Universidade Federal
de São João del-Rei

Marco Aurélio Nogueira Leão

ANÁLISE DAS QUESTÕES DE ESTATÍSTICA E PROBABILIDADE NO ENEM ENTRE 2009 E 2019

Marco Aurélio Nogueira Leão

ANÁLISE DAS QUESTÕES DE ESTATÍSTICA E PROBABILIDADE NO ENEM ENTRE 2009 E 2019

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenadoria do Mestrado Profissional em Matemática, da Universidade Federal de São João del-Rei, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Banca Examinadora

_____

Orientadora: Prof. Dra. Carla Regina Guimarães Brighenti

_____

Prof(a) Dr(a) Luciane Teixeira Passos Giarola

_____

Prof. Dr. Everton Luiz de Paula

Agradecimentos

Agradeço a Deus, por ter me dado forças e me iluminado sempre, mesmo diante de obstáculos.

À minha esposa e filhos pela presença de sempre. Aos meus irmãos, e à minha mãe pelo exemplo de vida.

À Profª Drª Carla Regina Guimarães Brighenti pela orientação, desenvolvida com muita competência, dedicação e principalmente paciência.

Ao corpo docente do PROFMAT/UFSJ, que foi muito importante na minha formação.

Aos colegas de curso, pela amizade e companheirismo.

À todos que, de alguma maneira, contribuíram na minha caminhada, quero agradecer, compartilhando este momento muito especial.

Dedicatória

À todos aqueles que acreditaram em mim, que me apoiam me dando forças a cada dia, contribuindo para o meu crescimento e ajudando-me a chegar até aqui, em especial à minha família.

Resumo

O ensino da Estatística vem fazendo parte do currículo da Educação Básica brasileira, no entanto ocorreu tardiamente, pois os conteúdos de Estatística, Probabilidade e Combinatória só foram inseridos no currículo a partir de 1997 com a publicação dos Parâmetros Curriculares Nacionais de forma gradativa no Ensino Fundamental e Ensino Médio. Contudo, observa-se que ainda há uma lacuna no ensino probabilístico e estatístico, que ocupa um percentual de horas/aula de ensino, mais especificamente nas duas primeiras séries do Ensino Médio, desproporcional ao exigido no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). Este estudo tem por objetivo principal analisar quantitativamente as questões relacionadas à probabilidade e estatística envolvidas na prova de Matemática e suas tecnologias do ENEM, e também auxiliar na compreensão de como as práticas docentes têm se organizado conforme o desenvolvimento da competência estatística. Tal estudo busca uma metodologia quantitativa, com um suporte empírico associado a percepção da atuação profissional de alguns professores que ministram aulas de Matemática no ensino médio em escolas públicas e(ou) privadas e a avaliação de questões associadas à Probabilidade, Estatística e Cálculo Combinatório, presentes nas provas de Matemática do ENEM entre os anos de 2009 a 2019. Ao longo do estudo pode-se compreender que é fundamental que as escolas devem capacitar os alunos do ensino básico, para a realização deste exame, criando novas estratégias de ensino que possam favorecer o desenvolvimento das habilidades de probabilidade e estatística. Tendo em vista os resultados apresentados nesse trabalho, percebe-se uma quantidade considerável de questões de Estatística, Probabilidade nas provas do ENEM, e com isso a importância de que tais assuntos sejam tradados de forma ainda mais atenciosa no ensino básico,principalmente em todo o ensino médio.

Palavras chave: *Exame Nacional do Ensino Médio; Matemática e suas tecnologias; Professores de matemática; Competências e habilidades.*

Abstract

The teaching of Statistics has been part of the curriculum of Brazilian Basic Education, however it occurred late, as the contents of Statistics, Probability and Combinatorics were only included in the curriculum from 1997 with the publication of the National Curriculum Parameters gradually in the Elementary and High School. However, it is observed that there is still a gap in probabilistic and statistical teaching, which occupies a percentage of teaching hours/class, more specifically in the first two grades of High School, disproportionate to what is required in the National High School Examination (ENEM). The main objective of this study is to quantitatively analyze the issues related to probability and statistics involved in the ENEM Mathematics test and its technologies, and also to help understand how teaching practices have been organized according to the development of statistical competence. This study seeks a quantitative methodology, with empirical support associated with the perception of the professional performance of some teachers who teach Mathematics classes in high school in public and/or private schools and the assessment of issues associated with Probability, Statistics and Combinatorial Calculus, present in ENEM's Mathematics tests from 2009 to 2019. Throughout the study, it can be understood that it is essential that schools should train elementary school students to take this exam, creating new teaching strategies that favor the development of probability and statistics skills. In view of the results presented in this work, there is a considerable amount of issues of Statistics, Probability in ENEM tests, and with it the importance that such matters are dealt with even more carefully in basic education, especially throughout the high school.

Keywords: *National High School Exam; Mathematics and its technologies; Math teachers; Skills and abilities.*

Lista de Figuras

1 Competências Gerais da Educação Básica.....14

2 Competências associadas à Estatística e Probabilidade – ENEM.....17

3 Questão 123/ enem 2017 / 2º dia / caderno amarelo.....20

4 Distribuição do número de questões por assunto e ano de aplicação do ENEM 26

Lista de Tabelas

1 Matriz de referência 18
2 Questões de matemática relacionadas às competências de Estatística e Probabilidade por ano de aplicação do ENEM 25
3 Distribuição das habilidades cobradas ao longo das edições do ENEM 27

Sumário

1 Introdução 9

2 Referencial Teórico 10

2.1 A Relevância do Ensino da Estatística na Educação Básica 10

2.2 PCN, CBC e BNCC – Documentos que normatizam a educação Básica.....12

2.3 A Estatística no ENEM..... 15

2.4 Metodologia do Ensino de Estatística na Educação Básica 22

3 Metodologia 23

3.1 Apreciação das questões associadas a Estatística e Probabilidade no ENEM 23

3.2 Percepção da atuação de professores do ensino médio 24

4 Resultados e Discussão 24

4.1 Análise de questões do ENEM.....24

4.2 Análise da percepção da atuação de professores do ensino médio..... 29

5 Considerações Finais 32

6 Referências 34

7 Anexos 37

1 Introdução

O mundo atual disponibiliza ao cidadão uma infinidade de dados e informações que podem ser oriundos de pesquisas eleitorais, estudos climáticos, taxas de desemprego, dados epidemiológicos, índices ambientais, entre outros. Essas informações são apresentadas ao público por meio de gráficos, tabelas, índices, valores percentuais apresentados em noticiários, redes sociais, boletins epidemiológicos e pesquisas. Assim, é conveniente que o cidadão esteja habilitado a desenvolver uma análise cuidadosa e criteriosa que esteja apoiada em conhecimentos estatísticos básicos para que seja capaz de realizar uma interpretação de modo a minimizar erros e viés.

Diante desta necessidade, ocorreu a inclusão da Estatística no currículo da Educação Básica de modo explícito nos documentos oficiais no final da década de 1990, com a publicação dos Parâmetros Nacionais Curriculares. Desde então, vem sendo parte integrante das diretrizes e documentos que regulamentam a educação no Brasil, tais como a Base Nacional Comum Curricular e Currículo Básico Comum.

Assim, o estudo da estatística e a inclusão de tópicos sobre probabilidade, ocorridos nos documentos legais passaram a ser exigidos também em avaliações do Ensino Médio como o ENEM. Entretanto, para que tal inclusão resulte em benefícios para o cidadão, isso se tornou um instrumento pedagógico que pode auxiliar no diagnóstico dos mais diversos aspectos envolvidos no processo de ensino-aprendizagem. O número de questões relacionadas a tais assuntos vem ocorrendo com frequência , principalmente na prova de Matemática e Suas Tecnologias do ENEM.

Vários estudos se propõem a refletir o papel que cada disciplina desempenha, e uma classificação das questões de probabilidade e estatística por meio de categoriase posterior análise permite entender como e o quê é avaliado.

Assim, o presente trabalho tem por objetivo categorizar e analisar as questões de Probabilidade e Estatística presentes no ENEM, a fim de verificar como têm sido encaminhadas quantitativamente as habilidades e competências que têm sido exigidas desses alunos no período de 2009 a 2019.

2 Referencial Teórico

2.1 A Relevância do Ensino da Estatística na Educação Básica

A Educação Estatística tem se consolidado como uma linha de pesquisa da área Educação Matemática e estuda questões relativas ao ensino e a aprendizagem de conceitos estatísticos. Contudo, a compreensão e aprendizagem dos conceitos estatísticos ainda estão pouco sistematizadas (GODINO; BATANERO; CAÑIZARES, 1987).

D'ambrosio (1998) afirma que há três áreas entrelaçadas de interesse para a Estatística: descrição e resumo de dados (usada por exemplo, para entender, relatar e discutir taxas de desemprego, índices de mortalidade, custo de vida, alturas de alunos de uma determinada sala de aula); teoria das probabilidades (associada a situações que envolvem o acaso e situações de combinatória) e análise e interpretação de dados amostrais (inferência).

Segundo o autor supracitado, a Estatística vem ao longo do seu desenvolvimento prestando uma grande contribuição à sociedade, pois, além de fornecer métodos para organizar, resumir e comunicar dados, também proporciona condições de fazer inferência por meio de observações realizadas por um universo maior de observações potenciais.

Percebe-se que o estudo da estatística ocorreu inicialmente pela necessidade de formar profissionais aptos a usar a análise de dados em suas pesquisas científicas. A partir disso, surgiu a necessidade de desenvolver o pensamento estatístico desde a Educação Básica.

Frente a essa realidade, a implementação da formação estatística desde a Educação Básica foi ganhando força mundialmente principalmente pela constatação de que além da importância na formação do espírito científico relacionado ao caráter investigativo da Estatística, via-se nessa ciência uma dimensão política e ética importante para o desenvolvimento do senso crítico dos alunos.

Com base nos Parâmetros curriculares nacionais (2000), estudar Estatística e Probabilidade favorece o desenvolvimento de certas atitudes como posicionar-se criticamente, fazer previsões e tomar decisões ante as informações vinculadas pela mídia, livros, jornais e outras fontes. Dessa forma, os conteúdos de Estatística, Probabilidade e Análise Combinatória foram inseridos no currículo em 1997 com a publicação dos ParâmetrosCurriculares Nacionais (PCNs) para os anos iniciais do Ensino Fundamental, em 1998 para os anos finais do Ensino

Fundamental, e em 1999 para o Ensino Médio.

Considera-se que o objeto de estudo da Educação Estatística é o processo de ensino e aprendizagem de questões referentes à Estatística, à Probabilidade e à Combinatória em todos os níveis de ensino, com a finalidade de propiciar uma aprendizagem mais significativa ao aluno, contribuindo para o desenvolvimento de competências tanto estatísticas, quanto probabilísticas (WALICHINSKI, 2012).

> No Brasil já se fazia sentir, há tempos, a necessidade de um currículo pré-universitário que contemplasse de maneira explícita e definitiva a área de Probabilidade e Estatística. [...] Permeando todos os ciclos da Educação é possível detectar a preocupação constante de que os alunos sejam capazes de (dentre outros aspectos): a) utilizar diferentes fontes de informação e recursos tecnológicos para adquirir e construir conhecimento; b) questionar a realidade, formulando problemas e tratando de resolvê-los, utilizando para isto o pensamento lógico, a criatividade, a intuição, a capacidade de análise crítica, selecionando procedimentos e verificando sua adequação. Essas capacidades poderiam ser exploradas no ensino fundamental por meio da aprendizagem de ferramentas de Estatística, que poderão ser vistas tanto isoladamente dentro da disciplina Matemática, ou então como uma atividade de interação com outras disciplinas, por intermédio dos chamados temas transversais (Cordani, 2015, p.170).

Diante do exposto, o documento oficial(PCNs) deixa claro que o aluno deve se desenvolver de forma que seja capaz de mobilizar o próprio conhecimento, ou seja, ser protagonista na construção do conhecimento frente às suas subjetividades.

Segundo Coutinho e Almouloud (2010) o ensino de métodos e modelos estatísticos deu lugar às discussões sobre o desenvolvimento de habilidades e competências que poderiam tornar o aluno mais preparado para compreender e, se necessário, transformar a realidade que o cerca.

Por outras palavras, a inserção das habilidades e competências desse componente curricular está na busca por uma formação intergrada do cidadão. Verifica-se uma demanda crescente na compreensão e na potencialização dos estudos de estatística e probabilidade, tornando-se necessária a modernização de materiais didáticos, bem como das avaliações externas nacionaise processos seletivos de universidades ou vestibulares.

2.2 PCN, CBC e BNCC – Documentos que normatizam a educação básica

A Secretaria de Educação Básica zela pela educação infantil, pelo ensino fundamental e pelo ensino médio. A educação básica é o caminho para assegurar a todos os brasileiros a formação comum indispensável para o exercício da cidadania e fornecer-lhes os meios para progredir no trabalho e em estudos posteriores (MEC, 2014, p. 1).

Atualmente, os documentos que norteiam a educação básica são a Lei nº 9.394, que estabelece as Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB), as Diretrizes Curriculares Nacionais para a Educação Básica e o Plano Nacional de Educação, aprovado pelo Congresso Nacional em 26 de junho de 2014. Outros documentos fundamentais são a Constituição da República Federativa do Brasil e o Estatuto da Criança e do Adolescente.

No Brasil, os *PCNs - Parâmetros Curriculares Nacionais, criados no final da década de 90,* são diretrizes elaboradas pelo Governo Federal com o objetivo principal de *orientar os educadores* por meio da normatização de alguns fatores fundamentais referentes a cada disciplina. Esses parâmetros abrangem tanto a *rede pública,* como a *rede privada de ensino,* conforme o nível de escolaridade dos alunos. Sua meta é garantir aos educandos o direito de usufruir dos conhecimentos necessários para o *exercício da cidadania.* Embora não sejam obrigatórios, os PCNs servem como norteadores para *professores, coordenadores e diretores,* que podem adaptá-los às peculiaridades locais.

> Os PCNs foram elaborados como um conjunto de orientações e recomendações para apoiar o trabalho docente. Em primeiro momento foram fixados conteúdos mínimos para o Ensino Fundamental e, posteriormente, para o Ensino Médio, com vistas a assegurar formação básica comum e respeito aos valores culturais e artísticos, nacionais e regionais. (BRANCO et al. 2018)

Os *PCNs* nada mais são do que uma referência para a transformação de objetivos, conteúdos e *didática do ensino.* Foram desenvolvidos para que o ensino no Brasil tivesse autonomia para poder trabalhar os conteúdos nas escolas, conforme a necessidade e regionalidade e o contexto em que a escola estava inserida.

O Conteúdo Básico Comum (CBC), é uma proposta curricular desenvolvida pelas secretarias estaduais de educação, voltada para as escolas da rede pública, sendo que as escolas particulares pudessem também aderir à proposta. A justificativa da Secretaria de Educação do Estado de Minas Gerais (SEE-MG)

para a elaboração dessa proposta é a de que o ensino tradicional estaria desgastado e ultrapassado no que diz respeito aos seus conteúdos, uma vez que os assuntos eram tratados de forma abstrata, e fora da realidade dos alunos, não contemplando sua criatividade, imaginação e senso crítico frente ao conhecimento.

> O CBC, por ser pautado nos PCN, carrega consigo todo esse processo de hibridação a que os PCN submeteram-se, evidenciando direta ou indiretamente, combinações de "distintas tradições de experiências nacionais e locais" (MATOS; PAIVA, 2007, p.190)

Assim, o CBC descreve os conteúdos básicos de matemática, na intenção de dar ao aluno base para que ele possa realizar a ligação entre a teoria da sala de aula e o cotidiano, a fim de formar um cidadão consciente. Também, o CBC permite que o professor organize o conteúdo de todo o ano letivo.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica, de modo a que tenha assegurados seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento, em conformidade com o que preceitua o Plano Nacional de Educação – PNE. (BRASIL, 2017).

A BNCC:

> Estabelece conhecimentos, competências e habilidades que se espera que todos os estudantes desenvolvam ao longo da escolaridade básica. Orientada pelos princípios éticos, políticos e estéticos traçados pelas Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica, a Base soma-se aos propósitos que direcionam a educação brasileira para a formação humana integral e para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva. (BRASIL, 2017).

Assim, a BNCC torna-se referência nacional para a formulação dos currículos dos sistemas e das redes escolares dos Estados, do Distrito Federal e dos Municípios e das propostas pedagógicas das instituições escolares. No Ensino Médio se organiza em continuidade ao proposto para a Educação Infantil e o Ensino Fundamental, centrada no desenvolvimento de competências e orientada pelo princípio da educação integral. Portanto, as competências gerais da Educação Básica orientam igualmente as aprendizagens dessa etapa, como ilustrado no esquema a seguir, sejam as aprendizagens essenciais definidas nesta BNCC,

sejam aquelas relativas aos diferentes itinerários formativos – cujo detalhamento é prerrogativa dos diferentes sistemas, redes e escolas, conforme previsto na Lei nº 13.415/2017.

Figura 1: Competências Gerais da Educação Básica
Fonte: (BRASIL, 2017)

As aprendizagens essenciais definidas na BNCC do Ensino Médio estão organizadas por áreas do conhecimento (Linguagens e suas Tecnologias, Matemática e suas Tecnologias, Ciências da Natureza e suas Tecnologias, Ciências Humanas e Sociais Aplicadas). Para cada área do conhecimento, são definidas **competências específicas,** e a cada uma dessas competências, são descritas **habilidades** a ser desenvolvidas ao longo da etapa.

2.3 A Estatística no ENEM

O Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) foi idealizado pelo Instituto Nacional de Pesquisas e Estudos Educacionais (INEP), autarquia do Ministério da Educação (MEC) com o objetivo de avaliar o desempenho dos alunos concluintes e egressos do Ensino Médio. Desde a sua criação, em 1998, o ENEM focaliza as competências e habilidades básicas desenvolvidas, transformadas e fortalecidas com a mediação da escola (BRASIL, 2009).

Em suas primeiras edições, o ENEM apenas verificava o desempenho dos estudantes, e as notas não eram utilizadas para ingresso no ensino superior. A intenção do MEC era ter um método para avaliar a educação no país e, assim, aprimorar as políticas educacionais, especialmente da rede pública.

Até 2008 a prova constava de 63 questões e era aplicada em único dia, com quatro horas de duração. A partir de 2009 um novo modelo de avaliação foi instituído na intenção de unificar o processo de seleção das instituições federais de nível superior. Além disso, os resultados do ENEM passaram a compor a avaliação dos cursos de graduação como uma "nota de entrada" e parte dos critérios de seleção a programas governamentais.

Segundo Kemiac (2011, p. 66), o ENEM permite ao poder público dimensionar e localizar as lacunas que debilitam o processo de formação dos jovens que dificultam sua realização pessoal e sua inserção no processo de produção da sociedade.

Atualmente, o exame é realizado anualmente e tem duração de dois dias, contém 180 questões objetivas, divididas igualmente em quatro grandes áreas: Ciências da natureza e suas tecnologias; Ciências humanas e suas tecnologias; Linguagens, códigos e suas tecnologias e Matemática e suas tecnologias, além de elaboração de uma questão de redação.

