $u = (x_1, x_1)$  e  $v = (x_2, x_2)$  na reta  $y = x$ , temos  $\langle u, v \rangle_{\mathcal{M}} = x_1x_2 - x_1x_2 = 0$ .
- (b) Sejam  $u = (x_1, -x_1)$  e  $v = (x_2, -x_2)$ . Então  $\langle u, v \rangle_{\mathcal{M}} = (x_1)(x_2) - (-x_1)(-x_2) = x_1x_2 - x_1x_2 = 0$ .
- (c) Sejam os vetores  $u = (x, x)$  e  $v = (a, -a)$  vetores não nulos pertencentes às retas  $y = x$  e  $y = -x$ , respectivamente. Então  $\langle u, v \rangle_{\mathcal{M}} = xa + xa = 2ax \neq 0$ .

## 1.2 O caráter causal de um vetor em $\mathcal{M}^2$

A partir das discussões e exemplos da seção anterior, podemos destacar a seguinte classificação (ver por exemplo, Couto & Lyberopoulos [6]): Qualquer vetor  $u \in \mathcal{M}^2$  é classificado a partir do produto escalar  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{M}}$  como segue.

- (a)  $u$  é dito ser *tipo-espaço* quando  $\langle u, u \rangle_{\mathcal{M}} > 0$  ou  $u = O$ .
- (b)  $u$  é dito ser *tipo-tempo* quando  $\langle u, u \rangle_{\mathcal{M}} < 0$ .
- (c)  $u$  é dito ser *tipo-luz* quando  $\langle u, u \rangle_{\mathcal{M}} = 0$ , com  $u \neq O$ .

A partir tricotomia da relação de ordem em  $\mathbb{R}$ , temos que cada vetor em  $\mathcal{M}^2$  possui um e somente um dos três tipos causais apresentados acima.

**Exemplo 1.5** *Considere os vetores da base canônica de  $\mathbb{R}^2$ .*

- (a) *O vetor  $e_1 = (1, 0)$  é um vetor tipo-espaço. Além disso, conforme visto na primeira parte do Exemplo 1.3, todo múltiplo escalar de  $e_1$  é um vetor tipo-espaço.*
- (b) *O vetor  $e_2 = (0, 1)$  é um vetor tipo-tempo. Além disso, conforme visto na segunda parte do Exemplo 1.3, todo múltiplo escalar de  $e_2$  (com exceção do vetor nulo) é um vetor tipo-tempo.*
- (c) *O vetor soma  $e_1 + e_2 = (1, 1)$  é um vetor tipo-luz. Ademais, todo múltiplo escalar do vetor  $e_1 + e_2$  (com exceção do vetor nulo) é um vetor tipo-luz.*

Gostaríamos de observar que a soma de vetores tipo-espaço não necessariamente é um vetor tipo-espaço. Como mostra o exemplo a seguir.

**Exemplo 1.6** *Classifique os vetores  $u$ ,  $v$  e  $u + v$  em tipo-espaço, tipo-tempo ou tipo-luz, onde  $u = (1, \frac{1}{2})$  e  $v = (-1, \frac{1}{2})$ .*

**Solução:** Temos que  $\langle u, u \rangle_{\mathcal{M}} = \frac{3}{4}$ ,  $\langle v, v \rangle_{\mathcal{M}} = \frac{3}{4}$  e  $\langle u + v, u + v \rangle_{\mathcal{M}} = -1$ . Portanto  $u$  e  $v$  são vetores tipo-espaços e  $u + v$  é um vetor tipo-tempo.

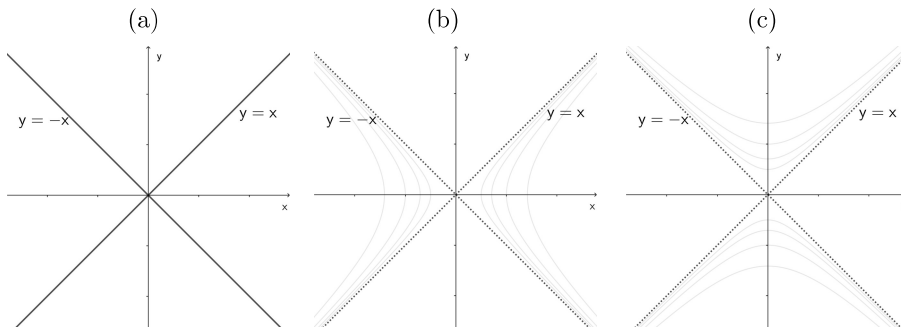
Em geral, se  $u$  e  $v$  são vetores não nulos tipo-espaço, simétricos com respeito a sua segunda coordenada, então o vetor  $u + v$  é tipo-tempo.

Analogamente ao Exemplo 1.6, a soma de vetores tipo-tempo não necessariamente é um vetor tipo-tempo. Basta tomar  $u = (1, 2)$  e  $v = (0, -2)$ , e verificar que  $\langle u, u \rangle_{\mathcal{M}} < 0$ ,  $\langle v, v \rangle_{\mathcal{M}} < 0$  e  $u + v = e_1$  é um vetor tipo-espaço. Em geral, se  $u$  e  $v$  são vetores não nulos tipo-tempo, simétricos com respeito a sua primeira coordenada, então o vetor  $u + v$  é tipo-espaço.

Antes de passarmos para a próxima seção, gostaríamos de destacar alguns resultados conhecidos na literatura que julgamos necessários para a compreensão do que tem sido tratado até aqui. Por exemplo, ainda em [6] encontramos o lugar geométrico dos vetores de cada caráter causal, como segue. Se  $u = (x, y) \in \mathcal{M}^2$  e  $c \in \mathbb{R}$  então  $\langle u, u \rangle_{\mathcal{M}} = c \iff x^2 - y^2 = c$ . Da geometria analítica, temos que a expressão  $x^2 - y^2 = c$  representa:

- (a) as bissetrizes dos eixos coordenados, se  $c = 0$ .
- (b) dois ramos de uma hipérbole, localizados nos semiplanos determinados pela reta  $x = 0$ , se  $c > 0$ .
- (c) dois ramos de uma hipérbole, localizados nos semiplanos determinados pela reta  $y = 0$ , se  $c < 0$ .

Figura 1.1: A localização dos tipos causais em  $\mathcal{M}^2$



Fonte: Elaborada pelo autor usando geogebra versão 5.0.

No Exemplo 1.4 foi visto que vetores tipo luz paralelos são  $\mathcal{M}$ -ortogonais. A proposição a seguir pode ser encontrada em [6] e nos garante que a recíproca também é verdadeira.

**Proposição 1.1** *Dois vetores tipo-luz são  $\mathcal{M}$ -ortogonais se, e somente se, são paralelos.*

**Demonstração:** Sejam  $u = (a, b)$ ,  $v = (x, y) \in \mathcal{M}^2$  vetores tipo-luz. Se  $u$  e  $v$  são paralelos, segue do Exemplo 1.4, que eles são  $\mathcal{M}$ -ortogonais. Reciprocamente, se  $u$  e  $v$  são  $\mathcal{M}$ -ortogonais, então,  $\langle u, v \rangle_{\mathcal{M}} = ax - by = 0$ . Como  $u$  e  $v$  são vetores tipo-espaço, temos  $a = \pm b$  e  $x = \pm y$ . Assuma que  $u$  não seja paralelo a  $v$ . Então, sem perda de generalidade, supondo  $x = y$ , temos  $a = -b$ , de modo que a equação  $\langle u, v \rangle_{\mathcal{M}} = ax - by = 0$  torna-se  $2x = 0$ . O que é um absurdo, pois  $x \neq 0$ .  $\square$

Na próxima seção mostraremos os casos envolvendo a  $\mathcal{M}$ -ortogonalidade entre vetores tipo-tempo e tipo-espaço. A proposição a seguir pode ser vista em Ratcliffe [19] e é de fácil verificação.

**Proposição 1.2** *Seja  $t$  um número real não nulo e  $u \in \mathcal{M}^2$ , então o vetor  $tu$  tem o mesmo tipo causal de  $u$ .*

**Demonstração:** De fato, basta observar que  $\langle tu, tu \rangle_{\mathcal{M}} = t^2 \langle u, u \rangle_{\mathcal{M}}$ .  $\square$

### 1.3 O cone de luz

Na seção anterior vimos que cada vetor de  $\mathcal{M}^2$  satisfaz um, e somente um, dos três tipos causais: tipo-espaço, tipo-tempo ou tipo-luz. Isto nos permite escrever o plano de Minkowski como uma determinada união disjunta. Para este propósito, precisaremos de alguns esclarecimentos que serão dados a seguir.

**Definição 1.2** *O conjunto de todos os vetores tipo-luz  $u = (x, y)$  é o cone  $\mathcal{C}$ , definido pela equação  $|y| = |x|$ .  $\mathcal{C}$  é conhecido na literatura como o cone de luz.*

#### Observação 1.3

- (a) *Um vetor  $u = (x, y)$  é tipo-tempo se, e somente se,  $|x| < |y|$ . O interior de  $\mathcal{C}$  em  $\mathcal{M}^2$  é o subconjunto aberto de  $\mathcal{M}^2$  consistindo de todos os vetores tipo-tempo.*
- (b) *Um vetor  $u = (x, y)$  é tipo-espaço se, e somente se,  $|x| > |y|$ . O exterior de  $\mathcal{C}$  em  $\mathcal{M}^2$  é o subconjunto aberto de  $\mathcal{M}^2$  consistindo de todos os vetores tipo-espaço.*

Para Ratcliffe [19], um vetor tipo-tempo ou tipo-luz é dito ser *positivo* (respect. *negativo*) se, e somente se,  $y > 0$  ( $y < 0$ ). Em seu livro, Couto & Lymberopoulos [6] chamam os vetores tipo-tempo e tipo-luz positivos e negativos de vetores *futuro-dirigido*

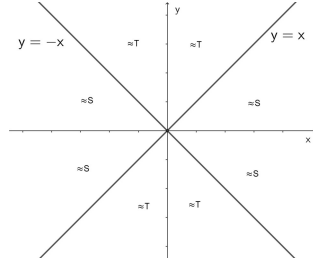
e *passado-dirigido*, respectivamente. Estas definições dadas em [6] tem motivação na Física, por se enquadrarem no contexto da relatividade especial. Neste trabalho, por não enveredarmos por questões relacionadas à física, resolvemos adotar a nomenclatura dada por [19]. E, ainda seguindo Ratcliffe, adotaremos o termo *paridade* para nos referir a um vetor tipo-espaço/tipo-tempo positivo ou negativo.

Estamos agora em condições de caracterizar todos os vetores do plano de Minkowski  $\mathcal{M}^2$  pela união disjunta

$$\mathcal{M}^2 = \approx T \dot{\cup} \approx S \dot{\cup} \approx L,$$

como mostra a Figura 1.2, onde  $\approx T$ ,  $\approx S$  e  $\approx L$  significam respectivamente tipo-tempo, tipo-espaço e tipo-luz.

Figura 1.2: Cone de luz



Fonte: Elaborada pelo autor usando geogebra versão 5.0.

Destacaremos agora algumas propriedades interessantes sobre os vetores de  $\mathcal{M}^2$ .

**Proposição 1.3** *Dois vetores tipo-tempo nunca são  $\mathcal{M}$ -ortogonais.*

**Demonstração:** Sejam  $u = (x_1, y_1)$ ,  $v = (x_2, y_2)$ . Por hipótese  $|y_1| > |x_1|$  e  $|y_2| > |x_2|$ . Como

$$\begin{aligned} |\langle u, v \rangle_{\mathcal{M}}| &= |x_1 x_2 - y_1 y_2| \\ &= |y_1 y_2 - x_1 x_2| \\ &\geq |y_1 y_2| - |x_1 x_2| \\ &> 0. \end{aligned}$$

□

De maneira totalmente análoga, também obtemos que

**Proposição 1.4** *Dois vetores tipo-espaço nunca são  $\mathcal{M}$ -ortogonais.*



Em complemento à Proposição 1.2, temos a seguinte proposição, cuja demonstração também pode ser encontrada em Biezuner [3].

