



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO JOÃO DEL-REI  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA  
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA -  
PROFMAT**

**THAIS PRESOTTI DE ALMEIDA MACHADO**

**MODELAGEM MATEMÁTICA PARA  
PROFESSORES: UMA ABORDAGEM PRÁTICA  
PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA  
APLICÁVEL**

**São João Del-Rei  
2021**

# TERMO DE APROVAÇÃO

**Thais Presotti de Almeida Machado**

## **MODELAGEM MATEMÁTICA PARA PROFESSORES: UMA ABORDAGEM PRÁTICA PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA APLICÁVEL**

Dissertação a ser APROVADA como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática no Curso de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), da Universidade Federal de São João del-Rei (Campus Santo Antônio) pela seguinte banca examinadora:

---

Prof. Dr. José Angel Dávalos Chuquipoma (**Orientador**)  
UFSJ - Universidade Federal de São João del-Rei

---

Prof. Dr. Juan Carlos Zavaleta Aguilar (*Avaliador local*)  
UFSJ - Universidade Federal de São João del-Rei

---

Prof. Dr. Cosme Eustaquio Rubio Mercedes (*Avaliador externo*)  
Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul -UEMS

**São João del-Rei, 29 de junho de 2021.**

# Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus por me presentear com esta oportunidade.

A toda minha família, em especial minha mãe, Sirlene, por ser minha maior incentivadora, dando-me força nos momentos de desânimo.

Aos meus colegas de curso.

Ao meu orientador, Dávalos, que teve papel fundamental na elaboração deste trabalho, agradeço toda sua compreensão e paciência.

À memória de meu pai, Antônio Alberto,  
que sempre foi minha maior inspiração.

## RESUMO

Este trabalho tem como principal objetivo fazer uma reflexão sobre o uso da modelagem matemática como ferramenta didática. Usá-la como uma alternativa de metodologia ativa para o ensino de matemática na educação básica, buscando colocar o aluno como protagonista na construção de seu conhecimento. Através da interpretação matemática de problemas reais, tentamos fundamentar o processo de ensino-aprendizagem. O professor de matemática é convidado a verificar como pode ser feita a construção de um modelo matemático durante sua prática docente diante de dois exemplos destinados ao ensino médio: a modelagem das tarifas de telefonia móvel e a modelagem da propagação dos casos de COVID-19 no Brasil.

**Palavras-chave:** modelagem matemática, ensino de matemática, tarifas de telefonia móvel, propagação dos casos de COVID-19 no Brasil.

## ABSTRACT

The main objective of this work is to reflect on the use of mathematical modeling as a didactic tool. We present it as an alternative active methodology for teaching mathematics in basic education, seeking to place the student as a protagonist in the construction of their knowledge. Through the mathematical interpretation of real problems, we try to support the teaching-learning process. The mathematics teacher is invited to verify how the construction of a mathematical model can be done during his teaching practice, in view of two examples for secondary education: the modeling of mobile phone rates and the modeling of the propagation of COVID-19 cases in the Brazil.

**Keywords:** mathematical modeling, mathematics teaching, mobile phone rates, propagation of COVID-19 cases in Brazil.

# Lista de Figuras

1.1	Processo da Modelagem Matemática. Fonte: BEIMBENGUT; HEIN, 2005, p. 13 . . . . .	14
1.2	Ajuste Linear. (CHUQUIPOMA, 2012). . . . .	18
1.3	Função de Tipo Exponencial. . . . .	20
3.1	Preços de tarifas por cada plano. . . . .	36
3.2	Taxa de crescimento. . . . .	36
3.3	Gráfico de barras do total das unidades tarifárias cobradas. . . . .	40
3.4	Gráfico linear do total das unidades tarifárias cobradas. . . . .	41
3.5	Duração das chamadas. . . . .	41
3.6	Gráfico de tendências acumuladas cobradas. . . . .	43
3.7	Gráfico da função custo (3.15) do Plano A. . . . .	46
3.8	Gráfico da função custo (3.16) do Plano B. . . . .	47
3.9	Gráfico da função custo (3.17) do Plano C. . . . .	47
3.10	Gráfico da função custo (3.18) do Plano D. . . . .	48
3.11	Comparativo de vantagens e desvantagens dos planos A, B, C e D . . . . .	50
3.12	Simulação do valor das contas de acordo com o uso de políticas de arredondamento nos planos A e B . . . . .	52
3.13	Comparativo de vantagens e desvantagens dos planos A, B, C e D . . . . .	53
4.1	Casos de pessoas infectadas pelo COVID-19 no Brasil. . . . .	62
4.2	Início do processo de pessoas infectadas pelo COVID-19. . . . .	63
4.3	Início do processo de pessoas infectadas pelo COVID-19. . . . .	63
4.4	Escala Logarítmica do número de casos de COVID-19 no Brasil. . . . .	65
4.5	Análise do crescimento do número de casos de COVID-19 no Brasil entre os dias 12/03 e 04/04. . . . .	66
4.6	Linha de regressão do número de casos de COVID-19 no Brasil entre os dias 12/03 e 04/04. . . . .	67
4.7	Previsão do número de casos de COVID-19 através da linha de regressão. . . . .	68

4.8	O fator de crescimento. . . . .	70
4.9	Crescimento acima do 15% do caso anterior. . . . .	70
4.10	Crescimento no ponto de inflexão, variação 432. . . . .	71
4.11	Processo de infecção em agrupações de comunidades. . . . .	72

# Lista de Tabelas

3.1	Preço pago em cada plano. . . . .	33
3.2	Duração das chamadas telefônicas. . . . .	37
3.3	Arredondamento em cada ligação. . . . .	38
4.1	Números de pessoas infectadas pelo coronavírus no Brasil entre fevereiro e julho de 2020 . . . . .	58
4.2	Aumento do número de casos de COVID-19 no Brasil . . . . .	64

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>11</b>
<b>1 Modelagem Matemática: definições e abordagens</b>	<b>13</b>
1.1 Modelagem Matemática . . . . .	13
1.2 Etapas da Modelagem Matemática . . . . .	14
1.3 Definições e Abordagens . . . . .	16
<b>2 Modelagem Matemática para Professores</b>	<b>25</b>
2.1 Modelagem Matemática para Professores . . . . .	25
2.2 Modelagem Matemática no ensino . . . . .	28
<b>3 Modelagem Matemática: Análise das Tarifas de Celulares</b>	<b>31</b>
3.1 Formulação do Problema . . . . .	31
3.2 Situação do Problema . . . . .	32
3.3 Hipóteses de Simplificação . . . . .	32
3.3.1 Coleta de Dados . . . . .	32
3.4 Solução do Problema . . . . .	33
3.4.1 Primeiro Caso: Custo do Plano em função do tempo . . . . .	34
3.4.2 Segundo Caso: Presença de Políticas de Arredondamento . . . . .	37
3.4.3 Terceiro Caso: Custo em função das chamadas e do consumo de dados	43
3.5 Avaliação dos Resultados . . . . .	49
3.5.1 Primeiro Caso . . . . .	49
3.5.2 Segundo Caso . . . . .	51
3.5.3 Terceiro Caso . . . . .	52
3.6 Tomada de Decisão . . . . .	52
<b>4 Modelagem Matemática: Crescimento Exponencial e Epidemiologia</b>	<b>55</b>
4.1 Formulação do Problema . . . . .	55
4.2 Situação do Problema . . . . .	56

4.2.1	Coleta de Dados: . . . . .	56
4.3	Solução do Problema . . . . .	57
<b>5</b>	<b>Considerações Finais</b>	<b>74</b>

# Introdução

O ensino de matemática no Brasil possui certas deficiências e os resultados nas avaliações apontam que a maioria dos jovens conclui o ensino básico sem os conhecimentos adequados na disciplina, resultados de um sistema educacional que ainda tem muito a melhorar e que sofre um declínio com o passar dos anos. Professores desvalorizados e mal preparados desde a sua formação, a utilização de metodologias que precisam ser atualizadas com a finalidade de prender a atenção de uma geração com acesso a muita informação, o desinteresse generalizado dos alunos com a educação e principalmente com a matemática e falta de acompanhamento familiar são alguns dos fatores que influenciam a atual situação.

O Programa Internacional de Avaliação de estudantes (PISA) é um importante indicador da qualidade da educação dos países que participam. O Brasil aparece entre os 20 piores colocados, indicando um resultado ruim, que deve servir de reflexão e orientar a busca por políticas de melhoria do ensino básico. A matemática é essencial para a formação integral e desenvolvimento cognitivo. Como nos mostra os Parâmetros Curriculares Nacionais:

[...] a matemática pode dar sua contribuição à formação do cidadão ao desenvolver metodologias que enfatizem a construção de estratégias, a comprovação e justificativa de resultados, a criatividade, a iniciativa pessoal, o trabalho coletivo e a autonomia advinda da confiança na própria capacidade para enfrentar desafios. (PCN, 1998)

Por este motivo, deve-se estimular o seu aprendizado. Para isso, faz-se necessária uma mudança generalizada na base educacional brasileira. É preciso formar pessoas com pensamento crítico e capazes de refletir sobre a realidade. O desafio é usar metodologias que despertem interesse e motivem os alunos a estudar esta ciência. Para isso, é preciso conscientizar os professores sobre o uso de métodos que aproximem a matemática da realidade. Incentivá-los a conduzir as aulas de matemática aplicada e confiar na sua capacidade de fazê-lo.

Para Costa (2018),

Modelagem matemática pode ser compreendida como uma metodologia de ensino que possibilita ao estudante abordar conteúdos matemáticos a partir de fenômenos de sua realidade.(COSTA; IGLIORI, 2018)

A modelagem matemática influencia positivamente o aluno no estudo da disciplina e contribui para uma melhoria na qualidade da educação. Sendo assim, a intenção

desse trabalho é estimular o uso da modelagem matemática por professores e alunos durante as aulas, ou seja, o uso da realidade como base da construção do conhecimento. Assim, organizamos esse trabalho em 4 capítulos.

No Capítulo 1, abordamos o processo da modelagem matemática e suas etapas, apresentamos algumas definições e resultados usados em nosso trabalho. O Capítulo 2 convida o professor a fazer uma reflexão sobre a utilização da modelagem como uma ferramenta didática possível para sua prática docente. Enfatizamos a importância do uso da modelagem como metodologia de ensino, ativa e dinâmica, na motivação e aprendizado do aluno.

Os Capítulos 3 e 4 apresentam problemas concretos da realidade que podem ser formulados e estudados do ponto de vista da modelagem matemática. A intenção inicial era trabalhar estes problemas nas aulas de matemática do ensino básico, mas a pandemia nos limitou e esta prática não foi possível no momento. O Capítulo 3 faz uma análise das tarifas de telefonia móvel e reflete sobre a importância de verificar como as cobranças são realizadas para escolher um plano mais adequado para cada perfil de usuário, aproveitamos as ideias desenvolvidas no livro de Mass et al., (2108) e aplicamos o processo de modelagem de tarifas telefônicas de acordo com a realidade do Brasil. No Capítulo 4, trabalhamos a modelagem matemática do crescimento do número de casos de COVID-19 no Brasil, no qual é feito uma análise do crescimento exponencial e sua influência nos problemas de epidemiologia. Nesses dois capítulos, fazemos a construção de modelos levando em consideração as ferramentas matemáticas de alunos do ensino médio, deixando o rigor matemático para dar foco no entendimento do processo da modelagem e sua aplicação.

# Capítulo 1

## Modelagem Matemática: definições e abordagens

Neste capítulo, abordamos o processo de modelagem matemática, visando a compreensão desse conceito de maneira ampla e enfatizando as etapas do processo.

### 1.1 Modelagem Matemática

A modelagem é a área do conhecimento que traduz (ou tenta traduzir) fenômenos ou situações reais em linguagem matemática. Durante o processo, a criação de um modelo irá descrever a situação real ou fenômeno e servirá para prever o comportamento de variáveis envolvidas nele.

Para Bassanezi (1994),

modelagem matemática é um processo que consiste em traduzir uma situação real ou tema do meio em que vivemos para uma linguagem matemática. Essa linguagem que denominamos modelo matemático, pressupõe um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam o fenômeno em questão. (BASSANEZI, 1994)

Dessa forma, a modelagem é essencial para o desenvolvimento de vários campos, como química, física, economia e engenharias, pois os modelos desenvolvidos simulam as situações reais e garantem a compreensão e melhor interpretação do problema que está sendo analisado. O processo de modelagem parte de um problema do mundo real, e através de várias análises e manipulações matemáticas, traz significativas conclusões para se chegar a solução.

A descoberta e o desenvolvimento da matemática foram e são baseados e estimulados pela necessidade da humanidade, ou seja, à medida que surgiam problemas no

mundo real, percebia-se a necessidade de melhor compreendê-los, e nessas tentativas de interpretar as situações reais, novas ferramentas matemáticas foram e são descobertas. A partir de problemas encontrados ao decorrer dos anos eram necessários novos conceitos matemáticos capazes de sanar os questionamentos levantados. Sendo assim, a modelagem e a matemática estão entrelaçadas.

Várias situações do mundo real apresentam problemas que precisam de solução e podem ser interpretados matematicamente. Alguns podem ser resolvidos apenas com a matemática básica, como, por exemplo, o preço a ser pago por um serviço de plano de telefonia móvel. Já outros, como os modelos epidemiológicos, vão requerer técnicas de matemática avançadas, pois envolvem, por exemplo, sistema de equações diferenciais, porém é possível construir modelos usando ferramentas matemáticas em um nível de ensino básico. Assim, a modelagem é um meio de unir a realidade e a matemática através do modelo, isso pode ser visto na figura a seguir:

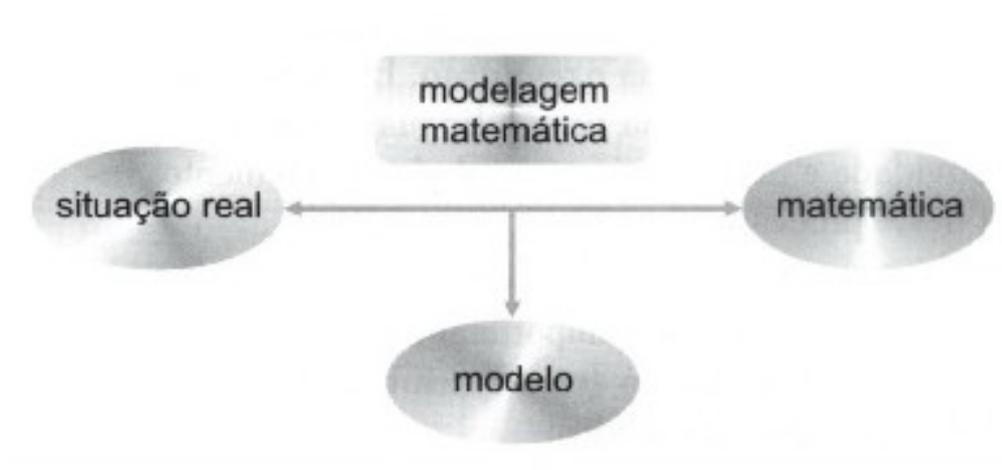


Figura 1.1: Processo da Modelagem Matemática. Fonte: BEIMBENGUT; HEIN, 2005, p. 13

## 1.2 Etapas da Modelagem Matemática

Após ter entendido o conceito de modelagem matemática como um processo de interpretar problemas do cotidiano através de modelos matemáticos, aparece de forma natural a questão: *como é que podemos confrontar problemas do mundo real com modelos que possam interpretar tais problemas?* Para responder essa pergunta, é necessário

entender em que consiste esse processo. A seguir, de acordo com Bassanezi (1994) e Chuquipoma (2012), explicaremos as etapas ou momentos que devem ser considerados na modelagem.

**Primeira Etapa:** A primeira etapa do processo da modelagem matemática consiste em reconhecer a relevância de um problema real, no sentido de ser significativo, isto é, *determinar a situação do problema* a ser modelado, quer dizer, determinar seu fator de impacto no mundo real. O fator de impacto pode ser medido como consequência de futuros trabalhos ou problemas que melhorem esses primeiros resultados.

**Exemplo 1.** Quando queremos diminuir a quantidade de pessoas infectadas por algum vírus, isso constitui um problema de impacto na sociedade de um determinado país, que exige significação, avaliação e crítica. Desta forma o problema é significativo.

**Segunda Etapa:** Determinada a situação do problema, a segunda etapa da modelagem exige hipóteses de *simplificação*, ou seja, devemos conhecer o problema e simplificá-lo, não simplificando o problema real e, sim, introduzindo hipóteses que simplifiquem sua abordagem. Essa simplificação serve para nos familiarizarmos com o problema, para entendermos a essência do mesmo, conhecermos a forma de resolver e depois irmos modificando o modelo até encontrarmos a modelagem mais próxima do problema real. Em conclusão, todo problema, nesta etapa deve ser tratado com um grau de simplificação para facilitar a resolução do modelo.

**Exemplo 2.** No caso do problema de impacto epidemiológico, o estudo pode ser feito através de diversas abordagens. Pode ser usado, como hipótese de simplificação, que o crescimento das pessoas infectadas em cada unidade de tempo é proporcional à própria população; desta forma é que simplificamos as hipóteses com o objetivo de poder fazer um estudo de forma clara.

**Terceira Etapa:** No passo seguinte do processo da modelagem, temos a terceira etapa, que consiste na *resolução do modelo* decorrente através de diversas áreas do conhecimento; nesta etapa é muito importante a aproximação do modelo a considerar. É então, que conseguimos estabelecer a rigidez das ferramentas matemáticas e dizer se depois de ter simplificado as hipóteses estamos em condições de poder resolver o modelo matemático. A necessidade de suplementar o conhecimento qualitativo sobre o funcionamento de sistemas reais por declarações quantitativas leva inevitavelmente ao desenvolvimento de modelos matemáticos diversos.

**Exemplo 3.** O modelo aproximado do problema epidemiológico é dado através de diversos enfoques matemáticos que aparecem na biologia e cuja resolução dependerá da situação do problema a modelar. Por exemplo, a resolução dependerá do tipo de variáveis, contínuas ou discretas, presentes no modelo, determinístico ou probabilístico, ou pelo tipo de crescimento, por exemplo, o exponencial.

**Quarta Etapa:** Na quarta etapa, temos a *avaliação das soluções* encontradas na etapa anterior de acordo com a questão real do problema a modelar. A avaliação tem por objetivo comparar os resultados obtidos da modelagem matemática (problema aproximado) com o problema real, assim, se o grau de proximidade é muito distante, o modelo matemático deve ser redefinido de forma a mudar a sua solução inicial a fim de se aproximar à solução do modelo real.

**Quinta Etapa:** Nesta quinta e última etapa da modelagem matemática, devemos ter em consideração a tomada de *decisão* com base nos resultados obtidos. É assim que, através da modelagem matemática, conseguimos obter melhores condições para decidir o que fazer frente a um fenômeno ou a uma situação real.

### 1.3 Definições e Abordagens

Nesta seção apresentaremos resultados e ferramentas matemáticas que usaremos no decorrer do trabalho. Alguns teoremas e demais resultados serão omitidos, para informações adicionais citaremos as referências nas quais as pessoas interessadas poderão estudar os detalhes. Seguimos as mesmas ideias de Chuquipoma (2012).

**Definição 1** (Ajuste de Curvas). *Um ajuste de curvas, ou às vezes chamada curva de regressão, é um conjunto de técnicas numéricas que tem por objetivo expressar alguma tendência da relação de duas grandezas. Em outras palavras, ajuste de curvas é um mecanismo ou artifício que fornece uma relação funcional de uma variável dependente  $y$  quando relacionada com a variável independente  $x$ .*

Um ajuste de curvas é muito útil para uma formulação simplificada dos dados ou também para uma verificação de alguma tendência entre as grandezas. Quando obtemos um conjunto de dados através de um processo de experimentação e desejamos obter um ajuste de curvas ou uma curva de regressão entre as variáveis que definem o problema, a priori, escolhemos a forma da curva que desejamos ajustar para poder expressar estas variáveis, isto implica que existe uma infinidade de curvas de regressão, portanto nem

toda relação funcional obtida representa um bom modelo matemático.

## O Método dos Mínimos Quadrados

Um dos métodos mais utilizados para estimação (aproximação) de parâmetros ou ajuste de curvas é denominado *método dos mínimos quadrados*, detalhado a seguir. De modo geral, consideramos as variáveis ou grandezas  $x$  e  $y$  que definem o fenômeno a analisar e que estão sujeitas a um conjunto de  $n$  medidas ou experimentos observados:

$$A = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)\} \quad (1.1)$$

e uma função  $f : \mathbb{R}^{k+1} \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $y(x) = f(x; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$ , onde  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$  são os parâmetros. O método dos mínimos quadrados consiste em determinar esses parâmetros de modo que se minimize o valor de

$$S(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) = \sum_{i=1}^n [f(x_i; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) - y_i]^2, \quad (1.2)$$

isto é, o método consiste em minimizar a soma dos quadrados de

$$\varepsilon_i = f(x; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) - y_i$$

entre os diversos valores de  $y_i$  observados e os valores  $y(x_i) = f(x_i; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$  ajustados. Os valores  $\varepsilon_i$  são chamados de **desvios**. Em seguida, locam-se esses pontos num plano cartesiano. O conjunto de pontos resultante é denominado **diagrama ou gráfico de dispersão**.