O conteúdo de Estatística é amplamente explorado nas questões do ENEM, que também tem o objetivo de avaliar a leitura, análise e interpretação de dados. Pode-se dizer que a Estatística é uma área da Matemática que se ocupa da coleta, organização e análise de dados. Os dados podem ser quantitativos ou qualitativos e a organização deles é feita por meio de tabelas e gráficos. Já a análise dos dados nos níveis mais básicos da Estatística é feita por meio de medidas de centralidade (moda, média e mediana), medidas de dispersão (variância e desvio padrão), porcentagens e também proporcionalidade.

O conteúdo das provas do Enem é definido a partir de matrizes de referência em quatro áreas do conhecimento:

- Linguagens, códigos e suas tecnologias, que abrange o conteúdo de Língua Portuguesa, Literatura, Língua Estrangeira (Inglês ou Espanhol), Artes, Educação Física, e Tecnologias da Informação e Comunicação;

- Matemática e suas tecnologias;

- Ciências da Natureza e suas tecnologias, que abrange os conteúdos de Química, Física e Biologia;

- Ciências Humanas e suas tecnologias, que abrange os conteúdos de Geografia, História, Filosofia e Sociologia.

O termo Matriz de Referência ou Quadro Conceitual (em inglês Framework) é utilizado especificamente no contexto das avaliações em larga escala para definir o construto e os fundamentos teóricos de cada teste ou questionário que compõe a avaliação, indicar as habilidades ou traços latentes a serem medidos e orientar a elaboração de itens. Além disso, também orienta a construção de escalas de proficiência, que especificam os níveis em que os estudantes se encontram e quais habilidades provavelmente são capazes de realizar no contexto da avaliação (INEP, 2020).

Na BNCC, competência é definida como a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho. Já as habilidades podem ser definidas como conhecimentos necessários para o pleno desenvolvimento das competências. Assim, ao desenvolver uma competência, estamos mobilizando várias habilidades que juntas proporcionam o domínio em determinado contexto. Normalmente, as habilidades estão relacionadas a verbos, como identificar, associar e interpretar (BRASIL, 2018).

A matriz de Referência do ENEM para Matemática e suas Tecnologias (Tabela 1) contém competências de área associadas à Estatística e Probabilidade que se definemconforme Hulsizer e Woolf (2009, p. 17), como pode ser visto na Figura 1.

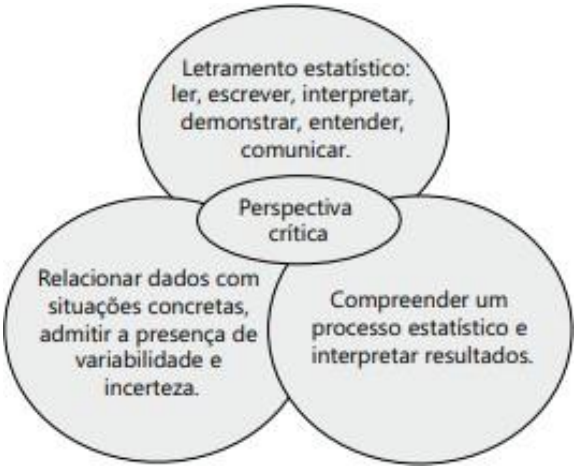


Figura 2: Competências associadas à Estatística e Probabilidade – ENEM
Fonte: Hulsizer e Woolf (2009).

Observa-se que as competências estatísticas avaliadas no ENEM apoiam em habilidades dispostas na matriz de Referência do ensino da Matemática e suas Tecnologias, contemplando assim diversas habilidades.

Tabela 1: Matriz de referência ENEM para Matemática e suas Tecnologias

Competências	**Habilidades**
H1 - Reconhecer, no contexto social, diferentes significados erepresentações dos números e operações - naturais, inteiros, racionais ou reais.	
1 - Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais	**H2** - Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem. **H3** - Resolver situação-problema envolvendo conhecimentos numéricos. **H4** - Avaliar a razoabilidade de um resultado numérico na construçãode argumentos sobre afirmações quantitativas. **H5** - Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos numéricos.
2 - Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representaçãoda realidade e agir sobre ela	**H6** - Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional. **H7** - Identificar características de figuras planas ou espaciais. **H8** - Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma. **H9** - Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.
3 - Construir noções de grandezas e medidas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.	**H10** - Identificar relações entre grandezas e unidades de medida. **H11** - Utilizar a noção de escalas na leitura de representação desituação do cotidiano. **H12** - Resolver situação-problema que envolva medidas de grandezas. **H13** - Avaliar o resultado de uma medição na construção de umargumento consistente. **H14** - Avaliar proposta de intervenção na realidade utilizando conhecimentos geométricos relacionados a grandezas e medidas.

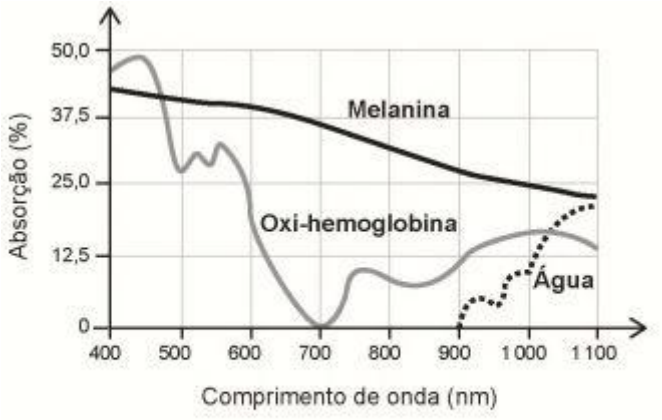
H15 - Identificar a relação de dependência entre grandezas.	
4 - Construir noções de variação de grandezas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.	**H16** - Resolver situação-problema envolvendo a variação de grandezas, direta ou inversamente proporcionais. **H17** - Analisar informações envolvendo a variação de grandezas como recurso para a construção de argumentação. **H18** - Avaliar propostas de intervenção na realidade envolvendo variação de grandezas.
5 - Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.	**H19 -** Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas. **H20** - Interpretar gráfico cartesiano que represente relações entre grandezas. **H21** - Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos. **H22 -** Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação. **H23** - Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos algébricos.
6 - Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.	**H24** - Utilizar informações expressas em gráficos ou tabelas para fazerinferências. **H25** - Resolver problema com dados apresentados em tabelas ou gráficos. **H26** - Analisar informações expressas em gráficos ou tabelas como recursopara a construção de argumentos.
7 - Compreender o caráter aleatório e não-determinístico dos fenômenos naturais e sociaise utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.	**H27** - Calcular medidas de tendência central ou de dispersão de umconjunto de dados expressos em uma tabela de frequências de dados agrupados (não em classes) ou em gráficos. **H28 -** Resolver situação-problema que envolva conhecimentos de estatística e probabilidade. **H29** - Utilizar conhecimentos de estatística e probabilidade como recurso para a construção de argumentação. **H30**1-6Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos de estatística e probabilidade.

Observa-se na tabela 1 que as competências se apoiam em habilidades, algumas habilidades diretamente relacionadas à estatística e probabilidade tais como H24, H25, H26, H27, H28, H29 e H30, e também outras habilidades não diretamente relacionadas, como H2 e H4, mas que de certa forma podem auxiliar na construção de ideias para a resolução de determinadas questões de estatística e probabilidade.

Observamos também que tais habilidades podem servir de apoio, em alguns casos, na resolução de problemas contidos não somente na prova de Matemática e suas Tecnologias, mas também nas outras provas, como por exemplo, na prova de Ciências da Natureza e suas tecnologias no que se refere à interpretação de gráficos e tabelas, como podemos observar na questão seguinte:

QUESTÃO 123/ ENEM 2017 / 2º DIA / CADERNO AMARELO

A epilação a laser (popularmente conhecida como depilação a laser) consiste na aplicação de uma fonte de luz para aquecer e causar uma lesão localizada e controlada nos folículos capilares. Para evitar que outros tecidos sejam danificados, selecionam-se comprimentos de onda que são absorvidos pela melanina presente nos pelos, mas que não afetam a oxi-hemoglobina do sangue e a água dos tecidos da região em que o tratamento será aplicado. A figura mostra como é a absorção de diferentes comprimentos de onda pela melanina, oxi-hemoglobina e água Qual é o comprimento de onda, em nm, ideal para a epilação a laser?



MACEDO, F. S.; MONTEIRO, E. O. Epilação com *laser* e luz intensa pulsada. **Revista Brasileira de Medicina**. Disponível em: www.moreirajr.com.br. Acesso em: 4 set. 2015 (adaptado).

Figura 3: Questão 123/ enem 2017 / 2º dia / caderno amarelo

Qual é o comprimento de onda, em nm, ideal para a epilação a laser?

A. 400

B. 700

C. 1100

D. 900

E. 500

No entanto, as habilidades contidas na competência de área 7 – “compreendero caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística”, tem sido bastante recorrentes nas provas do ENEM.

2.4 Metodologia do Ensino de Estatística na Educação Básica

Para um aprendizado significativo, com base nas argumentações de Skovsmose (2007), Freire (1997) e D'ambrosio (1996), percebe-se que os professores precisam ter domínio da matéria que ensinam, conheçam o conteúdo em profundidade, compreendam o processo de ensino-aprendizagem e disponham de ferramentas didáticas consistentes e tenham clareza do que ensinam e como ensinam. Segundo Lopes (2003, p. 11), o elemento central do conhecimento profissio- nal do professor é, sem dúvida, o didático do conteúdo, porém não é o suficiente. Faz-se necessária uma combinação adequada entre o conhecimento sobre o conteúdo matemático a ser ensinado e o conhecimento pedagógico e didático de como ensiná-lo.

Para tal, para direcionar a ação do professor, os documentos oficiais como os PCNs propõem como perspectiva metodológica a resolução de problemas e define como uma postura de investigação frente a qualquer situação ou fato que possa ser questionado (BRASIL, 2000).

Branca (1997, p. 38) reforça que a metodologia da resolução de problemas quando utilizada pelo professor, torna-se uma aliada para o trabalho com Estatística, por torná-lo mais significativo. Ao se estabelecer uma questão de investigação, é preciso optar por estratégias que levem a respondê-la.

De tal modo, é necessário organizar, representar e analisar os dados a partir do problema. Inseridos nesse processo de aprendizagem, os estudantes provavelmente terão maiores possibilidades de desenvolvimento do pensamento crítico.

Por outras palavras, ao assumir que a resolução de problemas vem como uma habilidade norteadora no ensino de Estatística e probabilidade percebe-se que tal metodologia ainda é distante da realidade desejada, visto que as aulas do Ensino Médio em sua maioria dispõem de um precário processo de ensino–aprendizagem, baseado muitas vezes no ensino de fórmulas e modelos estatísticos.

No entanto, a melhor metodologia, pode ser a prática, a ação. Faz-se necessário então, que o professor estimule os estudantes por meio de experimentos ligados aocotidiano, como por exemplo, deixá-los elaborar sua própria pesquisa, desde a coleta de dados até o resultado final obtido.

3 Metodologia

O presente estudo tem um caráter empírico com base em duas metodologias distintas: a apreciação das questões associadas à Estatística, Probabilidade e Cálculo Combinatório, presente nas provas de Matemática e suas Tecnologias do ENEM nos anos de 2009 a 2019 (caderno amarelo), e a percepção da atuação de alguns professores que ministram aulas de Matemática no ensino médio em escolas públicas e(ou) privadas.

3.1 Apreciação das questões associadas a Estatística e Probabilidade no ENEM

Com base na questão de estudo, faz-se necessário apresentar as habilidades referentes às questões avaliadas nas provas de Matemática do ENEM de 2009 a 2019, as quais foram selecionadas para a realização das análises deste estudo. Os resultados de testes e habilidades registradas foram obtidos do importante acervo de arquivos armazenados no site do Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP), vinculado ao Ministério da Educação (via download), que possui bases de dados disponibilizados com grande quantidade de informações para comunidade em geral. Para acesso, todos os dados estão disponíveis no endereço www.inep.gov.br/provas-e-gabaritos.

As questões foram resolvidas e organizadas em três grupos conforme o nível mais avançado de conhecimento exigido, sendo eles: Estatística, Probabilidade ou Análise Combinatória, segundo os conteúdos previstos para o Ensino Médio constantes no Curriculo Básico Comum de Minas Gerais.

3.2 Percepção da atuação de professores do ensino médio

Para buscar compreender o que pensam sobre o ensino de Estatística, procurei observar, na minha vivência pessoal, a atuação de professores de Matemática do Ensino Médio de escolas públicas e privadas, em alguns aspectos como a sua formação e atuação, tempo de magistério, número de aulas semanais, número de alunos, estrutura física e tecnológica da escola que leciona e suas práticas de ensino.

4 Resultados e Discussão

4.1 Análise de questões do ENEM

Para auxiliar a compreensão das competências estatísticas exigidas dos alunos, conforme explicitado ao longo do trabalho, foi feita a análise do número de questões relacionadas à Estatística e Probabilidade das edições do ENEM de 2009 a 2019, nos cadernos de cor amarela de Matemática e suas Tecnologias, de acordo com os arquivos disponibilizados pelo INEP (BRASIL, 2009). No Anexo A foram inseridas essas questões abordadas neste trabalho agrupando-as conforme três categorias:

a) Estatística

Aqui destacam-se as questões que tratam de habilidades como análise, leitura e interpretação de gráficos e tabelas, valendo ressaltar que aparecem também em outras áreas, como Ciências da Natureza.

b) Probabilidade

Envolve questões de cálculo de probabilidade de ocorrência de determinado evento, união de probabilidades e probabilidade de eventos sucessivos.

c) Cálculo Combinatório

É necessário dominar as questões que envolvem princípios de contagem, bem como resolver problemas ligados a agrupamentos como arranjos, permutações e combinações.

Como o foco do trabalho foi a analise da Estatística e probabilidade no ENEM,

realizou-se uma pesquisa das avaliações aplicadas em um período de dez anos, 2009 a 2019, e observou-se a quantidade de questões abordadas que envolvem os conceitos destas 3 categorias. Na Tabela 2, são apresentados o número das questões por categoria de conhecimento, o ano de aplicação da prova e o percentual exigido no total na prova de Matemática e suas tecnologias.

Tabela 2: Questões de matemática relacionadas às competências de Estatística e Probabilidade por ano de aplicação do ENEM

Ano do ENEM	Número das questões do caderno amarelo por área de conhecimento			Porcentagem (em 45 questões)
	Estatística	**Probabilidade**	**Cálculo Combinatório**	
2009	139, 147, 150, 160, 167, 172	138, 171		17,78
2010	140, 141, 143, 145, 148, 167, 171, 175, 176	156, 173	174	26,66
2011	148, 150, 156, 169, 172, 173, 176	159, 165, 166	167, 170	26,66
2012	140, 143, 144, 158, 159, 170, 172, 175	138, 164	136, 146, 173, 174	31,11
2013	139, 148, 150, 157	141, 155, 175	158, 161, 176	22,22
2014	150, 155, 161, 162, 170, 172	152	151	17,78
2015	160, 166, 178	149, 175	142, 170, 172, 175	20,00
2016	138, 139, 141, 144, 148, 150, 151, 167, 180	147	153, 157	26,67
2017	148, 151, 159, 170, 177	142, 155, 171	140, 141, 149, 166, 167	28,89
2018	147, 154, 162	140, 163, 173, 176	149, 161	20,00
2019	150, 157, 165, 166, 172, 174	176	137, 160	20,00
Média	6,18 questões/ano	2,18 questões/ano	2,36 questões/ano	25,47

As questões selecionadas do ENEM 2009-2019 dizem respeito aos conteúdos específicos do tema “Conhecimentos de Estatística e Probabilidade”. Essas questões foram elaboradas tendo em vista determinada competência e habilidade presentes na Matriz de Referência do ENEM, segundo o INEP (BRASIL, 2009). Notou-se que ainda não há um equilíbrio entre as competências das áreas associadas à Estatística no ENEM, verifica-se a partir da leitura e interpretação das questões, que tais habilidades vão além de resolver problemas com dados apresentados em tabelas ou gráficos, se revela uma predominância por questões que apresentam situações educacionais.

De Macedo (2021) afirma que, além das influências que o Enem e posteriormente a BNCC recebem de sua linhagem de políticas educacionais para o ensino médio, outras influências também devem ser levadas em consideração.

Ao avaliar as questões, percebeu-se a cobrança não apenas de leitura e interpretação dos dados, mostrando uma tendência de esperar que os alunos sejam capazes de superar simples interpretações, mas também de realizar cálculos de probabilidade, contagem e interpretar informações de variáveis apresentadas em situações estatísticas. Segundo Bishop (1995, p. 9), dominar linguagens não quer dizer apenas fazer o bom uso da língua portuguesa, mas também dos outros tipos de linguagens que aparecem na prova, como a linguagem matemática, percebendo que está sendo exigida dos alunos a elaboração de pensamentos mais abstratos e complexos.

A Figura 2 apresenta a quantidade de questões aplicadas nos anos avaliados do ENEM.

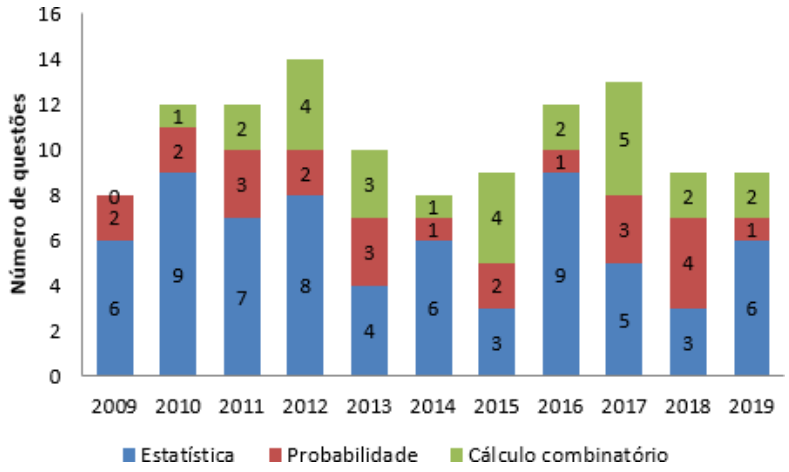


Figura 4: Distribuição do número de questões por assunto e ano de aplicação do ENEM

Fonte: Elaborado pelo autor (2021)

Verificou-se a quantidade de questões aplicadas nos anos avaliados do ENEM,uma variação do número de questões em que se avaliam as habilidades dos alunos em relação à estatística, probabilidade e cálculo combinatório, que a maior médiase refere a questões de estatística descritiva, com média de 5,8 ± 2,1 questões por prova, representando 12,9% da prova de matemática. Assim sendo, ao considerarmos os três assuntos este percentual sobe para 22,43 ± 4,7%, o que significa que quase 1/4 da prova depende do conhecimento adquirido no ensino de Estatística e Probabilidade, sendo que no ano de 2012 este percentual foi o maior no período avaliado.