**Proposição 1.5** *Sejam  $u$  e  $v$  vetores tipo-tempo ou tipo-luz em  $\mathcal{M}^2$  de mesma paridade.*

- (i) *Se  $t$  é um número real positivo, então o vetor  $tu$  tem o mesmo tipo e mesma paridade de  $u$ .*
- (ii)  *$\langle u, v \rangle_{\mathcal{M}} \leq 0$  e vale a igualdade se, e somente se,  $u$  e  $v$  são vetores tipo-luz linearmente dependentes.*
- (iii) *O vetor  $u + v$  é tipo-tempo ou tipo-luz e tem a mesma paridade de  $u$  e de  $v$ . Além disso  $u + v$  será tipo-luz se, e somente se,  $u$  e  $v$  forem vetores tipo-luz linearmente dependentes.*

**Demonstração:**

- (i) De fato,  $tu$  é múltiplo do vetor  $u$ , portanto herda seu tipo. Como  $t$  é positivo, segue que  $tu$  tem o mesmo sinal de  $u$ .
- (ii) Faça  $u = (x_1, y_1)$  e  $v = (x_2, y_2)$ . Como  $u$  e  $v$  são tipo-tempo ou tipo-luz, segue que

$$|y_1| \geq |x_1| \text{ e } |y_2| \geq |x_2|. \quad (1.1)$$

Dado que  $u$  e  $v$  tem mesma paridade, usando as propriedades do módulo e utilizando a desigualdade (1.1) obtemos

$$y_1 y_2 = |y_1| |y_2| \geq |x_1| |x_2| \geq x_1 x_2,$$

donde segue que

$$\langle u, v \rangle_{\mathcal{M}} = x_1 x_2 - y_1 y_2 \leq 0.$$

Por fim, observe a partir da desigualdade (1.1) que a última igualdade ocorre se, e somente se,

$|y_1| = |x_1|$  e  $|y_2| = |x_2|$ , o que implica em  $u$  e  $v$  serem vetores do tipo-luz. Ademais, como visto na Proposição 1.1,  $\langle u, v \rangle_{\mathcal{M}} = 0$  se e somente se  $u$  e  $v$  são paralelos e conseqüentemente, linearmente dependentes.

(iii) A segunda coordenada do vetor  $u + v$  é precisamente a soma das segundas coordenadas de  $u$  e  $v$ , os quais possuem mesma paridade por hipótese. Logo, a paridade de  $u + v$  é a mesma de  $u$  e de  $v$ . Além disso, usando o item (ii) e a bilinearidade de  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{M}}$  obtemos

$$\langle u + v, u + v \rangle_{\mathcal{M}} = \langle u, u \rangle_{\mathcal{M}} + 2\langle u, v \rangle_{\mathcal{M}} + \langle v, v \rangle_{\mathcal{M}} \leq 0,$$

donde segue que o vetor  $u + v$  é tipo-tempo ou tipo-luz. Agora, suponha que  $u + v$  seja do tipo-luz. Então,

$$0 = \langle u + v, u + v \rangle_{\mathcal{M}} = \langle u, u \rangle_{\mathcal{M}} + 2\langle u, v \rangle_{\mathcal{M}} + \langle v, v \rangle_{\mathcal{M}}.$$

Pelo item (ii),  $\langle u, v \rangle_{\mathcal{M}} \leq 0$ . Veja que  $\langle u, v \rangle_{\mathcal{M}}$  não pode ser menor que 0, caso contrário a igualdade acima não se verificaria. E então obtemos que  $\langle u, v \rangle_{\mathcal{M}} = 0$ . Segue ainda do Item (ii) que  $\langle u, v \rangle_{\mathcal{M}} = 0$  se e somente se ambos são vetores tipo-luz linearmente dependentes. Por fim, é claro que se os vetores  $u$  e  $v$  forem tipo-luz linearmente dependentes, então o vetor  $u + v$  será tipo luz.  $\square$

Para finalizar esta seção, destacamos o seguinte resultado.

**Proposição 1.6** *Sejam  $u$  e  $v$  vetores não nulos  $\mathcal{M}$ -ortogonais. Se  $u$  é tipo-tempo, então  $v$  é tipo-espaço.*

**Demonstração:** De fato, se  $v$  fosse tipo-tempo ou tipo-luz, então  $u$  e  $v$  ou  $u$  e  $-v$  teriam a mesma paridade e, dado que  $u$  é tipo-tempo, segue da Proposição 1.5 que  $\langle u, v \rangle_{\mathcal{M}} \neq 0$ . O que é uma contradição com o fato de  $u$  ser  $\mathcal{M}$ -ortogonal a  $v$ . Portanto, devemos ter o vetor  $v$  tipo-espaço.  $\square$

## 1.4 A $\mathcal{M}$ -norma

O produto escalar  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{M}}$  define naturalmente uma norma pseudo-euclidiana, doravante chamada de  $\mathcal{M}$ -norma, e denotada por  $\| \cdot \|_{\mathcal{M}}$  em  $\mathcal{M}^2$  da seguinte maneira:

$$\|u\|_{\mathcal{M}} = \sqrt{|\langle u, u \rangle_{\mathcal{M}}|}, \quad \forall u \in \mathcal{M}^2.$$

É importante observar, como consta em Couto & Lyberopoulos [6], que o termo “norma” utilizado acima é um abuso de linguagem, haja vista que  $\|\cdot\|_{\mathcal{M}}$  não é de fato uma norma, pois existem vetores não-nulos cuja norma pseudo euclidiana é zero e não vale a desigualdade triangular.

A  $\mathcal{M}$ -norma  $\|\cdot\|_{\mathcal{M}}$  satisfaz: Para qualquer vetor  $u$  em  $\mathcal{M}^2$  e qualquer número real  $k$ , vale que

$$(a) \quad \|u\|_{\mathcal{M}} \geq 0; \|u\|_{\mathcal{M}} = 0 \iff u \text{ for um vetor tipo-luz.}$$

$$(b) \quad \|ku\|_{\mathcal{M}} = |k|\|u\|_{\mathcal{M}}.$$

A primeira parte de (a), bem como o item (b), segue diretamente da definição de  $\|\cdot\|_{\mathcal{M}}$  e das propriedades dos números reais. Para a segunda parte de (a), sendo  $u = (x, y)$ , temos que

$$\begin{aligned} \|u\|_{\mathcal{M}} = 0 &\iff \sqrt{|\langle u, u \rangle_{\mathcal{M}}|} = 0 \\ &\iff \langle u, u \rangle_{\mathcal{M}} = 0 \\ &\iff x^2 - y^2 = 0 \\ &\iff |x| = |y|. \end{aligned}$$

**Definição 1.3** *Um vetor  $\mathcal{M}$ -unitário em  $\mathcal{M}^2$  é um vetor  $u \in \mathcal{M}^2$  tal que  $\|u\|_{\mathcal{M}} = 1$ .*

### Exemplo 1.7

(a) *Os vetores  $e_1$  e  $e_2$  da base canônica de  $\mathbb{R}^2$  são  $\mathcal{M}$ -unitários.*

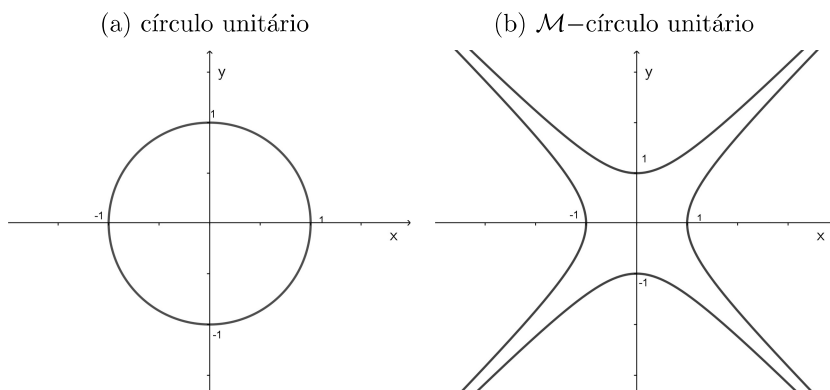
(b) *O vetor  $u = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2}) \in \mathcal{M}^2$  é um vetor  $\mathcal{M}$ -unitário.*

Observe que o vetor tipo-tempo  $u = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2})$  não é unitário do ponto de vista euclidiano. De fato,  $\|u\| = \frac{\sqrt{6}}{2}$ . Em verdade, encontra-se provado em [6] (Proposição 1.3.8) que, se  $u = (x, y)$ , com  $|y| > |x|$ , então  $\|u\| \geq \|u\|_{\mathcal{M}}$ . Isto é, olhos euclidianos enxergam vetores tipo-tempo com comprimento maior do que quando vistos com olhos Minkowskianos.

É pertinente observarmos o lugar geométrico dos vetores  $\mathcal{M}$ -unitários de  $\mathcal{M}^2$ . Já vimos anteriormente que a equação  $x^2 - y^2 = c$  representa uma hipérbole no sentido

euclidiano cujo eixo focal é o eixo das abscissas (se  $c > 0$ ) ou o eixo das ordenadas (se  $c < 0$ ). Portanto, enquanto que no plano euclidiano, o lugar geométrico dos vetores unitários é um círculo de raio 1, no plano de Minkowski, o lugar geométrico de tais vetores é precisamente um par de hipérboles conjugadas no sentido euclidiano, cuja equação é  $x^2 - y^2 = \pm 1$  (ver Figura 1.3). Retornaremos a este assunto na Seção 1.5.1.

Figura 1.3: Círculos euclidiano e Minkowskiano



Fonte: Elaborada pelo autor usando geogebra versão 5.0.

Como é natural de se esperar, na passagem do  $\mathbb{E}^2$  para o  $\mathcal{M}^2$  alguns resultados que dependem do produto interno perdem sua validade e outros sofrem alterações drásticas. Exemplo disso são as conhecidas desigualdades de Cauchy-Schwarz e triangular, cujos enunciados são feitos abaixo. Por fazerem uso de recursos não explorados aqui, suas demonstrações serão omitidas, mas podem ser encontradas em Couto e Lymberopoulos (2018, p. 37-38).

**Teorema 1.1** (*Desigualdade de Cauchy-Schwarz reversa*). *Sejam  $u, v \in \mathcal{M}^2$  vetores tipo-tempo. Então vale*

$$|\langle u, v \rangle_{\mathcal{M}}| \geq \|u\|_{\mathcal{M}} \|v\|_{\mathcal{M}}.$$

*Ademais, a igualdade vale se, e somente se,  $u$  e  $v$  são paralelos.*

**Exemplo 1.8** *Dados  $u = (2, 1)$  e  $v = (5, 3)$  em  $\mathcal{M}^2$ , verifique que  $|\langle u, v \rangle_{\mathcal{M}}| \geq \|u\|_{\mathcal{M}} \|v\|_{\mathcal{M}}$ .*

**Solução:** Observe que  $\langle u, v \rangle_{\mathcal{M}} = 7$ ,  $\|u\|_{\mathcal{M}} = \sqrt{3}$  e  $\|v\|_{\mathcal{M}} = 4$ . Logo,  $|\langle u, v \rangle_{\mathcal{M}}| > \|u\|_{\mathcal{M}} \|v\|_{\mathcal{M}}$ .

Um caso particular da desigualdade de Cauchy-Schwarz reversa é a seguinte proposição, encontrada em Ratcliffe (2010, p. 66).

**Proposição 1.7** *Se  $u$  e  $v$  pertencem às retas  $y = x$  e  $y = -x$ , respectivamente, então  $|\langle u, v \rangle_{\mathcal{M}}| > \|u\|_{\mathcal{M}}\|v\|_{\mathcal{M}}$ .*

**Demonstração:** De fato, tome  $u = (x_1, x_1)$  pertencente à reta  $y = x$  e  $v = (x_2, -x_2)$  pertencente à reta  $y = -x$ . Então,  $2x_1x_2 \neq 0$ , pois ambos  $u$  e  $v$  são vetores tipo-luz. Daí,  $|\langle u, v \rangle_{\mathcal{M}}| = |2x_1x_2| > 0$ . Por outro lado,  $\|u\|_{\mathcal{M}} = 0$  e  $\|v\|_{\mathcal{M}} = 0$ . Logo,  $|\langle u, v \rangle_{\mathcal{M}}| > \|u\|_{\mathcal{M}}\|v\|_{\mathcal{M}}$ .  $\square$

Daremos, a seguir, um exemplo onde se verifica a validade da desigualdade de Cauchy-Schwarz.

**Exemplo 1.9** *Seja  $u \in \mathcal{M}^2$  um vetor tipo-tempo. Tome  $v \in \mathcal{M}^2$  um vetor não nulo tal que  $\langle u, v \rangle_{\mathcal{M}} = 0$ . Então, pela Proposição 1.6,  $v$  é um vetor tipo-espaço. Ademais, temos  $\|u\|_{\mathcal{M}} > 0$  e  $\|v\|_{\mathcal{M}} > 0$ , donde segue que  $|\langle u, v \rangle_{\mathcal{M}}| \leq \|u\|_{\mathcal{M}}\|v\|_{\mathcal{M}}$ .*

**Teorema 1.2** *(Desigualdade triangular reversa). Sejam  $u, v \in \mathcal{M}^2$  vetores tipo-tempo de mesma paridade. Então*

$$\|u + v\|_{\mathcal{M}} \geq \|u\|_{\mathcal{M}} + \|v\|_{\mathcal{M}}.$$

A demonstração da Desigualdade triangular reversa é direta e pode ser vista em Couto e Lymberopoulos (2018, p. 39).

