Universidade Federal
de São João del-Rei

Diego Moreira Maciel

Uma reflexão sobre a intradisciplinaridade entre geometria e álgebra no ensino fundamental

São João del-Rei
Julho de 2021

Diego Moreira Maciel

Uma reflexão sobre a intradisciplinaridade entre geometria e álgebra no ensino fundamental

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como requisito parcial a obtenção do título de Mestre em Matemática, através do PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional na Universidade Federal de São João del-Rei. Área de concentração: Matemática

Orientadora: Prof(a). Dra. Viviane Pardini Valério

Banca Examinadora

Orientadora: Prof(a). Dra. Viviane Pardini Valério

Prof. Dr. Francinildo Nobre Ferreira

Prof. Dr. Eder Marinho Martins - UFOP

São João del-Rei
Julho de 2021

Agradecimentos

Em primeiro lugar, agradeço a Deus e a Nossa Senhora Aparecida, por estarem sempre ao meu lado, me protegendo, amparando, guiando e iluminando o meu caminho e por terem me proporcionado a chance de cursar esse Mestrado, esse sonho, que agora concluo.

A minha esposa, Fabiana, pelo amor, pela presença em minha vida, compreendendo minhas ausências, consolando-me nos momentos de fraqueza e desânimo, e por acreditar em meu potencial.

Aos meus filhos, Gabriel e Matheus, filhos muito amados, por aceitarem dividir um pouco mais, o tempo já tão dividido, que passo com eles.

Aos meus pais, Maria Evanilda e Carlos Roberto, pelo amor incondicional, pelas orações, por acreditarem que eu chegaria até aqui e por sempre confiarem no meu potencial. Vocês me ensinaram a lutar e, consequentemente, a subir cada degrau dessa conquista.

A minha irmã e demais familiares, pelas palavras de incentivo e por torcerem para o alcance desse objetivo.

A Professora Dra. Viviane Pardini, pelas construtivas correções e orientações tais que me levaram a concluir com êxito minha dissertação. Obrigado por repartir comigo seus conhecimentos.

Aos colegas de curso, pelos momentos de alegria, de união, de espontaneidade, pela construção do conhecimento, pelo companheirismo e pela amizade construída.

A CAPES pelo suporte financeiro, tornando mais viável minha formação.

Por fim, um agradecimento sincero a todos aqueles que fizeram parte dessa conquista: amigos, colegas de trabalho e a todos que sempre acreditaram nessa vitória.

"Enquanto a Álgebra e a Geometria estiveram separadas, seus progressos foram lentos e suas aplicações limitadas. No entanto, quando estas duas ciências foram unidas, deram uma a outra renovada vitalidade e seguiram rapidamente rumo à perfeição."

— JOSEPH LOUIS LAGRANGE

Resumo

O objetivo geral deste trabalho é refletir sobre a intradisciplinaridade entre álgebra e geometria nas escolas, mais especificamente como se dá a contribuição da geometria à álgebra e da álgebra à geometria no ensino fundamental - anos finais. No decorrer do trabalho, exploramos ao todo sete conteúdos matemáticos básicos, buscando perceber e destacar essa intradisciplinaridade. Exploramos também o software *GeoGebra* através de propostas de roteiros de atividades e relatamos uma vivência em sala de aula, com uma turma do oitavo ano. Esperamos despertar em nossos leitores, colegas professores, a percepção de que a álgebra e a geometria coexistem e que essa coexistência, bem trabalhada e evidenciada em nossas aulas, pode deixar a matemática muito mais interessante e prazerosa de se ensinar e aprender.

Palavras-chave: álgebra, geometria, intradisciplinaridade, *GeoGebra*, relato de vivência.

Abstract

The general objective of this work is to reflect on the intradisciplinarity between algebra and geometry in schools, more specifically how geometry contributes to algebra and algebra to geometry in elementary school - final years. In the course of the work, we explored a total of seven basic mathematical contents, seeking to understand and highlight this intradisciplinarity. We also explored the *GeoGebra* software through proposed activity scripts and we report an experience in the classroom in an eighth grade class. We hope to awaken in our readers, fellow professors, the perception that algebra and geometry coexist and that this well-crafted coexistence, evidenced, in our classes can make mathematics much more interesting and pleasurable to teach and learn.

Keywords: algebra, geometry, intradisciplinarity, *GeoGebra*, experience report.

Sumário

Introdução

Este trabalho de conclusão de curso tem como objetivo principal refletir sobre a intradisciplinaridade entre álgebra e geometria nas escolas, mais especificamente como se dá a contribuição da geometria à álgebra e da álgebra à geometria no ensino fundamental - anos finais.

Para tanto, foram estabelecidos os seguintes objetivos específicos:

• Compreender o termo intradisciplinaridade, sua relevância e, em especial, compreender intradisciplinaridade na matemática entre as áreas álgebra e geometria.

• Explorar conteúdos do ensino fundamental onde encontramos naturalmente intradisciplinaridade ou podemos trabalhar de maneira intradisciplinar álgebra e geometria.

• Propor atividades intradisciplinares no GeoGebra.

• Relatar e refletir sobre uma experiência com alunos do 8^o ano.

A partir da leitura de parte de três livros (*O Homem que Calculava* de Malba Tahan, *Os elementos de Euclides* de David Berlinski e *A História da Matemática* de Anne Rooney) surgiu o tema deste trabalho, focando a reflexão no ensino fundamental - anos finais, nível de escolaridade que mais atuo no momento.

A primeira obra, *O Homem que Calculava*, é um dos meus livros favoritos. Apesar de ser um livro literário traz, de maneira romantizada, a definição dos três ramos principais da matemática básica: álgebra, geometria e aritmética. O autor também apresenta diversos problemas matemáticos onde as resoluções envolvem várias áreas da matemática, valorizando o raciocínio, deixando de lado o uso mecânico e sem entendimentos de fórmulas.

> Para atingir o seu objetivo, precisa a Matemática estudar os números, suas propriedades e transformações. Nessa parte ela toma o nome de Aritmética. Conhecidos os números é possível aplicá-los na avaliação das grandezas que variam ou que são desconhecidas, mas que se apresentam expressas por meio de relações e fórmulas. Temos assim a Álgebra. Os valores que medimos no campo da realidade são representados por corpos materiais ou por símbolos; em qualquer caso, entretanto, esses corpos ou símbolos são dotados de três atributos: forma, tamanho e posição. Importa, pois, que estudemos tais atributos. E esse estudo vai constituir o objeto da Geometria (TAHAN, 2010, p.53).

Na segunda obra, *Os elementos de Euclides*, o autor traz os axiomas, teoremas e demonstrações criados por Euclides, sendo que grande parte das proposições apresentadas por Euclides são verificadas geometricamente. O autor, ao longo do texto, insere comentários, fatos históricos, reflexões e outras demonstrações paralelas que ajudam na compreensão da obra de Euclides. As demonstrações algébricas, ao longo do tempo, foram se destacando e hoje em dia são as mais utilizadas para demonstrar fatos geométricos.

> Em sua demonstração do teorema de Pitágoras, Euclides ignora a equação algébrica pela qual os fatos são tão facilmente expressões e se ocupa com a construção daqueles quadrados um tanto aparvalhados, esmiuçando em suas áreas o segredo do significado. [...] Euclides leva a álgebra geométrica tão longe quanto consegue (BERLINSKI, 2018, p.92).

Na terceira obra, *A História da Matemática*, em seu capítulo 5, encontramos uma cronologia das áreas álgebra e geometria. Nesse capítulo, a autora fala sobre os matemáticos que se destacaram na "construção" dessas duas áreas, além de refletir sobre os pontos comuns entre elas.

> É impossível separar a álgebra simples da geometria, pois foram em problemas relacionados com geometria de duas e três dimensões que as questões algébricas surgiram pela primeira vez (ROONEY, 2012, p.126).

Ainda nesse capítulo, encontramos também a história de René Descartes e como sua ideia de relacionar álgebra e geometria foi de grande importância para o desenvolvimento da geometria analítica.

> Descartes achava que nem a geometria nem a álgebra eram inteiramente satisfatórias, e procurava tirar o melhor de ambas. [...] Descartes propôs que a posição de um ponto em um plano podia ser identificada pela referência a dois eixos que se interceptam, usados como guias de medidas, desenvolvendo assim o sistema de coordenadas que agora é conhecido como sistema cartesiano (ROONEY, 2012, p.141).

Dividimos nosso trabalho em quatro capítulos e o finalizamos apresentando algumas considerações finais.

No capítulo 1, procuramos destacar os principais ramos da matemática: álgebra, aritmética e geometria, além de trazer o significado de *intradisciplinaridade* e sua aplicação na disciplina matemática.

No capítulo 2, exploramos quatros conteúdos do ensino fundamental - anos finais onde encontramos naturalmente intradisciplinaridade ou podemos trabalhar de maneira intradisciplinar álgebra e geometria.

No capítulo 3, trabalhamos com o *software GeoGebra*. Não poderíamos deixar esse recurso de ensino, dinâmico e gratuito, que combina GEOmetria e álGEBRA, fora do nosso trabalho, da nossa reflexão. Nesse capítulo, propomos duas atividades intradisciplinares que podem ser trabalhadas no ensino fundamental - anos finais.

No capítulo 4, trazemos um relato de vivência, no ensino remoto, com alunos do 8º ano do ensino fundamental. Relatamos sobre uma aula na qual foram trabalhadas maneiras de visualizar o fato matemático "a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é sempre 180º".

Capítulo 1

Intradisciplinaridade

Podemos dizer que oficialmente a matemática começou no Egito a aproximadamente há 4 mil anos atrás. Ela surgiu da necessidade de calcular valores e resolver situações do cotidiano. Então, a matemática sempre esteve presente ao longo de toda a história humana. E no decorrer do tempo a matemática foi evoluindo bastante e com essa evolução surgiu a necessidade de separar em ramos, conforme a usabilidade de cada um, até chegar nessa concepção que hoje temos da matemática.

> A história da matemática começa no Egito, há aproximadamente 4 mil anos, quando o conceito de número começou a ser compreendido pelo ser humano. A partir desse conceito, a matemática passou a evoluir cada vez mais, e dessa forma, surgiram diversas aplicações para a disciplina. Diante desse cenário, viu-se necessário separar a matemática em ramos conforme a usabilidade de cada um, pois dessa forma, o estudo se tornaria mais organizado (MINHOLI, 2020).

No Brasil, os ramos (os campos) da matemática mais abordados no ensino básico são: **aritmética**, **geometria** e **álgebra**. Na plataforma Britannica Escola encontramos definições mais precisas desses ramos da matemática:

• A **álgebra** é um método de trabalhar com a matemática de modo geral. Ela estabelece regras para o modo de apresentar as equações e resolvê-las. A palavra álgebra vem do título de um livro de matemática escrito no início do século IX por um matemático e astrônomo árabe chamado Al-Khwarizmi. No entanto, as regras da álgebra são ainda mais antigas do que esse livro. Os gregos antigos escreveram algumas das regras que hoje compõem a álgebra, e outras delas surgiram nos séculos seguintes. (BRITANNICA, 2021a)

• A **aritmética** é o ramo mais elementar da matemática, pois os outros ramos utilizam os princípios e as regras da aritmética. É a parte da matemática que lida com cálculos como a adição, a subtração, a multiplicação e a divisão. As pessoas usam a aritmética todos os dias. Ela é empregada quando compramos algo em uma loja, medimos distâncias ou simplesmente contamos até 10. O termo "aritmética" vem da palavra grega *arithmos*, que significa "número". (BRITANNICA, 2021b)

- A **geometria** é um ramo de matemática que lida com formas e figuras. Explica como construir ou desenhar formas, medi-las e compará-las. É usada em muitos tipos de trabalho, da construção de casas e pontes ao planejamento de uma viagem espacial ou à modelagem de uma roupa. A geometria é também uma das bases da expressão artística. (BRITANNICA, 2021c)

Buscamos fundamentar nossa pesquisa na BNCC, Base Nacional Comum Curricular (2017). Procuramos nesse documento mais informações sobre esses três ramos da matemática, como eles são e devem ser abordados nas escolas. A BNCC hoje é o documento oficial que norteia toda a educação básica no Brasil. É o documento que determina as competências, habilidades e as aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver durante cada etapa da educação básica, ou seja, desde a educação infantil até o ensino médio.

A BNCC traz qual a finalidade em se estudar álgebra e os conteúdos principais a serem abordados nessa área de ensino:

> A unidade temática Álgebra, por sua vez, tem como finalidade o desenvolvimento de um tipo especial de pensamento - pensamento algébrico - que é essencial para utilizar modelos matemáticos na compreensão, representação e análise de relações quantitativas de grandezas e, também, de situações e estruturas matemáticas, fazendo uso de letras e outros símbolos. Para esse desenvolvimento, é necessário que os alunos identifiquem regularidades e padrões de sequências numéricas e não numéricas, estabeleçam leis matemáticas que expressem a relação de interdependência entre grandezas em diferentes contextos, bem como criar, interpretar e transitar entre as diversas representações gráficas e simbólicas, para resolver problemas por meio de equações e inequações, com compreensão dos procedimentos utilizados. As ideias matemáticas fundamentais vinculadas a essa unidade são: equivalência, variação, interdependência e proporcionalidade. Em síntese, essa unidade temática deve enfatizar o desenvolvimento de uma linguagem, o estabelecimento de generalizações, a análise da interdependência de grandezas e a resolução de problemas por meio de equações ou inequações. (BRASIL, 2017, p.270).

Traz também informações relacionadas à geometria:

> A Geometria envolve o estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento. Assim, nessa unidade temática, estudar posição e deslocamentos no espaço, formas e relações entre elementos de figuras planas e espaciais pode desenvolver o pensamento geométrico dos alunos. Esse pensamento é necessário para investigar propriedades, fazer conjecturas e produzir argumentos geométricos convincentes. É importante, também, considerar o aspecto funcional que deve estar presente no estudo da Geometria: as transformações geométricas, sobretudo as simetrias. As ideias matemáticas fundamentais associadas a essa temática são, principalmente, construção, representação e interdependência. (BRASIL, 2017, p.271).

Trabalhar geometria com os alunos permite a eles interpretar e compreender melhor o mundo em que vivem. O conhecimento geométrico tem papel fundamental para a compreensão de conceitos vinculados à matemática e a outras áreas de conhecimento. No livro "*O Homem que calculava*" encontramos a seguinte passagem que reforça a importância da geometria na compreensão do mundo e como ela esta presente no nosso cotidiano:

> A Geometria, repito, existe por toda parte. No disco do sol, na folha da tamareira, no arco-íris, na borboleta, no diamante, na estrela-do-mar e até num pequenino grão de areia. Há, enfim, infinita variedade de formas geométricas espalhadas pela Natureza. Um corvo a voar lentamente pelo céu descreve, com a mancha negra de seu corpo, figuras admiráveis; o sangue que circula nas veias do camaleão não foge aos rigorosos princípios geométricos; a pedra que se atira no chacal importuno desenha, no ar, uma curva perfeita! A abelha constrói seus alvéolos com as formas de prismas hexagonais e adota essa forma geométrica, segundo penso, para obter a sua casa com a maior economia possível de material. A Geometria existe, como já disse o filósofo, por toda parte. É preciso, porém, olhos para vê-la, inteligência para compreendê-la e alma para admirá-la (TAHAN, 2010, p.34).

Na BNCC (BRASIL, 2017) encontramos os conteúdos matemáticos do ensino básico distribuídos em **unidades temáticas**. No **ensino fundamental** há cinco unidades temáticas correlacionadas que orientam a formulação de habilidades a ser desenvolvidas ao longo de nove anos, são elas: **números**, **álgebra**, **geometria**, **grandezas e medidas**, e

probabilidade e estatística. Cada uma delas pode receber ênfase diferente, a depender do ano de escolarização. Para o **ensino médio** esse mesmo documento propõe três unidades temáticas similares às propostas para o ensino fundamental, são elas: **números e álgebra**, **geometria e medidas**, e **probabilidade e estatística**.

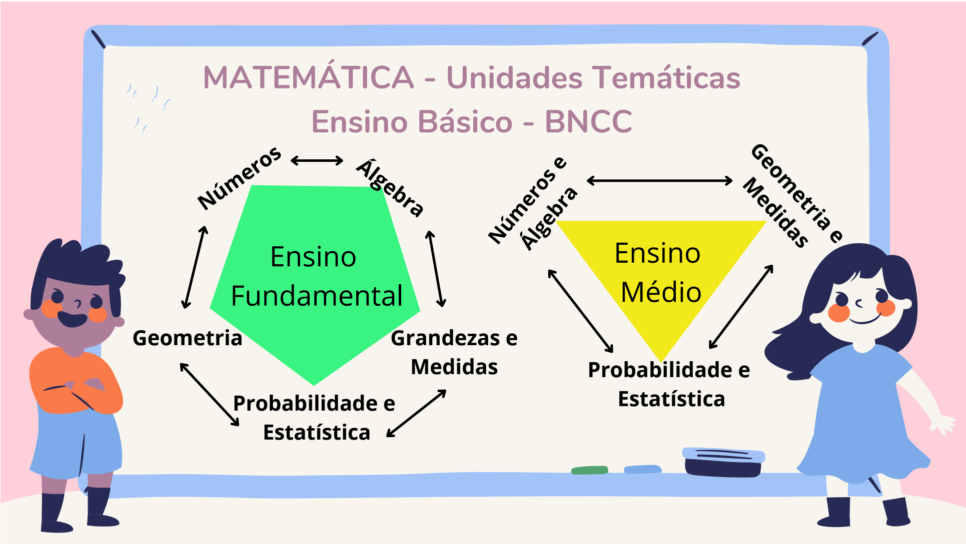

Figura 1.1: Unidades temáticas de matemática do ensino básico

Fonte: Elaborado pelo autor.

Encontramos também em Sousa (2014, p.14) mais uma contribuição para nos ajudar a compreender melhor sobre a importância de se trabalhar os três ramos da matemática: álgebra, geometria e aritmética.

> Na Álgebra inicia-se o processo um pouco mais complexo dos números, pois utilizamos letras para representar números, e só chegamos a uma solução através de expressões onde podemos descobrir o valor das variáveis. A geometria é a área matemática mais esquecida dos programas educacionais das escolas, e isso se torna um problema para o aluno, pois é através dela que o aluno tem um contato visual com as questões matemáticas, pois é na Geometria que temos o contato com a parte gráfica da matemática, e através do ato de ver que o aluno entenderá o que se pergunta. É na Geometria que o aluno tem o contato visual com a disciplina e assim pode-se observar e analisar o que o enunciado pede e com ela se pode trabalhar Aritmética, Álgebra e também a Trigonometria e é nesse ponto que podemos observar o quanto a matemática é unificada (SOUSA, 2014, p.14).

Podemos observar na BNCC que realmente a álgebra, a geometria e a aritmética são os ramos mais abordados no ensino fundamental no Brasil. Nesse documento temos informações sobre cada um desses ramos, sobre os componentes curriculares, as habilidades e os objetos de conhecimento de cada ano escolar. E em nosso trabalho, quando abordarmos um determinado conteúdo, teremos o cuidado de situar o leitor no que diz respeito ao ano de escolaridade no qual o conteúdo é abordado e quais são as habilidades que o professor deve procurar desenvolver com seus alunos.

Entendidas as áreas mais trabalhadas no ensino fundamental, buscamos entender o termo **intradisciplinaridade**.

