Bianca Nogueira Silva Prado

Funções polinomiais: um caminho possível para a introdução de derivadas e aplicações no Ensino Médio.

Vitória da Conquista

2021

Bianca Nogueira Silva Prado

Funções polinomiais: um caminho possível para a introdução de derivadas e aplicações no Ensino Médio.

Trabalho de Conclusão de curso apresentada ao colegiado do curso de pós graduação em Matemática da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, como requisito parcial para obtenção do Grau de mestrando em Matemática.

Universidade Estadual do Sudoeste Da Bahia – UESB

Orientador: Dr. André Nagamine – UESB

Vitória da Conquista

2021

P916f Prado, Bianca Nogueira Silva.
Funções polinomiais: um caminho possível para a introdução de derivadas e aplicações no ensino médio. / Bianca Nogueira Silva Prado, 2021.
50f. il.
Orientador (a): Dr. André Nagamine.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Vitória da Conquista - BA, 2021.
Inclui referências. 49 - 50.
1. Polinômios. 2. O ensino do cálculo. 3. Conceitos – Derivadas - Aplicações. I. Nagamine, André. II. Universidade Estadual Sudoeste da Bahia, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Vitória da Conquista, III. T.

CDD: 510

Catalogação na fonte: Juliana Teixeira de Assunção-CRB 5/1890
UESB – Campus Vitória da Conquista – BA

Bianca Nogueira Silva Prado

Funções polinomiais: um caminho possível para a introdução de derivadas e aplicações no Ensino Médio

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB, como requisito necessário para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. André Nagamine
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia - UESB

Prof. Dr. Sérgio da Silva Aguiar
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia - UESB

Prof. Dr. Gildson Queiroz de Jesus
Universidade Estadual de Santa Cruz - UESC

Vitória da Conquista – Ba, 10 de agosto de 2021

A matemática, vista corretamente, possui não apenas verdade, mas também suprema beleza uma beleza fria e austera, como a da escultura. (Bertrand Russel)

Resumo

O estudo dos polinômios no ensino básico se constitui em um conteúdo de grande importância para o aprendizado do aluno, nesse sentido, o objetivo principal deste trabalho é propor o ensino de Cálculo no Ensino Médio, especificamente, o uso das derivadas para funções polinomiais. Primeiramente é apresentado o estudo dos polinômios, tópicos de limites e em seguida a noção de derivadas com restrição às funções polinomiais. Por fim, são apresentados problemas matemáticos que podem ser modelados e resolvidos pela aplicação de derivadas polinomiais e utilizados no Ensino Médio, apresentando aplicações em diversas áreas.

Palavras-chave: Polinômios, O ensino do Cálculo, Conceitos, Derivadas, Aplicações.

Abstract

The study of polynomials in basic education is a content of great importance for the student's learning, in this sense, the main objective of this work is to propose the teaching of Calculus in High School, specifically, the use of derivatives for polynomial functions. First the study of polynomials, boundary topics, and then the notion of derivatives restricted to polynomial functions. Finally, mathematical problems are presented that can be modeled and solved by the application of polynomial derivatives and used in high school, presenting applications in several areas.

Keywords: Polynomials, The teaching of calculus, Concepts, Derivatives, Applications.

Lista de ilustrações

Sumário

1 Introdução

O ensino da Álgebra, muitas vezes recebe uma atenção maior por parte dos professores da educação básica, no entanto, muitos deles trabalham os conteúdos de maneira abstrata e passam uma ideia de que a Matemática é algo que está longe do cotidiano dos estudantes. Outra característica que percebemos no atual cenário da educação básica é que os conteúdos são trabalhados de forma independente, com a mínima ou nenhuma menção a conteúdos já vistos pelos alunos.

Na maioria das vezes, mesmo que seja necessário o conhecimento ou a utilização de algum conteúdo anterior, estes são utilizados de forma mecânica, pois o aluno não consegue perceber a ligação entre eles e não consegue contextualizar. Sendo assim podemos mostrar a importância do conteúdo empregando-o no dia a dia, como por exemplo, os polinômios que podem ser utilizados para o cálculo de área de superfícies, para determinar uma função custo mensal, dentre outras aplicações.

Desse modo, utilizar conceitos do Cálculo Diferencial no Ensino Médio é uma forma de romper com a mecanização na matemática, tornando o aprendizado mais significativo e, por outro lado, é dada a oportunidade de rever e utilizar conteúdos já vistos e de introduzir novos conhecimentos.

Com esse pensamento, no presente trabalho focaremos no estudo dos Máximos e Mínimos de Funções Polinomiais como uma ferramenta poderosa e apresentaremos uma maneira para que os professores da educação básica possam utilizar tal conteúdo de forma mais proveitosa para os alunos, de modo que os mesmos possam ver a Matemática como parte do cotidiano. Além disso, pensando em trazer significado e relevância ao processo de ensino aprendizagem da matemática, entendemos a necessidade de introduzir, mesmo que de maneira intuitiva, a noção de derivada, fazendo o uso do Cálculo Diferencial e possibilitar novos padrões de ensino da Matemática.

> Descartar o Cálculo no ensino é grave, porque deixa de lado uma componente significativa e certamente a mais relevante da Matemática para a formação do aluno num contexto de ensino moderno e atual. (ÁVILA 1991, p. 7)

A estrutura do trabalho conta inicialmente com o estudo dos Polinômios, com uma abordagem sutil, que emprega sua definição até mesmo suas operações, e vai se aprofundando através de teoremas como, por exemplo, o Teorema do resto, o Teorema de D' Alembert e o importantíssimo Teorema Fundamental da Álgebra, e mostrando assim as ferramentas disponíveis para a resolução de diversos problemas. Com isso é possível mostrar como se inicia o estudo dos polinômios no ensino médio e seu desenvolvimento até suas aplicações, evidenciando sua importância no dia a dia, sobretudo em sua utilização na resolução de problemas envolvendo máximos e mínimos, que será o foco do trabalho.

A segunda parte do trabalho trás a abordagem da derivada de forma simples, começando com uma revisão do conceito de limites e, em seguida, é apresentado o conceito de taxa de variação e iniciado a definição de derivadas. Por fim, são expostos alguns de seus resultados em diversas situações-problema que abrangem diversas áreas do conhecimento. Tem em mente que esta forma em que está sendo apresentado o conteúdo é uma tentativa de mostrar como pode ser trabalhado o conceito de Derivadas no ensino médio frisando sua aplicação em diversas áreas.

Em sequência, como aplicação das derivadas, daremos foco à apresentação de Máximos e mínimos, mostraremos a sua teoria, seguida de algumas aplicações contextualizadas, como por exemplo, na otimização de materiais que podem possibilitar um rendimento para uma certa empresa ou até mesmo para um comerciante.

2 Polinômios

Neste capítulo iremos ver um pouco da teoria sobre os polinômios e também alguns resultados, para que futuramente seja empregado nas aplicações.

2.1 Definições e Resultados

Inicialmente iremos definir as funções polinomiais e suas propriedades , em seguida apresentaremos alguns resultados e exemplos.

Definição : Dada a sequência de números reais $(a_0, a_1, a_2, ..., a_n)$, consideremos a função: $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$. A função f é denominada função polinomial associado a sequência dada.
Os números $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ são denominados coeficientes e as parcelas $a_0, a_1x, a_2x^2, ..., a_nx^n$ são termos do polinômios f.
Observação: Doravante iremos nos referir às funções polinomiais simplesmente como "polinômios".

Exemplos Vejamos alguns exemplos:

a) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + x + 1$, onde $a_0 = 1, a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 2$

b) $g(x) = 2x^2 + 3x + 2$, onde $a_0 = 2, a_1 = 3, a_2 = 2$

Definição : Dado o número real a e o polinômio $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$, chama-se valor numérico de f em a a imagem de a pela função f, isto é:

$$f(a) = a_0 + a_1a + a_2a^2 + ... + a_na^n$$

Sendo assim tomamos como exemplo a função

$$f(x) = 2x^2 + 4x + 8$$

com isso:

$$f(2) = 2.(2)^2 + 4.2 + 8 = 24$$

Notação: Se a é um número real e f é um polinômio tal que $f(a) = 0$ dizemos que a é uma raiz ou um zero de f.

2.2 Igualdade entre Polinômios

Agora iremos definir quando dois polinômios são iguais e os requisitos para que isso ocorra.

Definição: Dizemos que um polinômio f é nulo (ou identicamente nulo) quando f assume o valor numérico zero para todo x real. Sendo assim:

$$f = 0 \Longleftrightarrow f(x) = 0,\ \forall\ x \in \mathbb{R}$$

Teorema: Um polinômio f é nulo se, e somente se, todos os coeficientes de f forem nulos. Seja $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$, temos:

$$f = 0 \Longleftrightarrow a_0 = a_1 = ... = a_n = 0$$

Demonstração:

$\Leftarrow$] Segue de imediato que se $a_0 = a_1 = a_2 = ... = a_n = 0$, então ao substituirmos em f, temos:

$$f(x) = 0 + 0x + 0x^2 + ... + 0x^n = 0,\ \forall\ x \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow$] Supondo que $f = 0$, então existem $n+1$ números reais $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ distintos dois a dois, que são raízes de f, isto é:

$$\begin{gathered}
f(\alpha_0) = a_0 + a_1\alpha_0 + a_2\alpha_0^2 + ... + a_n\alpha_0^n \\
f(\alpha_1) = a_0 + a_1\alpha_1 + a_2\alpha_1^2 + ... + a_n\alpha_1^n \\
f(\alpha_2) = a_0 + a_1\alpha_2 + a_2\alpha_2^2 + ... + a_n\alpha_2^n \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
f(\alpha_n) = a_0 + a_1\alpha_n + a_2\alpha_n^2 + ... + a_n\alpha_n^n
\end{gathered}$$

Observando atentamente podemos notar que estamos com um sistema linear e homogêneo $(n+1)$x$(n+1)$, considerando a matriz dos coeficientes sistema linear, obtemos

$$D = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_0 & \alpha_0^2 & ... & \alpha_0^n \\ 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & ... & \alpha_1^n \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & ... & \alpha_2^n \\ & & ... & & \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & ... & \alpha_n^n \end{vmatrix}$$

A matriz D acima é um tipo de matriz conhecida como matriz de Vandermond e tem a propriedade de que seu determinante é diferente de zero, fazendo com que o sistema tenha apenas uma solução que é justamente a trival.