## Ajuste Linear

**Definição 2** (Ajuste Linear). *Suponhamos que as grandezas  $x$  e  $y$  cujas medidas são dadas por 1.1 se relacionem linearmente. Um ajuste de curvas é denominado linear, se a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é definida por*

$$f(x; a, b) = ax + b$$

Em outras palavras, um ajuste é linear se é definido pela equação da reta  $y(x) = ax + b$ , com  $a$  e  $b$  fixos. Assim, esta equação será a reta que melhor se ajusta aos pontos dados na equação (1.1) a qual se deseja determinar. A Figura 1.2 nos mostra a

representação gráfica do ajuste linear, nesta podemos observar que a reta  $y = ax + b$  é a que melhor se ajusta aos pontos  $\varepsilon_i$ . Devido a erros de medida, os valores  $(x_i, y_i)$ , pontos dados na equação (1.1) não necessariamente satisfazem exatamente à equação da reta, isto é,

$$y_i \cong ax_i + b.$$

Para que essa expressão se transforme numa igualdade, deveremos levar em conta os

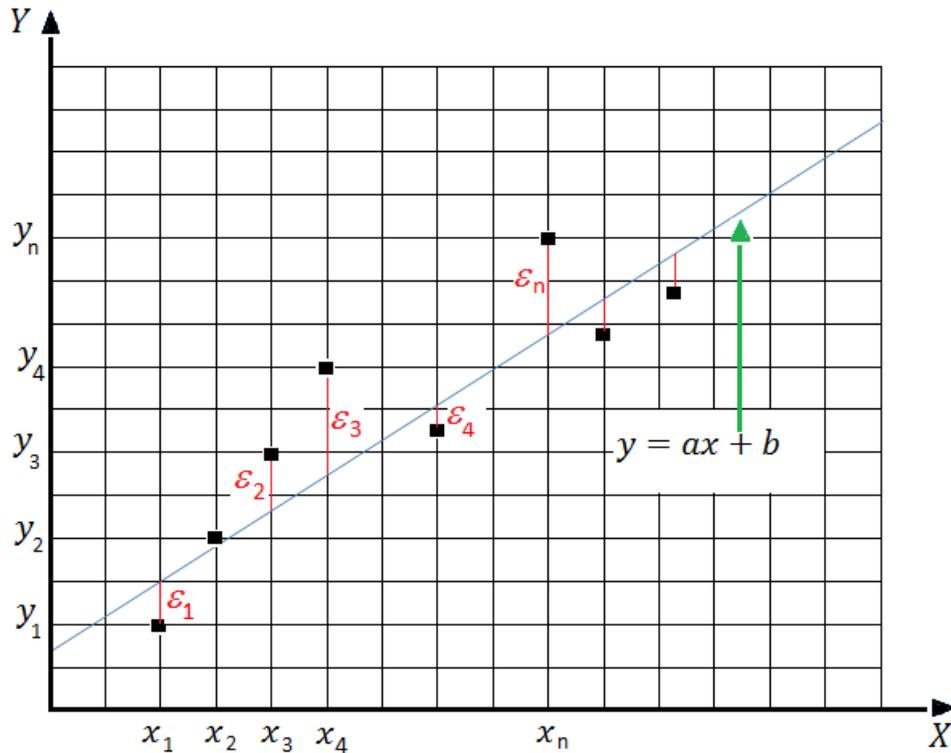


Figura 1.2: Ajuste Linear. (CHUQUIPOMA, 2012).

erros ou desvios  $\varepsilon_i$  cometidos na medida. Assim,

$$y_i = (ax_i + b) + \varepsilon_i.$$

Portanto,  $\varepsilon_i$  também depende de  $a$  e  $b$ ; ou seja;  $\varepsilon_i(a, b) = y_i - (ax_i + b)$ . A soma dos quadrados dos desvios é dado por

$$S(a, b) = \sum_{i=1}^n [y_i - ax_i - b]^2$$

Aplicando-se o Método dos Mínimos Quadrados, tem-se que os melhores valores para  $a$  e  $b$  (e portanto a melhor reta) são aqueles que minimizam  $S(a, b)$ . Como  $S$  é função de

duas quantidades  $a$  e  $b$ , as condições necessárias de mínimo são

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial S}{\partial b} = 0,$$

ou seja,

$$\frac{\partial S}{\partial a} = -2 \sum_{i=1}^n (x_i y_i - a x_i^2 - b x_i) = 0,$$

e

$$\frac{\partial S}{\partial b} = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - a x_i - b) = 0.$$

De onde obtemos as chamadas equações normais

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i = \sum_{i=1}^n (b x_i + a x_i^2) \quad (1.3)$$

$$\sum_{i=1}^n y_i = \sum_{i=1}^n (a x_i + b) \quad (1.4)$$

Resolvendo (1.3) e (1.4) simultaneamente, para  $a$  e  $b$  encontramos

$$a = \frac{\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n x_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n y_i \end{bmatrix} - n \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n x_i \end{bmatrix}^2 - n \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^2 \end{bmatrix}} \quad (1.5)$$

$$b = \frac{\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n x_i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n y_i \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n x_i \end{bmatrix}^2 - n \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^2 \end{bmatrix}} \quad (1.6)$$

Por outro lado, de (1.4) obtemos

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n y_i - a \sum_{i=1}^n x_i}{n}. \quad (1.7)$$

**Observação 1.** Um ajuste de curvas é não linear se a função  $f(x; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$  dada pelos mínimos quadrados não é uma reta. Ao fazer um ajuste linear para relacionar duas variáveis, não sabemos *a priori* se a reta encontrada é o melhor modelo de ajuste. A verificação da existência e do grau de relação entre variáveis é o objeto de estudo da

correlação que a seguir definimos.

**Definição 3** (Correlação Linear). *A correlação linear mede a relação que existe entre as variáveis  $(x_i, y_i)$  de um conjunto de dados em torno de uma reta ajustada  $y = ax + b$ .*

O coeficiente de correlação de Pearson  $r$  é um mecanismo de medida da correlação linear e é dado por

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - \frac{\left[ \sum_{i=1}^n x_i \right] \left[ \sum_{i=1}^n y_i \right]}{n}}{\left\{ \left[ \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^n x_i)^2}{n} \right] \left[ \sum_{i=1}^n y_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^n y_i)^2}{n} \right] \right\}^{1/2}}. \quad (1.8)$$

Verifica-se que  $r \in [-1, 1]$ . Se  $r$  está próximo de 1 ou  $-1$ , dizemos que a correlação é mais forte. Se  $r$  está próximo de zero, dizemos que a correlação é fraca. Se  $r = 1$  ou  $r = -1$ , então a correlação entre as variáveis é perfeita. Se  $r = 0$ , não existe nenhuma correlação. Por último, o sinal de  $r$  indica o sinal do coeficiente angular da reta ajustada.

## Ajuste Linear para o Modelo Exponencial

Suponhamos que a formulação de um modelo matemático é definida por meio de uma função de tipo exponencial (Figura 1.3)

$$y(x) = \beta e^{\alpha x}, \quad \beta > 0. \quad (1.9)$$

Fazendo a mudança de variável  $z = \ln y$  com o objetivo de transformar a equação que

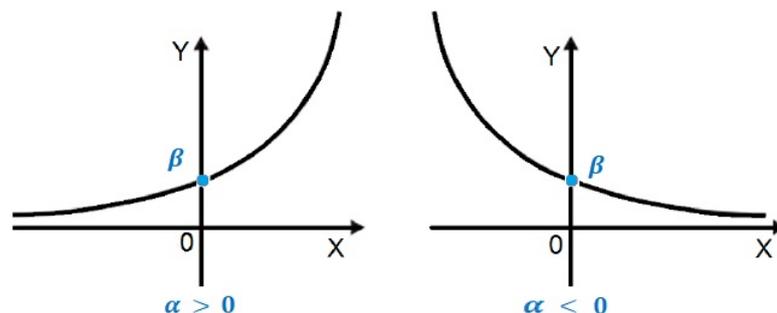


Figura 1.3: Função de Tipo Exponencial.

define o modelo (1.9) na forma de uma equação de uma reta, obtemos ao tomar logaritmos de ambos os lados de (1.9)

$$z(x) = \ln y = \alpha x + \ln \beta \quad (1.10)$$

Desta forma, podemos fazer um ajuste linear para o modelo exponencial, pois é mais fácil lidar com (1.10) do que com (1.9). Além disso, o estabelecimento da curva com dados empíricos e a análise dos desvios são extremamente facilitados. Portanto, tomando-se  $a = \alpha$  e  $b = \ln \beta$ , a equação da reta ajustada ou equação auxiliar é

$$z = ax + b.$$

## Variações

Como vimos anteriormente no processo da modelagem matemática, a obtenção de um modelo matemático que interpreta o problema a ser estudado constitui a parte mais complexa do processo. As relações de medida que existem entre as variáveis ou grandezas observadas que definem o problema (que não necessariamente são de caráter matemático) são a base para a obtenção da formulação do modelo matemático. Uma maneira de interpretar essas relações de medidas e em consequência obter um modelo matemático é dada pela *variação* ou *taxa de variação* dessas variáveis.

**Definição 4.** Entendemos por **variáveis** quaisquer grandezas que se modificam durante um processo dinâmico. O termo **parâmetro** se refere a quantidades que podem ou não mudar durante o processo dinâmico. As **constantes** são quantidades que não variam durante o processo e assumem valores fixados a priori.

A seguir, lembramos algumas definições da análise real.

**Definição 5** (Sequência de números reais). Uma sequência de números reais é um conjunto de pontos denotado por  $\{x_n\}$ , definidos por uma função  $f : X \subset \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ , cujo domínio é um subconjunto  $X$  dos números naturais  $\mathbb{N}$ , tal que  $x_n = f(x_n)$ . Quando este conjunto é finito, dizemos que a sequência é finita.

**Definição 6** (Conjunto Discreto e Variável discreta). Uma variável discreta é uma variável que toma valores isolados, ou seja, não admite valores intermediários entre dois valores específicos. O conjunto formado por valores de uma variável discreta é chamado de conjunto discreto.

Matematicamente, podemos aprofundar essa definição: dada uma sequência finita de números reais  $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ , cada elemento da sequência é chamado de *valor discreto*, e a variável  $x$  recebe o nome de *variável discreta*. O conjunto finito  $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$  formado por valores de uma variável discreta  $x$  é denominado *conjunto discreto*. Em outras palavras, um conjunto é discreto se existe uma correspondência bijetiva entre os elementos do conjunto e um subconjunto dos números naturais  $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ .

**Exemplo 4.** Se desejamos encontrar o número de pessoas infectadas por um vírus em cada dia  $d$ , durante um ano, devemos usar uma sequência finita  $N_d$  para representar o número de pessoas infectadas por um vírus em cada dia  $d$ , isto é,  $\{N_1, N_2, N_3, \dots, N_{365}\}$  é o conjunto discreto e o número de pessoas  $N$  é a variável discreta.

**Definição 7** (Variável Contínua). *Uma variável de um processo dinâmico é dita contínua se pode assumir valores entre dois números quaisquer do processo dinâmico.*

Em termos matemáticos podemos dar a seguinte interpretação: dada uma sequência finita de números reais  $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ , uma variável  $x$  é dita contínua se pode assumir todos os valores reais intermediários entre os valores discretos da sequência. Em outras palavras, uma variável que não é contínua será discreta.

**Exemplo 5.** em um experimento aleatório, observa-se que o peso das pessoas varia no intervalo  $[55.48, 80]$ , se  $\{x_1 = 55.48, x_2 = 56.91, x_3 = 58.0, \dots, x_9 = 80.0, \dots\}$  são os valores dados do peso de certas pessoas, qualquer valor da variável peso  $x$  pode ser assumido no intervalo  $[55.48, 80]$ ; logo, a variável peso é contínua neste intervalo.

Na prática, sequências finitas de números reais representam grandezas que estão envolvidas na modelagem matemática do problema e, portanto, constituem conjuntos discretos, isto é, no caso do peso das pessoas consideradas no Exemplo 5, então, é importante saber quando tais sequências interpretam variáveis contínuas.

**Observação 2.** Uma sequência finita  $\{x_n\}_{n=1}^k$  é um conjunto discreto de números reais, logo  $x$  é uma variável discreta, porém, se conseguimos representar a variável  $x = f(t)$  por uma função definida para todo  $t \in \mathbb{R}$ , então, na verdade,  $x$  e  $t$  serão variáveis contínuas.

**Definição 8** (Variação). *Seja  $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   $y = f(x)$  uma função que associa a cada variável independente  $x$  a variável dependente  $y$ . A variação de uma função  $f$  é definida como a medida do comportamento da função em relação a um estágio da variável independente  $x$ .*

As variações são de dois tipos: variações discretas e variações contínuas. A seguir estudaremos cada tipo de variação.

## Variações Discretas

Seja  $\Omega = \{y_1, y_2, y_3, \dots, y_n\}$  um conjunto discreto tal que a variável discreta  $y$  está em relação à grandeza  $x$  através da função  $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , isto é,  $y = f(x)$ ,  $\forall x \in A$ , sendo  $A$  subconjunto próprio de  $\mathbb{R}$ .

**Definição 9** (Variação Discreta). *Uma variação é discreta se os valores da imagem da função  $f$ , isto é,  $y = f(x)$  pertencem ao conjunto discreto  $\Omega$ .*

**Definição 10** (Variação Total). *A variação total ou às vezes chamada variação de  $y = f(x) \in \Omega$  em relação ao intervalo  $[x_1, x_2]$  é definida por*

$$\Delta y = y_2 - y_1 = f(x_2) - f(x_1) \quad (1.11)$$

$\Delta y$  também é chamado de incremento de  $y$ . Se  $\Delta y > 0$ , então a função  $f$  aumenta em tamanho; se  $\Delta y < 0$ ,  $f$  experimenta um decréscimo; se  $\Delta y = 0$ ,  $f$  é constante.

**Definição 11** (Taxa Média de Variação). *A taxa média de variação ou variação média de  $y = f(x) \in \Omega$  em relação  $x$  é definida por*

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \quad x_1 \neq x_2. \quad (1.12)$$

$\Delta x = x_2 - x_1$  é a extensão do intervalo  $[x_1, x_2]$ , também chamado de incremento da variável  $x$ . A taxa de variação média representa o incremento da função  $f$  em relação ao incremento da variável  $x$ . Outro tipo de medida variacional discreta aparece em particular na dinâmica populacional que a seguir definimos.

**Definição 12** (Taxa de Variação Relativa). *A taxa de variação relativa é a taxa de variação de uma população  $N = f(t) \in \Omega$  em que a variação depende somente do número de indivíduos presentes inicialmente e não de fatores que dependem do tempo. Temos os seguintes casos:*

i) *Taxa de Variação Relativa Média, que é definida por*

$$\alpha = \frac{\Delta N}{N_1 \Delta t} = \frac{N_2 - N_1}{N_1 \Delta t}, \quad N_1 = f(t_1), \quad N_2 = f(t_2)$$

ii) *Taxa de Variação Malthusiana, proveniente de um crescimento exponencial em cada unidade de tempo.*

$$\alpha = \sqrt[\Delta t]{\frac{N_{t+\Delta t}}{N_t}} - 1.$$

## Variações Contínuas

**Definição 13** (Variação Contínua). *Uma variação é contínua se os valores da imagem da função  $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , isto é  $y = f(x)$  são válidos para todo número real  $x \in A$ .*

**Observação 3.** *Observamos que uma variável contínua pode assumir valores em um conjunto discreto, isso significa que podemos generalizar as definições de variações do*

caso discreto para o caso de variações contínuas. Nesse sentido, omitiremos as definições de variações (total, média, relativa) para o caso contínuo.

**Definição 14** (Taxa de Variação Instantânea). *A taxa de variação instantânea no ponto  $x$  é a taxa de variação de uma função  $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  no ponto  $x$ , é dizer*

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right] = f'(x) \quad (1.13)$$

desde que exista o limite.

**Observação 4.** *A taxa de variação instantânea  $f'(x)$  é chamada de derivada da função  $f$  no ponto  $x$ , ela é o número real, cujos valores aproximados para valores muito pequenos de  $h$  são os quocientes  $[f(x+h) - f(x)]/h$ . A taxa de variação instantânea é o limite das taxas médias de variação.*

**Definição 15** (Grandeza proporcional a várias outras). *Sejam  $z, x, y, u, v$  e  $w$  grandezas tais que  $z$  está relacionada com as grandezas  $x, y, u, v, w$  através da função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^5, z = f(x, y, u, v, w)$ . Diz-se que  $z$  é diretamente (inversamente) proporcional a  $x$  quando:*

a) *Para quaisquer valores fixados  $y, u, v, w$ , a grandeza  $z$  é uma função crescente (decrecente) de  $x$ , isto é, a desigualdade  $x < x'$  implica*

$$f(x, y, u, v, w) < f(x', y, u, v, w), \quad (f(x, y, u, v, w) > f(x', y, u, v, w)).$$

b) *Para  $n \in \mathbb{N}$  e  $x, y, u, v, w$  quaisquer tem-se  $f(nx, y, u, v, w) = n \cdot f(x, y, u, v, w)$ .*

As demonstrações dos seguintes teoremas podem ser encontradas em Lima (2013).

**Teorema 1.** (Caracterização da Função Afim) *Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função crescente ou decrescente. Se o acréscimo o variação de  $f, f(x+h) - f(x)$  depender apenas do acréscimo  $h$  de  $x$  e não de  $x$ , então  $f$  é uma função afim. (LIMA, 2013)*

**Teorema 2.** (Caracterização da Função Exponencial) *Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  uma função crescente ou decrescente tal que, para cada  $x, h \in \mathbb{R}$  quaisquer, a variação relativa  $[f(x+h) - f(x)]/f(x)$  dependa apenas de  $h$ , mas não de  $x$ . Então, se  $b = f(0)$  e  $a = f(1)/f(0)$ , tem-se  $f(x) = ba^x$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ . (LIMA, 2013)*

**Teorema 3.** *Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função crescente ou decrescente que transforma toda progressão aritmética  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$  numa progressão geométrica  $y_1, y_2, \dots, y_n = f(x_n), \dots$ . Se fazemos  $b = f(0)$  e  $a = f(1)/f(0)$  teremos  $f(x) = ba^x$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . (LIMA, 2013)*

# Capítulo 2

## Modelagem Matemática para Professores

### 2.1 Modelagem Matemática para Professores

Atualmente, há um crescente desenvolvimento de novas tecnologias e a necessidade de habilidades matemáticas para a atuação nas diversas áreas profissionais é um fator que desperta a atenção social para um problema na educação básica: o baixo rendimento em matemática. O contexto de transformações na sociedade e no mercado de trabalho implica em novos contornos e maneiras de se pensar a educação. O professor de matemática se preocupa em trazer práticas educacionais diferenciadas, na tentativa de melhorar o rendimento do aluno, mas infelizmente a educação matemática permanece em um momento histórico anterior, ou seja, as aulas, em sua maioria, são expositivas e, quando contextualizadas, os assuntos não são atuais, assim, não atingem as necessidades da sociedade atual.

Busca-se uma educação mais voltada para o bom desempenho do cidadão no seu cotidiano, o qual está impregnado de matemática. Assim, torna-se necessário que a matemática extrapole seus próprios limites disciplinares, buscando realizar conexões com a realidade. (BARBOSA, 1999)

É preciso pensar em uma educação transformadora e voltada para a formação do cidadão como um todo. Há a necessidade de desenvolver habilidades que permitam ao aluno desempenhar sua função na sociedade e lidar com os problemas do seu cotidiano. Sendo assim, o conhecimento matemático deve proporcionar o contato com a realidade e tentar compreendê-la. O aprendiz precisa reconhecer maneiras de utilizar as ferramentas matemáticas para resolver situações adversas do dia a dia.

Assim, existe a necessidade de introduzir práticas que proporcionem a construção do conhecimento matemático a partir do contato com o mundo real, ou melhor, a sala de aula deve ser um lugar onde seja possível explorar as possibilidades de interação entre a matemática e a realidade. “[...]a sala de aula precisa tornar-se um laboratório para descobrir as maneiras pelas quais a matemática pode ser usada como um instrumento do mundo real.” (DOLGOS; ELIAS, 1996). Uma forma de proporcionar este elo entre a matemática e a realidade é a utilização da modelagem matemática como metodologia de ensino, porém ela é vista como uma ferramenta muito distante da realidade da prática docente, pois a maioria dos professores não estão habituados a enxergar este processo como uma ferramenta didática.

Apesar de reconhecer a necessidade de utilizar métodos para despertar o interesse dos alunos e melhorar o rendimento escolar, muitos docentes não sabem como introduzir estas práticas. A falta de contato com a modelagem traz uma visão de que é impossível trabalhar a matemática aplicável em sala de aula.

[...]há diferentes dificuldades relatadas pelos professores na implementação de modelagem: a insegurança diante da imprevisibilidade (BARBOSA, 2004); a insegurança diante do novo (DIAS, 2005; OLIVEIRA, 2010); as dificuldades na administração do tempo disponível (BARBOSA, 2004; DIAS, 2005); e o receio de os alunos apresentarem soluções aos problemas que ainda são desconhecidas ao professor (JURKIEWICZ & FRIDEMAN, 2007). Nesse sentido, de acordo com CHAMOAN (2007), a formação de professores em modelagem deveria dar mais ênfase ao desenvolvimento de habilidades na construção de modelos matemáticos, na avaliação da validade do argumento desses modelos, assim como no desenvolvimento, na comparação e na avaliação de processos alternativos de solução pelos professores. (LUNA; BARBOSA, 2015)

A intenção deste trabalho é apresentar ao professor a modelagem como ferramenta de ensino que coloca o aluno como sujeito ativo no processo de construção do seu aprendizado e mostrar como é possível aplicar esta metodologia no dia a dia escolar.

Muitas vezes o professor sente-se desmotivado e, por mais que frequentemente esteja preocupado com a falta de interesse, opta sempre pela aula tradicional, com explicação do conteúdo e resolução de exercícios de fixação. Este método é válido e necessário no ensino de matemática, mas sozinho torna as aulas massantes e desinteressantes.

A modelagem aproxima a matemática da realidade, pois é uma maneira de interpretá-la. Isso possibilita tratar de assuntos recorrentes na atualidade dentro das aulas de

matemática, mostrando aos alunos como o conhecimento matemático pode ser útil para enfrentar problemas reais.

[...]quando afirmam que utilizar situações reais para fazer matemática na escola dever ser, antes de tudo, um instrumento para saber interpretar a realidade matematicamente com o fim de que se possa ser útil ao aluno para se mover melhor em seu meio e atuar sobre ele. (DOLGOS; ELIAS, 1996)

O objetivo maior do ensino dever ser a formação e inserção do aprendiz na sociedade, entender a sua realidade sabendo atuar sobre ela e conseguir relacionar todo o conteúdo visto na escola com o mundo em que ele vive. Os resultados negativos do ensino de matemática nos colocam para refletir sobre as causas e soluções para este problema, visto que o desenvolvimento do raciocínio lógico está diretamente relacionado com a formação de cidadãos críticos. Uma das maiores dificuldades no ensino desta ciência é despertar o interesse dos alunos. O conteúdo é visto como enfadonho e sem aplicação direta. Muitas vezes os alunos sabem da importância da matemática para a humanidade de modo geral, mas veem estas aplicações muito distantes e como algo muito complexo.

Colocar os alunos para participar de um processo de modelagem matemática irá mostrar como a interpretação da realidade por meio da matemática é possível e proporcionará uma aproximação deles com conceitos e ferramentas matemáticas. As aulas conduzidas por esta metodologia tem por objetivo colocar o aluno como construtor do conhecimento, tornando-o sujeito ativo no processo de ensino aprendizagem.

A proposta é colocar o aluno para construir um conhecimento matemático e ao mesmo tempo refletir sobre certa situação-problema que pode influenciar em suas escolhas. Por exemplo, ao criar um modelo para verificar como são cobradas as tarifas de telefonia móvel, podemos nos questionar se nosso plano de celular é o que mais atende nossas necessidades.

A modelagem, quando trabalhada de maneira correta em sala de aula, pode proporcionar mais que o conhecimento matemático ou aprendizado de manipulação de certa ferramenta matemática. O processo de modelagem irá mostrar ao aluno como a matemática é usada para manipular dados reais e prever comportamentos futuros.