Não encontramos o significado do verbete intradisciplinar em dicionários tradicionais (Aurélio, Michaelis, Houaiss, Aulete). Porém, o verbete interdisciplinar é encontrado em todos eles. Em Aurélio, por exemplo, o significado desse verbete é: capaz de estabelecer relações entre duas ou mais disciplinas, ou áreas do conhecimento, com o intuito de melhorar o processo de aprendizagem, estreitando a relação entre professor e aluno. (Disponível em: <https://www.dicio.com.br/interdisciplinar/>. Acesso em: 19 de julho de 2021.)

Encontramos o termo intradisciplinaridade pela primeira vez na referência (FARIA, 2016), *Raciocínio proporcional: Integrando aritmética, geometria e álgebra com o GeoGebra* - Tese de doutorado, e em seguida nas referências: *Grandezas proporcionais com GeoGebra: Possibilidades para o ensino integrado de geometria, aritmética e álgebra* (2016) e *Intradisciplinaridade Matemática com GeoGebra na Matemática Escolar* (2019) da mesma autora. Também encontramos esse termo no capítulo 17 da obra: *Para apender Matemática* de Lorenzato. (2016).

Em nenhum desses trabalhos encontramos onde o termo apareceu pela primeira vez. Os autores usam a palavra intradisciplinaridade de forma natural, uma vez que existem os termos conhecidos interdisciplinaridade e transdisciplinaridade. Então após estudarmos essas quatro referências ousamos dar um significado à intradisciplinaridade:

Intradisciplinaridade é o substantivo formado a partir do adjetivo intradisciplinar (aquilo que se realiza com a cooperação, colaboração, de duas ou mais áreas de uma determinada disciplina). A prática intradisciplinar busca romper com o modelo considerado tradicional de ensino que prioriza a construção do conhecimento de maneira segmentada, fragmentada. Essa prática busca revelar pontos em comum entre áreas de uma mesma disciplina facilitando trabalhar abordagens diferentes para um mesmo assunto (conteúdo) em sala de aula.

> De forma geral, a intradisciplinaridade corresponde às estritas relações das ramificações de uma mesma disciplina. Nesse sentido, a Matemática pode ser entendida como disciplina matriz, e a aritmética, geometria e álgebra como disciplinas derivadas, ou ainda como ramificações da disciplina matriz. (FARIA, 2006, p.64)

Ainda em Faria (2016, p.65), encontramos a seguinte passagem que reforçar a importância da prática intradisciplinar:

> [...] defender a intradisciplinaridade não significa incentivar a abordagem da disciplina matemática como uma gaiola epistemológica, que se preocupa apenas com sua linguagem, regras e técnicas. O que a intradisciplinaridade propõe é que as ramificações da matemática não estejam dissociadas, como se houvessem subdisciplinas isoladas. Nesse sentido, embora a intradisciplinaridade proponha o trabalho simultâneo entre os ramos da matemática, isso não significa que ela negue a relação que deve haver entre essa disciplina e as outras que compõem o cenário escolar (interdisciplinaridade). Tampouco consiste em uma negação da abordagem que valoriza a matemática e o contexto que ultrapassa os muros da escola (transdisciplinaridade). (FARIA, 2016, p.65)

Na BNCC não encontramos o termo intradisciplinaridade, nela encontramos apenas o termo interdisciplinar. Mas conseguimos destacar uma competência a ser desenvolvida pelos alunos, apresentada nesse documento, que fala sobre a conexão entre a matemática e as outras áreas de conhecimento, bem como a correlação entre os diferentes ramos da matemática.

> Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções. (BRASIL, 2017, p.267)

Podemos citar uma passagem de Oliveira et al. (2015, p.7) que reforça esse entendimento:

> O uso da Geometria, para contextualizar o ensino da Álgebra no ensino fundamental pode tornar seu ensino mais interessante e motivador. As representações geométricas auxiliam na organização do pensamento lógico, que é fundamental na resolução de problemas. As construções geométricas, além de representar a figura ajuda na capacidade de expressar algebricamente um pensamento, estabelecer relações e fazer generalizações. E o cálculo de área é importante para que o aluno consiga traduzir com significado a linguagem algébrica e generalizar situações (OLIVEIRA et al., 2015, p.7).

Ainda na BNCC podemos citar uma passagem que destaca a aproximação de álgebra e geometria ao introduzir elementos de geometria analítica no ensino fundamental.

> Outro ponto a ser destacado é a aproximação da Álgebra com a Geometria, desde o início do estudo do plano cartesiano, por meio da geometria analítica. As atividades envolvendo a ideia de coordenadas, já iniciadas no Ensino Fundamental - Anos Iniciais, podem ser ampliadas para o contexto das representações no plano cartesiano, como a representação de sistemas de equações do 1º grau, articulando, para isso, conhecimentos decorrentes da ampliação dos conjuntos numéricos e de suas representações na reta numérica (BRASIL, 2017, p.272).

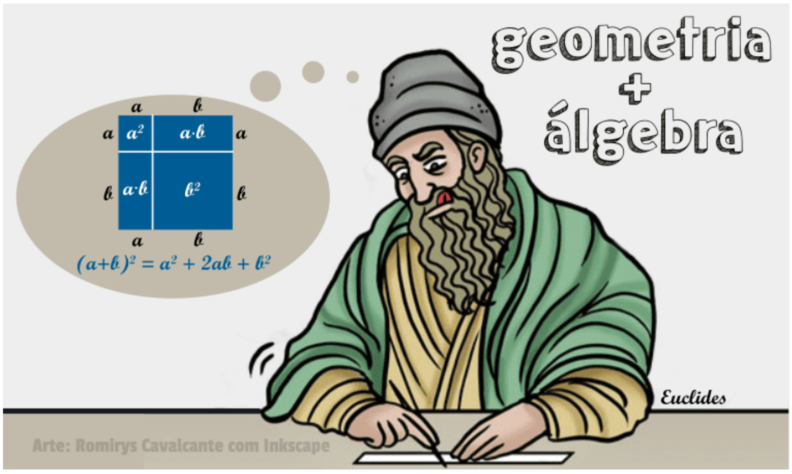

Figura 1.2: Integração entre Álgebra e Geometria

Fonte: CAVALCANTE, 2017.

Capítulo 2

Explorando conteúdos do ensino fundamental

Neste capítulo, exploraremos quatros conteúdos do ensino fundamental - anos finais, onde encontramos naturalmente intradisciplinaridade ou podemos trabalhar de maneira intradisciplinar álgebra e geometria. Os conteúdos a serem explorados são: **teorema de Pitágoras**, **produtos notáveis**, **números de diagonais de um polígono** e **desigualdade triangular**.

2.1 Teorema de Pitágoras

2.1.1 Por dentro do assunto

O conhecido **teorema de Pitágoras** apresenta uma relação algébrica dos lados de um triângulo retângulo qualquer - objeto geométrico. Existem diversas demonstrações algébricas e geométricas para este teorema, como destacaremos mais a seguir.

Teorema de Pitágoras: o quadrado da medida c da hipotenusa de um triângulo retângulo qualquer é igual à soma dos quadrados das medidas a e b de seus catetos, ou seja, $a^2 + b^2 = c^2$.

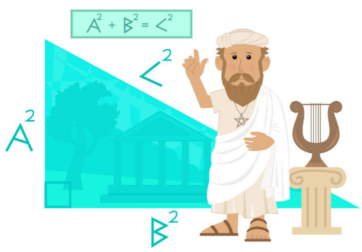

Figura 2.1: Teorema de Pitágoras

Fonte: SILVA, 2021a.

De acordo com a BNCC (BRASIL, 2017, p.318), no **nono ano do ensino fundamental**, na **unidade temática geometria**, é apresentado aos alunos o objeto de conhecimento "teorema de Pitágoras: verificações experimentais e demonstração". O objetivo da abordagem desse conteúdo é desenvolver as seguintes habilidades:

(EF09MA13) Demonstrar relações métricas do triângulo retângulo, entre elas o teorema de Pitágoras, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos.

(EF09MA14) Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes.

Quem foi Pitágoras?

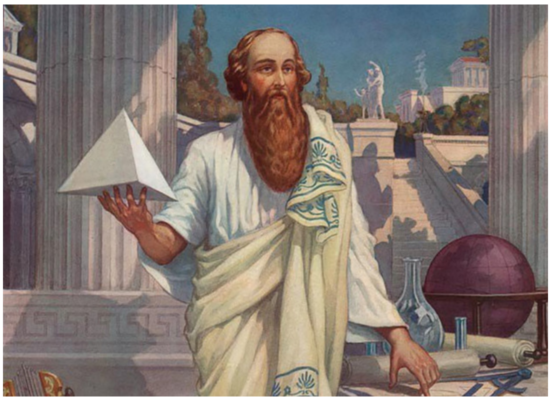

Figura 2.2: Pitágoras

Fonte: https://www.todamateria.com.br/pitagoras/. Acesso em: 27 de maio de 2021.

> Pitágoras foi um matemático e filósofo grego que nasceu na ilha de Samos, na Grécia, por volta de 570 a.C. Durante sua vida, viajou pelo Egito, pela Babilônia e, possivelmente, pela Índia. Ele teve a possibilidade de absorver diversos conhecimentos matemáticos desenvolvidos nesses locais. Quando Pitágoras retornou a Grécia, fundou um centro de estudos de base religiosa, filosófica e matemática, conhecido como Escola Pitagórica, restrito a poucos iniciados (MARQUES et al., 2019a, p.58).

Muitas demonstrações foram feitas para o teorema de Pitágoras ao longo do tempo. O conhecido professor Loomis classifica as demonstrações do teorema de Pitágoras em basicamente dois tipos: provas "algébricas" (baseadas nas relações métricas nos triângulos retângulos) e provas "geométricas" (baseadas em comparações de áreas).

> [...] Em 1927, Loomis publicou A proposição pitagórica, livro contendo 230 provas; em 1940, então aos 87 anos, Loomis publicou uma segunda edição, com 370 provas. [...] A última frase de sua segunda edição é: "E ainda não chegamos ao fim". Loomis estava certo; não era o fim. O site Guinness World Records, sob o titulo "Maior quantidade de provas do teorema de Pitágoras", recentemente apontou um grego que diz ter descoberto 520 provas distintas. (CREASE, 2011, p. 24)

Neste contexto apresentaremos duas demonstrações simples para o teorema de Pitágoras, que podem ser trabalhadas com nossos alunos.

- **Demonstração 1 do teorema de Pitágoras**

Classificamos essa demonstração como sendo geométrica, seguindo a divisão que o professor Elisha Scott propôs em seu livro, porquê essa demonstração é baseada em comparação de áreas.

Muitas conjecturas têm sido feitas ao longo dos tempos sobre essa demonstração, uma delas é ter sido a demonstração do próprio Pitágoras.

Denotemos por a, b e c os catetos e a hipotenusa de um triângulo retângulo, respectivamente. E consideremos os dois quadrados da figura 2.3, cada um de lados iguais a $a + b$.

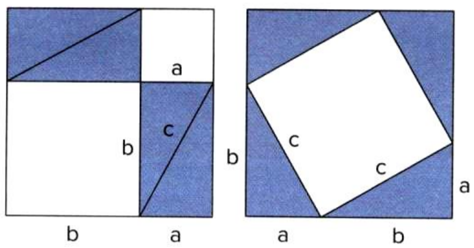

Figura 2.3: Teorema de Pitágoras - Demonstração geométrica

Fonte: MARQUES et al., 2019a, p.63.

O primeiro quadrado está decomposto em seis partes: os dois quadrados sobre os catetos e quatro triângulos retângulos congruentes ao triângulo descrito acima. O segundo quadrado está decomposto em cinco partes: o quadrado sobre a hipotenusa e quatro triângulos retângulos congruentes ao triângulo descrito acima. Subtraindo-se iguais de iguais, conclui-se que a área do quadrado sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados sobre os catetos.

Para provar que a parte central da segunda decomposição é efetivamente um quadrado de lado c, precisamos usar o fato de que a soma dos ângulos de um triângulo retângulo é igual a dois ângulos retos. Então temos a relação algébrica $a^2 + b^2 = c^2$ provada geometricamente.

Como sugestão ao leitor, deixamos o vídeo: *Uma maneira fácil de entender o Teorema de Pitágoras* <https://www.youtube.com/watch?v=KtrK7uIAhUw&t=130s>, do professor Éder Marinho, onde é possível verificar essa demonstração no GeoGebra.

• Demonstração 2 do teorema de Pitágoras

Para essa segunda demonstração, temos a intradisciplinaridade entre álgebra e geometria. Nesse caso, a Álgebra ela é natural no processo, ela vai aparecer naturalmente nessa demonstração. Pois, antes de aplicar as relações métricas no triangulo retângulo, o professor juntamente com os alunos terão que abordar os três triângulos da figura: triângulo ABC, triângulo ABC e triângulo ADC, bem como os casos de semelhança entre os triângulos. Só depois disso, será possível aplicar uma proporção, montando assim uma equação algébrica, onde fazendo as manipulações algébricas necessárias, iremos conseguir demonstrar o Teorema de Pitágoras.

E esse tipo de demonstração é bastante explorada no 9º ano, pois a habilidade da BNCC pede justamente para demonstrar essas relações métricas, inclusive o Teorema de Pitágoras, utilizando a semelhança de triângulos.

Considere o triângulo retângulo ABC, onde a, b e c são os comprimentos dos lados desse triângulo e h é o comprimento da altura (segmento AD) relativa à hipotenusa BC.

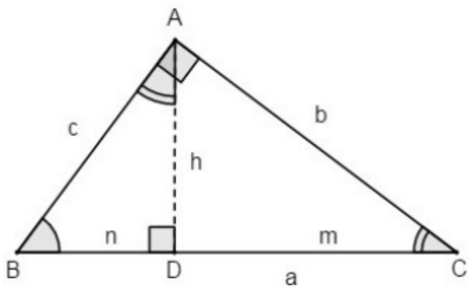

Figura 2.4: Teorema de Pitágoras - Demonstração algébrica

Fonte: https://brainly.com.br/tarefa/19667589. Acesso em: 27 de maio de 2021.

Observe que os triângulos ABC, DBA e DAC são semelhantes entre si, pois eles possuem ângulos congruentes.

Assim temos, $\frac{c}{a} = \frac{n}{c}$, daí $c^2 = a \cdot n$; e também $\frac{b}{a} = \frac{m}{b}$, logo $b^2 = a \cdot m$.

Somando membro a membro as duas igualdades $c^2 = a \cdot n$ e $b^2 = a \cdot m$, e considerando o fato que $a = m + n$, temos:

$$b^2 + c^2 = a \cdot m + a \cdot n = a(m + n) = a \cdot a = a^2$$

Portanto, vale a relação algébrica $c^2 + b^2 = a^2$.

2.1.2 Aplicando o conhecimento

Problema: (ENEM-2006) Na figura abaixo, que representa o projeto de uma escada com 5 degraus de mesma altura, o comprimento total do corrimão é igual a:

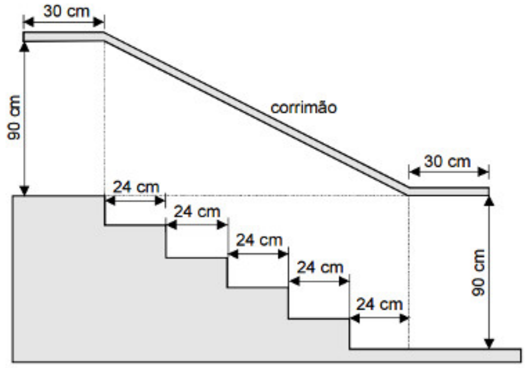

Figura 2.5: Questão ENEM 2006

Fonte: https://brainly.com.br/tarefa/19667589. Acesso em: 27 de maio de 2021.

(A) $1,8$ m (B) $1,9$ m (C) $2,0$ m (D) $2,1$ m (E) $2,2$ m.

Resolução: Observe o seguinte triângulo retângulo sobre o corrimão da imagem do exercício.

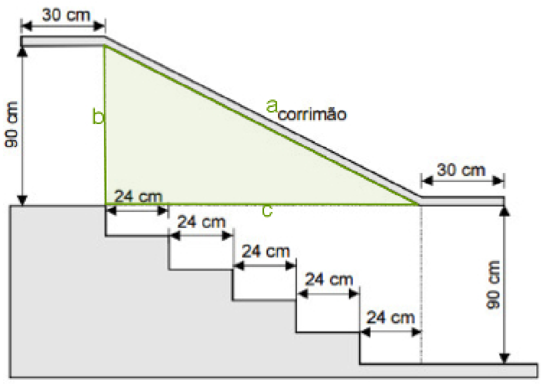

Figura 2.6: Questão ENEM 2006

Fonte: https://brainly.com.br/tarefa/19667589. Acesso em: 27 de maio de 2021.

Em um primeiro momento é de grande importância reconhecer o triângulo retângulo com hipotenusa a e catetos b e c, para depois aplicar os conhecimentos da álgebra:

Perceba que o comprimento do corrimão é igual à soma $30 + a + 30$ e que a é a medida da hipotenusa do triângulo colocado sobre a imagem. Além disso, note que $b = 90$ e que

$c = 24 + 24 + 24 + 24 + 24 = 120$. Assim, para descobrir a medida de a, faremos:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$a^2 = 90^2 + 120^2$$

$$a^2 = 8100 + 14400$$

$$a^2 = 22500$$

$$a = \sqrt{22500}$$

$$a = 150\ cm$$

A medida do corrimão será dada por: $30 + 150 + 30 = 210$ cm, o que equivale a $2,1$ metros. Então a alternativa correta será a letra D.

Para finalizar essa seção, apresentamos um mapa conceitual do teorema de Pitágoras. O mapa conceitual é uma estrutura gráfica que ajuda a organizar ideias, conceitos e informações de modo esquematizado. (Disponível em: <https://www.significados.com.br/mapa-conceitual/>. Acesso em 14 de julho de 2021)

> [...] Os mapas conceituais, como forma de organizar conhecimento, representam o entendimento do aluno sobre um determinado assunto, tornando observável ao professor a compreensão que o aluno tem acerca do conteúdo desenvolvido. Podendo identificar problemas na construção do conhecimento, o professor tem a oportunidade de retomar conteúdos e rever os objetivos propostos para uma dada etapa de ensino. Os mapas conceituais, então, ao mesmo tempo que favorecem apropriação do conhecimento matemático pelo aluno, à medida que oportunizam sistematizar saberes, evidenciar dúvidas e validar certezas, também permitem a avaliação da evolução do conhecimento do aluno pelo professor. (MENEGOLLA, 2006, p.17)

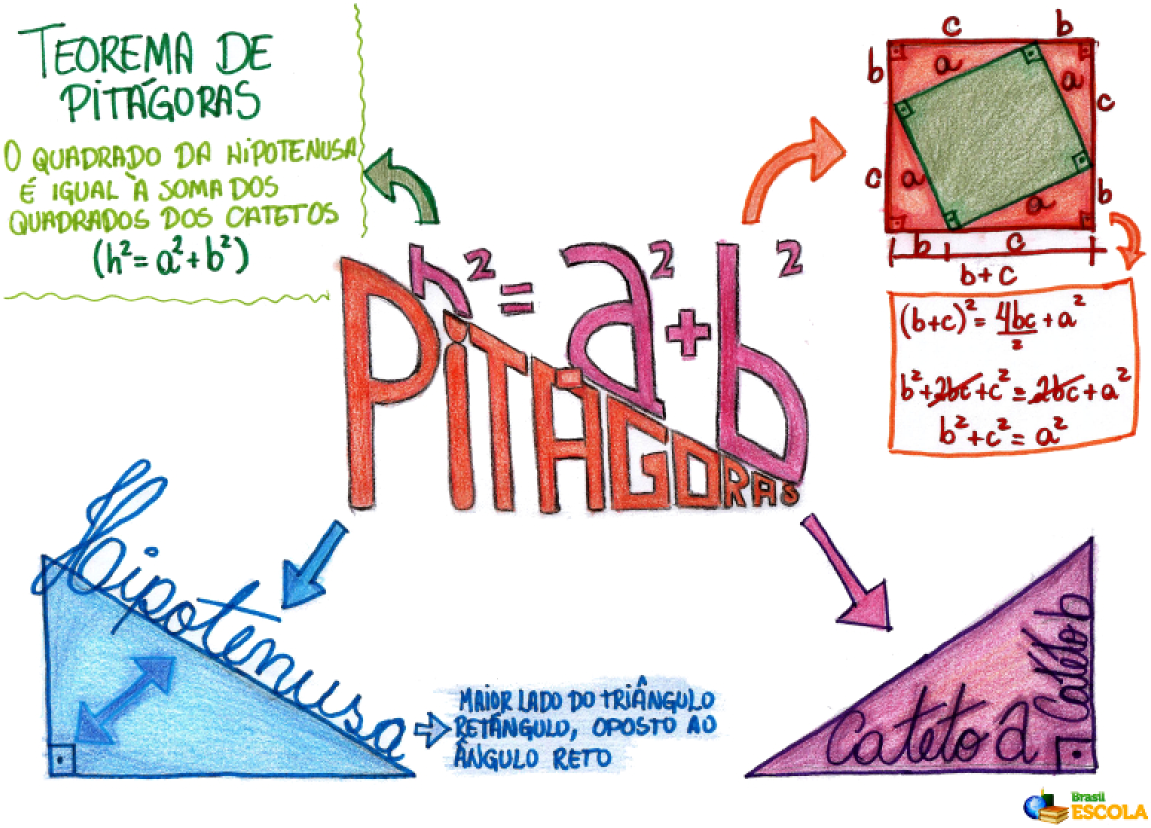

Figura 2.7: Mapa conceitual: teorema de Pitágoras

Fonte: LUIZ, 2020.

