Universidade Federal de São João del-Rei

Universidade Federal de São João del-Rei
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT
Campus Santo Antônio

Simetrias no Triângulo de Pascal

Célia Maria Souza

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, da Universidade Federal de São João del-Rei, Campus Santo Antônio.

Orientador
Prof. Dr. Fábio Alexandre de Matos

2021

TERMO DE APROVAÇÃO

Célia Maria Souza

SIMETRIAS NO TRIÂNGULO DE PASCAL

Dissertação APROVADA como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática no Curso de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, da Universidade Federal de São João del-Rei (Campus Santo Antônio) pela seguinte banca examinadora:

Prof. Dr. Fábio Alexandre de Matos **(Orientador)**
UFSJ - Universidade Federal de São João del-Rei

Prof. Dr. Francinildo Nobre Ferreira (*Avaliador Local*)
UFSJ - Universidade Federal de São João del-Rei

Prof. Dr. Sílvio Antônio Bueno Salgado (*Avaliador Externo*)
UNIFAL - Universidade de Alfenas

São João del-Rei, Agosto de 2021

Para aquela que me faz levantar todos os dias e ter coragem para lutar: Maria Antônia.

Agradecimentos

À Deus, sem ele nada é possível.

Às minhas irmãs Alice e Núbia. À minha mãe Hilda e a minha tia Conceição. Todas fazem parte dessa caminhada.

Aos meus amigos da turma de 2018, em especial Marco Antônio, Gabriel, Luciara e Thais: passamos muitos apertos mas demos muitas risadas.

Agradeço os meus professores do PROFMAT e ao meu orientador, Fábio, e ao professor Jorge pela paciência. Grandes professores fazem muita diferença na vida de seus alunos. Aos meus amigos Cavaca, Sidney e Thiago que me apoiaram várias vezes em momentos difíceis. À minha pequena Maria Antônia que alegra meus dias. Ao meu namorado e físico preferido Anderson Herbert de Abreu Gomes que me ajudou e ajuda diariamente.

'É o coração que sente Deus
e não a razão.'
Blaise Pascal

Resumo

O trabalho apresenta uma reunião das principais propriedades do Triângulo de Pascal, bem como suas demonstrações. Começamos com um pouco da história de Pascal, sua vida e seus feitos no campo científico indo até algumas propriedades não elementares como o Teorema de Fong, o Pequeno Teorema de Hockey e Puck e a Propriedade da Estrela de Davi. Fizemos uma associação do Teorema de Davi com polígonos e trabalhamos com simetrias dentro do Triângulo de Pascal. Fizemos uma associação do conteúdo visto no trabalho com uma maneira de usar a interdisciplinaridade para seu estudo e ao final deixamos uma sugestão de atividade para ser trabalhada em sala de aula do ensino médio.

Palavras-chave: Pascal, Triângulo de Pascal, Coeficientes Binomiais, Interdisciplinaridade, Simetria.

Abstract

This work makes a compilation of several Pascal‘s Triangle properties, as well as their demonstrations. We begin with a little bit of the history of Pascal, their life, and their work in the scientific field, going to some no elementary properties of Fong‘s Theorem, the Little Theorem of Hockey, and Puck and the Properties of the Davi‘s Star. We made an association of Davi‘s Theorem with polygons and work the symmetries inside Pascal‘s Triangle. Furthermore, we did an association of work‘s content and a way to use the interdisciplinarity for their study. Finally, we have a suggestion for classroom activity to be worked with high school students.

Keywords: Pascal, Paschal Triangle, Binomial Coefficients, interdisciplinarity, Symmetry.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Sumário

1 Introdução

Observar como certa descoberta matemática, posteriormente pode ser usada de diversas maneiras é algo muito incrível. O Triângulo de Pascal foi estudado por vários matemáticos mas Blaise Pascal apresentou resultados tão importantes que o triângulo aritmético recebeu seu nome como homenagem. Com registros datados por volta do século XIII,quando o chinês Yang Hui(1238-1298) fez seus estudos e considerando todas as novas propriedades apresentadas por Niccolo Fontana Tartaglia (1623-1662) até Pascal, o triângulo aritmético ainda é objeto de estudo nos tempos atuais. A Secretaria de Estado de Educação de Minas Gerais em seu (GERAIS, 2007) Conteúdo Básico Comum (CBC), primeira referência, apresenta em um dos seus eixos temáticos a Contagem. Trabalhar com números binomiais, análise combinatória, Binômio de Newton ainda é um desafio para o professor do Ensino Médio uma vez que esses assuntos, para o aluno, se mostram extremamente complexos, justificando assim a escolha do tema. Entender as principais propriedades de Triângulo de Pascal, principalmente sua formação é algo importante para a lógica final do aprendizado.

Apresentaremos uma forma lúdica para trabalhar com o triângulo de Pascal sem deixar de lado suas propriedades que serão apresentadas de maneira formal. O objetivo é que este trabalho sirva de norte para facilitar a tarefa do professor na introdução do conteúdo e melhore o processo ensino-aprendizagem. Propriedades elementares das linhas e colunas serão apresentadas e demonstradas. Usaremos o método da indução finita para realizar as demonstrações. Aprofundaremos até chegarmos na Propriedade da Estrela de Davi. A propriedade da Estrela de Davi foi descrita no artigo (HILTON; PEDERSEN, 1987) Looking into Pascal‘s Triangle: Combinatories, Arithmetic, end Geometry(Olhando para o Triângulo de Pascal: Combinatória, Aritmética e Geometria) escrito por Peter Hilton e Jean Pedersen, nossa principal referência. Faremos uma ponte entre o Triângulo de Pascal e seu ensino através da interdisciplinaridade onde o elo será a propriedade da Estrela de Davi. Observando os vários padrões que se repetem no triângulo chegamos às propriedades: exploraremos a simetria apresentada no Triângulo de forma que leve o aluno a entender tais padrões e consiga reproduzi-los posteriormente de outras maneiras, em questões de combinatórias.

A dissertação é estruturada da seguinte maneira: inicialmente, justificamos a iniciativa do trabalho que é auxiliar o professor no ensino das propriedades do Triângulo de Pascal. Faremos uma breve busca histórica sobre o matemático Blaise Pascal onde citaremos suas contribuições para a Matemática e a Física. Definiremos o fatorial de um número e números binomiais. Faremos a prova da igualdade de dois números binomiais. Deixaremos um exemplo bem simples para a introdução do conteúdo, onde podemos associa-lo com os números binomiais e ao Triângulo de Pascal. Em seguida, faremos sua apresentação mais formal, apresentaremos as suas propriedades elementares e demonstrações.Trabalharemos com o Teorema de Fong, O Pequeno e o Grande Teorema de Hockey e Puck que recebeu esse nome porque sua disposição no Triângulo de Pascal lembra um taco de hóquei, a definição do peso de um retângulo cujos vértices são pontos do Triângulo de Pascal, propriedades como a do Deslizamento e Reflexão e a Propriedade da Estrela de Davi juntamente com um contexto histórico. No próximo capítulo, trabalharemos com polígonos simétricos no Triângulo de Pascal, propriedade que pode ser estendida para qualquer figura que contenha simetria. Em seguida, faremos uma ligação do conteúdo visto neste trabalho com outras disciplinas e deixaremos uma sugestão de atividade acompanhada do seu plano de aula baseado no Currículo Básico Comum de Minas Gerais.

2 Blaise Pascal e seu Triângulo Aritmético

Neste Capítulo, apresentaremos um breve histórico a respeito de Blaise Pascal e algumas definições fundamentais para a construção deste trabalho.

2.1 Breve biografia sobre Pascal

Blaise Pascal nasceu em Clermont- Ferrand, França, em 19 de junho de 1623,(QUEIROZ; DRUMMOND, 2019) fruto da união entre Étienne Pascal e Antoinette Begon, provenientes de famílias tradicionais francesas. Perdeu sua mãe muito jovem e, sendo o único filho homem, foi educado por sua figura paterna. Seu pai foi um matemático ortodoxo que exercia a função de presidente do Tribunal de Contas de Clermont e acreditava que Pascal deveria receber inicialmente, nos seus estudos, informações relacionadas às linguagens. Assim, mandou retirar todos os livros de sua casa para que, apenas com 15 anos, Pascal pudesse ter contato com estudos matemáticos. Contrariando as expectativas do pai, Pascal foi um menino precoce e logo se interessou pela Matemática. Seu pai acompanhou de perto todos os ensinamentos que Pascal recebia. Possuía grande habilidade na Aritmética, Álgebra e na Geometria. Aos 10 anos descobriu os números triangulares. Aos 12 anos, provou que a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é igual a 180°.

Admirado com a capacidade de Pascal, seu pai logo o presenteou com uma cópia do livro Os Elementos de Euclides. Alguns estudos de Pascal tiveram que ser publicados tendo, como autor, o seu pai, devido à sua pouca idade: alguns relatos históricos dizem que o matemático Descartes preferiu acreditar que a autoria de alguns estudos

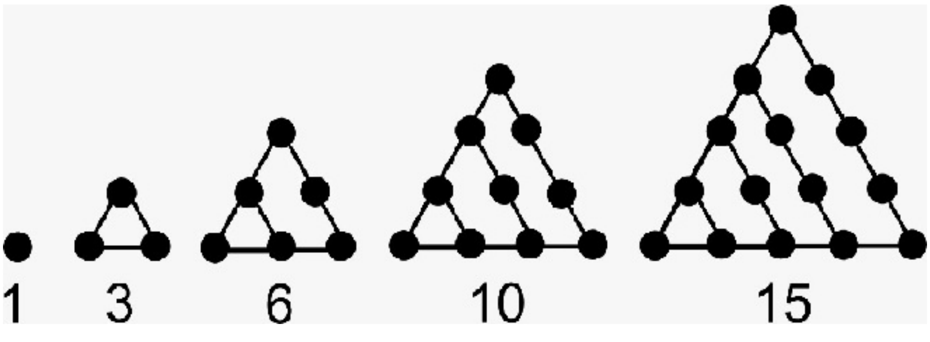


Figura 2.1: Números Triangulares
Fonte: Autora

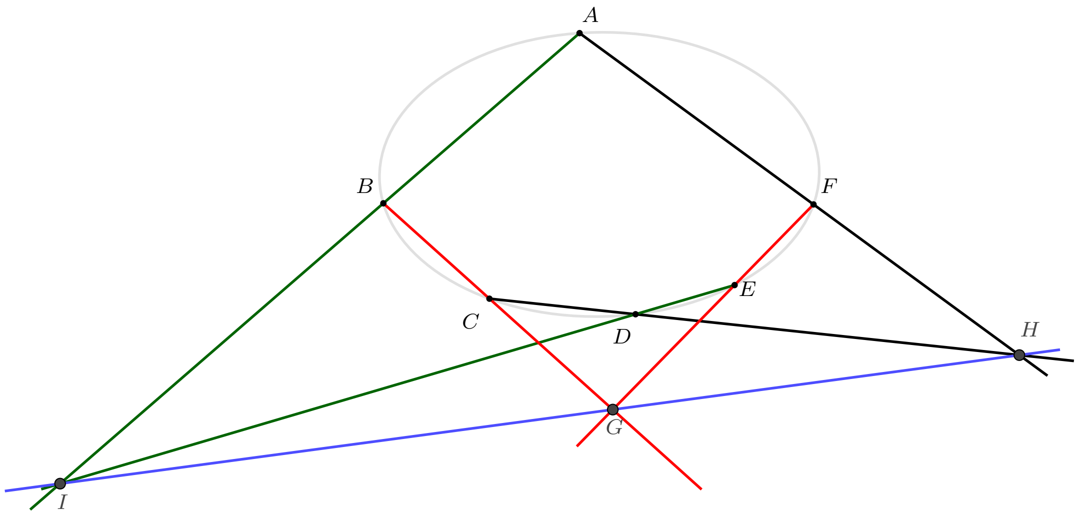


Figura 2.2: Representação do Teorema de Pascal
Fonte:Autora

fosse do pai de Pascal devido à sua juventude. Aos 16 anos, publicou um tratado sobre Geometria Projetiva que ficou conhecido como o Teorema de Pascal. Nesse resultado, Pascal demonstrou que em um hexágono inscrito em uma cônica, as retas que contiverem os lados opostos interceptam-se em pontos colineares; ou seja, se os seis vértices de um hexágono estão situados sobre uma cônica e as retas suporte de três pares de lados opostos se intersectam, os três pontos de intersecção são colineares. Na figura abaixo, observe que os pares de lados opostos determinam retas que se interceptam nos pontos I, G e H colineares.