**Exemplo 1.10** *Verifique a desigualdade triangular reversa para os vetores  $u = (-1, 2), v = (3, 4) \in \mathcal{M}^2$ .*

**Solução:** Temos  $\|u\|_{\mathcal{M}} = \sqrt{3}$ ,  $\|v\|_{\mathcal{M}} = \sqrt{7}$  e  $\|u + v\|_{\mathcal{M}} = 4\sqrt{2}$ . Como  $\sqrt{3} + \sqrt{7} < 4\sqrt{2}$ , concluímos que  $\|u + v\|_{\mathcal{M}} \geq \|u\|_{\mathcal{M}} + \|v\|_{\mathcal{M}}$ .

## 1.5 A $\mathcal{M}$ -distância

A partir da  $\mathcal{M}$ -norma  $\|\cdot\|_{\mathcal{M}}$ , é possível definir a  $\mathcal{M}$ -distância entre dois pontos no plano de Minkowski como segue: Para quaisquer dois pontos  $A$  e  $B$  em  $\mathcal{M}^2$ , a  $\mathcal{M}$ -distância de  $A$  para  $B$  é denotada por  $d_{\mathcal{M}}(A, B)$  e definida por:

$$d_{\mathcal{M}}(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\|_{\mathcal{M}},$$

onde  $\overrightarrow{AB} = B - A = (x_1 - x, y_1 - y)$  é o vetor definido pelos pontos  $A(x, y)$  e  $B(x_1, y_1)$ . Em coordenadas, temos:

$$d_{\mathcal{M}}(A, B) = \sqrt{|(x_1 - x)^2 - (y_1 - y)^2|}. \quad (1.2)$$

Listaremos a seguir as propriedades que a função  $\mathcal{M}$ -distância  $d_{\mathcal{M}}$  satisfaz. Para quaisquer pontos  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$  vale que:

( $d_1$ )  $d_{\mathcal{M}}(A, B) \geq 0$  e  $d_{\mathcal{M}}(A, B) = 0$  se e somente se  $A = B$  ou o vetor  $\overrightarrow{AB}$  for tipo-luz.

( $d_2$ )  $d_{\mathcal{M}}(A, B) = d_{\mathcal{M}}(B, A)$ .

**Demonstração:** Sejam  $A(x_1, y_1)$  e  $B(x_2, y_2)$  pontos de  $\mathcal{M}^2$ .

( $d_1$ ) A  $\mathcal{M}$ -distância  $d_{\mathcal{M}}(A, B)$  é de fato maior do que ou igual a zero, por sua própria definição.

Agora, da equação (1.2) veja que, se  $A = B$ , então  $d_{\mathcal{M}}(A, B) = \|A - A\|_{\mathcal{M}} = 0$  e para  $A \neq B$ , temos

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{M}}(A, B) = 0 &\iff \sqrt{|(x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2|} = 0 \\ &\iff |(x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2| = 0 \\ &\iff |x_1 - x_2| = |y_1 - y_2|. \end{aligned}$$

Isto é,  $d_{\mathcal{M}}(A, B) = 0$  com  $A \neq B$  se, e somente se,  $\overrightarrow{AB}$  é tipo-luz.

( $d_2$ ) De (1.2), segue que,

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{M}}(A, B) &= \sqrt{|(x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2|} \\ &= \sqrt{|(x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2|} \\ &= d_{\mathcal{M}}(B, A). \end{aligned}$$

Veja que, por depender diretamente da  $\mathcal{M}$ -norma, é imediato que a função  $\mathcal{M}$ -distância, diferentemente da distância euclidiana, não é uma função distância no contexto de espaços métricos. Por exemplo, a Propriedade ( $d_1$ ) nos diz que a  $\mathcal{M}$ -distância de um ponto  $A$  para um ponto  $B$  em  $\mathcal{M}^2$  pode ser nula sem que tenhamos  $A = B$ . É oportuno definir o *cone de luz centrado em*  $A \in \mathcal{M}^2$  como sendo o conjunto de todos

os pontos  $B \in \mathcal{M}^2$ , tais que  $d_{\mathcal{M}}(A, B) = 0$  (ver [6], p.32). Denotaremos o cone de luz centrado em  $A$  por  $C_L(A)$ .

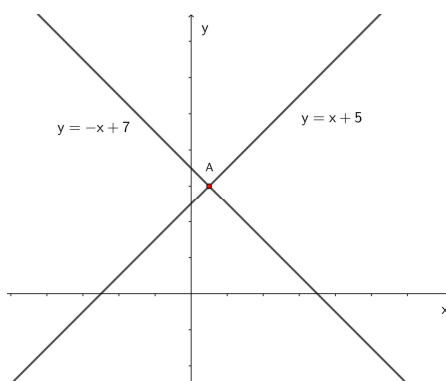
**Exemplo 1.11** *Determine o cone de luz centrado em  $A(1, 6)$ .*

**Solução:** Considere  $B(x, y) \in \mathcal{M}^2$ . Então  $C_L(A)$  é obtido da seguinte forma:

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{M}}(A, B) &= \sqrt{|(1-x)^2 - (6-y)^2|} = 0 \\ &\iff |(1-x)^2 - (6-y)^2| = 0 \\ &\iff |(1-x)| = |(6-y)|. \end{aligned}$$

Portanto  $C_L(A)$  é dado pelas retas  $y = x + 5$  e  $y = -x + 7$ . (Veja figura 1.4).

Figura 1.4: Cone de Luz com centro em  $A - C_L(A)$



Fonte: Elaborada pelo autor usando geogebra versão 5.0.

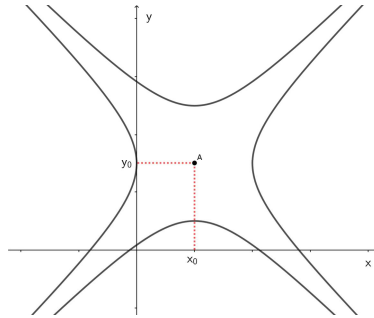
O lugar geométrico dos pontos  $B \in \mathcal{M}^2$  cuja  $\mathcal{M}$ -distância ao ponto  $A$  é igual a uma constante  $k > 0$  constitui-se de um ente geométrico de suma importância na geometria de Minkowski, assim como seu representante algébrico na geometria euclidiana.

### 1.5.1 O $\mathcal{M}$ -círculo

**Definição 1.4** *Usando a definição usual da geometria euclidiana, e em conformidade com Shonoda [20], o  $\mathcal{M}$ -círculo de centro em  $A(x_0, y_0)$  e raio  $k > 0$  é o subconjunto  $S_{\mathcal{M}}(A, k)$  de  $\mathcal{M}^2$  definido por:*

$$S_{\mathcal{M}}(A, k) := \{B \in \mathcal{M}^2; d_{\mathcal{M}}(A, B) = k\}.$$

Figura 1.5:  $\mathcal{M}$ -círculo de centro  $A(x_0, y_0)$



Fonte: Elaborada pelo autor usando geogebra versão 5.0.

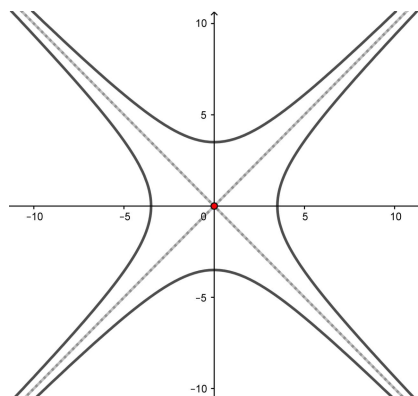
Em coordenadas, a expressão  $d_{\mathcal{M}}(A, B) = k$  torna-se

$$(x - x_0)^2 - (y - y_0)^2 = \pm k^2.$$

O que nos mostra que o  $\mathcal{M}$ -círculo, Figura 1.5 no plano de Minkowski é precisamente um par de hipérbolas conjugadas com eixos paralelos aos eixos coordenados no sentido euclidiano.

Em particular, o  $\mathcal{M}$ -círculo unitário, Figura 1.6, denotado simplesmente por  $S_{\mathcal{M}}(1)$ , possui quatro ramos. Dois deles vêm de  $\langle u, u \rangle_{\mathcal{M}} = 1$ , com  $u = \overrightarrow{AB}$  que se refere às direções tipo-espaço e os outros dois vêm de  $\langle u, u \rangle_{\mathcal{M}} = -1$ , que se refere às direções tipo-tempo. Qualquer vetor tipo-luz é paralelo às assíntotas  $y = x$  e  $y = -x$  do círculo unitário  $S_{\mathcal{M}}(1)$ .

Figura 1.6:  $\mathcal{M}$ -círculo unitário



Fonte: Elaborada pelo autor usando geogebra versão 5.0.

O problema abaixo mostra uma das diferenças entre os círculos no plano euclidiano e no plano de Minkowski:

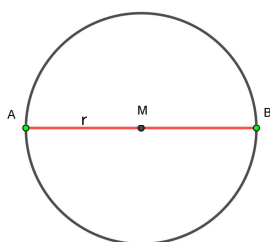


**Problema:** Sejam  $A$  e  $B$  pontos em  $\mathbb{R}^2$ , e  $r$  um numero real.

- (a) Qual a condição sobre  $r$  para que exista um círculo em  $\mathbb{E}^2$  que passa pelos pontos  $A$  e  $B$  com raio igual a  $r$ ?

**Solução:** Para o círculo euclidiano a condição é que  $r$  seja um número real positivo e satisfaz  $r \geq \frac{d(A,B)}{2}$ .

Figura 1.7: círculo de Euclides

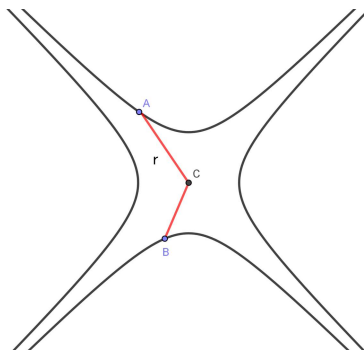


Fonte: Elaborada pelo autor usando geogebra versão 5.0.

- (b) Qual a condição sobre  $r$  para que exista um  $\mathcal{M}$ -círculo em  $\mathcal{M}^2$  que passa pelos pontos  $A$  e  $B$  com raio igual a  $r$ ?

**Solução:** Como círculos no plano de Minkowski são hipérboles euclidianas, segue que para qualquer  $r$  positivo, sempre existirá um  $\mathcal{M}$ -círculo passando pelos pontos  $A$  e  $B$  com raio  $r$ .

Figura 1.8: círculo no plano de Minkowski



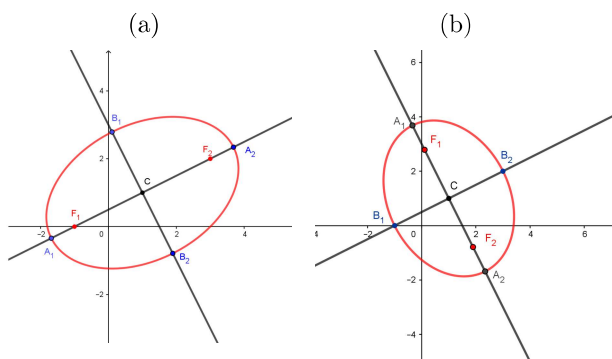
Fonte: Elaborada pelo autor usando geogebra versão 5.0.

## Capítulo 2

# Elipse no plano de Minkowski

Em geometria analítica (ver, por exemplo, Delgado & Crissaff [8]), uma elipse  $\mathcal{E}$  de focos  $F_1$  e  $F_2$  é o conjunto dos pontos  $P$  de  $\mathbb{E}^2$  cuja soma das distâncias a  $F_1$  e a  $F_2$  é igual a uma constante  $2a$ . A reta  $l$  que contém os focos  $F_1$  e  $F_2$  é chamada reta focal. A interseção de  $\mathcal{E}$  com  $l$  constitui-se de dois pontos  $A_1$  e  $A_2$  denominados vértices. O segmento  $\overline{A_1A_2}$ , de comprimento  $2a$ , e seu ponto médio  $C = \frac{A_1+A_2}{2}$  são, respectivamente, o eixo focal e o centro da elipse. A reta não focal é a reta  $l'$  perpendicular a  $l$  que passa por  $C$ . A elipse intersecta a reta não focal  $l'$  em exatamente dois pontos,  $B_1$  e  $B_2$ , denominados vértices da elipse sobre a reta não focal. O eixo não focal da elipse é o segmento  $\overline{B_1B_2}$  de comprimento  $2b$ , onde  $b^2 = a^2 - c^2$ , sendo  $2c$  a distância entre os focos  $F_1$  e  $F_2$ . É imediato, a partir da definição de distância em  $\mathbb{E}^2$ , que  $a > c$ . Apresentamos na Figura 2.1 o traço de duas elipses em diferentes posições para ilustrar o que está escrito neste parágrafo.