Logo $a_0 = a_1 = a_2 = ... = a_n = 0$

Definição: Dizemos que dois polinômios f e g são iguais (ou idênticos) quando assumem valores numéricos iguais para todo x real. Sendo assim definimos:

$$f = g \Leftrightarrow f(x) = g(x),\ \forall\ x \in \mathbb{R}$$

Teorema: Dois polinômios f e g são iguais se, e somente se, os coeficientes de f e g forem iguais. Ou seja,

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i$$

$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + ... + b_nx^n = \sum_{i=0}^{n} b_ix^i$$

Sendo assim

$$f = g \Leftrightarrow a_i = b_i, \forall\ i \in \{0, 1, 2, ..., n\}$$

Demonstração:

$\forall x \in \mathbb{R}$, temos:

$$a_i = b_i \Leftrightarrow a_i - b_i = 0 \Leftrightarrow$$

$$(a_i - b_i)x^i = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n}(a_i - b_i)x^i = 0 \Leftrightarrow$$

$$\sum_{i=0}^{n} a_ix^i - \sum_{i=0}^{n} b_ix^i = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n} a_ix^i = \sum_{i=0}^{n} b_ix^i \Leftrightarrow f(x) = g(x)$$

2.3 Operações

Adição

Definição: Dados dois polinômios

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i$$

$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + ... + b_nx^n = \sum_{i=0}^{n} b_ix^i$$

Chama-se soma dos polinômios f e g, quando tivermos

$$(f + g)(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + ... + (a_n + b_n)x^n$$

$$(f+g)(x) = \sum_{i=0}^{n}(a_i + b_i)x^i$$

Exemplo: Dados os polinômios $f(x) = 3x^3 + 2x^2 + x - 7$ e $g(x) = 4x^2 - 8x + 9$. Calcule $(f+g)(x)$.
Resolução: Sendo assim faremos:

$$(f+g)(x) = 3x^3 + (2+4)x^2 + (1-8)x + (-7+9)$$
$$(f+g)(x) = 3x^3 + 6x^2 - 7x + 2$$

Observação: Em relação a adição de polinômios as seguintes propriedades são validas:
· Associatividade
· Comutatividade
· Existência do Elemento Neutro e do Elemento Inverso, que no caso da soma é chamado de simétrico.

Para uma análise mais detalhada em relação as demonstrações das propriedades mencionadas acima, procure no (IEZZI, 1977).

Subtração

Definição: Sejam

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i$$

$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + ... + b_nx^n = \sum_{i=0}^{n} b_ix^i$$

Chama-se subtração de polinômios f e g, quando tivermos:

$$(f-g)(x) = (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)x + (a_2 - b_2)x^2 + ... + (a_n - b_n)x^n$$

$$(f-g)(x) = \sum_{i=0}^{n}(a_i - b_i)x^i$$

Multiplicação

Definição: Dados dois polinômios

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_mx^m$$

$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + ... + b_nx^n$$

Chama-se de poduto fg, quando

$$(fg)(x) = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_2b_0 + a_1b_1 + a_0b_2)x^2 + ... + a_mb_nx^{m+n}$$

De modo geral notamos que fg pode ser obtido multiplicando-se cada termo a_ix^i de f por cada termo b_jx^j de g, segundo a regra $(a_ix^i).(b_jx^j) = a_ib_jx^{i+j}$, e somando os resultados obtidos.

Observação: São válidas as seguintes propriedades em relação a multiplicação de polinômios.

· Associatividade
· Comutatividade
· Existência do Elemento Neutro
· Propriedade da Distributividade

Grau

Seja $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$ um polinômio não nulo. Chama-se de grau de f, e denotamos por ∂f ou $dr\ f$, o número natural p tal que $a_p \neq 0$ e $a_i = 0$ para todo $i > p$.

$$\partial f = p \Leftrightarrow \begin{cases} a_p \neq 0 \\ a_i = 0, \forall i > p \end{cases}$$

Sendo assim o Grau de f é o maior indicie para o qual $a_p \neq 0$.

Teorema: Se f, g e $f + g$ são polinômios não nulos, então o grau de $f + g$ é menor ou igual ao maior dos números ∂f e ∂g.

$$\partial(f + g) < max\{\partial f, \partial g\}$$

A demonstração do teorema pode ser encontrada no (IEZZI, 1977).

Assim como definimos o maior grau em relação a adição, podemos determinar também em relação a multiplicação.

Teorema: Se f e g são dois polinômios não nulos, então o grau de fg é igual à soma dos graus de f e g.

$$\partial fg = \partial f + \partial g$$

Demonstração:

Se

$$f(x) = \sum_{i=0}^{m} a_ix^i$$

e

$$g(x) = \sum_{j=0}^{n} b_jx^j,$$

$\partial f = m$ e $\partial g = n$, seja $c_k = a_0b_k + a_1b_{k-1} + ... + a_{k-1}b_1 + a_kb_0$ um coeficiente qualquer de $(fg)(x)$.
Temos:

$$c_{m+n} = a_m.b_n \neq 0$$

$$c_k = 0,\ para\ todo\ k > m+n$$

Então

$$\partial(fg) = m + n = \partial f + \partial g.$$

Divisão

Definição: Dados dois polinômios f(dividendo) e $g \neq 0$ (divisor) , dividir f por g é determinar dois outros polinômios q (quociente) e r (resto) de modo que se verificarem as duas condições seguintes:

· $f = q.g + r$

· $\partial r < \partial g$ (ou $r = 0$, caso em que chamamos de divisão exata)

Métodos Para Divisão

Divisão Imediata: Consideremos o polinômio $qg+r$, onde $g \neq 0$ e $\partial r < \partial g\ ou\ r = 0$.
Com isso temos a ocorrência de três casos:
$I)$ Se $q = 0$ e $r = 0$, então $qg + r = 0g + 0 = 0$.
$II)$ Se $q = 0$ e $r \neq 0$, então $qg + r = 0g + r = r$, portanto, $\partial(qg + r) = \partial r < \partial g$
$III)$ Se $q \neq 0$, então $\partial(qg) = \partial q + \partial g \geq \partial g$, portanto, $\partial(qg + r) \geq \partial g$ pois a parcela r tem grau menor que g ou é nula.

Método de Descartes: Esse método também é conhecido como método dos coeficientes a determinar, baseia-se nos seguintes fatos:
$I)$ $\partial q = \partial f - \partial g$, o que é consequência da definição pois: $qg + r = f \Rightarrow \partial(qg + r) = \partial(f)$ então $\partial g + \partial q = \partial f$.
$II)$ $\partial r < \partial g\ (ou\ r = 0)$.

Teorema: Dados os polinômios

$$f = a_mx^m + a_{m-1}x^{m-1} + a_{m-2}x^{m-2} + ... + a_1 + a_0, com\ a_m \neq 0$$

$$g = b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + ... + b_1 + b_0, com\ b_n \neq 0$$

existem um único polinômio q e um único polinômio r tais que $qg + r = f$ e $\partial r < \partial g$ $(ou\ r = 0)$.

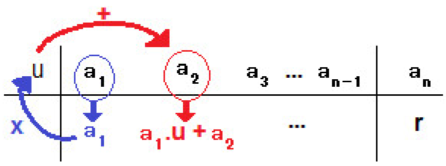
Não será apresentada a demonstração do teorema, mas a mesma pode ser obtida em (IEZZI, 1977).

Outros Métodos: Existem outros métodos que são mais utilizados pra se encontrar o quociente ou até mesmo o resto dá divisão entre polinômios.

O método da chave: Consiste em utilizar o sistema de divisão já conhecido entre números reais, levando em consideração grau do dividendo e do quociente.

O método de Briot-Ruffini: Consiste em analisar o polinômio quociente e encontrar sua raiz. Em seguida, devemos identificar todos os coeficientes do polinômio que está como dividendo.
Sendo assim considere os polinômios $P(x)$ e $Q(x)$, em que $P(x) = a_1x^n + a_2x^{n-1} + a_3x^{n-2} + ... + a_{n-1}x + a_n$ e $Q(x) = x - u$. A raiz do polinômio $Q(x)$ é dada quando se iguala a zero. Com isso basta identificar a raiz do polinômio e os coeficientes do dividendo, podendo assim utilizar o método, como vemos na figura abaixo.

Figura 1 – Dispositivo de Briot-Ruffini



Fonte: (RIBEIRO,)

Agora veremos alguns teoremas importantes que serviram de base para resolução de diversas aplicações.
Exemplo: Sejam os polinômios $P(x) = 3x^4 + 5x^3 - 11x^2 + 2x - 3$ e $Q(x) = x + 3$. Determine a divisão de $P(x)$ por $Q(x)$ pelo método de Briot-Ruffini.
Resolução: Utilizando o método tem-se:

A divisão de $P(x)$ por $Q(x)$, como podemos ver na figura 2.3 resulta no polinômio $3x^3 - 4x^2 + x - 1$ com resto 0.
Teorema do resto: O resto da divisão de um polinômio f por $x - a$ é igual ao valor numérico de f por a.
Demonstração: Utilizando a definição de divisão, tem-se:

$$q.(x - a) + r = f$$

Onde q e r são o quociente e o resto, respectivamente. Observando o monômio $x - a$, como tem grau 1, chegamos a conclusão que o resto r é nulo ou tem grau zero, portanto, r é um polinômio constante.

Figura 2 – Resolução do Exemplo

-3	3	5	-11	2	-3
-3	3	5	-11	2	-3
	3				
-3	3	5	-11	2	-3
	3	-4			
-3	3	5	-11	2	-3
	3	-4	1		
-3	3	5	-11	2	-3
	3	-4	1	-1	
-3	3	5	-11	2	-3
	3	-4	1	-1	0

Fonte: (RIBEIRO,)

Utilizando a equação temos:

$$q.(a-a)+r(a)=f(a)$$

$$q.0+r=f(a)$$

Então

$$r=f(a)$$

Alguns exemplos serão trazidos para utilizarem os teoremas citados.