2.2 Produtos notáveis

2.2.1 Por dentro do assunto

O conteúdo **produtos notáveis** é um conteúdo algébrico do ensino fundamental, que pode ser explorado geometricamente para uma melhor compreensão do mesmo por nossos alunos. Aqui temos um exemplo no qual a geometria contribui no entendimento da álgebra.

Figura 2.8: Produtos notáveis

Fonte: https://www.tudodaodematematica.blogspot.com. Acesso em: 22 de setembro de 2020.

De acordo com a BNCC (BRASIL, 2017, p.316), no **nono ano do ensino fundamental**, na **unidade temática álgebra**, é apresentado aos alunos o objeto de conhecimento "expressões algébricas: fatoração e produtos notáveis". O objetivo da abordagem desse conteúdo é desenvolver as seguintes habilidades:

(EF09MA09) Compreender os processos de fatoração de expressões algébricas, com base em suas relações com os produtos notáveis, para resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais do 2º grau.

É fácil perceber a reação dos alunos diante de certas multiplicações desenvolvidas. Muitos deles começam a notar que certos produtos podem ser encontrados de uma outra forma, ou seja, seguindo uma certa regra. Então é o momento ideal para que o professor explore todo o conteúdo de produtos notáveis, focando sempre em suas aplicações e na sua grande ajuda no desenvolvimento de expressões e cálculos algébricos.

Analisaremos seis casos de produtos notáveis distintos que podem ser trabalhados apenas algebricamente. Para isso, podemos aplicar a propriedade distributiva da multiplicação e depois somar os termos semelhantes.

> A álgebra utiliza letras e números na representação de situações matemáticas. Alguns elementos, denominados produtos notáveis, são de extrema importância para o desenvolvimento de situações algébricas. Eles consistem em binômios especiais com formas de resolução através de regras matemáticas (NOE, 2021).

- **Quadrado da soma de dois termos:**

$$(x+a)^2 = (x+a)(x+a) = x^2 + xa + ax + a^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

Portanto,

$$(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2.$$

O resultado final desse produto notável, pode ser usado como fórmula para qualquer hipótese em que houver uma soma elevada ao quadrado.

Às vezes esse resultado é ensinado apenas dizendo:

O quadrado da soma de dois termos é o quadrado do primeiro termo, mais duas vezes o primeiro vezes o segundo, mais o quadrado do segundo termo.

- **Quadrado da diferença de dois termos:**

$$(x-a)^2 = (x-a)(x-a) = x^2 - xa - ax + a^2 = x^2 - 2ax + a^2$$

Portanto,

$$(x-a)^2 = x^2 - 2ax + a^2.$$

Perceba que a única diferença entre os resultados do quadrado da soma e da diferença é um sinal negativo no termo do meio.

Às vezes esse produto notável é ensinado apenas dizendo:

O quadrado da diferença de dois termos é o quadrado do primeiro termo, menos duas vezes o primeiro vezes o segundo, mais o quadrado do segundo termo.

- **Produto da soma pela diferença:**

É o produto notável que envolve um fator com uma soma e outro com uma subtração.

$$(x+a)(x-a) = x^2 - xa + ax - a^2 = x^2 - a^2$$

Portanto,

$$(x+a)(x-a) = x^2 - a^2.$$

Não há representação em forma de potência para esse caso.

Às vezes esse resultado é ensinado apenas dizendo:

O produto da soma pela diferença é o quadrado do primeiro termo, menos o quadrado do segundo termo.

- **Cubo da soma:**

$$(x+a)^3 = (x+a)(x+a)(x+a) = (x^2+2xa+a^2)(x+a)$$

$$x^3+x^2a+2x^2a+2xa^2+a^2x+a^3 = x^3+3x^2a+3xa^2+a^3$$

Portanto,

$$(x+a)^3 = x^3+3x^2a+3xa^2+a^3.$$

Às vezes esse resultado é ensinado apenas dizendo:

O cubo da soma é o cubo do primeiro termo, mais três vezes o primeiro termo elevado ao quadrado vezes o segundo termo, mais três vezes o primeiro termo vezes o segundo termo elevado ao quadrado, mais o segundo termo elevado ao cubo.

- **Cubo da diferença:**

$$(x-a)^3 = (x-a)(x-a)(x-a) = (x^2-2xa+a^2)(x-a)$$

$$= x^3-x^2a-2x^2a+2xa^2+a^2x-a^3 = x^3-3x^2a+3xa^2-a^3$$

Portanto,

$$(x-a)^3 = x^3-3x^2a+3xa^2-a^3.$$

Às vezes esse resultado é ensinado apenas dizendo:

O cubo da diferença é o cubo do primeiro termo, menos três vezes o primeiro termo elevado ao quadrado vezes o segundo termo, mais três vezes o primeiro termo vezes o segundo termo elevado ao quadrado, menos o segundo termo elevado ao cubo.

- **Produto de Stevin ou soma e produto**

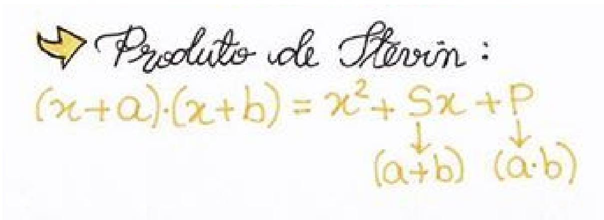

Figura 2.9: Produto de Stevin

https://images.app.goo.gl/MBS5ageGYscFzpeWA. Acesso em 22 de março de 2020.

O produto de Stevin é o produto um pouco mais geral, $(x+a).(x+b)$, onde aplicando a propriedade distributiva, temos:

$$(x+a).(x+b) = x^2 + ax + bx + ab$$

Como $ax + bx = (a+b)x$, podemos verificar algebricamente que:

$$(x+a).(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab,$$

sendo $(a+b)$ uma soma e ab um produto.

Podemos notar que o coeficiente de x é igual a soma $a+b$ e que o termo independente é igual ao produto ab. Por esse motivo, o produto de Stevin é muito mais conhecido como "soma e produto".

A resposta obtida, $x^2 + (a+b)x + ab$, é chamada trinômio do 2º grau.

Podemos trabalhar produtos notáveis apenas algebricamente com nossos alunos, como acabamos de fazer acima. Porém, trabalhar este conteúdo algébrico de forma **intradisciplinar** com a geometria, o torna muito mais interessante e rico. A geometria tem o poder de despertar o interesse dos alunos por conteúdos algébricos.

Podemos utilizar, em nossas aulas de matemática, "quebra cabeças matemáticos" de quadrados e retângulos e/ou cubos e paralelepípedos para verificar que as relações de produtos notáveis são verdadeiras.

• **Quadrado da soma de dois termos:** $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Admitindo que *"a"* e *"b"* são positivos e observando a sequência das figuras abaixo, podemos representar geometricamente esse produto notável:

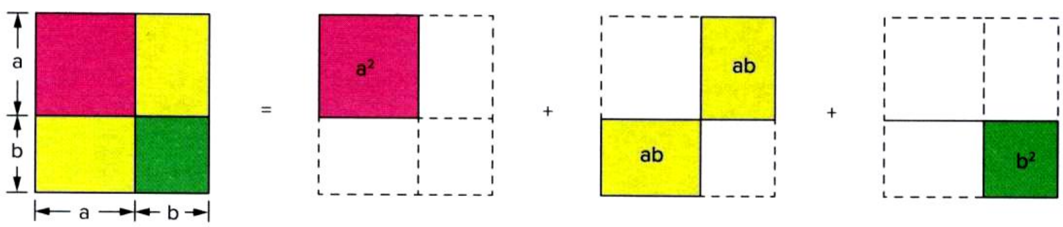

Figura 2.10: Desenvolvimento do Quadrado da soma de dois termos

Fonte: MARQUES et al., 2019c, p.114.

O lado do quadrado maior é a soma $(a+b)$ e sua área é dada por $(a+b)^2$. A área do quadrado rosa é a^2; a área de cada retângulo amarelo é ab; e a área do quadrado verde é b^2. Com isso, podemos representar a soma $(a+b)^2$ (área do quadrado maior) por somas (de áreas) da seguinte forma:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

• **Quadrado da diferença de dois termos:** $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Se $a > b > 0$, podemos representar geometricamente o quadrado da diferença de dois termos como se segue:

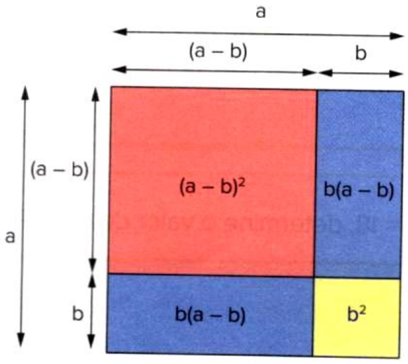

Figura 2.11: Desenvolvimento do Quadrado da diferença de dois termos

Fonte: MARQUES et al., 2019c, p.118.

Como podemos determinar a área do quadrado vermelho?

Podemos observar que o quadrado vermelho tem lado de medida $(a-b)$, e sua área pode ser representada por $(a-b)^2$. Para obter sua área temos que subtrair da área do quadrado total a^2 as áreas dos retângulos azuis $b(a-b)$ e a do quadrado amarelo b^2.

Então, a área do retângulo vermelho é:

$$(a-b)^2 = a^2 - b(a-b) - b(a-b) - b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - ab + b^2 - ab + b^2 - b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

• **Produto da soma pela diferença:** $(a+b).(a-b) = a^2 - b^2$

Considerando inicialmente um quadrado de lado a, temos que sua área é dada por a^2.

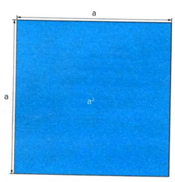

Figura 2.12: Quadrado de lado a

Fonte: MARQUES et al., 2019c, p.130.

Aumentando seu comprimento em b e diminuindo sua altura em b, temos:

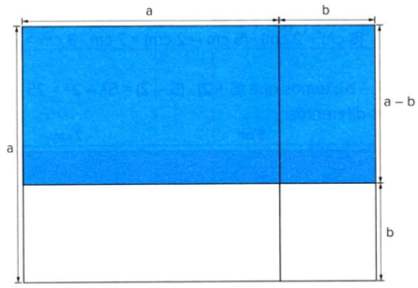

Figura 2.13: Retângulo de lado $a + b$

Fonte: MARQUES et al., 2019c, p.131

Note que a área em destaque azul representa geometricamente o produto $(a+b).(a-b)$.

Vamos verificar que ela é equivalente à área representada pela diferença entre os quadrados a^2 e b^2, pois, algebricamente, verificamos que $(a + b).(a - b) = a^2 - b^2$.

Primeiro, devemos notar que as figuras a seguir possuem áreas em destaque azul de mesma medida, ou seja, ambas possuem área a^2.

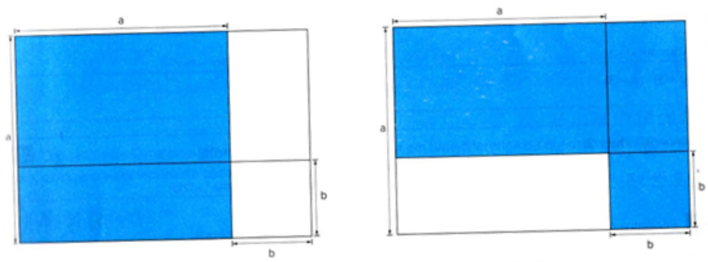

Figura 2.14: Retângulos de mesma área

Fonte: MARQUES et al., 2019c, p.131.

Assim, podemos perceber que a região azul a seguir possui área $a^2 - b^2$.

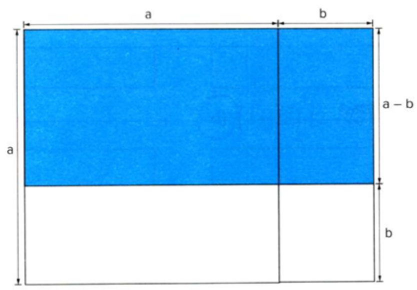

Figura 2.15: Retângulo de área $(a + b)(a - b)$

Fonte: MARQUES et al., 2019c, p.131.

Portanto,

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

.

• **Cubo da soma de dois termos:** $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

O cubo da soma de dois termos é um produto notável um pouco mais complexo. Nesse tópico principalmente, a ligação entre álgebra e geometria (no espaço) faz com que os alunos consigam visualizar melhor esse produto notável. Veja a figura abaixo:

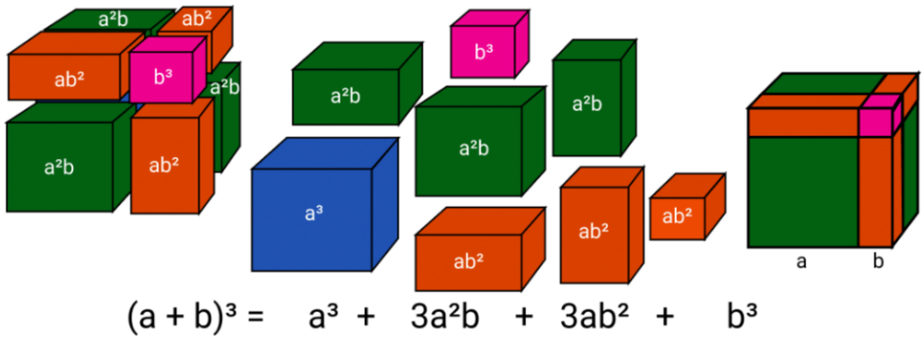

Figura 2.16: Cubo da soma de dois termos

Fonte: NOVAES, 2021.

Podemos explorar este quebra cabeça no espaço com nossos alunos para essa visualização. A figura já diz como esse produto notável é verificado.

• **Cubo da diferença de dois termos:** $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Para o cubo da diferença de dois termos, procedemos de forma semelhante ao cubo da soma de dois termos. Observe a representação geométrica:

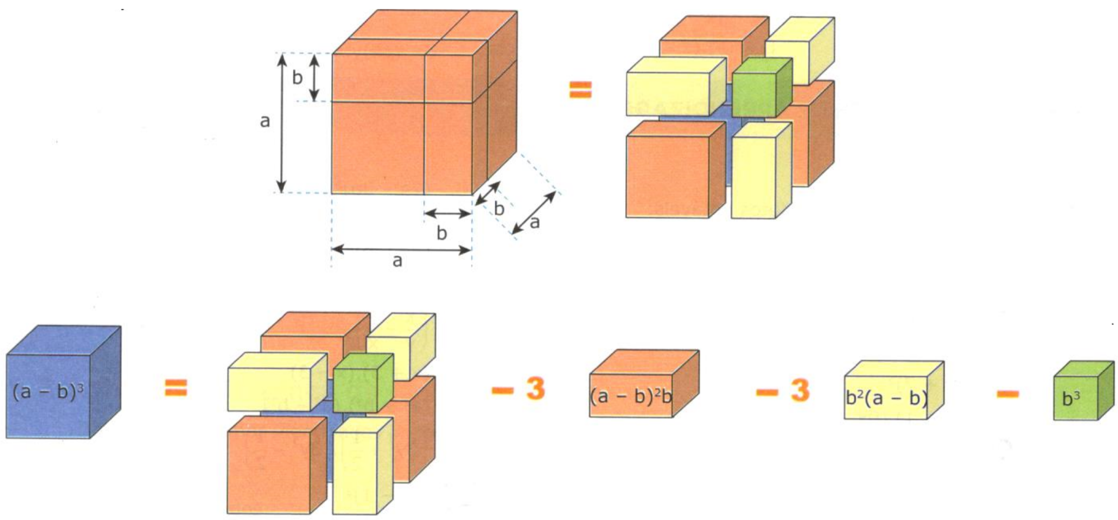

Figura 2.17: Cubo da diferença de dois termos

Fonte: https://slideplayer.com.br/slide/13375002/. Acesso em: 02 de junho do 2021.

Calculando os volumes, temos:

$$(a-b)^3 = a^3 - 3.[(a-b)^2 b] - 3.[b^2(a-b)] - b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3b(a^2 - 2ab + b^2) - 3b^2(a-b) - b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 6ab^2 - 3b^3 - 3ab^2 + 3b^3 - b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

• **Produto de Stevin ou soma e produto:** $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$

Também podemos representar o resultado do produto de Stevin de maneira geométrica, semelhante com o que fizemos na seção anterior. Para isso, utilizamos um retângulo de lados $x+a$ e $x+b$.

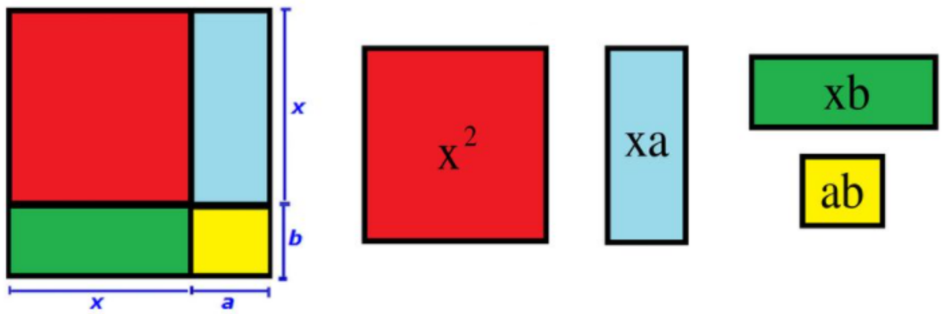

Figura 2.18: Produto de Stevin

Fonte: https://slideplayer.com.br/slide/13375002/. Acesso em: 02 de junho de 2021.