Com objetivo de ajudar o pai em seus trabalhos, aos 19 anos, Pascal criou e reproduziu algumas cópias de uma máquina de calcular que ficou conhecida como pascalina. A máquina possuía uma roda dentada, onde cada dente era numerado de zero até nove. É considerada a primeira calculadora decimal da história e efetuava facilmente adições e subtrações.

Uma das maiores contribuições de Blaise Pascal foi na área das probabilidades. Antigamente, os homens atribuíam a Deus toda a razão de fatos que aconteciam. O fator ter sorte ou não ter sorte era sempre atribuído a uma certa divindade. Os jogos de azar sempre estiveram presentes na história humana.

[...] A sorte é lançada no colo, mas a decisão vem do Senhor [...]Provérbios 16:33

[...] (GIANELLA, 2003) a mitologia grega recorreu a um gigantesco jogo de dados para explicar o que hoje chamamos Big Bang. Três irmãos, através de dados, partilharam o Universo: Zeus ganhou os céus, Poseidon, os mares, e Hades, o perdedor, tornou-se o senhor dos infernos [...] Renato Gianella, O lúdico na teoria dos jogos página 29 revista Cientific American Brasil.

Muitas vezes, tais jogos ou apostas não eram bem vistos. Em algumas épocas, no Egito, as pessoas viciadas em jogos de azar eram submetidas a castigos como polir pedras para a construção das pirâmides. Com o passar dos anos, matemáticos foram criando estudos e teorias sobre os jogos de azar. Pascal e matemático Fermat, posteriormente, desenvolveram um método para resolver os chamados problemas dos partidos. As teorias de Pascal sobre incerteza foi tema de dissertação da Faculdade de Filosofia da USP, cujo autor foi Fabio Cristiano de Moraes. [...] A incerteza aparece no pensa-

Figura 2.3: A máquina Pascalina
Disponível em: https://bit.ly/3gWl9JU Acesso em 15/06/2021.

mento de Pascal na medida em que reconhecemos, através da crítica ao cartesianismo, o quão distantes estamos de qualquer fundamentação para o conhecimento. Sem fundamentos sólidos para o conhecimento, Pascal nos propõe as Regras dos Partidos e sua maneira de fazer física, partindo da experiência, como saídas racionais para o impasse que nos coloca a realidade da incerteza[...] (MORAES, 2011). Com o Problema dos partidos ou Regra dos Partidos, Pascal acreditava que, mesmo trabalhando com acasos e incertezas, podemos agir de maneira racional criando estratégias para tal. Surgindo e facilitando, assim, o cálculo das probabilidades. O Problema dos Partidos surgiu para estabelecer uma divisão justa para dois jogadores que apostam certa quantia em um jogo e nenhum deles quer sair perdendo. Assim, ele calculou as chances favoráveis e desfavoráveis de cada jogador. O termo Probabilidade surgiu posteriormente: em todos os seus estudos, Pascal utilizava o termo chances. Seus estudos não ficaram restritos apenas à Matemática: muitos deles influenciaram teorias econômicas e as Ciências Sociais. Desenvolveu conceitos importantíssimos no ramo da Física, com estudos sobre a pressão atmosférica e a invenção da primeira prensa hidráulica. Na Mecânica, recebeu como homenagem a unidade de pressão Pa (Pascal). Autor da frase: O coração tem razões que até a própria razão desconhece, Pascal passou por algumas experiências místicas, passando a se dedicar à Filosofia e à Religião. Suas experiências na área espiritual não tiraram sua ênfase na área científica. Sempre alinhou sua vida científica com a espiritual, chegando a usar argumentos probabilísticos para justificar, ou mesmo provar, sua crença em Deus. Nos seus maiores estudos e contribuições para a Matemática, que são muitos e possuem uma grande diversidade, estão a Teoria das Probabilidades, o livro Ensaio sobre as Cônicas e o Tratado do Triângulo aritmético ou Triângulo de Pascal, objeto principal desta dissertação. O triângulo aritmético (1654) contribuiu imensamente no desenvolvimento da Estatística. Ele apresentou de forma tabular os chamados números binomiais.

$$\binom{n}{p} = \frac{(n)!}{(n-p)!p!}, n \geqslant p. \tag{2.1}$$

Considerado, até hoje, um dos maiores físicos e matemáticos da história, Blaise Pascal faleceu no ano de 1659, com pouco mais de 39 anos. Mesmo após sua morte, continuou contribuindo para o meio científico, pois teve um livro publicado, Traité de l'equilibre des liqueurs, que apresentava seus tratados sobre hidrostática.

2.2 Algumas definições elementares

Nesta seção, vamos apresentar algumas definições elementares que serão utilizadas ao longo do texto. .

Para $n \in \mathbb{N}$, o fatorial de n, denotado por n!, definido por:

$$n! \;=\; \begin{cases} 1 & \text{se} \quad n = 0 \\ n(n-1)(n-2)\cdots 2 \cdot 1 & \text{se} \quad n \geqslant 1. \end{cases} \tag{2.2}$$

Por definição, temos que $n! = n \cdot (n-1)!$, para todo $n \geq 1$.

A partir do fatorial, podemos introduzir o número binomial ou coeficiente binomial. Mais especificamente, os números binomiais estão diretamente ligados à expansão de $(a+b)^n$, onde $n \in \mathbb{N}$ e os elementos a e b pertencem a um conjunto com boas propriedades aritméticas.

Coeficientes Binomiais ou, simplesmente, números Binomiais é uma relação estabelecida entre dois números naturais n e p tais que $n \geq p$ e denotada por $\binom{n}{p}$.

$$\binom{n}{p} \;=\; \begin{cases} 0 & \text{se} \quad p > n \\ \dfrac{n!}{(n-p)!p!} & \text{se} \quad 0 \leq p \leq n. \end{cases} \tag{2.3}$$

Além disso, dizemos que dois números binomiais $\binom{n}{q}$ e $\binom{n}{p}$ são complementares se $p + q = n$. Neste caso, temos que $\binom{n}{q} = \binom{n}{p}$.

De fato, se $\binom{n}{q}$ e $\binom{n}{p}$ dois binomiais complementares, então $p + q = n$, isto é, $p = n - q$. Daí, segue que

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{(n-p)!p!} = \frac{(n)!}{(n-(n-q))!(n-q)!} = \frac{n!}{q!(n-q)!} = \binom{n}{q}$$

Uma propriedade aritmética interessante para os números naturais é que para todo $k \in \mathbb{N}$, k divide a multiplicação de quaisquer k inteiros consecutivos. Tal propriedade pode ser demonstrada a partir dos estudos dos restos de divisão, mas aqui utilizaremos os números binomiais.

Para todo n, $k \in \mathbb{N}$ tais que $n \geqslant k$, temos que

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)(n-k)!}{(n-k)!k!} = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{k!}.$$

Uma vez que $\binom{n}{k}$ é um número natural, temos que $k!$ divide o produto $n(n-1)(n-2)...(n-k+1)$, que é o produto de k números inteiros consecutivos começando em $(n-k+1)$. Desta forma, podemos começar a sequência a partir de qualquer número natural $m \geq 1$. Para tanto, basta considerar n de forma que $n - k + 1 = m$, isto é, $n = m + k - 1 \geq k$, pois $m \geq 1$.

Proposição 2.2.1 (A relação de Stifel)**.** Para $n, p \in \mathbb{N}$, temos que

$$\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}.$$

Mais adiante, vamos apresentar o Triângulo de Pascal e outra propriedades acerca dos números binomiais que serão deduzidas a partir de posições dentro da representação do Triângulo de Pascal.

2.2.1 Relação de Stifel

Michael Stifel foi um matemático alemão de grande importância, fez grandes pesquisas nas áreas da Aritmética e da Álgebra. Anterior a Napier, ele já utilizava uma tábua de logaritmos mas com aproximações diferentes.(SCHUBRING, 2008) Também conhecida como Regra de Pascal, a Relação de StifeL foi uma regra criada por Michel Stifel. Nada mais é que uma regra para a soma de números binomiais com mesmo numerador e denominadores consecutivos.

Figura 2.4: Michael Stifel
Disponível em: https://bit.ly/3jzzQ7l Acesso em: 23/06/2021

Proposição 2.2.2 (A relação de Stifel)**.** Para $n, p \in \mathbb{N}$, temos que:

$$\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}.$$

Demonstração. Observe que

$$\binom{n+1}{p+1} = \frac{(n+1)!}{((n+1)-(p+1))!(p+1)!} = \frac{(n+1)!}{(n+1-p-1)!(p+1!)} = \frac{(n+1)!}{(n-p)!(p+1)!}.$$

Por outro lado temos:

$$\binom{n}{p}+\binom{n}{p+1}=\frac{(n)!}{(n-p)!p!}+\frac{(n)!}{(n-p-1)!(p+1)!}=$$

Multiplicando e dividindo a primeira e a segunda fração respectivamente por $(p+1)$ e por $(n-p)$ temos:

$$\frac{n!(p+1)}{p!(n-p)!(p+1)}+\frac{n!(n-p)}{(n-p-1)!(p+1)!(n-p)}=$$

$$=\frac{n!(p+1)}{(p+1)!(n-p)!}+\frac{n!(n-p)}{(p+1)!(n-p)!}=$$

$$=\frac{n!((p+1)+(n-p))}{(n-p)!(p+1)!}=$$

$$=\frac{n!((n+1)}{(n-p)!(p+1)!}=\frac{(n+1)!}{(n-p)!(p+1)!}.$$

Portanto:

$$\binom{n+1}{p+1}=\binom{n}{p}+\binom{n}{p+1}.$$

2.2.2 Uma sugestão de abordagem de Números Binomiais no ensino médio

Durante as aulas de Matemática, devemos explorar os recursos para que algumas relações sejam apresentadas de maneira mais clara. Quando definimos $\binom{n}{p}=\frac{n!}{(n-p)!p!}$, essa relação entre os números n e p, deve fazer sentido para o aluno. Mas como explicar de maneira que ele consiga assimilar e posteriormente reproduzir? Exemplos simples são bons para introduzir novas ideias. Podemos imaginar que temos três brinquedos B_1, B_2 e B_3, espalhados no chão de uma sala e que podem ser guardados em outro cômodo. Imaginemos, agora, uma criança que sempre brinca com esses mesmos três brinquedos. Sua mãe pede que, ao final da brincadeira, ela guarde todos os brinquedos. A criança às vezes, guarda todos, guarda alguns ou deixa todos espalhados. Quando a mãe vai verificar o cômodo da brincadeira, quais os possíveis brinquedos que ela poderá ver no chão? Todos, apenas um, dois? Podemos fazer a mesma pergunta mas de outra maneira: Quais os brinquedos que a criança pode ter guardado? Vamos organizar o problema na seguinte maneira:

Tabela 2.1: Como contar as formas de guardar três brinquedos

Maneiras que uma criança pode escolher brinquedos para guardar		
Forma com que a criança pode ter guardado seus brinquedos	Brinquedos escolhidos	Quantidade de opções de escolha
Não guardou nenhum brinquedo	$\{\}$	1 opção
Guardou apenas um	$\{B_1\}$ ou $\{B_2\}$ ou $\{B_3\}$	3 opções
Guardou apenas dois	$\{B_1,B_2\}$ ou $\{B_1,B_3\}$ ou $\{B_2,B_3\}$	3 opções
Guardou os três	$\{B_1,B_2,B_3\}$	1 opção

Deve ficar claro ao aluno que as opções B_1, B_2 e B_2, B_1 são iguais pois os mesmos brinquedos foram guardados. Agora devemos auxiliar na associação da situação com números binomiais:

Tabela 2.2: Associando a forma de guardar três brinquedos com números binomiais

Opções de escolha	Forma binomial $\binom{n}{p}$	Cálculo $\binom{n}{p} = \frac{n!}{(n-p)!p!}$	Resultado
Não guardar nenhum brinquedo	$\binom{3}{0}$	$\binom{3}{0} = \frac{3!}{(3-0)!0!}$	1 opção
Guardar apenas um brinquedo	$\binom{3}{1}$	$\binom{3}{1} = \frac{3!}{(3-1)!1!}$	3 opções
Guardar apenas dois brinquedos	$\binom{3}{2}$	$\binom{3}{2} = \frac{3!}{(3-2)!2!}$	3 opções
Guardar todos os brinquedos	$\binom{3}{3}$	$\binom{3}{3} = \frac{3!}{(3-3)!3!}$	1 opção

Quando n= 3 representa o número de brinquedos e $0 \leqslant p \leqslant 3$ o número de brinquedos que a criança pode escolher para guardar. Essa forma de introdução dos números binomiais é de extrema importância pois abre caminho para a formação do Triângulo de Pascal e, posteriormente, visualizar que padrões se repetem em toda a sua extensão.