Teorema de D'Alembert: Um polinômio f é divisível por $x-a$ se, somente se, a é raiz de f.
Demonstração: Utilizando o teorema do resto, tem-se $r=f(a)$, então podemos ter a seguinte resultado de imediato.

$$r=0(divis\tilde{a}o\ exata)\Leftrightarrow f(a)=0(a\ \acute{e}\ ra\acute{i}z\ de\ f)$$

Teorema: Se um polinômio f é divisível separadamente por $x-a$ e $x-b$, com $a\neq b$, então f é divisível pelo produto $(x-a)(x-b)$.
Demonstração: Sejam q o quociente e $r=cx+d$ o resto dá divisão de f por $(x-a)(x-b)$; então:

$$q.(x-a)(x-b)+(cx+d)=f$$

Levando em consideração que o polinômio é divisível por $(x-a)$, com isso calculamos o valor numérico desses polinômios em a, ficamos com:

$$[q(a)].(a-a)(a-b)+(ca+d)=f(a)$$

$$ca+d=0$$

Agora utilizando o fato de ser divisível por $(x-b)$, iremos calcular o valor numérico dos polinômios em b.

$$[q(b)].(b-b)(b-b)+(cb+d)=f(b)$$

$$cb+d=0$$

Com isso geramos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} ca+d=0 \\ cb+d=0 \end{cases}$$

Com isso percebemos que $c=0$ e $d=0$, portanto $r=0$.

2.4 Exemplos

Vejamos alguns exemplos que irão justamente fazer uso dos teoremas e resultados vistos anteriormente.

Exemplo 1: Determine p e q de modo que o polinômio x^3+px+q seja divisível por $(x-2)(x+1)$.

Resolução: Observando o polinômio $(x-2)(x+1)$, percebemos que para o polinômio dado seja divisível teremos que ter 2 e -1 como raízes, sendo assim teremos:

$$2^3+2p+q=0$$

$$(-1)^3-p+q=0$$

Logo

$$\begin{cases} 2p+q=-8 \ (I) \\ -p+q=1 \ (II) \end{cases}$$

Fazendo $(I)-(II)$, teremos:

$$3p=-9 \Rightarrow p=-3$$

Com isso tem-se que $q=-2$

Exemplo 2: Se m e n são tais que o polinômio

$$(mn-2)x^3+(m^2-n^2-3)x^2+(m+n-3)x+2m-5n+1$$

é identicamente nulo, então m^2+n^2, vale?

Resolução: Se o polinômio dado é identicamente nulo então:

$$(mn-2)x^3+(m^2-n^2-3)x^2+(m+n-3)x+2m-5n+1=0$$

Com isso, observando:

$$\begin{cases} mn - 2 = 0 \Rightarrow mn = 2 \ (I) \\ m + n - 3 = 0 \Rightarrow m + n = 3 \ (II) \end{cases}$$

Em (II) fazemos $(m+n)^2 = 3^2$, ficamos com $m^2 + 2mn + n^2 = 9$, sendo assim $m^2 + n^2 = 9 - 2mn$, mas note que em (I), tem-se $mn = 2$, substituindo ficamos com:

$$m^2 + n^2 = 5$$

Exercício 3: Sendo 5 e -2 os restos da divisão de um polinômio f por $x - 1$ e $x + 3$, respectivamente, pede-se para determinar o resto dá divisão de f pelo produto $(x-1)(x+3)$.

Resolução: Com base no teorema do resto temos $f(1) = 5$ e $f(-3) = -2$, considerando q e $r = ax + b$, respectivamente, o quociente e o resto dá divisão de f por $(x-1)(x+3)$, temos:

$$f = q(x-1)(x+3) + (ax+b)$$

Utilizando o que temos chegamos em:

$$f(1) = q(1-1)(1+3) + (a+b) = 5$$

$$f(-3) = q(-1-1)(-3+3) + (-3a+b) = -2$$

Simplificando chegamos em:

$$\begin{cases} a + b = 5 \ (I) \\ -3a + b = -2 \ (II) \end{cases}$$

Fazendo $(I) - (II)$, tem-se:

$$a = \frac{7}{4} \Rightarrow b = \frac{13}{4}$$

Com isso

$$r = \frac{4x}{7} + \frac{13}{4}$$

2.5 Resultado da Teoria de Polinômios

Nesta sessão será feita uma introdução de alguns aspectos de polinômios os quais também se estendem para a teoria das funções polinomiais.

Definição: Chama-se conjunto solução ou conjunto verdade em $\mathbb{R}$ dá equação $f(x) = g(x)$ o conjunto S cujos elementos são as raízes reais dessa equação.

Exemplo: Seja $f(x) = 3x - 4$ e $g(x) = -4x + 9$, sendo assim determine o conjunto

solução dá igualdade $f(x) = g(x)$.
Fazendo $f(x) = g(x)$, temos:

$$3x - 4 = -4x + 9$$

Resolvendo chegamos em:

$$7x = 13$$
$$x = \frac{13}{7}$$

As propriedades de a adição, multiplicação e divisão com relação aos polinômios continuam válidas, como por exemplo:
· Associatividade
· Comutatividade
· Existência do elemento neutro e simétrico
· Distributividade

Dessa forma sejam $f(x), g(x), h(x)\ e\ k \in \mathbb{R}\ com\ k \neq 0$, com isso:
· $f(x) = g(x) \Rightarrow f(x) + h(x) = g(x) + h(x)$
· $f(x) = g(x) \Rightarrow k.f(x) = k.g(x)$

Assim como já foi colocado anteriormente um número $a \in \mathbb{R}$ é dito raiz de um polinômio quando $p(a) = 0$, mas podermos definir quantas soluções uma função polinomial pode ter a depender de seu grau, com isso veremos alguns resultados importantes referente a isso.

Teorema Fundamental da Álgebra: Todo polinômio $p(x)$ de grau $n \geq 1$ admite ao menos uma raiz real.

Esse resultado será admitido sem demostração, mas sua prova pode ser encontrada em (GONÇALVES, 1979).

Outro resultado importante em relação aos polinômios é justamente saber suas raízes e utilizar a decomposição para representa-los.

Teorema da Decomposição: Todo polinômio p de grau n $(n \geq 1)$

$$p = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_1 x + a_0$$

Pode ser decomposto em n fatores do primeiro grau, isto é:

$$p = a_n(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)...(x - r_n)$$

Onde $r_1, r_2, ..., r_n$ são raízes do polinômio p.

O resultado desse teorema é muito utilizado no ensino básico principalmente no terceiro ano do ensino médio e em preparações para vestibular. Sua utilização está justamente em escrever o polinômio de uma forma diferente para uma melhor visualização e assim encontrar diversas formas de responder e entender vários exemplos.

Outro resultado que utiliza justamente os resultados anteriores, nos diz a respeito dá quantidade de raízes que um polinômio pode ter a depender de seu grau.

Corolário: Toda equação polinomial de grau n $(n \geq 1)$ admite n, e somente n, raízes complexas.

O resultado desse corolário nós diz a respeito de quantas soluções um polinômio pode ter a depender de seu grau, mas levando em consideração a multiplicidade de algumas raízes que devido a sua presença em mais de um fator, durante a decomposição, pode aparecer várias vezes em relação a solução de uma função polinomial.

Definição: Dizemos que r é raiz de multiplicidade $m, m \geq 1$, da equação $p(x) = 0$ se, e somente se,

$$p = (x - r)^m.Q(x) \ e \ Q(r) \neq 0$$

Ou seja, r é raiz de multiplicidade m de $p(x) = 0$ quando o polinômio p é divisível por $(x-r)^m$ e não é divisível por $(x-r)^{m+1}$, ou de outra forma, a decomposição de p apresenta exatamente m fatores iguais a $(x - r)$.

De certa forma quando analisamos os valores de m, constatamos que quando $m = 1$ r é uma raiz simples, quando $m = 2$ tem-se r raiz dupla, quando $m = 3$ tem-se r raiz tripla e assim sucessivamente.

Vimos nos exemplos trabalhados somente números reais sendo soluções das equações

2.6 Exemplos

Vejamos alguns exemplos sobre os resultados vistos até agora.

Exemplo 1: Escreva as equações do 3 grau que admite 2 como raiz simples e -1 como raiz dupla.

Resposta: Sendo assim utilizaremos o teorema da decomposição de forma que:

$$a_n(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) = 0$$

Considerando $a_n \neq 0$ e $r_1 = 2,\ r_2 = r_3 = -1$, substituindo tem-se:

$$a_n(x - 2)(x + 1)(x + 1) = 0$$

Simplificando

$$a_n(x^3 - 3x - 2) = 0$$

A considerar valores tais que $a_n \in \mathbb{R}^*$, podemos ter:

$$a_n = 1 \Rightarrow x^3 - 3x - 2 = 0$$

$$a_n = 2 \Rightarrow 2x^3 - 6x - 4 = 0$$

E assim sucessivamente.
Exemplo 2: Um ciclista e um corredor começam, juntos, uma competição.
A curva dada pelo gráfico abaixo, cuja equação é $p = t^3 + at^2 + bt + c$, representa a posição p, em metros, do ciclista, em função do tempo t, em segundos, em que a, b e c são números reais fixos.
No instante em que o ciclista parte dá posição zero, o corredor inicia um movimento, descrito pela equação $p = 4t$, na mesma pista e no mesmo sentido.
Determine a posição mais afastada da origem na qual o ciclista e o corredor voltam a se encontrar.
Resolução: Observando o gráfico constatamos que 0 é uma raiz simples e 3 é uma raiz dupla. Com isso ficamos com

$$e = a_n(t-0)(t-3)(t-3), \; seja \; a_n = 1 \; temos:$$

$$e = t(t-3)^2 \Rightarrow t^3 - 6t^2 + 9t$$

Para determinar o momento de encontro faremos:

$$t^3 - 6t^2 + 9t = 4t \Rightarrow t(t^2 - 6t + 5) = 0$$

Que tem as seguintes soluções:

$$t = 0, \; t = 1s \; ou \; t = 5s$$

Fazendo com que as posições de encontro sejam encontradas substituindo em uma das duas equações, logo

$$e = 4t$$

$$e = 4.0 = 0 \; e = 4.1 = 4m \; e = 4.5 = 20m$$

Com isso percebemos que a posição mais afastada será quando $e = 20m$.

3 Derivadas

No ensino básico devido a extensão do currículo e sobretudo o tempo fornecido para a disciplina de Matemática, não há como fazer um tratamento mais formal do conceito de limites e derivadas. Porém a aplicação dá teoria a respeito das derivadas pode ser utilizada de forma intuitiva principalmente no cálculo de máximos e mínimos.

Neste capítulo iremos considerar a teoria de limites, mas será feito um estudo de forma superficial levando princialmente em consideração sua noção intuitiva. Caso seja necessário alguma consideração mais específica será citada em algum momento.