Observando a figura, podemos notar um quadrado de área x^2 e três retângulos com áreas ax, bx e ab, cada um. Então a área do retângulo é:

$$(x+a)(x+b) = x^2 + xa + xb + ab = x^2 + (a+b)x + ab$$

Observamos novamente que o coeficiente de x é igual a soma $a+b$ e que o termo independente é igual ao produto ab.

2.2.2 Aplicando o conhecimento

Problema: (MARQUES et al.,2019c, p.125) Débora precisa mandar trocar os azulejos de sua casa. Considerando as medidas da planta de sua casa, na figura a seguir, e desconsiderando o tamanho dos azulejos, encontre a expressão que representa a área total de azulejos necessários.

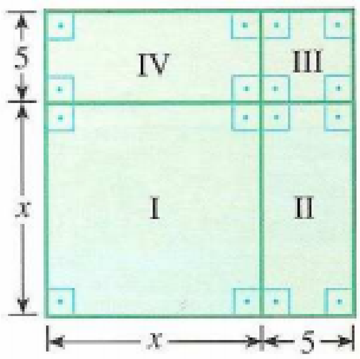

Figura 2.19: Planta da casa de Débora

Fonte: MARQUES et al., 2019c, p.125.

Primeira resolução possível:

Nesta resolução, os alunos aplicam diretamente o produto notável: quadrado da soma de dois termos, ou seja, usando a forma prática, resolvendo apenas algebricamente o exercício.

$$(x+5)^2 = x^2 + 2.x.5 + 5^2 = x^2 + 10x + 25$$

Segunda resolução possível:

Nesta resolução, aparece a decomposição do quadrado da soma de dois termos, ou seja, calculando a área de cada figura separadamente e, logo após, uma adição algébrica. Desse modo a questão está sendo resolvida **intradisciplinarmente.**

$$FiguraI : x.x = x^2$$

$$FiguraII : 5.x = 5x$$

$$FiguraIII : 5.5 = 25$$

$$FiguraIV : x.5 = 5x$$

Portanto, a área de azulejos necessários será dada por $x^2 + 10x + 25$.

A seguir, apresentamos dois mapas conceituais sobre produtos notáveis.

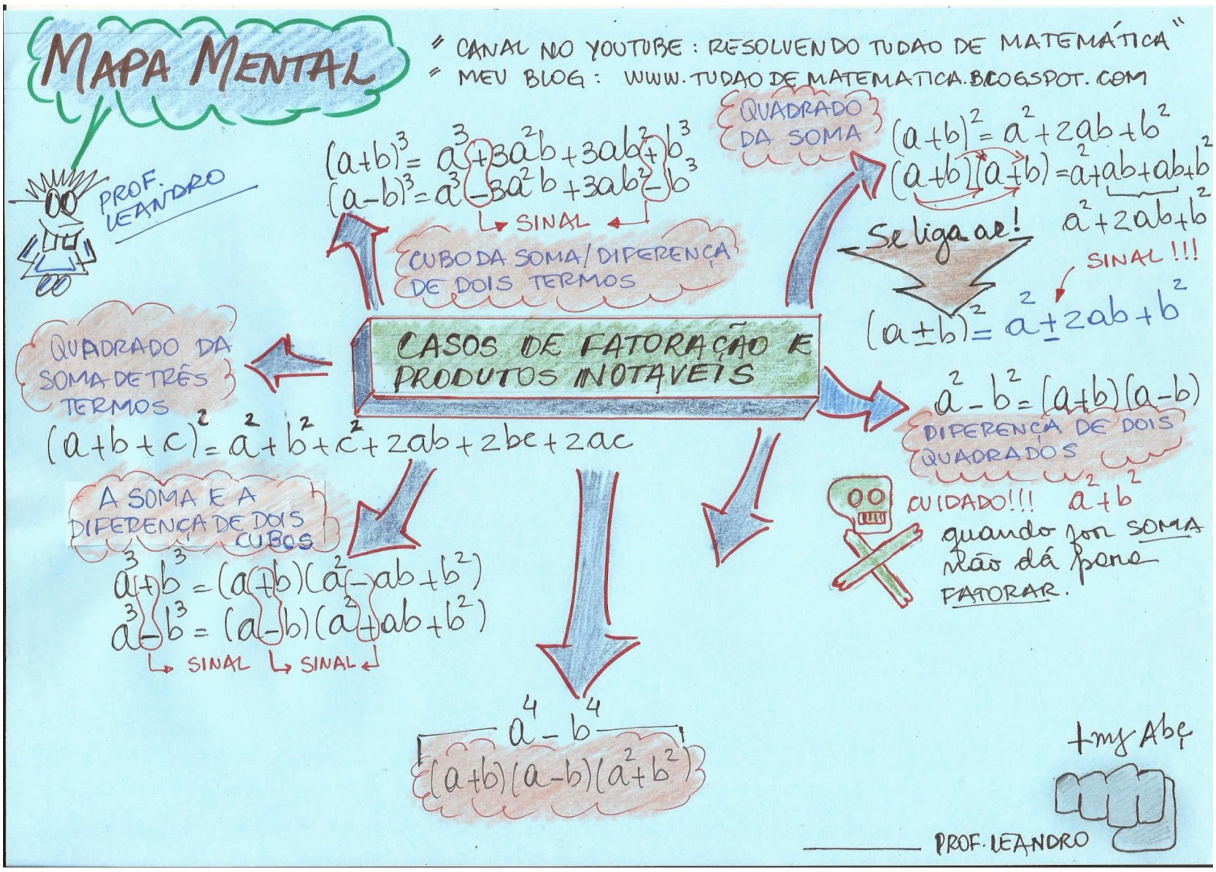

Figura 2.20: Mapa conceitual: produtos notáveis

Fonte: CABRITA, 2020.

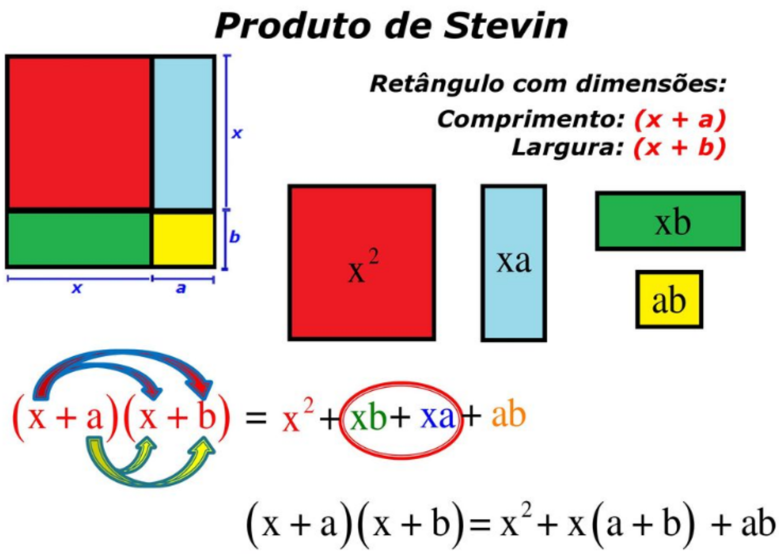

Figura 2.21: Mapa conceitual: produto de Stevin

Fonte: https://slideplayer.com.br/slide/13375002/. Acesso em 10 de setembro de 2020.

2.3 Número de diagonais de um polígono

2.3.1 Por dentro do assunto

Determinamos o **número de diagonais de um polígono** através de uma propriedade dada por uma equação, logo pensamos em álgebra. Essa propriedade pode ser demonstrada por argumentos bem algébricos. Desta forma, podemos verificar uma **intradisciplinaridade** natural entre álgebra e geometria nesse conteúdo.

A fórmula (equação) matemática que determina o número (a quantidade) de diagonais de um determinado polígono, geralmente, é apresentada aos alunos do sétimo ano logo após a definição de polígono.

De acordo com a BNCC (BRASIL, 2017, p.309), no **sétimo ano do ensino fundamental**, na **unidade temática geometria**, é apresentado aos alunos o objeto de conhecimento "polígonos regulares: quadrado e triângulo equilátero". O objetivo da abordagem desse conteúdo é desenvolver as seguintes habilidades:

(EF07MA27) Calcular medidas de ângulos internos de polígonos regulares, sem o uso de fórmulas, e estabelecer relações entre ângulos internos e externos de polígonos, preferencialmente vinculadas à construção de mosaicos e de ladrilhamentos.

(EF07MA28) Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um polígono regular (como quadrado e triângulo equilátero), conhecida a medida de seu lado.

Alguns livros de matemática do sétimo ano não trazem apenas polígonos regulares (quadrado e triângulo equilátero), eles já abordam o conteúdo polígono e apresentam a fórmula do número de diagonais de um polígono. Podemos citar duas coleções que seguem esse modelo:
- Matemática Bianchini - Edwaldo BIANCHINI (2018) - Editora Moderna.
- Matemática Essencial - Patrícia PATARO e Rodrigo D. BALESTRI (2018) - Editora Scipione.

Encontramos em Dolce et al. (1993, p.132) a seguinte definição para **polígonos**:

Dada uma sequência de pontos de um plano $(A_1, A_2, ..., A_n)$ com $n \geq 3$, todos distintos, onde três pontos consecutivos não são colineares, considerando-se A_{n-1}, A_n e A_1, assim como A_n, A_1 e A_2, chama-se polígono à reunião dos segmentos: $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2, A_3}$, ..., $\overline{A_{n-1}A_n}$, $\overline{A_nA_1}$.

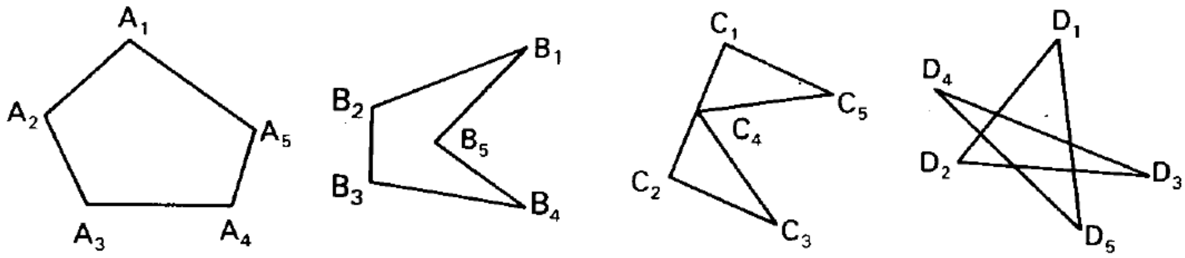

Figura 2.22: Exemplos de polígonos

Fonte: DOLCE et al., 1993, p.132.

De acordo com o número n de lados, os polígonos recebem nomes especiais. Observe a tabela:

Tabela 2.1: Nomenclatura dos polígonos

Número de lados	Nome do polígono
3	triângulo
4	quadrilátero
5	pentágono
6	hexágono
7	heptágono
8	octógono
9	eneágono
10	decágono
11	undecágono
12	dodecágono
13	tridecágono
14	tetradecágono
15	pentadecágono
20	icoságono

As **diagonais** de um polígono são segmentos de reta que ligam dois de seus vértices não consecutivos.

Figura 2.23: Diagonais de alguns polígonos regulares

Fonte: VILLACA, 2020.

Proposição: O número de diagonais d de um polígono de n lados ($n \geq 3$) pode ser calculado por:

$$d = \frac{n(n-3)}{2}.$$

Demonstração:

Seja $(A_1, A_2, ..., A_n)$ um polígono de n lados.

Fixe um dos vértices do polígono (vértice A_1, por exemplo), temos $(n-3)$ diagonais passando por A_1.

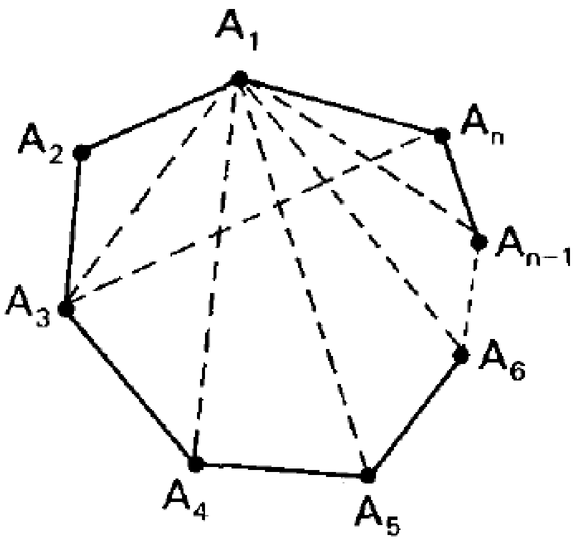

Figura 2.24: Polígono de n lados

Fonte: DOLCE et al., 1993, p. 137.

Se para cada vértice temos $(n-3)$ diagonais, contamos $n(n-3)$ diagonais para um polígono de n lados.

Porém, nesta conta cada diagonal é contada duas vezes, pois tem extremidade em dois vértices.

Por exemplo, na figura acima, A_1A_3 e A_3A_1 são contadas como duas diagonais, quando na realidade é uma só $A_1A_3 = A_3A_1$

Logo o número de diagonais d é $d = \frac{n(n-3)}{2}$.

Com essa fórmula em mãos, podemos encontrar as diagonais de qualquer polígono solicitado, ou ainda, sabendo o número de diagonais de certo polígono, podemos então descobrir o seu número de lados e consequentemente indicar qual é esse polígono.

Hoje a concepção de geometria esta muito ligada à álgebra, diferentemente da concepção antiga de geometria. A álgebra é ferramenta natural para verificação de propriedades geométricas. E essa demonstração apresentada aqui é considerada bem algébrica.

2.3.2 Aplicando o conhecimento

Problema 1: (ESA) O total de diagonais de um eneágono convexo é:
(A) 44 (B) 27 (C) 14 (D) 35 (E) 39

Resolução: Como visto, para calcular as diagonais do eneágono ($n = 9$), podemos usar a equação:

$$d = \frac{n(n-3)}{2}$$
$$d = \frac{9(9-3)}{2}$$
$$d = \frac{9.6}{2}$$
$$d = \frac{54}{2}$$
$$d = 27$$

Então, o eneágono possui 27 diagonais.

Abaixo, podemos verificar geometricamente todas essas 27 diagonais de um eneágono feitas no *GeoGebra*.

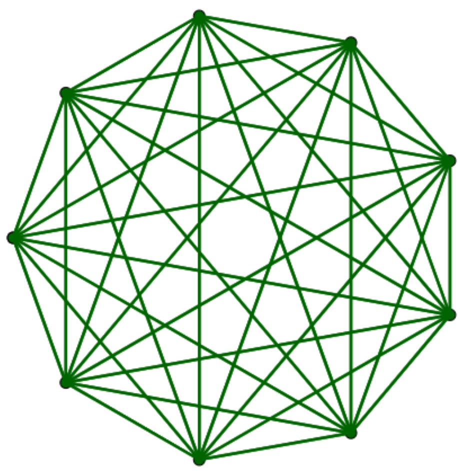

Figura 2.25: Diagonais de um eneágono.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Problema 2: Qual é o polígono cujo número de diagonais é o quíntuplo do número de lados?

Resolução: Temos que $d = 5n$. Então, fazendo a substituição na fórmula, teremos:

$$d = \frac{n(n-3)}{2}$$

$$5n = \frac{n(n-3)}{2}$$

$$n^2 - 3n = 10n$$

$$n^2 - 3n - 10n = 0$$

$$n^2 - 13n = 0$$

$$n(n-13) = 0$$

Daqui, concluímos que $n = 0$ ou $n = 13$. Mas, não faz sentido um polígono de 0 lados, logo tomamos $n = 13$ como solução. Assim, o polígono procurado é um tridecágono.

A seguir, apresentamos um mapa conceitual sobre o número de diagonais de um polígono.

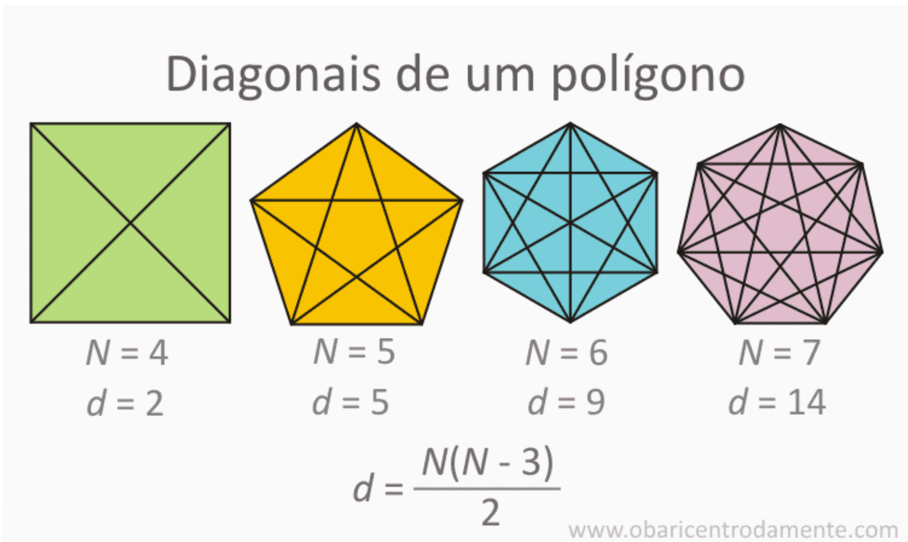

Figura 2.26: Mapa conceitual: diagonais de um polígono

Fonte: KILHIAN, 2014

2.4 Desigualdade triangular

2.4.1 Por dentro do assunto

Pergunta: É sempre possível construir um triângulo dados os comprimentos dos três lados?

Observe a figura a seguir:

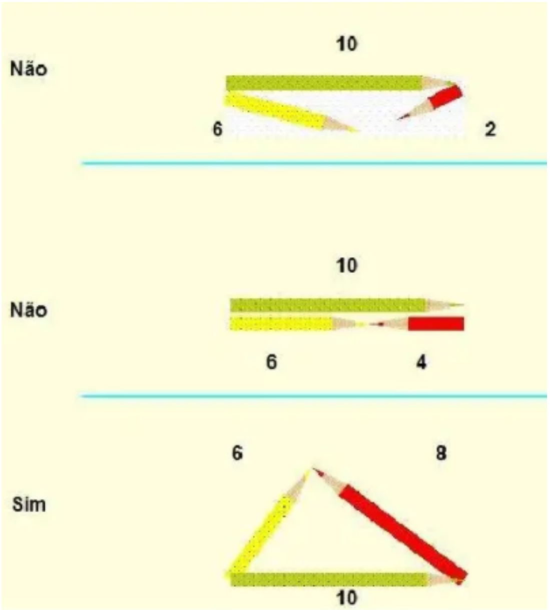

Figura 2.27: Desigualdade triangular

Fonte: https://pt.scribd.com/document/134560386/Desigualdade-Triangular. (Acesso em: 11 de junho de 2021.)

Conjectura: Em qualquer triângulo, nenhum lado pode ser maior que a soma das medidas dos outros dois lados.

De acordo com a BNCC (BRASIL, 2017, p.309), no **sétimo ano do ensino fundamental**, na **unidade temática geometria**, é apresentado aos alunos o objeto de conhecimento "triângulos: construção, condição de existência e soma das medidas dos ângulos internos". O objetivo da abordagem desse conteúdo é desenvolver as seguintes habilidades:

(EF07MA24) Construir triângulos, usando régua e compasso, reconhecer a condição de existência do triângulo quanto à medida dos lados e verificar que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180º.

(EF07MA25) Reconhecer a rigidez geométrica dos triângulos e suas aplicações, como na construção de estruturas arquitetônicas (telhados, estruturas metálicas e outras) ou nas artes plásticas.