Por conseguinte, percebe-se que o exame tende a avaliar de forma mais abrangente, questões classificadas categoricamente como questões de Estatística, com um total de 64 questões durante o período avaliado, enquanto as de Probabilidade e Cálculo Combinatório, com apenas 24 e 23 respectivamente. Contudo, essas três categorias associadas representam, em média, um percentual de 22,4% do total das questões da prova de Matemática e suas tecnologias, representando um alto índice de cobrança, considerando-se o número total de itens apresentados nas diversas competências no Curriculo Básico Comum para o Ensino Médio disponível em https://curriculoreferencia.educacao.mg.gov.br/index.php/cbc, elaborado de acordo com a BNCC. Deve-se ressaltar que as unidades básicas são: Números e Álgebra, Geometria e Medidas e Probabilidade e Estatística, e o objeto de conhecimento descrito em cada habilidade norteou a discussão deste trabalho (ANEXO B). Das 49 habilidades de matemática apresentadas no CBC do Estado de Minas Gerais, tem-se que 13 dos objetos de conhecimentos estão associados a estatística e probabilidade, representando 26,53% dos temas norteadores do Ensino Médio. Conforme a categorização de referência do INEP as questões selecionadas neste trabalho estão distribuídas nas habilidades constantes na tabela 3.

Tabela 3: Distribuição das habilidades cobradas ao longo das edições do ENEM

	Ano												
Habilidade	**2009**	**2010**	**2011**	**2012**	**2013**	**2014**	**2015**	**2016**	**2017**	**2018**	**2019**	**Total**	**%**
2					2	1	1	2	1	2	1	10	9,09
3				1					1		2	4	3,64
4		1		1					1			3	2,73
5				1					1			2	1,82
17									1			1	0,91
20		1	1	1								3	2,73
24	2	1	1				1		1			6	5,45
25	1	2	2	2	2			2				11	10,00
26		1	1	2			1	1	1	1	1	9	8,18
27	2	2	2	2	2	1	2	2	1	2	1	19	17,27
28	2	1	2	1	2	2	2	2	2	2	2	20	18,18
29		1	1	2	1	2	2	2	2	2	2	17	15,45
30	1	2	2	1	1	2		1	1			11	10,00
Total	8	12	12	14	10	8	9	12	13	9	9	116	Média = 10,55
% ENEM/Mat	17,78	26,67	26,67	31,11	22,22	17,78	20,00	26,67	28,89	20,00	20,00	Média (%)	22,22

Verifica-se que, para as habilidades das questões, há o esclarecimento de como deve ser compreendido o tema em análise:

> Compreender o caráter aleatório e não-determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística (BRASIL, 2009).

Observa-se também que dentre as habilidades mais frequentes para essa competência, podemos destacar a H28 e a H29, definidas, respectivamente, como "Resolver situação-problema que envolva conhecimentos de estatística e probabilidade" e "Utilizar conhecimentos de estatística e probabilidade como recurso para a construção de argumentação"; em destaque também a H30, "Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos de estatística e probabilidade"; e a H27, "Calcular medidas de tendência central ou de dispersão de um conjunto de dados expressos em uma tabela de frequências de dados agrupados (não em classes) ou em gráficos".

Vale ressaltar as definições de competência e a habilidade que enfatizam a importância dos conhecimentos estatísticos e vêm de encontro ao trabalho aqui proposto:

Competência envolve as seguintes habilidades: selecionar, organizar, relacionar, interpretar dados e informações representados de diferentes formas, para tomar decisões e enfrentar situações-problema.

Habilidade supõe que, dada uma distribuição estatística de variável social, econômica, física, química ou biológica, o aluno possa traduzir e interpretar as informações disponíveis ou reorganizá-las, objetivando interpolações ou extrapolações.

Tanto a competência quanto a habilidade requerem o domínio específico de interpretação de dados e informações, representadas sob diferentes formas, para o enfrentamento de problemas inseridos num contexto de análise e decisão. Segundo relatórios do ENEM disponíveis em http://portal.inep.gov.br/relatorios-pedagogicos,as questões que abordam tal domínio apresentam menor percentual de acerto, fato que confirma a ausência de domínio nos conhecimentos estatísticos.

4.2 Análise da percepção da atuação de professores do ensino médio

As observações que tive dos professores foram transcritas e registradas possibilitando uma pequena discussão pessoal dos resultados.

Quanto a formação e atuação profissional notei que a totalidade dos professores, como esperado, estudou algo sobre Estatística e Probabilidade na graduação, sendo alguns deles atuam na área de educação há mais de 10 anos e que lecionam tanto em escolas públicas quanto privadas. Vários deles têm, em média, mais de 30 alunos por turma, o que muitas vezes pode dificultar o acesso a laboratórios de informática ou a realização de atividades práticas de modo geral. Percebi também que alguns possuem menos de 5 aulas semanais por turma.

> O ensino de Matemática costuma provocar duas sensações contraditórias, tanto por parte de quem ensina, como por parte de quem aprende: de um lado, a constatação de que se trata de uma área de conhecimento importante; de outro, a insatisfação diante dos resultados negativos obtidos com muita freqüência em relação à sua aprendizagem. (PACHECO, Marina Buzin; ANDREIS, Greice da Silva Lorenzzetti, 2018, p. 105-119)

Quanto à estrutura tecnológica da escola que lecionam, percebi que na escola há disponibilidade de recursos tecnológicos, no entanto, quando se trata especificamente de laboratório deinformática, algumas escolas deixam a desejar. Também pude perceber que alguns professores não conhecem softwares e/ou aplicativos paraapoio ao ensino de Estatística e Probabilidade. Muitos professores utilizam a calculadora nas aulas, mas mostram a preocupação em desenvolver uma compreensão efetiva na resolução das atividades propostas.

Com base nas percepções observadas nas práticas de ensino de Estatística e Probabilidade, a maior parte dos professores planeja ações nas quais os estudantes são protagonistas e propõem a vivência das etapas de uma pesquisa sobre temas pessoais. Propõem exercícios contextualizados e traz para sala de aula questões do Enem para serem analisadas e utilizadas como ferramenta de compreensão e aprendizado.

Diante de tais percepções, e com base nos estudos acerca dos temas Estatística e Probabilidade, percebi que, ainda que a estatística faça parte da vida de todo indivíduo, em sua maioria ela é vista como um problema.

Porém, esse perfil, apesar de adequado às discussões teóricas e análises de documentos oficiais da Educação, foi possível perceber a complexidade dos educadores em trabalhar a estatística e probabilidade de forma interdisciplinar e com base em dados regionais conforme a realidade dos alunos.

As observações ainda indicam que os professores conferem em relevância, ao fato de que muitos alunos não demonstram interesse pelas aulas relacionadas a Estatística e probabilidade, dificultando muitas vezes a participação dos alunos nessas aulas.

A observação sinaliza um grau de importância extremamente alto para as ações didáticas que esses professores costumam adotar no ensino de Estatística. Os recursos utilizados nas aulas de matemática que abordam esses conteúdos, muitas vezes não contam com recursos tecnológicos disponíveis que auxiliem o professor no processo de ensino-aprendizagem, como aplicativos e softwares, mesmo havendo salas de informática disponíveis.

Por outras palavras, aprender estatística é muito importante, ela faz parte da vida cotidiana de todos os indivíduos, os auxilia em suas tomadas de decisões.

Conforme Godino, Batanero e Cañizares (1987, p. 15), é imprescindível desenvolver uma prática pedagógica na qual sejam propostas situações em que os estudantes apropriem-se das habilidades desejadas quanto à estatística e probabilidade, tais atividades devem acontecer por meio de questionamentos, experimentação concreta e uma proposta de ensino-aprendizagem significativa.

> A definição de Aprendizagem Significativa, com foco na concepção behaviorista, tem o seu suporte nas explicações orais do professor, que transmite ideias (como estímulos) aos alunos, de forma que sejam traduzidas como arquivadores do conhecimento, e exige, em troca, que os alunos usem a sua atividade mental, reforçada pelo professor, com o objetivo de acumular, armazenar e reproduzir as informações vindas das ideias apresentadas. (AGRA, Glenda et al., v. 72, p. 248-255, 2019)

Com efeito, observei também que os professores sugerem que os alunos estão tendo a oportunidade de desenvolver o conhecimento estatístico por meio de questões relacionadas ao próprio ENEM, pois a maioria desses professores apresentam suas metodologias baseadas nessa avaliação.

Em relação aos conteúdos das aulas de Matemática, observei que alguns professores direcionam certa quantidade do total de suas aulas aos assuntos de Estatística, Probabilidade e Cálculo Combinatório, e que essa quantidade difere

proporcionalmente da quantidade que é cobrada no ENEM, podendo ser um desequilíbrio entre o que realmente é ensinado e o que é exigido.

Com base nessas observações pude perceber o reflexo do processo de ensino-aprendizagem dos conteúdos de estatística, probabilidade e cálculo combinatório no ENEM, visto que o ideal para um bom desempenho dos alunos nessa área depende diretamente de uma construção contínua dos conhecimentos estatísticos.

Presumo também que o assunto probabilidade necessita ter uma maior atenção dos professores, aulas diferenciadas, material concreto (dados, cartas de baralho), oficinas e recursos tecnológicos que vise sanar possíveis dificuldade dos alunos, pois a maioria utiliza exclusivamente o livro didático em suas aulas.

Dessa forma, torna-se indispensável que os conteúdos sejam trabalhados de forma dinâmica, prática, e aprofundada em todos os anos do ensino médio, utilizando de práticas multidisciplinares, o que faria com que os alunos passassem a compreender e identificar os tipos de gráficos e tabelas, medidas de posição, tendo em vista que esse conjunto de conhecimentos aumenta o entendimento de "mundo", melhorando o rendimento dos estudantes no ENEM.

Conforme Viali e Cury (2009), no Ensino Médio, os conteúdos de Estatística e Probabilidade devem estar inter-relacionados de modo que o estudante perceba as vinculações entre os mesmos. Ao tratar das Investigações Estatísticas e Probabilidade para os alunos do Ensino Médio, temos que analisar o quanto a Investigação Matemática contribuirá para o desempenho individual e coletivo do aluno e de que maneira esta metodologia auxiliará na compreensão das situações que serão geradas, analisando como será a capacidade de formular e conduzir determinadas investigações.

Com isso, os alunos se sentirão seguros para a realização das questões relacionadas às competências matemáticas não partindo da resolução de problemas de maneira intuitiva errada, sem justificativa, com interpretação incorreta e/ou aplicação inadequada de conteúdos de matemática já estudados.

Numa perspectiva sobre possíveis erros cometidos no ENEM, estes podem ocorrer pelo desajuste dos conteúdos de séries anteriores e não especificamente nos conceitos de estatística e probabilidade, o que nos remete a uma reflexão no sentido da importância dos educadores estabelecerem ligações do conteúdo que está sendo estudado no momento, com conteúdos anteriores.

5 Considerações Finais

Saber ler, selecionar, interpretar e agir a partir de dados numéricos têm sido habilidades fundamentais em uma sociedade repleta de informações como a qual vivemos atualmente. Essas competências estão associadas à educação estatística, sendo o processo de ensino-aprendizagem de Estatística tema de discussão em diversas pesquisas científicas e estudos acerca da matemática.

O presente estudo buscou refletir alguns indicadores que norteiam as práticas de professores ao ensinar conceitos estatísticos e a aplicação desses conceitos em questões de estatística no Enem. As análises conjugadas tem a intenção de auxiliar na compreensão da realidade do ensino de Estatística e Probabilidade no Ensino Médio.

Na percepção sobre os professores notei que os documentos oficiais brasileiros atuais da Educação Matemática estão alinhados às discussões atuais sobre habilidades e competências estatísticas. No entanto, as discussões pertinentes ao ensino e aprendizagem de Estatística não têm sido bem exploradas na formação desses professores.

Nessa perspectiva, o processo de ensino-aprendizagem tem deixado muitas lacunas, resultando nas fragilidades dos estudantes que concluem a Educação Básica em relação à Matemática.

A análise das percepções revelou uma observação de professores com experiência na docência e licenciados em Matemática. Percebe-se a preocupação dos docentes com a vivência dos alunos quanto às questões do ENEM, bem como a necessidade de dispor de metodologias diversificadas no cotidiano dos alunos.

No entanto, sugere a predominância do trabalho com leitura e análise dos dados, deixando de lado a necessidade do aluno em construir argumentações consistentes, elaborar propostas de intervenção que favoreçam o desenvolvimento das competências estatísticas.

Assim sendo, a formação profissional faz parte de todo esse processo, julgamos como essenciais e urgentes ações intencionais que visem não somente à formação inicial como principalmente à formação continuada crítica e reflexiva daqueles que ensinam Estatística na Educação Básica, estes que têm o desafio de propor atividades significativas e motivar seus alunos diariamente na conquista dessas habilidades matemáticas.

Dessa forma, o desenvolvimento do pensamento probabilístico e estatístico, sem dúvida, pode efetivar as potencialidades formativas da disciplina de Matemática. Para isso, defende-se que os conceitos probabilísticos e estatísticos devam ser

trabalhados desde os anos iniciais da educação básica para não privar o estudante de um entendimento mais amplo dos problemas ocorrentes em sua realidade social.

Assim, pode ser que não seja possível esperar que o aluno chegue ao ensino médio apto a iniciar conteúdos essenciais para o bom desempenho nas competências de estatística, visto que tais habilidades têm sido de grande relevância para um bom desempenho dos estudantes nas avaliações do ENEM.

Por outras palavras, é preciso que se criem metodologias de ensino efetivas e significativas, de forma a inspirar e estabelecer um bom desempenho dos alunos no processo de aprendizagem na disciplina de matemática, já que ao final do Ensino Médio o aluno deverá estar preparado para realizar a avaliação do Enem. Na perspectiva que atualmente é uma porta de entrada para as universidades, permitindo aos alunos o acesso ao ensino superior público.

6 Referências

AGRA, Glenda et al. Análise do conceito de Aprendizagem Significativa à luz da Teoria de Ausubel. **Revista Brasileira de Enfermagem**, v. 72, p. 248-255, 2019.

BISHOP, J. Bebendo da fonte do conhecimento: incentivos aluno estudar e aprender -externalidades, problemas de informação e pressão dos pares. **International Journal of Educational Research**, v. 23, n. 8, p. 653–752, 1995.

BRANCA, N. A. Resolução de problemas como meta, processo e habilidade básica. **In: KRULIK, S; REYS, R. E. (Ed.). A Resolução de problemas na matemática escolar. São Paulo: Atual**, p. 4–12, 1997.

BRASIL. Parâmetros curriculares nacionais (ensino médio). **Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC /SEF**, 2000.

BRASIL, L. n. 9394 de . Lei de diretrizes e bases da educação nacional. **BRASIL. INEP. ENEM - Exame Nacional do Ensino Médio: Documento Básico.**, 2009.

BRASIL. Base Nacional Comum Curricular (**BNCC**). Educação é a Base. Brasília, MEC/CONSED/UNDIME, **2017**.

BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília: MEC, 2018.

BRASIL. Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. (2020). Matrizes de Referência. Brasília: INEP/MEC.

CORDANI., L. K. **O Ensino de Estatística na Universidade e a controvérsia sobre os fundamentos da Inferência**. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2001.

CORDANI, Lisbeth Kaiserlian. Caminhos da Educação Estatística ao Longo do Tempo: uma leitura pessoal. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**, v. 8, n. 3, 2015.

COUTINHO, C. Q. S.; ALMOULOUD, S. A. Estudos e reflexões em educação estatística. **Campinas (SP): Mercado de letras**, p. 19–44, 2010.

D’AMBROSIO, U. **Educação Matemática: da teoria à prática**. São Paulo: Papirus Editora, 1996.

D’AMBROSIO, U. **Etnomatemática: Arte ou técnica de explicar ou conhecer**. São Paulo: Ática, 1998.

BRANCO, Emerson Pereira; ROYER, Marcia Regina; DE GODOI BRANCO, Alessandra Batista. A abordagem da Educação Ambiental nos PCNS, nas DCNS e na BNCC. **Nuances: estudos sobre Educação**, v. 29, n. 1, 2018.

FREIRE, P. **Pedagogia da autonomia: saberes necessários á prática educativa**. São Paulo: Paz e Terra, 1997.

GODINO, J. D.; BATANERO, C.; CAÑIZARES, M. J. Azar y probabilidad. **Síntesis, Madrid**, 1987.

HULSIZER, M.; WOOLF, L. A guide to teaching statics: inovations and best practises. **Singapore: Utopia**, 2009.

KEMIAC, L. **Exame nacional do ensino médio como gênero do discurso**. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Campina Grande, 2011.

LOPES, C. A. E. **O conhecimento profissional dos professores e suas relações com estatística e probabilidade na educação básica**. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2003.

MACEDO, Ester Pereira Neves de. Filosofia nas Orientações Curriculares para o Ensino Médio e no Enem: lacunas temporais e conceituais. **Educação e Pesquisa**, v. 47, 2021.

MATOS, Maria do Carmo de; PAIVA, Edil Vasconcellos de. HIBRIDISMO E CURRÍCULO: ambivalências e possibilidades. Currículo sem Fronteiras, v.7, n.2, pp.185-201, Jul/Dez 2007.

MEC. Planejando a Próxima Década. Conhecendo as 20 Metas do Plano Nacional de Educação. 2014. Disponível em: http://pne.mec.gov.br/images/pdf/pne_conhecendo_20_metas.pdf .

PACHECO, Marina Buzin; ANDREIS, Greice da Silva Lorenzzetti. Causas das dificuldades de aprendizagem em Matemática: percepção de professores e estudantes do 3º ano do Ensino Médio. **Revista Principia, João Pessoa**, v. 38, p. 105-119, 2018.

SKOVSMOSE, O. **Educação Crítica: Incerteza, Matemática, Responsabilidade**. São Paulo: Cortez Editora, 2007.

GERAIS, Minas. Secretaria de Estado de Educação de Minas Gerais-

SEE/MG. **Conteúdo Básico Comum (CBC)**, 2018.

VIALI, L.; CURY, H. N. Análise de erros em probabilidade: uma pesquisa com professores em formação continuada. **Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática**, v. 11, n. 2, p. 373–391, 2009.

WALICHINSKI, D. **Contextualização no Ensino de Estatística: uma proposta para os anos finais do Ensino Fundamental**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2012.

7 Anexos

Anexo A

Questões envolvendo Estatística e Probabilidade no ENEM entre os anos de 2009 a 2019

ANEXO A- Questões de Estatística aplicadas no ENEM entre os anos de 2009 e 2019.