Todos os processos de modelagem, desde a coleta de dados até a tomada de decisão, são importantes nesta metodologia, pois o principal objetivo é mostrar como a matemática está presente em vários aspectos da realidade e, conseqüentemente, trabalhar ferramentas necessárias não só para a modelagem do problema em si, mas também para a construção do conhecimento matemático em geral.

## 2.2 Modelagem Matemática no ensino

A implantação da modelagem no ensino é um grande desafio para o professor, pois traz novas formas de interação com a matemática. Os conteúdos não são apresentados aos alunos em aulas expositivas. O conhecimento é construído juntamente com o modelo matemático.

Segundo Barbosa (1999),

Ponte (1993, p.223) aponta-nos três meios principais em que a modelagem pode aparecer no currículo: projetos extensos que podem durar semanas ou meses, situações que podem requerer uma ou duas aulas e atividades simplificadas muitas das quais podem ser concluídas numa aula. (BARBOSA, 1999)

Neste trabalho, a proposta é trabalhar a modelagem em um projeto extenso, que leve algumas semanas, o intuito é envolver os alunos em todas as etapas e, ao longo delas, construir alguns conceitos e trabalhar o uso de ferramentas matemáticas. De acordo com as ideias de Mass et al., (2018), a abordagem da modelagem na sala de aula requer muita cautela e um planejamento estruturado, com objetivos bem definidos. Um fator importantíssimo no processo de modelagem é quais ferramentas serão utilizadas na construção do modelo. Por isso, cada etapa deve ser guiada pelo professor, para que o aluno não se perca no processo.

Inicialmente, o tema deve ser escolhido. O professor pode pré selecionar alguns temas que julgue ser de interesse dos alunos e levar para a sala de aula, definindo assim o objeto da realidade a ser modelado. Ao se pensar em fazer uma modelagem em sala de aula, deve-se ter em mente se os sujeitos envolvidos terão o conhecimento necessário para a manipulação do modelo. Com isso, a escolha do modelo deve ser coerente com o nível de ensino e ferramentas conhecidas pelos envolvidos na criação deste modelo. Dessa maneira, a modelagem pode ser utilizada em qualquer etapa da educação básica, desde que a escolha do tema seja coerente com o nível de ensino. Como ainda nos aponta Mass et al., (2018), o tema não só pode, como deve ser de interesse dos alunos envolvidos, mas estes devem ser orientados, justamente para se ter controle desta coerência com a etapa de ensino em que se quer aplicar a modelagem.

Em sequência, deve ser feita a coleta de dados: em nosso trabalho foi feita uma pesquisa de alguns planos de telefonia móvel disponíveis no mercado e a busca pelo número de casos de COVID-19 no Brasil a partir de fevereiro de 2020 até julho de 2020. Diante dos dados, é hora de formular problemas que serão solucionados através do modelo. Esta etapa exige muita atenção, pois (novamente) deve-se ter em mente quais ferramentas serão

necessárias para criação do modelo. Sendo assim, o professor deve ser capaz de prever quais conhecimentos matemáticos serão utilizados no processo e se os alunos que irão participar terão a bagagem necessária.

Depois disso, a simplificação de hipótese será feita, momento de adaptar a realidade a uma maneira que ela poderá ser tratada matematicamente. A sistematização dos conceitos que serão utilizados no processo é fundamental para que os envolvidos possam participar de maneira efetiva do processo. A interpretação da solução e a verificação da validade do modelo são as etapas finais do processo, aqui analisamos se o objetivo inicial foi alcançado. A metodologia voltada para a aplicação da modelagem na educação coloca o professor como um mediador na construção do conhecimento.

Franchi (1993) nos aponta que “os alunos estão acostumados a receber o conhecimento pronto, resolver exercícios e tirar dúvidas.”(FRANCHI, 1993) Colocá-los para participar de maneira ativa em cada etapa pode gerar um desgaste inicial e ser uma dificuldade na implantação. Os estudantes precisam se acostumar em participar da construção dos conceitos e o trabalho do professor é fundamental para que a abordagem seja feita de uma maneira em que os alunos sejam conduzidos na elaboração do modelo.

A modelagem redefine o papel do professor no momento em que ele perde o caráter de detentor e transmissor do conhecimento e passa ser aquele que está na condução das atividades, numa posição de participante.(BARBOSA, 1999)

Além de estar preparado para conduzir o processo, ele deve fazer uma ligação entre as ideias relacionadas no processo e o saber sistematizado. O modelo criado em sala de aula não irá apenas representar uma situação da realidade, como também será responsável pelo desenvolvimento de técnicas matemáticas e construção de conceitos. Sem perceber, o aluno irá aumentar as possibilidades de tratar e resolver um problema matemático. Contudo, o objetivo de todo o trabalho será perdido, se o professor não for capaz de mostrar ao aluno novos conceitos matemáticos durante o processo de modelagem.

Ao se trabalhar temas da realidade, conceitos relacionados a diferentes áreas aparecerão na abordagem. Assim, o professor precisa ter disposição para adquirir conhecimentos interdisciplinares. Pesquisar e planejar a ação antes da aplicação na prática devem se tornar rotina, para que ele não seja surpreendido com alguma situação que não saiba lidar, e assim perca o controle do processo e do objetivo inicial, levando a experiência com modelagem como um projeto fracassado. A interpretação da solução e a validação dos modelos são as últimas etapas do processo. Neste momento, verifica-se se o objetivo definido no início do processo foi alcançado, ou seja, se o modelo é válido.

O objetivo a ser alcançado no final da criação do modelo deve ser definido inicial-

mente, mas em alguma etapa pode-se perceber que este objetivo exige um conhecimento matemático mais complexo, neste caso, como o foco principal é aprender com o processo de modelagem, pode-se redefinir os objetivos com o propósito de ser possível a criação do modelo com as ferramentas matemáticas disponíveis no nível de ensino. Os temas deste trabalho foram pensados para alunos do 3º ano ensino médio. Como o uso do celular é frequente entre os adolescentes, entender como as tarifas de telefonia são cobradas e analisar o crescimento do contágio de um vírus que parou o mundo motivam os alunos a participar deste processo. Inicialmente, os temas seriam trabalhados no formato de um projeto de intervenção pedagógica nas aulas do ensino regular, porém com a pandemia do coronavírus e a necessidade de isolamento social, as aulas foram suspensas e a prática desta modelagem foi adiada.

A educação pública brasileira ainda está se adaptando ao ensino remoto e a falta de acesso às aulas por uma grande maioria dos alunos é a realidade na escola onde seria realizada a aplicação do projeto, por este motivo é inviável esta prática pedagógica no ensino remoto. Todo o passo a passo e as orientações em cada etapa estão descritos neste trabalho. Vale ressaltar que podemos aproveitar a essência deste trabalho e aplicar a modelagem em qualquer tema, que pode ser escolhido pelo professor ou entre professores e alunos. O único cuidado a se tomar é saber se o conhecimento matemático dos alunos será suficiente para a complexidade do tema escolhido, pois deve-se ter em mente quais ferramentas matemáticas serão necessárias para desenvolver o modelo por completo.

## Capítulo 3

# Modelagem Matemática: Análise das Tarifas de Celulares

Neste capítulo será apresentado um primeiro problema, real e concreto, em que pode ser aplicado o processo da modelagem matemática para alunos do ensino médio. A abordagem envolve um modelo que descreve o preço a se pagar em uma conta de celular. Serão analisados o custo com ligações e consumo de dados com acesso a internet em 4 planos de telefonia móvel disponíveis no mercado. Gostaríamos de apresentar este tópico de forma interativa, pois deixamos claro que o foco é analisar a resposta e dinâmica do aluno quando é direcionado a usar modelagem matemática. Nesse caso, muitos passos já foram pré-definidos (coleta de dados, etc). No entanto, no início de um exercício de modelagem matemática, essas ideias geralmente ainda não foram geradas. Vamos examinar mais de perto isso durante nossa primeira tarefa relacionada com a coleta de dados.

### 3.1 Formulação do Problema

Consiste em determinar o modelo matemático que permite escolher o melhor plano de tarifas de celulares, dentre aqueles oferecidos por diversas companhias de celulares, em relação ao tempo de ligação, ao consumo de dados, etc, bem como analisar as suas diversas implicações para o consumidor.

## 3.2 Situação do Problema

A situação de problema vai depender das diversas variáveis a serem consideradas no plano de tarifas, por exemplo, devemos observar atentamente o plano de preços do provedor de serviços, ou desejar que o tempo de conversação (chamadas) seja a principal influência na sua conta, ou ainda, podemos desejar estar constantemente disponíveis e falarmos ao telefone o tempo todo, ou podemos precisar somente de um meio de comunicação em caso de emergência. Nesse sentido, o fator de impacto do problema seria muito satisfatório, pois determinaria uma maneira adequada do usuário definir a tarifa certa baseado no custo benefício.

## 3.3 Hipóteses de Simplificação

Assumimos que todas as pessoas pretendem usar seu telefone celular da maneira mais econômica possível.

### 3.3.1 Coleta de Dados

Inicialmente, é preciso fazer uma pesquisa em lojas ou internet para conhecer os planos de celular oferecidos pelas operadoras. Uma tarefa que parece ser simples, mas que se não for direcionada, pode tornar o trabalho de modelagem muito complexo. Dessa forma, o professor deve propor uma atividade que direcione esta pesquisa, a fim de que os planos encontrados sejam facilmente modelados com o conhecimento de ensino básico. Neste trabalho, procuramos por planos que pudessem ser modelados com funções afins, conteúdo trabalhado no ensino médio. A seguir, temos os planos A, B, C, e D que serão utilizados neste trabalho.

**Plano A:**  $R\$ 0,20/min$  e  $R\$ 1,99/100$  MB.

**Plano B:**  $R\$ 40,00$  fixos com 100 min de ligações e 6 GB de internet. No caso de consumo extra:  $R\$ 0,30/min$  e  $R\$ 1,99/100$  MB.

**Plano C:**  $R\$49,99$  fixos com ligações ilimitadas e 4,5 GB de internet. Consumo extra:  $R\$ 1,99/100$  MB.

**Plano D:**  $R\$129,99$  reais fixos com ligações ilimitadas e 16 GB de internet. Consumo extra:  $R\$ 1,99/100$  MB.

Depois de definidos quais planos serão analisados, é preciso organizar as informações em uma tabela, pois isso possibilita uma visualização da situação e um melhor entendimento para o aluno. Num primeiro momento, vamos analisar somente o gasto com

ligações.

A Tabela 3.1 apresenta o preço pago em cada plano de acordo com o tempo de ligação.

Tempo de ligação (em min)	Plano A Preço - (R\$)	Plano B Preço - (R\$)	Plano C Preço - (R\$)	Plano D Preço - (R\$)
0	0	40	49,99	129,99
10	2	40	49,99	129,99
20	4	40	49,99	129,99
30	6	40	49,99	129,99
40	8	40	49,99	129,99
50	10	40	49,99	129,99
60	12	40	49,99	129,99
70	14	40	49,99	129,99
80	16	40	49,99	129,99
90	18	40	49,99	129,99
100	20	40	49,99	129,99
110	22	43	49,99	129,99
120	24	46	49,99	129,99
130	26	49	49,99	129,99
140	28	52	49,99	129,99
150	30	55	49,99	129,99
160	32	58	49,99	129,99
170	34	61	49,99	129,99

Tabela 3.1: Preço pago em cada plano.

### 3.4 Solução do Problema

O problema será analisado considerando três casos distintos, seguindo o tipo de serviço da fornecedora. No primeiro caso veremos a não existência de políticas de arredondamento, posteriormente, estudaremos a forma como o fornecedor do serviço oferece o custo dessa política de arredondamento. Para finalizar, abordaremos o modelo mais aprimorado do problema, ou seja, consideramos o caso em que o usuário pode configurar um modelo matemático que inclua chamadas e cobranças de dados, pois o objetivo final da modelagem matemática é enriquecer o modelo para refletir a realidade do problema da forma mais exata.

### 3.4.1 Primeiro Caso: Custo do Plano em função do tempo

Em termos de funções, podemos interpretar que o preço a pagar pode ser definido por uma função  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ ,  $f(t)$ , onde  $t$  representa o tempo em minutos. Agora observamos que tem sentido afirmar que quanto maior é o tempo em minutos de ligação, maior também é o custo do plano a pagar, e vice-versa. Aqui aparece, inicialmente, um conceito que em matemática é chamado de proporcionalidade, mas por enquanto, não se pode garantir que essa proporcionalidade seja crescente, estritamente crescente, decrescente ou estritamente decrescente em relação ao tempo, ou pelo menos em intervalos de tempo. Acreditamos que esse tipo de proporcionalidade será definida pelo tipo de serviço oferecido pelo plano que o usuário queira assinar. Do exposto, estamos em condições de afirmar que a função  $f$  é crescente ou decrescente (monótona) pelo menos em intervalos. Além disso, acréscimos iguais de tempo implicam em acréscimos iguais no preço a pagar.

Isso significa dizer que se uma pessoa, depois de ter fixado o plano que satisfaz às suas expectativas, aumentar o tempo em  $h$  (pequeno), então deverá também aumentar o preço pelo consumo, ou seja, intervalos iguais de crescimentos em minutos, correspondem a crescimentos iguais do preço  $f(t)$  nesse mesmo tempo. Ou seja, o quociente

$$\frac{f(t+h) - f(t)}{h} = a$$

é constante. Logo,  $f(t+h) - f(t) = ah$  reais gastos em um acréscimo de tempo  $h$ , a partir de  $f(t)$ , depende somente de  $h$  e não de  $t$ . Então, pelo Teorema da Caracterização da Função Afim, Teorema 1,  $f$  é uma função afim, ou seja, o preço a se pagar por um consumidor, depois de ter escolhido o plano que mais o satisfaz, em cada instante de tempo  $t$ , é modelado por uma função afim. Dessa maneira, existem  $a, b \in \mathbb{R}$  tais que

$$f(t) = at + b, \tag{3.1}$$

onde  $a = \frac{f(t+h)-f(t)}{h}$  e  $b = f(0)$ .

Assim, é possível analisar as contas de celular e os planos oferecidos, para isso, é necessário filtrar e interpretar corretamente as informações. Principalmente para o aluno, pode ser complicado, em um primeiro momento, o que significa interpretar matematicamente a situação. “[...] o professor deve guiá-lo nessa tarefa, propondo atividades e ajudando-o a entender os conceitos matemáticos relacionados.” (MAASS et al., 2018). Inicialmente, é preciso pensar em como o usuário utiliza seu telefone, se é para chamadas de voz, uso de internet ou ambos, o perfil de consumo de cada pessoa irá determinar o

melhor plano para ela.

No plano A, a pessoa irá pagar R\$ 0,20 por minuto de ligação, ou seja, a duração de cada chamada vai influenciar no valor da conta. O plano B possui o valor de R\$ 40 com 100 minutos para ligações inclusos e para cada minuto adicional será cobrado R\$ 0,30. Já nos planos C e D as ligações são ilimitadas, ou seja, o número de chamadas e a duração das mesmas não influencia no preço pago. Em relação ao **plano A**, da coleta de dados do problema de análise de tarifas (ver Tabela 3.1), temos nesse caso que o acréscimo  $h = 1$  do tempo é constante, logo  $a = \frac{f(t+h)-f(t)}{h} = f(t+1) - f(t), \forall t \geq 0$ , tomando  $t = 0$ , temos  $a = f(1) - f(0) = 0,20$ . Assim,

$$f(t) = 0,20t. \quad (3.2)$$

Nesse caso a função afim recebe o nome de função linear com taxa de crescimento constante 0,20.

No **plano B**, aumentos iguais no tempo não implicam em aumentos iguais no preço para intervalos grandes. Nesse caso, é importante definir e analisar em que intervalos de tempo o comportamento do preço é modelado por uma função afim. Da coleta de dados mostrada na Tabela 3.1 podemos ver que o preço nos primeiros 100 minutos de consumo permanece constante e igual a 40 reais. Para um tempo maior que 100 minutos, passa a ser cobrado R\$ 0,30 por minuto. Assim, o preço a pagar é modelado pela função afim por partes:

$$f(t) = \begin{cases} 40 & \text{se } 0 \leq t \leq 100 \\ 0,3(t - 100) + 40 & \text{se } t > 100. \end{cases} \quad (3.3)$$

Nos **planos C e D**, aumentos iguais nos dias de uso implicam em aumentos iguais no preço. Então, pelo Teorema da Caracterização da Função Afim, Teorema 1,  $f$  é uma função afim. Dessa maneira,  $f(t) = at + b$ , onde  $a = f(t+1) - f(t)$  e  $b = f(0)$ . Da Tabela 3.1, no caso do plano C, temos  $a = f(t+1) - f(t) = 49,99 - 49,99 = 0$ , logo  $f$  é constante e  $f(0) = 49,99$  Assim,

$$f(t) = 49,99. \quad (3.4)$$

No plano D, analogamente obtemos que o preço a pagar é modelado pela função constante

$$f(t) = 129,99. \quad (3.5)$$

Para uma melhor visualização da Tabela 3.1 os dados foram organizados no gráfico:

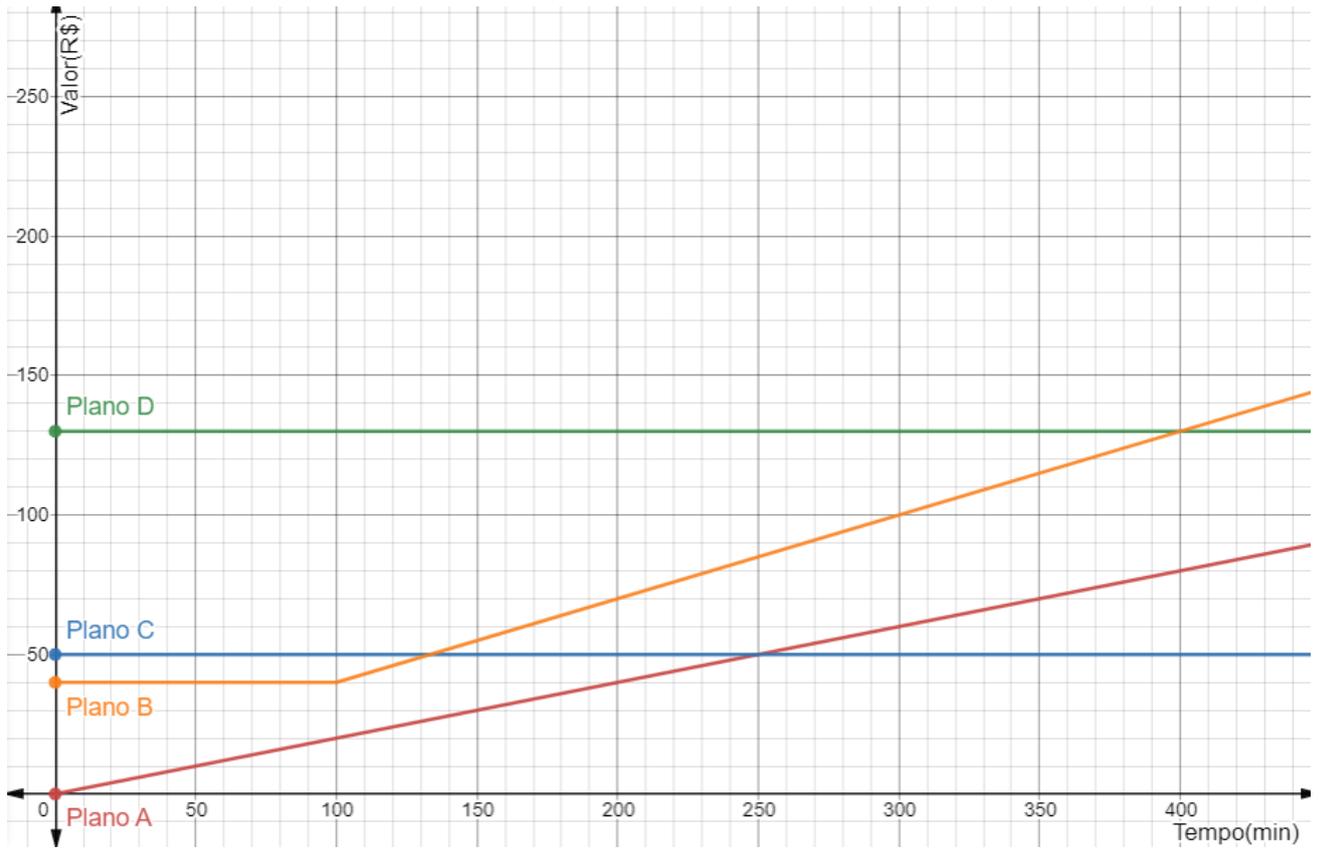


Figura 3.1: Preços de tarifas por cada plano.

Como o teorema de caracterização da função afim não faz parte do currículo do ensino médio, podemos utilizar a seguinte estratégia para mostrar ao aluno que a situação pode ser modelada através de uma função do 1º grau. Vamos analisar o aumento do preço a medida que o tempo em ligações aumenta no plano A. A variação é de R\$0,20 a cada minuto, essa variação é a taxa de crescimento.

Na Figura 3.2, podemos observar que a taxa de crescimento é constante (sempre igual a 0,20) e, por esta característica, levamos o aluno a concluir que esta situação é modelada por uma função afim.

Tempo (min)	Valor (R\$)	Variações
1	0,20	
2	0,40	
3	0,60	
4	0,80	

Figura 3.2: Taxa de crescimento.

Com isso, levaremos o aluno a perceber que  $f(t) = at$ , é dizer,  $f$  é uma função linear com taxa de crescimento  $a$ .

No plano A:  $a = 0,20$  o que confirma  $f(t) = 0,20t$ .

Nos planos B, C e D podemos guiar os alunos de maneira semelhante.

### 3.4.2 Segundo Caso: Presença de Políticas de Arredondamento

A política de arredondamento vai definir o tempo mínimo de ligação que será cobrado. Para o consumidor o mais vantajoso é ter o menor tempo possível. Para entender melhor, vamos imaginar que se este tempo for de 1 minuto, uma ligação de 30 segundos será cobrada como uma ligação de 1 minuto ou ainda uma ligação de 5 minutos e 2 segundos será cobrada como uma ligação de 6 minutos, porém se o tempo mínimo for 10 minutos (caso hipotético), as duas ligações seriam cobradas como uma ligação de 10 minutos. Para verificar o impacto desta política de arredondamento, vamos considerar a duração de dez chamadas telefônicas registradas em um dia no telefone celular. Os dados mostrados na Tabela 3.2 representam as chamadas registradas no celular da autora dessa dissertação.

Chamadas telefônicas	Tempo de duração
1 <sup>a</sup>	8min17s
2 <sup>a</sup>	1min16s
3 <sup>a</sup>	1min34s
4 <sup>a</sup>	32s
5 <sup>a</sup>	2min23s
6 <sup>a</sup>	18min20s
7 <sup>a</sup>	2min50s
8 <sup>a</sup>	1min42s
9 <sup>a</sup>	2min48s
10 <sup>a</sup>	1min48s
Tempo total em ligações	41min30s

Tabela 3.2: Duração das chamadas telefônicas.