Seguindo esse mesmo raciocínio mas agora variando o número de brinquedos temos:

Tabela 2.3: Formando o Triângulo de Pascal

	$p=0$	$p=1$	$p=2$	$p=3$	$p=4$	$p=5$	$p=6$	$p=7$
$n=0$	$\binom{0}{0}$							
$n=1$	$\binom{1}{0}$	$\binom{1}{1}$						
$n=2$	$\binom{2}{0}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{2}{2}$					
$n=3$	$\binom{3}{0}$	$\binom{3}{1}$	$\binom{3}{2}$	$\binom{3}{3}$				
$n=4$	$\binom{4}{0}$	$\binom{4}{1}$	$\binom{4}{2}$	$\binom{4}{3}$	$\binom{4}{4}$			
$n=5$	$\binom{5}{0}$	$\binom{5}{1}$	$\binom{5}{2}$	$\binom{5}{3}$	$\binom{5}{4}$	$\binom{5}{5}$		
$n=6$	$\binom{6}{0}$	$\binom{6}{1}$	$\binom{6}{2}$	$\binom{6}{3}$	$\binom{6}{4}$	$\binom{6}{5}$	$\binom{6}{6}$	
$n=7$	$\binom{7}{0}$	$\binom{7}{1}$	$\binom{7}{2}$	$\binom{7}{3}$	$\binom{7}{4}$	$\binom{7}{5}$	$\binom{7}{6}$	$\binom{7}{7}$

E, de uma maneira bem simples e associado a algo real, surge Triângulo de Pascal. Um bom exemplo de leitura para o professor é o capítulo 7 do livro Temas e Problemas Elementares da SBM, que trata sobre métodos de contagem. (LIMA et al., 2005). Aprender estratégias para a resolução de problemas é de grande importância para que depois possamos aplicá-las em sala de aula repassando aos alunos.

2.3 O Triângulo de Pascal

O Triângulo de Pascal nada mais é que um conjunto de infinitos números dispostos de maneira triangular. Cada número do triângulo é uma expansão de um número binomial.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & \binom{0}{0} & & & & & \\
 & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \\
 & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & \\
 & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & \\
 & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
\binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & & \cdots & \cdots & & \binom{n}{n-1} & & \binom{n}{n} &
\end{array}$$

Na literatura, o Triângulo de Pascal aparece representado de duas formas, a saber, na forma de triângulo retângulo ou triângulo isósceles, substituindo os valores dos números binomiais. Abaixo, a representação do triângulo no formato isósceles.

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}$$

Abaixo, a representação do Triângulo de Pascal no formato de um triângulo retângulo.

$$\begin{array}{ccccccc}
1 & & & & & & \\
1 & 1 & & & & & \\
1 & 2 & 1 & & & & \\
1 & 3 & 3 & 1 & & & \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & \\
1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

É importante ressaltar que a primeira linha é a linha 0 e é composta por um único elemento. Seguindo, temos que a linha n possui $n+1$ elementos, como descrito a seguir.

$$\begin{array}{cccccccl}
1 & & & & & & & \to \textit{Linha } 0 \\
1 & 1 & & & & & & \to \textit{Linha } 1 \\
1 & 2 & 1 & & & & & \to \textit{Linha } 2 \\
1 & 3 & 3 & 1 & & & & \to \textit{Linha } 3 \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & & \to \textit{Linha } 4 \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & & \to \textit{Linha } 5 \\
1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 & \to \textit{Linha } 6 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots
\end{array}$$

Com relação as colunas, na representação como triângulo retângulo, as colunas são verticais e como triângulo isósceles serão diagonais.

Nas próximas seções, vamos apresentar algumas propriedades aritméticas sobre números binomiais a partir do Triângulo de Pascal. E serão separadas em resultados elementares, que são amplamente encontrados na literatura, e em outras com resultados mais específicos, como a Propriedade da Estrela de Davi e o Teorema de Hockey e Puck. Estes últimos trazem e justificam o desenvolvimento do trabalho.

3 Propriedades Elementares do Triângulo de Pascal

O Triângulo de Pascal possui dentro de sua estrutura, propriedades estudadas aplicadas à Análise Combinatória e, aqui, vamos analisar algumas propriedades. Mais especificamente, vamos olhar para as propriedades de linhas, colunas e diagonais, que possuem apenas números triangulares.

Inicialmente, é válido ressaltar o seguinte:

(i) O vértice superior do Triângulo de Pascal é igual a 1.

(ii) O primeiro elemento de cada linha no Triângulo de Pascal é igual a 1, pois $\binom{n}{0} = \dfrac{n!}{(n-0)!0!} = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(iii) O último elemento de cada linha é igual a 1, pois $\binom{n}{n} = \dfrac{n!}{n!(n-n)!} = 1$

(iv) Os elementos, em uma mesma linha, equidistantes dos extremos são iguais, isto é, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, para todo $k \in \mathbb{N}$ tal que $2k \leq n$.

A figura a seguir, mostra a representação dos termos equidistantes na linha 5 do Triângulo de Pascal.

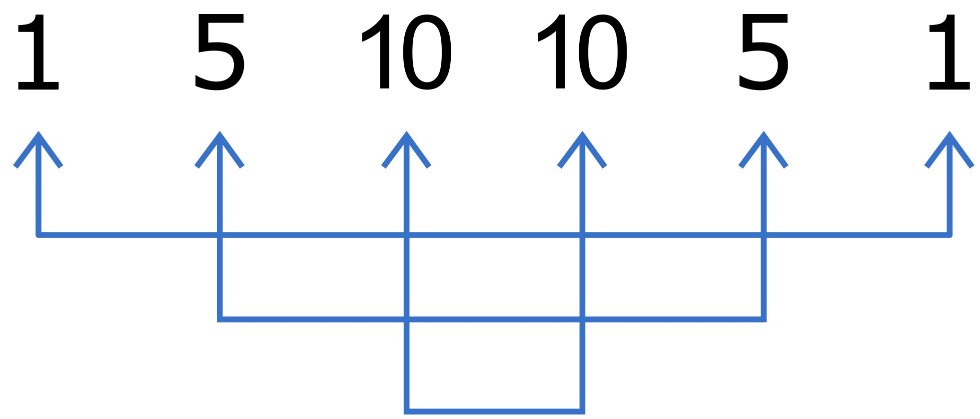


Figura 3.1: Linha 5 do Triângulo de Pascal
Fonte: Autora

A última afirmação acima segue diretamente da propriedade de números binomiais.

Apresentaremos a seguir mais duas propriedades interessantes do Triângulo de Pascal: o **Teorema das Linhas**, **Teorema das Colunas** e **Teorema das Diagonais**

Proposição 3.0.1 (Teorema das Linhas)**.** A soma dos coeficientes binomiais em uma mesma linha n é sempre igual a 2^n.

$$\begin{array}{ccccccccl}
1 & & & & & & & \rightarrow & 2^0 \\
1 & 1 & & & & & & \rightarrow & 1+1=2^1 \\
1 & 2 & 1 & & & & & \rightarrow & 1+2+1=2^2 \\
1 & 3 & 3 & 1 & & & & \rightarrow & 1+3+3+1=2^3 \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & & \rightarrow & 1+4+6+4+1=2^4 \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & & \rightarrow & 1+5+10+10+5+1=2^5 \\
1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 & \rightarrow & 1+6+15+20+15+6+1=2^6 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \ddots
\end{array}$$

Demonstração: Para n = 1, primeira linha em contagem ou linha zero do Triângulo de Pascal: $\binom{0}{0} = 1 = 2^0$ é válido. Supondo válido para a linha n qualquer, e usando a hipótese de indução, vamos mostrar que vale para a linha n+1. Na linha n temos:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + ... + \binom{n}{n} = 2^n$$

Na linha n+1 temos:

$$\binom{n+1}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + ... + \binom{n+1}{n} + \binom{n+1}{n+1}$$

Pela Relação de Stifel temos que:

$$\binom{n+1}{1} = \binom{n}{0} + \binom{n}{0+1} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}$$

$$\binom{n+1}{2} = \binom{n}{1} + \binom{n}{1+1} = \binom{n}{1} + \binom{n}{2}$$

$$\binom{n+1}{3} = \binom{n}{2} + \binom{n}{2+1} = \binom{n}{2} + \binom{n}{3}$$

$$\vdots$$

$$\binom{n+1}{n} = \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n-1+1} = \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$$

Assim na linha n+1:

$$\binom{n+1}{0}+\binom{n+1}{1}+\binom{n+1}{2}+\binom{n+1}{3}+...+\binom{n+1}{n}+\binom{n+1}{n+1}$$

$$1+\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}+...+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}+1$$

$$1+\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}+...+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}+...+\binom{n}{n-1}+1$$

$= 2 + 2^n + 2^n - 2 = 2^n + 2^n = 2.2^n = 2^{n+1}$.

Proposição 3.0.2 (Teorema das Colunas)**.** Para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que

$$\binom{n}{n}+\binom{n+1}{n}+\binom{n+2}{n}+...+\binom{n+p}{n}=\binom{n+p+1}{n+1}.$$

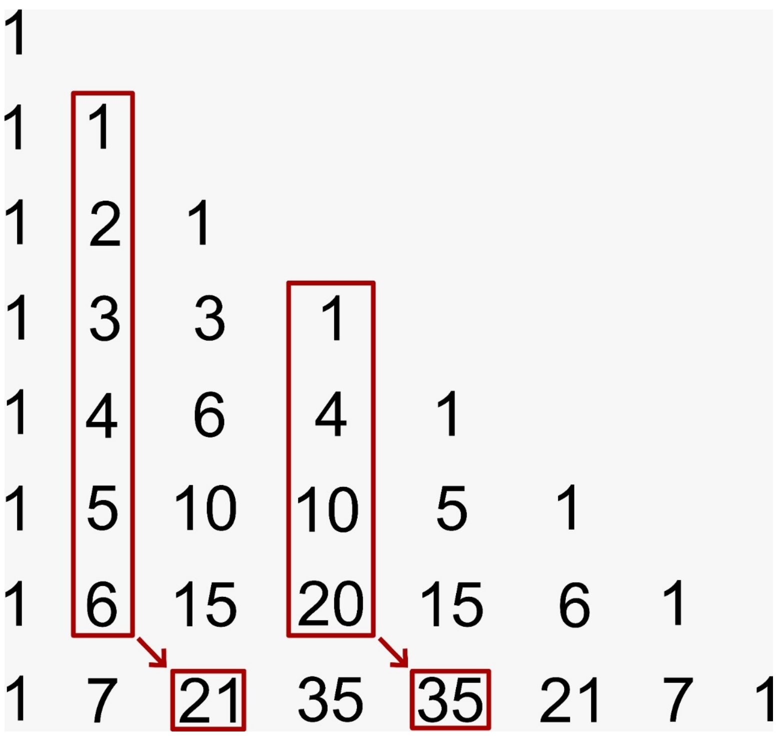


Figura 3.2: Teorema das Colunas
Fonte: Autora

Demonstração: Para p = 0 temos que:

$$\binom{n}{n}=\binom{n+1}{n+1}=1.$$

Supondo que a afirmação seja válida para um p qualquer, e, usando a hipótese de indução, vamos mostrar que vale para p+1. Por hipótese temos:

$$\binom{n}{n}+\binom{n+1}{n}+\binom{n+2}{n}+...+\binom{n+p}{n}=\binom{n+p+1}{n+1}.$$