ENEM 2009 - ESTATÍSTICA	
Texto para as questões 138 e 139 **Questão 139** Dados da Associação Nacional de Empresas de Transportes Urbanos (ANTU) mostram que o número de passageiros transportados mensalmente nas principais regiões metropolitanas do país vem caindo sistematicamente. Eram 476,7 milhões de passageiros em 1995, e esse número caiu para 321,9 milhões em abril de 2001. Nesse período, o tamanho da frota de veículos mudou pouco, tendo no final de 2008 praticamente o mesmo tamanho que tinha em 2001. O gráfico a seguir mostra um índice de produtividade utilizado pelas empresas do setor, que é a razão entre o total de passageiros transportados por dia e o tamanho da frota de veículos. Disponível em: http://www.ntu.org.br. Acesso em 16 jul. 2009 (adaptado). Supondo que as frotas totais de veículos naquelas regiões metropolitanas em abril de 2001 e em outubro de 2008 eram do mesmo tamanho, os dados do gráfico permitem inferir que o total de passageiros transportados no mês de outubro de 2008 foi aproximadamente igual a **A** 355 milhões. **B** 400 milhões. **C** 426 milhões. **D** 441 milhões. **E** 477 milhões.	Gabarito – A Comentário: A partir do enunciado temos: Em abril de 2001: 1 veículo ———- 400 pessoas x veículos ——— 321 900 000 pessoas x = 321 900 000 / 400 x = 804 750 veículos Assim, em Outubro de 2008, será: 1 veículo ———— 441 pessoas 804 750 veículos ——— y pessoas y = 441 . 804 750 y = 354 894 750 pessoas ≅ **355 milhões**

Questão 147

A tabela mostra alguns dados da emissão de dióxido de carbono de uma fábrica, em função do número de toneladas produzidas.

Produção (em toneladas)	Emissão de dióxido de carbono (em partes por milhão – ppm)
1,1	2,14
1,2	2,30
1,3	2,46
1,4	2,64
1,5	2,83
1,6	3,03
1,7	3,25
1,8	3,48
1,9	3,73
2,0	4,00

Cadernos do Gestar II, Matemática TP3.
Disponível em: www.mec.gov.br. Acesso em: 14 jul. 2009.

Os dados na tabela indicam que a taxa média de variação entre a emissão de dióxido de carbono (em ppm) e a produção (em toneladas) é

A) inferior a 0,18.
B) superior a 0,18 e inferior a 0,50.
C) superior a 0,50 e inferior a 1,50.
D) superior a 1,50 e inferior a 2,80.
E) superior a 2,80.

Gabarito - D

Comentário:
Para calcular a taxa média da variação da emissão de dióxido de carbono (em ppm), soma-se todas as variações e divide-se pelo número de variações:2,30 − 2,14 + 2,46 − 2,30 + 2,64 − 2,46 + 2,83 − 2,64 + 3,03 − 2,83 + 3,25 − 3,03 + 3,48 − 3,25 + 3,73 − 3,48 + (4,00 − 3,73) 9 = 0,16 + 0,16 + 0,18 + 0,19 + 0,20 + 0,22 + 0,23 + 0,25 + 0,279 = 1,869 = 0,207 (aproximadamente). Como a variação da produção (em toneladas) foi a mesma a cada intervalo, sua média será igual a este próprio valor 0,1. A taxa média de variação entre a emissão de dióxido de carbono (em ppm) e a produção (em toneladas) é calculada por meio da divisão desses dois resultados: 0,2070,1 = 2,07, portanto superior a 1,5 e inferior a 2,8.

Questão 150

Brasil e França têm relações comerciais há mais de 200 anos. Enquanto a França é a 5.ª nação mais rica do planeta, o Brasil é a 10.ª, e ambas se destacam na economia mundial. No entanto, devido a uma série de restrições, o comércio entre esses dois países ainda não é adequadamente explorado, como mostra a tabela seguinte, referente ao período 2003-2007.

Investimentos Bilaterais (em milhões de dólares)

Ano	Brasil na França	França no Brasil
2003	367	825
2004	357	485
2005	354	1.458
2006	539	744
2007	280	1.214

Disponível em: www.cartacapital.com.br. Acesso em: 7 jul. 2009.

Os dados da tabela mostram que, no período considerado, os valores médios dos investimentos da França no Brasil foram maiores que os investimentos do Brasil na França em um valor

A) inferior a 300 milhões de dólares.
B) superior a 300 milhões de dólares, mas inferior a 400 milhões de dólares.
C) superior a 400 milhões de dólares, mas inferior a 500 milhões de dólares.
D) superior a 500 milhões de dólares, mas inferior a 600 milhões de dólares.
E) superior a 600 milhões de dólares.

Gabarito - D

Comentário:
A questão pode ser resolvida de duas formas. A primeira calculando a média de investimento da França no Brasil (MF), em seguida, a média de investimento do Brasil na França (MB), efetuando a diferença entre os dois. A segunda consiste em calcular as diferenças em cada ano para depois fazer a média destas diferenças. Pelo primeiro modo, tem-se: MF = *825 + 485 + 1458 + 744 + 12145 = 47265 = 945,2* e MB = *367 + 357 + 354 + 539 + 2805 = 18975 = 379,4.* Ambos em milhões de dólares. A diferença é de 945,2 – 379,4 = 565,8 milhões de dólares.

Questão 160

Suponha que a etapa final de uma gincana escolar consista em um desafio de conhecimentos. Cada equipe escolheria 10 alunos para realizar uma prova objetiva, e a pontuação da equipe seria dada pela mediana das notas obtidas pelos alunos. As provas valiam, no máximo, 10 pontos cada. Ao final, a vencedora foi a equipe Ômega, com 7,8 pontos, seguida pela equipe Delta, com 7,6 pontos. Um dos alunos da equipe Gama, a qual ficou na terceira e última colocação, não pôde comparecer, tendo recebido nota zero na prova. As notas obtidas pelos 10 alunos da equipe Gama foram 10; 6,5; 8; 10; 7; 6,5; 7; 8; 6; 0.

Se o aluno da equipe Gama que faltou tivesse comparecido, essa equipe

A) teria a pontuação igual a 6,5 se ele obtivesse nota 0.
B) seria a vencedora se ele obtivesse nota 10.
C) seria a segunda colocada se ele obtivesse nota 8.
D) permaneceria na terceira posição, independentemente da nota obtida pelo aluno.
E) empataria com a equipe Ômega na primeira colocação se o aluno obtivesse nota 9.

Gabarito - D

Comentário:
A mediana é o valor que ocupa a posição central do rol (quando os elementos estão ordenados de forma crescente ou decrescente). Neste caso, são dez notas da equipe Gama, mas como a nota do aluno faltoso pode ser alterada, ordenando-se as nove restantes tem-se: 6,0; 6,5; 6,5; 7,0; 7,0; 8,0; 8,0; 10,0; 10,0. A posição central no caso de dez notas é calculada com a média aritmética dos termos que ocupam a quinta e sexta posições. Independente do valor da nota do aluno faltoso, aquela que ocupará a quinta posição é a nota 7,0. Para que a nota deste aluno faltoso ocupe a sexta posição nesta sequência e altere a mediana da equipe, esta deverá ser algum valor N, que satisfaça a seguinte condição $7,0 \leq N \leq 8,0$. Sendo o maior valor de N = 8,0. O valor máximo da mediana será de (7+8)/2 = *7,5,* sendo menor que 7,6 da equipe Delta que ocupou o segundo lugar. Com isso, ela permanece na terceira posição de qualquer maneira, independente da nota obtida pelo aluno faltoso.

Questão 167

Na tabela, são apresentados dados da cotação mensal do ovo extra branco vendido no atacado, em Brasília, em reais, por caixa de 30 dúzias de ovos, em alguns meses dos anos 2007 e 2008.

Mês	Cotação	Ano
Outubro	R$ 83,00	2007
Novembro	R$ 73,10	2007
Dezembro	R$ 81,60	2007
Janeiro	R$ 82,00	2008
Fevereiro	R$ 85,30	2008
Março	R$ 84,00	2008
Abril	R$ 84,60	2008

De acordo com esses dados, o valor da mediana das cotações mensais do ovo extra branco nesse período era igual a

(A) R$ 73,10.
(B) R$ 81,50.
(C) R$ 82,00.
(D) R$ 83,00.
(E) R$ 85,30.

Gabarito - D

Comentário:
A mediana é o valor que ocupa a posição central da lista em que os elementos estão ordenados de forma crescente ou decrescente. Neste caso, são sete elementos, o termo que ocupa a posição central será o quarto termo da lista (três abaixo e três acima). A lista das cotações é R$ 73,10, R$ 81,60, R$ 82,00, R$ 83,00, R$ 84,00, R$ 84,60, R$ 85,30. Logo a mediana é igual a R$ 83,00.

Questão 172

Nos últimos anos, o volume de petróleo exportado pelo Brasil tem mostrado expressiva tendência de crescimento, ultrapassando as importações em 2008. Entretanto, apesar de as importações terem se mantido praticamente no mesmo patamar desde 2001, os recursos gerados com as exportações ainda são inferiores àqueles despendidos com as importações, uma vez que o preço médio por metro cúbico do petróleo importado é superior ao do petróleo nacional. Nos primeiros cinco meses de 2009, foram gastos 2,84 bilhões de dólares com importações e gerada uma receita de 2,24 bilhões de dólares com as exportações. O preço médio por metro cúbico em maio de 2009 foi de 340 dólares para o petróleo importado e de 230 dólares para o petróleo exportado. O quadro a seguir mostra os dados consolidados de 2001 a 2008 e dos primeiros cinco meses de 2009.

Comércio exterior de petróleo
(milhões de metros cúbicos)

Ano	Importação	Exportação
2001	24,19	6,43
2002	22,06	13,63
2003	19,96	14,03
2004	26,91	13,39
2005	21,97	15,93
2006	20,91	21,36
2007	25,38	24,45
2008	23,53	25,14
2009*	9,00	11,00

*Valores apurados de janeiro a maio de 2009.

Considere que as importações e exportações de petróleo de junho a dezembro de 2009 sejam iguais a $\frac{7}{5}$ das importações e exportações, respectivamente, ocorridas de janeiro a maio de 2009. Nesse caso, supondo que os preços para importação e exportação não sofram alterações, qual seria o valor mais aproximado da diferença entre os recursos despendidos com as importações e os recursos gerados com as exportações em 2009?

A 600 milhões de dólares.
B 840 milhões de dólares.
C 1,34 bilhão de dólares.
D 1,44 bilhão de dólares.
E 2,00 bilhões de dólares.

Gabarito - C

Comentário:

O valor das importações e exportações do ano de 2009 será a soma dos recursos de janeiro a maio com de junho a dezembro.

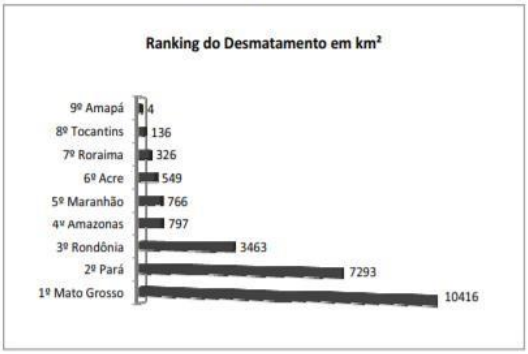
Para as importações no primeiro período, o valor foi de 2,84 bilhões de dólares, enquanto as exportações foram de 2,24 bilhões de dólares. Um saldo de 2,84 - 2,24 = 0,6 bilhões de dólares neste primeiro período.

No segundo período, o valor das importações e exportações é calculado pelo produto de 7/5 com o preço/m³ do petróleo vezes o volume de petróleo vendido (em m³), sendo o saldo de 7/5 *x (9 x 10/6 x 340 − 11 x 10/6 x 230)= 7/5 (*3060 – 2530) milhões = 7/5 (530) = 0,742 bilhões de dólares.
No total 0,6 + 0,742 = 1,342 bilhões de dólares.

ENEM 2010 - ESTATÍSTICA

Questão 140

Em sete de abril de 2004, um jornal publicou o *ranking* de desmatamento, conforme gráfico, da chamada Amazônia Legal, integrada por nove estados.



Disponível em: www.folhaonline.com.br. Acesso em: 30 abr. 2010 (adaptado).

Considerando-se que até 2009 o desmatamento cresceu 10,5% em relação aos dados de 2004, o desmatamento médio por estado em 2009 está entre

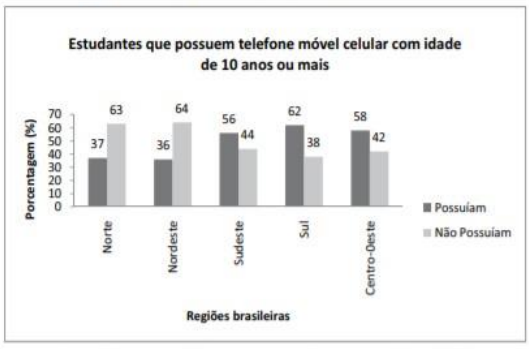
A 100 km² e 900 km².
B 1 000 km² e 2 700 km².
C 2 800 km² e 3 200 km².
D 3 300 km² e 4 000 km².
E 4 100 km² e 5 800 km².

Gabarito - C

Comentário:
O desmatamento médio, por estado, em 2004 foi, em km², de:
M_{2004} = (4+136+326+549+766+797+3 463+7 293+10 416)/ 9 = 2638,9.
Com um crescimento de 10,5% em 2009, essa média passou a ser de:
$M_{2009} = 1{,}105.M_{2004} = 1{,}105.2638{,}9 \cong 2916$, valor entre 2800 e 3200.

Questão 141

Os dados do gráfico foram coletados por meio da Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios.



Fonte: IBGE.Disponível em: http://www.ibge.gov.br. Acesso em: 28 abr. 2010 (adaptado).

Supondo-se que, no Sudeste, 14 900 estudantes foram entrevistados nessa pesquisa, quantos deles possuíam telefone móvel celular?

A 5 513
B 6 556
C 7 450
D 8 344
E 9 536

Gabarito - D

Comentário:
Supondo que os estudantes entrevistados tenham 10 anos ou mais, a quantidade dos que possuem telefone celular é 56%.14 900 = 8 344

Questão 143

A classificação de um país no quadro de medalhas nos Jogos Olímpicos depende do número de medalhas de ouro que obteve na competição, tendo como critérios de desempate o número de medalhas de prata seguido do número de medalhas de bronze conquistados. Nas Olimpíadas de 2004, o Brasil foi o décimo sexto colocado no quadro de medalhas, tendo obtido 5 medalhas de ouro, 2 de prata e 3 de bronze. Parte desse quadro de medalhas é reproduzida a seguir.

Classificação	País	Medalhas de ouro	Medalhas de prata	Medalhas de bronze	Total de medalhas
8º	Itália	10	11	11	32
9º	Coreia do Sul	9	12	9	30
10º	Grã-Bretanha	9	9	12	30
11º	Cuba	9	7	11	27
12º	Ucrânia	9	5	9	23
13º	Hungria	8	6	3	17

Disponível em: http://www.quadroademedalhas.com.br. Acesso em: 05 abr. 2010 (adaptado).

Se o Brasil tivesse obtido mais 4 medalhas de ouro, 4 de prata e 10 de bronze, sem alteração no número de medalhas dos demais países mostrados no quadro, qual teria sido a classificação brasileira no quadro de medalhas das Olimpíadas de 2004?

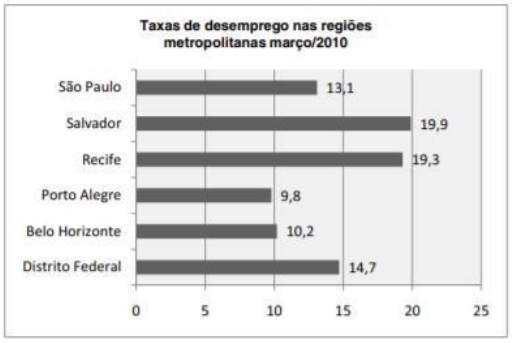
A 13º
B 12º
C 11º
D 10º
E 9º

Gabarito - B

Comentário:
Com mais 4 medalhas de ouro, 4 de prata e 10 de bronze, o Brasil ficaria com 9 medalhas de ouro, 6 de prata e 13 de bronze e a classificação do Brasil seria a 12ª.

Questão 145

Os dados do gráfico seguinte foram gerados a partir de dados colhidos no conjunto de seis regiões metropolitanas pelo Departamento Intersindical de Estatística e Estudos Socioeconômicos (Dieese).



Disponível em: http://g1.globo.com. Acesso em: 28 abr. 2010 (adaptado).

Supondo que o total de pessoas pesquisadas na região metropolitana de Porto Alegre equivale a 250 000, o número de desempregados em março de 2010, nessa região, foi de

A 24 500.
B 25 000.
C 220 500.
D 223 000.
E 227 500.

Gabarito - A

Comentário:
O número de desempregados em março de 2010, na região metropolitana de Porto Alegre, foi de 9,8% de 250 000 e portanto: 9,8% . 250 000 = 24 500

Questão 148

O gráfico a seguir apresenta o gasto militar dos Estados Unidos, no período de 1988 a 2006.

Almanaque Abril 2008. Editora Abril.

Com base no gráfico, o gasto militar no início da guerra no Iraque foi de

A) U$ 4.174.000,00.
B) U$ 41.740.000,00.
C) U$ 417.400.000,00.
D) U$ 41.740.000.000,00.
E) U$ 417.400.000.000,00.

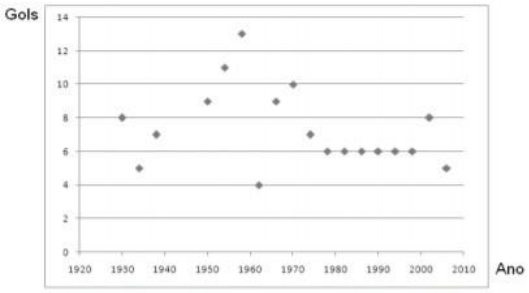
Gabarito - E

Comentário:
De acordo com o gráfico, no início da guerra no Iraque o gasto militar dos Estados Unidos foi de U$ 417,4 bilhões, ou seja, U$ 417 400 000 000,00.

Questão 167

O gráfico apresenta a quantidade de gols marcados pelos artilheiros das Copas do Mundo desde a Copa de 1930 até a de 2006.

Quantidades de Gols dos Artilheiros das Copas do Mundo



Disponível em: http://www.suapesquisa.com. Acesso em: 23 abr. 2010 (adaptado).

A partir dos dados apresentados, qual a mediana das quantidades de gols marcados pelos artilheiros das Copas do Mundo?

A) 6 gols
B) 6,5 gols
C) 7 gols
D) 7,3 gols
E) 8,5 gols

Gabarito - B

Comentário:

Colocando em ordem crescente temos:

4; 5; 5; 6; 6; 6; 6; 6; 6; 7; 7; 8; 8; 9; 9; 10; 11; 13

Os elementos centrais são: 6 e 7

A mediana será: (6+7)/2 = **6,5 gols**

Questão 171

Marco e Paulo foram classificados em um concurso. Para classificação no concurso o candidato deveria obter média aritmética na pontuação igual ou superior a 14. Em caso de empate na média, o desempate seria em favor da pontuação mais regular. No quadro a seguir são apresentados os pontos obtidos nas provas de Matemática, Português e Conhecimentos Gerais, a média, a mediana e o desvio padrão dos dois candidatos.

Dados dos candidatos no concurso

	Matemática	Português	Conhecimentos Gerais	Média	Mediana	Desvio Padrão
Marco	14	15	16	15	15	0,32
Paulo	8	19	18	15	18	4,97

O candidato com pontuação mais regular, portanto mais bem classificado no concurso, é

A) Marco, pois a média e a mediana são iguais.
B) Marco, pois obteve menor desvio padrão.
C) Paulo, pois obteve a maior pontuação da tabela, 19 em Português.
D) Paulo, pois obteve maior mediana.
E) Paulo, pois obteve maior desvio padrão.