Figura 2.1: Elipses euclidianas com centro  $C(x_0, y_0)$  e focos  $F_1$  e  $F_2$



Fonte: Elaborada pelo autor usando geogebra versão 5.0.

Neste capítulo estudaremos a elipse no plano de Minkowski - a  $\mathcal{M}$ -elipse - e temos por objetivo principal deduzir as equações gerais da mesma, conforme indicado em [1]. Isto será feito na Seção 2.3. Para uma melhor compreensão da Seção 2.3, seguindo [20], estudaremos na Seção 2.2 os casos particulares em que as retas focais da  $\mathcal{M}$ -elipse coincidem com os eixos coordenados. Após esta análise e a partir das experiências com os exemplos que serão feitos, estaremos mais preparados para entender o caso geral.

Salvo menção contrária, usaremos as mesmas nomenclaturas dadas no estudo da elipse euclidiana para o estudo da  $\mathcal{M}$ -elipse.

## 2.1 $\mathcal{M}$ -elipse

Para Shonoda[20] e Aceff-Sánchez & Senior [1], uma  $\mathcal{M}$ -elipse de focos  $F_1 = (z_1, z_2)$  e  $F_2 = (w_1, w_2)$  é o conjunto dos pontos  $P(x, y)$  do plano de Minkowski cuja soma das  $\mathcal{M}$ -distâncias a  $F_1$  e  $F_2$  é igual a uma constante  $2a > 0$ .

Algebricamente, escrevemos

$$\mathcal{E}_{\mathcal{M}} = \{P \in \mathcal{M}^2; d_{\mathcal{M}}(P, F_1) + d_{\mathcal{M}}(P, F_2) = 2a, a > 0\}. \quad (2.1)$$

Denotemos por  $2c$  a  $\mathcal{M}$ -distância do ponto  $F_1$  ao ponto  $F_2$ , isto é,

$$c = \frac{1}{2}d_{\mathcal{M}}(F_1, F_2).$$

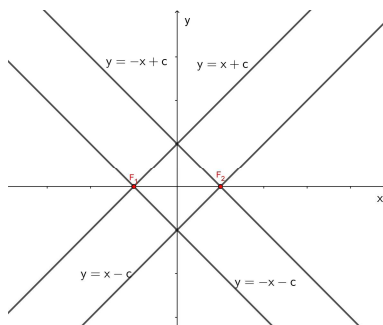
## 2.2 Equações reduzidas da $\mathcal{M}$ -elipse

Nesta seção, faremos um estudo analítico da Equação (2.1), considerando os focos sobre os eixos coordenados. Isto é: (a) a reta focal da  $\mathcal{M}$ -elipse de centro na origem coincide com o eixo  $OX$  e (b) a reta focal da  $\mathcal{M}$ -elipse de centro na origem coincide com o eixo  $OY$ .

### 2.2.1 A reta focal da $\mathcal{M}$ -elipse de centro na origem coincide com o eixo $OX$ .

Seja  $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$  a  $\mathcal{M}$ -elipse de centro na origem cujos focos são  $F_1(-c, 0)$  e  $F_2(c, 0)$ . A fim de esboçar o traço de  $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ , encontraremos primeiramente seus pontos de interseção com os cones de luz  $C_L(F_1)$  e  $C_L(F_2)$ .

Figura 2.2: Cones de luz  $C_L(F_1)$  e  $C_L(F_2)$



Fonte: Elaborada pelo autor usando geogebra versão 5.0.

Se  $P(x, y)$  é um ponto qualquer de  $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ , então pela definição em (2.1), temos

$$d_{\mathcal{M}}(P, F_1) + d_{\mathcal{M}}(P, F_2) = 2a. \quad (2.2)$$

#### Pontos de interseção de $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ com $C_L(F_1)$

Admita que  $P \in \mathcal{E}_{\mathcal{M}}$  também pertença a  $C_L(F_1)$ . Então  $P$  satisfaz simultaneamente às seguintes equações:  $d_{\mathcal{M}}(P, F_1) = 0$  e  $d_{\mathcal{M}}(P, F_2) = 2a$ . Em coordenadas, isso equivale a

$$\sqrt{|(x + c)^2 - y^2|} = 0 \quad (2.3)$$

e

$$\sqrt{|(x - c)^2 - y^2|} = 2a. \quad (2.4)$$

A partir da Equação 2.3 obtemos que  $P$  deve pertencer a uma das retas  $y = x + c$  ou  $y = -x - c$  e, a partir da Equação 2.4, obtemos que  $P$  deve pertencer ao  $\mathcal{M}$ -círculo

$$(x - c)^2 - y^2 = \pm 4a^2 \quad (2.5)$$

Assuma que o ponto  $P_1(x_1, y_1) \in \mathcal{E}_M$  também pertença à reta  $y = x + c$  e à hipérbole euclidiana  $(x - c)^2 - y^2 = 4a^2$ . Então as coordenadas de  $P_1$  satisfazem:

$$y_1 = x_1 + c \quad (2.6)$$

e

$$(x_1 - c)^2 - y_1^2 = 4a^2. \quad (2.7)$$

Substituindo (2.6) em (2.7) e desenvolvendo a expressão, obtemos  $x_1 = -\frac{a^2}{c}$  e  $y_1 = -\frac{a^2}{c} + c$ . Logo, temos  $P_1(-\frac{a^2}{c}, -\frac{a^2}{c} + c)$ .

Analogamente, suponha que o ponto  $P_2(x_2, y_2) \in \mathcal{E}_M$ , também pertença à reta  $y = x + c$  e à hipérbole  $(x - c)^2 - y^2 = -4a^2$ . Então as coordenadas de  $P_2$  satisfazem  $y_2 = x_2 + c$  e  $(x_2 - c)^2 - y_2^2 = -4a^2$ . Obtemos, portanto,  $x_2 = \frac{a^2}{c}$  e  $y_2 = \frac{a^2}{c} + c$ , consequentemente  $P_2(\frac{a^2}{c}, \frac{a^2}{c} + c)$ .

Agora, suponha que o ponto  $P_3(x_3, y_3) \in \mathcal{E}_M$ , também pertença à reta  $y = -x - c$  e à hipérbole  $(x - c)^2 - y^2 = 4a^2$ . Então as coordenadas de  $P_3$  satisfazem  $y_3 = -x_3 - c$  e  $(x_3 - c)^2 - y_3^2 = 4a^2$ . Obtemos, portanto,  $x_3 = -\frac{a^2}{c}$  e  $y_3 = \frac{a^2}{c} - c$ . E, daí,  $P_3(-\frac{a^2}{c}, \frac{a^2}{c} - c)$ .

Por fim, suponha que o ponto  $P_4(x_4, y_4) \in \mathcal{E}_M$ , também pertença à reta  $y = -x - c$  e à hipérbole  $(x - c)^2 - y^2 = -4a^2$ . Então as coordenadas de  $P_4$  satisfazem  $y_4 = -x_4 - c$  e  $(x_4 - c)^2 - y_4^2 = -4a^2$ . Obtemos, portanto,  $x_4 = \frac{a^2}{c}$  e  $y_4 = -\frac{a^2}{c} - c$ . Daí  $P_4(\frac{a^2}{c}, -\frac{a^2}{c} - c)$ .

### Pontos de interseção de $\mathcal{E}_M$ com $C_L(F_2)$

Se  $P$  é um ponto de  $\mathcal{E}_M$  que pertence a  $C_L(F_2)$ , então  $P$  satisfaz simultaneamente às seguintes equações:  $d_M(P, F_1) = 2a$  e  $d_M(P, F_2) = 0$ . Em coordenadas, isso equivale a

$$\sqrt{|(x + c)^2 - y^2|} = 2a \quad (2.8)$$

e

$$\sqrt{|(x - c)^2 - y^2|} = 0. \quad (2.9)$$

Usando o mesmo processo feito anteriormente, encontramos os pontos:  $P_5(\frac{a^2}{c}, \frac{a^2}{c} - c)$ ,  $P_6(-\frac{a^2}{c}, -\frac{a^2}{c} - c)$ ,  $P_7(\frac{a^2}{c}, -\frac{a^2}{c} + c)$  e  $P_8(-\frac{a^2}{c}, \frac{a^2}{c} + c)$ .

**Observação 1** A importância de se encontrar os pontos  $P_1$  a  $P_8$  vem do fato de que

eles delimitam a  $\mathcal{M}$ -elipse, como veremos mais adiante. Também observamos que, dependendo dos valores de  $a$  e de  $c$ , estes pontos podem ser em número menor que 8, pois pode ocorrer de dois deles coincidirem.

Uma vez encontrados os pontos de interseção da  $\mathcal{M}$ -elipse  $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$  com os cones de luz  $C_L(F_1)$  e  $C_L(F_2)$ , passaremos agora a encontrar os pontos da  $\mathcal{M}$ -elipse que não estejam nos referidos cones.

**Pontos de  $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$  não pertencentes aos cones  $C_L(F_1)$  e  $C_L(F_2)$**

Se  $P$  é um ponto de  $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$  não pertencente aos cones  $C_L(F_1)$  e  $C_L(F_2)$  então  $P$  satisfaz a Equação 2.2 obedecendo  $0 < d_{\mathcal{M}}(P, F_1) < 2a$  e  $0 < d_{\mathcal{M}}(P, F_2) < 2a$ .

Em coordenadas, temos

$$0 < \sqrt{|(x+c)^2 - y^2|} < 2a \quad (2.10)$$

e também

$$0 < \sqrt{|(x-c)^2 - y^2|} < 2a. \quad (2.11)$$

A partir de agora, passaremos a analisar as Equações 2.10 e 2.11, investigando os seguintes casos:

- Caso I -  $|x+c| > |y|$  e  $|x-c| > |y|$ ;
- Caso II -  $|x+c| < |y|$  e  $|x-c| < |y|$ ;
- Caso III -  $|x+c| > |y|$  e  $|x-c| < |y|$ ;
- Caso IV -  $|x+c| < |y|$  e  $|x-c| > |y|$ .

**Caso I-** Para  $|x+c| > |y|$  e  $|x-c| > |y|$ , a Equação (2.2) torna-se

$$\sqrt{(x+c)^2 - y^2} + \sqrt{(x-c)^2 - y^2} = 2a, \quad (2.12)$$

donde segue que  $\sqrt{(x+c)^2 - y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 - y^2}$ . Elevando ambos os membros da igualdade ao quadrado, obtemos

$$(x+c)^2 - y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 - y^2} + (x-c)^2 - y^2.$$

Isto é,

$$4a\sqrt{(x-c)^2 - y^2} = 4a^2 - 4cx.$$

Dividindo ambos os lados da igualdade por 4 e, em seguida, elevando novamente ambos os membros ao quadrado, obtemos

$$a^2(x^2 - 2cx + c^2 - y^2) = a^4 - 2ca^2x + c^2x^2.$$

Concluimos, portanto, que

$$(a^2 - c^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2). \quad (2.13)$$

**Caso II-** Para  $|x+c| < |y|$  e  $|x-c| < |y|$ , a Equação (2.2) torna-se

$$\sqrt{y^2 - (x+c)^2} + \sqrt{y^2 - (x-c)^2} = 2a$$

donde segue que  $\sqrt{y^2 - (x+c)^2} = 2a - \sqrt{y^2 - (x-c)^2}$ . Elevando ambos os membros da igualdade ao quadrado e reorganizando, obtemos

$$xc + a^2 = a\sqrt{y^2 - x^2 + 2xc - c^2}.$$

Elevando novamente ao quadrado ambos os lados, temos

$$x^2c^2 + a^2x^2 - a^2y^2 = -a^2c^2 - a^4.$$

Reorganizando essa expressão, concluimos que

$$x^2(c^2 + a^2) - a^2y^2 = -a^2(c^2 + a^2). \quad (2.14)$$

Agora, como  $a \neq 0$ , dividimos ambos os lados da igualdade em (2.14) por  $-a^2(c^2 + a^2)$  obtemos a equação

$$\frac{y^2}{c^2 + a^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1. \quad (2.15)$$

**Caso III-** Para  $|x+c| > |y|$  e  $|x-c| < |y|$ , a Equação (2.2) torna-se

$$\sqrt{(x+c)^2 - y^2} + \sqrt{y^2 - (x-c)^2} = 2a$$

donde segue a equação

$$(x^2 - y^2)^2 + 2c^2(x^2 - y^2) - 8xa^2c = -c^4 - 4a^4 \quad (2.16)$$

**Caso IV-** Finalmente, para  $|x + c| < |y|$  e  $|x - c| > |y|$ , (2.2) torna-se

$$\sqrt{y^2 - (x + c)^2} + \sqrt{(x - c)^2 - y^2} = 2a$$

de onde segue que

$$(y^2 - x^2)^2 - 2c^2(y^2 - x^2) + 8xa^2c = -c^4 - 4a^4. \quad (2.17)$$

Portanto, a  $\mathcal{M}$ -elipse  $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$  com centro na origem e cuja reta focal coincide com o eixo  $OX$  é formada pelos pontos delimitantes  $P_1$  à  $P_8$  encontrados acima, juntamente com as curvas cujas equações são dadas abaixo:

$$\mathcal{E}_{\mathcal{M}} : \begin{cases} (a^2 - c^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2) \\ \frac{y^2}{c^2+a^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1. \\ (x^2 - y^2)^2 + 2c^2(x^2 - y^2) - 8xa^2c = -c^4 - 4a^4 \\ (y^2 - x^2)^2 - 2c^2(y^2 - x^2) + 8xa^2c = -c^4 - 4a^4. \end{cases}$$

Observe que, diferentemente do caso euclidiano, em que  $a$  é estritamente maior do que  $c$ , no caso da  $\mathcal{M}$ -elipse podemos ter  $a < c$ ,  $a = c$  ou  $a > c$ . Faremos abaixo alguns exemplos que nos permitirão compreender melhor as diferenças nos gráficos das  $\mathcal{M}$ -elipses a partir das relações entre  $a$  e  $c$ .