(EF07MA26) Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um triângulo qualquer, conhecidas as medidas dos três lados.

A condição de existência de um triângulo é um conjunto de relações entre as medidas de seus lados que possibilitam decidir se, com as medidas propostas, é possível construir um triângulo. Essa condição pode ser vista como uma propriedade que é conhecida como **desigualdade triangular**.

Teorema: A soma dos comprimentos de dois lados quaisquer de um triângulo é maior que o comprimento do terceiro lado.

Demonstração:

Consideremos ABC um triângulo qualquer de lados com medidas a, b e c. Vamos mostrar que $a < b + c$.

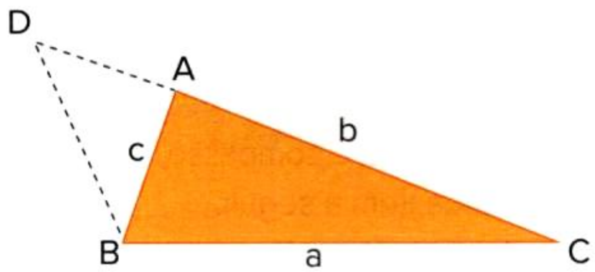

Figura 2.28: Triângulo ABC e D um prolongamento do segmento AC

Fonte: MARQUES et al., 2019a, p.108.

Seja D um ponto do prolongamento de AC tal que $|AD| = c$.

O triângulo ADB é isósceles, com base BD.

Como A está entre C e D, podemos concluir que: $|DC| = |DA| + |AC| = c + b$

Além disso, temos que $\angle(BDA) = \angle(DBA) < \angle(DBC)$.

Como o maior ângulo de um triângulo é oposto ao maior lado, temos $|BC| < |DC|$.

Portanto, $a < c + b$.

De maneira análoga, a afirmação também se verifica para $b < a + c$ e $c < a + b$.

Notemos que essa demonstração traz **intradisciplinaridade** entre álgebra e geometria. Como já foi mencionado anteriormente, nos dias de hoje é impossível enxergar geometria sem o auxilio da álgebra. Para a demonstração desse teorema, primeiramente trabalhamos geometricamente através da construção descrita e, posteriormente, trabalharmos algebricamente finalizando a prova.

2.4.2 Aplicando o conhecimento

Uma sugestão de como trabalhar esse conteúdo em sala de aula seria usando régua graduada e compasso, a partir das medidas de seus lados. Vejamos um exemplo:

Observe os passos a seguir para construir um triângulo ABC, com os lados medindo 8 cm, 5 cm e 4 cm.

(A) Traçamos três segmentos de medidas $|BC| = 4$ cm, $|AC| = 5$ cm e $|AB| = 8$ cm

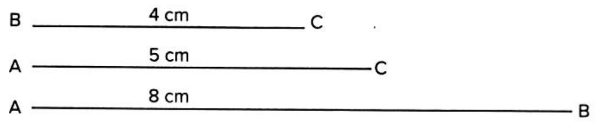

Figura 2.29: Segmentos: BC, AC e AB

Fonte: MARQUES et al., 2019a, p.106.

(B) Com uma régua, desenhamos uma reta suporte e transferimos a ela um dos segmentos desenhados, por exemplo, AB.

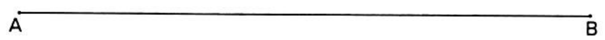

Figura 2.30: Segmento AB

Fonte: MARQUES et al., 2019a, p.106.

(C) Utilizando o compasso com uma abertura de medida igual a AC, colocamos a ponta-seca em A e traçamos um arco.

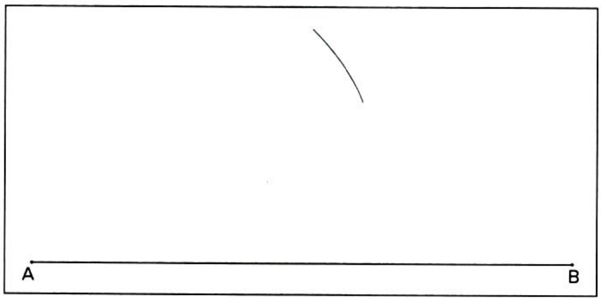

Figura 2.31: Traçando o arco: passo 1

Fonte: MARQUES et al., 2019a, p.106.

(D) Com uma abertura de medida igual a BC e a ponta-seca em B, traçamos outro arco, intersectando o arco feito anteriormente.

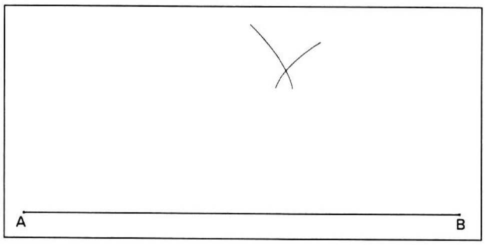

Figura 2.32: Traçando o arco: passo 2

Fonte: MARQUES et al., 2019a, p.106.

(E) O ponto em que os dois arcos se intersectam corresponde ao vértice C do triângulo. Agora, basta traçar os segmentos AC E BC.

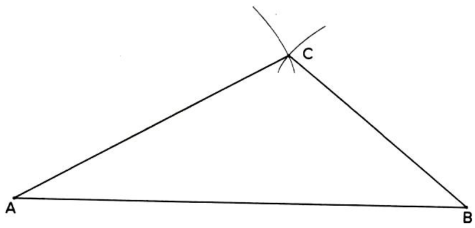

Figura 2.33: Construção do triângulo ABC

Fonte: MARQUES et al., 2019a, p.107.

Caso não tivéssemos conseguido marcar essa interseção, o ponto C, para "fechar" o triângulo, significaria que os três lados propostos não determinariam um triângulo.

Problema 1: Verifique em quais dos itens a seguir há medidas que podem corresponder aos lados de um triângulo.
(A) 7 cm, 5 cm e 4 cm
(B) 8 cm, 4 cm e 3 cm

Resolução:
(A) É possível construir um triângulo com essas medidas, pois:

$$\begin{cases} 7 < 5 + 4 = 9 \\ 5 < 4 + 7 = 11 \\ 4 < 7 + 5 = 12 \end{cases}$$

(B) Não é possível construir um triângulo com essas medidas, pois:

$$8 > 3 + 4 \Rightarrow 8 > 7$$

Problema 2: (MARQUES et al., 2019a) Gabriel precisa cercar seu terreno triangular. Ele sabe apenas que as duas menores dimensões do terreno são 25 m e 35 m e que o maior lado é um número inteiro que ultrapassa o dobro da medida do menor lado. Qual o menor comprimento (em número inteiro) possível da cerca para contornar todo o terreno?

Resolução: Seja x o maior lado do triângulo. Pela desigualdade triangular:

$$\begin{cases} x < 25 + 35 \Rightarrow x < 60 \\ 25 < 35 + x \Rightarrow x > -10 \\ 35 < x + 25 \Rightarrow x > 10 \end{cases}$$

Como Gabriel também sabe que o maior lado ultrapassa o dobro da medida do menor lado:

$$x > 2 \cdot 25$$

$$x > 50$$

Para satisfazer às condições do enunciado, o valor deve pertencer à interseção dos intervalos:

$$50 < x < 60$$

Logo, o menor valor inteiro para x é 51. Assim, o perímetro mínimo do terreno será dado por:

$$51 + 25 + 35 = 111m$$

A seguir, apresentamos um mapa conceitual da desigualdade triangular.

Figura 2.34: Mapa conceitual: desigualdades no triângulo

Fonte: Elaborado pelo autor.

Capítulo 3

GeoGebra - uma divertida combinação entre Geometria e Álgebra

Neste capítulo, iremos trabalhar com o software *GeoGebra* através de dois roteiros de atividades. O GeoGebra é um recurso de ensino que combina GEOmetria e álGEBRA de maneira dinâmica. Ao trazermos esse recurso para as nossas aulas, estaremos trabalhando com **intradisciplinares** em nossas práticas de maneira rica e divertida.

3.1 O software *GeoGebra*

No livro "*Recursos computacionais no ensino de matemática*" (Giraldo et tal, 2012, p. 163), da coleção PROFMAT, encontramos um capítulo intitulado "*Ambiente de Geometria Dinâmica*" que aponta muito bem o que o *GeoGebra* pode nos proporcionar:

> O solftware *GeoGebra* é concebido para integrar recursos geométricos e algébricos em um só ambiente (daí vem o nome). Com isso, podemos facilmente gerar gráficos de funções reais elementares a partir de suas expressões algébricas, [...]. Além disso, é possível introduzir um ou mais parâmetros reais nos gráficos traçados, gerando-se assim família de funções reais, [...]. A variação dinâmica desses parâmetros modifica o gráfico original da função em um movimento contínuo, como em uma dança. Cada parâmetro, quando alterado dinamicamente, conduz o gráfico nesta dança com um passo característico, em um movimento específico. Neste baile das funções elementares, a aprendizagem dos conceitos envolvidos pode se tornar muito mais significativa com o auxílio da geometria dinâmica.

Nessa citação, Giraldo fala sobre a diferença entre o uso do *GeoGebra* e de um papel quadriculado na construção de gráficos. A dinâmica do *GeoGebra* ao traçarmos uma curva não pode ser alcançada no papel. O recurso controle deslizante, por exemplo, altera os coeficientes de uma função de maneira contínua, ocasionado uma dança de gráficos na tela.

Na figura a seguir, apresentamos a tela de trabalho do *GeoGebra*. Nela podemos observar a divisão da área de trabalho em duas partes: à direita temos uma área de trabalho, referente a parte geométrica, e à esquerda, uma janela algébrica. O campo de entrada é utilizado para escrever as coordenadas de pontos a serem representados na tela, equações, comandos e funções.

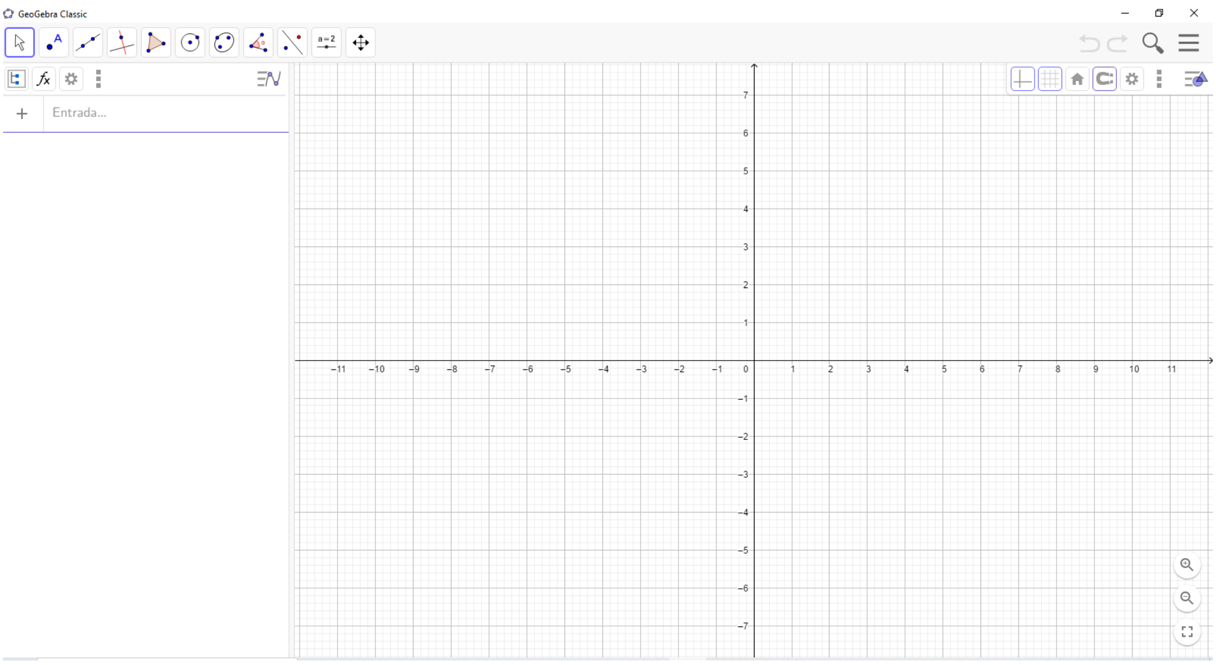

Figura 3.1: Tela principal do *GeoGebra*

Fonte: Elaborado pelo autor.

> O *GeoGebra* é um software matemático livre, criado pelo austríaco Markus Hohenwarter para ser utilizado em auxílio ao entendimento de alguns conteúdos específicos como: geometria, álgebra, cálculo, entre outros. Isso tem a vantagem didática de representar, ao mesmo tempo, as características geométricas e algébricas de um mesmo objeto. O software permite realizar construções tanto com pontos, vetores, segmentos, retas, formas geométricas e seções cônicas como também com funções que podem se modificar posteriormente de forma dinâmica, que se feito desta maneira, potencializa a possibilidade de êxito nas tarefas de aprendizagem matemática (GARCIA et al., 2013, p.2).

Existem diversas maneiras de usar o software *GeoGebra*, em vários dispositivos: no computador de mesa, no notebook, no celular ou em tablet; online ou instalado no dispositivo escolhido. Neste capítulo, usamos a plataforma online *GeoGebra Classic*.

3.2 Roteiros de atividades no *GeoGebra*

Nesta seção, iremos explorar conteúdos do ensino fundamental - anos finais, através de duas atividades. Os conteúdos escolhidos para este capítulo não foram explorados no capítulo anterior.

3.2.1 Atividade 1 - Funções do 1º grau

Na **unidade temática álgebra** do **sétimo ano** temos o objeto do conhecimento "equações polinomiais do 1º grau". Também na **unidade temática álgebra** do **oitavo ano** temos o objeto do conhecimento "associação de uma equação linear de 1º grau a uma reta no plano cartesiano". (BRASIL, 2017, p.307 e 312)

Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se **função afim** (ou **do** 1^o **grau**) quando existem dois números reais a e b tal que $f(x) = ax + b$, para todo $x \in \mathbb{R}$, com $a \neq 0$. O número a chama-se **coeficiente angular** dessa reta em relação ao eixo horizontal Ox. O número b chama-se **valor inicial** da função f ou **coeficiente linear** dessa reta.

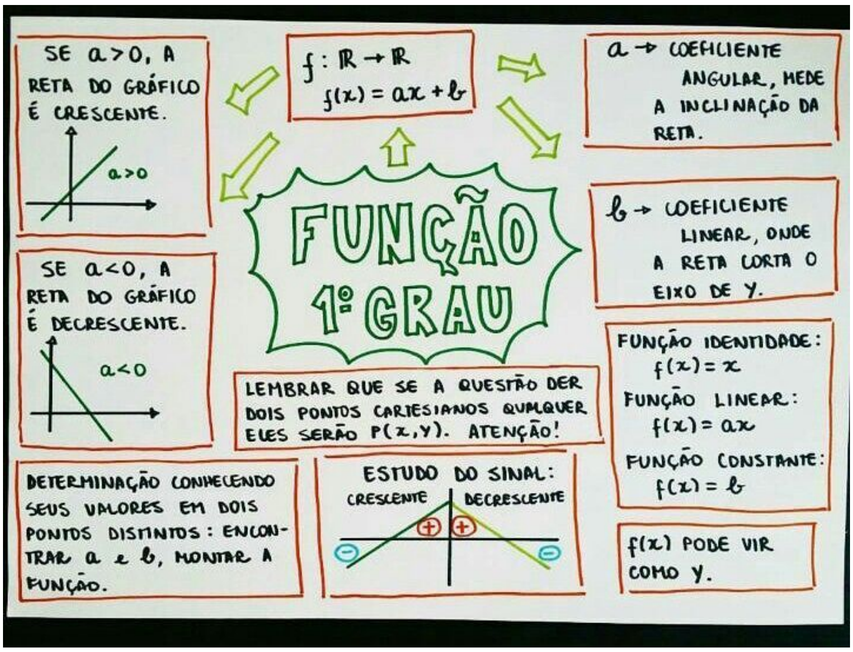

Figura 3.2: Mapa mental: função do primeiro grau

Fonte: https://studymaps.com.br/funcao-do-1-grau/. Acesso em: 26 de junho de 2021.

Atividade 1 - Parte A: *Analisar o comportamento do gráfico da função do 1º grau a partir da variação do coeficiente angular.*

O objetivo dessa atividade é compreender melhor o comportamento de funções do 1º grau (objeto algébrico), observando seus gráficos (objetos geométricos), variando apenas o coeficiente angular.

1º passo: Construa os gráficos das funções do 1º grau abaixo em um mesmo plano no *GeoGebra*.

a) $f(x) = -3x + 1$ b) $g(x) = 2x + 1$ c) $h(x) = 8x + 1$

d) $p(x) = 1$ e) $q(x) = -\dfrac{1}{2}x + 1$

2º passo: Identifique, em cada caso, se o valor de a, coeficiente angular, é positivo ou negativo.

3º passo: Como é o comportamento dos gráficos das funções, de mesmo coeficiente linear, que possuem o valor de a positivo? E a negativo? E a nulo?

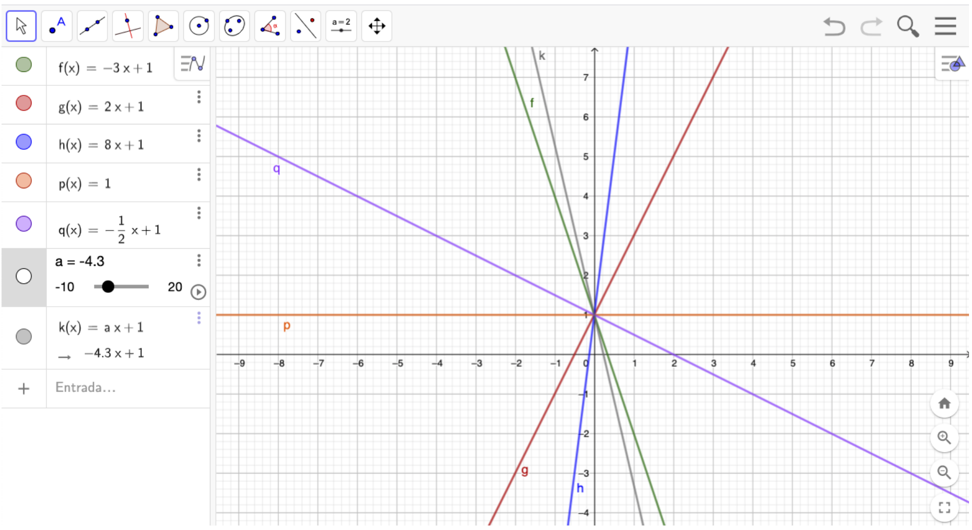

Figura 3.3: Análise do coeficiente a a partir dos gráficos.

Fonte: Elaborado pelo autor.

A partir da observação dos gráficos gerados no *GeoGebra*, esperasse que os alunos observem duas situações: a primeira é que a função do 1º grau sempre será representada através de uma reta no plano cartesiano; a segunda situação a ser observada é que temos as seguintes opções para a inclinação das retas: se a é um número positivo, temos uma reta crescente; se a é um número negativo, temos uma reta decrescente e se a é zero, temos uma reta constante, horizontal.

Atividade 1 - Parte B: *Analisar o comportamento do gráfico da função do 1º grau a partir da variação do coeficiente linear.*

O objetivo dessa atividade é compreender melhor o comportamento de funções do 1º grau (objeto algébrico), observando seus gráficos (objetos geométricos), variando apenas o coeficiente linear.