Gabarito - B

Comentário:

As médias de Marco e Paulo são iguais, porém Marcos possui o menor desvio padrão, o que significa dizer que suas notas nas provas estão mais próximas da média do que as notas de Paulo.

Assim, as notas obtidas por Marco no concurso são mais regulares, logo Marco foi melhor classificado.

Questão 175

O quadro seguinte mostra o desempenho de um time de futebol no último campeonato. A coluna da esquerda mostra o número de gols marcados e a coluna da direita informa em quantos jogos o time marcou aquele número de gols.

Gols marcados	Quantidade de partidas
0	5
1	3
2	4
3	3
4	2
5	2
7	1

Se X, Y e Z são, respectivamente, a média, a mediana e a moda desta distribuição, então

A) $X = Y < Z$.
B) $Z < X = Y$.
C) $Y < Z < X$.
D) $Z < X < Y$.
E) $Z < Y < X$.

Gabarito – E

Comentário:

Sendo a média(X) igual a: 5.0+3.1+4.2+3.3+2.4+2.5+1.75+3+4+3+2+2+2+1 = 45/20 = 2,25 e a mediana (Y) = 2, que é a media aritmética dos dois elementos centrais do ROL e a moda(Z) igual a 0, pois 0 foi o valor de maior frequência. Temos Z<Y<X.

ENEM 2011 - ESTATÍSTICA

QUESTÃO 148

Uma equipe de especialistas do centro meteorológico de uma cidade mediu a temperatura do ambiente, sempre no mesmo horário, durante 15 dias intercalados, a partir do primeiro dia de um mês. Esse tipo de procedimento é frequente, uma vez que os dados coletados servem de referência para estudos e verificação de tendências climáticas ao longo dos meses e anos.

As medições ocorridas nesse período estão indicadas no quadro:

Dia do mês	Temperatura (em °C)
1	15,5
3	14
5	13,5
7	18
9	19,5
11	20
13	13,5
15	13,5
17	18
19	20
21	18,5
23	13,5
25	21,5
27	20
29	16

Em relação à temperatura, os valores da média, mediana e moda são, respectivamente, iguais a

A) 17 °C, 17 °C e 13,5 °C.
B) 17 °C, 18 °C e 13,5 °C.
C) 17 °C, 13,5 °C e 18 °C.
D) 17 °C, 18 °C e 21,5 °C.
E) 17 °C, 13,5 °C e 21,5 °C.

Gabarito - B

Comentário:
Calculando a média:

4 dias	13,5ºC
3 dias	20ºC
2 dias	18ºC
1 dia	14ºC
1 dia	15,5ºC
1 dia	16ºC
1 dia	18,5ºC
1 dia	19,5ºC
1 dia	21,5ºC

(+)

$$\text{Média} = \frac{13,5\cdot 4+20\cdot 3+18\cdot 2+14\cdot 1+15,5\cdot 1+16\cdot 1+18,5\cdot 1+19,5\cdot 1+21,5\cdot 1}{\underbrace{4+3+2+1+1+1+1+1+1}_{9 \quad\quad 6}} = \frac{255}{15} = 17^{\circ}C$$

Mediana: é uma medida de tendência central baseada na tabela de frequências. Portanto 18ºC
Moda: de forma "coloquial" é o evento que se repete mais vezes. 13,5ºC.

QUESTÃO 150

A participação dos estudantes na Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) aumenta a cada ano. O quadro indica o percentual de medalhistas de ouro, por região, nas edições da OBMEP de 2005 a 2009:

Região	2005	2006	2007	2008	2009
Norte	2%	2%	1%	2%	1%
Nordeste	18%	19%	21%	15%	19%
Centro-Oeste	5%	6%	7%	8%	9%
Sudeste	55%	61%	58%	66%	60%
Sul	21%	12%	13%	9%	11%

Disponível em: http://www.obmep.org.br. Acesso em: abr. 2010 (adaptado).

Em relação às edições de 2005 a 2009 da OBMEP, qual o percentual médio de medalhistas de ouro da região Nordeste?

A) 14,6%
B) 18,2%
C) 18,4%
D) 19,0%
E) 21,0%

Gabarito - C

Comentário:
O percentual médio de medalhistas de ouro da região Nordeste nessas cinco edição da OBMEP é dado por:
(0,18 + 0,19 + 0,21 + 0,15 + 0,19)/5 = 0,92 / 5 = 0,184 = 18,4%

QUESTÃO 156

A tabela compara o consumo mensal, em kWh, dos consumidores residenciais e dos de baixa renda, antes e depois da redução da tarifa de energia no estado de Pernambuco.

Como fica a tarifa

Residencial

Consumo Mensal (kWh)	Antes	Depois	Economia
140	R$ 71,04	R$ 64,75	R$ 6,29
185	R$ 93,87	R$ 85,56	R$ 8,32
350	R$ 177,60	R$ 161,86	R$ 15,74
500	R$ 253,72	R$ 231,24	R$ 22,48

Baixa renda

Consumo Mensal (kWh)	Antes	Depois	Economia
30	R$ 3,80	R$ 3,35	R$ 0,45
65	R$ 11,53	R$10,04	R$ 1,49
80	R$ 14,84	R$12,90	R$ 1,94
100	R$ 19,31	R$16,73	R$ 2,59
140	R$ 32,72	R$28,20	R$4,53

Fonte: Celpe

Diário de Pernambuco. 28 abr. 2010 (adaptado).

Considere dois consumidores: um que é de baixa renda e gastou 100 kWh e outro do tipo residencial que gastou 185 kWh. A diferença entre o gasto desses consumidores com 1 kWh, depois da redução da tarifa de energia, mais aproximada, é de

A) R$ 0,27.
B) R$ 0,29.
C) R$ 0,32.
D) R$ 0,34.
E) R$ 0,61.

Gabarito - B

Comentário:
Com 1 kWh, a diferença entre gasto dos consumidores de consumo mensal 185 kWh e 100 kWh é, em reais:
85,56/185 - 16,73/100 ≅ 0,46 - 0,17 = 0,29

QUESTÃO 169

A figura apresenta informações biométricas de um homem (Duílio) e de uma mulher (Sandra) que estão buscando alcançar seu peso ideal a partir das atividades físicas (corrida). Para se verificar a escala de obesidade, foi desenvolvida a fórmula que permite verificar o Índice de Massa Corporal (IMC). Esta fórmula é apresentada como IMC = m/h², onde m é a massa em quilogramas e h é altura em metros.

O PERFIL DOS NOVOS CORREDORES

DUILIO SABA	
Idade	50 anos
Altura	1,88 metro
Peso	96,4 quilos
Peso ideal	94,5 quilos

SANDRA TESCARI	
Idade	42 anos
Altura	1,70 metro
Peso	84 quilos
Peso ideal	77 quilos

Veja. Ed. 2055 (adaptado).

No quadro é apresentada a Escala de Índice de Massa Corporal com as respectivas categorias relacionadas aos pesos.

Escala de Índice de Massa Corporal	
CATEGORIAS	**IMC (kg/m²)**
Desnutrição	Abaixo de 14,5
Peso abaixo do normal	14,5 a 20
Peso normal	20 a 24,9
Sobrepeso	25 a 29,9
Obesidade	30 a 39,9
Obesidade mórbida	Igual ou acima de 40

Nova Escola. N° 172, maio 2004.

A partir dos dados biométricos de Duílio e Sandra e da Escala de IMC, o valor IMC e a categoria em que cada uma das pessoas se posiciona na Escala são

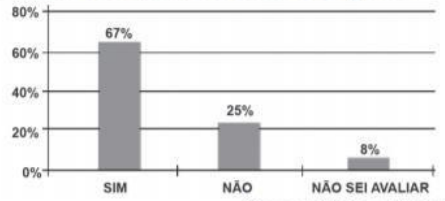
A) Duílio tem o IMC 26,7 e Sandra tem o IMC 26,6, estando ambos na categoria de sobrepeso.
B) Duílio tem o IMC 27,3 e Sandra tem o IMC 29,1, estando ambos na categoria de sobrepeso.
C) Duílio tem o IMC 27,3 e Sandra tem o IMC 26,6, estando ambos na categoria de sobrepeso.
D) Duílio tem o IMC 25,6, estando na categoria de sobrepeso, e Sandra tem o IMC 24,7, estando na categoria de peso normal.
E) Duílio tem o IMC 25,1, estando na categoria de sobrepeso, e Sandra tem o IMC 22,6, estando na categoria de peso normal.

Gabarito - B

Comentário:
Os IMCs de Duílio e Sandra, são respectivamente iguais a $96,4/1,88^2 \cong 27,3$ e $84/1,70^2 \cong 29,1$.
Dessa maneira, de acordo com a tabela, os dois estão acima do peso.

QUESTÃO 172

Uma enquete, realizada em março de 2010, perguntava aos internautas se eles acreditavam que as atividades humanas provocam o aquecimento global. Eram três as alternativas possíveis e 279 internautas responderam à enquete, como mostra o gráfico.



Época. Ed. 619, 29 mar. 2010 (adaptado).

Analisando os dados do gráfico, quantos internautas responderam "NÃO" à enquete?

A) Menos de 23.
B) Mais de 23 e menos de 25.
C) Mais de 50 e menos de 75.
D) Mais de 100 e menos de 190.
E) Mais de 200.

Gabarito - C

Comentário:
Dos 279 internautas que responderam à enquete, 25% disseram "não". Isto totaliza 25%.279 ≅ 70 internautas.

QUESTÃO 173

A cor de uma estrela tem relação com a temperatura em sua superfície. Estrelas não muito quentes (cerca de 3 000 K) nos parecem avermelhadas. Já as estrelas amarelas, como o Sol, possuem temperatura em torno dos 6 000 K; as mais quentes são brancas ou azuis porque sua temperatura fica acima dos 10 000 K.

A tabela apresenta uma classificação espectral e outros dados para as estrelas dessas classes.

Estrelas da Sequência Principal

Classe Espectral	Temperatura	Luminosidade	Massa	Raio
O5	40 000	5×10^5	40	18
B0	28 000	2×10^4	18	7
A0	9 900	80	3	2.5
G2	5 770	1	1	1
M0	3 480	0,06	0,5	0,6

Temperatura em Kelvin.

Luminosidade, massa e raio, tomando o Sol como unidade.

Disponível em: http://www.zenite.nu. Acesso em: 1 maio 2010 (adaptado).

Se tomarmos uma estrela que tenha temperatura 5 vezes maior que a temperatura do Sol, qual será a ordem de grandeza de sua luminosidade?

A) 20 000 vezes a luminosidade do Sol.
B) 28 000 vezes a luminosidade do Sol.
C) 28 850 vezes a luminosidade do Sol.
D) 30 000 vezes a luminosidade do Sol.
E) 50 000 vezes a luminosidade do Sol.

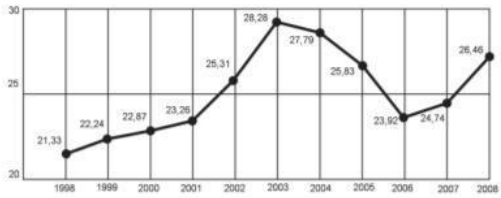
Gabarito - A

Comentário:
Se a temperatura da estrela é 5 vezes a temperatura do Sol, então a temperatura é cerca de 6 000 K . 5 = 30 000 K
Pela tabela, para a temperatura de 28 000 K, a luminosidade é 2.104 = 20 000 e para a temperatura de 5 770 K, a luminosidade é 1.
Portanto, a ordem de grandeza da sua luminosidade é 20 000 vezes a luminosidade do Sol.

QUESTÃO 176

O termo agronegócio não se refere apenas à agricultura e à pecuária, pois as atividades ligadas a essa produção incluem fornecedores de equipamentos, serviços para a zona rural, industrialização e comercialização dos produtos.

O gráfico seguinte mostra a participação percentual do agronegócio no PIB brasileiro:



Centro de Estudos Avançados em Economia Aplicada (CEPEA). **Almanaque abril 2010**. São Paulo: Abril, ano 36 (adaptado).

Esse gráfico foi usado em uma palestra na qual o orador ressaltou uma queda da participação do agronegócio no PIB brasileiro e a posterior recuperação dessa participação, em termos percentuais.

Segundo o gráfico, o período de queda ocorreu entre os anos de

A) 1998 e 2001.
B) 2001 e 2003.
C) 2003 e 2006.
D) 2003 e 2007.
E) 2003 e 2008.

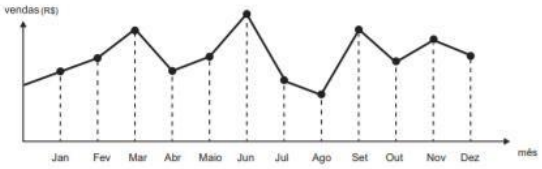
Gabarito - C

Comentário:
Analisando o gráfico, vemos que de 2003 a 2006, houve uma queda na participação percentual do agronegócio no PIB brasileiro, de 28,28% a 23,92%.

ENEM 2012 - ESTATÍSTICA

QUESTÃO 140

O dono de uma farmácia resolveu colocar à vista do público o gráfico mostrado a seguir, que apresenta a evolução do total de vendas (em Reais) de certo medicamento ao longo do ano de 2011.



De acordo com o gráfico, os meses em que ocorreram, respectivamente, a maior e a menor venda absolutas em 2011 foram

A) março e abril.
B) março e agosto.
C) agosto e setembro.
D) junho e setembro.
E) junho e agosto.

Gabarito - E

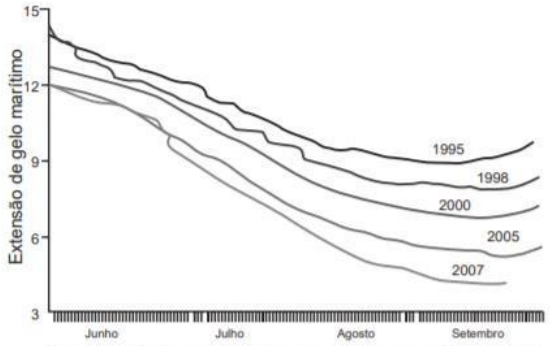
Comentário:

O eixo das ordenadas (eixo y) representa a venda, em reais, do medicamento e o eixo das abscissas (eixo x), os meses em que estas vendas foram efetuadas.

A linha vertical tracejada (no gráfico) é proporcional à quantidade vendida em cada mês, assim junho é o mês com maior venda, por apresentar maior "y" e tamanho de sua linha. O mês de agosto apresenta menor "y" e tamanho de sua linha.

QUESTÃO 143

O gráfico mostra a variação da extensão média de gelo marítimo, em milhões de quilômetros quadrados, comparando dados dos anos 1995, 1998, 2000, 2005 e 2007. Os dados correspondem aos meses de junho a setembro. O Ártico começa a recobrar o gelo quando termina o verão, em meados de setembro. O gelo do mar atua como o sistema de resfriamento da Terra, refletindo quase toda a luz solar de volta ao espaço. Águas de oceanos escuros, por sua vez, absorvem a luz solar e reforçam o aquecimento do Ártico, ocasionando derretimento crescente do gelo.



Disponível em: http://sustentabilidade.allianz.com.br. Acesso em: fev. 2012 (adaptado).

Com base no gráfico e nas informações do texto, é possível inferir que houve maior aquecimento global em

A 1995.
B 1998.
C 2000.
D 2005.
E 2007.

Gabarito - E

Comentário:

Quando o gelo marítimo tiver sua menor extensão, maior será o aquecimento, pois o gelo atua como sistema de resfriamento da Terra. De acordo com o gráfico, a menor extensão será em 2007.

QUESTÃO 144

Uma pesquisa realizada por estudantes da Faculdade de Estatística mostra, em horas por dia, como os jovens entre 12 e 18 anos gastam seu tempo, tanto durante a semana (de segunda-feira a sexta-feira), como no fim de semana (sábado e domingo). A seguinte tabela ilustra os resultados da pesquisa.

Rotina Juvenil	Durante a semana	No fim de semana
Assistir à televisão	3	3
Atividades domésticas	1	1
Atividades escolares	5	1
Atividades de lazer	2	4
Descanso, higiene e alimentação	10	12
Outras atividades	3	3

De acordo com esta pesquisa, quantas horas de seu tempo gasta um jovem entre 12 e 18 anos, na semana inteira (de segunda-feira a domingo), nas atividades escolares?

A 20

B 21

C 24

D 25

E 27

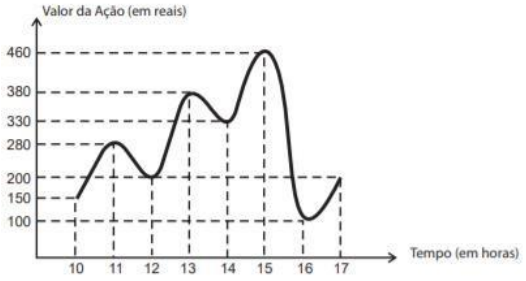
Gabarito - E

Comentário:

De acordo com a tabela, os estudantes passam 5 horas por dia estudando em cada um dos 5 dias da semana e 1 hora a cada dia no fim de semana. Assim estudam 5 . 5 + 1 . 2 = 27 horas por semana.

QUESTÃO 158

O gráfico fornece os valores das ações da empresa *XPN*, no período das 10 às 17 horas, num dia em que elas oscilaram acentuadamente em curtos intervalos de tempo.



Neste dia, cinco investidores compraram e venderam o mesmo volume de ações, porém em horários diferentes, de acordo com a seguinte tabela.

Investidor	Hora da Compra	Hora da Venda
1	10:00	15:00
2	10:00	17:00
3	13:00	15:00
4	15:00	16:00
5	16:00	17:00

Com relação ao capital adquirido na compra e venda das ações, qual investidor fez o melhor negócio?

(A) 1
(B) 2
(C) 3
(D) 4
(E) 5

Gabarito - A

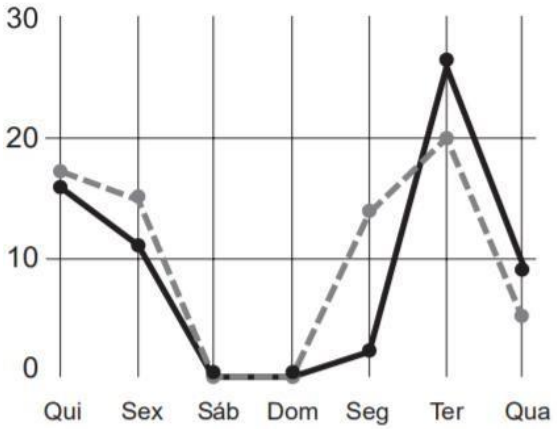
Comentário:

Calcula-se o ganho por ação de cada investidor por meio da diferença entre o valorda venda e o da compra. Os valores de compra e venda são retirados do gráfico deacordo com a hora em que foram efetuados. Aquele cujo valor for maior é o que fez o melhor negócio, uma vez que todos venderam a mesma quantidade de ações.