Assim:

$$\binom{n}{n}+\binom{n+1}{n}+\binom{n+2}{n}+...+\binom{n+p}{n}+\binom{n+p+1}{n}$$

$$=\binom{n+p+1}{n+1}+\binom{n+p+1}{n}$$

$$=\frac{(n+p+1)!}{(n+p+1-n-1)!(n+1)!}+\frac{(n+p+1)!}{(n+p+1-n)!n!}$$

$$=\frac{(n+p+1)!}{p!(n+1)!}+\frac{(n+p+1)!}{(p+1)!n!}$$

$$=\frac{(n+p+1)!}{p!(n+1)n!}+\frac{(n+p+1)!}{(p+1)p!n!}$$

$$=\frac{(n+p+1)!}{p!n!}[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{p+1}]$$

$$=\frac{(n+p+1)!}{p!n!}\frac{(n+p+2)}{(n+1)(p+1)}$$

$$=\frac{(n+p+2)!}{(n+1)!(p+1)!}$$

$$=\binom{(n+p+1)+1}{n+1}=\binom{n+p+2}{n+1}.$$

Proposição 3.0.3 (Teorema das Diagonais)**.** Para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que

$$\binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}+\binom{n+2}{2}+...+\binom{n+p}{p}=\binom{n+p+1}{p}.$$

Demonstração:
Sabendo que:

$$\binom{n}{p}=\binom{n}{n-p},$$

temos:

$$\binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}+\binom{n+2}{2}+...+\binom{n+p}{p}=\binom{n}{n}+\binom{n+1}{n}+\binom{n+2}{n}+...+\binom{n+p}{n}.$$

Pelo Teorema das Colunas temos:

$$\binom{n}{n}+\binom{n+1}{n}+\binom{n+2}{n}+...+\binom{n+p}{n}=\binom{n+p+1}{n+1}=\binom{n+p+1}{p},$$

pois

$$\binom{n+p+1}{n+1}e\binom{n+p+1}{p}$$

são Binomiais Complementares. Na figura a seguir, temos a soma de 5 elementos da diagonal 2:

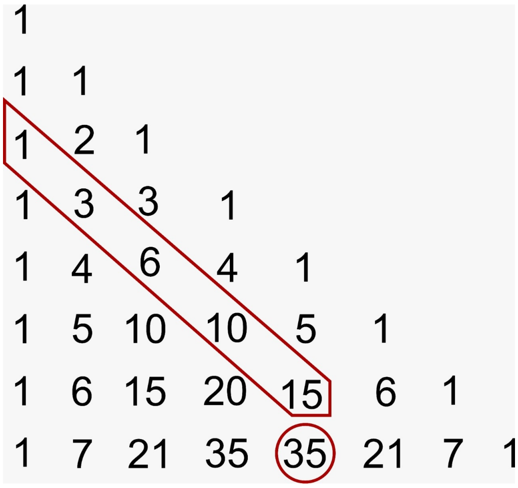


Figura 3.3: Teorema das Diagonais
Fonte:Autora

Finalmente, apresentaremos abaixo algumas representações da relação de Stifel no Triângulo de Pascal.

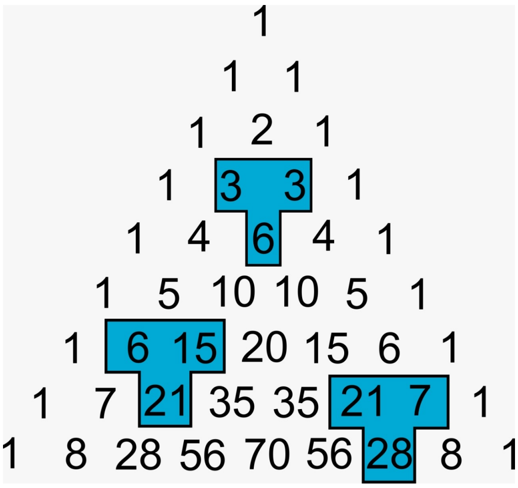


Figura 3.4: Relação de Stifel no Triângulo de Pascal Isósceles
Fonte: Autora

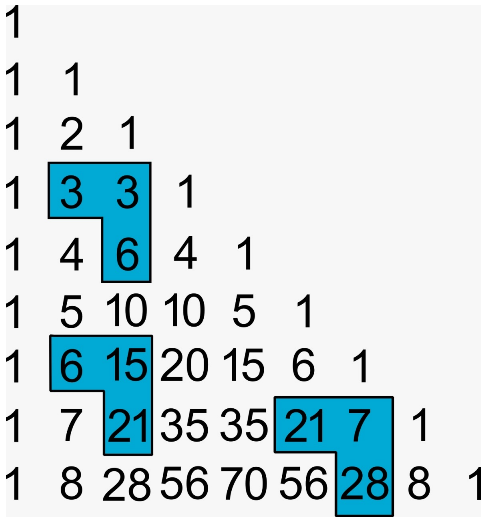


Figura 3.5: Relação de Stifel no Triângulo Retângulo
Fonte: Autora

3.1 Números triangulares no Triângulo de Pascal

Nesta seção, vamos estudar uma propriedade da segunda diagonal do triângulo de Pascal. Mais especificamente, relembramos que a segunda diagonal do Triângulo de Pascal é formada pelos elementos

$$T_1 = \binom{2}{2} = 1$$

$$T_2 = \binom{3}{2} = 3$$

$$T_3 = \binom{4}{2} = 6$$

$$T_4 = \binom{5}{2} = 10$$

$$T_5 = \binom{6}{2} = 15$$

$$T_6 = \binom{7}{2} = 21$$

$$T_7 = \binom{8}{2} = 28$$

$$T_8 = \binom{9}{2} = 36$$

$$T_9 = \binom{10}{2} = 45$$

$$\vdots$$

$$T_n = \binom{n+1}{2}$$

Proposição 3.1.1. $T_n = 1 + 2 + 3 \cdots + n$, para todo $n \in \mathbb{N},\ n \geq 1$.

Demonstração: Observe, inicialmente, que $T_1 = 1$. Supondo que $T_{n-1} = 1 + \cdots + (n-1)$, devemos mostrar que $T_n = 1 + \cdots + n$.

$$1+\cdots+(n-1)+n = \binom{n}{2}+n = \frac{n(n-1)}{2}+n = \frac{2n+n^2-n}{2} = \frac{n(n+1)}{2} = T_n = \binom{n+1}{2}.$$

$\square$

A proposição 3.1.2 apresenta mais um resultado sobre os números T_n.

Proposição 3.1.2. A soma de dois números triangulares consecutivos é um quadrado perfeito. Mais especificamente, temos que

$$T_{n-1} + T_n = \binom{n}{2} + \binom{n+1}{2} = n^2.$$

Demonstração: Para $n = 1$, temos que $T_1 = 1$ e, para $n = 2$, segue que

$$\binom{2}{2} + \binom{3}{2} = 1 + 3 = 2^2$$

é válido. Supondo válido para um n qualquer, isto é, $T_{n-1} + T_n = n^2$, vamos mostrar que vale para $n + 1$.

$$T_{n-1} + T_n = \binom{n}{2} + \binom{n+1}{2} = n^2.$$

Pela Relação de Stifel temos:

$$T_n + T_{n+1} = \binom{n+1}{2} + \binom{n+2}{2} = \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+1}{2} =$$

$$= \binom{n}{1} + \binom{n+1}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n+1}{2} = n + n + 1 + n^2 = 2n + n^2 + 1 = (n+1)^2.$$

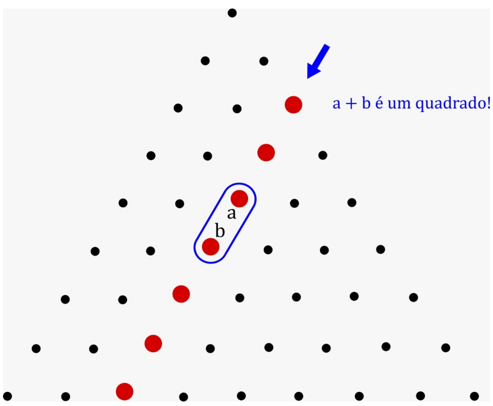


Figura 3.6: Soma de dois números triangulares
Fonte:HILTON, P.; PEDERSEN, J. Looking into pascal's triangle: Combinatorics,arithmetic, and geometry.

Finalmente, mais uma propriedade interessante dos números triangulares.

Proposição 3.1.3.

$$T_{n+1} - T_{n-2} = 3n, \;\; n \geqslant 3.$$

Demonstração: Observe, inicialmente, que para n = 3

$$T_4 - T_1 = 10 - 1 = 9 = 3 \cdot 3$$

É valido! Supondo válido para $n \geqslant 3$, vamos mostrar que vale para $n + 1$. Por hipótese de indução, temos que $T_{n+2} - T_{n-1} = 3n$. Seguindo, temos que

$$T_{n+2} - T_{n-1} = \binom{n+2}{2} - \binom{n-1}{2} = \frac{(n+2)!}{n!2!} - \frac{(n-1)!}{(n-3)!2!}.$$

Desenvolvendo o segundo membro, podemos concluir que

$$T_{n+2} - T_{n-1} = \frac{(n+2)(n+1)n!}{2n!} - \frac{(n-1)(n-2)(n-3)!}{(n-3)!2}$$

e, consequentemente,

$$T_{n+2} - T_{n-1} = \frac{(n^2+3n+2)}{2} - \frac{(n^2-3n+2)}{2} = \frac{n^2+3n+2-n^2+3n-2}{2} = \frac{6n}{2} = 3n.$$

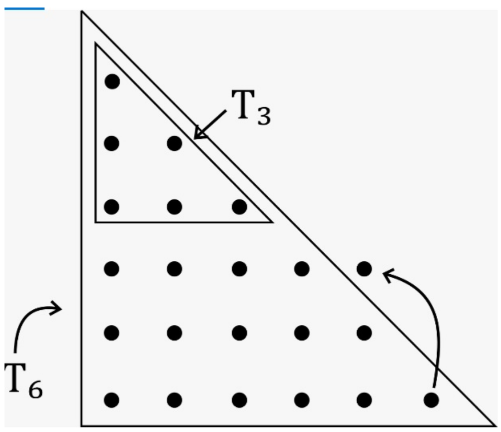


Figura 3.7: Propriedade 3.6.5
Fonte:HILTON, P.; PEDERSEN, J. Looking into pascal's triangle: Combinatorics,arithmetic, and geometry.

4 Propriedades não elementares no Triângulo de Pascal

Possivelmente outras propriedades do Triângulo de Pascal surgiram após muita observação. Procurar certos padrões e constatar que eles se repetem pode acontecer após certo estudo ou no olhar de alguém que tenha uma visão mais aprimorada. Foi o que aconteceu com o teorema que enunciaremos a seguir: o Theorema de Fong. No artigo Looking into Pascal's Triangle: Combinatorics, Arithmetic, and Geometry (HILTON; PEDERSEN, 1987), os autores atribuem a primeira prova desse teorema, que aconteceu durante uma aula, à aluna Allison K. Fong que, na época, ainda era caloura na universidade norte- americana de Santa Clara na Califórnia. Por ser tratar de um triângulo com infinitos número, o Triângulo de Pascal pode possuir alguns padrões, propriedades que ainda não foram descobertas. Portanto, precisamos de olhares tão atentos quanto o dessa aluna. Em pesquisa sobre a autora do teorema, Allison K. Fong, vida, outros teoremas, artigos em seu nome, nada foi encontrado. Fica, assim, uma lacuna sobre o que de fato aconteceu com a brilhante caloura. Mas o que tudo indica é que ela não prosseguiu em uma área acadêmica ligada à Matemática.

4.1 Teorema de Fong

O primeira propriedade não elementar, no Triângulo de Pascal, e que diz respeito à terceira diagonal:

Teorema 4.1.1 (Teorema de Fong)**.** Para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$, temos que:

$$\binom{n+2}{3} - \binom{n}{3} = n^2.$$

O Teorema de Fong diz respeito a extensões da diagonal 3.