1º passo: Construa os gráficos das funções do 1º grau abaixo em um mesmo plano no *GeoGebra*.

a) $f(x) = 2x - 3$ b) $g(x) = 2x - 1$ c) $h(x) = 2x + 2$

d) $p(x) = 2x$ e) $q(x) = 2x + 3$

2º passo: Identifique, em cada caso, o valor de b, coeficiente linear.

3º passo: Como é o comportamento dos gráficos das funções que possuem o mesmo coeficiente angular porém valores diferentes para o coeficiente linear?

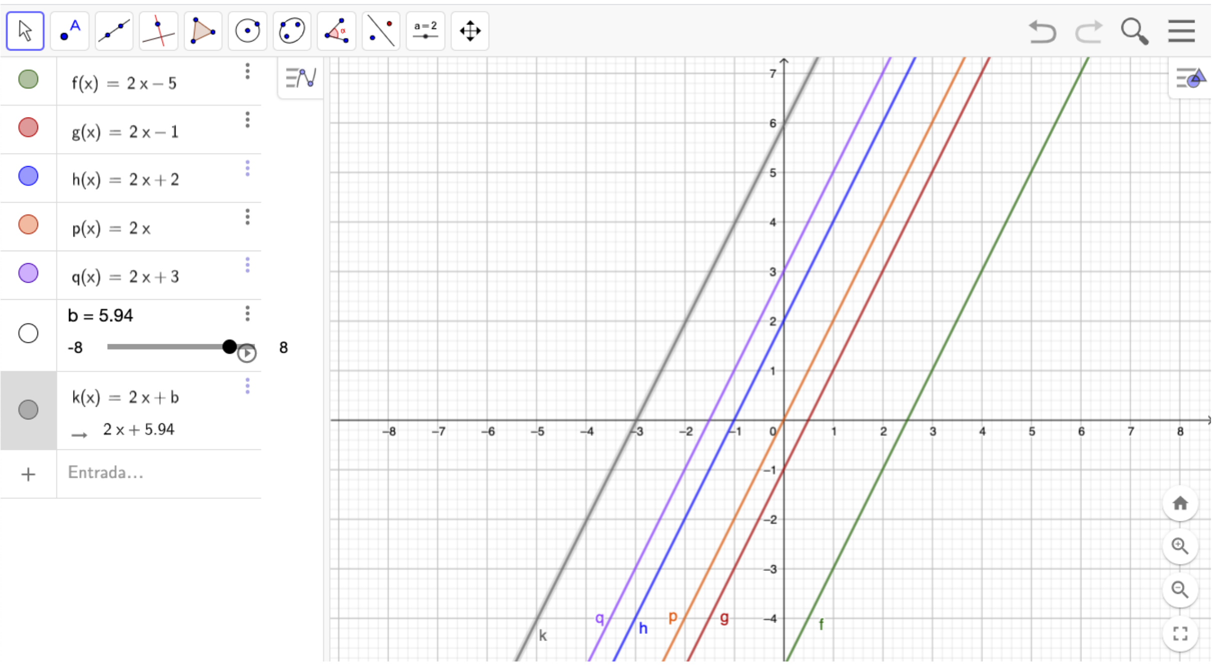

Figura 3.4: Análise do coeficiente linear em funções do 1º grau

Fonte: Elaborado pelo autor.

Nessa atividade, espera-se que os alunos percebam que quando funções do 1º grau possuem o mesmo coeficiente angular, mas diferentes coeficientes lineares, os gráficos serão retas paralelas. Também espera-se que os alunos percebam que o coeficiente linear de uma função é o ponto de intersecção da reta com o eixo Oy.

3.2.2 Atividade 2 - Sistemas de equações do 1^o grau

De acordo com a BNCC (BRASIL, 2017, p.313), na **unidade temática álgebra** do **oitavo ano** temos o objeto do conhecimento "sistema de equações polinomiais de 1º grau: resolução algébrica e representação no plano cartesiano". O objetivo da abordagem desse conteúdo é desenvolver a seguinte habilidade:

(EF08MA08) Resolver e elaborar problemas relacionados ao seu contexto próximo, que possam ser representados por sistemas de equações de 1º grau com duas incógnitas e interpretá-los, utilizando, inclusive, o plano cartesiano como recurso.

Observamos que a BNCC já sugere trabalhar com **intradisciplinaridade** esse objeto do conhecimento, uma vez que devemos trabalhar com o plano cartesiano para representar graficamente as equações de sistemas de 1º grau.

Essa habilidade não fala explicitamente no termo geometria analítica que é abordada oficialmente apenas no ensino médio. Mas, no ensino fundamental, quando se define plano cartesiano, pares ordenados e gráficos de equações, já estamos relacionando entes algébricos e geométricos e assim introduzindo geometria analítica para nossos alunos.

Segundo Delgado et al. (2017, p.56), um dos objetivos da geometria analítica é obter equações associadas a conjuntos de pontos, estabelecer assim uma relação entre a geometria e a álgebra. Essa relação é pouco explorada nos ensinos fundamental e médio, ficando o estudo da geometria analítica limitado a fórmulas e nomenclaturas.

Nesta seção, tendo em vista que sistemas de equações do primeiro grau com duas variáveis podem ser, e muitas vez são, trabalhados apenas algebricamente no ensino fundamental, vamos apresentar uma atividade bem simples abordando resolução algébrica e geométrica de sistemas lineares que pode ser realizada no *GeoGebra*. Primeiramente, faremos um breve resumo sobre esse conteúdo.

Um **sistema linear** é aquele composto por duas ou mais equações lineares, sendo uma equação linear descrita como $a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+...+a_nx_n = k$, sendo a_i e k constantes, tais que a_i são os coeficientes multiplicativos da equação, k é denominado termo independente e x_i são as incógnitas.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n = k_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n = k_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + ... + a_{nn}x_n = k_n \end{cases}$$

Um sistema linear pode ser classificado quanto ao número de soluções dentro do conjunto numérico ao qual o sistema deve ser resolvido. Existem três tipos de sistemas:

- **Sistema possível e determinado (S.P.D.)**: Quando o sistema apresenta uma única solução. No caso de um sistema de duas equações do 1º grau com duas incógnitas, há um único par ordenado como solução.

Exemplo: $\begin{cases} 2x + y = -1 \\ -3x - 2y = 5 \end{cases}$

O conjunto solução deste sistema $\mathbb{S} = \{(3, -7)\}$ é formado por um único par ordenado de $\mathbb{R}$ x $\mathbb{R}$, que é a solução do sistema.

- **Sistema possível e indeterminado (S.P.I.)**: Quando o sistema admite infinitas soluções. No caso de um sistema de duas equações do 1º grau com duas incógnitas, temos infinitos pares ordenados (x, y) que satisfazem as duas equações do sistema simultaneamente.

Exemplo: $\begin{cases} 4x + 3y = 1 \\ 12x + 9y = 3 \end{cases}$

O sistema tem como solução o conjunto solução $\mathbb{S} = \{(1/4 - 3\alpha/4, \alpha) \mid \forall \alpha \in \mathbb{R}\}$.

- **Sistema impossível (S.I.)**: Para esse sistema dizemos que não existem soluções possíveis. No caso de um sistema de duas equações do 1º grau com duas incógnitas, não existe par ordenado que satisfaça as equações do sistema simultaneamente. Na resolução do sistema chegamos a um absurdo.

Exemplo: $\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x - 2y = -4 \end{cases}$

O conjunto solução do sistema é $\mathbb{S} = \emptyset$, conjunto vazio.

Para um sistema com duas equações e duas incógnitas, 2×2, os pares ordenados de números reais que são soluções de uma das equações lineares determinam uma reta no plano cartesiano, o gráfico desta equação. A intersecção das duas retas das equações do sistema determina a solução do sistema, se existir.

No plano, existem apenas três posições relativas entre duas retas. Vejamos a representação gráfica dos três sistemas resolvidos acima:

• Duas **retas concorrentes** indicam que existe um único par ordenado que é solução do sistema possível e determinado, solução única. E esse par ordenado é justamente a solução algébrica do sistema de equações.

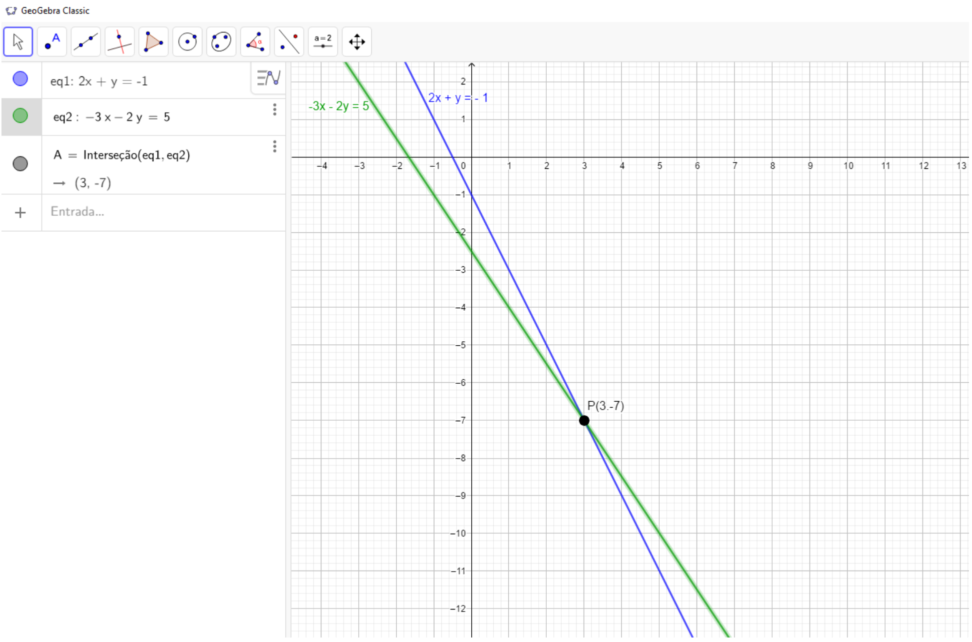

Figura 3.5: Representação geométrica de um sistema possível e determinado

Fonte: Elaborado pelo autor.

• Duas retas **paralelas coincidentes** indicam que existem infinitos pares ordenados que são soluções do sistema possível e indeterminado, infinitas interseções.

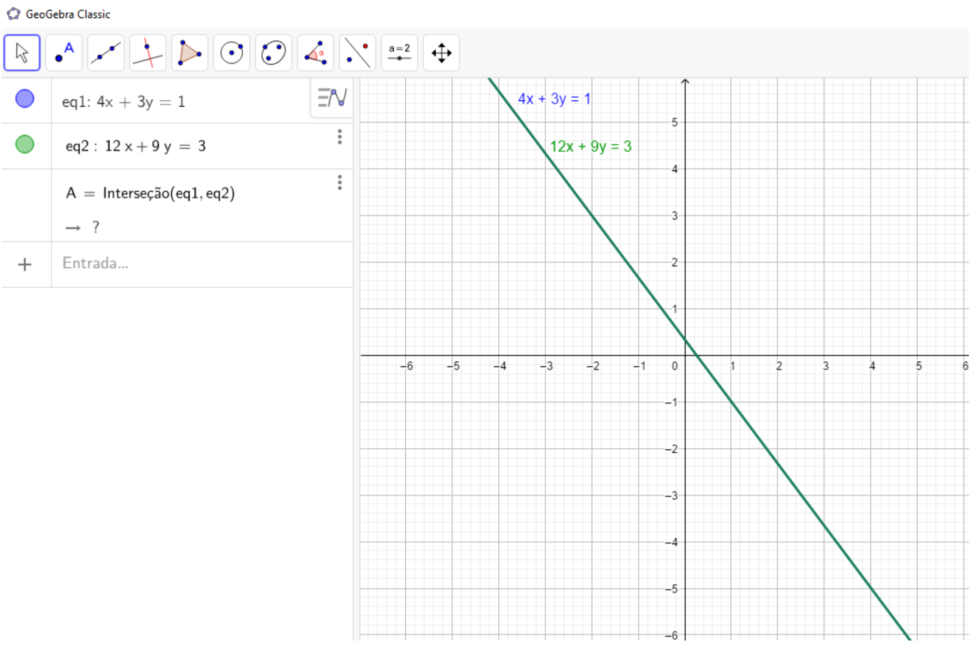

Figura 3.6: Representação geométrica de um sistema possível e indeterminado

Fonte: Elaborado pelo autor.

- Quando as duas retas que representam as equações do sistema são **paralelas distintas**, significa que não existe par ordenado que seja solução do sistema, o sistema é impossível.

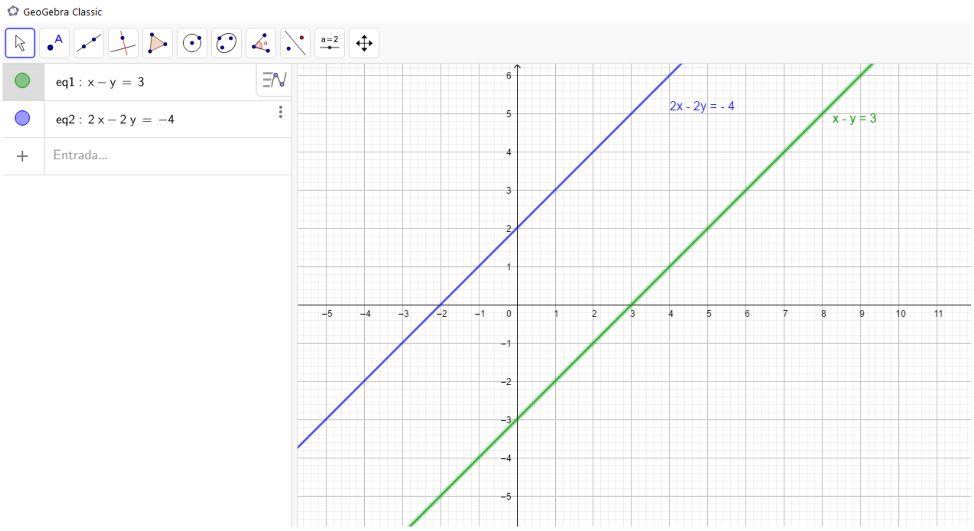

Figura 3.7: Representação geométrica de um sistema impossível

Fonte: Elaborado pelo autor.

De forma geral, podemos classificar um sistema 2 x 2, dado por $\begin{cases} a_1x + b_1y = k_1 \\ a_2x + b_2y = k_2 \end{cases}$ com a_2, b_2 e k_2 não nulos, da seguinte maneira:

- Se $\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$, então o sistema é S.P.D.
- Se $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{k_1}{k_2}$, então o sistema é S.I.
- Se $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{k_1}{k_2}$, então o sistema é S.P.I.

Observamos que esse conteúdo algébrico pode ser trabalhado apenas resolvendo algebricamente sistemas lineares, como na primeira parte do resumo acima. Porém, a visualização geométrica das soluções algébricas deixa as aulas muito mais interessantes e o conteúdo mais significativo para nossos alunos. A **intradisciplinaridade**, nesse conteúdo, está nessa conexão entre a solução algébrica de um sistema e sua representação gráfica no plano cartesiano.

Atividade 2: Classificar sistemas de equações 2 $\times$ 2 em S.P.D., S.P.I. ou S.I.

O objetivo dessa atividade é compreender como se dá a classificação dos sistemas lineares 2 x 2 observando suas representações geométricas (seus gráficos).

<u>1º passo</u>: Resolva, algebricamente, os sistemas de equações lineares a seguir:

a) $\begin{cases} 2x - y = -1 \\ x + y = 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -x + y = 2 \\ 2x - 2y = 4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \dfrac{x}{2} + y = 1 \\ -3x - 6y = -6 \end{cases}$

<u>2º passo</u>: Utilizando o *GeoGebra*, faça a representação gráfica de cada sistema de equações.

<u>3º passo</u>: O que podemos concluir sobre o conjunto solução de cada sistema de equações, observando seus gráficos?

Para o sistema (a), temos o conjunto solução $\mathbb{S} = \{(1,3)\}$, logo é um S.P.D.

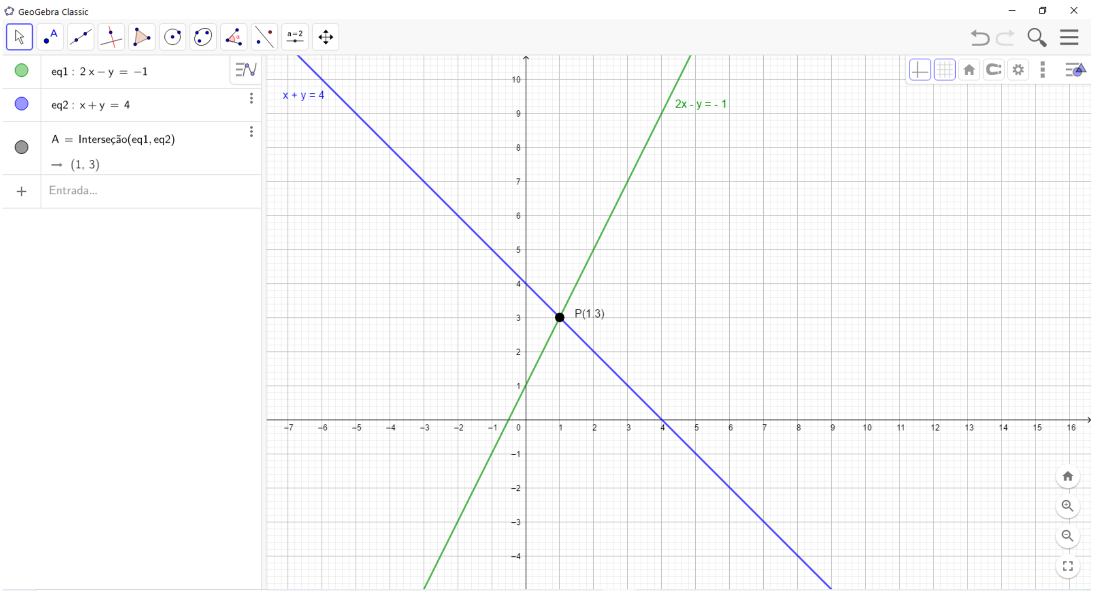

Figura 3.8: Representação geométrica do sistema SPD

Fonte: Elaborado pelo autor.

Espera-se que os alunos notem que na representação geométrica acima, as retas que representam as equações se cruzam no ponto de coordenadas $(1,3)$, ou seja, possuem um único ponto em comum que corresponde à solução do sistema.

Para o sistema (b), na resolução desse sistema, chegamos em um absurdo do tipo $0 = 8$, portanto não existem números reais x e y que satisfazem o sistema. Nesse caso, o sistema não admite solução, portanto é um S.I.

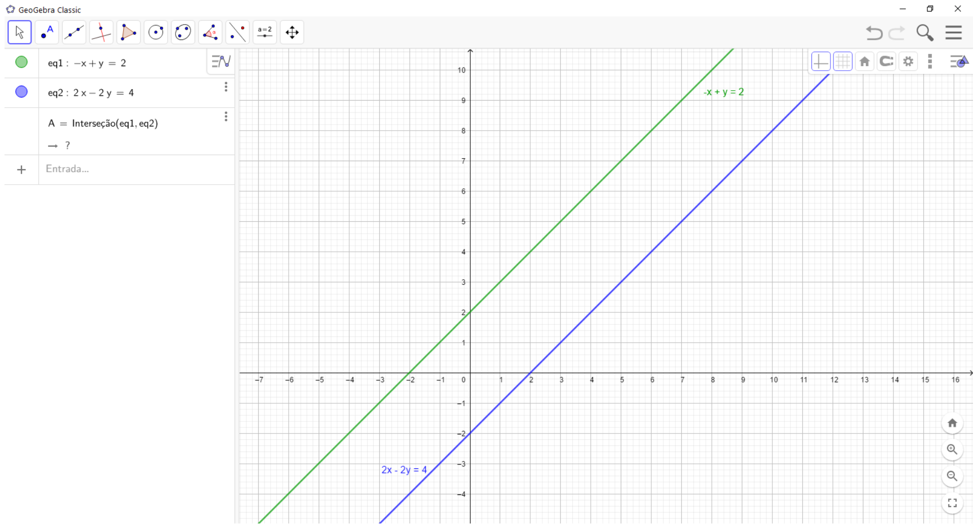

Figura 3.9: Representação geométrica do sistema SI

Fonte: Elaborado pelo autor.