Investidor 1: 460 - 150 = 310
Investidor 2: 200 - 150 = 50
Investidor 3: 460 - 380 = 80
Investidor 4: 100 - 460 = -360 (prejuízo de R$ 360,00)
Investidor 5: 150 - 50 = 100
O maior valor é 310 reais, obtido pelo investidor 1.

QUESTÃO 159

A figura a seguir apresenta dois gráficos com informações sobre as reclamações diárias recebidas e resolvidas pelo Setor de Atendimento ao Cliente (SAC) de uma empresa, em uma dada semana. O gráfico de linha tracejada informa o número de reclamações recebidas no dia, o de linha contínua é o número de reclamações resolvidas no dia. As reclamações podem ser resolvidas no mesmo dia ou demorarem mais de um dia para serem resolvidas.



O gerente de atendimento deseja identificar os dias da semana em que o nível de eficiência pode ser considerado muito bom, ou seja, os dias em que o número de reclamações resolvidas excede o número de reclamações recebidas.

Disponível em: http://blog.bibliotecaunix.org. Acesso em: 21 jan. 2012 (adaptado).

O gerente de atendimento pôde concluir, baseado no conceito de eficiência utilizado na empresa e nas informações do gráfico, que o nível de eficiência foi muito bom na

A) segunda e na terça-feira.
B) terça e na quarta-feira.
C) terça e na quinta-feira.
D) quinta-feira, no sábado e no domingo.
E) segunda, na quinta e na sexta-feira.

Gabarito - B

Comentário:

Verifica-se em cada vertical, aquelas que os pontos correspondentes da linha contínua (reclamações resolvidas) estão acima da linha tracejada (ligações recebidas).

Isso ocorre na terça e na quarta-feira.

QUESTÃO 170

A tabela a seguir mostra a evolução da receita bruta anual nos três últimos anos de cinco microempresas (ME) que se encontram à venda.

ME	2009 (em milhares de reais)	2010 (em milhares de reais)	2011 (em milhares de reais)
Alfinetes V	200	220	240
Balas W	200	230	200
Chocolates X	250	210	215
Pizzaria Y	230	230	230
Tecelagem Z	160	210	245

Um investidor deseja comprar duas das empresas listadas na tabela. Para tal, ele calcula a média da receita bruta anual dos últimos três anos (de 2009 até 2011) e escolhe as duas empresas de maior média anual.

As empresas que este investidor escolhe comprar são

A) Balas W e Pizzaria Y.
B) Chocolates X e Tecelagem Z.
C) Pizzaria Y e Alfinetes V.
D) Pizzaria Y e Chocolates X.
E) Tecelagem Z e Alfinetes V.

Gabarito - D

Comentário:

As médias das três últimas receitas brutas das empresas fora:

Alfinetes V: (200 + 220 + 240)/3 = 220

Balas W = (200 + 230 + 200)/3 = 210

Chocolates X = (250 + 210 + 215)/3 = 225

Pizzaria Y = (230 +230 + 230)/3 = 230

Tecelagem Z = (160 + 210 + 245)/3 = 205

As duas empresas de maior média anual nas três últimas receitas brutas são Pizzaria Y e Chocolates X .

QUESTÃO 172

Um produtor de café irrigado em Minas Gerais recebeu um relatório de consultoria estatística, constando, entre outras informações, o desvio padrão das produções de uma safra dos talhões de sua propriedade. Os talhões têm a mesma área de 30 000 m^2 e o valor obtido para o desvio padrão foi de 90 kg/talhão. O produtor deve apresentar as informações sobre a produção e a variância dessas produções em sacas de 60 kg por hectare (10 000 m^2).

A variância das produções dos talhões expressa em $(\text{sacas/hectare})^2$ é

A) 20,25.
B) 4,50.
C) 0,71.
D) 0,50.
E) 0,25.

Gabarito - E

Comentário:

O desvio padrão foi de 90 kg/talhão, assim:

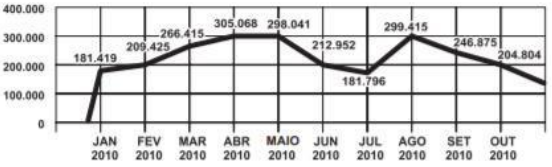
90 kg/talhão = 90 kg/30 000 m^2 = 30 kg/10 000 m^2 = 30 kg/hectare = 0,5 saca/hectare
Assim, a variância será:

$(0,5 \text{ saca/hectare})^2 = 0,25 (\text{saca/hectare})^2$

QUESTÃO 175

O gráfico apresenta o comportamento de emprego formal surgido, segundo o CAGED, no período de janeiro de 2010 a outubro de 2010.

BRASIL - Comportamento do Emprego Formal no periodo de janeiro a outubro de 2010 - CAGED



Disponível em: www.mte.gov.br. Acesso em: 28 fev. 2012 (adaptado).

Com base no gráfico, o valor da parte inteira da mediana dos empregos formais surgidos no período é

A) 212 952.
B) 229 913.
C) 240 621.
D) 255 496.
E) 298 041.

Gabarito - B

Comentário:

Em ordem crescente temos:

181.419, 181.796, 204.804, 209.425, 212.952, 246.875, 266.415, 298. 041, 299. 415 e 305.068.

Para o cálculo da mediana devemos pegar os valores centrais e realizar uma média aritmética entre eles, assim:

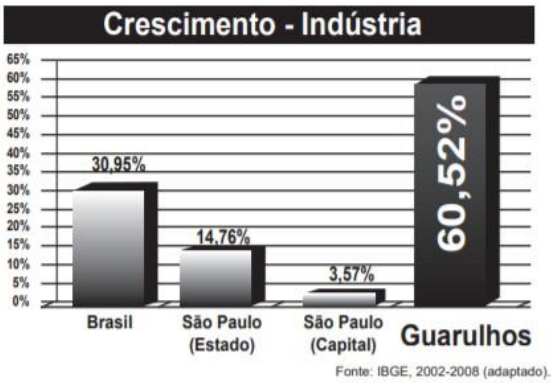
Termos centrais = 212.952 e 246.875

m_d = (212.952 + 246.875)/2 = 229.913,5
A parte inteira desse valor é 229.913.

ENEM 2013 - ESTATÍSTICA

QUESTÃO 139

A cidade de Guarulhos (SP) tem o 8º PIB municipal do Brasil, além do maior aeroporto da América do Sul. Em proporção, possui a economia que mais cresce em indústrias, conforme mostra o gráfico.



Fonte: IBGE, 2002-2008 (adaptado).

Analisando os dados percentuais do gráfico, qual a diferença entre o maior e o menor centro em crescimento no polo das indústrias?

A) 75,28
B) 64,09
C) 56,95
D) 45,76
E) 30,07

Gabarito - C

Comentário:

A questão pede para que se calcule a diferença entre o maior e o menor percentual de crescimento no polo das indústrias que foram apresentados no gráfico, é possível observar que a o maior valor é da cidade de Guarulhos (60,52%) e o menor, da cidade de São Paulo (capital) com 3,57%.

A diferença será: 60,52% - 3,57% = 56,95%.

QUESTÃO 148

Cinco empresas de gêneros alimentícios encontram-se à venda. Um empresário, almejando ampliar os seus investimentos, deseja comprar uma dessas empresas. Para escolher qual delas irá comprar, analisa o lucro (em milhões de reais) de cada uma delas, em função de seus tempos (em anos) de existência, decidindo comprar a empresa que apresente o maior lucro médio anual.

O quadro apresenta o lucro (em milhões de reais) acumulado ao longo do tempo (em anos) de existência de cada empresa.

Empresa	Lucro (em milhões de reais)	Tempo (em anos)
F	24	3,0
G	24	2,0
H	25	2,5
M	15	1,5
P	9	1,5

O empresário decidiu comprar a empresa

A F.
B G.
C H.
D M.
E P.

Gabarito - B

Comentário:

O lucro médio de cada empresa será:

F: 24 ÷ 3 = 8 milhões de reais

G: 24 ÷ 2 = 12 milhões de reais

H: 25 ÷ 2,5 = 10 milhões de reais

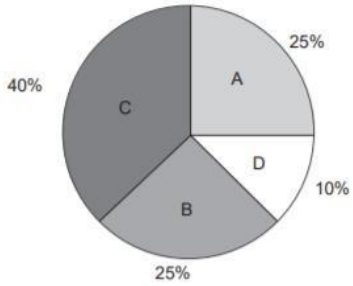
M: 15 ÷ 1,5 = 10 milhões de reais

P: 9 ÷ 1,5 = 6 milhões de reais

A empresa que apresenta o maior lucro anual é a empresa G.

QUESTÃO 150

Foi realizado um levantamento nos 200 hotéis de uma cidade, no qual foram anotados os valores, em reais, das diárias para um quarto padrão de casal e a quantidade de hotéis para cada valor da diária. Os valores das diárias foram: A = R$ 200,00; B = R$ 300,00; C = R$ 400,00 e D = R$ 600,00. No gráfico, as áreas representam as quantidades de hotéis pesquisados, em porcentagem, para cada valor da diária.



O valor mediano da diária, em reais, para o quarto padrão de casal nessa cidade, é

A 300,00.
B 345,00.
C 350,00.
D 375,00.
E 400,00.

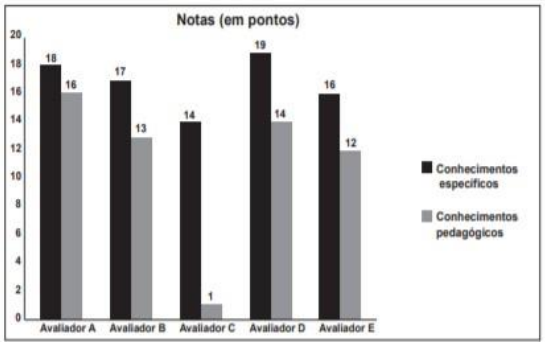
Gabarito – C

Comentário:

A mediana de um conjunto de valores é o valor do termo central do rol de valores. No caso, são 200 hotéis, sendo assim o termo central é $(200+1)/2$ = 100,5, ou seja, terá que ser calculada a média dos valores da diária do 100 e 101 valor do rol (valores colocados em ordem crescente ou decrescente). Por intermédio do gráfico de setores apresentado percebe-se que o 100 valor é 300 reais e que o 101 de 400 reais, pois25% do menor valor (A) somado com 25% do valor seguinte (B) totalizam os 50% correspondente a metade dos valores. Sendo assim, a mediana é $(300+400)/2$ = 350 reais.

QUESTÃO 157

As notas de um professor que participou de um processo seletivo, em que a banca avaliadora era composta por cinco membros, são apresentadas no gráfico. Sabe-se que cada membro da banca atribuiu duas notas ao professor, uma relativa aos conhecimentos específicos da área de atuação e outra, aos conhecimentos pedagógicos, e que a média final do professor foi dada pela média aritmética de todas as notas atribuídas pela banca avaliadora.



Utilizando um novo critério, essa banca avaliadora resolveu descartar a maior e a menor notas atribuídas ao professor.

A nova média, em relação à média anterior, é

A) 0,25 ponto maior.
B) 1,00 ponto maior.
C) 1,00 ponto menor.
D) 1,25 ponto maior.
E) 2,00 pontos menor.

Gabarito - B

Comentário:

A média aritmética é calculada por meio da soma das notas dividida pela quantidade de notas.

A média anterior é igual a (18+16+17+13+14+1+19+14+16+12)/10 = 140/10 = 14.
Descartando a maior nota (19) e a menor (1) a soma decai 19 + 1 = 20 pontos e o número de notas de 10 para 8, assim a nova média é igual a (140−20)/8 = 120/8 = 15.
A nova média é 15 - 14 = 1 ponto superior que a anterior.

ENEM 2014 - ESTATÍSTICA

QUESTÃO 150

Ao final de uma competição de ciências em uma escola, restaram apenas três candidatos. De acordo com as regras, o vencedor será o candidato que obtiver a maior média ponderada entre as notas das provas finais nas disciplinas química e física, considerando, respectivamente, os pesos 4 e 6 para elas. As notas são sempre números inteiros. Por questões médicas, o candidato II ainda não fez a prova final de química. No dia em que sua avaliação for aplicada, as notas dos outros dois candidatos, em ambas as disciplinas, já terão sido divulgadas.

O quadro apresenta as notas obtidas pelos finalistas nas provas finais.

Candidato	Química	Física
I	20	23
II	X	25
III	21	18

A menor nota que o candidato II deverá obter na prova final de química para vencer a competição é

(A) 18.
(B) 19.
(C) 22.
(D) 25.
(E) 26.

Gabarito - A

Comentário:

Fazendo a média de cada candidato, temos:

1- (20 . 4 + 23 . 6) / 4 + 6 = 218 / 10 = 21,8

2- (21 . 4 + 18 . 6) / 4 + 6 = 192 / 10 = 19,2

A nota que o candidato 2 deve receber para ganhar é dada por:

(x . 4 + 25 . 6) / 4 + 6 > 21,8

4x + 150 > 218

X > 17, logo, a menor nota deve ser 18.

QUESTÃO 155

Um pesquisador está realizando várias séries de experimentos com alguns reagentes para verificar qual o mais adequado para a produção de um determinado produto. Cada série consiste em avaliar um dado reagente em cinco experimentos diferentes. O pesquisador está especialmente interessado naquele reagente que apresentar a maior quantidade dos resultados de seus experimentos acima da média encontrada para aquele reagente. Após a realização de cinco séries de experimentos, o pesquisador encontrou os seguintes resultados:

	Reagente 1	Reagente 2	Reagente 3	Reagente 4	Reagente 5
Experimento 1	1	0	2	2	1
Experimento 2	6	6	3	4	2
Experimento 3	6	7	8	7	9
Experimento 4	6	6	10	8	10
Experimento 5	11	5	11	12	11

Levando-se em consideração os experimentos feitos, o reagente que atende às expectativas do pesquisador é o

(A) 1.
(B) 2.
(C) 3.
(D) 4.
(E) 5.

Gabarito - B

Comentário:

Fazendo a média de cada reagente, temos:

1 – (1 + 6 + 6 + 6 + 11) / 5 = 6

2 – (0 + 6 + 7 + 6 + 5) / 5 = 4,8

3 - (2 + 3 + 8 + 10 + 11) / 5 = 6,8

4 – (2 + 4 + 7 + 8 + 12) / 5 = 6,6

5 - (1 + 2 + 9 + 10 + 11) / 5 = 6,6

Assim, o reagente 2 apresenta 4 valores maiores do que sua média, logo, gabarito é letra B.

QUESTÃO 161

Uma loja que vende sapatos recebeu diversas reclamações de seus clientes relacionadas à venda de sapatos de cor branca ou preta. Os donos da loja anotaram as numerações dos sapatos com defeito e fizeram um estudo estatístico com o intuito de reclamar com o fabricante.

A tabela contém a média, a mediana e a moda desses dados anotados pelos donos.

Estatísticas sobre as numerações dos sapatos com defeito

	Média	Mediana	Moda
Numerações dos sapatos com defeito	36	37	38

Para quantificar os sapatos pela cor, os donos representaram a cor branca pelo número 0 e a cor preta pelo número 1. Sabe-se que a média da distribuição desses zeros e uns é igual a 0,45.

Os donos da loja decidiram que a numeração dos sapatos com maior número de reclamações e a cor com maior número de reclamações não serão mais vendidas.

A loja encaminhou um ofício ao fornecedor dos sapatos, explicando que não serão mais encomendados os sapatos de cor

(A) branca e os de número 38.
(B) branca e os de número 37.
(C) branca e os de número 36.
(D) preta e os de número 38.
(E) preta e os de número 37.

Gabarito - A

Comentário:

A média de distribuição de sapatos brancos é de 0,45, logo, existem mais sapatos pretos já que essa média é menor do que a metade. Se a moda é 38, quer dizer que os sapatos com mais defeito foram os de número 38. Assim, a loja não deve encomendar mais sapatos brancos de tamanho 38.

QUESTÃO 162

Para analisar o desempenho de um método diagnóstico, realizam-se estudos em populações contendo pacientes sadios e doentes. Quatro situações distintas podem acontecer nesse contexto de teste:

1) Paciente TEM a doença e o resultado do teste é POSITIVO.
2) Paciente TEM a doença e o resultado do teste é NEGATIVO.
3) Paciente NÃO TEM a doença e o resultado do teste é POSITIVO.
4) Paciente NÃO TEM a doença e o resultado do teste é NEGATIVO.

Um índice de desempenho para avaliação de um teste diagnóstico é a sensibilidade, definida como a probabilidade de o resultado do teste ser POSITIVO se o paciente estiver com a doença.

O quadro refere-se a um teste diagnóstico para a doença A, aplicado em uma amostra composta por duzentos indivíduos.

Resultado do teste	Doença A	
	Presente	Ausente
Positivo	95	15
Negativo	5	85

BENSEÑOR, I. M.; LOTUFO, P. A. **Epidemiologia**: abordagem prática. São Paulo: Sarvier, 2011 (adaptado).

Conforme o quadro do teste proposto, a sensibilidade dele é de

A) 47,5%.
B) 85,0%.
C) 86,3%.
D) 94,4%.
E) 95,0%.

Gabarito - E

Comentário:

Para o cálculo da sensibilidade, são consideradas apenas as pessoas que POSSUEM a doença, ou seja, 100 pessoas (95+5). Logo, 95%, alternativa E.

QUESTÃO 170

Os candidatos K, L, M, N e P estão disputando uma única vaga de emprego em uma empresa e fizeram provas de português, matemática, direito e informática. A tabela apresenta as notas obtidas pelos cinco candidatos.

Candidatos	Português	Matemática	Direito	Informática
K	33	33	33	34
L	32	39	33	34
M	35	35	36	34
N	24	37	40	35
P	36	16	26	41

Segundo o edital de seleção, o candidato aprovado será aquele para o qual a mediana das notas obtidas por ele nas quatro disciplinas for a maior.

O candidato aprovado será

A) K.
B) L.
C) M.
D) N.
E) P.

Gabarito - D

Comentário:

Percebemos que a mediana de cada candidato, após colocarmos suas notas em ordem crescente, é dada por: K - 33 L - 33,5 M - 35 N - 36 P - 31. Assim, o candidato com maior mediana é o candidato N.

ENEM 2015 - ESTATÍSTICA

QUESTÃO 160

Em uma seletiva para a final dos 100 metros livres de natação, numa olimpíada, os atletas, em suas respectivas raias, obtiveram os seguintes tempos:

Raia	1	2	3	4	5	6	7	8
Tempo (segundo)	20,90	20,90	20,50	20,80	20,60	20,60	20,90	20,96

A mediana dos tempos apresentados no quadro é

A) 20,70.
B) 20,77.
C) 20,80.
D) 20,85.
E) 20,90.

Gabarito - D

Comentário:
Colocando os tempos em ordem crescente, temos: 20,50; 20,60; 20,60; 20,80; 20,90; 20,90; 20,90; 20,96. Queremos a mediana de uma distribuição de um número par de elementos, assim, temos que os termos centrais são 20,80 e 20,90, então, fazendo a média entre eles, temos 20,85.