3.1 Conceito de Limite

Com isso, inicialmente veremos o conceito intuitivo de limites para assim vermos o conceito de taxa de variação que está diretamente ligada a derivadas e com isso perceber a sua utilização em diversas áreas do conhecimento, tais como Economia, Geografia, Física etc.

Inicialmente veremos um exemplo que nos dará uma noção a respeito da reta tangente ao gráfico de uma função em um determinado ponto e como encontra-lá, para assim avançarmos de forma gradual o estudo.

Exemplo: Encontre uma equação da reta tangente à parábola $y = x^2$ no ponto $P(1, 1)$.

Resolução: Vamos denotar por t a reta procurada. Podemos encontrar a equação da reta t, assim que soubermos sua inclinação m. Note que a dificuldade está no fato de conhecermos somente o ponto P, em t, quando precisamos de dois pontos para calcular a inclinação. Sendo assim podemos calcular uma aproximação de m escolhendo um ponto próximo $Q(x, x^2)$ sobre a parábola (Observe a figura 3) e calculando a inclinação da reta secante PQ.

Dessa forma escolhendo $x \neq 1$ de forma que $Q \neq P$. Logo podemos ter:

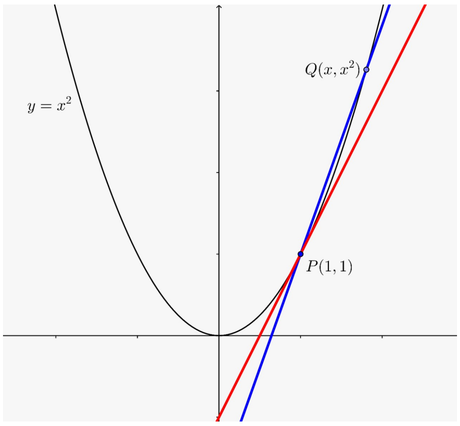
$$m_{PQ} = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

Fazendo $Q(1,5,\ 2,25)$, temos:

$$m_{PQ} = \frac{2,25 - 1}{1,5 - 1} = 2,5$$

Observe as tabelas abaixo elas mostram os valores de m_{mp} para vários valores de x próximos a 1. Sendo assim quanto mais próximo Q estiver de P, mais próximo x estará

Figura 3 – Gráfico para Análise



Fonte: Construção Própria

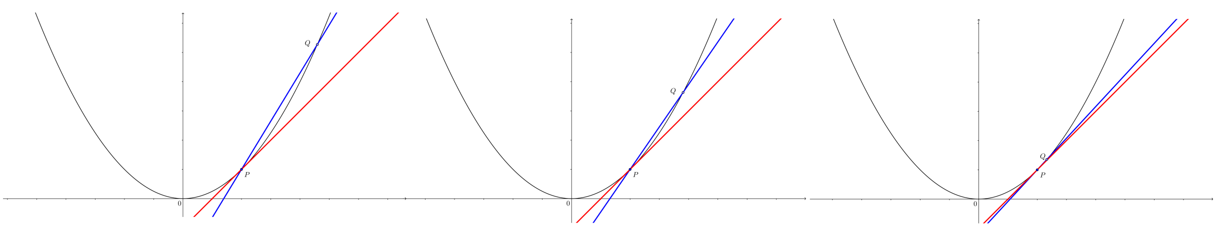
de 1, e a tabela indica que estará mais próximo de 2. Isso sugere que a inclinação da reta tangente t deve ser $m = 2$. Dizemos que a inclinação da reta tangente é o limite das inclinações das retas secantes e expressamos por

$$\lim_{Q \to P} m_{PQ} = m$$

Com isso, temos:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

Figura 4 – Gráfico para Análise



Fonte: Construção Própria

Supondo que a inclinação da reta tangente(a reta que intercepta o gráfico da função um único ponto) seja realmente 2, dessa forma podemos usar a forma **ponto - inclinação da equação de uma reta** para escrever a equação da tangente no ponto (Conteúdo estudado geralmente no 3º ano do Ensino Médio) como

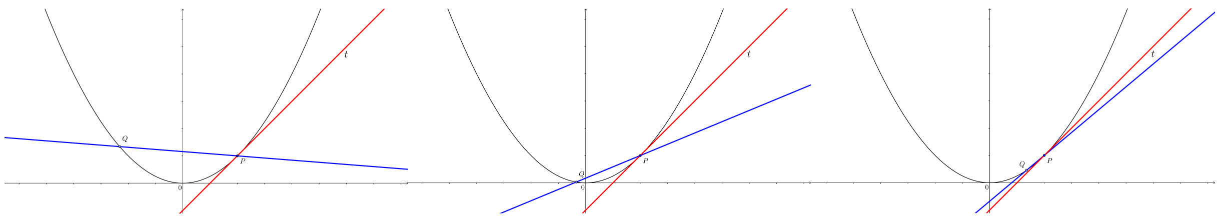
$$y - 1 = 2(x - 1)$$

De forma simplificada

$$y = 2x - 1$$

Como podemos ver na figura 5 à medida que Q tende a P ao longo da parábola, as retas secantes (a reta que intercepta o gráfico da função em dois pontos) correspondentes giram em torno de P e tendem à reta tangente (a reta que intercepta o gráfico da função um único ponto) t.

Figura 5 – Gráfico para Análise



Fonte: Construção Própria

Agora veremos outro exemplo, de uma aplicação física que se aproxima um pouco mais das situações práticas. O seguinte problema trata da velocidade e como seria o cálculo para poder obter uma aproximação pra tal valor.

Exemplo: Suponha que uma bola seja solta a partir do ponto de observação no alto da Torre CN, em Toronto, 450 m acima do solo. Encontre a velocidade da bola após 5 segundos.

Resolução: Através de vários experimentos Galileu descobriu que a velocidade em queda livre poderia ser calculada de forma que, a distância percorrida por qualquer objeto em queda livre é proporcional ao quadrado do tempo de queda. Dessa forma concluiu que poderia ser calculada utilizando a seguinte fórmula.

$$s(t) = 4,9t^2$$

Dessa forma a dificuldade em encontrar a velocidade após 5 segundos, está em obtê-la nesse exato instante de tempo , ou seja, não temos um intervalo de tempo. Mas, podemos calcular a velocidade média sobre o breve intervalo de tempo de um décimo de segundo, de $t = 5\ s$ até $t = 5,1\ s$.

$$velocidade\ média = \frac{mudança\ de\ posição}{tempo\ decorrido}$$

Utilizando as informações que temos ficamos com

$$velocidade\ média = 49,49\ m/s$$

Utilizando o valor do tempo cada vez menor teremos os seguintes dados da tabela abaixo: Observando a tabela 1, notamos que quanto menor o valor do tempo decorrido mais a

Tabela 1 – Tabela para Análise

Intervalo de tempo	Velocidade média (m/s)
$5 \leqslant t \leqslant 6$	53,9
$5 \leqslant t \leqslant 5{,}1$	49,49
$5 \leqslant t \leqslant 5{,}05$	49,245
$5 \leqslant t \leqslant 5{,}01$	49,049
$5 \leqslant t \leqslant 5{,}001$	49,0049

Fonte: (STEWART, 2013)

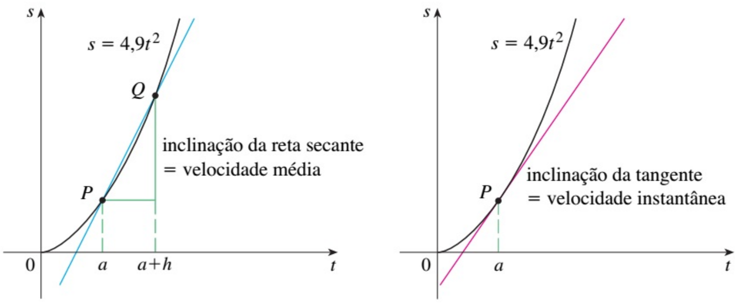
velocidade se aproxima de 49. Com isso podemos concluir que a velocidade é $v = 49\ m/s$

Notamos que esse problema se assemelha com o anterior da tangente, justamente pelo fato de terem relação entre si. Dessa forma se tratarmos esse problema como o anterior e traçarmos o gráfico da função distância percorrida pela bola, observe a figura 6, considerando os pontos $P(a; 4,9a^2)$ e $Q(a+h; 4,9(a+h)^2)$ e sobre o gráfico, então a inclinação da reta secante PQ será

$$m_{PQ} = \frac{4,9(a+h)^2 - 4,9a^2}{(a-h) - a}$$

Note que se trata justamente dá velocidade média no intervalo $[a,\ a+h]$. Dessa forma a velocidade no instante $t = a$ (o limite dessas velocidades médias quando h tende a 0) deve ser igual à inclinação da reta tangente em P (o limite das inclinações das retas secantes). Dessa forma agora veremos um exemplo através de função para podermos

Figura 6 – Gráfico para Análise



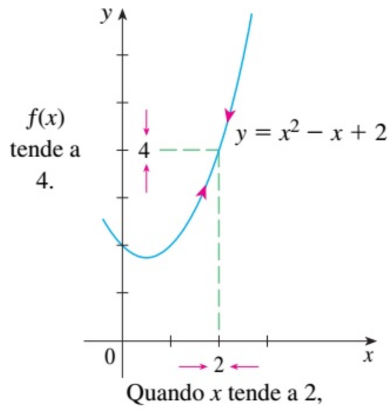
Fonte: Fonte: (STEWART, 2013)

entender o conceito de limite.

Considere a função f, definida da seguinte forma $f(x) = x^2 - x + 2$ para valores de x próximos de 2, porém não igual a 2. Agora observe a figura 7 que é formada pela tabela, que mostra os valores de $f(x)$ próximos de 2, e ao lado o gráfico da função mostrando seu comportamento para diversos valores próximos de 2. Com isso percebemos que a medida

Figura 7 – Tabela e Gráfico dá Função

x	$f(x)$	x	$f(x)$
1,0	2,000000	3,0	8,000000
1,5	2,750000	2,5	5,750000
1,8	3,440000	2,2	4,640000
1,9	3,710000	2,1	4,310000
1,95	3,852500	2,05	4,152500
1,99	3,970100	2,01	4,030100
1,995	3,985025	2,005	4,015025
1,999	3,997001	2,001	4,003001



Fonte: Fonte: (STEWART, 2013)

que a função assume valores próximos de 2 o valor de f tende para 4. Ou seja

$$\lim_{x \to 2}(x^2 - x + 2) = 4$$

Com isso temos a seguinte definição que explica do que se trata o limite de uma função.