Vamos analisar por quantos minutos serão cobrados, supondo que a política de arredondamento de uma operadora de telefonia seja de 1 minuto.

Se o arredondamento acontecer ao *fim do dia*, teremos:

$$41\text{min}30\text{s} \approx 42\text{min}.$$

A Tabela 3.3 mostra por quantos minutos seria cobrado se o arredondamento

Chamada	Tempo de duração	Tempo depois do arredondamento
1 <sup>a</sup>	8min17s	9min
2 <sup>a</sup>	1min16s	2min
3 <sup>a</sup>	1min34s	2min
4 <sup>a</sup>	32s	1min
5 <sup>a</sup>	2min23s	3min
6 <sup>a</sup>	18min20s	19min
7 <sup>a</sup>	2min50s	3min
8 <sup>a</sup>	1min42s	2min
9 <sup>a</sup>	2min48s	3min
10 <sup>a</sup>	1min48s	2min
Tempo total em ligações	41min30s	46min

Tabela 3.3: Arredondamento em cada ligação.

acontecer ao final de *cada ligação*:

Podemos observar na Tabela 3.3 que se o arredondamento acontecesse ao final de cada ligação seria cobrado por 46 minutos de ligação, 4 minutos a mais que o arredondamento ao final do dia.

Suponhamos agora que os dados da Tabela 3.3 tenham sido de um dia de uso do celular para ligações por voz e que este consumo seja o mesmo em todos os trinta dias do mês considerado. O tempo total em ligações será de:

$$41\text{min}30\text{s} = 2460\text{s} + 30\text{s} = 2490\text{s}, \text{ logo: } 2490\text{s} \cdot 30 = 74700\text{s} = 1245\text{min} = 20\text{h}45\text{min}.$$

Nesse caso, haveria três possibilidades para o uso das políticas de arredondamento: ao fim do mês, ao fim de cada dia ou ao fim de cada ligação. Com algumas análises, será possível perceber a diferença na quantidade de minutos cobrados em cada uma delas e o impacto disso em uma conta de telefone. Para isso, vamos considerar os planos A e B e os dados da Tabela 3.2 para simular o valor de uma conta nesses três casos. Vale ressaltar que não é necessário fazer esta análise nos planos C e D, pois possuem ligações ilimitadas.

### 1<sup>o</sup> caso: Arredondamento no fim do mês.

#### Plano A:

Sabemos que a função  $f(t) = 0,20t$  determina o valor a pagar em função do tempo (em minutos) de ligação, será cobrado por 1245 minutos. Logo, queremos calcular  $f(1245) = 0,20 \cdot 1245 = 249$ . Assim o valor total da conta no final do mês é:

$$R\$ 249,00.$$

**Plano B:** Sabemos que a função definida em (3.3) define o valor a se pagar em função do tempo (em minutos) de ligação. Queremos calcular  $f(1245) = 0,30(1245 - 100) + 40 = 383,50$ , logo o valor total da conta no final do mês é:

*R\$ 383,50.*

**2º caso: Arredondamento ao fim do dia.**

Os dados da Tabela 3.2 mostram que o total de minutos em ligações durante um dia é 41min30s. No caso do arredondamento acontecer ao final do dia, seria cobrado por 42 minutos em cada dia, isto é,  $42 \text{ min} \cdot 30 = 1260$  minutos. Dessa maneira será cobrado por 1260 min ao final do mês.

**Plano A:**

Sabemos que a função  $f(t) = 0,20t$  determina o valor a pagar em função do tempo (em minutos) de ligação. Será cobrado por 1260 minutos, o valor  $f(1260) = 0,20 \cdot 1260 = 252$ . Assim, o valor total da conta no final do mês é:

*R\$ 252,00 reais.*

**Plano B:** Neste caso, de (3.3) temos:

$$f(1260) = 0,30(1260 - 100) + 40 = 388$$

logo, o valor total da conta no final do mês é: *R\$ 388,00*

**3º caso: Arredondamento ao fim de cada ligação.**

Aqui será cobrado por 46 minutos por dia, isto é,  $46 \text{ min} \cdot 30 = 1380$  minutos. Dessa maneira, será cobrado por 1380 minutos ao final do mês.

**Plano A:**

Sabemos que a função  $f(t) = 0,20t$  determina o valor a pagar em função do tempo (em minutos) de ligação. Será cobrado por 1380 minutos. Logo, queremos calcular  $f(1380) = 0,20 \cdot 1380 = 276$ . Portanto, o valor total da conta no final do mês é:

*R\$ 276,00.*

**Plano B:** de (3.3) temos  $f(1380) = 0,30(1380 - 100) + 40 = 424$ . O valor total da conta no final do mês é:

*R\$ 424,00 reais.*

Podemos perceber que a variação no preço das contas foi grande, o valor pago

aumentou consideravelmente com uma mudança na política de arredondamento. Para melhor entender como a política de arredondamento pode influenciar em uma conta de telefone, vamos imaginar dois extremos, um usuário consciente dessa política de arredondamento que encerra suas ligações sempre em  $x$  minutos exatos e 59 segundos e um segundo usuário que não se preocupa com esta política e, por azar, sempre encerra suas ligações em  $x$  minutos exatos mais 1 segundo.

Baseando-nos nas ideias trabalhadas em Mass et al., (2018), façamos uma análise das dez ligações simuladas com um tempo imaginado previamente, com o intuito de mostrar a diferença de cobrança com a política de arredondamento.

Vamos supor dois usuários imaginários, por exemplo: o primeiro usuário, em dez ligações de 59 segundos seria cobrado por 1 minuto em cada ligação, pagando por 10 minutos. Já o segundo usuário, em dez ligações de 1 minuto e 1 segundo, seria cobrado por 2 minutos em cada ligação, pagando por 20 minutos. Assim, o segundo usuário falou apenas 20 segundos a mais que o primeiro e será cobrado por 10 minutos a mais. Nesse caso, percebemos o quanto a política de arredondamento pode ser injusta para o segundo usuário, que falou apenas 20 segundos a mais que o primeiro e será cobrado pelo dobro do tempo, ou seja, por 10 minutos a mais. Para melhor visualização, vamos observar os gráficos de barras (Figura 3.3) e linear (Figura 3.4):

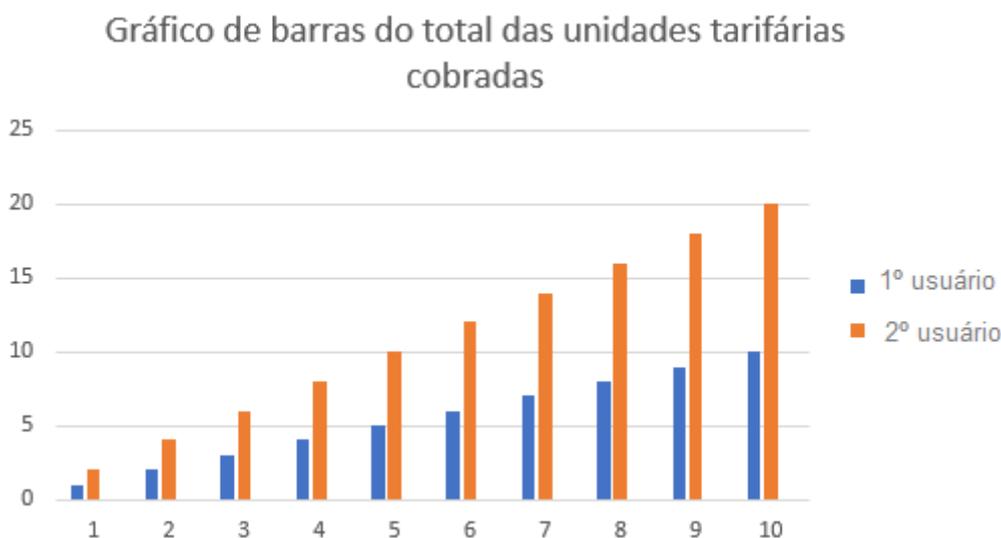


Figura 3.3: Gráfico de barras do total das unidades tarifárias cobradas.

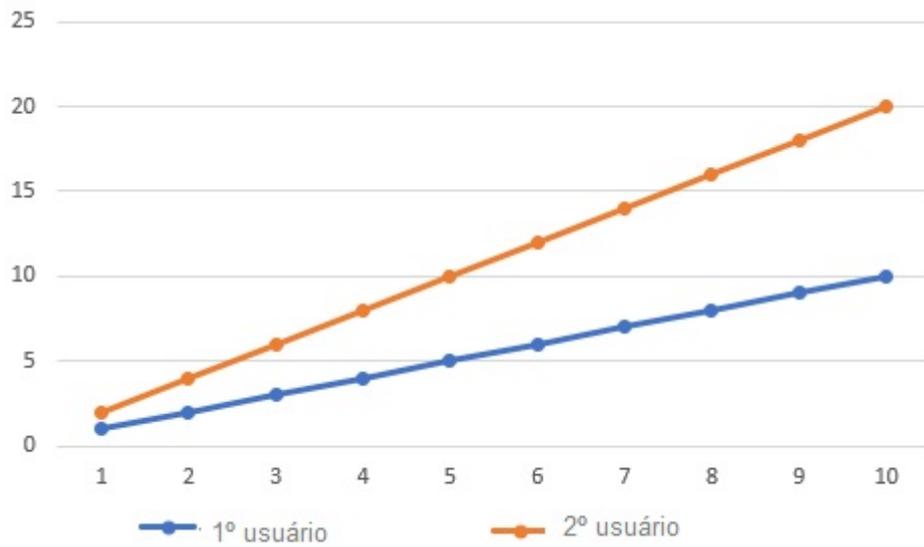


Figura 3.4: Gráfico linear do total das unidades tarifárias cobradas.

Voltando a analisar os dados reais, vamos supor, como hipótese de simplificação, que: *a política de arredondamento da empresa seja ao final de cada minuto*, analisando as dez ligações da Tabela 3.3.

No gráfico da Figura 3.5, temos no eixo das abscissas  $x$  as chamadas numeradas e no eixo  $y$  as cobranças cumulativas, ou seja, a soma da quantidade de minutos pelos quais serão cobrados.

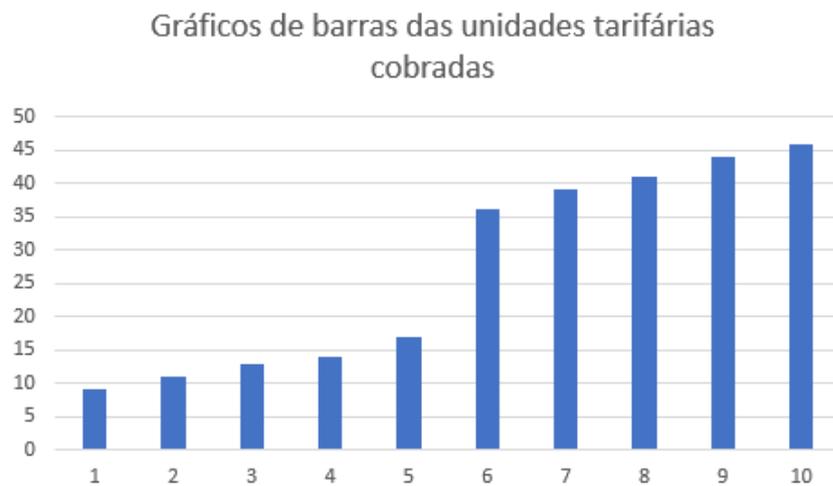


Figura 3.5: Duração das chamadas.

Com os dados deste gráfico de barras da Figura 3.5, podemos encontrar um ajuste linear para a situação. Esse ajuste nos dará uma reta que melhor representa estes pontos.

Na Seção 1.3 do Capítulo 1, vimos pelo método dos mínimos quadrados, que podemos encontrar a reta:

$$y_i \cong ax_i + b,$$

onde

$$a = \frac{\left[ \sum_{i=1}^n x_i \right] \left[ \sum_{i=1}^n y_i \right] - n \left[ \sum_{i=1}^n x_i y_i \right]}{\left[ \sum_{i=1}^n x_i \right]^2 - n \left[ \sum_{i=1}^n x_i^2 \right]} \quad (3.6)$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n y_i - a \sum_{i=1}^n x_i}{n}. \quad (3.7)$$

$$\sum_{i=1}^n x_i = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55 \quad (3.8)$$

$$\sum_{i=1}^n y_i = 9 + 11 + 13 + 14 + 17 + 36 + 39 + 41 + 44 + 46 = 270 \quad (3.9)$$

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i = 1 \cdot 9 + 2 \cdot 11 + 3 \cdot 13 + 4 \cdot 14 + 5 \cdot 17 + 6 \cdot 36 + 7 \cdot 39 + 8 \cdot 41 + 9 \cdot 44 + 10 \cdot 46 = 1884 \quad (3.10)$$

$$\left[ \sum_{i=1}^n x_i \right]^2 = 55^2 = 3025 \quad (3.11)$$

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 + 10^2 = 385. \quad (3.12)$$

Substituindo (3.8)-(3.12) em (3.6)-(3.7) respectivamente, obtemos

$$a = \frac{55 \cdot 270 - 10 \cdot 1884}{3025 - 10 \cdot 385} = \frac{14850 - 18840}{3025 - 3850} = \frac{-3990}{-825} = 4,83636... \quad (3.13)$$

$$b = \frac{270 - 4,83636 \cdot 55}{10} = \frac{270 - 266}{10} = \frac{4}{10} = 0,4 \quad (3.14)$$

$$y_i \cong 4,83636x_i + 0,4.$$

O gráfico da Figura 3.6 apresenta a reta de tendências acumuladas. A reta mostrada no gráfico de tendências é a que melhor define os pontos, ou seja, em nosso exemplo, com este ajuste linear, é possível definir um comportamento futuro para o valor das cobranças

com o uso das políticas de arredondamento.

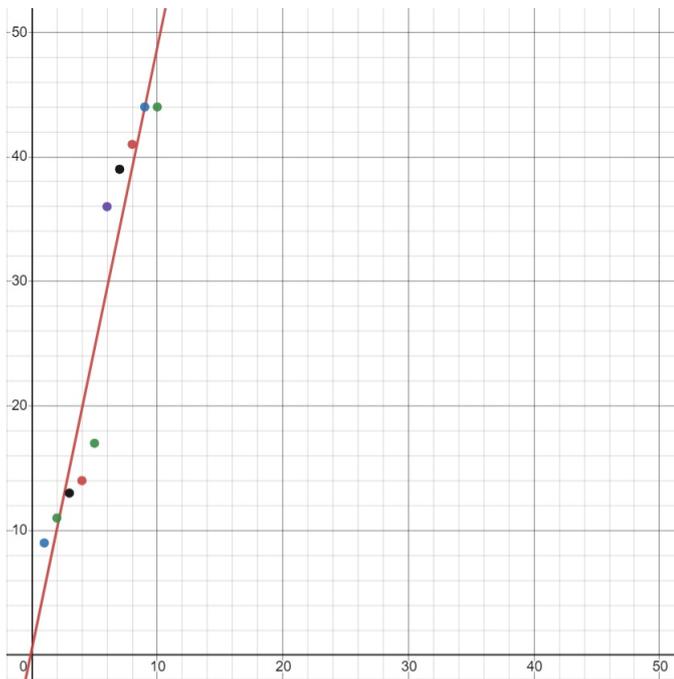


Figura 3.6: Gráfico de tendências acumuladas cobradas.

### 3.4.3 Terceiro Caso: Custo em função das chamadas e do consumo de dados

Atualmente, as pessoas vivem conectadas e isso tem impacto no momento de escolher um plano de celular, pois a maioria delas usa o aparelho para acessar a internet. Com isso, planos com pacotes pequenos de internet podem não atender a certos perfis de usuários. Assim, a análise do custo com este consumo torna-se necessária.

Voltando aos planos A, B, C e D apresentados na Seção 3.3.1, vamos ficar atentos aos pacotes de dados oferecidos em cada um deles pelo período de trinta dias. O consumo de dados é medido em múltiplos do Byte, geralmente em Megabyte (MB) ou Gibabyte (GB), a equivalência entre essas unidades de medida é:

$$1024B \approx 1KB$$

$$1024KB \approx 1MB$$

$$1024MB \approx 1GB.$$

**Plano A:** é cobrado R\$1,99 para cada 100 MB.

**Plano B:** é ofertado um pacote de 6 GB, já incluso no plano mensal e é cobrado R\$ 1,99 para cada 100 MB.

**Plano C:** é ofertado um pacote de 4,5 GB já incluso no plano mensal e é cobrado R\$1,99 para cada 100 MB.

**Plano D:** pacote de 16 GB já incluso no plano mensal e é cobrado R\$1,99 para cada 100 MB.

A cada 100 MB é cobrado R\$ 1,99 em todos os planos, mas com essa informação a modelagem é um pouco complexa com as ferramentas de um aluno da educação básica. Sendo assim, vamos considerar a hipótese de simplificação: por uma equivalência. Se 100 MB custa R\$ 1,99, então vamos considerar que seja cobrado R\$0,0199 por cada MB de dados consumidos.

A intenção é encontrar uma função definida por duas variáveis:  $x$ , valor pago pelas chamadas (minutos em ligação) e  $y$ , valor pago pelo consumo de dados (em MB).

**Plano A:**

O valor cobrado por cada minuto de ligação é R\$0,20, assim o preço a pagar pelo custo com chamadas será o tempo de ligações  $x$  (em minutos) multiplicado por 0,20. Conforme já explicado, vamos considerar que será cobrado R\$0,0199 por cada MB em consumo de dados. Dessa maneira, o valor cobrado pelo acesso à internet será o produto da quantidade de MB consumidos em dados  $y$  por R\$0,0199. Para calcular o custo com chamadas e consumo de dados, vamos adicionar os custos com chamadas e internet e a função 3.15 nos permite determinar o valor total desta conta para o plano A.

$$f(x, y) = 0,2x + 0,0199y. \quad (3.15)$$

**Plano B:**

Neste plano, precisamos analisar a situação por partes. Como o consumo de dados precisa ser expresso em MB, precisamos converter 6 GB em MB. Para isso, basta multiplicar 6 por 1024 e encontramos 6144 MB. Sabemos que é cobrado um valor fixo de R\$40,00 com direito a 100min em ligações e um consumo de 6 GB de dados. Sendo assim, para  $x \leq 100$  e  $y \leq 6144$  o valor pago será de R\$40,00. Para o consumo extra, ou seja, que ultrapasse 100min ou 6 GB é cobrado R\$0,30 por minuto e R\$0,0199 por MB. Sendo assim, se  $x \leq 100$  e  $y > 6144$  o valor da conta será R\$40,00 mais o consumo extra de internet, que podemos calcular multiplicando o consumo extra em dados ( $y - 6144$ ) por R\$0,0199. Se o tempo em ligações é maior que 100min, mas o consumo de dados é inferior a 6 GB o valor da conta será de R\$40,00 mais o consumo extra com chamadas, que pode ser calculado pelo produto do consumo extra ( $x - 100$ ) por R\$0,30. Quando o tempo em

ligações e o consumo de dados forem superiores aos ofertados, ou seja,  $x > 100$  e  $y > 6144$  o valor da conta será R\$40,00 mais o consumo extra com ligações mais o consumo extra com internet. Sendo assim, a função 3.16 determina o valor da conta para o plano B.

$$f(x, y) = \begin{cases} 40 & \text{se } x \leq 100 \text{ e } y \leq 6144 \\ (y - 6144)0,0199 + 40 & \text{se } x \leq 100 \text{ e } y > 6144 \\ (x - 100)0,30 + 40 & \text{se } x > 100 \text{ e } y \leq 6144 \\ (x - 100)0,3 + (y - 6144)0,0199 + 40 & \text{se } x > 100 \text{ e } y > 6144 \end{cases} \quad (3.16)$$

### Plano C:

No plano C, é cobrado R\$49,99 com ligações ilimitadas e 4,5 GB em consumo de dados. Novamente, precisamos deste consumo de dados em MB e para isso vamos fazer o produto  $4,5 \cdot 1024 = 4608$  e encontramos 4608 MB. Para um consumo de dados menor que 4608 MB o valor da conta será de R\$49,99. Para um consumo de internet superior a este, é cobrado R\$0,0199 por cada MB consumido além do ofertado. Dessa forma, o valor da conta será R\$49,99 mais este consumo extra em internet, que é calculado pelo produto  $0,0199 \cdot (y - 4608)$ . A função 3.17 define o valor da conta para o plano C.

$$f(x, y) = \begin{cases} 49,99 & \text{se } y \leq 4608 \\ 0,0199(y - 4608) + 49,99 & \text{se } y > 4608. \end{cases} \quad (3.17)$$

### Plano D:

No plano D, é cobrado R\$129,99 com ligações ilimitadas e 16 GB em consumo de dados. O consumo de dados em MB é o produto  $16 \cdot 1024 = 16384$  e encontramos 16384 MB. Para um consumo de dados menor que 16384 MB o valor da conta será de R\$129,99. Para um consumo de internet superior a este, é cobrado R\$0,0199 por cada MB consumido além do ofertado. Dessa forma, o valor da conta será R\$129,99 mais este consumo extra em internet, que é calculado pelo produto  $0,0199 \cdot (y - 16384)$ . A função 3.18 define o valor da conta para o plano D.

$$f(x, y) = \begin{cases} 129,99 & \text{se } y \leq 16384 \\ 0,0199(y - 16384) + 129,99 & \text{se } y > 16384. \end{cases} \quad (3.18)$$

Para uma melhor visualização das informações, fizemos os gráficos dessas funções no Geogebra. Vale ressaltar que o aluno da educação básica conhece apenas o plano cartesiano. Isso não impede a utilização destes gráficos para um melhor entendimento. O professor pode usar o Geogebra para mostrar ao aluno como é a representação gráfica

destas funções, explicando que um valor pago  $f(x_i, y_i)$  será representado por um ponto  $(x_i, y_i, z_i)$  e que a região destacada em cada gráfico representa a respectiva função de cada plano.

A Figura 3.7 é o gráfico da função de custo para o plano A. A região em azul possui os pontos que satisfazem a função 3.15.