QUESTÃO 166

Um concurso é composto por cinco etapas. Cada etapa vale 100 pontos. A pontuação final de cada candidato é a média de suas notas nas cinco etapas. A classificação obedece à ordem decrescente das pontuações finais. O critério de desempate baseia-se na maior pontuação na quinta etapa.

Candidato	Média nas quatro primeiras etapas	Pontuação na quinta etapa
A	90	60
B	85	85
C	80	95
D	60	90
E	60	100

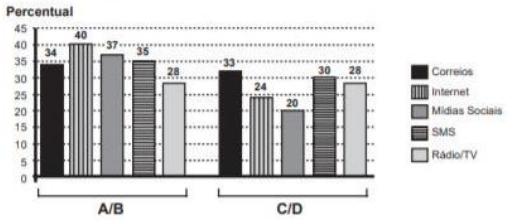
A ordem de classificação final desse concurso é

A) A, B, C, E, D.
B) B, A, C, E, D.
C) C, B, E, A, D.
D) C, B, E, D, A.
E) E, C, D, B, A.

QUESTÃO 178

Uma pesquisa de mercado foi realizada entre os consumidores das classes sociais A, B, C e D que costumam participar de promoções tipo sorteio ou concurso. Os dados comparativos, expressos no gráfico, revelam a participação desses consumidores em cinco categorias: via Correios (juntando embalagens ou recortando códigos de barra), via internet (cadastrando-se no *site* da empresa/marca promotora), via mídias sociais (redes sociais), via SMS (mensagem por celular) ou via rádio/TV.

Participação em promoções do tipo sorteio ou concurso em uma região



Uma empresa vai lançar uma promoção utilizando apenas uma categoria nas classes A e B (A/B) e uma categoria nas classes C e D (C/D).

De acordo com o resultado da pesquisa, para atingir o maior número de consumidores das classes A/B e C/D, a empresa deve realizar a promoção, respectivamente, via

A) Correios e SMS.
B) internet e Correios.
C) internet e internet.
D) internet e mídias sociais.
E) rádio/TV e rádio/TV.

Gabarito - B

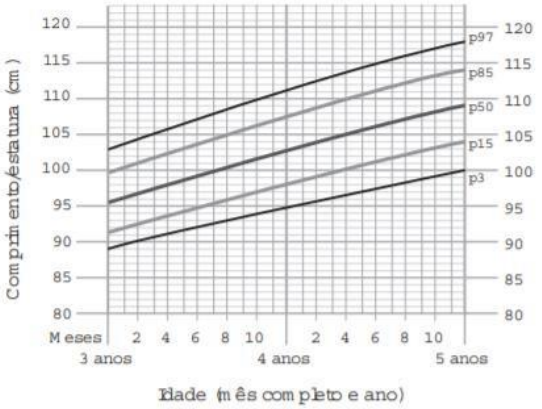
Comentário:
Basta perceber que o ponto mais alto no gráfico é onde temos o maior percentual de promoções das regiões. Olhando pra cada região respectivamente podemos concluir que a resposta correta é letra B.

ENEM 2016 - ESTATÍSTICA

QUESTÃO 138

A fim de acompanhar o crescimento de crianças, foram criadas pela Organização Mundial da Saúde (OMS) tabelas de altura, também adotadas pelo Ministério da Saúde do Brasil. Além de informar os dados referentes ao índice de crescimento, a tabela traz gráficos com curvas, apresentando padrões de crescimento estipulados pela OMS.

O gráfico apresenta o crescimento de meninas, cuja análise se dá pelo ponto de intersecção entre o comprimento, em centímetro, e a idade, em mês completo e ano, da criança.



Disponível em: www.aprocura.com.br. Acesso em: 22 out. 2015 (adaptado).

Uma menina aos 3 anos de idade tinha altura de 85 centímetros e aos 4 anos e 4 meses sua altura chegou a um valor que corresponde a um ponto exatamente sobre a curva p50.

Qual foi o aumento percentual da altura dessa menina, descrito com uma casa decimal, no período considerado?

A) 23,5%
B) 21,2%
C) 19,0%
D) 11,8%
E) 10,0%

Gabarito - A

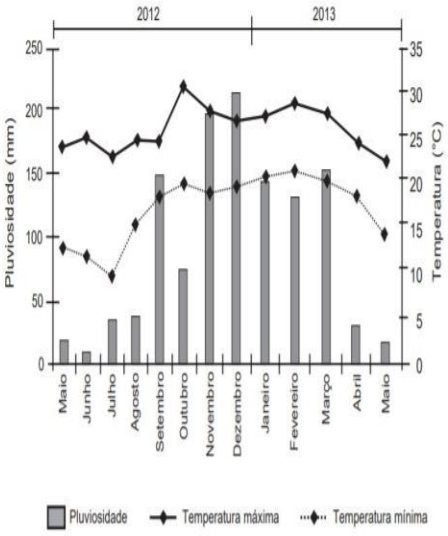
Comentário:
A curva p50 indica, para uma idade de 4 anos e 4 meses, um comprimento de 105 cm.
Assim, o aumento percentual da altura da menina é $(105 - 85)/85 \cdot 100\% \approx 23{,}5\%$.

QUESTÃO 139

O cultivo de uma flor rara só é viável se do mês do plantio para o mês subsequente o clima da região possuir as seguintes peculiaridades:

- a variação do nível de chuvas (pluviosidade), nesses meses, não for superior a 50 mm;
- a temperatura mínima, nesses meses, for superior a 15 °C;
- ocorrer, nesse período, um leve aumento não superior a 5 °C na temperatura máxima.

Um floricultor, pretendendo investir no plantio dessa flor em sua região, fez uma consulta a um meteorologista que lhe apresentou o gráfico com as condições previstas para os 12 meses seguintes nessa região.



Com base nas informações do gráfico, o floricultor verificou que poderia plantar essa flor rara.

O mês escolhido para o plantio foi

A janeiro.
B fevereiro.
C agosto.
D novembro.
E dezembro.

Gabarito - A

Comentário:
Analisando gráfico, percebemos que em janeiro :
– Temperatura mínima > 15°
– Variação de Pluviosidade entre janeiro e fevereiro < 50 mm
– Aumento da temperatura máxima entre janeiro e fevereiro < 5°

QUESTÃO 141

O procedimento de perda rápida de "peso" é comum entre os atletas dos esportes de combate. Para participar de um torneio, quatro atletas da categoria até 66 kg, Peso-Pena, foram submetidos a dietas balanceadas e atividades físicas. Realizaram três "pesagens" antes do início do torneio. Pelo regulamento do torneio, a primeira luta deverá ocorrer entre o atleta mais regular e o menos regular quanto aos "pesos". As informações com base nas pesagens dos atletas estão no quadro.

Atleta	1ª pesagem (kg)	2ª pesagem (kg)	3ª pesagem (kg)	Média	Mediana	Desvio padrão
I	78	72	66	72	72	4,90
II	83	65	65	71	65	8,49
III	75	70	65	70	70	4,08
IV	80	77	62	73	77	7,87

Após as três "pesagens", os organizadores do torneio informaram aos atletas quais deles se enfrentariam na primeira luta.

A primeira luta foi entre os atletas

A) I e III.
B) I e IV.
C) II e III.
D) II e IV.
E) III e IV.

Gabarito - C

Comentário:
A primeira luta deve ocorrer entre o atleta mais regular e o menos regular quanto aos pesos, ou seja, entre o atleta de menor desvio-padrão e o de maior desvio-padrão, respectivamente.
Assim, essa luta será entre os atletas II e III.

QUESTÃO 144

Um posto de saúde registrou a quantidade de vacinas aplicadas contra febre amarela nos últimos cinco meses:

- 1º mês: 21;
- 2º mês: 22;
- 3º mês: 25;
- 4º mês: 31;
- 5º mês: 21.

No início do primeiro mês, esse posto de saúde tinha 228 vacinas contra febre amarela em estoque. A política de reposição do estoque prevê a aquisição de novas vacinas, no início do sexto mês, de tal forma que a quantidade inicial em estoque para os próximos meses seja igual a 12 vezes a média das quantidades mensais dessas vacinas aplicadas nos últimos cinco meses.

Para atender essas condições, a quantidade de vacinas contra febre amarela que o posto de saúde deve adquirir no início do sexto mês é

A) 156.
B) 180.
C) 192.
D) 264.
E) 288.

Gabarito - B

Comentário:
O total de aplicações nos últimos cinco meses foi de 21 + 22 + 25 + 31 + 21 = 120 vacinas, portanto, o posto finalizou o 5º mês com 228 – 120 = 108 vacinas.
A quantidade média mensal nesses meses foi de 120/5 = 24 vacinas aplicadas, assim, o estoque inicial do 6º mês deve ser $12 \cdot 24 = 288$, tendo que adquirir 288 – 108 = 180 novas vacinas.

QUESTÃO 148

Em uma cidade, o número de casos de dengue confirmados aumentou consideravelmente nos últimos dias. A prefeitura resolveu desenvolver uma ação contratando funcionários para ajudar no combate à doença, os quais orientarão os moradores a eliminarem criadouros do mosquito *Aedes aegypti*, transmissor da dengue. A tabela apresenta o número atual de casos confirmados, por região da cidade.

Região	Casos confirmados
Oeste	237
Centro	262
Norte	158
Sul	159
Noroeste	160
Leste	278
Centro-Oeste	300
Centro-Sul	278

A prefeitura optou pela seguinte distribuição dos funcionários a serem contratados:

I. 10 funcionários para cada região da cidade cujo número de casos seja maior que a média dos casos confirmados.

II. 7 funcionários para cada região da cidade cujo número de casos seja menor ou igual à média dos casos confirmados.

Quantos funcionários a prefeitura deverá contratar para efetivar a ação?

A) 59
B) 65
C) 68
D) 71
E) 80

Gabarito - D

Comentário:

A média é dada por (237 + 262 + 158 + 159 + 160 + 278 + 300 + 278)/8 = 229

Das oito regiões da cidade, cinco delas (oeste, centro, leste, centro-oeste e centro-sul) estão acima da média, ou seja, cada uma delas receberá 10 funcionários; três regiões estão abaixo da média (norte, sul e noroeste) e cada uma delas receberá 7 funcionários. Assim, a prefeitura deverá contratar $5 \cdot 10 + 3 \cdot 7 = 71$ funcionários.

QUESTÃO 150

Ao iniciar suas atividades, um ascensorista registra tanto o número de pessoas que entram quanto o número de pessoas que saem do elevador em cada um dos andares do edifício onde ele trabalha. O quadro apresenta os registros do ascensorista durante a primeira subida do térreo, de onde partem ele e mais três pessoas, ao quinto andar do edifício.

Número de pessoas	Térreo	1º andar	2º andar	3º andar	4º andar	5º andar
que entram no elevador	4	4	1	2	2	2
que saem do elevador	0	3	1	2	0	6

Com base no quadro, qual é a moda do número de pessoas no elevador durante a subida do térreo ao quinto andar?

A) 2
B) 3
C) 4
D) 5
E) 6

Gabarito - D

Comentário:
Térreo = 4
1° andar = 5
2° andar = 5
3° andar = 5
4° andar = 7
5° andar = 3
Moda é 5.

QUESTÃO 151

O censo demográfico é um levantamento estatístico que permite a coleta de várias informações. A tabela apresenta os dados obtidos pelo censo demográfico brasileiro nos anos de 1940 e 2000, referentes à concentração da população total, na capital e no interior, nas cinco grandes regiões.

População residente, na capital e interior segundo as Grandes Regiões 1940/2000

Grandes regiões	População residente					
	Total		Capital		Interior	
	1940	2000	1940	2000	1940	2000
Norte	1 632 917	12 900 704	368 528	3 895 400	1 264 389	9 005 304
Nordeste	14 434 080	47 741 711	1 270 729	10 162 346	13 163 351	37 579 365
Sudeste	18 278 837	72 412 411	3 346 991	18 822 986	14 931 846	53 589 425
Sul	5 735 305	25 107 616	459 659	3 290 220	5 275 646	21 817 396
Centro-Oeste	1 088 182	11 636 728	152 189	4 291 120	935 993	7 345 608

Fonte: IBGE, Censo Demográfico 1940/2000.

O valor mais próximo do percentual que descreve o aumento da população nas capitais da Região Nordeste é

A) 125%
B) 231%
C) 331%
D) 700%
E) 800%

Gabarito - D

Comentário:
Aumento da população: 10.162.346 / 1.270.729 = 7,99.
Aumento de 700%.

QUESTÃO 167

Preocupada com seus resultados, uma empresa fez um balanço dos lucros obtidos nos últimos sete meses, conforme dados do quadro.

Mês	I	II	III	IV	V	VI	VII
Lucro (em milhões de reais)	37	33	35	22	30	35	25

Avaliando os resultados, o conselho diretor da empresa decidiu comprar, nos dois meses subsequentes, a mesma quantidade de matéria-prima comprada no mês em que o lucro mais se aproximou da média dos lucros mensais dessa empresa nesse período de sete meses.

Nos próximos dois meses, essa empresa deverá comprar a mesma quantidade de matéria-prima comprada no mês

A) I.
B) II.
C) IV.
D) V.
E) VII.

Gabarito - D

Comentário:

A média é dada por:

(37 + 33 + 35 + 22 + 30 + 35 + 25)/7 = 31.

Sendo assim, a empresa deverá comprar, nos dois próximos meses, a mesma quantidade comprada no mês V.

QUESTÃO 180

A permanência de um gerente em uma empresa está condicionada à sua produção no semestre. Essa produção é avaliada pela média do lucro mensal do semestre. Se a média for, no mínimo, de 30 mil reais, o gerente permanece no cargo, caso contrário, ele será despedido. O quadro mostra o lucro mensal, em milhares de reais, dessa empresa, de janeiro a maio do ano em curso.

Janeiro	Fevereiro	Março	Abril	Maio
21	35	21	30	38

Qual deve ser o lucro mínimo da empresa no mês de junho, em milhares de reais, para o gerente continuar no cargo no próximo semestre?

A) 26
B) 29
C) 30
D) 31
E) 35

Gabarito - E

Comentário:

Sendo x o lucro da empresa no mês de junho, em milhares de reais, temos que:

$(21 + 35 + 21 + 30 + 38 + x)/6 \geq 30$
$145 + x \geq 180$
$x \geq 35$

ENEM 2017 - ESTATÍSTICA

QUESTÃO 148

A avaliação de rendimento de alunos de um curso universitário baseia-se na média ponderada das notas obtidas nas disciplinas pelos respectivos números de créditos, como mostra o quadro:

Avaliação	Média de notas (M)
Excelente	$9 < M \leq 10$
Bom	$7 \leq M \leq 9$
Regular	$5 \leq M < 7$
Ruim	$3 \leq M < 5$
Péssimo	$M < 3$

Quanto melhor a avaliação de um aluno em determinado período letivo, maior sua prioridade na escolha de disciplinas para o período seguinte.

Determinado aluno sabe que se obtiver avaliação "Bom" ou "Excelente" conseguirá matrícula nas disciplinas que deseja. Ele já realizou as provas de 4 das 5 disciplinas em que está matriculado, mas ainda não realizou a prova da disciplina I, conforme o quadro.

Disciplinas	Notas	Número de créditos
I		12
II	8,00	4
III	6,00	8
IV	5,00	8
V	7,50	10

Para que atinja seu objetivo, a nota mínima que ele deve conseguir na disciplina I é

A) 7,00.
B) 7,38.
C) 7,50.
D) 8,25.
E) 9,00.

Gabarito - D

Comentário:
Calculando a média ponderada temos que:
M = (12.x + 4.8 + 8.6 + 8.5 + 10.7,5) / 42
M = (12x + 32 + 48 + 40 + 75) / 42
Para atingir o objetivo M = 7
7 = (12x + 195) /42
12x = 294 - 195
x = 99/12
x = 8,25

QUESTÃO 151

Um instituto de pesquisas eleitorais recebe uma encomenda na qual a margem de erro deverá ser de, no máximo, 2 pontos percentuais (0,02).

O instituto tem 5 pesquisas recentes, P1 a P5, sobre o tema objeto da encomenda e irá usar a que tiver o erro menor que o pedido.

Os dados sobre as pesquisas são os seguintes:

Pesquisa	σ	N	$\sqrt{N}$
P1	0,5	1 764	42
P2	0,4	784	28
P3	0,3	576	24
P4	0,2	441	21
P5	0,1	64	8

O erro e pode ser expresso por

$$|e| < 1{,}96\frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

em que σ é um parâmetro e N é o número de pessoas entrevistadas pela pesquisa.

Qual pesquisa deverá ser utilizada?

A) P1
B) P2
C) P3
D) P4
E) P5

Gabarito - D

Comentário:
a margem de erro: é calculada por :
p1=0,5/42 .1,96.100 = 2,15%
p2=0,4/28.1,96.100 = 2,7%
p3=0,3/24.1,96.100= 2,45%
p4=0,2/21.1,96.100 = 1,76%

QUESTÃO 159

Três alunos, X, Y e Z, estão matriculados em um curso de inglês. Para avaliar esses alunos, o professor optou por fazer cinco provas. Para que seja aprovado nesse curso, o aluno deverá ter a média aritmética das notas das cinco provas maior ou igual a 6. Na tabela, estão dispostas as notas que cada aluno tirou em cada prova.

Aluno	1ª Prova	2ª Prova	3ª Prova	4ª Prova	5ª Prova
X	5	5	5	10	6
Y	4	9	3	9	5
Z	5	5	8	5	6

Com base nos dados da tabela e nas informações dadas, ficará(ão) reprovado(s)

A) apenas o aluno Y.
B) apenas o aluno Z.
C) apenas os alunos X e Y.
D) apenas os alunos X e Z.
E) os alunos X, Y e Z.

Gabarito - B

Comentário:

Como a média para a reprovação é menor que 6 então: a média do aluno X=31/5=6,2

a média do aluno Y=30/5=6

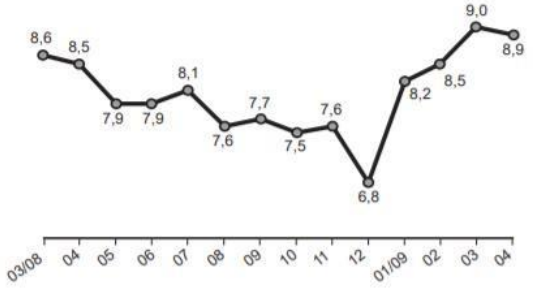
a média do aluno Z = 29/5=5,8

Logo temos que o aluno Z foi reprovado.

QUESTÃO 170

O gráfico apresenta a taxa de desemprego (em %) para o período de março de 2008 a abril de 2009, obtida com base nos dados observados nas regiões metropolitanas de Recife, Salvador, Belo Horizonte, Rio de Janeiro, São Paulo e Porto Alegre.

Taxa de desemprego (%)



IBGE. Pesquisa mensal de emprego. Disponível em: www.ibge.gov.br. Acesso em: 30 jul. 2012 (adaptado).