**Exemplo 2.1** *Encontre as equações e esboce o gráfico da  $\mathcal{M}$ -elipse de centro na origem e focos  $F_1(-3, 0)$  e  $F_2(3, 0)$ , onde:*

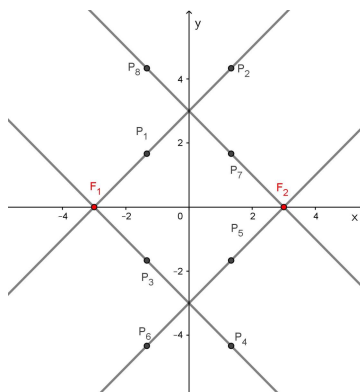
$$(a) \ a = 2 \qquad (b) \ a = 3 \qquad (c) \ a = 4.$$

**Solução:**

(a) Primeiramente obtemos os pontos delimitantes  $P_1(-\frac{4}{3}, \frac{5}{3})$ ,  $P_2(\frac{4}{3}, \frac{13}{3})$ ,  $P_3(-\frac{4}{3}, -\frac{5}{3})$ ,  $P_4(\frac{4}{3}, -\frac{13}{3})$ ,  $P_5(\frac{4}{3}, -\frac{5}{3})$ ,  $P_6(-\frac{4}{3}, -\frac{13}{3})$ ,  $P_7(\frac{4}{3}, \frac{5}{3})$  e  $P_8(-\frac{4}{3}, \frac{13}{3})$  e os marquemos nos cones de luz  $C_L(F_1)$  e  $C_L(F_2)$ , como na figura abaixo.



Figura 2.3: Pontos da  $\mathcal{M}$ -elipse para  $a = 2$ .



Fonte: Elaborada pelo autor usando geogebra versão 5.0.

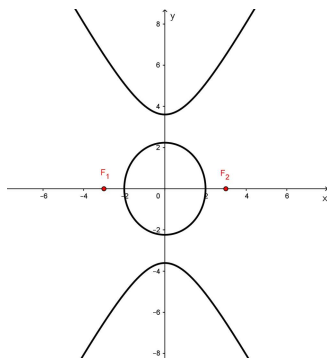
Agora, fazendo  $a = 2$  e  $c = 3$  em 2.2.1, obtemos as equações reduzidas da  $\mathcal{M}$ -elipse procurada:

$$\mathcal{E}_{\mathcal{M}} : \begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} = 1 \\ \frac{y^2}{13} - \frac{x^2}{4} = 1 \\ (x^2 - y^2)^2 + 18(x^2 - y^2) - 96x = -145 \\ (y^2 - x^2)^2 - 18(y^2 - x^2) + 96x = -145. \end{cases}$$

O traço da  $\mathcal{M}$ -elipse é a união dos gráficos associados às equações reduzidas acima, delimitados pelos pontos delimitantes. Para um melhor entendimento, faremos cada traço separado e, por fim, traçaremos o da  $\mathcal{M}$ -elipse procurada.

- (i) Na Figura 2.4, esboçamos os traços de  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} = 1$  (observe que é a equação de uma elipse euclidiana) e  $\frac{y^2}{13} - \frac{x^2}{4} = 1$  (observe que é a equação de uma hipérbole euclidiana).

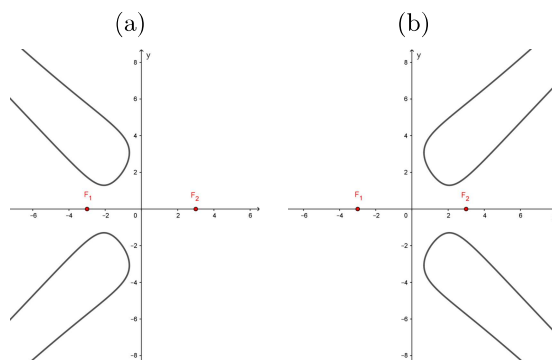
Figura 2.4: Traços das curvas  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} = 1$  e  $\frac{y^2}{13} - \frac{x^2}{4} = 1$ .



Fonte: Elaborada pelo autor usando geogebra versão 5.0.

- (ii) Na Figura 2.5 temos os traços das curvas  $(y^2 - x^2)^2 - 18(y^2 - x^2) + 96x = -145$  (2.5a) e  $(x^2 - y^2)^2 + 18(x^2 - y^2) - 96x = -145$  (2.5b).

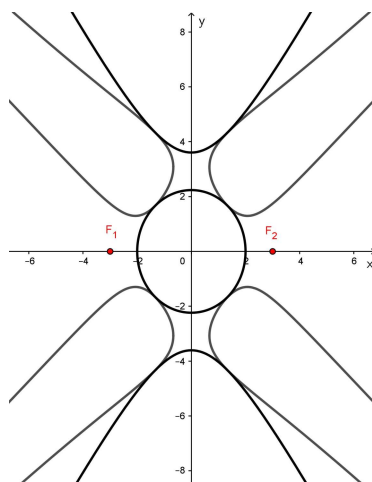
Figura 2.5: Traços das curvas  $(x^2 - y^2)^2 + 18(x^2 - y^2) - 96x = -145$  e  $(y^2 - x^2)^2 - 18(y^2 - x^2) + 96x = -145$



Fonte: Elaborada pelo autor usando geogebra versão 5.0.

Unindo todos os traços obtidos acima, obtemos

Figura 2.6: União das curvas

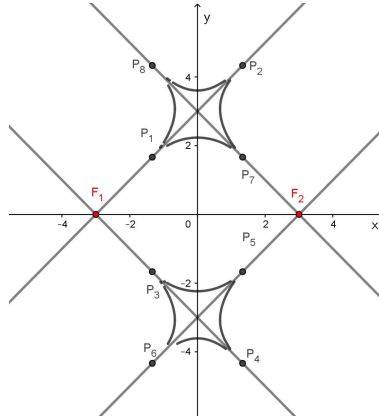


Fonte: Elaborada pelo autor usando geogebra versão 5.0.

Por fim, usando os pontos delimitantes obtidos anteriormente, podemos esboçar o traço da  $\mathcal{M}$ -elipse, como se vê na Figura 2.7.

**Observação 2.1** *Observe neste caso que os focos  $F_1$  e  $F_2$  da  $\mathcal{M}$ -elipse encontrada são exteriores a ela. Ademais, os oito pontos delimitantes estão claramente separa-*

Figura 2.7:  $\mathcal{M}$ -elipse com centro na origem e focos sobre o eixo  $x$

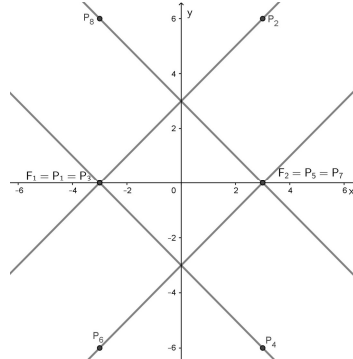


Fonte: Elaborada pelo autor usando geogebra versão 5.0.

dos simetricamente pelo eixo focal. Esta observação vale para qualquer  $\mathcal{M}$ -elipse com centro na origem, reta focal sendo o eixo  $OX$  e satisfazendo  $a < c$ .

- (b) Para  $a = 3$  temos os pontos delimitantes  $P_1(-3, 0)$ ,  $P_2(3, 6)$ ,  $P_3(-3, 0)$ ,  $P_4(3, -6)$ ,  $P_5(3, 0)$ ,  $P_6(-3, -6)$ ,  $P_7(3, 0)$  e  $P_8(-3, 6)$  como pode ser visto na Figura 2.8.

Figura 2.8: Pontos da  $\mathcal{M}$ -elipse para  $a = 3$



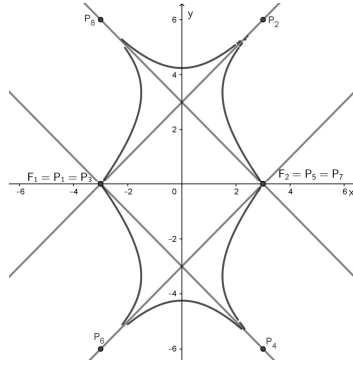
Fonte: Elaborada pelo autor usando geogebra versão 5.0.

As equações reduzidas são dadas por

$$\mathcal{E}_{\mathcal{M}} : \begin{cases} y = 0 \\ \frac{y^2}{18} - \frac{y^2}{9} = 1 \\ (x^2 - y^2)^2 + 18(x^2 - y^2) - 216x = -405 \\ (y^2 - x^2)^2 - 18(y^2 - x^2) + 216x = -405. \end{cases}$$

Seguindo os passos feitos no item (a), temos o traço da  $\mathcal{M}$ -elipse, Figura 2.9.

Figura 2.9:  $\mathcal{M}$ -elipse para  $a = 3$

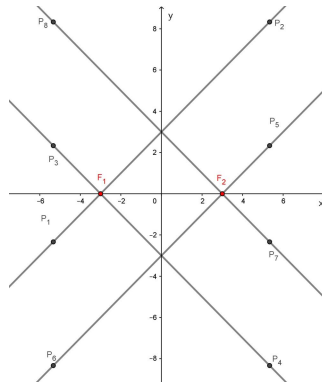


Fonte: Elaborada pelo autor usando geogebra versão 5.0.

**Observação 2.2** Observe, neste caso, que temos apenas seis pontos delimitantes na  $\mathcal{M}$ -elipse, sendo que dois deles são os focos. Em geral, isso ocorre sempre que temos a condição  $a = c$ .

- (c) Para  $a = 4$  e  $c = 3$  temos os pontos  $P_1(-\frac{16}{3}, -\frac{7}{3})$ ,  $P_2(\frac{16}{3}, \frac{25}{3})$ ,  $P_3(-\frac{16}{3}, \frac{7}{3})$ ,  $P_4(\frac{16}{3}, -\frac{25}{3})$ ,  $P_5(\frac{16}{3}, \frac{7}{3})$ ,  $P_6(-\frac{16}{3}, -\frac{25}{3})$ ,  $P_7(\frac{16}{3}, -\frac{7}{3})$  e  $P_8(-\frac{16}{3}, \frac{25}{3})$ . Veja Figura 2.10

Figura 2.10: Pontos da  $\mathcal{M}$ -elipse para  $a = 4$



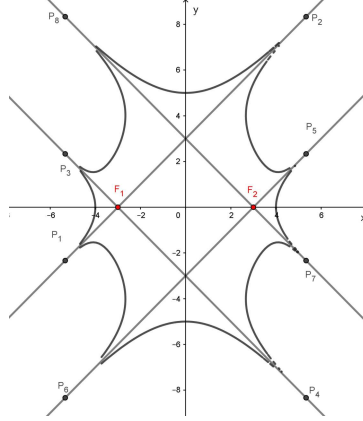
Fonte: Elaborada pelo autor usando geogebra versão 5.0.

As equações reduzidas são dadas por

$$\mathcal{E}_{\mathcal{M}} : \begin{cases} \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{7} = 1 \\ \frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{9} = 1 \\ (x^2 - y^2)^2 + 18(x^2 - y^2) - 384x = -1105 \\ (y^2 - x^2)^2 - 18(y^2 - x^2) + 384x = -1105. \end{cases}$$

Temos, portanto, o traço da  $\mathcal{M}$ -elipse procurada (Figura 2.11.)

Figura 2.11: Traço da  $\mathcal{M}$ -elipse para  $a = 4$



Fonte: Elaborada pelo autor usando geogebra versão 5.0.