Na representação geométrica desse sistema, as retas que representam as equações são paralelas, ou seja, não possuem pontos em comum.

Para o sistema (c), temos infinitos pares ordenados que satisfazem o sistema. De modo geral, tomando $x = \alpha$, todos os pares da forma $\left(\alpha, -\frac{\alpha}{2} + 1\right)$, com α real, são soluções do sistema.

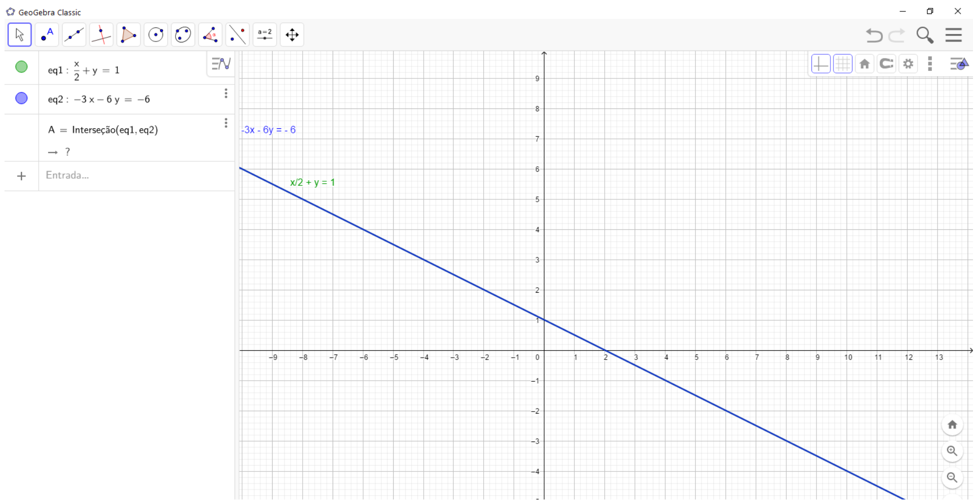

Figura 3.10: Representação geométrica do sistema SPI

Fonte: Elaborado pelo autor.

Na representação geométrica desse sistema, as retas que representam as equações são coincidentes, ou seja, possuem infintos pontos em comum.

Capítulo 4

Relato de vivência

4.1 Aula sobre a soma dos ângulos internos de um triângulo

O ano de 2020, assim como o primeiro semestre de 2021 está sendo, foi um ano atípico para a educação. Devido a pandemia do novo coronavírus e o cenário de distanciamento social por ela imposto, as escolas precisaram adaptar-se, realizando muitas mudanças em um curto período de tempo. Uma dessas mudanças foi a substituição das aulas presencias pelas aulas *online* (remotas) nas escolas.

Apresentaremos aqui um relato de vivência ocorrido numa escola particular que optou por usar a plataforma *ZOOM*, ferramenta que combina videoconferência, reuniões *online*, bate-papo e colaboração móvel.

Relataremos uma aula (duas aulas geminadas) do conteúdo triângulos, realizada no dia 30 de junho de 2020. Mais especificamente, essa aula foi sobre a propriedade geométrica: "a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre 180^o". A referência principal utilizada nessa aula foi o livro do 8º ano da coleção do autor MARQUES et al. (2019b), coleção adotada pela escola.

4.1.1 Plano de aula

1. IDENTIFICAÇÃO
Município: Caxambu - MG
Disciplina: Matemática
Ano: 8º ano - turma com 28 alunos
Nível: Ensino Fundamental
Professor: Diego Moreira Maciel
Tempo estimado: 2 aulas (1 hora 40 minutos)

2. CONTEÚDO: Soma dos ângulos internos de um triângulo

3. HABILIDADE BNCC:

(EF07MA20) Construir triângulos, usando régua e compasso, reconhecer a condição de existência do triângulo quanto à medida dos lados e verificar que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°. (BRASIL, 2017, p.309)

4. OBJETIVOS:

4.1 Identificar e somar os ângulos internos de triângulos.

4.2 Verificar que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer é 180°.

5. CONTEÚDOS ENVOLVIDOS:

5.1 Classificações dos triângulos

5.2 Propriedade: a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre 180°

6. ESTRATÉGIAS:

6.1 Recursos: notebook, livros didáticos, *ZOOM* e *GeoGebra*.

6.2 Técnicas: aula expositiva dialogada, resolução de exercícios.

7. AVALIAÇÃO: A aprendizagem dos alunos será avaliada oralmente durante as discussões e pelas fotos dos exercícios e das atividades realizadas durante a aula, tendo em vista os objetivos propostos para a aula.

8. DESENVOLVIMENTO:

A propriedade "soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º" é um conteúdo geométrico, porém quando analisamos essa propriedade naturalmente fazemos sua tradução matemática para uma equação algébrica como $\alpha+\beta+\gamma = 180^o$, sendo α, β e γ os ângulos internos de um determinado triângulo. Não importa o triângulo que estamos analisando, a soma de seus ângulos internos é 180º. Assim, observamos que o ente algébrico, a equação $\alpha + \beta + \gamma = 180^o$, surge para esse conteúdo geométrico, logo a **intradisciplinaridade** também.

De acordo com a BNCC (BRASIL, 2017, p. 308), no **sétimo ano do ensino fundamental**, na **unidade temática geometria**, é apresentado aos alunos o objeto de conhecimento "triângulos: construção, condição de existência e soma das medidas dos ângulos internos".

A BNCC sugere esse conteúdo para o sétimo ano, porém essa aula relatada aqui ocorreu numa turma do oitavo ano. No ano de 2020, o sistema apostilado adotado pela escola onde ocorreu a aula, estava em transição para se adequar à BNCC. Como o oitavo ano ainda não tinha visto esse conteúdo no sétimo ano, esse conteúdo foi trabalhado utilizando a apostila de transição do sistema apostilado.

Dividimos o desenvolvimento da aula em três momentos:
1º Momento - Revisão sobre triângulos
2º Momento - Experimento com material concreto para verificação da propriedade
3º Momento - Experimento no *GeoGebra* para mais uma verificação da propriedade

4.1.2 Relato da aula

1º Momento - Revisão sobre triângulos

Nesse primeiro momento, procurei fazer um levantamento do que os estudantes já conheciam sobre o tema. O que cada aluno já ouviu falar sobre esse conceito, ou seja, qual o conhecimento prévio que cada aluno trazia sobre o assunto. Essa sondagem possibilita a relação do aluno com o que será ensinado e deve ser aproveitado pelo professor no decorrer da aula.

Iniciei a aula fazendo uma revisão sobre triângulos, para isso, fiz os seguintes questionamentos aos alunos:
(a) O que é um polígono?
(b) O que é um triângulo?
(c) Quais são os elementos de um triângulo?
(d) Como classificamos um triângulo em relação aos seus lados?
(e) Como classificamos um triângulo em relação aos seus ângulos?

As duas primeiras perguntas foram respondidas tranquilamente pelos alunos. Eles também citaram vários exemplos de polígonos.

Para a pergunta (c), percebi que os alunos estavam meio confusos. Para auxiliar a turma, apresentei a seguinte figura:

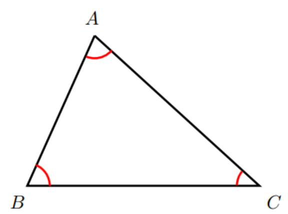

Figura 4.1: Triângulo ABC qualquer

Fonte: PARENTE, 2021, P.2.

Depois de visualizarem a figura, eles conseguiram nomear os pontos A, B e C que são os **vértices**, os segmentos AB, BC e AC que são os **lados** e os ângulos internos $\angle(ABC)$, $\angle(ACB)$ e $\angle(BAC)$.

Para a quarta pergunta, os alunos conseguiram lembrar de todas as três classificações:

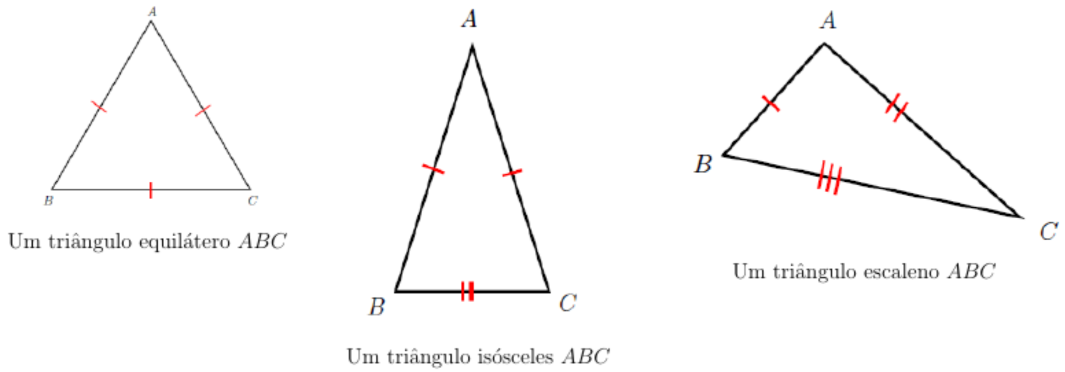

Figura 4.2: Classificação dos triângulos em relação aos lados

Fonte: PARENTE, 2021, p. 3.

Para a última pergunta, os alunos lembraram apenas do triângulo retângulo, pois tínhamos discutido em aulas anteriores o conhecido teorema de Pitágoras.

Então aproveitei para mostrar os outros dois triângulos aos alunos: o triângulo acutângulo e o triângulo obtusângulo.

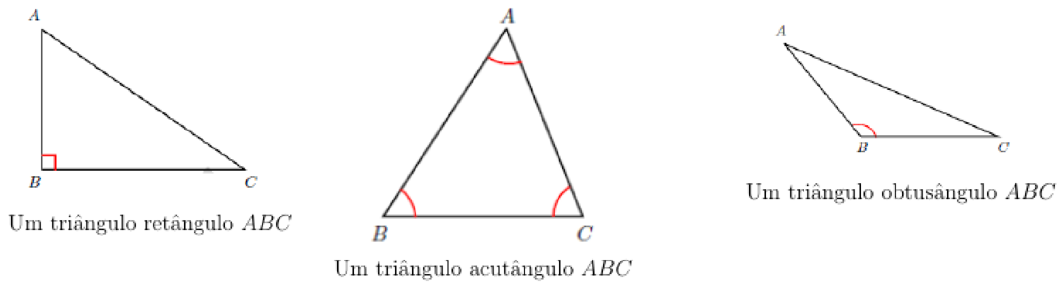

Figura 4.3: Classificação dos triângulos em relação aos ângulos

Fonte: PARENTE, 2021, p.4.

2º Momento - experimento com material concreto para verificação do resultado

Depois da pequena revisão, continuei a aula dizendo para a turma que os triângulos possuem algumas propriedades interessantes, dentre elas a soma das medidas de seus ângulos internos.

Para chegarmos à propriedade sobre a soma dos ângulos internos de um triângulo, pedi aos alunos que:

(a) desenhassem, utilizando régua, um triângulo qualquer em uma folha A4 e, em seguida, destacassem os ângulos internos do triângulo com cores diferentes;

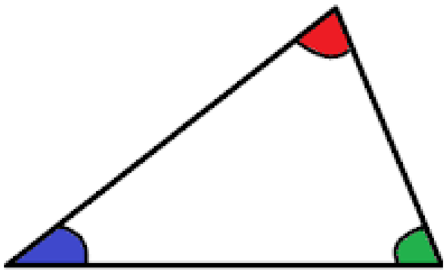

Figura 4.4: Desenhe um triângulo qualquer

Fonte: http://matematicafc.blogspot.com/2012/07/triangulos.html. Acesso em: 09 de junho de 2021.

(b) recortassem o triângulo em três partes, de modo que cada vértice do triângulo estivesse em cada uma delas.

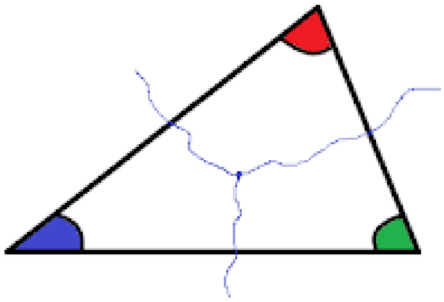

Figura 4.5: Recorte do triângulo

Fonte: http://matematicafc.blogspot.com/2012/07/triangulos.html. Acesso em: 09 de junho de 2021.

c) encaixassem as três partes de modo que os três vértices coincidissem, mostrei a eles como fazer essa construção:

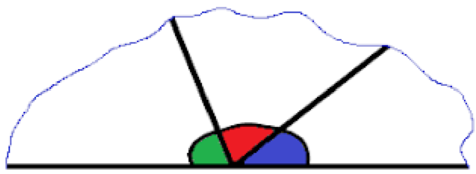

Figura 4.6: Encaixando os vértices de maneira que eles coincidam

Fonte: http://matematicafc.blogspot.com/2012/07/triangulos.html. Acesso em: 09 de junho de 2021.

Todos seguiram os passos acima, então perguntei aos alunos o que eles poderiam observar a respeito da soma das medidas dos ângulo internos do triângulo. A maioria dos alunos perceberam que obtiveram um ângulo raso. Então eles chegaram a conclusão de que, em qualquer triângulo, a soma dos ângulos internos sempre será de 180^o, ou seja, se os ângulos internos de um triângulo qualquer são α, β e γ, em graus, vale a relação algébrica $\alpha + \beta + \gamma = 180^o$.

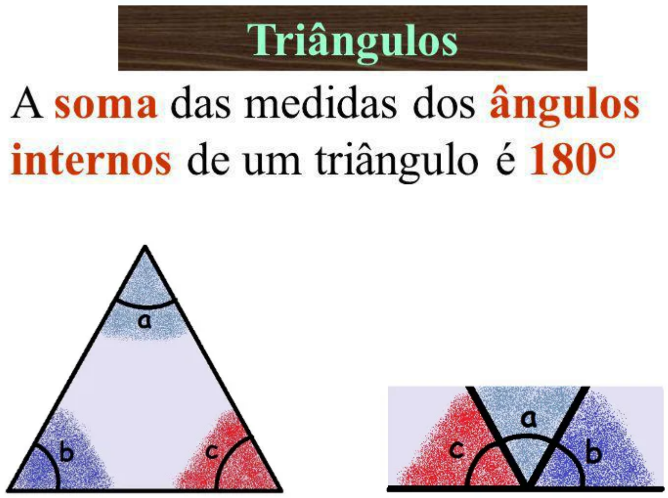

Figura 4.7: Mapa conceitual: Soma dos ângulos internos de um triângulo

Fonte: https://www.preparaenem.com/matematica/soma-dos-angulos-um-triangulo.htm. Acesso em: 09 de junho de 2021.

Para verificar se realmente todos conseguiram compreender o resultado que tínhamos conjecturado, propus aos alunos o problema a seguir:

Problema: Suponha que em um triângulo dois ângulos internos meçam 60º e 70º. Qual é a medida do ângulo desconhecido?

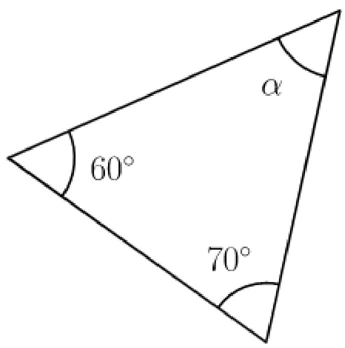

Figura 4.8: Triângulo com seus ângulos internos

Fonte: MARQUES, 2019a, p. 110.

Para esse problema, os alunos apresentaram duas soluções diferentes:

Resolução 1: Alguns alunos, após reconhecerem o triângulo (geometria), usaram a equação (álgebra) $\alpha + \beta + \gamma = 180^o$. Desta forma, apareceu a **intradisciplinaridade** entre álgebra e geometria de forma natural nessa resolução.

$$\alpha + 60^o + 70^o = 180^o \quad \Rightarrow \quad \alpha = 180^o - 60^o - 70^o \quad \Rightarrow \quad \alpha = 50^o$$

Portanto, o ângulo desconhecido mede 50º.

Resolução 2: Outros alunos resolveram o problema usando adição e subtração (aritmética).

$$60^o + 70^o = 130^o \qquad \Rightarrow \qquad 180^o - 130^o = 50^o$$

3º Momento - experimento no *GeoGebra* para mais uma verificação da propriedade

Mas será que essa propriedade é realmente válida para qualquer triângulo? Será que não haveria uma outra forma de verificar essa propriedade de maneira mais dinâmica, mais interessante?

Então enviei aos alunos o *link https : //www.geogebra.org/m/tu5ubksu* (acesso em 28/06/2021) que permitiu a eles utilizarem o *GeoGebra* para mais uma verificação da propriedade estuda. Veja a Figura 4.9, na página seguinte.

Orientei os alunos que clicassem em cima de qualquer um dos vértices e arrastassem para qualquer direção, formando diversos triângulos diferentes. Pedi a todos para que observassem no canto inferior direito as mudanças que estavam ocorrendo nos ângulos.

Depois de alguns minutos, perguntei aos alunos: O que podemos observar novamente em relação a soma dos ângulos internos de um triângulo?

E todos novamente chegaram a mesma conclusão: em qualquer triângulo, a soma dos ângulos internos sempre será de 180º.

Nessa atividade, podemos perceber a dinâmica no *GeoGebra*, pois os alunos podem mudar os pontos de lugar, construir vários triângulos, mudando assim os valores de cada parcela na soma dos ângulos internos. Mas a soma continua sempre sendo 180º.

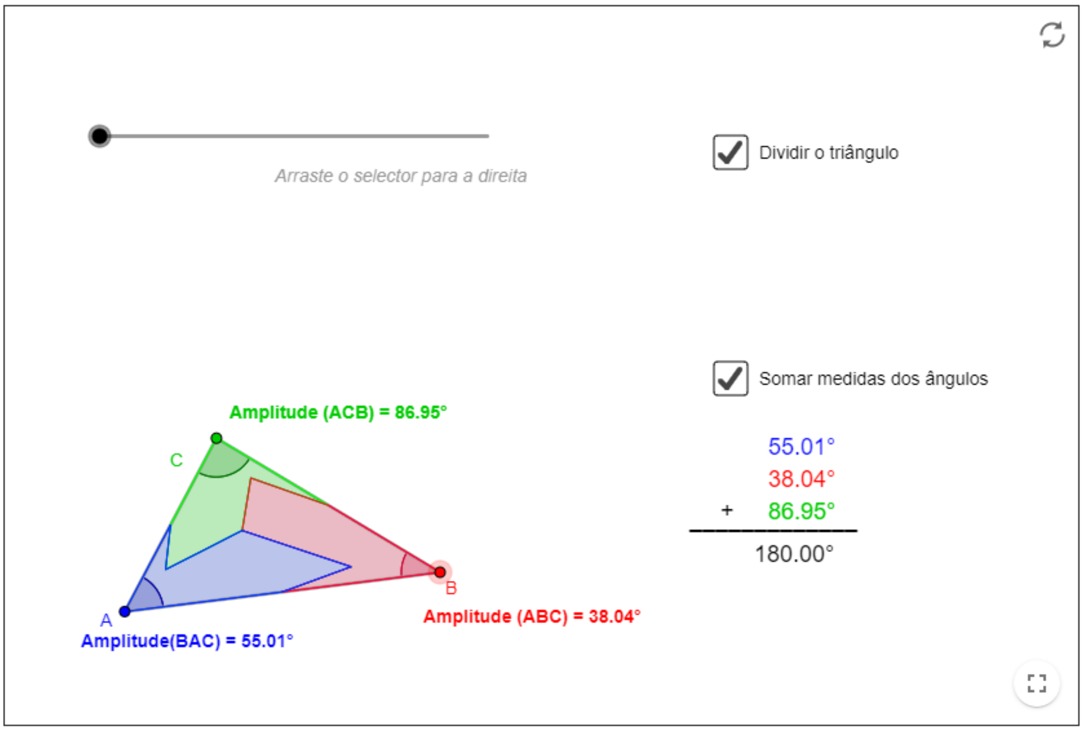

Figura 4.9: Triângulo com seus ângulos internos

Fonte: https://www.geogebra.org/m/tu5ubksu. Acesso em: 28 de julho de 2021.