Definição: Suponha que $f(x)$ seja definido quando x está próximo ao número a. (Isso significa que f é definido em algum intervalo aberto que contenha a, exceto possivelmente no próprio a.) Então escrevemos

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Dizemos que "o limite de $f(x)$, quando x tende a a, é igual a L". Com isso se pudermos tornar os valores de $f(x)$ arbitrariamente próximos de L (tão próximos de L quanto quisermos), tornando x suficientemente próximo de a (por ambos os lados de a), mas não igual a a.

Sendo assim podemos concluir que os valores de $f(x)$ tendem a ficar cada vez mais próximos do número L à medida que x tende ao número a (por qualquer lado de a), porém temos que $x \neq a$.

3.2 Taxas de Variação

3.2.1 Taxa de Variação Média

Para entendermos de forma bem simplificada a ideia de taxa de variação, iremos considerar o seguinte exemplo.

Exemplo: Considere a tabela abaixo que representa a grandeza física temperatura do Ambiente.

Tabela 2 – Variação da Temperatura em função do Tempo

	t(h)	T(°C)
t_1	2	8
t_2	3	12
t_3	4	16
t_4	5	20

Fonte: Construção Própria

Utilizando-se dá teoria de proporção e razão, temos a noção de variação da temperatura ΔT no intervalo $[t_1, t_3]$ que é dada por $\Delta T = 16 - 8 = 8$°C e a variação tempo que é dada por $\Delta t = 4 - 2 = 2h$. Observando a tabela 2 percebemos que a cada $1h$ a temperatura varia 4°C, com isso podemos definir a noção de variação média da temperatura, em relação ao tempo.

$$\frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{8}{2} = 4°\text{C}/h$$

Note que podemos utilizar a velocidade média v_m, a aceleração média a_m, sendo a razão entre a variação da grandeza em um intervalo de tempo decorrido. Com isso teremos:

$$v_m = \frac{\Delta S}{\Delta t};$$

$$a_m = \frac{\Delta V}{\Delta t}$$

Sendo que ΔS, ΔV as taxas de variação da posição e da velocidade respectivamente. O que nos remete a seguinte definição.

Definição: Sejam X e Y duas grandezas. Definimos a taxa de variação média ϕ_m, de Y em relação a X, como:

$$\phi_m = \frac{\Delta Y}{\Delta X} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Onde ΔY, ΔX representam a taxa de variação das grandezas Y e X, respectivamente.

3.2.2 Taxa de Variação Instantânea

Definiremos a taxa de variação instantânea que será uma ferramenta muito importante para compreensão do conceito de derivada.

Definição: Sejam X e Y duas grandezas. Definimos a taxa de variação instantânea ψ, de Y em relação a X, como

$$\psi = \lim_{\Delta X \to 0} \frac{\Delta Y}{\Delta X}$$

Sendo que ΔY e ΔX representam a variação das grandezas Y e X, respectivamente.

Com isso ao analisarmos a definição da taxa de variação instantânea com relação a uma determinada grandeza ela é definida como sendo o limite da taxa de variação média dessa grandeza.

Sendo assim poderemos analisar a noção de velocidade instantânea e de aceleração instantânea, levando em conta a definição de variação instantânea.

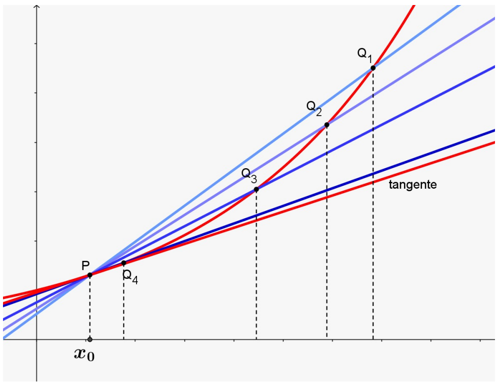
$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} v_m$$

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} a_m$$

Sendo ΔS, Δv a variação de posição S e variação de velocidade v, respectivamente.

Também podemos analisar a taxa de variação instantânea de forma geométrica, para isso consideremos dois pontos P e Q na curva dada na figura 8.

Figura 8 – Representação Gráfica dá Variação Instantânea



Fonte: Construção Própria

Observando que a medida que tomamos abscissas de Q mais próximas com relação a x_0, com isso o ponto Q se aproxima cada vez mais de P e as retas secantes com relação ao gráfico vão cada vez mais chegando ao seu limite, que é justamente denominada de reta tangente ao gráfico da função. De forma geral concluímos intuitivamente que a inclinação da **reta tangente** com relação a P é igual ao limite das inclinações das retas secantes, quando fazemos Q se aproximar de P.

De forma mais analítica notamos que x_0 sofre uma variação Δx, tem-se um novo valor de x que é dado por $x = x_0 + \Delta x$ e a função $f(x)$ acaba sofrendo a variação dada pelo valor $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, com relação ao intervalo $[x_0, x_0 + \Delta x]$. Isso nos dá as ferramentas para definirmos o próximo conceito.

3.2.3 Derivadas

Anteriormente vimos resultados importantes com relação a taxa de variação, que pode ser empregada em uma das principais ferramentas do cálculo diferencial integral a derivada.

Definição: Seja $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ uma função tendo como domínio os números reais. Com isso a derivada de f em um ponto qualquer x_0, é denotada por $f'(x)$, e é dada por:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Isso se o limite existir.

Observando a definição acima e o que foi dito nas seções anteriores notamos que $f'(x_0)$ representa a inclinação da reta tangente em relação ao gráfico dá função no ponto $(x_0, f(x_0))$. Uma importante observação é quando dizemos que uma função "é derivável", isso significa que essa função é derivável em todos os pontos do seu domínio.

Analisamos a derivada em relação a um ponto qualquer, agora iremos definir a função derivada.

Definição: A função de derivada f, que será denotada por f', é uma função cujo domínio está contido no de f, a qual associa a cada valor $f'(x)$ ao limite

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Observação: Existe outra notação que podemos utilizar para a derivada conhecida como notação de Leibniz, ou seja

$$f'(x) = \frac{\partial y}{\partial x}$$

A ordem na qual queremos definir a derivada de uma função é muito importante e tem várias aplicações em diversas áreas, com isso neste trabalho definiremos a derivada de segunda ordem, mas existe derivadas de ordem superior que depende dá continuidade dá função.

Definição: A derivada segunda de f, denotada por f'' é a função cujo domínio está contido no de f', em que temos a seguinte associação de $f''(x)$ com relação ao limite

$$f''(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x + \Delta x) - f'(x)}{\Delta x}$$

Observação: Utilizando a definição da função derivada pode-se mostrar resultados que envolvem funções particulares, como por exemplo:

Sejam f e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funções definidas como $f(x) = c$ e $g(x) = x^n$ com c constante e n um número natural. Sendo assim por meio da definição podemos mostrar que $f'(x) = 0$ e que $g'(x) = n.x^{n-1}$.

Agora veremos algumas propriedades em relação as derivadas, que podem ser facilmente demonstradas utilizando-se a sua definição.

Teorema (Propriedades com relação a derivação): Sejam $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ funções deriváveis em que $D \subset \mathbb{R}$, e c uma contante real. Com isso:

$f + g$, derivando ficamos com $(f + g)' = f' + g'$.

$f - g$, derivando ficamos com $(f - g)' = f' - g'$.

$c.f$, derivando ficamos com $(c.f)' = c.f'$.

$f.g$, derivando ficamos com $(f.g)' = f'.g + f.g'$.

$\frac{f}{g}$, derivando ficamos com $(\frac{f}{g})' = \frac{f'.g - f.g'}{[g]^2}$, com $g \neq 0$.

Iremos demonstrar a propriedade $(f(x).g(x))' = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$, sendo que as outras podem ser encontradas em (STEWART, 2013).
Chamando $\Delta x = h$, sendo assim se $\Delta x \rightarrow 0$, logo $h \rightarrow 0$, com isso substituindo na definição ficamos com.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Utilizando a definição no produto ficamos com

$$\frac{d}{dx}[f(x).g(x)] = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h).g(x+h) - f(x).g(x)}{h}$$

Agora somando e subtraindo $g(x+h).f(x)$

$$\frac{d}{dx}[f(x).g(x)] = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h).g(x+h) - f(x).g(x) + g(x+h).f(x) - g(x+h).f(x)}{h}$$

$$\frac{d}{dx}[f(x).g(x)] = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h)\left[f(x+h) - f(x)\right] + f(x).\left[g(x+h) - g(x)\right]}{h}$$

Utilizando a propriedade de limite $\lim(x + y) = \lim x + \lim y$.

$$\frac{d}{dx}[f(x).g(x)] = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h).\left[f(x+h) - f(x)\right]}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{f(x).\left[g(x+h) - g(x)\right]}{h}$$

Sendo assim utilizando a propriedade novamente.

$$\frac{d}{dx}[f(x).g(x)] = \lim_{h\to 0} g(x+h).\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} f(x).\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

Substituindo o limite e observando quem depende do h e quem não depende, ficamos com:

$$\frac{d}{dx}[f(x).g(x)] = g(x).\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + f(x).\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

Portanto

$$\frac{d}{dx}[f(x).g(x)] = g(x).\frac{d}{dx}[f(x)] + f(x).\frac{d}{dx}[g(x)]$$

Ou seja

$$(f(x).g(x))' = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$$

Exemplo: Consideremos f uma função polinomial na qual seu domínio é real, dada por

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2}... + a_1 x + a_0$$

Onde n é um número natural. Sendo assim determine $f'(x)$.

Resposta: Utilizando a observação anterior na qual $(x^n)' = nx^{n-1}$, note que a função dada se trata de uma soma de parcelas desse tipo, com isso aplicando em cada uma delas ficamos com

$$f'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + (n-2)a_{n-2}x^{n-3} + ... + a_1$$

No exemplo anterior levamos em consideração $n \in \mathbb{N}$, mas pode-se mostrar que o mesmo vale para $n \in \mathbb{R}$.

Exemplo: Dada a função polinomial $f(x) = x^3 - 5x^2 - x + 6$, determine $f'(x)$.

Resposta: Utilizando-se do exemplo anterior temos:

$$f'(x) = 3x^2 - 10x - 1$$

Exemplo: Dada a função $f(x) = (x^2-3)(x^3-2x^2)$, determine $f'(x)$.