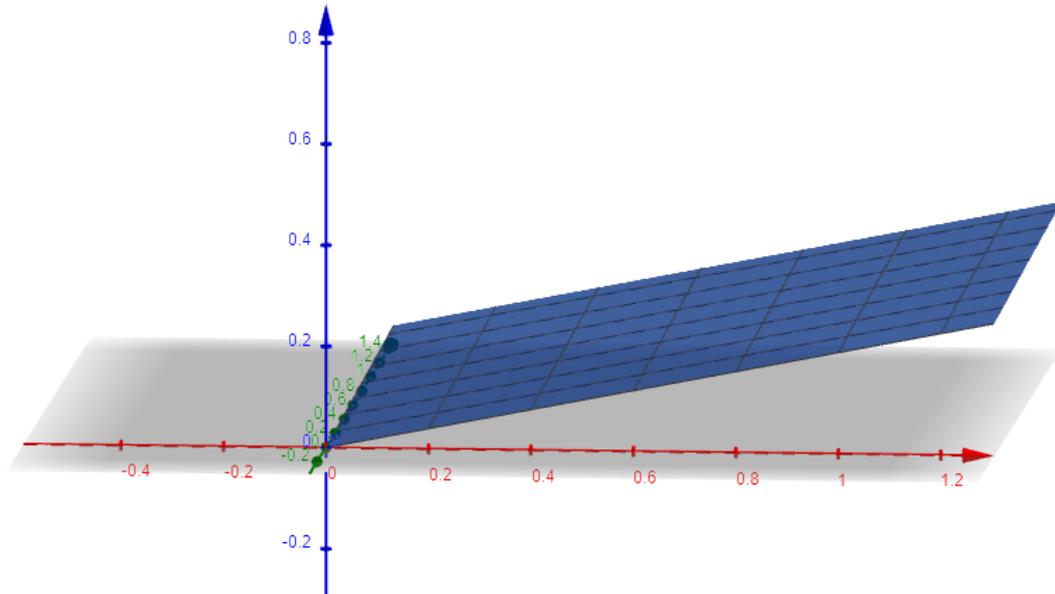


Figura 3.7: Gráfico da função custo (3.15) do Plano A.

O gráfico da função de custo para o plano B está representado na Figura 3.8, assim, a região em vermelho possui os pontos que satisfazem a função 3.16. Na Figura 3.9, temos em verde a região que possui os pontos que satisfazem a função 3.17. Na Figura 3.10 vemos a representação gráfica da função 3.18.

A seguir, iremos simular o valor gasto com o celular durante 1 mês para dois tipos de usuários escolhidos arbitrariamente. Para o primeiro usuário, iremos considerar um consumo mensal de 10 horas em ligações e 2 GB de internet. Para o segundo usuário, o consumo mensal é de 40 minutos em ligações e 10 GB de internet.

**Usuário 1:** Este usuário faz muitas ligações e tem um consumo de dados relativamente baixo. Vamos analisar o gasto com ligações e com internet deste usuário nos planos A, B, C, D. Ele necessita de 10 horas ou 600 minutos em ligações e 2 GB ou 2048 MB por mês. Sendo assim,  $x = 600$  e  $y = 2048$ . Dessa maneira, vamos determinar  $f(600, 2048)$  nos planos A, B, C e D.

**Plano A:** De (3.15) obtemos

$$f(600, 2048) = 0,20 \cdot 600 + 0,0199 \cdot 2048 = 160,76.$$

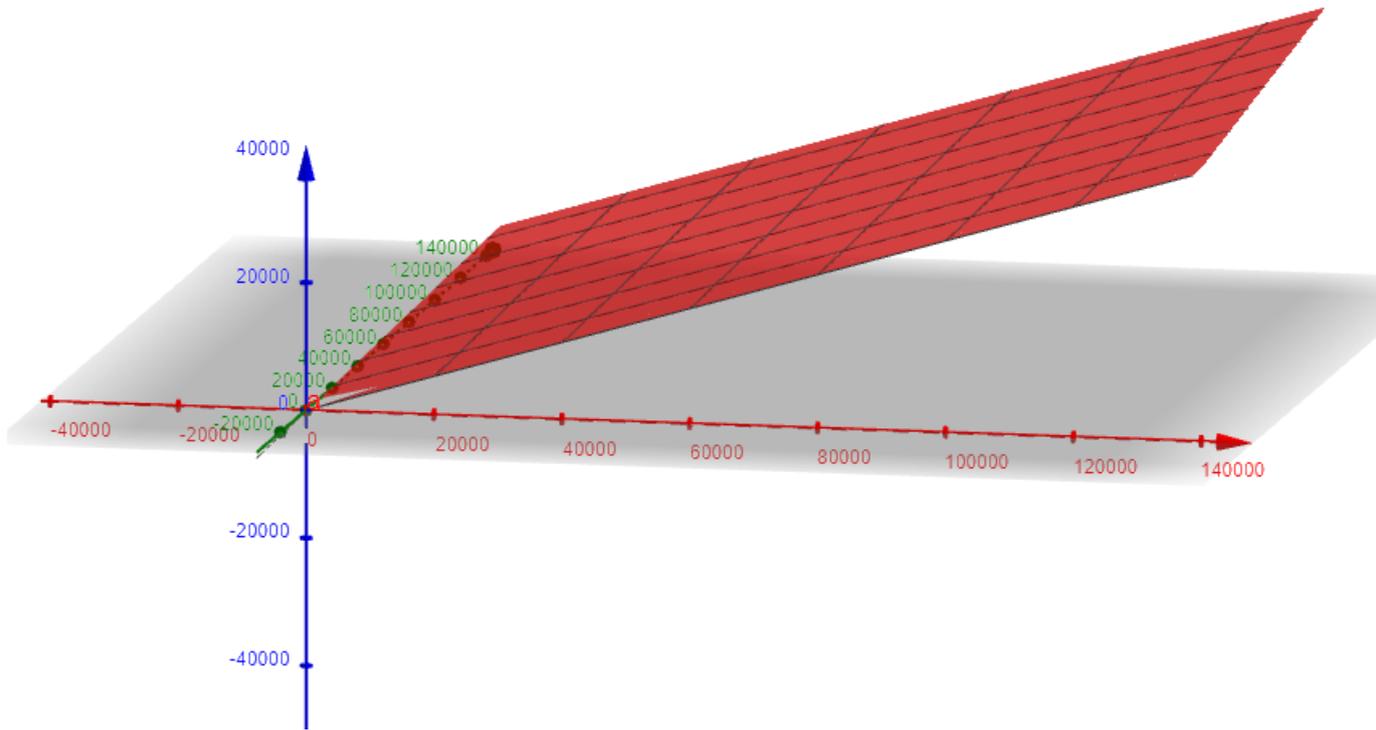


Figura 3.8: Gráfico da função custo (3.16) do Plano B.

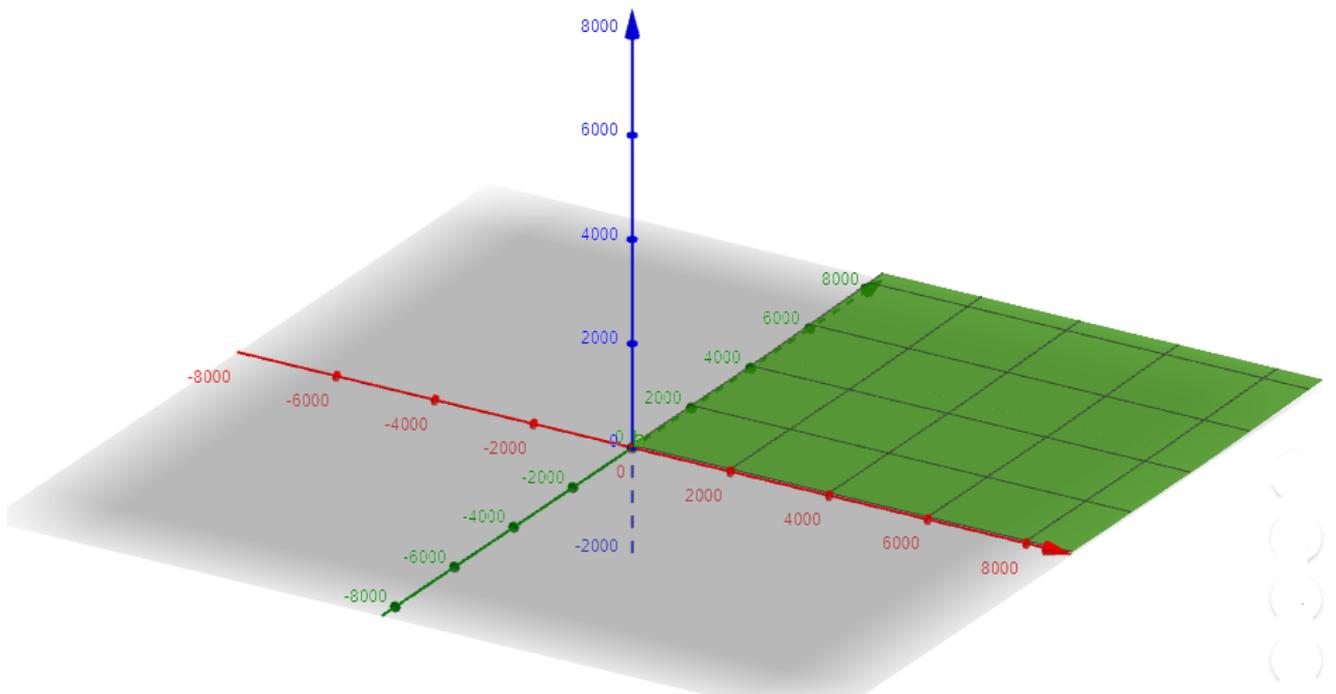


Figura 3.9: Gráfico da função custo (3.17) do Plano C.

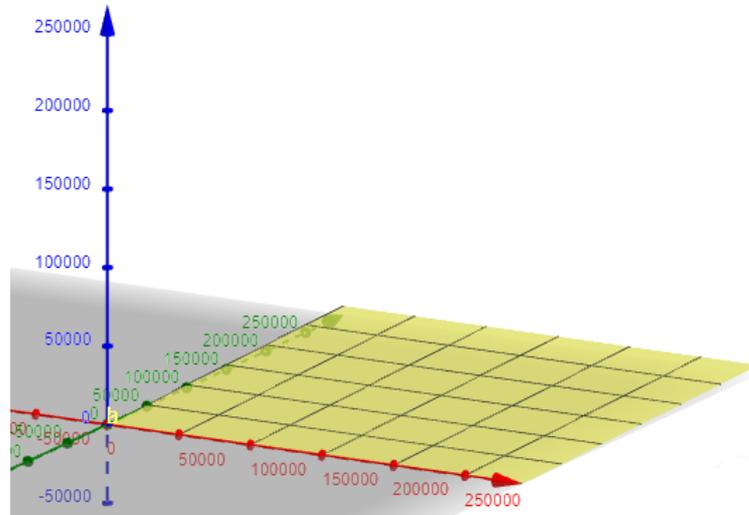


Figura 3.10: Gráfico da função custo (3.18) do Plano D.

**Plano B:** De (3.16) obtemos

$$f(600, 2048) = (600 - 100) \cdot 0,30 + 40 = 190.$$

**Plano C:** De (3.17) obtemos

$$f(600, 2048) = 49,99. \tag{3.19}$$

**Plano D:** De (3.18) obtemos

$$f(600, 2048) = 129,99. \tag{3.20}$$

Para este usuário, a opção com menor preço é o plano C, no qual ele irá pagar R\$ 49,99.

**Usuário 2:** Usa pouco o celular para chamadas de voz e tem consumo de 10 GB de internet. O consumo do usuário é de 40 minutos com ligações e 10 GB ou 10240 MB com dados. Dessa forma, temos:  $x = 40$  e  $y = 10240$ . Vamos calcular  $f(40, 10240)$  nos planos A,B, C e D.

**Plano A:** De (3.15) obtemos

$$f(40, 10240) = 0,20 \cdot 40 + 0,0199 \cdot 10240 = 211,78.$$

**Plano B:** De (3.16) vemos que

$$f(40, 10240) = (10240 - 6144) \cdot 0,0199 + 40 = 121,51.$$

**Plano C:** De (3.17) obtemos

$$f(40, 10240) = (10240 - 4608) \cdot 0,0199 + 49,99 = 162,07. \quad (3.21)$$

**Plano D:** De (3.18) temos

$$f(40, 10240) = 129,99. \quad (3.22)$$

Para este usuário, percebemos que o plano B é o mais vantajoso, pois apresenta o menor custo.

## 3.5 Avaliação dos Resultados

### 3.5.1 Primeiro Caso

Diante do observado na Seção 3.4 (Solução do problema), agora iremos analisar os planos. A Figura 3.1 mostra as funções que definem o custo por ligações em função do tempo em chamadas. De (3.2) vemos que a função que define o plano A é crescente, assim é possível observar que para um  $t < 250 \Rightarrow f(t) < f(250) = 50$ . Isso mostra que o plano mais vantajoso, ou seja, o que apresenta o menor preço para um mesmo  $t$  em ligações, é o plano A. Sendo assim, este plano é para aquele usuário que usa pouco o telefone para ligações, pois pagará por minuto e ligação. Isso torna possível que uma pessoa disposta a usar pouco o seu celular para chamadas telefônicas pague apenas pelo que usa, pois se ela escolhesse os outros planos pagaria um valor mais elevado e não iria fazer uso de todos os minutos ofertados nestes planos.

A desvantagem deste plano é valores absurdos quando o tempo é alto. Uma pessoa que precise fazer muitas ligações com longa duração, deverá optar por outro plano, pois, neste caso, o valor gasto com a conta de celular seria inviável. Pela análise do gráfico fica claro que o plano A deve ser escolhido por um usuário que use pouco o celular e quer pagar pouco por este consumo.

Analogamente a (3.3), a função que define o plano B é monótona não decrescente. Observe que para  $t < 100$ ,  $f(t) = 40$ , assim, um usuário que necessita de um tempo  $t < 100$  também deve optar pelo plano A, pois pagará menos pelo seu consumo. O plano B é vantajoso somente em relação ao plano C para um tempo  $t \leq 130$ , pois, nesse caso,  $f(t) < 49,99$ . Há a possibilidade de um controle maior do orçamento, visto que oferece a opção de um valor fixo mensal se  $t < 100$ . O usuário que faz muitas chamadas também não possui vantagem neste plano, pois o valor da conta fica inviável para um tempo em

Plano	Comparativo
A	Vantajoso para usuários que usam pouco o celular e inviável para aqueles que fazem muitas ligações
B	Não é vantajoso para nenhum perfil de usuário. Aqueles que precisam de menos que 130 minutos em ligações irão pagar menos no plano B do que nos planos C e D, mas se optarem pelo plano A, o valor da conta de celular será inferior ao valor da conta no plano B.
C	Vantajoso para usuários que usam muito o celular, pois podem falar a vontade sem preocupação com o valor da conta
D	Não se mostrou vantajoso para nenhum perfil de usuário.

Figura 3.11: Comparativo de vantagens e desvantagens dos planos A, B, C e D

ligação elevado.

A função que define o plano C é constante. O plano C oferece ligações ilimitadas, isso significa que o usuário pode falar a vontade sem se preocupar com o valor da conta, pois o valor cobrado pelo tempo em ligações é fixo. Inicialmente, imaginamos que é vantajoso para qualquer perfil, mas pelo gráfico (Figura 3.1) podemos perceber que só vale a pena para um tempo  $t > 250$ . Dessa maneira, pessoas que usam pouco o telefone para ligações devem optar por outro plano, porque irão pagar por um benefício que não será usado. A vantagem deste plano é poder usar o celular sem preocupação com o valor da conta, pois ele é fixo.

A função que define o plano D também é constante. O plano D também oferece ligações ilimitadas, mas possui um valor bem mais elevado que o C. Sendo assim, analisando somente o uso do aparelho para realizar chamadas, este plano não é vantajoso para nenhum perfil de usuário.

Em uma análise, percebemos que o usuário que usa pouco o celular para chamadas deve escolher o plano A e aquele que necessita de fazer muitas ligações deve optar pelo plano C. Para uma melhor compreensão e visualização, a tabela da Figura 3.11 nos traz qual plano é mais vantajoso para cada perfil de usuário quando analisamos os custos com o tempo em minutos de ligações.

### 3.5.2 Segundo Caso

A análise das dez ligações da tabela Figura 3.1 tem como objetivo a verificação do impacto da política de arredondamento na cobrança das tarifas de celular. Para ter uma melhor conclusão a respeito desta situação foi simulado o gasto mensal, considerando que todos os dias seriam feitas as mesmas ligações.

Na primeira opção, com o arredondamento no final do mês, seria cobrado por 1245 minutos em ligações. Caso o arredondamento fosse feito ao fim do dia, a cobrança seria por 1260 minutos, ou seja, 15 minutos a mais por uma simples mudança na política de arredondamento. Por fim, simulamos também o arredondamento ao final de cada ligação, nesse caso, a cobrança seria por 1380 minutos em ligações, 135 minutos a mais que a primeira opção. Nesse caso, a cobrança seria de mais de 2 horas em ligações.

Analisamos também os valores pagos nos planos A e B. É possível perceber que o valor a se pagar aumenta muito, tanto no plano A, quanto no plano B. Para o arredondamento ao final do mês, os valores seriam de  $R\$ 249,99$  no plano A e  $R\$ 383,50$  no plano B. Com o arredondamento ao final do dia, temos um valor de  $R\$ 252,00$  no plano A e  $R\$ 388,00$  no plano B. Aumentos de  $R\$ 2,01$  no plano A e  $R\$ 4,50$  no plano B. Para o arredondamento ao final de cada ligação (o que geralmente é feito pelas operadoras), o valor cobrado no plano A seria de  $R\$ 276,00$ , aumento de  $R\$ 27,00$  para o caso de arredondamento ao final do mês. No plano B, o valor cobrado seria de  $R\$ 424,00$ , um aumento de  $R\$ 40,50$  em relação ao arredondamento ao final do mês. Percebemos que os valores são absurdos para um usuário que tenha este consumo de minutos em ligação. Nesse caso, as melhores opções seriam os planos C ou D, que oferecem ligações ilimitadas.

Fizemos ainda a simulação de dez chamadas para dois usuários, o usuário 1, que se preocupa com as políticas de arredondamento, e o usuário 2, que não foi informado de sua existência, e por isso não se preocupa com ela. Percebemos que o usuário 2 paga pelo dobro do tempo, mesmo usando apenas alguns segundos a mais.

O aluno de ensino básico geralmente demonstra dificuldade em entender dados numéricos ou expressões matemáticas, por este motivo é essencial organizar estas informações em gráficos, de maneira a facilitar o entendimento. O gráfico Figura 3.4 mostra em azul o tempo pelo qual o usuário 1 seria cobrado e em laranja o tempo pelo qual o usuário 2 seria cobrado. O gráfico ajuda na visualização da alteração no tempo por uma simples mudança na política de arredondamento. Esta mesma alteração pode ser percebida no gráfico Figura 3.3. Ao final, fizemos um ajuste linear para as dez ligações das chamadas da Figura 3.1. Este ajuste nos deu a melhor reta que representa estes pontos (ver Figura 3.6).

Arredondamento	Plano A:	Plano B:
ao final do mês	R\$ 249,01	R\$ 383,50
ao final do dia	R\$ 252,00 +R\$ 2,01	R\$ 388,00 +R\$ 4,50
ao final de cada ligação:	276,00 +R\$ 26,01	R\$ 424,00 +R\$ 40,50

Figura 3.12: Simulação do valor das contas de acordo com o uso de políticas de arredondamento nos planos A e B

Novamente, vamos organizar as informações acima em uma tabela para um melhor entendimento. Temos o valor das contas simuladas nos planos A e B de acordo com cada tipo de arredondamento na tabela da Figura 3.12

### 3.5.3 Terceiro Caso

A análise das tarifas em função das chamadas de telefone e consumo de dados foi a mais completa. Isso porque, atualmente, as pessoas utilizam o telefone celular para o acesso à internet. O Plano A é vantajoso apenas para quem faz poucas ligações e pouco consumo de dados, pois nesse caso o valor a pagar é mais benéfico que os demais planos. O plano B se mostrou vantajoso para usuários que usam pouco o celular para ligações e possuem um consumo de dados inferior a 10 GB. O plano C é vantajoso para quem deseja utilizar o celular para fazer ligações sem se preocupar com o tempo, pois oferece ligações ilimitadas, e tem um consumo menor que 4,5 GB de internet. O plano D também é destinado aos usuários que procuram por ligações ilimitadas, mas só é vantajoso para aqueles que possuam um consumo de dados superior a 10 GB.

A tabela da Figura 3.13 resume as informações acima, apresentando as vantagens e desvantagens de cada plano. Dessa forma, a escolha do plano para determinado perfil de usuário se torna mais fácil.

## 3.6 Tomada de Decisão

Neste momento, serão analisados quais os resultados da modelagem são satisfatórios. No nosso caso, o objetivo é verificar o valor da conta de um telefone celular de acordo com os planos A, B, C, D. Como visto na Seção 3.5, foi possível verificar as vantagens e desvantagens em cada plano. Com isso, pode-se analisar qual plano é mais vantajoso para cada perfil de usuário. Como está análise foi realizável, nosso objetivo foi

Plano	Vantajoso para:	Desvantajoso para:
A	Usuários que usam pouco o celular, paga apenas pelo que usa	Usuários que usam muito o celular para ligações ou internet.
B	Usuários que usam pouco o celular para fazer ligações e tem um consumo de dados inferior a 10GB	Usuários que usam muito o celular para ligações ou internet.
C	Usuários que querem ligações ilimitadas e tem um consumo de dados menor que 4,5GB	Usuários que usam pouco o celular, pois pagarão por benefícios que não necessitam
D	Usuários que tem um consumo de dados maior que 10GB	Usuários que usam pouco o celular, pois pagarão por benefícios que não necessitam

Figura 3.13: Comparativo de vantagens e desvantagens dos planos A, B, C e D

cumprido. Sendo assim, podemos concluir que nosso modelo foi válido. Caso não fosse possível cumprir o objetivo ou mesmo alterar os objetivos ao longo da modelagem, iríamos reiniciar o processo, para buscar um novo modelo que nos atendesse. É importante observar que os pesquisadores envolvidos na modelagem em questão é quem deverão analisar se o modelo é válido nesta etapa.

Em nosso trabalho, definimos funções que permitem o cálculo do valor a ser pago em uma conta de telefone celular. A construção de gráficos nos permitiu uma melhor visualização das alternativas para diferentes perfis de usuário. Em um processo de modelagem, quanto mais ferramentas são usadas, mais precisos são os modelos encontrados. Para melhorar o modelo deste trabalho, pode-se analisar o custo com consumo de mensagens de texto, ou como é a cobrança de impostos em uma conta de celular. Contudo, quanto mais preciso é um modelo, mais técnicas e ferramentas matemáticas são necessárias para defini-lo e como o objetivo é utilizar o conhecimento matemático disponível na educação básica, nossa análise se limitou ao consumo de minutos em ligações e dados de internet. O mais importante é entender que todo o processo de modelagem desenvolve habilidades matemáticas nos alunos.

Sugerimos, através do Anexo I, um cronograma para a aplicação deste exemplo de modelagem no ensino. Além disso, há também as habilidades da BNCC que são trabalhadas nesse projeto. O professor de matemática que ficar inspirado a modelar em suas aulas pode seguir o roteiro e fazer as alterações necessárias para adaptá-lo à realidade

da turma em que desejar aplicar a modelagem matemática das tarifas de telefonia móvel.