Demonstração: Pela relação de Stifel sabemos que $\binom{n+2}{3} = \binom{n+1}{2} + \binom{n+1}{3}$, então:

$$\binom{n+2}{3} - \binom{n}{3} = \binom{n+1}{2} + \binom{n+1}{3} - \binom{n}{3}.$$

Como $\binom{n+1}{3} = \binom{n}{2} + \binom{n}{3}$, segue que:

$$\binom{n+2}{3} - \binom{n}{3} = \binom{n+1}{2} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} - \binom{n}{3}$$

$$\binom{n+1}{2} + \binom{n}{2} = n^2.$$

Como já demonstrado, temos a soma de dois números triangulares e, portanto,

$$\binom{n+2}{3} - \binom{n}{3} = n^2.$$

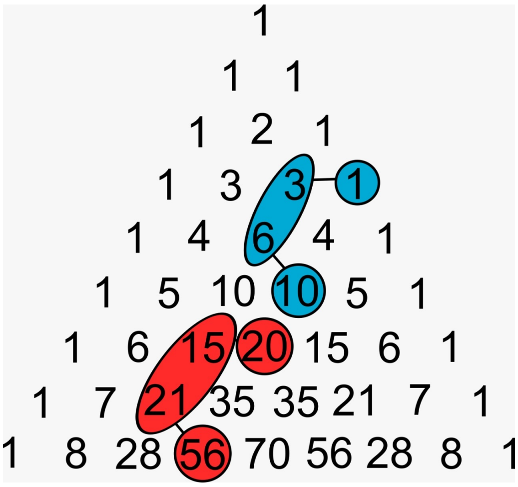


Figura 4.1: Teorema de Fong
Fonte:Autora

4.2 O Pequeno Teorema de Hockey e Puck

Considerando o Triângulo de Pascal e observando os elementos $\binom{n}{0}$, $\binom{n+2}{1}$, $\binom{n+4}{2}$, $\binom{n+5}{2}$, temos que a disposição deles no triângulo tem o formato de um taco de hóquei e o elemento $\binom{n+5}{0}$ representa o disco. Assim surge a analogia do The Little Hockey and Puck ou Pequeno Teorema do Hóquei e o Disco com o hóquei, esporte que consiste em mover um disco, sobre um pista de gelo, com auxílio de um taco até atingir o gol, $\binom{n}{0}$, $\binom{n+2}{1}$, $\binom{n+4}{2}$ formam a extensão do cabo e $\binom{n+5}{2}$ a ponta do taco que empurra o disco $\binom{n+5}{0}$.

Teorema 4.2.1 (O Pequeno Teorema de Hockey e Puck)**.** Para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 0$, temos que

$$\binom{n}{0} + \binom{n+2}{1} + \binom{n+4}{2} = \binom{n+5}{2} - \binom{n+5}{0}.$$

Demonstração:
Para n = 0 temos, a igualdade é verificada, pois:

$$\binom{0}{0} + \binom{2}{1} + \binom{4}{2} = 1 + 2 + 6 = 9 = \binom{5}{2} - \binom{5}{0} = 10 - 1 = 9.$$

Supondo válido para um n qualquer, vamos mostrar que vale para n+ 1:

$$\binom{n+6}{2} - \binom{n+6}{0} = \binom{n+5}{1} + \binom{n+5}{2} - \binom{n+6}{0} =$$

$$= \binom{n+4}{0} + \binom{n+4}{1} + \binom{n+5}{2} - 1 =$$

$$= 1 + \binom{n+3}{0} + \binom{n+3}{1} + \binom{n+5}{2} - 1 =$$
$$= 1 + \binom{n+3}{1} + \binom{n+5}{2}.$$

Assim:

$$\binom{(n+1)+5}{2} - \binom{(n+1)+5}{0} = \binom{n+1}{0} + \binom{(n+1)+2}{1} + \binom{(n+1)+4}{2}.$$

□

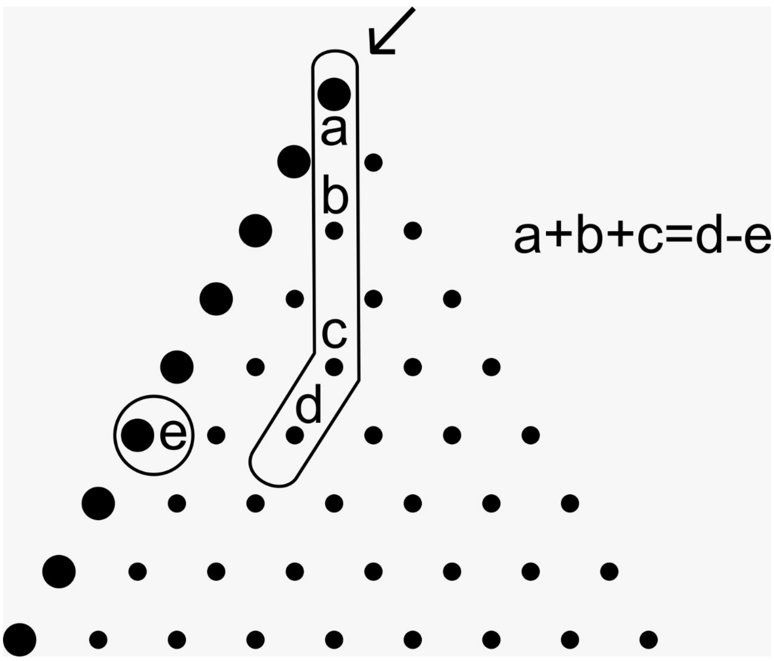


Figura 4.2: O Pequeno Teorema de Hockey e Puck
Fonte: HILTON, P.; PEDERSEN, J. Looking into pascal's triangle: Combinatorics,arithmetic, and geometry.

4.3 O Grande Teorema de Hockey e Puck

O Grande Teorema de Hockey e Puck é uma extensão do Pequeno Teorema de Hockey e Puck pois representa um taco mais longo onde o cabo é formado por $\binom{n}{0}$, $\binom{n+2}{1}$, $\binom{n+4}{2}$, $\binom{n+6}{3}$, com ponta em $\binom{n+7}{3}$, empurrando o disco $\binom{n+6}{1}$.

Teorema 4.3.1 (O Grande Teorema de Hockey e Puck)**.** Para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 0$, temos:

$$\binom{n}{0} + \binom{n+2}{1} + \binom{n+4}{2} + \binom{n+6}{3} = \binom{n+7}{3} - \binom{n+6}{1}.$$

Demonstração:
Pelo Pequeno Teorema de Hockey Puck temos:

$$\binom{n}{0} + \binom{n+2}{1} + \binom{n+4}{2} = \binom{n+5}{2} - \binom{n+5}{0}.$$

Então:

$$\binom{n}{0}+\binom{n+2}{1}+\binom{n+4}{2}+\binom{n+6}{3}=(I).$$

$$\binom{n+5}{2}-\binom{n+5}{0}+\binom{n+6}{3}=(I).$$

Pela Relação de Stifel temos:

$$\binom{n+7}{3}=\binom{n+6}{2}+\binom{n+6}{3}$$

$$\binom{n+6}{3}=\binom{n+7}{3}+\binom{n+6}{2}.$$

Substituindo em (I):

$$\binom{n+5}{2}-\binom{n+5}{0}+\binom{n+7}{3}-\binom{n+6}{2}=(I).$$

Pela Relação de Stifel temos:

$$\binom{n+6}{2}=\binom{n+5}{0}+\binom{n+7}{3}-\binom{n-6}{2}=(I).$$

Pela Relação de Stifel temos:

$$\binom{n+6}{2}=\binom{n+5}{1}+\binom{n+5}{2}.$$

Substituindo em (I):

$$\binom{n+5}{2}-\binom{n+5}{0}+\binom{n+7}{3}-\binom{n+5}{1}-\binom{n+5}{2}-\binom{n+5}{0}+\binom{n+7}{3}-\binom{n+5}{1}=(I).$$

Novamente pela Relação de Stifel temos:

$$\binom{n+6}{1}=\binom{n+5}{0}+\binom{n+5}{1}.$$

Susbtituindo em (I):

$$-\binom{n+5}{0}+\binom{n+7}{3}-\binom{n+5}{1}=(I).$$

$$-\binom{n+5}{0}-\binom{n+5}{1}+\binom{n+7}{3}=(I).$$

$$-[\binom{n+5}{0}+\binom{n+5}{1}]+\binom{n+7}{3}=(I).$$

$$-\binom{n+6}{1}+\binom{n+7}{3}=(I).$$

$$\binom{n+7}{3}-\binom{n+6}{1}=\binom{n}{0}+\binom{n+2}{1}+\binom{n+4}{2}+\binom{n+6}{3}.$$

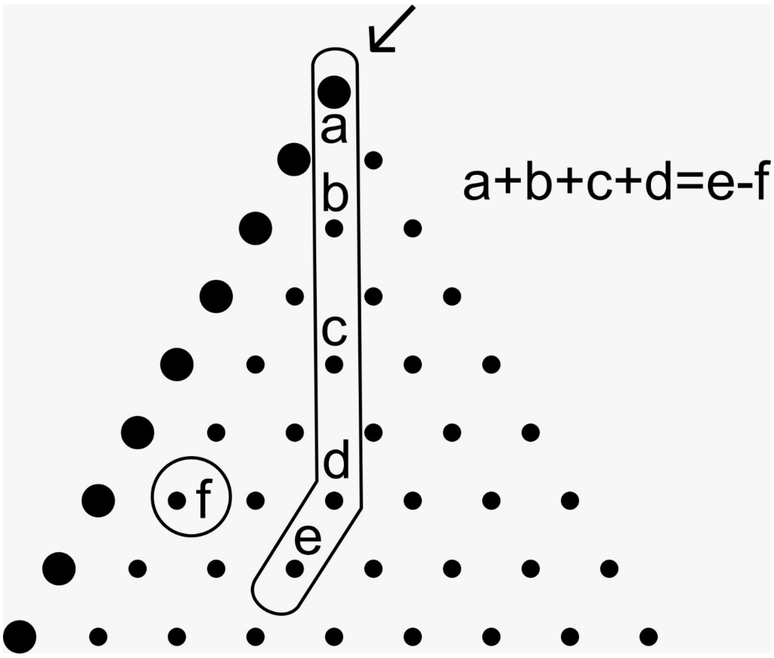


Figura 4.3: O Grande Teorema de Hockey e Puck
Fonte: HILTON, P.; PEDERSEN, J. Looking into pascal's triangle: Combinatorics,arithmetic, and geometry.

4.4 Padrões Retangulares no Triângulo de Pascal

Consideremos cada número binomial do Triângulo de Pascal como um ponto. Teremos alguns padrões retangulares que se repetirão em todo triângulo. Considerando a, b, c, d como o resultado dos binomiais que serão vértices de um triângulo qualquer. Chamaremos de W o peso de retângulo e será definido por:

$$W(n,p,k,x) = W = \frac{c \cdot b}{a \cdot d}.$$

Teorema 4.4.1 (A propriedade da Reflexão)**.** O peso W é simétrico em relação a k, x isto é: $W(n,p,k,x) = W(n,p,x,k)$.