**Observação 2.3** *Observe neste caso que os dois focos são pontos internos à  $\mathcal{M}$ -elipse. Em geral isso acontece sempre que tivermos  $a > c$ . Além disso, os oito pontos delimitantes da  $\mathcal{M}$ -elipse são distintos, e nenhum deles coincide com os focos.*

## 2.2.2 A reta focal da $\mathcal{M}$ -elipse de centro na origem coincide com o eixo $OY$ .

A construção feita para o caso da  $\mathcal{M}$ -elipse de centro na origem com eixo focal sendo o eixo  $Y$  é totalmente análoga ao da Subseção 2.2.1, e utilizando a mesma linha de raciocínio encontramos os pontos delimitantes  $P_1(\frac{a^2}{c} + c, \frac{a^2}{c})$ ,  $P_2(-\frac{a^2}{c} + c, -\frac{a^2}{c})$ ,  $P_3(-\frac{a^2}{c} - c, \frac{a^2}{c})$ ,  $P_4(\frac{a^2}{c} - c, -\frac{a^2}{c})$ ,  $P_5(-\frac{a^2}{c} - c, -\frac{a^2}{c})$ ,  $P_6(\frac{a^2}{c} - c, \frac{a^2}{c})$ ,  $P_7(\frac{a^2}{c} + c, -\frac{a^2}{c})$  e  $P_8(-\frac{a^2}{c} + c, \frac{a^2}{c})$ . Também encontramos as equações reduzidas da referida  $\mathcal{M}$ -elipse:

$$\mathcal{E}_{\mathcal{M}} : \begin{cases} \frac{x^2}{c^2+a^2} - \frac{y^2}{a^2} & = 1 \\ (c^2 - a^2)y^2 + a^2x^2 & = a^2(c^2 - a^2) \\ (y^2 - x^2)^2 + 2c^2(y^2 - x^2) - 8a^2cy & = -(c^4 + 4a^4) \\ (x^2 - y^2)^2 - 2c^2(x^2 - y^2) + 8a^2cy & = -(c^4 + 4a^4). \end{cases}$$

**Exemplo 2.2** *Determine a  $\mathcal{M}$ -elipse de focos  $F_1(0, -2)$  e  $F_2(0, 2)$  para os valores de  $a$  seguir.*

- (a)  $a = 1$ .                      (b)  $a = 2$ .                      (c)  $a = 3$ .

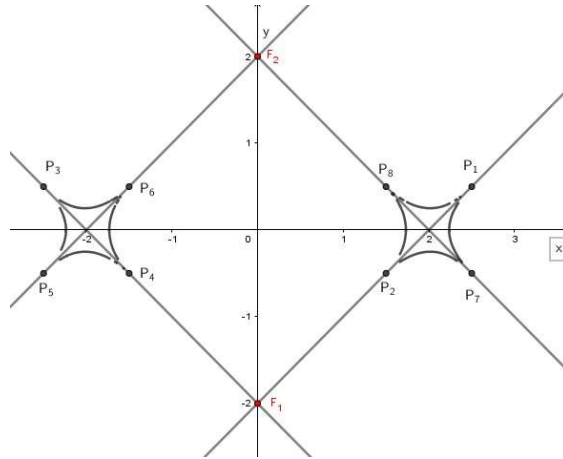
**Solução:**

- (a) Procedendo como no Exemplo 2.1, encontramos os pontos delimitantes  $P_1(\frac{5}{2}, \frac{1}{2})$ ,  $P_2(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$ ,  $P_3(-\frac{5}{2}, \frac{1}{2})$ ,  $P_4(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$ ,  $P_5(-\frac{5}{2}, -\frac{1}{2})$ ,  $P_6(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$ ,  $P_7(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2})$ ,  $P_8(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$  e obtemos as equações reduzidas

$$\mathcal{E}_{\mathcal{M}} : \begin{cases} \frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{1} = 1 \\ \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{1} = 1 \\ (y^2 - x^2)^2 + 8(y^2 - x^2) - 16y + 20 = 0 \\ (x^2 - y^2)^2 - 8(x^2 - y^2) + 16y + 20 = 0 \end{cases}$$

O traço da  $\mathcal{M}$ -elipse é, portanto:

Figura 2.12: Traço da  $\mathcal{M}$ -elipse para  $a = 1$



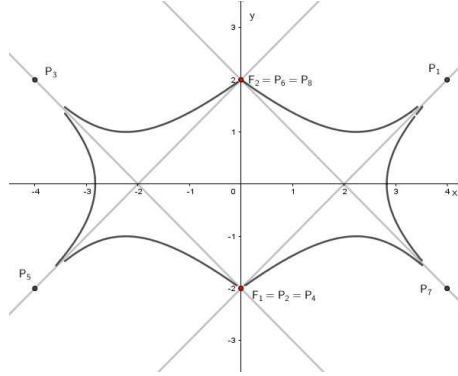
Fonte: Elaborada pelo autor usando geogebra versão 5.0.

- (b) Como feito no item (a), encontramos os pontos delimitantes da  $\mathcal{M}$ -elipse  $P_1(4, 2)$ ,  $P_2 = P_4(0, -2)$ ,  $P_3(-4, 2)$ ,  $P_5(-4, -2)$ ,  $P_6 = P_8(0, 2)$ ,  $P_7(4, -2)$ . As equações reduzidas são:

$$\mathcal{E}_{\mathcal{M}} : \begin{cases} \frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{4} = 1 \\ x = 0 \\ (y^2 - x^2)^2 + 8(y^2 - x^2) - 64y + 80 = 0 \\ (x^2 - y^2)^2 - 8(x^2 - y^2) + 64y + 80 = 0 \end{cases}$$

O traço desta  $\mathcal{M}$ -elipse é dado na Figura 2.13.

Figura 2.13:  $\mathcal{M}$ -elipse com focos em  $OY$



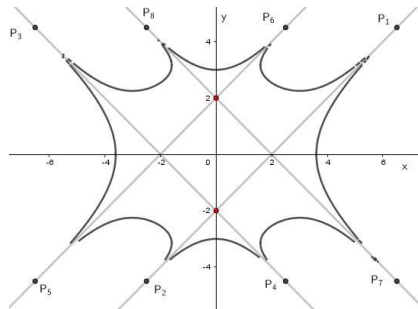
Fonte: Elaborada pelo autor usando geogebra versão 5.0.

- (c) Temos os pontos delimitantes  $P_1(\frac{13}{2}, \frac{9}{2})$ ,  $P_2(-\frac{5}{2}, -\frac{9}{2})$ ,  $P_3(-\frac{13}{2}, \frac{9}{2})$ ,  $P_4(\frac{5}{2}, -\frac{9}{2})$ ,  $P_5(-\frac{13}{2}, -\frac{9}{2})$ ,  $P_6(\frac{5}{2}, \frac{9}{2})$ ,  $P_7(\frac{13}{2}, -\frac{9}{2})$ ,  $P_8(-\frac{5}{2}, \frac{9}{2})$ . Ademais, as equações reduzidas encontradas são:

$$\mathcal{E}_{\mathcal{M}} : \begin{cases} \frac{x^2}{13} - \frac{y^2}{9} & = 1 \\ (-5)y^2 + 9x^2 & = -45 \\ (y^2 - x^2)^2 + 8(y^2 - x^2) - 144y & = -340 \\ (x^2 - y^2)^2 - 8(x^2 - y^2) + 144y & = -340. \end{cases}$$

Portanto, temos o traço da  $\mathcal{M}$ -elipse como segue:

Figura 2.14:  $\mathcal{M}$ -elipse com focos em  $OY$



Fonte: Elaborada pelo autor usando geogebra versão 5.0.

## 2.3 Equações gerais da $\mathcal{M}$ -elipse

Na seção anterior encontramos as equações reduzidas e os pontos delimitantes de dois casos particulares de  $\mathcal{M}$ -elipses, bem como fizemos dois exemplos na direção de construir seus respectivos traços. Isto nos permite um melhor entendimento do que será visto nesta seção, onde deduziremos as equações gerais de uma  $\mathcal{M}$ -elipse cujos focos são dois pontos arbitrários do plano de Minkowski. O resultado encontrado foi indicado em [1].

Sejam  $F_1(z_1, z_2)$  e  $F_2(w_1, w_2)$  os focos de uma  $\mathcal{M}$ -elipse  $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$  no plano de Minkowski. Então, a equação de  $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$  é dada, em coordenadas, por

$$\mathcal{E}_{\mathcal{M}} : \sqrt{|(x - z_1)^2 - (y - z_2)^2|} + \sqrt{|(x - w_1)^2 - (y - w_2)^2|} = 2a. \quad (2.18)$$

Seguindo os procedimentos da seção anterior, usaremos a Equação (2.18) inicialmente para encontrar os pontos delimitantes da  $\mathcal{M}$ -elipse. Observamos que estes pontos delimitantes também podem ser vistos em [20].

### Pontos de interseção de $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ com $C_L(F_1)$

Se  $P(x, y)$  é um ponto de  $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$  que pertence a  $C_L(F_1)$ , então  $P$  satisfaz simultaneamente às seguintes equações:  $d_{\mathcal{M}}(P, F_1) = 0$  e  $d_{\mathcal{M}}(P, F_2) = 2a$ . Em coordenadas, isso equivale a

$$\sqrt{|(x - z_1)^2 - (y - z_2)^2|} = 0 \quad (2.19)$$

e

$$\sqrt{|(x - w_1)^2 - (y - w_2)^2|} = 2a. \quad (2.20)$$

O lugar geométrico dos pontos  $P(x, y)$  tais que  $\sqrt{|(x - z_1)^2 - (y - z_2)^2|} = 0$  são as retas

$$x = y + z_1 - z_2 \quad (2.21)$$

e

$$x = -y + z_1 + z_2. \quad (2.22)$$



Também já vimos que o lugar geométrico dos pontos  $P(x, y) \in \mathcal{M}^2$  tais que  $d_{\mathcal{M}}(P, F_2) = 2a$  é o  $\mathcal{M}$ -círculo de equação

$$(x - w_1)^2 - (y - w_2)^2 = \pm 4a^2. \quad (2.23)$$

Portanto, se um ponto pertencente à  $\mathcal{M}$ -elipse  $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$  também pertence ao cone de luz  $C_L(F_1)$ , então o referido ponto pertence à reta  $x = y + z_1 - z_2$  ou à reta  $x = -y + z_1 + z_2$  e também pertence a uma das hipérbolas dadas em (2.23).

- (1) Assuma que o ponto  $P_1(x_1, y_1) \in \mathcal{E}_{\mathcal{M}}$  também pertença à reta  $x = y + z_1 - z_2$  e à hipérbole  $(x - w_1)^2 - (y - w_2)^2 = 4a^2$ . Então as coordenadas de  $P_1$  satisfazem:

$$x_1 = y_1 + z_1 - z_2 \quad (2.24)$$

e

$$(x_1 - w_1)^2 - (y_1 - w_2)^2 = 4a^2. \quad (2.25)$$

Substituindo a Equação (2.24) na Expressão (2.25) obtemos

$$\begin{aligned} 4a^2 &= (y_1 + z_1 - z_2 - w_1)^2 - (y_1 - w_2)^2 \\ &= y_1^2 + 2y_1(z_1 - z_2 - w_1) + (z_1 - z_2 - w_1)^2 - y_1^2 + 2y_1w_2 - w_2^2, \end{aligned}$$

o que implica em

$$2y_1([w_2 - w_1 + z_1 - z_2]) = 4a^2 + w_2^2 - (z_1 - z_2 - w_1)^2.$$

E assim encontramos

$$y_1 = \frac{4a^2 + w_2^2 - (z_1 - z_2 - w_1)^2}{2[w_2 - w_1 + z_1 - z_2]}$$

e, conseqüentemente,

$$x_1 = \frac{4a^2 + w_2^2 - (z_1 - z_2 - w_1)^2}{2[w_2 - w_1 + z_1 - z_2]} + z_1 - z_2.$$

- (2) Assuma  $P_2(x_2, y_2) \in \mathcal{E}_{\mathcal{M}}$  também pertença à reta  $x = -y + z_1 + z_2$  e à hipérbole

$(x_1 - w_1)^2 - (y_1 - w_2)^2 = 4a^2$ . Obtemos de maneira análoga ao caso (1), que

$$y_2 = \frac{4a^2 + w_2^2 - (z_1 + z_2 - w_1)^2}{2[w_1 + w_2 - z_1 - z_2]}$$

e

$$x_2 = \frac{4a^2 + w_2^2 - (z_1 + z_2 - w_1)^2}{2[z_1 + z_2 - w_1 - w_2]} + z_1 + z_2.$$

(3) Suponha que  $P_3(x_3, y_3) \in \mathcal{E}_{\mathcal{M}}$  também pertença à reta  $x = y + z_1 - z_2$  e à hipérbole  $(y - w_2)^2 - (x - w_1)^2 = 4a^2$ . Então encontramos

$$y_3 = \frac{4a^2 - w_2^2 + (z_1 - z_2 - w_1)^2}{2[w_1 - w_2 + z_2 - z_1]}$$

e

$$x_3 = \frac{4a^2 - w_2^2 + (z_1 - z_2 - w_1)^2}{2[w_1 - w_2 + z_2 - z_1]} + z_1 - z_2.$$