Resposta: Utilizando-se da propriedade do produto abordada no teorema anterior, tem -se:

$$f'(x) = (2x)(x^3-2x^2) + (x^2-3)(3x^2-4x)$$

4 Máximos e Mínimos e Suas Teorias

Nesta seção veremos alguns teoremas que servirão de base para aplicação da derivada em outras áreas, um dos principais será justamente o TVM(Teorema do Valor Médio) que servirá de base para outros resultados, principalmente para uso na Teoria de máximos e mínimos.

Definição: Dada uma função f, que seja definida em um certo intervalo $D(f)$.

$i)$ f possui um máximo local em c se existe um intervalo aberto em I contendo c, tal que $f(c) \geq f(x)$ para todo $x \in I \cap D(f)$.

$ii)$ f possui um mínimo local em c se existe um intervalo aberto I contendo c, tal que $f(c) \leq f(x)$ para todo $x \in I \cap D(f)$.

$iii)$ Se f possui um máximo ou mínimo local em c, dizemos que f possui um extremo local em c.

Utilizamos o termo local, pois ao fixarmos no intervalo aberto de forma que seja suficientemente pequeno contendo c possa ser que f tome seu maior (ou menor) valor em c. Já se tomarmos o intervalo fora do estabelecido , f pode assunir valores maiores (ou menores) a depender da situação.

Teorema (Fermat): Se uma função possui valor extremo local em ponto c de seu domínio, então $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existe.

O teorema se refere ao extremo local c de uma função e o que podemos sobre esse valor. Esse resultado será de grande ajuda para os seguintes teoremas em relação a máximo e mínimo de uma função.

Uma importante observação em relação ao teorema visto é que sua recíproca não é válida. Com base nesse teorema poderemos ter a seguinte definição.

Observações:
Com base no teorema se $x = c$ é um ponto de extremo local, a derivada da função f se anula e passa uma reta tangente horizontal à curva $y = f(x)$ no ponto $(c, f(c))$.

Podem existir funções com um ponto crítico em $x = c$, que não é ponto de máximo nem de mínimo local para f.

Se os pontos de extremos locais para a funação estiverem nas extremidades do domínio de f, as derivadas laterais de f poderão existir e ser não nulas.

Definição: Sejam $f : D_f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função e $c \in D_f$ tal que $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existe. Chama-se c de ponto crítico.

Com base nessa definição e levando em consideração o teorema de Fermat, concluímos para encontrar os pontos críticos de uma função devemos analisar justamente as raízes da derivada.

4.0.1 Teorema de Rolle e o de Lagrange(TVM)

Com base nos conhecimentos adquiridos nas seções anteriores iremos agora ver alguns resultados bastantes utilizados durante a aplicação do cálculo diferencial nas diversas áreas.

Teorema de Rolle : Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua em $[a, b]$, derivável em (a, b) e tal que $f(a) = f(b)$, então existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Agora iremos ver uma representação gráfica para o teorema de Roller, para assim podermos entender sua funcionalidade.

Figura 9 – Representação Gráfica do Teorema de Roller

Fonte: Construção Própria

Demonstração: A demostração deste teorema pode ser encontrada no livro (STEWART, 2013)

Exemplo: O polinômio $p(x) = x^3 - 4x^2 + 3x + 1$ tem pelo menos um ponto crítico no intervalo $(0, 1)$ e no intervalo $(1, 3)$. Determine pelo menos uma raíz utilizando o teorema de Rolle.

Resolução: Note que, temos $p(0) = p(1) = 1$ e, pelo teorema de Rolle, segue que existe pelo menos um ponto tal que $c \in (0, 1)$ de tal forma que $f'(c) = 0$. Observando o outro intervalo podemos ter $p(1) = p(3) = 1$, com base no teorema segue que existe pelo menos um ponto crítico no intervalo . Ou seja,

$$p'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 8x + 3 = 0$$

Realizando os calculos e simplificando chegamos em

$$x_1 \approx 0,45 \; ou \; x_2 \approx 2,2$$

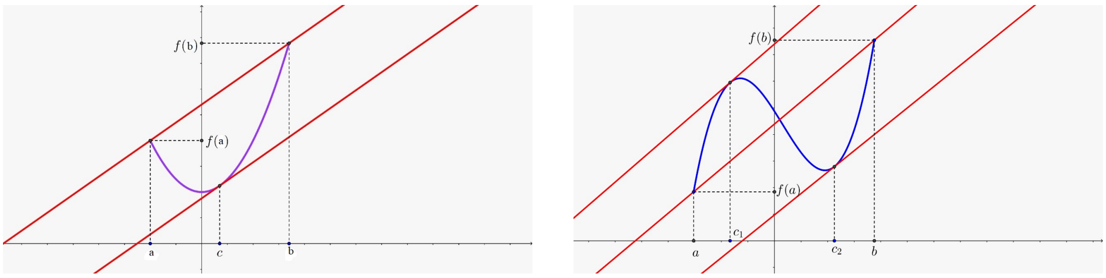
Teorema do Valor médio de Lagrange: Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b), então existe $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Com base na análise gráfica abaixo, percebemos que o TVM é justamente o do Teorema de Rulle, isto é no caso em que $f(b) \neq f(a)$. Porém isso só acontece quando as retas tangentes ao gráfico dá função f assumem outras posições além da horizontal.

Demonstração: Antes de iniciarmos a demonstração construiremos a reta secante AB com base nos gráficos abaixo.

Figura 10 – Representação Gráfica dá Secante e Tangente ao gráfico



Fonte: Construção Própria

Sendo assim aplicamos o Teorema de Rolle a uma nova função h(como mostra a figura 11) definida como a diferença entre f e a função cujo gráfico é a reta secante AB.

Usando a construção a cima, vemos que a equação da reta AB pode ser escrita como

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

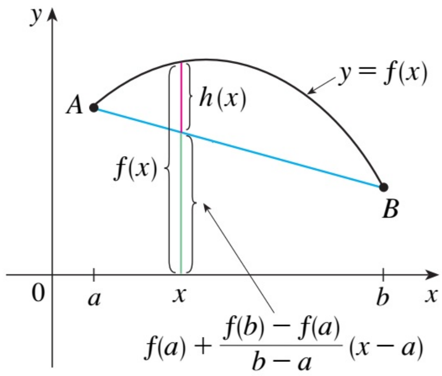
Ou seja,

$$y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Observando a figura 11, notamos que podemos ficar com

$$h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Figura 11 – Análise Gráfica dá Secante ao Gráfico



Fonte: (STEWART, 2013)

Dessa forma precisamos verificar se a função $h(x)$, satisfaz o teorema de Rolle.

Temos que a função h é contínua em $[a, b]$, pois é formada pela soma de f com uma função polinomial de primeiro grau, sendo ambas contínuas.

Observando a função h ela é derivável em (a, b), pois tanto f quanto a função polinomial de primeiro grau são deriváveis. Sendo assim calculando sua derivada teremos

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Quando fazermos $h(a)$ e $h(b)$ obtemos $h(a) = 0$ e $h(b) = 0$, dessa forma $h(a) = h(b)$.

Sendo assim mostramos que h satisfaz as hipóteses do Teorema de Rolle, dessa forma podemos utilizar o teorema de Rolle, logo existe um número $c \in (a, b)$ tal que $h'(c) = 0$. Com isso temos

$$0 = h'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Dessa forma concluímos

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Exemplo: Para ilustrarmos o Teorema do Valor Médio com uma função específica, vamos considerar $f(x) = x^3 - x$, $a = 0, b = 2$. Uma vez que f é uma função polinomial, então ela é contínua e derivável para todo x; logo, é certamente contínua em $[0, 2]$ e derivável em $(0, 2)$.

Resolução: Sendo assim utilizando o teorema do valor médio, temos que existe um número $c \in (0, 2)$, tal que

$$f(2) - f(0) = f'(c)(2 - 0)$$

Tem-se $f(2) = 6,\ f(0) = 0$ e $f'(x) = 3x^2 - 1$, substituindo ficamos com

$$6 - 0 = (3c^2 - 1)2$$

$$3 = (3c^2 - 1)$$

Resolvendo ficamos com $c = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$, mas como $c \in (0, 2)$ logo $c = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Exemplo: Suponha que em uma rodovia reta há dois carros de patrulha da Polícia Rodoviária que estão distantes 5 quilômetros um do outro. Suponha também que um caminhão passou pelo primeiro carro da patrulha com velocidade de 55 km/h, e sem parar, 4 minutos depois passou pelo segundo carro da patrulha com velocidade de 50 km/h. Mostre que em algum instante entre os carros da Polícia Rodoviária, o caminhão ultrapassou o limite de velocidade dessa rodovia que era de 55 km/h.
Resolução: Considerando a função $s(t)$ como sendo a função posição no instante t. Com base no instante $t = 0$ e passa pelo primeiro caminhão, temos:

$$\frac{4}{60} = \frac{1}{15}h$$

Já no instante que passa pelo segunto tem-se:

$$s(0) = 0\ e\ s(1/15) = 5$$

Utilizando o conceito da velocidade média, tem-se:

$$\frac{s(1/15) - s(0)}{1/15 - 0} = \frac{5 - 0}{1/15} = 75km/h$$

Agora considerando que a função seja contínua e derivável no intervalo $(0, 1/15)$. Com base no Teorema do Valor Médio existe um instante entre $t = 0et = 1/15$ tal que a velocidade do caminhão foi igual à velocidade média do trajeto. Portanto, em algum instante t^1 temos que $s'(t^1) = 75$, com isso podemos concluir que o caminhão ultrapassou o limite de velocidade.

Diante desses resultados visto anteriormente estabeleceremos algumas definições importantes para diversas análises.

Definição: Uma função f é dita **crescente** em seu domínio, se para quaisquer x_1 e x_2 de seu domínio, tais que $x_1 < x_2$, então $f(x_1) < f(x_2)$. Dá mesma forma definimos quando uma função é **decrescente** para isso se tivermos quaisquer x_1 e x_2 de seu domínio, tais que $x_1 < x_2$, então $f(x_1) > f(x_2)$.

Sendo assim veremos agora alguns resultados relacionados com a definição anterior.

Teorema: Seja f uma função derivável em um intervalo $I \subset D_f$, temos:

· Se $f'(x) > 0$ em I, então f é crescente em I.
· Se $f'(x) < 0$ em I, então f é decrescente em I.

A demonstração desse resultado leva em consideração o teorema do valor médio, utilizando as hipóteses dadas. Para uma análise mais minuciosa consulte (STEWART, 2013).