Demonstração:

$$\frac{c \cdot b}{a \cdot d} = \frac{c \cdot f}{e \cdot g}$$

$$\frac{c \cdot b}{a \cdot d} = \frac{\binom{n+k}{p} \cdot \binom{n}{p+x}}{\binom{n}{p} \cdot \binom{n+k}{p+x}} =$$

$$= \frac{(n+k)! \cdot (n!)}{(n+k-p)! \cdot (p!) \cdot (n-p-x)! \cdot (p+x)!} \cdot \frac{(n-p)! \cdot (p)! \cdot (n+k-p-x)! \cdot (p+x)!}{(n)! \cdot (n+k)!}$$

$$= \frac{(x+k-p)! \cdot (n-p-x)!}{(n-p)!(n+k-p-x)}$$

$$\frac{c \cdot f}{e \cdot g} = \frac{\binom{n+k}{p} \cdot \binom{n+k-x}{p+k}}{\binom{n+k-x}{p} \cdot \binom{n+k}{p+k}} =$$

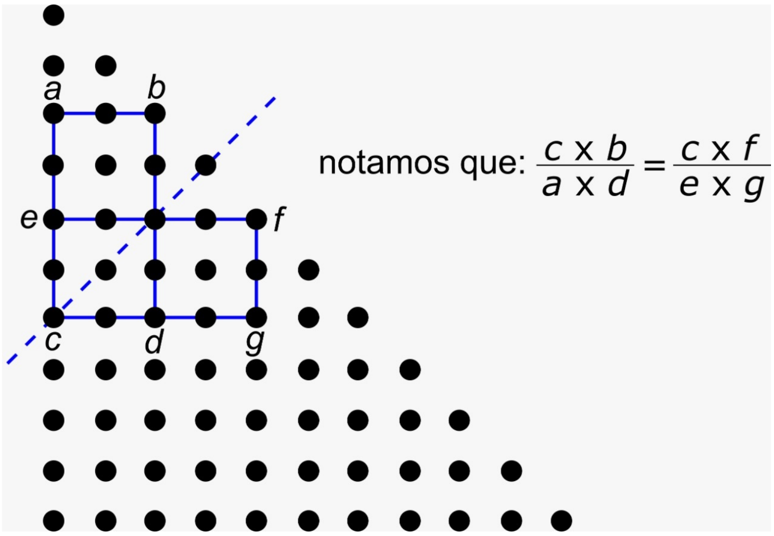


Figura 4.4: A Propriedade da Reflexão e seu eixo de simetria
Fonte:HILTON, P.; PEDERSEN, J. Looking into pascal's triangle: Combinatorics,arithmetic, and geometry.

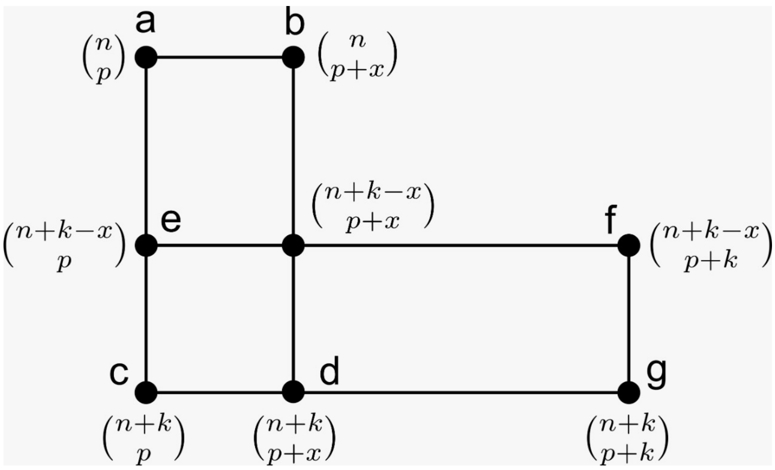


Figura 4.5: A Propriedade da Reflexão
Fonte: Autora

$$= \frac{(n+k)! \cdot (n+k-x)!}{(n+k-p)! \cdot (p!)(n+k-x-p-k)!(p+k)!} \cdot \frac{(n+k-x-p)!(p!)(n+k-p-k)!(p+k)!}{(n+k-x)!(n+k)!} =$$

$$= \frac{(n+k-p)!(n-p-x)!}{(n-p)!(n+k-p-x)!}$$

Teorema 4.4.2 (A propriedade do Deslizamento)**.** Deslizando um retângulo para cima ou para baixo na diagonal $n-p=N$ (com N fixo), seu peso W é preservado.

Demonstração:
Calculando o peso do Retângulo R_1 temos:

$$\frac{\binom{n+x}{p} \cdot \binom{n}{p+k}}{\binom{n}{p} \cdot \binom{n+x}{p+k}} =$$

$$= \frac{(n+x)! \cdot (n!)}{(n+x-p)! \cdot (n+x-p)! \cdot (p!) \cdot (n-p-k)!(p+k)!} \cdot \frac{(n-p)! \cdot (p!) \cdot (n+x-p-k)! \cdot (p+k)!}{(n!) \cdot (n+x)!} =$$

$$= \frac{(n+x-p)! \cdot (n-p-k)!}{(n-p)! \cdot (n+x-p-k)!}$$

Calculando o Peso do Retângulo R_2:

$$\frac{\binom{n+x+k}{p+k} \cdot \binom{n+k}{p+2k}}{\binom{n+k}{p+k} \cdot \binom{n+k+x}{p+2k}}$$

Seja

$$A = \frac{(n+x+k)! \cdot (n+k)!}{(n+x+k-p-k)! \cdot (p+k)! \cdot (n+k-p-2k)! \cdot (p+2k)!}$$

e seja

$$B = \frac{(n+k-p-k)! \cdot (p+k)! \cdot (n+k+x-p-2k)! \cdot (p+2k)!}{(n+k)! \cdot (n+k+x)!}$$

Então $A \cdot B =$

$$= \frac{(n+x+k-p-k)! \cdot (n+k-p-2k)!}{(n+k-p-k)! \cdot (n+k+x-p-2k)!}$$

$$= \frac{(n+x-p)! \cdot (n-p-k)!}{(n-p)! \cdot (n+x-p-k)!} = PesodeR_2$$

Assim temos que Peso R_1 = Peso R_2

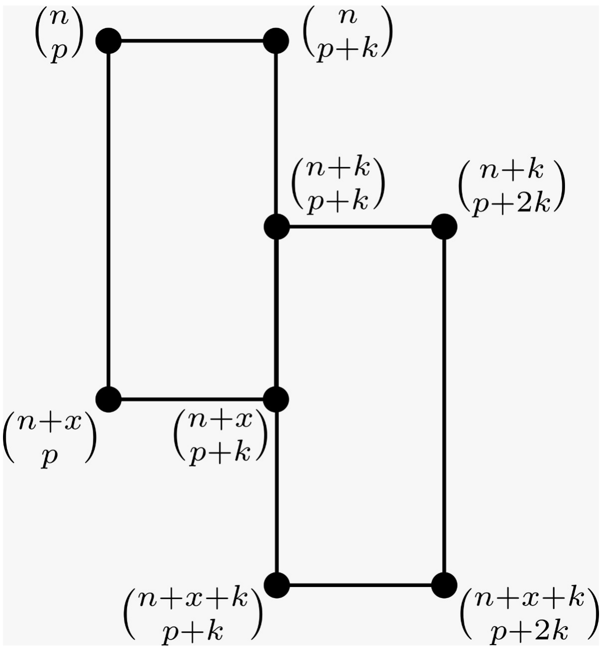


Figura 4.6: Propriedade do Deslizamento:Retângulo deslizado verticalmente
Fonte: Autora

4.5 A Estrela de Davi

A Estrela de Davi é um hexagrama formado por dois triângulos iguais e justapostos formando uma estrela de seis pontas. Sua origem é indefinida, mas há registros da sua utilização, na Índia, há mais de 4000 a.C. (LEXICON, 1998) De acordo com a crença judaica, recebeu o nome do homem que muitos acreditavam que seria o representante de seu povo: o Rei Davi. Durante guerras e confrontos, os soldados do Rei Davi levavam, em seus escudos, o desenho da estrela por acreditarem que ela os afastaria de todos os males e perigos. A história do Rei Davi está contada na Bíblia, no Antigo Testamento.

[...]Então, os homens de Judá foram a Hebrom e ali ungiram Davi rei da tribo de Judá.[...] 2 Samuel 2:4 Davi representou uma segunda tentativa de harmonizar o reino de Israel. Quando os israelitas pedem para ter um rei como os outros povos, Deus não se satisfaz com esse pedido. Até então, eles eram guiados por juízes para ter Deus como único rei. A experiência com Saul, ungido rei, não foi satisfatória. O símbolo de Davi coloca um triângulo apontado para cima, indicando que o Deus celeste ainda se direciona para o reino na terra, e outro triângulo apontado para baixo, indicando que o reino da terra ainda se origina de Deus. A estrela de Davi tornou-se um dos símbolos do Holocausto, genocídio cometido por nazistas durante a Segunda Guerra Mundial. Durante a Alemanha nazista, os judeus foram obrigados a usar a estrela de Davi, com fundo amarelo, em braçadeiras. Elas serviam para identificá-los e, posteriormente, levá-los para campos de concentração. O símbolo que, por muito tempo, foi estigma de exclusão, hoje é visto com muito orgulho pela comunidade judaica. Iniciando esse contexto histórico, enunciaremos a Propriedade da Estrela de Davi.

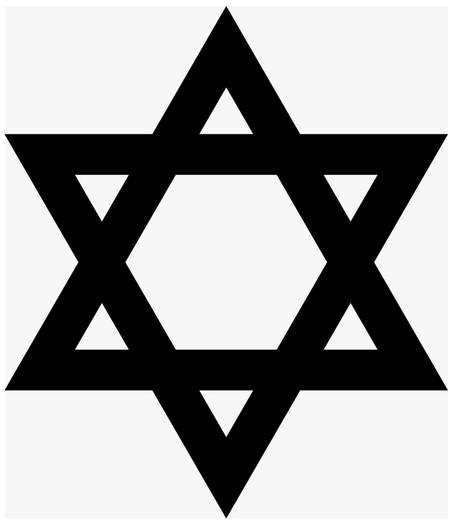


Figura 4.7: Estrela de Davi
Fonte: Autora

4.6 A propriedade da Estrela de Davi

Observe, inicialmente, que a Estrela da Davi é uma figura simétrica. Devemos considerar um eixo de simetria vertical e centralizar a estrela, posicionando seu centro em um ponto no Triângulo de Pascal. O eixo de simetria deve necessariamente passar por esse centro. Considerando uma estrela centrada em $\binom{n-1}{r+1}$ temos que os seis vértices do hexagrama também coincidem com pontos no Triângulo de Pascal, assim temos:

Teorema 4.6.1 (Estrela de Davi)**.**

$$\binom{n-2}{r+1}\binom{n-1}{r}\binom{n}{r+2} = \binom{n-2}{r}\binom{n}{r+1}\binom{n-1}{r+2}.$$

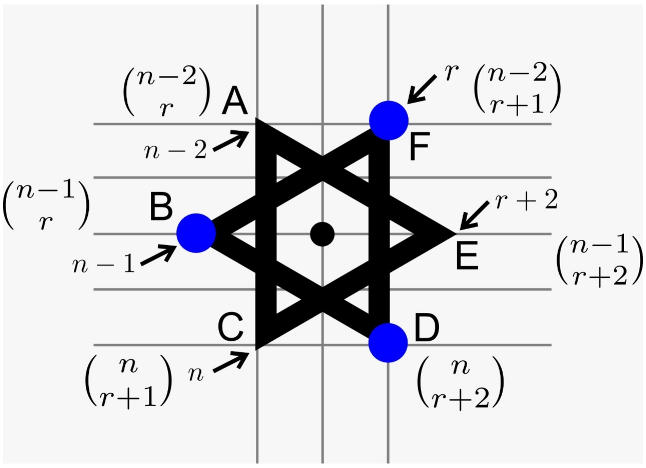


Figura 4.8: Estrela de Davi centralizada em $\binom{n-1}{r+1}$
Fonte:Autora

Demonstração:

$$\binom{n-2}{r+1}\binom{n-1}{r}\binom{n}{r+2} = \frac{(n-2)!}{(n-2-(r+1))!(r+1)!}\frac{(n-1)!}{(n-1-r)!r!}\frac{n!}{(n-(r+2))!(r+2)!}$$

$$= \frac{(n-2)!}{(n-2-r-1)!(r+1)!}\frac{(n-1)!}{(n-1-r)!r!}\frac{n!}{(n-r-2)!(r+2)!}$$

$$= \frac{(n-2)!(n-1)!n!}{(n-1-r-2)!(r+1)!(n-r-1)!r!(n-2-r)!(r+2)!}$$

$$= \frac{(n-2)!}{(n-2-r)!r!}\frac{n!}{(n-r-1)!(r+1)!}\frac{(n-1)!}{(n-1-r-2)!(r+2)!}$$

$$= \binom{n-2}{r}\binom{n}{r+1}\binom{n-1}{r+1}$$

Para a formação da estrela, devemos observar a simetria entre seus vértices e o fato que eles serão equidistantes do centro.

4.7 Os quadrados perfeitos ocultos em um Hexágono

Considerando m e n tais que $0 \leqslant n \leqslant m$ e um hexágono de vértices $\binom{m-1}{n-1}$, $\binom{m-1}{n}$, $\binom{m}{n+1}$, $\binom{m+1}{n+1}$, $\binom{m+1}{n}$ e $\binom{m}{n-1}$ temos o seguinte Teorema.