# Capítulo 4

## Modelagem Matemática: Crescimento Exponencial e Epidemiologia

Como problema de aplicação do estudado nesta dissertação, consideramos oportuno abordar o tema de crescimento exponencial e a sua influência nos problemas de epidemiologia. Podemos encontrar diversos modelos epidemiológicos na literatura, cada um interpretando situações de características diferentes. Nosso objetivo, entre outros, está focado na propagação do coronavírus (COVID-19) no Brasil e a sua modelagem matemática do ponto de vista do ensino. Devido aos amplos modelos das ferramentas matemáticas que são usados neste campo, limitaremos o problema a modelar à interpretação do tipo de crescimento desse vírus. A expressão “essa grandeza apresenta um crescimento ou decrescimento do tipo exponencial” é conhecida pelas pessoas, contudo a maioria delas têm dificuldade em compreender o seu significado. Nesse sentido, é importante caracterizar o tipo de crescimento que modela nosso problema. A seguir, apresentamos a modelagem matemática do problema.

### 4.1 Formulação do Problema

A formulação do problema será feita de forma motivadora para que o aluno possa ter um fator de interesse na área da pesquisa. Por exemplo, se o tema escolhido for a taxa de mortalidade de uma epidemia em uma determinada população, então podemos pensar em modelar o problema através de mecanismos de controle para a disseminação da epidemia. Diversas ferramentas matemáticas podem ser aplicadas nesse sentido, mas

em um nível de ensino médio poucas chances existem. A importância da escolha de temas também reside em que estes sejam escolhidos pelos próprios alunos com o propósito de que, junto com o professor, sintam-se responsáveis pelo processo da modelagem; o desenvolvimento deve ser feito em grupos, cada um deles com sua própria responsabilidade, com o objetivo de obter resultados positivos da modelagem do problema. Nesse sentido, dada a existência de uma pandemia originada pelo novo coronavírus (COVID-19), esperamos que o aluno encontre motivação no tema do problema. A formulação do problema a modelar é: *Em uma população de pessoas se observa que a taxa de mortalidade está infligida pela infecção do vírus que causa a COVID-19. Observa-se que a taxa de crescimento de pessoas infectadas pelo coronavírus é proporcional ao número médio de pessoas expostas ao vírus a cada dia, à probabilidade de cada exposição se tornar uma infecção e ao próprio número de pessoas. Desejamos obter um modelo matemático que represente o problema de como encontrar a taxa de crescimento das pessoas infectadas.*

## 4.2 Situação do Problema

A frase “crescimento exponencial” é familiar para a maioria das pessoas, ainda assim, às vezes, há alguma dificuldade em reconhecer o que ela significa. Podemos nos fixar em uma sequência de pequenos números e, em seguida, nos surpreender quando estes aparecerem grandes, mesmo que a tendência geral siga uma exponencial perfeitamente consistente. A estratégia a utilizar é a seguinte: analisamos a curva de crescimento das pessoas infectadas a cada dia, isso significa, estudar o comportamento a cada dia e ver a existência de pontos de inflexão, pois isso indicará em que determinado dia a curva decrescerá. Caso exista um decaimento no número de casos de pessoas infectadas, poderíamos pensar também, qual seria a sua origem. No caso possível de obter resultados positivos, teremos determinado, na verdade, o fator de impacto do problema, pois isso permitirá que pesquisadores na área de biologia usem esses resultados e apliquem mecanismos de inibição do vírus, determinando dessa forma a *situação do problema*. A situação do problema estará no contexto das variáveis discretas.

### 4.2.1 Coleta de Dados:

Consideramos como *coleta de dados* a analisar as pessoas infectadas com o COVID-19 no Brasil, no ano 2020, registrados a cada dia, de 24 de fevereiro até 07 de julho, como indica a Tabela 4.1. Dados registrados pelo portal worldometers Brasil.

<https://www.worldometers.info/coronavirus/country/brazil/> Considerando:

- $d$  dia considerado,
- $N_d$  o número de casos em um determinado dia  $d$ ,

Para não perder uma oportunidade para o ensino de matemática através da modelagem matemática, foi pensado que seria um bom momento para todos nós voltarmos ao conhecimento básico sobre:

- O que é crescimento exponencial?
- De onde vem?
- O que implica?
- E talvez o mais urgente, como saber quando isto chega ao fim?

De acordo com Teorema 2 do capítulo 1, temos a definição de função exponencial:

*Dados os números reais  $a$  e  $b$ , tal que  $0 < a \neq 1$  e  $b \neq 0$ , chamamos função exponencial de base  $a$  a função  $f$  de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}$  que associa a cada  $x$  real o número  $ba^x$ . Ou seja:*

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longrightarrow ba^x$$

Dessa forma, a função exponencial é do tipo  $f(x) = ba^x$

Conseguimos perceber que crescimento exponencial significa que quando passamos de um estágio de uma grandeza para outra (no caso passamos de um dia para outro), envolve multiplicar o número de casos no dia  $d$  por alguma constante. Na seguinte seção, explicaremos esta característica das funções exponenciais e estabeleceremos o problema de encontrar as constantes  $a$  e  $b$  analisando os dados da Tabela 4.1. O fenômeno epidemiológico é exemplo nos livros didáticos desse tipo de crescimento, porque o que causa novos casos são os casos existentes, traduzindo em termos da função exponencial, isso significa, multiplicar a cada dia os casos infectados pela constante de crescimento.

### 4.3 Solução do Problema

Aproveitando a oportunidade do ensino, vamos também lembrar ao aluno o conceito de probabilidade. Assunto trabalhado no ensino médio e que é usado para o entendimento de como surgem os novos casos de COVID-19.

$d$	$N_d$	$d$	$N_d$	$d$	$N_d$	$d$	$N_d$
24/02	0	28/03	3,904	30/04	85,380	02/06	556,668
25/02	0	29/03	4,256	01/05	92,109	03/06	583,980
26/02	1	30/03	4,630	02/05	96,559	04/06	615,870
27/02	1	31/03	5,717	03/05	101,147	05/06	646,006
28/02	1	01/04	6,880	04/05	108,266	06/06	673,587
29/02	2	02/04	8,044	05/05	114,715	07/06	691,962
01/03	2	03/04	9,194	06/05	126,611	08/06	710,887
02/03	2	04/04	10,360	07/05	135,693	09/06	742,084
03/03	2	05/04	11,254	08/05	145,892	10/06	775,184
04/03	8	06/04	12,183	09/05	156,061	11/06	805,649
05/03	8	07/04	14,034	10/05	162,699	12/06	829,902
06/03	13	08/04	16,188	11/05	169,143	13/06	850,796
07/03	19	09/04	18,145	12/05	177,602	14/06	867,882
08/03	25	10/04	19,789	13/05	189,157	15/06	891,556
09/03	25	11/04	20,962	14/05	202,918	16/06	928,834
10/03	34	12/04	22,192	15/05	218,223	17/06	960,309
11/03	52	13/04	23,430	16/05	233,142	18/06	983,359
12/03	77	14/04	25,262	17/05	241,080	19/06	1,038,568
13/03	151	15/04	28,610	18/05	255,368	20/06	1,070,139
14/03	151	16/04	30,683	19/05	271,885	21/06	1,086,990
15/03	200	17/04	33,682	20/05	293,357	22/06	1,111,348
16/03	234	18/04	36,722	21/05	310,921	23/06	1,151,479
17/03	346	19/04	38,654	22/05	330,890	24/06	1,192,474
18/03	529	20/04	40,743	23/05	347,398	25/06	1,233,147
19/03	640	21/04	43,079	24/05	363,618	26/06	1,280,054
20/03	970	22/04	45,757	25/05	376,669	27/06	1,315,941
21/03	1,178	23/04	49,492	26/05	392,360	28/06	1,345,254
22/03	1,546	24/04	52,995	27/05	414,661	29/06	1,370,488
23/03	1,924	25/04	59,196	28/05	438,812	30/06	1,408,485
24/03	2,247	26/04	62,859	29/05	468,338	01/07	1,453,369
25/03	2,554	27/04	66,501	30/05	498,440	02/07	1,501,353
26/03	2,985	28/04	72,899	31/05	514,849	03/07	1,543,341
27/03	3,417	29/04	79,361	01/06	529,405	04/07	1,578,376

Tabela 4.1: Números de pessoas infectadas pelo coronavírus no Brasil entre fevereiro e julho de 2020

Primeiramente, da teoria de grandezas proporcionais, definição 15 do capítulo 1, lembramos o seguinte: *se uma grandeza  $z = f(x, y)$  é proporcional a  $x$ , enquanto  $y$  permanece constante, e quando  $z$  é proporcional a  $y$  enquanto  $x$  permanece constante, então  $z$  é proporcional ao produto  $xy$ , isto é,*

$$z = c \cdot xy, \quad c \in \mathbb{R}. \quad (4.1)$$

Se denotamos:

- $N_d$  o número de casos em um determinado dia  $d$ ,
- $E$  o número médio de pessoas *expostas* ao vírus a cada dia  $d$ ,
- $p$  a probabilidade de cada exposição se tornar uma infecção.

Logo, se  $N_d$  cresce, então a variação ou taxa de crescimento  $\Delta N_d = N_{d+1} - N_d$  do número de casos de um determinado dia  $d$  para o dia seguinte  $d + 1$  também aumenta em cada dia. Analogamente, se  $E$  e  $p$  crescem a medida que os dias passam, então  $\Delta N_d$  também cresce. O que implica de (4.1) que ao manter constante uma das variáveis que definem a função  $z$ , pode ser aplicado o Teorema Fundamental da Proporcionalidade, visto como uma função de somente uma variável.  $E$ ,  $p$  e  $N_d$  temos

$$\Delta N_d = b \cdot E \cdot p \cdot N_d, \quad (4.2)$$

onde  $b$  é a constante de proporcionalidade. Observe que  $E \cdot p \cdot N_d$  representa o número de novos casos em cada dia.

### **Hipóteses de Simplificação:**

Diversas considerações podem ser feitas com o objetivo de que a modelagem se torne, em um primeiro estágio, mais compreensível. Como foi visto nas etapas da modelagem matemática, o professor deve ser capaz de considerar hipóteses de simplificação do problema, sem sair da realidade do mesmo, isso permitirá repensar o problema para ter um modelo mais sofisticado, de acordo com os mecanismos ou ferramentas matemáticas com os quais o usuário a desenvolver o modelo está familiarizado. Nesse sentido, as hipóteses de simplificação têm por objetivo a adaptação do aluno com a teoria matemática a ser usada, para logo enriquecer o modelo e torná-lo um modelo mais real. Sendo o objetivo dessa dissertação motivar ao aluno em um nível de ensino médio, vamos considerar o caso em que  $b = 1$  e  $E, p$  são constantes. O fato de considerar  $b, E, p$  constantes não é sempre

satisfeito, logo, aqui estamos fazendo uso da *hipóteses de simplificação* do processo de modelagem matemática. Para ser mais preciso, é importante também desejar contabilizar as pessoas que tiveram o vírus, mas sem existir a possibilidade de poder mais espalhá-lo, como é o caso por exemplo das pessoas que conseguem se recuperar. Vamos manter as coisas simples aqui. Embora se imagine que, em uma curva exponencial, a maioria das pessoas infectadas pelo vírus tenha se contaminado recentemente, aqui, novamente fazemos uso da *hipóteses de simplificação* com o intuito de apresentar o estudo em um nível de um aluno de ensino médio.

### O que é crescimento exponencial?

Para responder a essa questão, voltamos a (4.2). Vemos que uma outra maneira de traduzir o dito, é que, à medida que são adicionados novos casos para obter a contagem do dia seguinte  $N_d + 1$ , temos

$$N_{d+1} = N_d + E \cdot p \cdot N_d, \quad (4.3)$$

o que implica, que o número de casos no dia  $d$ ,  $N_d$  pode ser fatorado da forma

$$N_{d+1} = (1 + E \cdot p)N_d, \quad (4.4)$$

ou seja, o número de casos  $N_{d+1}$  no dia seguinte  $d+1$  é multiplicado por uma constante que não depende do número de dias  $d$  e maior que um. Isso representa uma *característica própria ou elementar do crescimento exponencial*, isto é, quando um número específico é multiplicado diariamente por um valor constante, de forma que cresce rapidamente e parece se tornar matematicamente “incontrolável” ou exponencial. Isso significa que à medida que a quantidade aumenta, aumenta também a taxa na qual ela cresce.

Uma outra característica natural nesses tipos de problemas de crescimento de população de pessoas infetadas, ou do crescimento de uma colônia de vírus, está no fato que sendo  $1 + E \cdot p > 1$  a relação

$$\frac{N_{d+1}}{N_d} > 1,$$

interpreta a taxa do crescimento da quantidade de indivíduos à medida que o tempo

crece. Se considerarmos  $N_0$  o número inicial de casos possíveis, obtemos

$$\begin{aligned}
 N_1 &= (1 + E \cdot p)N_0, \\
 N_2 &= (1 + E \cdot p)N_1 = (1 + E \cdot p)^2 N_0, \\
 N_3 &= (1 + E \cdot p)N_2 = (1 + E \cdot p)^3 N_0, \\
 &\dots \\
 N_d &= (1 + E \cdot p)^d N_0.
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

**Observação 5.** *Observamos de (4.3) que a taxa de crescimento relativo de  $N_d$  (ver Teorema 2, Capítulo 1) não depende da variável independente  $d$  e sim do fator de incremento  $= E \cdot p$ , ou seja, a taxa de crescimento:*

$$\frac{N_{d+1} - N_d}{N_d} = E \cdot p = \text{constante em relação a } d,$$

*confirma que nosso modelo matemático é caracterizado pela dinâmica de uma função exponencial, em virtude do Teorema da Caracterização de uma Função Exponencial, ver (LIMA, 2013).*

### Verificando a Característica Elementar de uma Função Exponencial

Mas, é possível instruir a informação a um aluno de ensino médio que existe uma outra alternativa de poder reconhecer ou caracterizar uma função que segue um comportamento definido por uma função do tipo exponencial, sem a necessidade de ir ao Teorema de Caracterização de uma função do tipo exponencial, ou seja, de que forma podemos saber quando lidar com uma função que descreve o número de pessoas infectadas. É nesse sentido que neste trabalho abordaremos o ensino de crescimento exponencial através da modelagem matemática do controle de epidemias, colocando em evidência a existência dessa constante  $1 + E \cdot p$ , independente do número de dias  $d$ . O processo de difusão e contágio de epidemias é dado pela influência dos casos existentes sobre as pessoas não infectadas, o que dá origem a novos casos. De outro lado, para iniciar nosso estudo, é importante observar de (4.4) a aparição natural da constante  $1 + E \cdot p$ , pelo menos na situação das hipóteses de simplificação consideradas.

A Figura 4.1 apresenta a representação gráfica dos números de casos do COVID-19 no Brasil e nela podemos observar como se comporta um crescimento exponencial, o número de casos de COVID-19 no Brasil começa a crescer seguindo um padrão que, inicialmente, não parece ser motivo de preocupação, mas logo começa a crescer rapidamente.

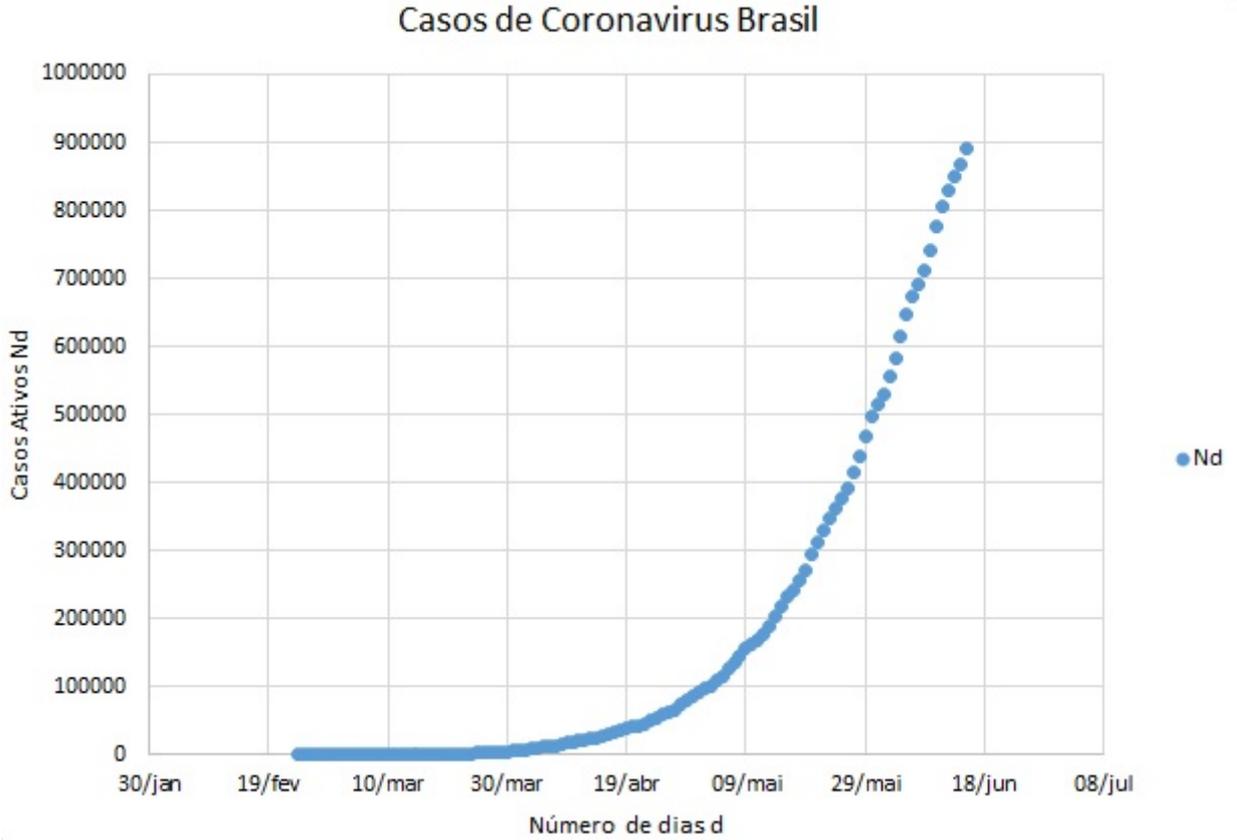


Figura 4.1: Casos de pessoas infectadas pelo COVID-19 no Brasil.

Voltando à coleta de nossos dados mostrados pela Tabela 4.1, analisamos em cada intervalo de um dia o crescimento das pessoas infectadas à medida que passam os dias. Obtemos a partir do dia 06 de março de 2020 os dados mostrados na Tabela 4.2. Vemos que o número de casos por dia tende a estar entre 1,00 e 1,96 vezes o número de casos no dia anterior, o que significa que o modelo matemático considerado, efetivamente, é definido por uma função do tipo exponencial. Para entender isso, em (4.4) vemos que a passagem de um estágio para outro no modelo exponencial, é definido pela multiplicação das pessoas infectadas no dia  $d$  pelo fator constante  $1 + E \cdot p$ .

Provaremos que é isso o que acontece com os nossos dados, analisando a Tabela 4.2 que, além dos dados da Tabela 4.1, possui a coluna com o fator  $1 + E \cdot p$ . Temos que os dados implicam que  $1,00 \leq 1 + E \cdot p \leq 1,96$  ou  $0 \leq E \cdot p \leq 0,96$ , isso quer dizer,

$$N_d \leq (1 + E \cdot p)N_d \leq 1,96N_d,$$

ou

$$N_d \leq N_{d+1} \leq 1,96N_d. \tag{4.6}$$

(4.6) significa que, **o que causa novos casos de infecção são os casos existentes** nesse intervalo de dias.

A figura 4.2 representa, graficamente, a presença da primeira pessoa infectada por COVID-19 e na Figura 4.3 temos a representação gráfica do aumento de número de pessoas infectadas, que inicialmente mantém um padrão e logo se torna caótico.

Portanto, os dados representados na Figura 4.2 e na Figura 4.3 permitem concluir que a curva de casos infectados  $N_d$  obedece um modelo do tipo exponencial, o qual dá resposta ao fato que o problema de crescimento do COVID-19 se comporta de maneira exponencial e ao significado de crescimento exponencial.

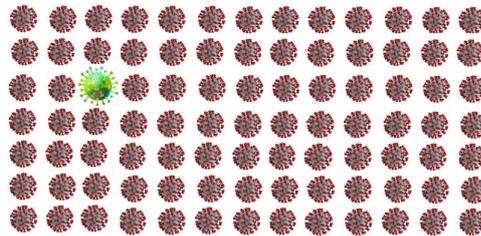


Figura 4.2: Início do processo de pessoas infectadas pelo COVID-19.

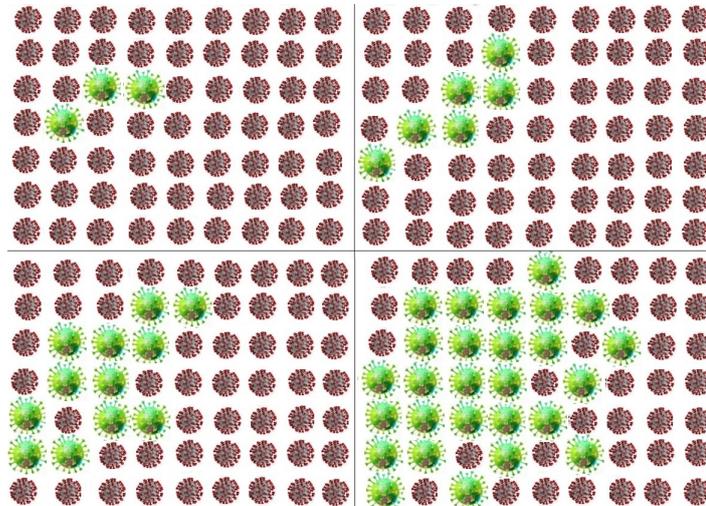


Figura 4.3: Início do processo de pessoas infectadas pelo COVID-19.

### De onde vem?

Para responder a esta pergunta, observe que sendo o número de novos casos em cada dia  $E \cdot p \cdot N_d$ , vemos que o fato do próprio  $N_d$  ser parte disso é o que realmente faz as coisas correrem rápido porque, à medida que  $N_d$  cresce, a taxa de crescimento  $\Delta N_d = N_{d+1} - N_d$  também aumenta em cada dia. Assim,  $\Delta N_d = E \cdot p \cdot N_d$  cresce rapidamente o que torna o estágio inicial de um crescimento do tipo exponencial.