> Com o uso do software *GeoGebra*, o ensino da soma dos ângulos internos de um triângulo torna-se mais dinâmico e eficaz. [...] em pouco tempo ele pode construir diversos triângulos diferentes, medir seus ângulos internos e verificar que a soma é sempre a mesma. Antes, construções com régua e transferidor, dificultava o trabalho com medidas de ângulos, quando esses não eram números inteiros. Hoje, com o *GeoGebra* essa dificuldade foi superada: tornou-se mais ágil a parte da construção do triângulo e da medição dos ângulos, possibilitando ao aluno concentrar-se mais na obtenção e observação do resultado da soma dos ângulos internos de um triângulo e sua regularidade (GUIZELINI, 2019).

No final dessa aula, fiquei muito satisfeito com os resultados encontrados. Os alunos gostaram muito de verificar essa propriedade dos triângulos através das duas maneiras diferentes. O grande destaque da aula apontado pelos alunos foi a utilização do *GeoGebra*, sua dinâmica ao movimentar os vértices do triângulo pela tela do computador. A maioria dos alunos não conheciam o programa e disseram que o programa será muito útil em outras situações em que se faz necessário a construção de figuras geométricas de maneira rápida, fácil e divertida.

Depois dessa aula, os alunos se mostraram preparados para realizarem as atividades propostas no livro didático.

4º Momento - demonstração da proposição “a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180º”

Esse quarto momento não existiu na aula que foi aplicada a essa turma de 8º ano. Esse momento surgiu depois, no momento de reflexão e relato da aula.

Percebemos que faltou a demonstração formal para essa proposição, uma vez que a demonstração é bem simples e que eu poderia ter trabalhado com meus alunos. Os alunos já tinham estudado anteriormente ângulos correspondentes e ângulos opostos pelo vértice.

A demonstração que apresentaremos para essa propriedade usa o **quinto postulado de Euclides**: “dados, no plano, uma reta r e um ponto $A \notin r$, existe uma única reta s, paralela a r e passando por A”.

De posse desse postulado, suponha r, s e t retas no plano tais que r e s são retas paralelas entre si e t intersecta r e s em dois pontos, então temos que os **ângulos alternos internos** α e β são iguais.

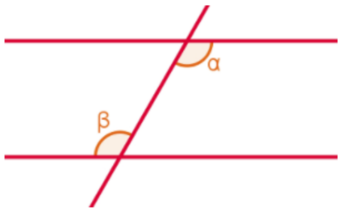

Figura 4.10: ângulos alternos internos

Fonte: https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/angulos-alternos-internos-externos.htm. Acesso em 26 de junho de 2021.

Proposição: A soma dos ângulos internos de um triângulo é igual 180^o.

Demonstração: Sejam ABC um triângulo qualquer e XY um segmento de reta paralelo ao lado BC do triângulo e passando por A, temos que $\hat{B} = \angle(BAX)$ e $\hat{C} = \angle(CAY)$, então temos que $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \hat{A} + \angle(BAX) + \angle(CAY) = 180^o$.

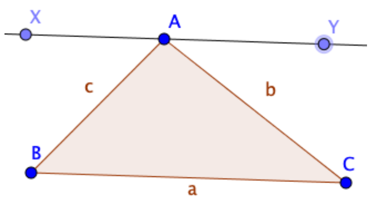

Figura 4.11: Triângulo ABC

Fonte: Elaborado pelo autor.

Essa demonstração, que vai ser acrescentada em aulas futuras sobre esse conteúdo, possui álgebra, uma vez que estamos trabalhando com equações, substituindo variáveis e fazendo manipulações algébricas. Nesse conteúdo é difícil pensar em geometria sem a álgebra. A **intradisciplinaridade** entre álgebra e geometria aparece naturalmente.

Considerações Finais

Apresentamos nesta dissertação um embasamento teórico do tema intradisciplinaridade matemática no capítulo 1 e, em seguida, nos outros capítulos, buscamos trabalhar sete conteúdos matemáticos do ensino fundamental - anos finais, nos quais conseguimos enxergar a coexistência da álgebra e da geometria. Dos conteúdos trabalhados, três são algébricos: produtos notáveis, sistemas lineares e função do 1º grau, e quatro são conteúdos geométricos: teorema de Pitágoras, desigualdade triangular, número de diagonais de um polígono e soma dos ângulos internos de um triângulo.

Ao concluir o estudo desses sete conteúdos destacados, conseguimos observar que os **conteúdos algébricos** podem ser trabalhados apenas algebricamente, sem geometria. Porém, os mesmos conteúdos podem ser abordados de maneira intradisciplinar com a geometria; seja através de gráficos, no caso de funções, ou com quebra cabeças geométricos, no caso de produtos notáveis. A escolha de como trabalhar esses conteúdos é do professor. Mas certamente trabalhá-los de forma intradisciplinar deixa nossas aulas muito mais ricas e interessantes para nossos alunos, proporcionando assim um aprendizado muito mais satisfatório. Já para os **conteúdos geométricos** estudados por nós, a percepção de intradisciplinaridade é bem diferente. Hoje a concepção de geometria está muito ligada à álgebra. Os conteúdos de geometria utilizam a álgebra, trazem a álgebra. A álgebra vem como ferramenta para verificação de propriedades geométricas. Assim, a intradisciplinaridade acontece de forma natural.

Particularmente, ao finalizar essa jornada pelo PROFMAT, realizando este trabalho, me vejo mais preparado como professor. Porém a busca não termina aqui, a qualificação profissional de um professor deve ser constante.

Esperamos que esse trabalho motive nossos leitores, colegas professores do ensino básico, a buscarem cada vez mais a prática de reflexão sobre sua atuação como professores e, consequentemente, busquem mais qualificação e planejamento de aulas cada vezes mais ricas, interessantes e **intradisciplinares**.

Referências Bibliográficas

ARAUJO, Luís Cláudio Lopes de. NOBRIGA, Jorge Cássio Costa. *Aprendendo Matemática com o GeoGebra.* Editora Exato. 2010.

BARRETO FILHO, Benigno; SILVA, Cláudio Xavier. *Matemática aula por aula.* São Paulo. 2003.

BARROS, Als. ROCHA, CA. *O Uso do Geoplano como material didático nas aulas de Geometria.* Encontro Nacional de Educação Matemática: ENEM. Volume 8. Páginas: 1 à 9. 2004.

BERLINSKI, David. *Os elementos de Euclides.* Tradução: CARINA, Cláudio. 1ª edição. Rio de Janeiro. Zahar. 2018

BIANCHINI, Edwaldo. *Matemática Bianchini.* 7º ano. 9ª edição. Moderna. São Paulo. 2018.

BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular.* Ministério Da Educação. Secretaria da Educação Básica. Brasília. 2017.

BRITANNICA Escola. Álgebra. 2021a.
Disponível em: <https://escola.britannica.com.br/artigo/álgebra/480569>. Acesso em 25 de maio de 2021.

BRITANNICA Escola. Aritmética. 2021b.
Disponível em: <https://escola.britannica.com.br/artigo/aritmética/480656>. Acesso em 25 de maio de 2021.

BRITANNICA Escola. Geometria. 2021c.
Disponível em: <https://escola.britannica.com.br/artigo/geometria/481358>. Acesso em 25 de maio de 2021.

CABRITA, Leandro. *Mapa mental: Casos de fatoração e produtos notáveis.* Tudao de Matemática. 2020. Disponível em: <https://tudaodematematica.blogspot.com/2019/04/mapa-mental-casos-de-fatoracao-e.html>. Acesso em 02 de novembro de 2020.

CAVALCANTE, Romirys. *O uso da Geometria em questões Algébricas*. Vivendo entre Símbolos. 2017. Disponível em: < https://www.vivendoentresimbolos.com/2017/08/o-uso-da-geometria-em-questoes-algebricas.html>. Acesso em 19 de outubro de 2020.

COSTA, André Gustavo Cruz. *A importância da função afim e da Geometria Plana no aprendizado de Física do Ensino Médio e o GeoGebra como ferramenta fundamental*. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT). Universidade Federal do Triângulo Mineiro. 2018. Disponível em: <http://bdtd.uftm.edu.br/handle/tede/634>. Acesso em 03 de junho de 2021.

CREASE, Robert P. *AS GRANDES EQUAÇÕES: A história das fórmulas matemáticas mais importantes e os cientistas que as criaram*. Tradução de Alexandre Cherman. Zahar. Rio de Janeiro. 2011.

DELGADO, Jorge. FRENSEL, Katia. CRISSAFF, Lhaylla. *Geometria analítica*. Coleção PROFMAT. 2ª edição. Rio de Janeiro. SBM: Sociedade Brasileira de Matemática. 2017.

DEMANA, Franklin D; WAITS, Bert k; FOLEY, Gregory D.; KENNEDY, Daniel. *Pré-Cálculo*. volume único. 2ª edição. São Paulo.Pearson Education do Brasil. 2013.

DOLCE, Osvaldo. POMPEO, José Nicolau. *Geometria Plana - Coleção Fundamentos de Matemática Elementar*. Editora Atual. São Paulo. 7ª edição. 1993.

FARIA, Rejane Waiandt Schuwartz de Carvalho. *Raciocínio proporcional: integrando aritmética, geometria e álgebra como o GeoGebra*. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Instituto de Geociências e Ciências Exatas. Universidade Estadual Paulista. UNESP. 2016. Disponível em: <https://repositorio.unesp.br/handle/11449/148026>. Acesso em 26 de maio de 2021.

FARIA, Rejane Waiandt Schuwartz de Carvalho; CHINELATO, Tiago Giorgeti; SILVA, Fábio Ferreira da; MALTEMPI, Marcus Vinicius e JAVARONI, Sueli Liberati. *Grandezas proporcionais com GeoGebra: possibilidades para o ensino integrado de geometria, aritmética e álgebra*. ENEM - Encontro Nacional de Educação Matemática. São Paulo. 2016. Disponível em: <http://www.sbembrasil.org.br/enem2016/anais/pdf/4595_2421_ID.pdf>. Acesso em: 19 de julho de 2021.

FARIA, Rejane Waiandt Schuwartz de Carvalho; MALTEMPI, Marcus Vinicius. *Intradisciplinaridade Matemática com GeoGebra na Matemática Escolar*. Artigo. Bolema: Boletim de Educação Matemática. Rio Claro - SP. 2019. Disponível em: <https://www.scielo.br/j/bolema/a/4wqhNhpXpjtVT5jKNhXwNLN/?lang=pt&format=pdf>. Acesso em: 19 de julho de 2021.

GARCIA, Jefferson Fernandes. SEHNEM, Rafaela. ROMIO, Tatiane Maria. MULLER, Claiton. *Relato de uma experiência diversificada com o uso do software GeoGebra.* 2013. VI Congresso Internacional de Ensino da Matemática. Disponível em: <http://www.conferencias.ulbra.br/index.php/ciem/vi/paper/viewFile/686/904>. Acesso em 03 de junho de 2021.

GIRALDO, Victor. CAETANO, Paulo. MATTOS, Francisco.*Recursos computacionais no ensino de Matemática.* Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro. SBM: Sociedade Brasileira de Matemática. 2012.

GUIZELINI, Alessandra. *Relato: Soma dos ângulos internos de um triângulo.* Disponível em: <http://www.matematica.seed.pr.gov.br/modules/conteudo/conteudo.php?conteudo=183>. Acesso em 25 de junho de 2021.

HECK, Miriam Ferrazza.*Considerações sobre a base nacional comum curricular (BNCC) e as unidades de conhecimento matemático.* Revista Eletrônica Científica Ensino Interdisciplinar. Mossoró, v. 5, n. 13, 2019. Disponível em: <http://periodicos.uern.br/index.php/RECEI/article/view/2992>. Acesso em 10 de junho de 2021.

JESUS, Danilo do Nascimento de. *O uso do software Geogebra para o ensino de função do 2º grau: O caso da 1ª série do ensino médio de uma escola federal.* Universidade do Vale do Taquari. UNIVATES. 2019. Disponível em: <https://univates.br/bdu/bitstream/10737/2491/1/2018DanilodoNascimentodeJesus.pdf>. Acesso em 04 de junho de 2021.

KILHIAN, Kleber. *Como determinar o número de diagonais de um polígono convexo de n lados.* O Baricentro da mente. 2014. Disponível em: <https://www.obaricentrodamente.com/2014/04/como-determinar-o-numero-de-diagonais.html>. Acesso em 03 de novembro de 2020.

LUIZ, Robson. *Teorema de Pitágoras.* Brasil Escola. 2020. Disponível em: < https://brasilescola.uol.com.br/matematica/teorema-pitagoras.htm>. Acesso em 02 de novembro de 2020.

MARQUES, Alex Sandro. ANDERE, André. SILVA, Pollyanna Santana. CALDERUCCI, Thiago Laet de H. *Coleção CALLIS.* 8º ano. Livro 1A. Editora Poliedro. São

José dos Campos. São Paulo. 2019a.

MARQUES, Alex Sandro. ANDERE, André. SILVA, Pollyanna Santana. CALDERUCCI, Thiago Laet de H. *Coleção CALLIS*. 8º ano. Livro 1B. Editora Poliedro. São José dos Campos. São Paulo. 2019b.

MARQUES, Alex Sandro. ANDERE, André. SILVA, Pollyanna Santana. CALDERUCCI, Thiago Laet de H. *Coleção CALLIS*. 8º ano. Livro 2. Editora Poliedro. São José dos Campos. São Paulo. 2019c.

MARTINS, Eder Marinho. *Uma maneira fácil de entender o Teorema de Pitágoras*. 2020. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=KtrK7uIAhUw&t=130s>. Acesso em 21 de julho de 2021.

MENEGOLLA, Angela Maria. *Mapas conceituais como instrumento de estudo na matemática*. Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul. 2006. Disponível em: <https://repositorio.pucrs.br/dspace/bitstream/10923/2923/1/000346967-Texto%2BCompleto-0.pdf>. Acesso em 31 de maio de 2021.

MINHOLI, F. S.. *Os ramos da matemática - Mas por que dividir em ramos?*. 2020. Disponível em: < https://lirte.pesquisa.ufabc.edu.br/matreematica/a-matematica-do-cotidiano/ramos/>. Acesso em 31 de maio de 2021.

NASCIMENTO, Eimard Gomes Antunes do. *Avaliação do uso do software GeoGebra no ensino de Geometria: Reflexão da prática na escola*. Actas de la Conferencia Latinoamericana de GeoGebra. Montevideo. Uruguai. 2012. Disponível em: <http://www.geogebra.org.uy/2012/actas/procesadas1370724062/67.pdf>. Acesso em 03 de junho de 2021.

NOE, Marcos. *Produtos notáveis*. Brasil Escola. 2021. Disponível em: <https://educador.brasilescola.uol.com.br/estrategias-ensino/produtos-notaveis.htm>. Acesso em 27 de maio de 2021.

NOVAES, Jean Carlos. *Produtos Notáveis: Veja as Propriedades*. matemática básica. 2021. Disponível em: <https://matematicabasica.net/adicao/>. Acesso em 17 de junho de 2021.

OLIVEIRA, Silvânia Cordeiro. LAUDARES, João Bosco. *Pensamento algébrico: Uma relação entre Álgebra, Aritmética e Geometria*. Puc-MG/Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática. Minas Gerais. 2015. Disponível em: <https://livrozilla.

com/doc/1690970/pensamento-alg%C3%A9brico–uma-rela%C3%A7%C3%A3o-entre-%C3%A1lgebra–aritm%C3%A9tica> Acesso em 26 de maio de 2021.

PARENTE, Ulisses Lima. *Material Teórico - Módulo Elementos Básicos de Geometria Plana - Parte 1.* Portal da Matemática - OBMEP. 8º ano. 2021. Disponível em: <https://portaldaobmep.impa.br/uploads/material_teorico/cetzv81cw68gg.pdf>. Acesso em 18 de janeiro de 2021.

PATARO, Patricia Moreno. BALESTRI, Rodrigo. *Matemática essencial.* Editora scipione. 7º ano. 1ª edição. São Paulo. 2018.

ROONEY, Anne. *A História da Matemática.* Desde a criação das pirâmides até a exploração do infinito. M. Books do Brasil Editora Ltda. São Paulo. 2012

SAMIZAVA, Cintia Harumi. *Utilização do software GeoGebra no ensino de funções de primeiro e segundo grau.* Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT). Universidade Estadual Paulista (UNESP). 2018. Disponível em: <https://repositorio.unesp.br/handle/11449/152639>. Acesso em 03 de junho de 2021.

SILVA, Luiz Paulo Moreira. *O que é o teorema de Pitágoras?.* Brasil Escola. 2021a. Disponível em: <https://brasilescola.uol.com.br/o-que-e/matematica/o-que-e-teorema-de-pitagoras.htm>. Acesso em 27 de maio de 2021.

SILVA, Luiz Paulo Moreira. *O que são produtos notáveis?.* Brasil Escola. 2021b. Disponível em: <https://brasilescola.uol.com.br/o-que-e/matematica/o-que-sao-produtos-notaveis.htm>. Acesso em 27 de maio de 2021.

SILVA, Marcos Noé da. *Função de 2º grau.* Brasil Escola. 2021c. Disponível em: <https://brasilescola.uol.com.br/matematica/funcao-segundo-grau.htm>. Acesso em 04 de junho de 2021.

SOUSA, José Romenelli de. *Ensinando integradamente Aritmética, Geometria e Álgebra: proposta de atividades para a Matemática do Ensino Fundamental.* Universidade Federal da Paraíba. 2016. Disponível em: <https://repositorio.ufpb.br/jspui/bitstream/123456789/1354/1/JRS03102016.pdf>. Acesso em 26 de maio de 2021.

TAHAN, Malba. LINHARES, Thais Quintella. *O Homem que calculava.* Editora Record. 2010.

VIGGIANO, Giuliana. *Matemática: entenda a diferença entre axioma, teorema e teoria*. Revista Galileu. 2020. Disponível em: <https://revistagalileu.globo.com/Ciencia/noticia/2020/08/matematica-entenda-diferenca-entre-axioma-teorema-e-teoria.html>. Acesso em 02 de novembro de 2020.

VILLACA, Erica. *Diagonais de um polígono*. Matemática Genial. 2020. Disponível em: <https://www.matematicagenial.com/2018/12/diagonais-de-um-poligono.html>. Acesso em 03 de novembro de 2020.