Teorema: Sejam $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e derivável em (a, b) e $x_0 \in [a, b]$ um ponto critico de f. Sendo assim podemos ter as seguintes condições:

a) Se f' muda de sinal com relação a positivo para negativo em x_0, então $f(x_0)$ é um máximo local de f.
b) Se f' muda de sinal com relação a negativo para positivo em x_0, então $f(x_0)$ é um mínimo local de f.
c) Se f' não muda de sinal em x_0, então $f(x_0)$ não é um valor extremo de f.

Observe a figura 12 que ilustra os casos do teorema visto.

Agora iremos ver um resultado com relação a derivada segunda que é de fácil manipulação mesmo em nível básico, que será de grande ajuda com relação a análise de mínimos e máximos locais.

Teorema (Teste da segunda derivada para extremos locais): Seja f uma função que possui derivada segunda contínua próximo de $x_0 \in D_f$. Se

a) Se $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) < 0$, então $f(x_0)$ é um máximo local com relação a f.
b) Se $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) > 0$, então $f(x_0)$ é um mínimo local com relação a f.
c) Se $f'(x_0)$ *e* $f''(x_0) = 0$, então teremos que o teste inconclusivo com relação a $f(x_0)$.

Esse teorema nos trás importantes resultados com relação a derivada segunda de uma função que tem como ponto crítico x_0. A depender do sinal dá derivada segunda o ponto crítico pode ser de máximo (se $f''(x_0) < 0$), de mínimo(se $f''(x_0) > 0$) ou inconclusivo(se $f''(x_0) = 0$).

Exemplo: Seja a função $f(x) = 3x^3 + 4x^2 + x$. Determine se essa função possui ou não um máximo ou mínimo local.
Resposta: Sendo assim faremos

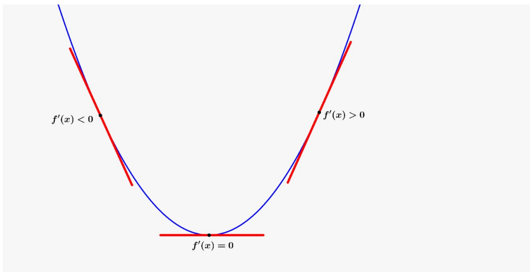
$$f'(x) = 9x^2 + 8x + 1$$

Agora fazendo $f'(x) = 0$, tem-se:

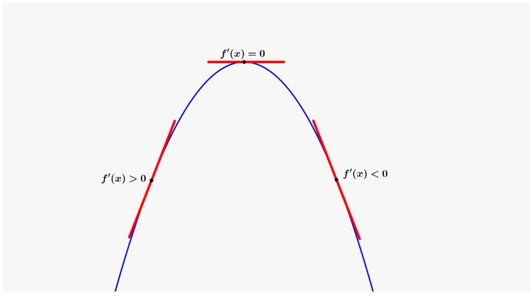
$$9x^2 + 8x + 1 = 0$$

$$x = -0,15 \text{ } e \text{ } x = -0,74$$

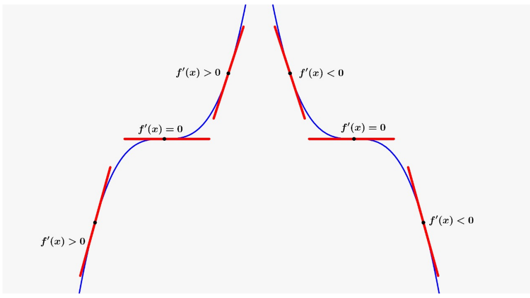
Figura 12 – Representação Gráfica dos Casos do Teorema



a) Mínimo Local



b) Máximo Local



c) Nem Mínimo e nem Máximo

Fonte: Construção Própria

Agora utilizando o teorema estudado temos:

$$f''(x) = 18x + 8$$

Como $f''(-0,15) = 5,3$ *e* $f''(-0,74) = -5,32$, tem-se que $x = -0,15$ assume um máximo local e $x = -0,74$ assume um mínimo local.

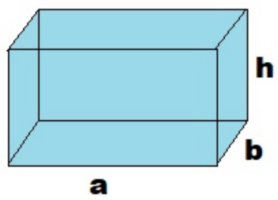
5 Aplicações Contextualizadas

Nesta parte do trabalho trazemos alguns exemplos, utilizando como ferramenta principal a aplicação dos resultados obtidos da derivada. Várias áreas do conhecimento utilizam a aplicação dos resultados da derivada, temos a Economia, a Física, a Engenharia, etc.

Neste exemplo 01 será abordada uma aplicação que na maioria das vezes é vista nos cursos de Cálculo, se trata dá aplicação da derivada com relação a otimização de materiais.

Exemplo 01: Uma empresa de embalagem recebeu um pedido de caixas de papelão, onde o solicitante exigiu apenas que as caixas tivessem 15 litros de capacidade e uma altura de 20 centímetros. Quais são as dimensões das caixas para obter o menor custo com o papelão?

Figura 13 – Representação Gráfica da Caixa de Papelão



Fonte: Construção Própria

Resolução: Sendo assim observando a figura 13, notamos que podemos ter:

$$V = a.b.h \tag{5.1}$$

e

$$A = 2(a.b + a.h + b.h) \tag{5.2}$$

Como $V = 15\ l = 15000\ cm^3$ e $h = 20\ cm$, substituindo na forma do volume de um paralelepípedo 5.1, temos:

$$15000 = a.b.20$$

$$a = \frac{750}{b} \tag{5.3}$$

Substituindo 5.3 em 5.2, ficamos com

$$A = 2(750 + \frac{750}{b}.20 + 20.b)$$

Simplificando ficamos com

$$A = 1500 + \frac{30000}{b} + 40b$$

Dessa forma devemos aplicar a teoria vista, logo

$$\frac{dA}{db} = -\frac{30000}{b^2} + 40$$

Sendo assim teremos que ter $\frac{dA}{db} = 0$, com isso

$$-\frac{30000}{b^2} + 40 = 0$$

$$\frac{30000}{b^2} = 40$$

$$30000 = 40b^2$$

Logo

$$b^2 = 750 \Rightarrow b = \sqrt{750}$$

$$b \approx \pm 27,39$$

Portanto a caixa deve ter um fundo quadrado medindo aproximadamente $27,39$ cm, para que a caixa tenha um consumo mínimo de papelão.

Esse é um exemplo bem simples de uma teoria mais geral conhecida como *Otimização* e note que o cálculo do b se torna bem simples com o uso da derivada.

No exemplo 2 veremos uma interessante aplicação da derivada, como um modelo ligado a pecuária. Mesmo de forma bem superficial ilustra bem como a Matemática pode ser aplicada em diferentes situações.

Exemplo 02: Um fazendeiro tem 200 bois, cada um pesando 300 Kg. Até agora ele gastou $R\$380.000,00$ para criar os bois e continuara gastando $R\$2,00$ por dia para manter cada boi. Os bois aumentam de peso a uma razão de $1,5$ Kg por dia. Seu preço de venda, hoje é de $R\$18,00$ o quilo, mas o preço cai 5 centavos por dia. Quantos dias deveria o fazendeiro aguardar para maximizar seu lucro?

Resolução: Sendo assim iremos organizar as informações que temos no problema dado. Seja o números de bois dados por $b = 200$ e o peso dado por $p = 300$. Dessa forma para encontrar obtemos o lucro por dia, L, escrevemos

$$L(d) = (peso\ dos\ bois\ X\ preço\ em\ relação\ ao\ Kg) - Custo\ de\ Criação \tag{5.4}$$

O peso dos bois será dado por $p = 200.300 + 200.1,5.d$, que traduz justamente a quantidade de bois pelo seu peso acrescentado com o peso que ganhará por dia.

Já o preço em relação ao Kg é dado por $p(Kg) = 18 - 0,05d$. Agora analisando o custo até o momento temos $C = 380000 + 200.2.d$.

Substituindo em 5.4 o que obtemos após a análise, temos:

$$L(d) = (200.300 + 200.1,5.d).(18 - 0,05d) - (380000 + 200.2.d)$$

$$L(d) = 1080000 - 3000d + 5400d - 15d^2 - 380000 - 400d$$

Após simplificarmos ficamos com

$$L(d) = -15d^2 + 2000d + 700000$$

Aplicando a teoria de derivada, teremos que ter

$$\frac{d}{dd}(-15d^2 + 2000d + 700000) = 0$$

Resolvendo

$$-30d + 2000 = 0$$

Logo

$$d \approx 66,666$$

$$d \approx 67$$

Portanto o fazendeiro deve aguardar 67 dias para maximizar seus lucros.

Este próximo exemplo nos da uma ideia de aplicação direta ligando a Matemática com a Biologia. Mesmo de forma simples nos da uma ideia de como é possível interligar as duas áreas, acentuando sua importância.

Exemplo 03: Suponha que o número de bactérias em uma cultura no instante t é dada por $N(t) = 5000(25 + te^{-\frac{t}{20}})$. Ache o maior e o menor número de bactérias durante o intervalo de tempo $0 \leq t \leq 100$.

Resolução: Sendo assim aplicaremos os conceitos vistos anteriormente, fazendo:

$$\frac{dN}{dt} = 5000\left(e^{-\frac{t}{20}} - \frac{te^{-\frac{t}{20}}}{20}\right)$$

Agora faremos $\frac{dN}{dt} = 0$, ficamos com:

$$5000\left(e^{-\frac{t}{20}} - \frac{te^{-\frac{t}{20}}}{20}\right) = 0$$

$$5000e^{-\frac{t}{20}}\left(1-\frac{t}{20}\right)=0$$

$$1-\frac{t}{20}=0$$

Logo $t=20$.

Com isso devemos analisar o que acontece nos extremos dá função com base no seu intervalo de domínio $0 \leq t \leq 100$, fazendo:

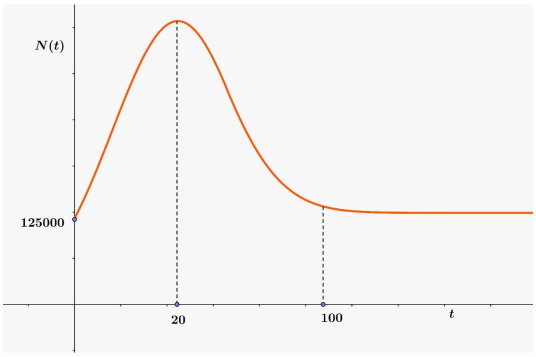
$$N(0)=125000$$

$$N(20)=161787,94$$

$$N(100)=128368,97$$

Com base na figura 15, podemos notar que o menor número de bactérias 125000 e o maior $161787,94$.