$d$	$N_d$	$1 + Ep$	$N_{d+1}$	$d$	$N_d$	$1 + Ep$	$N_{d+1}$
06/03	13	1.63	19=13·1.46	06/04	12,183	1.08	14,034=12,183·1.15
07/03	19	1.46	25=19·1.32	07/04	14,034	1.15	16,188=14,034·1.15
08/03	25	1.32	25=25·1	08/04	16,188	1.15	18,145=16,188·1.12
09/03	25	1	34=25·1.36	09/04	18,145	1.12	19,789=18,145·1.09
10/03	34	1.36	52=34·1.53	10/04	19,789	1.09	20,962=19,789·1.05
11/03	52	1.53	77=52·1.48	11/04	20,962	1.05	22,192=20,962·1.05
12/03	77	1.48	151=77·1.96	12/04	22,192	1.05	23,430=22,192·1.06
13/03	151	1.96	151=151·1	13/04	23,430	1.06	25,262=23,430·1.09
14/03	151	1	200=151·1.32	14/04	25,262	1.09	28,610=25,262·1.13
15/03	200	1.32	234=200·1.17	15/04	28,610	1.13	30,683=28,610·1.07
16/03	234	1.17	346=234·1.47	16/04	30,683	1.07	33,682=30,683·1.10
17/03	346	1.47	529=346·1.53	17/04	33,682	1.10	36,722=33,682·1.09
18/03	529	1.53	640=529·1.21	18/04	36,722	1.09	38,654=36,722·1.05
19/03	640	1.21	970=640·1.52	19/04	38,654	1.05	40,743=38,654·1.05
20/03	970	1.52	1,178=970·1.21	20/04	40,743	1.05	43,079=40,743·1.06
21/03	1,178	1.21	1,546=1,178·1.31	21/04	43,079	1.06	45,757=43,079·1.06
22/03	1,546	1.31	1,924=1,546·1.24	22/04	45,757	1.06	49,492=45,757·1.09
23/03	1,924	1.24	2,247=1,924·1.17	23/04	49,492	1.09	52,995=49,492·1.07
24/03	2,247	1.17	2,554=2,247·1.13	24/04	52,995	1.07	59,196=52,995·1.11
25/03	2,554	1.13	2,985=2,554·1.17	25/04	59,196	1.11	62,859=59,196·1.06
26/03	2,985	1.17	3,417=2,985·1.14	26/04	62,859	1.06	66,501=62,859·1.06
27/03	3,417	1.14	3,904=3,417·1.14	27/04	66,501	1.06	72,899=66,501·1.10
28/03	3,904	1.14	4,256=3,904·1.10	28/04	72,899	1.10	79,361=72,899·1.09
29/03	4,256	1.10	4,630=4,256·1.09	29/04	79,361	1.09	85,380=79,361·1.08
30/03	4,630	1.09	5,717=4,630·1.23	30/04	85,380	1.08	92,109=85,380·1.08
31/03	5,717	1.23	6,880=5,717·1.20	01/05	92,109	1.08	96,559=92,109·1.05
01/04	6,880	1.20	8,044=6,880·1.17	02/05	96,559	1.05	101,147=96,559·1.05
02/04	8,044	1.17	9,144=8,044·1.14	03/05	101,147	1.05	108,266=101,147·1.07
03/04	9,194	1.14	10,360=9,194·1.13	04/05	108,266	1.07	114,715=108,266·1.06
04/04	10,360	1.13	11,254=10,360·1.09	05/05	114,715	1.06	126,611=114,715·1.10
05/04	11,254	1.09	12,183=11,254·1.08	06/05	126,611	1.10	

Tabela 4.2: Aumento do número de casos de COVID-19 no Brasil

## O que implica?

Para responder essa pergunta e por questões didáticas é recomendável passar a uma escala logarítmica. Assim, devido à grande quantidade de pessoas infectadas, colocamos o eixo vertical  $y$  numa escala logarítmica  $z$ ,

$$z = \log y(x), \quad (4.7)$$

isso significa que uma mesma distância no eixo vertical  $y$  corresponde a multiplicar por um determinado fator, neste caso, cada etapa é outra potência de 10, a Figura 4.4 nos mostra a escala logarítmica do número de casos de COVID-19 no Brasil. Nesta escala, o crescimento exponencial parece se comportar como uma linha reta, pelo menos para casos entre 100 a 10.000 pessoas infectadas. Podemos observar que com os nossos dados, o número de casos demorou 8 dias para ir de 100 para 1.000, 15 dias, para passar a 10.000. A Figura 4.5 traz a análise gráfica desse crescimento do número de casos de COVID-19 no Brasil entre os dias 12/03 e 04/04.

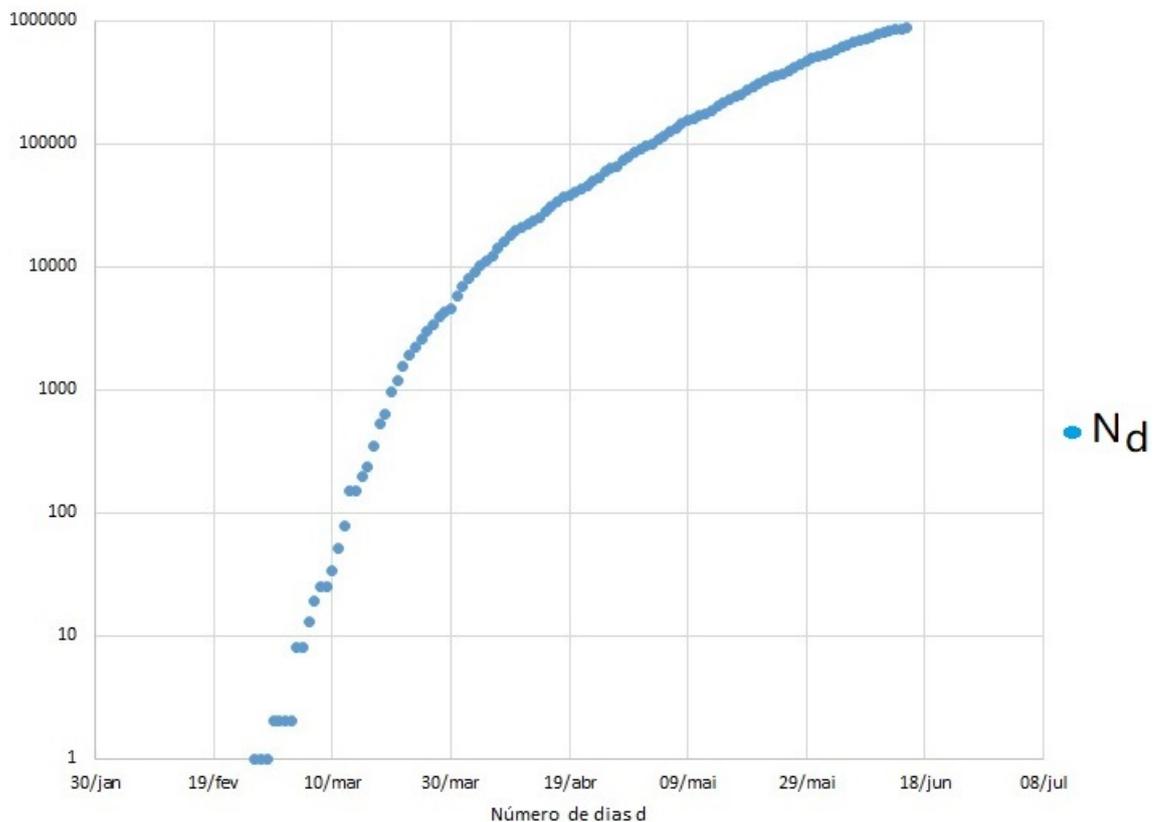


Figura 4.4: Escala Logarítmica do número de casos de COVID-19 no Brasil.

Sendo o objetivo principal deste capítulo o uso da modelagem matemática para

professores do ensino, o docente precisa verificar que seu modelo matemático está próximo da realidade do problema. Nesse sentido, uma regressão linear para os dados nessa escala permitirá encontrar a melhor linha de ajuste e calcular o coeficiente de Pearson (ver Capítulo 1, Definição 4), com o intuito de prever comportamentos com base na associação entre essas variáveis.



Figura 4.5: Análise do crescimento do número de casos de COVID-19 no Brasil entre os dias 12/03 e 04/04.

Usando a ferramenta do Excel, podemos encontrar para nossos dados na escala logarítmica, que a linha de regressão linear e o coeficiente de Person para nossos dados é respectivamente,

$$y = 268,7x - 1E + 07, \quad \mathcal{P} = 0,673.$$

Na figura 4.6, temos a linha de regressão do número de casos de COVID-19 no Brasil entre os dias 12/03 e 04/04.

Da inclinação dessa reta, (ver Figura 4.6), podemos inferir que o número de casos das pessoas infectadas tende a multiplicar por 10 a cada 12 dias, em média, pelo menos a partir do dia 12 de março até o dia 4 de abril. Essa regressão também nos permite ser mais precisos sobre a proximidade real do ajuste exponencial, pelo menos isso é o que indica o coeficiente de Person nesse primeiro estágio.

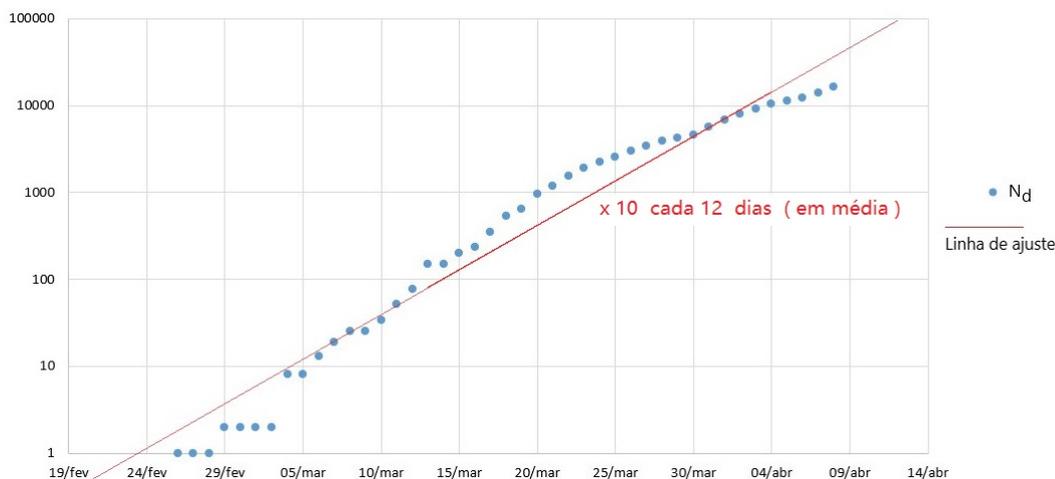


Figura 4.6: Linha de regressão do número de casos de COVID-19 no Brasil entre os dias 12/03 e 04/04.

As implicações do crescimento exponencial podem ser interpretadas de diversas formas, uma delas, está basicamente nessa aproximação das variáveis que mostra a linha de ajuste na escala logarítmica. Pode ser difícil assimilar o que isso (crescimento exponencial) realmente significa, se for verdade. Vamos a analisar a implicação de um crescimento exponencial fazendo as seguintes exemplificações: por exemplo, se vir um país com 6.000 casos de pessoas infectadas, enquanto outro tem 60, é fácil pensar que o segundo está 100 vezes melhor (escala linear) e, portanto, que está indo bem! Mas se estiver numa situação em que os números são multiplicados por 10 a cada 12 dias (escala logarítmica), outra conclusão poderíamos ter; é dizer, no mesmo fato podemos inferir que o segundo país está cerca de um mês atrás do primeiro. É claro que isso é bastante preocupante se nós tentamos estender a linha de ajuste. A Figura 4.7 mostra gráficamente como ficaria a situação se esta tendência (os números são multiplicados, em média, por 10 a cada 12 dias) se mantivesse. Isto irá se agravar no dia 4 de abril, e se a tendência atual continuar, isso significa que serão 1 milhão de casos em 24 dias (28 de abril), 10 milhões em 36 dias (10 de abril), 100 milhões em 48 dias (22 de maio) e 1 bilhão em 60 dias (04 de junho). Entretanto você não pode desenhar uma linha como essa para sempre, ela claramente deve começar a desacelerar em algum momento, mas a questão crucial é quando. É como o surto de SARS de 2002 encerrado em cerca de 8.000 casos, ou mais como a gripe espanhola, em 1918, que infectou cerca de 27 % da população mundial.

### Quando isto chega ao fim?

Em geral, desenhar uma linha através dos dados disponíveis, mas sem contextualização não é uma boa forma de fazer previsões, mas lembre-se de que existe um motivo

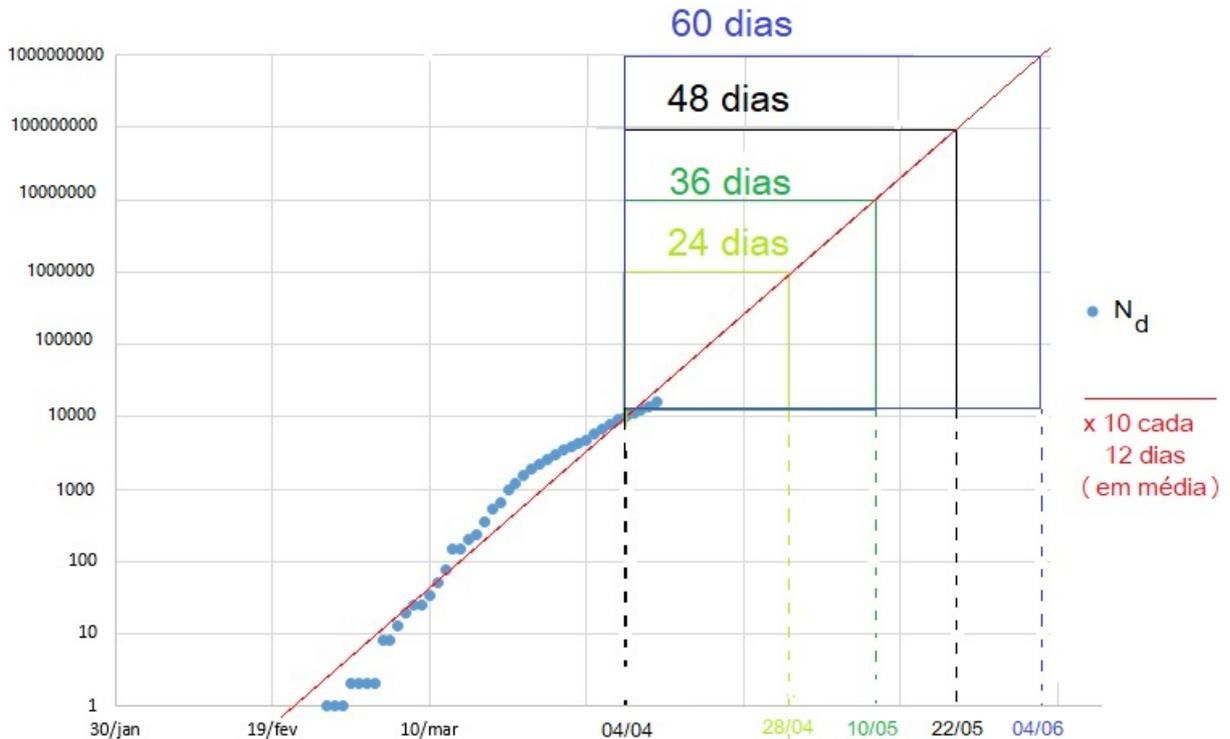


Figura 4.7: Previsão do número de casos de COVID-19 através da linha de regressão.

real para esperar um crescimento exponencial aqui. Se o número de novos casos por dia for proporcional ao número de casos existentes, isso significa que em cada dia se multiplica por alguma constante, portanto, avançar  $d$  dias é o mesmo que multiplicar por essa constante  $1 + E \cdot p$ ,  $d$  vezes. A única forma desta tendência parar é se os fatores  $E$  ou  $p$  diminuïrem. Porém é inevitável que isso irá ocorrer eventualmente, pois ante a falta de mecanismos de controle, seja vacina, medicamentos inibidores, etc. o processo de crescimento pode tomar características de uma pandemia. Isso implica a necessidade de nosso modelo seja mais realista e aqui estamos fazendo uso da etapa de avaliação da modelagem matemática. Sendo o objetivo principal de nosso trabalho a abordagem no ensino médio, vamos enfatizar as ferramentas matemáticas usadas. Mesmo no modelo mais pernicioso para um vírus, que seria onde todos os dias, cada pessoa com o vírus é exposta a um subconjunto aleatório da população mundial, em algum momento a maioria das pessoas as quais cada doente estará exposto já estão doentes e, portanto, não podem se tornar novos casos. Logo, na equação que define nosso modelo matemático, é necessário que a probabilidade de infecção inclua algum fator para que leve em consideração a probabilidade à qual a pessoa foi exposta e ainda não esteja infectada, o que para um modelo de exposição aleatória seria incluir um fator como:  $1 - a$  *proporção de pessoas no mundo que já está infectada*, onde  $a$  como é fácil de perceber, representa a proporção de pessoas no

mundo que não estão infectadas. Se considerarmos, em nosso modelo, que o número de novos casos no dia  $d$  ( $\Delta N_d$ ) é diretamente proporcional a  $1 - a$  e ao número de casos no dia  $d$  ( $N_d$ ), e resolvermos a equação para como  $N_d$  cresce, obtemos:

$$\Delta N_d = (1 - a)N_d. \quad (4.8)$$

Agora, nesse novo modelo faz sentido considerar o caso em que

$$a = \frac{N_d}{N},$$

onde  $N$  representa o tamanho da população, ou capacidade de suporte de certa região do mundo. Logo obtemos de (4.8) o chamado modelo logístico,

$$\Delta N_d = \left(1 - \frac{N_d}{N}\right) N_d. \quad (4.9)$$

Esse modelo é essencialmente indistinguível do modelo exponencial no início, mas ao final se torna constante quando se aproxima do tamanho total da população  $N$ , como seria de esperar. Modelos de crescimento de epidemias do tipo exponencial, na verdade, nunca ocorrem no mundo real, cada uma delas é o início de uma curva logística, isso devido a diversos fatores, entre eles podemos citar, a aparição de vacinas, isolamento ds pessoas, etc. Esse estágio do tempo, onde a curva logística deixa de ser curva para cima e passa a se curvar para baixo, é conhecido na matemática como *ponto de inflexão*. Nesse ponto da curva, o número de novos casos em cada dia, representado pela inclinação da curva, para de crescer e, ao invés, fica aproximadamente constante, antes começar a diminuir. Nos modelos epidemiológicos, como é nosso caso, os pesquisadores monitoram o crescimento do vírus ou bactérias através de uma medida ou número, chamado o *fator de crescimento* (FC) (MA, 2020), definido como a razão entre o número de novos casos em um dia e o número de casos no dia anterior, isto é

$$FC = \frac{\Delta N_d}{\Delta N_{d-1}}. \quad (4.10)$$

Qual é a importância desse fator de crescimento? Só para deixar claro, supor que estamos olhando para os números totais de um dia para o outro, e acompanhando as alterações entre estes números totais, por exemplo o fator de crescimento é a razão entre duas alterações sucessivas, ver Figura 4.8, onde podemos observar as variações do número de casos a cada dia e o o fator de crescimento. Enquanto estiver na região exponencial, este fator FC permanecerá consistentemente acima de 1, e quando o fator de crescimento

Data	$N_d$	Variações	Fator de Crescimento
Março 24, 2020	2,247		
Março 25, 2020	2,554	+307	$\frac{+431}{+307} = 1,403$
Março 26, 2020	2,985	+431	$\frac{+432}{+431} = 1,002$
Março 27, 2020	3,417	+432	

Figura 4.8: O fator de crescimento.

chegar perto 1, isto é sinal que o ponto de inflexão foi atingido, é dizer o ponto onde  $\Delta^2 N_d = \Delta N_{d+1} - \Delta N_d = 0$ , ou equivalentemente  $N_d = N/2$ , isto é  $FC = 1$ . Isso pode levar a outro fator contra intuitivo ao seguir os dados. Vamos pensar em como iria parecer se o número de novos casos num dia fosse cerca de 15% acima do que o número de novos casos no dia anterior, e vamos a comparar isto com o que pareceria se fosse o mesmo número. Nessa nova possibilidade, o número de novos casos seria na ordem de  $1,15(432) \approx 497$ , passando a ser em total  $3,417 + 497 = 3,914$  pessoas infectadas, (ver Figura 4.9). Agora,

Data	$N_d$	Variações	Fator de Crescimento
Março 24, 2020	2,247		
Março 25, 2020	2,554	+307	$\frac{+431}{+307} = 1,403$
Março 26, 2020	2,985	+431	$\frac{+432}{+431} = 1,002$
Março 27, 2020	3,417	+432	
	3,914	+497	$\frac{+497}{+432} = 1,15$

Figura 4.9: Crescimento acima do 15% do caso anterior.

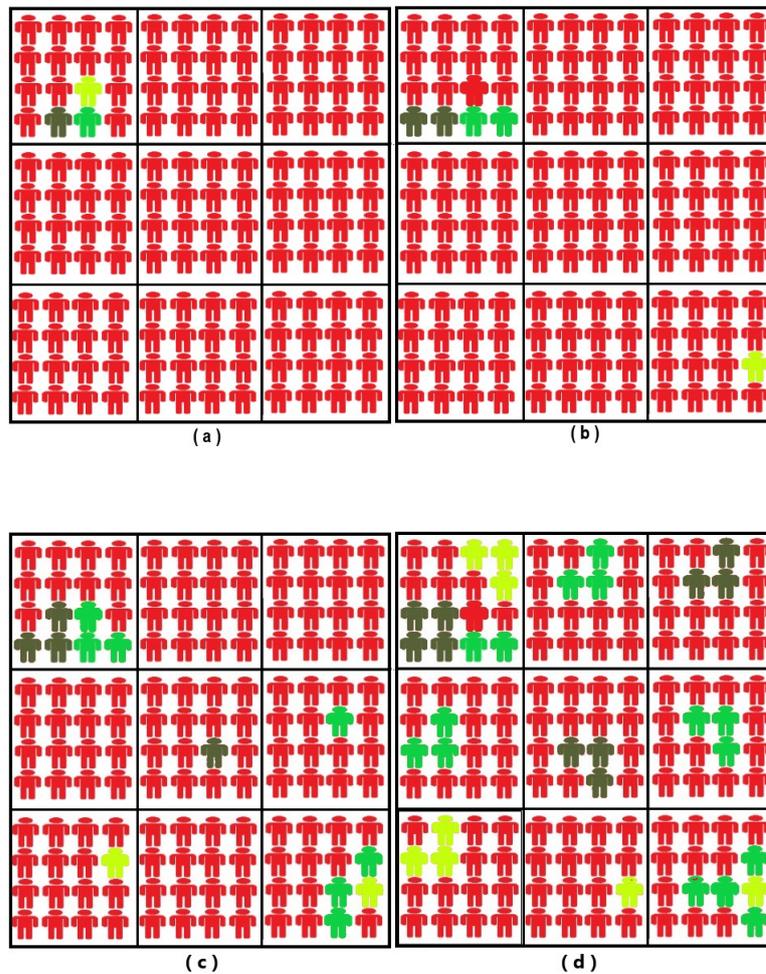
no caso em que no novo dia a variação fosse o mesmo número 432, olhando para os números totais na Figura 4.10, eles realmente não parecem ser tão diferentes, mas se o fator de crescimento for igual a 1, isto pode significar que chegamos no ponto de inflexão de uma curva logística, o que significa que o número total de casos  $N$  atingira no máximo o dobro do número de casos atuais  $N_d$ .