Teorema 4.7.1 (Os quadrados ocultos nos hexágonos)**.** O produto dos binomiais que representam os seis vértices de um hexágono no Triângulo de Pascal é um quadrado perfeito.

Demonstração:

$$\binom{m-1}{n-1} \cdot \binom{m-1}{n} \cdot \binom{m}{n+1} \cdot \binom{m+1}{n+1} \cdot \binom{m+1}{n} \cdot \binom{m}{n-1} = A \cdot B,$$

em que

$$A = \frac{(m-1)!}{(m-n)!(n-1)!} \cdot \frac{(m-1)!}{(m-1-n)!n!} \cdot \frac{m!}{(m-n-1)!(n+1)!}$$

e

$$B = \frac{(m+1)!}{(m-n)!(n+1)!} \cdot \frac{(m+1)!}{(m+1-n)!n!} \cdot \frac{m!}{(m-n+1)!(n-1)!}.$$

Desta maneira, temos que

$$A = \frac{(m-1)m!(m+1)!}{(n-1)!n!(n+1)!(m-n)!(m-n+1)!(m-n-1)!}$$

e

$$B = \frac{(m-1)m!(m+1)!}{(n-1)!n!(n+1)!(m-n)!(m-n+1)!(m-n-1)!}.$$

Portanto, temos que

$$A \cdot B = \left(\frac{(m-1)m!(m+1)!}{(n-1)!n!(n+1)!(m-n)!(m-n+1)!(m-n-)!} \right)^2.$$

$\square$.

5 Simetria em polígonos no Triângulo de Pascal

Podemos estender a propriedade da Estrela de Davi para demais polígonos. Para que a propriedade possa ser aplicada em outros polígonos vamos observá-los considerando que seu eixo de simetria coincida com o eixo de simetria do Triângulo de Pascal.

O eixo de simetria deve passar por $\binom{0}{0}$. Todas as linhas do Triângulo de Pascal que possuem pontos sobre o eixo de simetria são necessariamente linhas pares, possuindo, assim, uma quantidade de elementos ímpares.(Figura 2.7). Todos os pontos sobre o eixo de simetria são pontos centrais das linhas pares do triângulo. Vamos posicionar um polígono qualquer com n vértices de modo que ele possua vértices simétricos em relação ao eixo de simetria.

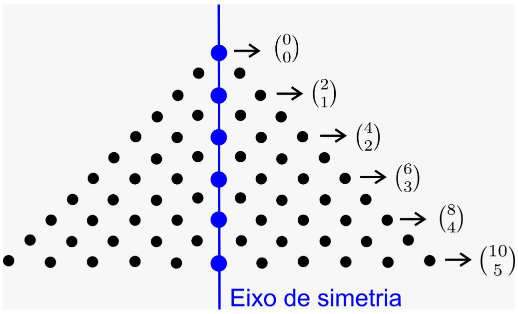


Figura 5.1: Eixo de simetria no Triângulo de Pascal
Fonte: Autora

Tomaremos como exemplo o octógono cujo centro não é um ponto do Triângulo de Pascal com vértices em $\binom{5}{2}, \binom{5}{3}, \binom{6}{4}, \binom{8}{5}, \binom{9}{5}, \binom{9}{4}, \binom{8}{3}, \binom{6}{2}$.

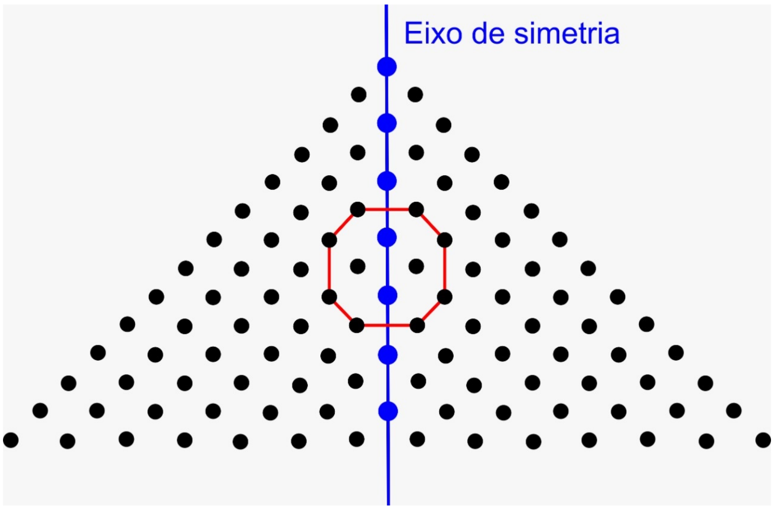


Figura 5.2: Octógono simétrico no Triângulo de Pascal
Fonte:Autora

Assim temos:

$$\binom{5}{2}\cdot\binom{6}{2}\cdot\binom{8}{3}\cdot\binom{9}{4}=\binom{5}{3}\cdot\binom{6}{4}\cdot\binom{8}{5}\cdot\binom{9}{5},$$

pois os vértices simétricos são binomiais complementares.

Observemos que a propriedade descrita por Hoggatt e Hansell vale para o octógono acima, cada quatro binomiais não consecutivos possui produto constante.

$$\binom{5}{2}\binom{6}{4}\binom{9}{5}\binom{8}{3}=\binom{5}{3}\binom{8}{5}\binom{9}{4}\binom{6}{2}=\binom{6}{4}\binom{9}{5}\binom{8}{3}\binom{5}{2}=...=\binom{6}{2}\binom{5}{3}\binom{8}{5}\binom{9}{4}.$$

Consideramo,s iniciamente, um polígono com eixo de simetria nos elementos $\binom{2n}{n}$ para que fique mais fácil a visualização dos binomiais complementares. Esses polígonos podem ser movidos para a direita, esquerda, para cima ou para baixo de modo que seus vértices se mantenham como pontos no Triângulo de Pascal. Temos que o produto dos n vértices de um polígono se mantém constante.

6 Interdisciplinaridade para ampliar o ensino do Triângulo de Pascal

Em um contexto mais amplo, muito tem se falado e discutido sobre a interdisciplinaridade. Quais são as vantagens, as dificuldades e se de fato os objetivos serão alcançados. Não há o que discutir: em uma mesma sala de aula temos alunos com interesses nas diversas áreas do conhecimento. Tornou-se normal e corriqueiro ver alunos com notas mais altas em Biologia e não tão altas em História, um aluno falar que prefere Português mas que não gosta de Matemática. Unir disciplinas diferentes em um único contexto é um caminho para atrair aquele aluno que não se interessa tanto por Matemática e, naturalmente, ampliar a visão do aluno com facilidade na disciplina. A defasagem em Matemática é algo real nas escolas brasileiras, mas pode ser mudada ou diminuída. Realmente, é complicado para um professor que, ao início no ano letivo, recebe alunos que não foram seus em séries anteriores. Para o professor da rede pública, torna-se mais evidente essa dificuldade, pois são alunos com conhecimentos, experiências e contextos sociais distintos. Não existem mais turmas homogêneas e, portanto, o professor deve procurar caminhos para alcançar todos os alunos e explorar as suas diversas capacidades. Quando temos um tema para trabalhar, ficamos engessados em passar o conteúdo, explicar conceitos básicos e repetir exercícios que, muitas vezes, são parecidos, para que, posteriormente, os alunos os reproduzam em uma prova escrita. Quando introduzimos um conteúdo como o Triângulo de Pascal, a parte histórica do assunto é importante pois amplia a visão sobre o objeto estudado (ROQUE; CARVALHO, 2012). O livro Tópicos de História da Matemática de João Bosco Pitombeira e Tatiana Marins Roque, coleção PROFMAT, é uma excelente sugestão de leitura para o entendimento de como conceitos históricos podem auxiliar no ensino da Matemática, fazendo o obscuro, se tornar um pouco mais leve. O Triângulo de Pascal possui muitas propriedades que não podem ser abandonadas. Trabalhar com essas propriedades e apresentá-las de uma maneira formal é de extrema importância. Entender como essas propriedades funcionam e encontrar uma forma de assimilar o conteúdo facilita, posteriormente, no trabalho com o Binômio de Newton no cálculo de probabilidades. Além da maneiras práticas de trabalhar com um conteúdo, sugerimos mais um caminho que é a interdisciplinaridade, metodologia que integra tanto alunos quanto professores. Juares Thiesen em seu artigo (THIESEN, 2008) A interdisciplinaridade como um movimento articulador no processo ensino-aprendizagem, afirma que a interdisciplinaridade aparece com mais força no campo das Ciências Humanas e Sociais e que o professor deve ter uma visão integrada à realidade, compreendendo que uma única área do conhecimento não é o suficiente para a formação do aluno. A interdisciplinaridade consiste em encontrar relações entre duas ou mais disciplinas para aprimorar o conhecimento, para que seja mais sólido o caminho entre o ensinar e o saber. Durante o planejamento das aulas, devemos ficar atentos não só ao conteúdo programático de Matemática, mas incluir uma pesquisa ou conversa com os professores das demais áreas para encontrar assuntos que podem parecer distintos mas se aproximam em determinado momento. Em vários momentos, citamos objetos de estudos de outras áreas mas que, em junção com a Matemática, podem ser extremamente satisfatórios. Quando introduzimos o Triângulo de Pascal e visualizamos que ele possui padrões que se repetem nas linhas e nas colunas, é fundamental frisar a simetria entre os termos equidistantes fazendo do triângulo uma figura simétrica. Temos que a simetria é estudada tanto nos conteúdos de Geometria quanto nos de Artes. Em Artes, a simetria é definida na forma harmônica de objetos e, no campo estético, confere beleza ao que vemos. Podemos fazer a junção desses conteúdos tendo como elo a propriedade da Estrela de Davi, figura totalmente simétrica e que também é objeto de estudo no ensino Religioso, na Filosofia e na História. Em ensino Religioso e Filosofia, a Estrela de Davi ou, simplesmente, um hexagrama, aparece em vários contextos como, por exemplo, na união de dois opostos - o visível e o invisível - e na alquimia do fogo e da água. Mesmo aparecendo em tantos contextos diferentes e em um passado não tão antigo, temos a Estela de Davi como um dos símbolo do genocídio de cerca de seis milhões de judeus.(KLÜGER, 2005) Conhecer erros do passado nos possibilita melhorar nosso presente e consertar nosso futuro. Tornaremos, de fato, o aluno como sujeito principal da comunidade escolar tendo como único objetivo o seu conhecimento. Contrariando as afirmações que a interdisciplinaridade é alvo apenas das Ciências Humanas, podemos, sim, integrá-la à Matemática. Uma boa conversa e um bom planejamento entre professores é uma bom caminho para que isso aconteça.