Figura 14 – Representação Gráfica da Comparação



Fonte: Construção Própria

Observação: Nesse trabalho estamos dando ênfase à possibilidade de explorar o conceito de derivadas no Ensino Médio, dando como uma maior prioridade às funções polinomiais. No entanto, nesse último exemplo usamos uma função exponencial. No entanto, isso não inviabiliza a proposta, no sentido de que tal função é vista no Ensino Médio e a sua derivada poderia ser também apresentada sem muita dificuldade, pelo menos que tange.

O exemplo 04 também se trata de uma aplicação do conceito de otimização, nesse caso, de cálculo de área.

Exemplo 04: Um fazendeiro tem 1200 m de cerca e quer cercar um campo retangular que está na margem de um rio reto. Ele não precisa de cerca ao longo do rio. Quais são as dimensões do campo que tem maior área?

Resolução: Levando em consideração as propriedades do retângulo e a restrição aplicada na questão. Podemos ter:

$$4x + y = 1200 \Rightarrow y = 1200 - 4x \tag{5.5}$$

Levando em consideração a área do retângulo teremos:

$$A(x) = xy \tag{5.6}$$

Sendo assim substituiremos 5.5 em 5.6, ficamos com:

$$A(x) = 1200x - 4x^2$$

Aplicando a teoria de Máx. e Mín. temos:

$$A'(x) = 1200 - 8x$$

$$1200 - 8x = 0$$
$$x = \frac{1200}{8} = 150$$

Logo $y = 600$
Para conferirmos se o valor se trata do valor máximo que a função pode assumir, basta fazermos $A''(x) = -8$. Como $A''(x) < 0$, temos que a função apresenta valor de máximo. Portanto as dimensões que farão com que a área seja máxima será $x = 150$ e $y = 600$.

O próximo exemplo segue a mesma linha dos anteriores.

Exemplo 05: Há 50 macieiras em um pomar. Cada árvore produz 800 maçãs. Para cada árvore adicional plantada no pomar, a produção por árvore cai em 10 maçãs. Quantas árvores devem ser adicionadas ao pomar existente para maximizar a produção total de maçãs?

Resolução: Dessa forma consideremos x como a variável que representa as árvores adicionais plantadas. Sendo assim pretendemos maximizar a produção de maçãs.

$$P(x) = (n\check{z}\ de\ \acute{a}rvores).(produ\c{c}\tilde{a}o\ de\ ma\c{c}\tilde{a}s)$$

Com isso termos:

$$P(x) = (50 + x)(800 - 10x)$$

$$P(x) = -10x^2 + 300x + 40000$$

Aplicando a teoria de max. e min., teremos:

$$P'(x) = 300 - 20x$$

Sendo assim

$$300 - 20x = 0$$

$$x = 15$$

verificando se o valor encontrado se trata do max., faremos $P''(x) = -20 < 0$, logo adicionando 15 árvores teremos a maior produção de maçãs, que com isso será de 42250 maçãs.

No próximo exemplo, temos um modelo simples, ligado a área de Economia.

Exemplo 06: Uma loja tem vendido 200 aparelhos reprodutores de Blu-ray por semana a $R\$$ 350 cada. Uma pesquisa de mercado indicou que para cada $R\$$ 10 de desconto oferecido aos compradores, o número de unidades vendidas aumenta 20 por semana. Encontre a função demanda e a função receita. Qual o desconto que a loja deveria oferecer para maximizar sua receita?

Resolução: Tomando x como representante do número de Blu-ray vendidos por semana, dessa forma o número de vendas semanais será $x - 200$. Levando em consideração que a cada 20 unidades vendidas, o preço cai em $R\$$ 10, logo teremos um decréscimo de $\frac{10}{20}$ em relação ao preço. Com isso o preço do produto será dado por:

$$P(x) = 350 - \frac{10}{20}(x - 200)$$

$$P(x) = 450 - \frac{1}{2}x$$

E sua função receita dada por:

$$R(x) = xP(x)$$

Logo

$$R(x) = x\left(450 - \frac{1}{2}x\right)$$

$$R(x) = 450x - \frac{1}{2}x^2$$

Para que a receita seja máxima, devemos ter $R'(x)$, logo

$$450 - x = 0$$

$$x = 450$$

Substituindo na equação do preço, encontramos

$$P(450) = 225$$

Desta forma o preço que deverá ser tomado sera de $R\$$ 225, o que faz com que o desconto seja de $350 - 225 = 125$, maximizando a receita.

O próximo exemplo nos mostrará como a derivada é aplicada em Física, por parte da Cinemática.

Exemplo 07: Uma partícula se desloca em linha reta, de tal forma que sua distância à origem é dada, em função do tempo por meio da seguinte equação:

$$X(t) = 3t + 7t^2$$

Sendo assim determine sua velocidade, no S.I(Sistema Internacional de Medidas), no instante $t = 1s$. Em seguida calcule sua aceleração.

Resolução: Dessa forma utilizando os conceitos físicos com relação a velocidade e aceleração, basta fazermos:

$$X'(t) = 3 + 14t$$

No instante $t = 1s$, ficamos com:

$$X'(1) = 3 + 14 = 17\ m/s$$

Portanto a velocidade da partícula no instante de $1s$ será justamente $17\ m/s$.

Agora para encontrarmos a sua aceleração, basta calcularmos a derivada segunda com relação a função da partícula, com isso:

$$x''(t) = 14\ m/s^2$$

Dessa forma para calcularmos a velocidade e aceleração com relação ao gráfico da função, basta empregarmos a definição com relação ao calculo direto da derivada primeira e segunda. Isso se deve justamente a definição de derivada está diretamente a inclinação da reta com base no gráfico da função, representando assim a velocidade e aceleração.

O próximo exemplo nos dará uma aplicação direta dentro da própria Matemática, onde usamos derivadas em uma aplicação de geometria.

Exemplo 08: Determine a altura do cilindro circular reto, de volume máximo, inscrito na esfera de raio R dado.
Resolução: Sabendo que o volume do cilindro é encontrado por meio da fórmula:

$$V_{ci} = A_b.h$$

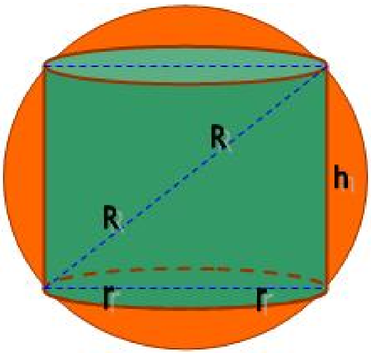
Sendo assim:

$$V_{ci} = \pi r^2.h$$

Utilizando Pitágoras para encontrar a altura teremos

$$(2R)^2 = (2r)^2 + h^2$$

Figura 15 – Representação Gráfica da Comparação



Fonte: Google imagens

$$4R^2 = 4r^2 + h^2$$
$$r^2 = \frac{4R^2 + h^2}{4}$$

Substituindo na fórmula do volume, temos:

$$V_{ci} = \pi \left(\frac{R^2 + h^2}{4} \right) h$$

Colocando em forma de função, temos:

$$f(x) = \pi \left(\frac{4R^2 + x^2}{4} \right) x$$

Dessa forma fazendo $f'(x)$, temos:

$$f'(x) = \pi \left(\frac{4R^2 - 3x^2}{4} \right)$$

Fazendo $f'(0) = 0$, temos:

$$x = \frac{2\sqrt{3}R}{3}$$

Sendo R a diagonal do cilindro.

Com isso vimos que existem aplicações em diversas áreas a cerca da aplicação da derivada principalmente ligada a teoria de máximos e mínimos. A depender das informações disponíveis no problema podemos transforma-lo em equações e a partir dai empregar os conceitos vistos. Tal procedimento é um caso bem simplificado do que conhecemos como *modelagem matemática*.

6 Conclusão

Ao longo da pesquisa e no decorrer do trabalho de forma geral percebemos que a Matemática é fundamental em diversas situações no dia a dia, pensando nisso buscamos aplicações em outras áreas de forma que pudesse ser usada no ensino médio.

Nem sempre será fácil mostrar a aplicação que determinado conteúdo, mas neste trabalho buscamos situações problemas que podem ser usados em conjunto com outras disciplinas.

A apresentação da teoria de máximos e mínimos se deu de forma bem simples, mas com o rigor matemático que se deve ter ao apresentar um conteúdo no ensino básico. Essa parte teorica junto com o conteúdo sobre polinômios gerou um amplo leque de possibilidades para se trabalhar com os alunos do ensino médio de forma a apresentar a teoria atrelada a prática.

As questões contextualizadas deste trabalho podem sim ser utilizadas em sala, justamente pelo fato de serem bem simples e ligadas à outras áreas do conhecimento, servem para mostrar que a proposta é viável e não teria muita dificuldade em aplicá-la no Ensino Médio.

Referências

DESCONHECIDO. *Derivadas possuem diversas aplicações*. Site de dicas de Cálculo. Disponível em: <https://www.dicasdecalculo.com.br/possuem-diversas-aplicacoes/>. Acesso em: 13 abril 2020. Nenhuma citação no texto.

DESCONHECIDO. *O Nascimento do Cálculo*. Disponível em: <http://ecalculo.if.usp.br/historia/historia_derivadas.htm>. Acesso em: 17 julho 2017. Nenhuma citação no texto.

GONÇALVES, A. *Introdução a Álgebra*. 3ª. ed. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1979. v. 1. Citado na página 21.

IEZZI, G. *Fundamentos de Matemática Elementar: Complexos, Polinômios e equações*. 2ª. ed. São Paulo: Atual Editora LTDA, 1977. v. 6. Citado 3 vezes nas páginas 14, 15 e 17.

RIBEIRO, A. G. *Dispositivo Prático de Briot-Ruffini*. Site da uol. Disponível em: <https://mundoeducacao.bol.uol.com.br/matematica/dispositivo-pratico-briotruffini.htm>. Acesso em: 20 março 2020. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 18.

SANTOS, I. S. *Máximos e Mínimos com uso de Ferramentas do Ensino Médio e Noções de Cálculo Diferencial*. Juazeiro do Norte, 2017. 60 I. Nenhuma citação no texto.

STEWART, J. *Cálculo*. 7ª. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013. v. 1. Citado 6 vezes nas páginas 27, 28, 32, 35, 37 e 39.