Mas um fator de crescimento maior que 1 significa que você está na parte exponencial, o que poderia implicar que temos ainda ordens de magnitude de crescimento à frente, o que torna a Figura 4.7 uma boa simulação de predição da doença. Enquanto,

Data	$N_d$	Variações	Fator de Crescimento
Março 24, 2020	2,247		
Março 25, 2020	2,554	+307	$\frac{+431}{+307} = 1,403$
Março 26, 2020	2,985	+431	$\frac{+432}{+431} = 1,002$
Março 27, 2020	3,417	+432	
	3,849	+432	$\frac{+432}{+432} = 1$

Figura 4.10: Crescimento no ponto de inflexão, variação 432.

no pior dos casos, esse ponto de saturação (ponto de inflexão) seria a população total, é claro que não é verdade que as pessoas com o vírus são aleatoriamente embaralhadas pelo mundo, as pessoas estão agrupadas em comunidades locais, é dizer segue um padrão de contágio.



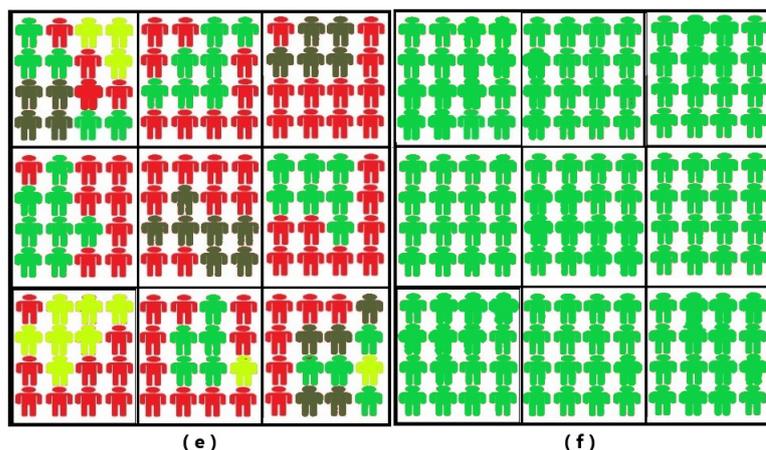


Figura 4.11: Processo de infecção em agrupações de comunidades.

A Figura 4.11 representa graficamente a situação de simulações onde há, mesmo que um pouco, de viagens entre os “clusters” o crescimento não é realmente tão diferente, o que aparece no final é um padrão tipo fractal ou repetitivo, em que as próprias comunidades locais funcionam como indivíduos, isso representará uma outra maneira de interpretar o crescimento exponencial (uso da etapa da *validação dos resultados* da modelagem matemática). Cada uma das pessoas é exposta a outras, com alguma probabilidade de espalhar a infecção, portanto as mesmas leis subjacentes de indução exponencial se aplicam. Felizmente, infectar toda a população mundial não é a única forma de fazer com que os dois fatores  $E, p$  importantes diminuam ao mesmo tempo. A quantidade de exposição (“ $E$ ”) também diminui quando as pessoas param de se reunir e viajar, e por outro lado, a taxa de infecção (“ $p$ ”) cai quando as pessoas lavam as mãos mais vezes. A outra coisa que é contra intuitivo sobre o crescimento exponencial, desta vez em um sentido mais otimista, é o quando sensível ele é a esta constante (“ $E \cdot p$ ”). Por exemplo, se  $E \cdot p = 15\%$ , e estamos na atualidade com uma população inicial de infectados de 21,000 casos, então, após de 61 dias podemos prever que

$$N_{61} = (1 + 0.15)^{61} \cdot 21,000 = 105,873,570,$$

isso significa que 61 dias a partir de agora serão mais de 100 milhões. Mas se através de um pouco menos de exposição e infecção, a taxa cair para  $E \cdot p = 5\%$ , isto é, a terceira parte do caso do exemplo anterior. Nesse caso teremos

$$N_{61} = (1 + 0.05)^{61} \cdot 21,000 = 1.05^{61} \cdot 21,000 = 411,876,$$

isso não significa que a projeção dos casos irá cair por um fator 3, na verdade, ela vai cair

para cerca de 400,000. A análise anterior permite inferir que se as pessoas que estão suficientemente preocupadas em contribuir conscientemente com as medidas de isolamento, optarem por mecanismos de desinfecção de mãos, alimentos, roupas, etc. então, o fator  $E \cdot p$  diminuirá, nesse caso haverá muito menos com o que nos preocupar antes da aparição da vacina. Caso contrário, se as autoridades, famílias e os cidadãos em geral não adotarem esses mecanismos, continuará a tendência de crescimento exponencial e teremos muito a nos preocupar. Em qualquer caso, precisamos fazer uma *tomada de decisão* de nosso modelo matemático considerado.

Os professores podem aproveitar a teoria apresentada e elaborar uma sequência didática para a aplicação em sala de aula, relacionando o conhecimento desenvolvido no processo de modelagem matemática com os conteúdos da base curricular do ensino básico.

# Capítulo 5

## Considerações Finais

Nesta dissertação, vimos como a modelagem matemática pode influenciar positivamente tanto o professor no ensino, como o aluno na motivação e estudo das ferramentas matemáticas, contribuindo para uma melhoria na qualidade da educação. A intenção, como manifestado, foi desenvolver um trabalho destinado a estimular professores de matemática a usarem a modelagem nas aulas, abordando problemas que aparecem no cotidiano como base da construção do conhecimento. Uma sugestão foi a modelagem matemática de cobrança das tarifas de telefonia móvel. Fizemos uma análise de como são calculados os gastos com ligações, verificamos o quanto uma política de arredondamento pode influenciar no valor de uma conta e, por fim, analisamos os gastos com ligações e internet 4G. Analisamos planos diferenciados para cada perfil de usuário, otimizando o custo das tarifas, e levando a reflexão de como é importante analisar os planos e verificar qual deles é mais vantajoso para cada tipo de usuário. De outro lado, dada a conjuntura mundial da pandemia do Covid 19, foi considerado oportuno aproveitar essa situação para estudar a modelagem matemática dessa pandemia, analisar e explicar de que forma se apresenta o crescimento ou disseminação do vírus, prever ou simular esse crescimento e ver a influência dos fatores que dão início da sua disseminação. Diversos estudos podem ser encontrados na bibliografia, dependendo das hipóteses consideradas, a modelagem do problema apresenta diversos graus de dificuldade, nesse sentido, consideramos que o nível da matemática a ser usado deveria ser próprio de um nível de aluno do ensino médio.

Enfatizamos que a aplicação em sala de aula dos problemas estudados foi adiada pelas dificuldades impostas pela pandemia da COVID-19, pois o acesso ao ensino remoto não é possível para uma grande parte dos alunos da escola pública onde a modelagem seria aplicada como metodologia em forma de um projeto. O aplicativo disponibilizado pelo governo para postagem de vídeos e atividades não possibilitou uma interação significativa para o desenvolvimento de um projeto como este de maneira remota. A utilização de

outras plataformas de interação poderia excluir muitos alunos impossibilitados de custear o consumo de internet. Dessa maneira, a prática docente será realizada assim que haja acesso para uma maior parte dos alunos ou seja seguro o retorno das aulas presenciais.

Continuando com a importância do uso da modelagem matemática, apresentamos a seguir alguns pontos de vista, ou questões de enquadramento do ensino da modelagem matemática, como proposta do professor para motivação, aplicação e entendimento das ferramentas matemáticas. Dentro das perspectivas do professor de matemática ao usar a modelagem matemática, um docente pode formular entre outras, as seguintes questões: Como a minha relação dentro da matemática aplicável me beneficiará como professor? Quanto trabalho adicional isso significará para mim como professor? Ao considerar essas questões e nos envolvermos com elas, divulgamos ou revelamos algo sobre como vemos o comprometimento dos professores de matemática e porém, como poderia ser otimizado essa informação no aproveitamento da relação aluno-professor. Se os docentes de matemática agirem como cidadãos responsáveis e maduros sobre os quais os alunos podem modelar seu próprio comportamento e disciplina, certamente, professores, alunos, escolas e a sociedade em geral se beneficiariam muito. Se servirem de exemplo nesse sentido, cada um, dentro de suas próprias limitações pode dar uma contribuição substancial como pedagogos. Mais uma vez, a colaboração ativa dos envolvidos é vital para os cumprimentos dos objetivos do curso. O professor deve ser capaz de observar as vantagens e desvantagens que ele identifica ao conduzir aulas de matemática aplicáveis (o nível da matemática a usar). Nesse sentido, algumas ideias podem ser identificadas para ser trabalhadas: a situação em sala de aula, a alegria que o professor sente ao ensinar e se preparar para a aula, a relevância do problema a estudar, o nível de envolvimento do aluno, o tempo de preparação, entre outros.

Das experiências percebidas no ensino de matemática, é de conhecimento comum que os professores gostam de ensinar de forma prática e refletir sobre isso. Essa vontade surge porque, por um lado, é muito mais satisfatório ensinar alunos que realmente desejam aprender e, portanto, estão motivados a continuar com o tema de estudo, enquanto por outro lado essa abordagem (praticidade) limita a capacidade de aprendizado do aluno, pelo fato de individualizar o conhecimento sem aplicação do mesmo. Este trabalho pretende motivar ao professor e àqueles alunos que estão em uma etapa inicial, ou seja, encaminhar o professor e o aluno, sem conhecer seu nível matemático e ver a construção das ferramentas matemáticas como uma consequência do uso da modelagem matemática no ensino, despertando pouco a pouco interesse pela disciplina.

De outro lado, o conhecimento da matemática tem se desenvolvido em grande escala nos últimos anos, o que resulta em uma oportunidade de colocar em prática a

aprendizagem, desde o ponto de vista da modelagem matemática para o ensino. Em suma, este trabalho direciona o professor no uso da matemática aplicada como instrumento de ensino para problemas do mundo real e essa simulação nos ajuda a fornecer algumas respostas. Evidenciar a pesquisa e olhá-la na perspectiva de um formador de professores de matemática abre um caminho para que professores e alunos busquem suas próprias respostas e cheguem às suas próprias conclusões.

Por exemplo, pensar em maneiras de economizar o custo nos planos de telefonia móvel como benefício para o usuário resultou em muitas propostas relacionadas, que pelo menos nos fizeram, e provavelmente também fará aos nossos alunos, entender melhor os problemas em questão, isso já representa uma resposta de como a modelagem matemática traz benefícios para o professor, esse é o foco desta dissertação. Com a pandemia, precisamos ficar em casa e isso gera um incômodo, um certo desconforto. Sendo assim, a modelagem dos casos de COVID-19 promove a compreensão da matemática por trás das medidas de distanciamento social, dando sentido a este isolamento. Além disso, essa insatisfação do professor diminui, quando sente que seu papel de mestre é cumprido ao transformar o problema em um projeto de educação matemática aplicável. Desenvolvê-lo como uma atividade para uma aula de matemática aplicável tem o potencial de tornar o tempo de espera mais suportável para um professor de matemática ativo que pode se envolver em tempo real, se ele ou ela for incomodado dessa forma. Diversos sites podem ser encontrados na internet para dar suporte aos professores que estão tentando incorporar matemática aplicável em sua sala de aula.

A satisfação adicional, consequência da pesquisa e do ensino, tem um preço e requer muito trabalho adicional, no entanto, estamos cientes de que existem alguns professores para os quais o tempo adicional investido na preparação de suas aulas representa um problema. Os novos professores iniciam sua carreira docente pensando que todas as aulas devem ser preparadas de maneira cuidadosa, para poder assim tratar de atingir seus objetivos, quando isso acontece, sugerimos que os novos professores preparem algumas aulas selecionadas por mês com muito cuidado, para que possam ensinar sistematicamente boas aulas de aplicação de matemática, esse investimento em tempo de preparação certamente valerá a pena. O professor é chamado a equilibrar o investimento extra no tempo gasto na preparação de aulas de matemática aplicáveis, dando algumas aulas dentro de sua zona de conforto, o que não requer tanto tempo de preparação. Em muitas oportunidades, o esforço adicional representa um problema para professores experientes, talvez eles tenham reduzido o tempo de preparação porque isso se tornou rotina.

Mesmo que já existam muitas aulas propostas baseadas em situações reais, o preparo de uma aula conduzida por modelagem ainda requer um pouco de tempo e esforço

para reunir algumas informações sobre o tema e adaptar a lição proposta para a sua própria aula, isso inclusive é parte da chamada hipótese de simplificação da modelagem matemática. Não queremos subestimar esse esforço adicional porque ele é substancial. Além disso, sugerimos que esses professores estejam dispostos a tornar as aulas de matemática mais interessantes, promovendo momentos agradáveis para eles mesmos e para seus alunos, tornando as horas em sala de aula uma oportunidade para despertar neles o gosto pelo estudo de matemática. Por último, queremos que esta dissertação seja fonte de motivação nesta área de pesquisa e estimule o uso da modelagem matemática como método de ensino.

# Referências Bibliográficas

- BARBOSA, J. C. O que pensam os professores sobre modelagem matemática? p. 67-86. *Zetetiké*, v. 7, n. 1, 1999.
- BASSANEZI, R. C. Modelagem como estratégia metodológica no ensino da matemática. *Boletim de Educação da SBMAC, São Paulo*, 1994.
- CHUQUIPOMA, J. A. D. Modelagem matemática. *São João del-Rei: UFSJ*, 2012.
- COSTA, F. D. A.; IGLIORI, S. B. C. Estudo da periodicidade a partir da modelagem matemática à luz da teoria da aprendizagem significativa. *Revista de Produção Discente em Educação Matemática. ISSN 2238-8044*, v. 7, n. 1, 2018.
- DOLGOS, K. A.; ELIAS, J. S. New directions in the teaching of mathematics, science, and technology. *International Journal of mathematical Education in science and Technology*, Taylor & Francis, v. 27, n. 5, p. 725–729, 1996.
- FRANCHI, R. d. O. A modelagem matemática como estratégia de aprendizagem do cálculo diferencial e integral nos cursos de engenharia. *Rio Claro*, 1993.
- LIMA, E. L. *Números e funções reais*. [S.l.]: Sociedade Brasileira de Matemática, 2013.
- LUNA, A. V. de A.; BARBOSA, J. C. Modelagem matemática e os textos produzidos em um programa de formação continuada. *Zetetike*, v. 23, n. 2, p. 347–376, 2015.
- MA, J. Estimating epidemic exponential growth rate and basic reproduction number. *Infectious Disease Modelling*, v. 5, p. 129–141, 2020. ISSN 2468-0427. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2468042719300491>.
- MAASS, J. et al. *Mathematical modelling for teachers: A practical guide to applicable mathematics education*. [S.l.]: Springer, 2018.
- PCN, P. C. N. Matemática. *Secretária de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF*, 1998.

## ANEXO I - Cronograma para a aplicação de projeto: Modelagem Matemática das Tarifas de Telefonia Móvel

<b>Conteúdo:</b>	Matemática
<b>Série:</b>	1º, 2º e 3º E.M
<b>Número de aulas:</b>	12
<b>Unidade temática:</b>	Números e álgebra
<b>Habilidades da BNCC:</b>  (EM13MAT101) Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais  (EM13MAT102) Analisar tabelas, gráficos e amostras de pesquisas estatísticas apresentadas em relatórios divulgados por diferentes meios de comunicação, identificando, quando for o caso, inadequações que possam induzir a erros de interpretação, como escalas e amostras não apropriadas.  (EM13MAT302) Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.  (EM13MAT401) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica.  (EM13MAT501) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau.	
<b>Recursos didáticos:</b>	Quadro negro, giz, celular ou computador com acesso à internet, projetor.
<b>Objetivos gerais:</b>  Desenvolver nos alunos as habilidades referentes às competências: <ul style="list-style-type: none"><li>• Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.</li><li>• Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.</li></ul>	

**Objetivos específicos:**

Trabalhar os conceitos matemáticos (abaixo relatados) por meio da construção de um modelo matemático que interprete o valor de uma conta de telefonia móvel.

**Cronograma das aulas****Semana 1**

<b>DATA</b>	<b>Conteúdos relacionados</b>	<b>Tópico/ atividade da modelagem a ser trabalhada</b>	<b>Metodologia</b>
Aula 1 _/_	Pesquisa, interpretação e organização de dados	<ul style="list-style-type: none"><li>• Exposição do tema: tarifas de telefonia móvel</li><li>• Definição dos objetivos<ul style="list-style-type: none"><li>• Coleta de dados</li></ul></li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>• Através de uma aula dialogada explicar como o projeto será desenvolvido durante as aulas e expor resumidamente quais análises serão feitas;</li><li>• Discutir com os alunos o que se pretende ao fim do projeto (determinar qual plano de telefone é mais vantajoso para cada perfil de usuário).</li><li>• Direcionar uma pesquisa na internet, levantando questões de como são feitas as cobranças em uma conta de celular; escolher os planos que serão analisados no projeto.</li></ul>
Aula 2 _/_	<ul style="list-style-type: none"><li>• Gráficos e tabelas.</li><li>• Função do 1º grau</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>• Construção de uma tabela com os preços pagos em cada plano.</li><li>• Análise das informações e construção das funções que interpretam o preço a se pagar pelo tempo em ligações</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>• Reunir os alunos em grupos e propor atividades que direcionem a construção da tabela (pode ser feita manuscrita no caderno ou em algum aplicativo) e a determinação das funções.</li></ul> <p>Sugestão: cada grupo pode analisar um plano e ao final da aula apresentar o resultado encontrado para o restante da turma.</p>
Aula 3 _/_	<ul style="list-style-type: none"><li>• Plano cartesiano.</li><li>• Representação gráfica da função do 1º grau</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>• Construção dos gráficos das funções no plano cartesiano</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>• Conduzir os alunos na construção dos gráficos utilizando algum software ou aplicativo de celular.</li></ul> <p>Sugestão: Excel, Geogebra.</p>
Aula 4	<ul style="list-style-type: none"><li>• Função</li><li>• Função do 1º grau</li></ul>	-	<ul style="list-style-type: none"><li>• Utilizar as funções encontradas para explicar, revisar e aprofundar os</li></ul>

__/__/__			conceitos matemáticos relacionados à Função.
<b>Semana 2</b>			
<b>DATA</b>	<b>Conteúdos relacionados</b>	<b>Tópico/ atividade da modelagem a ser trabalhada</b>	<b>Metodologia</b>
Aula 1 __/__/__	Pesquisa, interpretação e organização de dados.	<ul style="list-style-type: none"> <li>Política de arredondamento</li> <li>Escolha de 10 chamadas registradas em um celular</li> <li>Construção de tabela com a duração das chamadas</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Direcionar uma pesquisa na internet sobre políticas de arredondamento.</li> <li>Juntamente com os alunos escolher um celular para verificar no registro a duração das 10 chamadas telefônicas.</li> <li>Reunir os alunos em grupos e propor atividades que direcionem a construção da tabela (pode ser feita manuscrita no caderno ou em algum aplicativo).</li> </ul>
Aula 2 __/__/__	Adição, Subtração multiplicação e divisão envolvendo os números reais.	<ul style="list-style-type: none"> <li>Simulação do valor das contas ao final do mês, em cada plano.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Reunir os alunos em grupos e propor atividades que direcionem os cálculos para o arredondamento em cada caso.</li> </ul>
Aula 3 __/__/__	interpretação e organização de dados.	<ul style="list-style-type: none"> <li>Análise do impacto da política de arredondamento através da simulação com dois usuários hipotéticos.</li> <li>Construção dos gráficos de barras e linear</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Propor atividades que direcionem os alunos na simulação e conduzir a construção dos gráficos no Geogebra.</li> </ul>
Aula 4 __/__/__	Equação da reta	<ul style="list-style-type: none"> <li>Determinação da equação da reta.</li> <li>Construção do gráfico com a sua representação gráfica</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Utilizar o Geogebra para encontrar a equação da reta que melhor se aproxima dos pontos e construir o gráfico.</li> </ul>
<b>Semana 3</b>			
<b>DATA</b>	<b>Conteúdos relacionados</b>	<b>Tópico/ atividade da modelagem a ser trabalhada</b>	<b>Metodologia</b>
Aula 1 __/__/__	Interpretação de gráficos	<ul style="list-style-type: none"> <li>Análise dos planos verificando os custos com ligações e consumo de dados.</li> <li>Análise dos gráficos no R3</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Através de uma aula dialogada expor as funções encontradas em cada plano, fazendo uma síntese do porquê de cada constante e mostrar como utilizá-las para calcular o valor da conta.</li> <li>Expor os gráficos no R3 pelo Geogebra e ajudá-los a interpretá-los</li> </ul>
Aula 2 __/__/__	Adição, Subtração multiplicação e divisão envolvendo os números reais.	<ul style="list-style-type: none"> <li>Simulação do valor da conta de celular ao final do mês de dois usuários</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Propor atividades que direcionem os alunos na definição hipotética de dois usuários com perfis de consumo distintos e no cálculo do</li> </ul>

		com perfis de consumo diferentes.	valor da conta do celular de cada um deles em cada plano.
Aula 3 _/_	Interpretação de gráficos	<ul style="list-style-type: none"> <li>Análise dos resultados obtidos</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Conduzir, através de uma aula dialogada, a análise dos gráficos, tabelas e resultados obtidos e refletir sobre qual plano de celular é mais vantajoso para cada perfil de usuário.</li> </ul>
Aula 4 _/_	Interpretação e organização de dados.	<ul style="list-style-type: none"> <li>Construção de tabelas apresentando os resultados obtidos e reflexão sobre qual plano é mais vantajoso para cada perfil de usuário</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Propor atividade que conduza a construção de uma tabela (pode ser feita manuscrita no caderno ou em algum aplicativo) que resuma os resultados obtidos.</li> </ul>
<p><b>Avaliação:</b></p> <p>A sugestão é usar a avaliação formativa, ou seja, aquela com foco na formação, no aprendizado ao longo do processo de ensino-aprendizagem. Assim, a sugestão é avaliar o aluno durante o desenvolvimento do projeto, analisando o envolvimento, participação e dedicação durante a realização das atividades.</p>			
<p><b>Referências:</b></p> <p>BRASIL. Ministério da Educação (MEC). Base Nacional Comum Curricular. Brasília, 2021. Disponível em: <a href="http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf">http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf</a></p>			