6.1 Sugestão de Plano de Aula

O planejamento das aulas é uma das etapas mais importantes no processo do ensino e deve ser feito de acordo com os parâmetros da BNCC (Base Nacional Comum Curricular). Como constantemente passamos por reformas no currículo escolar, conteúdos são retirados ou acrescentados, o que exige que o professor faça constantes reformulações em suas aulas. O planejamento é uma forma de organizar conteúdos, planejar a execução e, com base nele, fazer suas avaliações. Durante a execução de um planejamento, o professor consegue visualizar melhor como foi o interesse do aluno pela aula e, consequentemente, prever os resultados posteriores. Devemos lembrar que nem toda ação planejada ocorre como esperamos mas, mesmo que os resultados não sejam satisfatórios, podemos inserir um novo planejamento de intervenção. O PIP (Plano de Intervenção Pedagógico) da escola ou do professor deve ser executado toda vez que um ou mais alunos não alcançarem o resultado esperado em determinada avaliação. Quando falamos de avaliações, não estamos considerando apenas a avaliação formal e escrita. Nossos alunos, constantemente, passam por avaliações e conhecer o sistema de avaliação da educação básica é fundamental. Mauro Luiz Rabelo, em seu livro Avaliação Educacional: fundamentos, metodologia e aplicações no contexto brasileiro, apresenta uma síntese dessas avaliações (RABELO, 2013). Hoje procuramos avaliar um aluno de diversas formas e temos que considerá-las todas de extrema importância uma vez que temos alunos com capacidades e interesses distintos. A primeira etapa para o planejamento é a necessidade de conhecer os eixos temáticos a serem trabalhados e os assuntos correlacionados. Fazendo uma analogia com este trabalho temos como tema:

Contagem que devemos dividir nos seguintes tópicos:

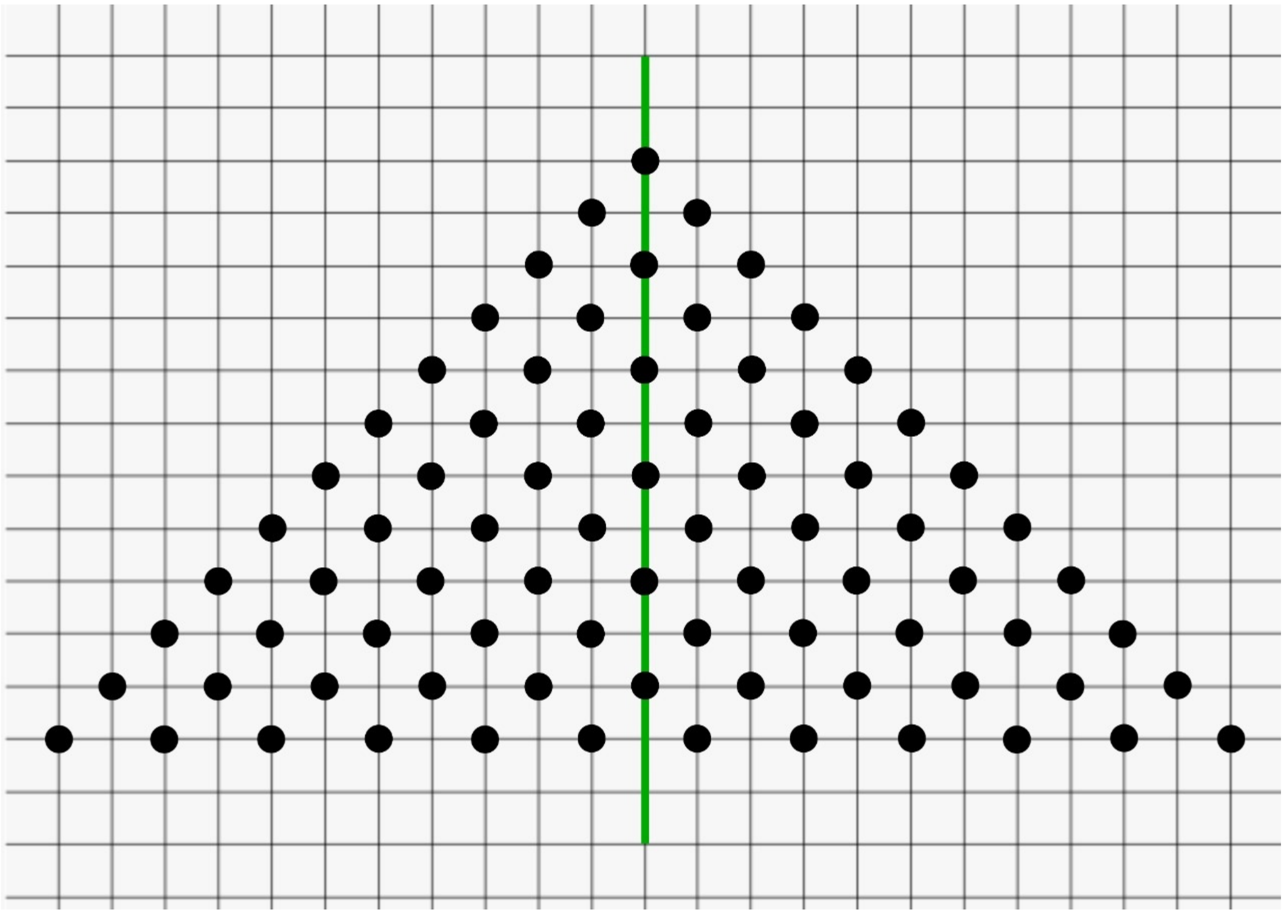
Fatorial de um número

Combinações

Triângulo de Pascal e suas propriedades

Cada um desses tópicos necessita de um ou mais planejamentos diferentes. O planejamento pode ser feito por tópico ou de acordo com a necessidade do número de aulas. Uma vez que apresentamos várias propriedades dentro do Triângulo de Pascal, há uma necessidade de prever o número de aulas necessárias para trabalhar com todas para que não seja ultrapassada a carga horária obrigatória da série de ensino e que todo conteúdo programático anual seja terminado.

Plano de Aula Figuras simétricas no triângulo de Pascal	
Conteúdo:	Matemática
Série de ensino:	2º, 3º anos E.M.
Eixo temático:	IV e VII (Números, Contagem e Análise de Dados)
Tema:	Contagem
Tópicos:	20- Arranjos, combinações e permutações sem repetições. 39- Triângulo de Pascal
Habilidades:	20.2- Resolver problemas que envolvam combinações. 39.9 Utilizar propriedades combinatórias dos números binomiais.
Assunto correlacionado:	Simetria
Interdisciplinaridade:	História, Artes e Ensino Religioso
Objetivos:	Fazer com que o aluno entenda o conceito de simetria aplicada no Triângulo de Pascal. Fixar o cálculo de números binomiais e propriedades como as dos termos equidistantes em uma linha no triângulo e binomiais complementares.
Materiais:	Papel quadriculado, lápis de cor e régua
Desenvolvimento:	Deve-se trabalhar de maneira primária com os números binomiais, com o triângulo de Pascal e suas propriedades. Durante a aula apresentar a propriedade da Estrela de Davi. De maneira interdisciplinar e anterior a essa aula; os conceitos de simetria em Artes e o Holocausto ocorrido na Segunda Guerra mundial, em História, e a simbologia da Estela de Davi em Ensino Religioso podem ser trabalhados. O aluno deve desenhar o triângulo de Pascal na folha quadriculada, usando apenas pontos. O aluno deve criar, a sua maneira, uma figura simétrica e posicioná-la no triângulo. Para facilitar o posicionamento, o desenho deve ser formado por linhas retas. Deve-se ter cuidado para que os pontos do triângulo coincidam com os vértices do desenho. Identificar qual coeficiente binomial $\binom{n}{p}$ representa cada ponto, fazer o cálculo desse valor utilizando $\binom{n}{p} = \frac{n!}{(n-p)!p!}$ e verificar a relação como feito na estrela de Davi.
Sugestão:	Pedir ao aluno para ampliar ou reduzir o desenho se possível.



Outra sugestão de atividade, mas totalmente similar à proposta, é trabalhar com a propriedades do Deslizamento e da Reflexão. Há a necessidade de definir o peso do retângulo, ou qualquer outro paralelogramo. O aluno pode posicionar da forma que preferir seus vértices no Triângulo de Pascal e em seguida fazer seu deslizamento ou a reflexão e verificar que o peso se mantém. Devemos ficar atentos ao modo de avaliação, uma vez que uma atividade diferenciada tem como objetivo principal atrair a atenção daqueles não estão interessados na Matemática. Alunos que, naturalmente, possuem mais facilidade e interesse ficam encantados, por exemplo, em verificar, usando a hipótese de indução, que a soma de dois números triangulares é um número quadrado perfeito. A avaliação pode ser feita tanto na forma escrita quando em formato de participação. Avaliar a participação do aluno na aula e se aqueles que não possuem tanto interesse ou possuem mais dificuldade obtiveram algum avanço é tão importante quanto uma nota alta ao final da etapa.

7 Considerações Finais

A interdisciplinaridade ainda é uma metodologia de ensino não muito usada e difundida nas aulas. Correlacionar disciplinas afins, como Matemática e Física, Matemática e Química ou Matemática e Biologia, é mais natural. Ficamos, então, com uma nova sugestão: a Interdisciplinaridade entre conteúdos de Matemática, História, Ensino Religioso e Artes. Quando trabalhamos apenas com números binomiais, Triângulo de Pascal e suas propriedades, pode parecer não interessante aos olhos de alguns. Temos mais uma função da interdisciplinaridade que é atrair a atenção de pessoas com interesses em diferentes áreas do conhecimento. Observem, também, que, nos livros didáticos, não há muitos exercícios diferentes que abrangem o Triângulo Aritmético. Observando o exemplo de um exercício tirado de um livro fornecido nas redes públicas de ensino:

Um sistema com 7 holofotes enfileirados foi instalado na cabeceira de uma pista de aviões. Cada holofote pode estar aceso ou apagado. Quantos sinais diferentes esse sistema pode enviar aos aviões que se aproximam do aeroporto?

Trabalhar com as propriedades de números binomiais e do Triângulo de Pascal, mostrando a lógica que há em sua formação, facilita ao aluno associar a resolução do problema com a linha sete do Triângulo de Pascal. Pode levar o aluno a questionar o problema e suas possíveis soluções: temos um sistema com 7 holofotes mas, e se todos falharem? Temos um sistema com 7 holofotes mas posso ter apenas um funcionando? Qual deles? Mas, se apenas dois funcionarem? Como posso contar essa possibilidade?

$$\binom{7}{0}\binom{7}{1}\binom{7}{2}\binom{7}{3}\binom{7}{4}\binom{7}{5}\binom{7}{6}\binom{7}{7}.$$

Associando a solução do problema com uma linha do Triângulo de Pascal e fixando a simetria que há entre os termos equidistantes, fica mais fácil resolver o problema, uma vez que não será necessário calcular todos os oito termos dessa linha. Fica, assim, com a solução 1+ 7+ 21 + 35 + 35 + 21 + 7 + 1 -1, ora se acontecer $\binom{7}{0} = 1$ não haverá nenhum holofote aceso, e, portanto. nenhum sinal. A simetrias devem ficar claras para que, em uma possível interdisciplinaridade com artes, o aluno possa criar suas figuras dentro do Triângulo de Pascal e verificar a extensão do Teorema da Estrela de Davi. A Estrela de Davi é um grande objeto para a interdisciplinaridade. Não basta apenas que o professor saiba todas as propriedades dos números binomiais e do Triângulo de Pascal, não basta apenas saber demonstrá-las com maestria; é preciso encontrar caminhos para que esse nosso conhecimento seja passado para o alunos, lembrando que cada um deles tem um modo e um tempo certo para aprender.

Referências

GERAIS, M. Conteúdo básico comum. *Proposta Curricular: Matemática, Ensino Fundamental*, 2007.

GIANELLA, R. O lúdico na teoria dos jogos. *Scientific American Brasil*, n. 10, p. 36–43, 2003.

HILTON, P.; PEDERSEN, J. Looking into pascal's triangle: Combinatorics, arithmetic, and geometry. *Mathematics Magazine*, Taylor & Francis, v. 60, n. 5, p. 305–316, 1987.

KLÜGER, R. *Paisagens da memória: autobiografia de uma sobrevivente do Holocausto*. [S.l.]: Editora 34, 2005.

LEXICON, H. *Dicionário de símbolos*. [S.l.]: Editora Cultrix, 1998.

LIMA, E. L. et al. *Temas e problemas elementares*. [S.l.]: Sociedade Brasileira de Matematica, 2005.

MORAES, F. C. d. *Blaise Pascal: a ciência diante da incerteza*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2011.

QUEIROZ, D. de M.; DRUMMOND, J. M. H. F. Blaise pascal (1623-1662), um humano: recorte biográfico e proposta para a formação docente. *Caderno Brasileiro de Ensino de Física*, Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), v. 36, n. 2, p. 457–489, 2019.

RABELO, M. Avaliação educacional: fundamentos, metodologia e aplicações no contexto brasileiro. *Rio de janeiro: SBM*, v. 29, p. 30–31, 2013.

ROQUE, T.; CARVALHO, J. B. P. de. *Tópicos de história da matemática*. [S.l.]: Sociedade Brasileira de Matemática, 2012.

SCHUBRING, G. Gauss e a tábua dos logaritmos. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, v. 11, n. 3, p. 383–412, 2008.

THIESEN, J. d. S. A interdisciplinaridade como um movimento articulador no processo ensino-aprendizagem. *Revista brasileira de educação*, SciELO Brasil, v. 13, p. 545–554, 2008.