(4) Suponha que  $P_4(x_4, y_4) \in \mathcal{E}_{\mathcal{M}}$  também pertença à reta  $x = -y + z_1 + z_2$  e à hipérbole  $(y - w_2)^2 - (x - w_1)^2 = 4a^2$ . Neste caso, obtemos

$$y_4 = \frac{4a^2 - w_2^2 + (z_1 + z_2 - w_1)^2}{2[z_1 + z_2 - w_1 - w_2]}$$

e

$$x_4 = \frac{4a^2 - w_2^2 + (z_1 + z_2 - w_1)^2}{2[w_1 + w_2 - z_1 - z_2]} + z_1 + z_2.$$

#### Pontos de interseção de $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ com $C_L(F_2)$

Se  $P(x, y)$  é um ponto de  $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$  que pertence a  $C_L(F_2)$ , então  $P$  satisfaz simultaneamente às seguintes equações:  $d_{\mathcal{M}}(P, F_1) = 2a$  e  $d_{\mathcal{M}}(P, F_2) = 0$ . Em coordenadas, isso equivale a

$$\sqrt{|(x - z_1)^2 - (y - z_2)^2|} = 2a \quad (2.26)$$

e

$$\sqrt{|(x - w_1)^2 - (y - w_2)^2|} = 0. \quad (2.27)$$

O lugar geométrico dos pontos  $P(x, y)$  tais que  $d_{\mathcal{M}}(P, F_2) = 0$  são as retas

$$x = y + w_1 - w_2 \quad (2.28)$$

e

$$x = -y + w_1 + w_2. \quad (2.29)$$

E também o lugar geométrico dos pontos  $P(x, y) \in \mathcal{M}^2$  tais que  $d_{\mathcal{M}}(P, F_1) = 2a$  é o  $\mathcal{M}$ -círculo de equação

$$(x - z_1)^2 - (y - z_2)^2 = \pm 4a^2. \quad (2.30)$$

Portanto, se um ponto está na interseção de  $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$  com  $C_L(F_2)$ , então o referido ponto pertence a uma das retas  $x = y + w_1 - w_2$  e  $x = -y + w_1 + w_2$  e também pertence às hipérbolas dadas em 2.30.

- (5) Assuma que  $P_5(x_5, y_5) \in \mathcal{E}_{\mathcal{M}}$  também pertença à reta  $x = y + w_1 - w_2$  e à hipérbole  $(x - z_1)^2 - (y - z_2)^2 = 4a^2$ . Então

$$x_5 = y_5 + w_1 - w_2$$

e

$$(x_5 - z_1)^2 - (y_5 - z_2)^2 = 4a^2.$$

Substituindo  $x_5 = y_5 + w_1 - w_2$  na equação  $(x_5 - z_1)^2 - (y_5 - z_2)^2 = 4a^2$ . Obtemos

$$y_5 = \frac{4a^2 + z_2^2 - (w_1 - w_2 - z_1)^2}{2[z_2 - z_1 + w_1 - w_2]}$$

e, consequentemente

$$x_5 = \frac{4a^2 + z_2^2 - (w_1 - w_2 - z_1)^2}{2[z_2 - z_1 + w_1 - w_2]} + w_1 - w_2.$$

(6) Para  $P_6(x_6, y_6) \in \mathcal{E}_M$  também pertencente à reta  $x = -y + w_1 + w_2$  e à hipérbole  $(x - z_1)^2 - (y - z_2)^2 = 4a^2$ , encontramos

$$y_6 = \frac{4a^2 + z_2^2 - (w_1 + w_2 - z_1)^2}{2[z_1 + z_2 - w_1 - w_2]}$$

e

$$x_6 = \frac{4a^2 + z_2^2 - (w_1 + w_2 - z_1)^2}{2[w_1 + w_2 - z_1 - z_2]} + w_1 + w_2.$$

(7) Suponha que  $P_7(x_7, y_7) \in \mathcal{E}_M$  também pertença à reta  $x = y + w_1 - w_2$  e a hipérbole  $(y - z_2)^2 - (x - z_1)^2 = 4a^2$ . Então

$$x_7 = y_7 + w_1 - w_2$$

e

$$(y_7 - z_2)^2 - (x_7 - z_1)^2 = 4a^2.$$

Substituindo  $x_7 = y_7 + w_1 - w_2$  na equação  $(y_7 - z_2)^2 - (x_7 - z_1)^2 = 4a^2$  obtemos que

$$y_7 = \frac{4a^2 - z_2^2 + (w_1 - w_2 - z_1)^2}{2[z_1 - z_2 - w_1 + w_2]}$$

e

$$x_7 = \frac{4a^2 - z_2^2 + (w_1 - w_2 - z_1)^2}{2[z_1 - z_2 - w_1 + w_2]} + w_1 - w_2.$$

(8) Para  $P_8(x_8, y_8) \in \mathcal{E}_M$  também pertencente à reta  $x = -y + w_1 + w_2$  e à hipérbole  $(y - z_2)^2 - (x - z_1)^2 = 4a^2$ , obtemos

$$y_8 = \frac{4a^2 - z_2^2 + (w_1 + w_2 - z_1)^2}{2[w_1 + w_2 - z_1 - z_2]}.$$

e

$$x_8 = \frac{4a^2 - z_2^2 + (w_1 + w_2 - z_1)^2}{2[z_1 + z_2 - w_1 - w_2]} + w_1 + w_2.$$

Uma vez encontrados os pontos delimitantes da  $\mathcal{M}$ -elipse, passaremos agora a deduzir suas equações gerais.

### Equações gerais da $\mathcal{M}$ -elipse

Lembremos que, se um ponto  $P(x, y) \in \mathcal{E}_M$  não pertence aos cones de luz  $C_L(F_1)$  e  $C_L(F_2)$ , então as coordenadas de  $P$  satisfazem simultaneamente as seguintes desigualdades  $0 < \sqrt{|(x - z_1)^2 - (y - z_2)^2|} < 2a$  e  $0 < \sqrt{|(x - w_1)^2 - (y - w_2)^2|} < 2a$ , obedecendo 2.18.

Como feito na seção anterior, temos os seguintes casos:

- Caso Geral I -  $|x - z_1| > |y - z_2|$  e  $|x - w_1| > |y - w_2|$ ;
- Caso Geral II -  $|x + c| < |y|$  e  $|x - c| < |y|$ ;
- Caso Geral III -  $|x + c| > |y|$  e  $|x - c| < |y|$ ;
- Caso Geral IV -  $|x + c| < |y|$  e  $|x - c| > |y|$ .

Para melhorar as contas, faremos  $2a = k$ .

**Caso Geral I** - Suponha  $|x - z_1| > |y - z_2|$  e  $|x - w_1| > |y - w_2|$ . A Equação(2.18) torna-se

$$\sqrt{(x - z_1)^2 - (y - z_2)^2} + \sqrt{(x - w_1)^2 - (y - w_2)^2} = k$$

o que implica em

$$\sqrt{(x - z_1)^2 - (y - z_2)^2} = k - \sqrt{(x - w_1)^2 - (y - w_2)^2}.$$

Elevando ao quadrado ambos os lados da igualdade, obtemos

$$(x - z_1)^2 - (y - z_2)^2 = k^2 - 2k\sqrt{(x - w_1)^2 - (y - w_2)^2} + (x - w_1)^2 - (y - w_2)^2.$$

Expandindo os quadrados e reorganizando os termos, encontramos que

$$(2x - z_1 - w_1)(w_1 - z_1) + (2y - w_2 - z_2)(z_2 - w_2) - k^2 = 2k\sqrt{(x - w_1)^2 - (y - w_2)^2}.$$

Elevando novamente ambos os lados da igualdade ao quadrado, temos

$$\begin{aligned} ((2x - w_1 - z_1)(w_1 - z_1) + (2y - z_2 - w_2)(z_2 - w_2) - k^2)^2 = 4k^2((x - w_1)^2 - (y - w_2)^2). \end{aligned} \quad (2.31)$$

Desenvolvendo o primeiro membro da equação (2.31) obtemos

$$\begin{aligned} & ((2x - w_1 - z_1)(w_1 - z_1) + (2y - z_2 - w_2)(z_2 - w_2) - k^2)^2 = \\ & 4x^2(w_1 - z_1)^2 - 4x(w_1 - z_1)(w_1^2 - z_1^2 + z_2^2 - w_2^2 + k^2) + \\ & + 4y^2(z_2 - w_2)^2 - 4y(z_2 - w_2)(w_1^2 - z_1^2 + z_2^2 - w_2^2 + k^2) + \\ & + 8xy(w_1 - z_1)(z_2 - w_2) + ((w_1^2 - z_1^2) + (z_2^2 - w_2^2))^2 + \\ & + 2k^2(w_1^2 - z_1^2 + z_2^2 - w_2^2) + k^4. \end{aligned}$$

Desenvolvendo o segundo membro da equação (2.31), obtemos

$$\begin{aligned} 4k^2((x - w_1)^2 - (y - w_2)^2) &= 4k^2(x^2 - 2xw_1 + w_1^2 - y^2 + 2yw_2 - w_2^2) \\ &= 4k^2x^2 - 8k^2w_1x + 4k^2w_1^2 - 4k^2y^2 + 8k^2w_2y - 4k^2w_2^2. \end{aligned}$$

Igualando as expressões obtidas e reorganizando os termos, obtemos

$$\begin{aligned} & 4x^2((w_1 - z_1)^2 - k^2) + 8xy(w_1 - z_1)(z_2 - w_2) + 4y^2((z_2 - w_2)^2 + k^2) \\ & + 4x((w_1 - z_1)(z_1^2 - w_1^2 + w_2^2 - z_2^2 - k^2) + 2k^2w_1) \\ & + 4y((z_2 - w_2)(z_1^2 - w_1^2 + w_2^2 - z_2^2 - k^2) - 2k^2w_2) \\ & + (z_1^2 - w_1^2 + w_2^2 - z_2^2 - k^2)^2 - 4k^2w_1^2 + 4k^2w_2^2 = 0. \end{aligned}$$

com  $k = 2a$ .

**Caso Geral II** - Suponha que  $|x - z_1| < |y - z_2|$  e  $|x - w_1| < |y - w_2|$ . Então a Equação(2.18) torna-se

$$\sqrt{(y - z_2)^2 - (x - z_1)^2} + \sqrt{(y - w_2)^2 - (x - w_1)^2} = k,$$

de onde obtemos

$$\sqrt{(y - z_2)^2 - (x - z_1)^2} = k - \sqrt{(y - w_2)^2 - (x - w_1)^2}.$$

Elevando ambos os lados da igualdade ao quadrado e reorganizando os termos, encontramos

$$(y - z_2)^2 - (y - w_2)^2 + (x - w_1)^2 - (x - z_1)^2 - k^2 = -2k\sqrt{(y - w_2)^2 - (x - w_1)^2},$$

e então,

$$(2y - z_2 - w_2)(w_2 - z_2) + (2x - w_1 - z_1)(z_1 - w_1) - k^2 = -2k\sqrt{(y - w_2)^2 - (x - w_1)^2}. \quad (2.32)$$

Elevando novamente ambos os lados da igualdade ao quadrado,

$$\left( (2y - z_2 - w_2)(w_2 - z_2) + (2x - w_1 - z_1)(z_1 - w_1) - k^2 \right)^2 = 4k^2 \left( (y - w_2)^2 - (x - w_1)^2 \right). \quad (2.33)$$

Desenvolvendo ambos os lados da igualdade (2.33), encontramos que

$$\begin{aligned} & 4y^2 \left( (w_2 - z_2)^2 - k^2 \right) + 8xy(w_2 - z_2)(z_1 - w_1) + 4x^2 \left( (z_1 - w_1)^2 + k^2 \right) \\ & + 4y \left( (w_2 - z_2)(w_1^2 - w_2^2 + z_2^2 - z_1^2 - k^2) + 2k^2 w_2 \right) \\ & + 4x \left( (z_1 - w_1)(w_1^2 - w_2^2 + z_2^2 - z_1^2 - k^2) - 2k^2 w_1 \right) \\ & + (w_1^2 - w_2^2 + z_2^2 - z_1^2 - k^2)^2 - 4k^2 w_2^2 + 4k^2 w_1^2 = 0. \end{aligned}$$

**Caso Geral III** - Suponha  $|x - z_1| > |y - z_2|$  e  $|x - w_1| < |y - w_2|$ . Então a Equação (2.18) se torna

$$\sqrt{(x - z_1)^2 - (y - z_2)^2} + \sqrt{(y - w_2)^2 - (x - w_1)^2} = k$$

o que implica em

$$\sqrt{(x - z_1)^2 - (y - z_2)^2} = k - \sqrt{(y - w_2)^2 - (x - w_1)^2}.$$

Elevando ao quadrado ambos os lados da igualdade, e reorganizando os termos obtemos

$$2x^2 - 2y^2 - 2x(z_1 + w_1) + 2y(z_2 + w_2) + z_1^2 - z_2^2 - w_2^2 + w_1^2 - k^2 = 2k\sqrt{(y - w_2)^2 - (x - w_1)^2}$$

Elevando novamente ao quadrado em ambo os lados da equação e desenvolvendo temos a forma geral para este caso

$$\begin{aligned} &4x^4 - 8x^2y^2 + 4y^4 - 8x^3(z_1 + w_1) + 8x^2y(z_2 + w_2) + 8y^2x(z_1 + w_1) \\ &\quad - 8y^3(z_2 + w_2) + 4x^2((z_1 + w_1)^2 + z_1^2 - z_2^2 - w_2^2 + w_1^2) \\ &- 8xy(z_1 + w_1)(z_2 + w_2) + 4y^2((z_2 + w_2)^2 - (z_1^2 - z_2^2 - w_2^2 + w_1^2 - k^2) - k^2) \\ &\quad - 4x((z_1 + w_1)(z_1^2 - z_2^2 - w_2^2 + w_1^2 - k^2) + 2k^2w_1) \\ &\quad + 4y((z_2 + w_2)(z_1^2 - z_2^2 - w_2^2 + w_1^2 - k^2) + 2k^2w_2) \\ &\quad + (z_1^2 - z_2^2 - w_2^2 + w_1^2 - k^2)^2 - 4k^2w_2^2 + 4k^2w_1^2 = 0. \end{aligned}$$

**Caso IV** - Suponha  $|x - z_1| < |y - z_2|$  e  $|x - w_1| > |y - w_2|$ . Então a Equação (2.18) se torna

$$\sqrt{(y - z_2)^2 - (x - z_1)^2} + \sqrt{(x - w_1)^2 - (y - w_2)^2} = k$$

o que implica em

$$\sqrt{(y - z_2)^2 - (x - z_1)^2} = k - \sqrt{(x - w_1)^2 - (y - w_2)^2}.$$

Procedendo como nos casos anteriores, encontramos a seguinte equação

$$\begin{aligned} &4y^4 - 8x^2y^2 + 4x^4 - 8y^3(z_2 + w_2) + 8y^2x(z_1 + w_1) + 8x^2y(z_2 + w_2) - 8x^3(z_1 + w_1) \\ &\quad + 4y^2((z_2 + w_2)^2 + z_2^2 - z_1^2 + w_2^2 - w_1^2) - 8xy(z_2 + w_2)(z_1 + w_1) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&+4x^2((z_1 + w_1)^2 - (z_2^2 - z_1^2 + w_2^2 - w_1^2 - k^2) - k^2) \\
&-4y((z_2 + w_2)(z_2^2 - z_1^2 + w_2^2 - w_1^2 - k^2) + 2k^2w_2) \\
&+4x((z_1 + w_1)(z_2^2 - z_1^2 + w_2^2 - w_1^2 - k^2) + 2k^2w_1) \\
&+(z_2^2 - z_1^2 + w_2^2 - w_1^2 - k^2)^2 - 4k^2w_1^2 + 4k^2w_2^2 = 0.
\end{aligned}$$

Estas são, portanto, as equações gerais de uma  $\mathcal{M}$ -elipse no plano de Minkowski. Para concluir este capítulo, e também este trabalho, faremos um exemplo onde os focos tem a característica especial de que um está contido no cone de luz do outro.

**Exemplo 2.3** *Determine a  $\mathcal{M}$ -elipse de focos  $F_1 = (1, 1)$  e  $F_2 = (0, 2)$ , com  $a = 2$ .*

**Solução:** Para este caso, veja que  $d_{\mathcal{M}}(F_1, F_2) = 0$ , isto é,  $c = 0$ . Consequentemente, ao analisar os pontos delimitantes, encontramos que a reta  $x = -y + 2$  é uma assíntota de  $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ . Os pontos  $P_2, P_4, P_6$  e  $P_8$  que deveriam delimitar  $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$  são chamados “pontos no infinito” ou “pontos ideais”. Os demais são:  $P_1(5, 5)$ ,  $P_3(-3, -3)$ ,  $P_5(-4, -2)$  e  $P_7(4, 6)$ .

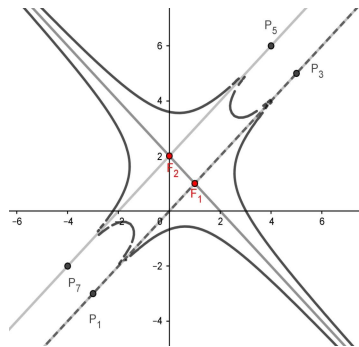
Agora, substituindo as coordenadas dos focos  $F_1$  e  $F_2$  e o valor de  $a = 2$  nas equações encontradas nos quatros casos gerais, obtemos

$$\mathcal{E}_{\mathcal{M}} : \left\{ \begin{array}{l} -60x^2 + 8xy + 68y^2 + 48x - 208y + 400 = 0 \\ -60y^2 + 8xy + 68x^2 + 176y - 80x + 144 = 0 \\ 4x^4 - 8x^2y^2 + 4y^4 - 8x^3 + 24x^2y + 8y^2x + \\ -24y^3 - 12x^2 - 24xy + 52y^2 + 80x + 16y + 144 = 0 \\ 4y^4 - 8x^2y^2 + 4x^4 - 24y^3 + 8y^2x + 24x^2y + \\ -8x^3 + 52y^2 - 24xy - 12x^2 - 112y - 48x + 400 = 0 \end{array} \right.$$

Estamos, portanto, em condições de esboçar o traço da  $\mathcal{M}$ -elipse. Veja a Figura 2.15

**Observação 2.4** *Em geral, se os focos de uma  $\mathcal{M}$ -elipse estiverem na mesma reta tipo-luz, temos seis pontos delimitantes, sendo dois deles pontos ideais. Além disso, os dois focos estão dentro da  $\mathcal{M}$ -elipse.*

Figura 2.15:  $\mathcal{M}$ -elipse de focos:  $F_1(1, 1)$ ,  $F_2(0, 2)$  e  $a = 2$



Fonte: Elaborada pelo autor usando geogebra versão 5.0.

# Considerações Finais

Este trabalho teve por objetivo estudar a Elipse no plano de Minkowski, deduzindo suas equações reduzidas e gerais. Para tanto, procuramos contribuir para o melhor entendimento dos assuntos base, através da inserção de exemplos e proposições que julgamos relevantes para diferenciar a conhecida geometria euclidiana da pouco conhecida geometria de Minkowski.

Vale destacar que este trabalho não é autossuficiente e os assuntos aqui tratados, bem como sua aplicabilidade, principalmente na Física, são bem mais profundos do que se pode imaginar. Portanto, incentivamos àqueles que se interessarem por este tema a melhorarem ou complementarem e que aqui foi tratado.

Destacamos, ainda, que um estudo análogo ao da  $\mathcal{M}$ -elipse pode ser feito para os casos da hipérbole e da parábola no plano de Minkowski, e indicamos o artigo de Shonoda [20] para o passo inicial nesta direção. Também registramos que deixamos propositalmente de tratar sobre assuntos envolvendo a trigonometria hiperbólica (isto é, estudar as funções trigonométricas considerando o  $\mathcal{M}$ -círculo no lugar do círculo euclidiano), entendendo que fugiria da proposta do tema, mas incentivamos seu estudo tendo em vista as várias áreas e campos de aplicabilidade da mesma.

# Bibliografia

- [1] ACEFF-SÁNCHEZ, F.; SENIOR, L. Geometry of the conics on the Minkowski plane. **arXiv preprint arXiv:0712.2234**, 2007.
- [2] ALVES, G.C. **Uso de geometria não euclidiana no ensino médio: o exemplo do plano de Minkowski**. 2020. Dissertação (Programa de mestrado profissional em matemática em rede nacional)- Universidade de Brasília, Brasília, 2020.
- [3] BIEZUNER, R.J. **Relatividade Especial, Geral e Geometria Lorentziana**, 2017, 276 f. Notas de aula.
- [4] BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, DF, 2017. Disponível em: < [http : // basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC\\_EI\\_EF\\_110518-versaofinal\\_site.pdf](http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518-versaofinal_site.pdf) >. Acesso em: 05 ago. 2021.
- [5] BRASIL. Parâmetros curriculares nacionais: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental: introdução aos parâmetros curriculares nacionais. Brasília: MEC/SEF, 1998.  
Disponível em:< [http : // portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/introducao.pdf](http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/introducao.pdf) >.
- [6] COUTO, I.T.; LYMBEROPOULOS, A. **Introdução a Geometria Lorentziana: Curvas e Superfícies**, Rio de Janeiro: SBM, 1ª edição, 2018.
- [7] CRUZ. D.G.; SANTOS, C.H. Algumas diferenças entre a Geometria Euclidiana e as Geometrias Não Euclidianas-Hiperbólica e Elíptica a serem abordados nas séries do Ensino Médio. In: Secretaria da educação, 2008, Curitiba. **Dia a Dia Educação**. Paraná, 2008. Disponível em: < [http : // www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/1734-6.pdf](http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/1734-6.pdf) >. Acesso em: 05 ago. 2021.
- [8] DELGADO, J, FRENSEL, K.; CRISSAFF, L. **Geometria analítica**. SBM, 2013 (Coleção PROFMAT).

- [9] EDUARDO, E.C. **Geometrias Não-Euclidianas e a Geometria da Relatividade**. 2013. Trabalho de conclusão de curso (Licenciatura em Matemática)- Instituto Federal de São Paulo, São Paulo, 2013.
- [10] <https://geogebra.br.uptodown.com/windows>. Acesso em: 04 ago. 2021.
- [11] HOFFMAN, K.; KUNZER, R. **Álgebra linear** tradução de Renate Watanabe. - 2. ed. - Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1979.
- [12] RIBEIRO, R.D.G.L. **O Ensino das Geometrias não euclidianas: Um olhar sob a perspectiva da divulgação científica**. 2012. Dissertação (Programa de pós graduação em educação. Área de concentração: Em ensino de Ciências e matemática)- Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2012.
- [13] JESUS, M. A. S.; SILVA, R. C.O. A Teoria de David Ausubel - O uso dos Organizadores Prévios no Ensino Contextualizado de Funções. In VIII Encontro Nacional de Educação Matemática. 15-18 jul. 2004, Recife. Anais. Recife. Disponível em: < [http : //www.sbem.com.br/files/viii/pdf/03/MC05002402801.pdf](http://www.sbem.com.br/files/viii/pdf/03/MC05002402801.pdf) >. Acesso em: 31 ago. 2021.
- [14] KALLEF, A. M.; NASCIMENTO, R. S. Atividades Introdutórias às Geometrias Não-Euclidianas: o exemplo da Geometria do Táxi.**Boletim Gepem**, Rio de Janeiro, dezembro 2004, 11-42.
- [15] KRAUSE, E. **Taxicab geometry: an adventure in non euclidean geometry** (reprinted from 1975). NY: Dover, 1986.
- [16] LEE, N.H. **Geometry: From Isometries to Special Relativity**, Springer, 2020.
- [17] PARANÁ. **Diretrizes Curriculares da Educação Básica: Matemática**. Curitiba: SEE/PR, 2008.
- [18] RAMOS L. M. **Teorema de Schur no Plano de Minkowki e Caracterização de Hélices inclinadas no espaço de Minkowski**. 2013. Dissertação (Programa de pós graduação em matemática)- Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2013.

- [19] RATCLIFFE, J.G. **Foundations of Hyperbolic Manifolds**, Springer, 2010, Third Edition.
- [20] SHONODA, E.N, **Classification of conics and Cassini curves in Minkowski space-time plane**, **Journal of the Egyptian Mathematical Society** 24 (2016), 270-278.
- [21] VALÉRIO, A. C. **Tópicos de Geometria Analítica em  $\mathbb{R}^2$  com a Métrica  $d_1$  : um estudo das Cônicas**. 2017. Dissertação (Programa de mestrado profissional em matemática em rede nacional)- Universidade Federal do Acre, Rio Branco, 2017.
- [22] VIEIRA, C. N.; BATISTA, E. B.; TAVARES, L. S. Explorando conceitos de geometria não-euclidiana com softwares de geometria dinâmica. **C.Q.D. - Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, Bauru, v. 18, p. 37-48, jul. 2020.  
DOI: 10.21167/cqdv18202023169664canvebb1st3748. Disponível em: <[www.fc.unesp.br/departamentos/matematica/revista - cqd/](http://www.fc.unesp.br/departamentos/matematica/revista - cqd/)>. Acesso em 04 Ago. 2021.