A mediana dessa taxa de desemprego, no período de março de 2008 a abril de 2009, foi de

A) 8,1%
B) 8,0%
C) 7,9%
D) 7,7%
E) 7,6%

Gabarito - B

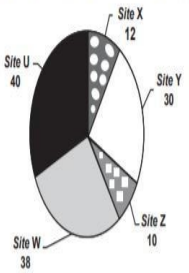
Comentário:

Observando que existem 14 taxas de desempregos, a mediana será dada pela média entre a 7ª e 8ª taxa, colocando em ordem crescente a mediana será:
(7,9%+8,1%) / 2 = 8%

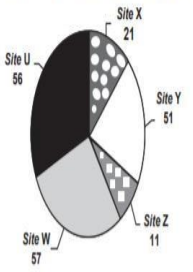
QUESTÃO 177

Quanto tempo você fica conectado à internet? Para responder a essa pergunta foi criado um miniaplicativo de computador que roda na área de trabalho, para gerar automaticamente um gráfico de setores, mapeando o tempo que uma pessoa acessa cinco *sites* visitados. Em um computador, foi observado que houve um aumento significativo do tempo de acesso da sexta-feira para o sábado, nos cinco *sites* mais acessados. A seguir, temos os dados do miniaplicativo para esses dias.

Tempo de acesso na sexta-feira (minuto)



Tempo de acesso no sábado (minuto)



Analisando os gráficos do computador, a maior taxa de aumento no tempo de acesso, da sexta-feira para o sábado, foi no *site*

A) X.
B) Y.
C) Z.
D) W.
E) U.

Gabarito - A

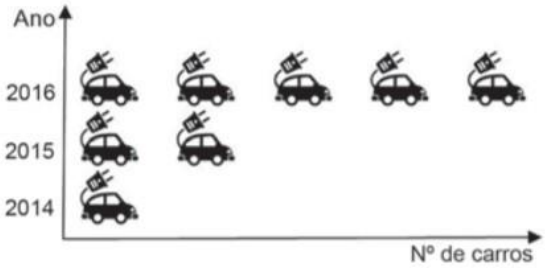
Comentário:
Considere as taxas de aumento de cada um dos sites:
X: 9/12 =0,75
Y:21/30=0,7
Z:1/10=0,1
W:19/38= 0,5
U:16/40 = 0,4

ENEM 2018 - ESTATÍSTICA

QUESTÃO 147

De acordo com um relatório recente da Agência Internacional de Energia (AIE), o mercado de veículos elétricos atingiu um novo marco em 2016, quando foram vendidos mais de 750 mil automóveis da categoria. Com isso, o total de carros elétricos vendidos no mundo alcançou a marca de 2 milhões de unidades desde que os primeiros modelos começaram a ser comercializados em 2011.

No Brasil, a expansão das vendas também se verifica. A marca A, por exemplo, expandiu suas vendas no ano de 2016, superando em 360 unidades as vendas de 2015, conforme representado no gráfico.



Disponível em: www.tecmundo.com.br. Acesso em: 5 dez. 2017.

A média anual do número de carros vendidos pela marca A, nos anos representados no gráfico, foi de

A) 192.
B) 240.
C) 252.
D) 320.
E) 420.

Gabarito - D

Comentário:

Sendo cada carrinho uma quantidade x de carros vendidos. Ou seja. em 2016 foi vendido 5x carros e em 2015, 2x. Segundo o enunciado, temos:

$5x = 2x + 360$

Resolvendo a equação, temos $x = 120$.

Assim, em 2016 foi vendido 600 carros, em 2015, 240, e em 2014, 120.

Fazendo a média desses valores, temos:

$$x = \frac{600 + 240 + 120}{3} = 320.$$

QUESTÃO 154

A Comissão Interna de Prevenção de Acidentes (CIPA) de uma empresa, observando os altos custos com os frequentes acidentes de trabalho ocorridos, fez, a pedido da diretoria, uma pesquisa do número de acidentes sofridos por funcionários. Essa pesquisa, realizada com uma amostra de 100 funcionários, norteará as ações da empresa na política de segurança no trabalho.

Os resultados obtidos estão no quadro.

Número de acidentes sofridos	Número de trabalhadores
0	50
1	17
2	15
3	10
4	6
5	2

A média do número de acidentes por funcionário na amostra que a CIPA apresentará à diretoria da empresa é

A 0,15.
B 0,30.
C 0,50.
D 1,11.
E 2,22.

Gabarito - D

Comentário:

Calculando a média do número de acidentes por funcionário, temos:

$$\bar{X} = \frac{50.0+17.1+15.2+10.3+6.4+2.5}{100} = 1,11$$

QUESTÃO 162

Os alunos da disciplina de estatística, em um curso universitário, realizam quatro avaliações por semestre com os pesos de 20%, 10%, 30% e 40%, respectivamente. No final do semestre, precisam obter uma média nas quatro avaliações de, no mínimo, 60 pontos para serem aprovados. Um estudante dessa disciplina obteve os seguintes pontos nas três primeiras avaliações: 46, 60 e 50, respectivamente.

O mínimo de pontos que esse estudante precisa obter na quarta avaliação para ser aprovado é

A 29,8.
B 71,0.
C 74,5.
D 75,5.
E 84,0.

Gabarito - C

Comentário:

O mínimo de pontos x que precisa ser tirado na quarta prova para aprovação é dado por:

$$\bar{x} = \frac{46 \times 0,2 + 60 \times 0,1 + 50 \times 03 + 0,4x}{100\%} = 60$$

Resolvendo a equação, encontramos x = 74,5.

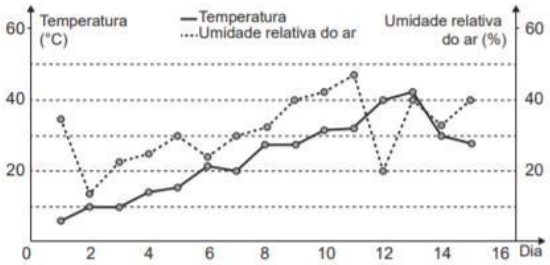
ENEM 2019 - ESTATÍSTICA

Questão 150

O serviço de meteorologia de uma cidade emite relatórios diários com a previsão do tempo. De posse dessas informações, a prefeitura emite três tipos de alertas para a população:

- Alerta cinza: deverá ser emitido sempre que a previsão do tempo estimar que a temperatura será inferior a 10 °C, e a umidade relativa do ar for inferior a 40%;
- Alerta laranja: deverá ser emitido sempre que a previsão do tempo estimar que a temperatura deve variar entre 35 °C e 40 °C, e a umidade relativa do ar deve ficar abaixo de 30%;
- Alerta vermelho: deverá ser emitido sempre que a previsão do tempo estimar que a temperatura será superior a 40 °C, e a umidade relativa do ar for inferior a 25%.

Um resumo da previsão do tempo nessa cidade, para um período de 15 dias, foi apresentado no gráfico.



Decorridos os 15 dias de validade desse relatório, um funcionário percebeu que, no período a que se refere o gráfico, foram emitidos os seguintes alertas:

- Dia 1: alerta cinza;
- Dia 12: alerta laranja;
- Dia 13: alerta vermelho.

Em qual(is) desses dias o(s) aviso(s) foi(ram) emitido(s) corretamente?

A) 1
B) 12
C) 1 e 12
D) 1 e 13
E) 1, 12 e 13

Gabarito - A

Comentário:
Analisando as alternativas vemos que no dia 1 o aviso foi correto enquanto no dia 12, pois o estar entre implica que estar entre 35° e 40° não inclui o 40° e o dia 13 também não foi correto pela umidade

Questão 157

Segundo o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), o rendimento médio mensal dos trabalhadores brasileiros, no ano 2000, era de R$ 1 250,00. Já o Censo 2010 mostrou que, em 2010, esse valor teve um aumento de 7,2% em relação a 2000. Esse mesmo instituto projeta que, em 2020, o rendimento médio mensal dos trabalhadores brasileiros poderá ser 10% maior do que foi em 2010.

IBGE. **Censo 2010**. Disponível em: www.ibge.gov.br. Acesso em: 13 ago. 2012 (adaptado).

Supondo que as projeções do IBGE se realizem, o rendimento médio mensal dos brasileiros em 2020 será de

A) R$ 1 340,00.
B) R$ 1 349,00.
C) R$ 1 375,00.
D) R$ 1 465,00.
E) R$ 1 474,00.

Gabarito - E

Comentário:

Segundo os dados do enunciado, em 2000 a média era R$ 1 250,00. Em 2010, houve um aumento de 7,2%, então a média será $1250 \times 1,072 = 1340$.

Em relação ao valor da média em 2010, houve um aumento de 10% em 2020. Assim, a média em 2020 será $1340 \times 1,1 = 1474$.

Questão 165

O preparador físico de um time de basquete dispõe de um plantel de 20 jogadores, com média de altura igual a 1,80 m. No último treino antes da estreia em um campeonato, um dos jogadores desfalcou o time em razão de uma séria contusão, forçando o técnico a contratar outro jogador para recompor o grupo.

Se o novo jogador é 0,20 m mais baixo que o anterior, qual é a média de altura, em metro, do novo grupo?

A) 1,60
B) 1,78
C) 1,79
D) 1,81
E) 1,82

Gabarito - C

Comentário:

$$\frac{soma\ das\ alturas}{20} = 1,8$$

$$soma\ das\ alturas\ = 36$$

$$soma\ das\ alturas\ (depois\ da\ mudança) = 36 - 0,2$$

$$Média = \frac{36 - 0,2}{20} = 1,8 - 0,01 = 1,79$$

Questão 166

Em uma fábrica de refrigerantes, é necessário que se faça periodicamente o controle no processo de engarrafamento para evitar que sejam envasadas garrafas fora da especificação do volume escrito no rótulo.

Diariamente, durante 60 dias, foram anotadas as quantidades de garrafas fora dessas especificações. O resultado está apresentado no quadro.

Quantidade de garrafas fora das especificações por dia	Quantidade de dias
0	52
1	5
2	2
3	1

Gabarito - B

Comentário:

$$\bar{x} = \frac{52.0 + 5.1 + 2.2 + 1.3}{60} = \frac{0 + 5 + 4 + 3}{60} = \frac{12}{60} = 0,2$$

A média diária de garrafas fora das especificações no período considerado é

A 0,1.
B 0,2.
C 1,5.
D 2,0.
E 3,0.

Questão 172

Os alunos de uma turma escolar foram divididos em dois grupos. Um grupo jogaria basquete, enquanto o outro jogaria futebol. Sabe-se que o grupo de basquete é formado pelos alunos mais altos da classe e tem uma pessoa a mais do que o grupo de futebol. A tabela seguinte apresenta informações sobre as alturas dos alunos da turma.

Média	Mediana	Moda
1,65	1,67	1,70

Os alunos P, J, F e M medem, respectivamente, 1,65 m, 1,66 m, 1,67 m e 1,68 m, e as suas alturas não são iguais a de nenhum outro colega da sala.

Segundo essas informações, argumenta-se que os alunos P, J, F e M jogaram, respectivamente,

A basquete, basquete, basquete, basquete.
B futebol, basquete, basquete, basquete.
C futebol, futebol, basquete, basquete.
D futebol, futebol, futebol, basquete.
E futebol, futebol, futebol, futebol.

Gabarito - C

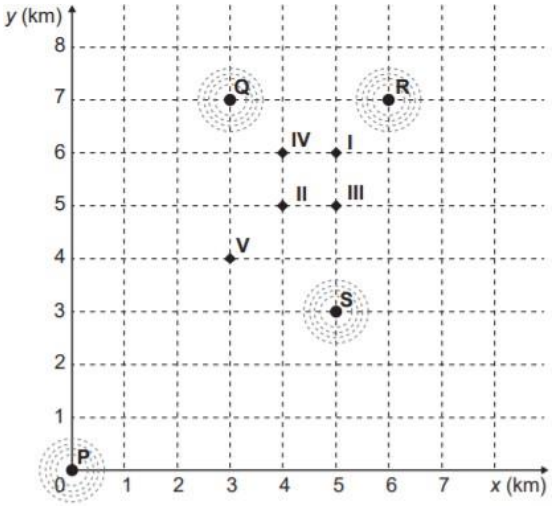
Comentário:

Já que tem um jogador a mais no time de basquete do que no time de futebol, a quantidade total de alunos nessa turma é ímpar. Com isso a mediana é o termo central. Como na questão informa que os valores de P, J, F e M são alturas que não são iguais a altura de nenhum outro colega, quer dizer que o de 1,65 e 1,66 são abaixo da mediana, então são jogadores de futebol. E do 1,67 em diante são jogadores de basquete. Por isso os de 1,67 e 1,68 são jogadores de basquete

Questão 174

Um aplicativo de relacionamentos funciona da seguinte forma: o usuário cria um perfil com foto e informações pessoais, indica as características dos usuários com quem deseja estabelecer contato e determina um raio de abrangência a partir da sua localização. O aplicativo identifica as pessoas que se encaixam no perfil desejado e que estão a uma distância do usuário menor ou igual ao raio de abrangência. Caso dois usuários tenham perfis compatíveis e estejam numa região de abrangência comum a ambos, o aplicativo promove o contato entre os usuários, o que é chamado de *match*.

O usuário P define um raio de abrangência com medida de 3 km e busca ampliar a possibilidade de obter um *match* se deslocando para a região central da cidade, que concentra um maior número de usuários. O gráfico ilustra alguns bares que o usuário P costuma frequentar para ativar o aplicativo, indicados por I, II, III, IV e V. Sabe-se que os usuários Q, R e S, cujas posições estão descritas pelo gráfico, são compatíveis com o usuário P, e que estes definiram raios de abrangência respectivamente iguais a 3 km, 2 km e 5 km.

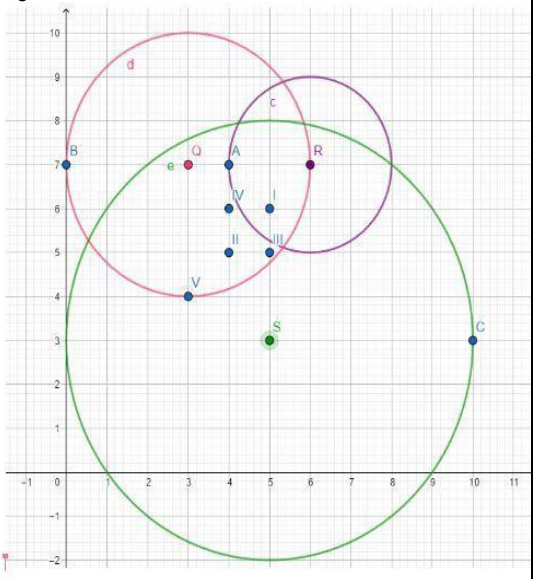


Com base no gráfico e nas afirmações anteriores, em qual bar o usuário P teria a possibilidade de um *match* com os usuários Q, R e S, simultaneamente?

A) I
B) II
C) III
D) IV
E) V

Gabarito - A

Comentário:
Traça-se o semicírculo de centro Q e raio 3 km, depois o R com raio 2 km e S 5 Km, temos que a região comum é o usuário I



ANEXO B- Questões de Probabilidade aplicadas no ENEM entre os anos de 2009 e 2019.

ENEM 2009 - PROBABILIDADE

Texto para as questões 137 e 138

A população mundial está ficando mais velha, os índices de natalidade diminuíram e a expectativa de vida aumentou. No gráfico seguinte, são apresentados dados obtidos por pesquisa realizada pela Organização das Nações Unidas (ONU), a respeito da quantidade de pessoas com 60 anos ou mais em todo o mundo. Os números da coluna da direita representam as faixas percentuais. Por exemplo, em 1950 havia 95 milhões de pessoas com 60 anos ou mais nos países desenvolvidos, número entre 10% e 15% da população total nos países desenvolvidos.

Fonte: "Perspectivas da População Mundial", ONU, 2009

Disponível em: www.economist.com. Acesso em: 9 jul. 2009 (adaptado).

Questão 138

Em 2050, a probabilidade de se escolher, aleatoriamente, uma pessoa com 60 anos ou mais de idade, na população dos países desenvolvidos, será um número mais próximo de

A) $\frac{1}{2}$.

B) $\frac{7}{20}$.

C) $\frac{8}{25}$.

D) $\frac{1}{5}$.

E) $\frac{3}{25}$.

Gabarito - C

Comentário:
Analisando o gráfico temos que a probabilidade de se escolher, aleatoriamente, uma pessoa com 60 anos ou mais de idade é aproximadamente de 32%, ou seja:

P=32% = 32/100 = 8/25

Questão 171

A população brasileira sabe, pelo menos intuitivamente, que a probabilidade de acertar as seis dezenas da mega sena não é zero, mas é quase. Mesmo assim, milhões de pessoas são atraídas por essa loteria, especialmente quando o prêmio se acumula em valores altos. Até junho de 2009, cada aposta de seis dezenas, pertencentes ao conjunto {01, 02, 03, ..., 59, 60}, custava R$ 1,50.

Disponível em: www.caixa.gov.br. Acesso em: 7 jul. 2009.

Considere que uma pessoa decida apostar exatamente R$ 126,00 e que esteja mais interessada em acertar apenas cinco das seis dezenas da mega sena, justamente pela dificuldade desta última. Nesse caso, é melhor que essa pessoa faça 84 apostas de seis dezenas diferentes, que não tenham cinco rúmeros em comum, do que uma única aposta com nove dezenas, porque a probabilidade de acertar a quina no segundo caso em relação ao primeiro é, aproximadamente,

A $1\frac{1}{2}$ vez menor.

B $2\frac{1}{2}$ vezes menor.

C 4 vezes menor.

D 9 vezes menor.

E 14 vezes menor.

Gabarito - C

Comentário:

A cada aposta de seis dezenas, concorre-se com $C_{6,5} = 6$ quinas.

Em 84 apostas de seis dezenas diferentes, que não tenham cinco números em comum, concorre-se com 84 x 6 = 504 quinas.

Em uma aposta única com nove dezenas, concorre-se com $C_{9,5} = 9!/4!5! = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!/5! \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6/4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3024/24 = 126$ quinas.

A probabilidade de acertar a quina no segundo caso é 504/126 = 4 vezes menor.

ENEM 2010 - PROBABILIDADE

Questão 156

A figura I abaixo mostra um esquema das principais vias que interligam a cidade A com a cidade B. Cada número indicado na figura II representa a probabilidade de pegar um engarrafamento quando se passa na via indicada. Assim, há uma probabilidade de 30% de se pegar engarrafamento no deslocamento do ponto C ao o ponto B, passando pela estrada E4, e de 50%, quando se passa por E3. Essas probabilidades são independentes umas das outras.

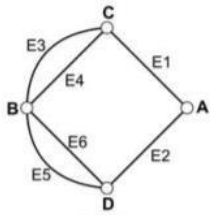


Figura I

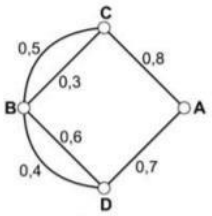


Figura II

Paula deseja se deslocar da cidade A para a cidade B usando exatamente duas das vias indicadas, percorrendo um trajeto com a menor probabilidade de engarrafamento possível.

O melhor trajeto para Paula é

(A) E1E3.
(B) E1E4.
(C) E2E4.
(D) E2E5.
(E) E2E6.

Gabarito - D

Comentário:
Para a resolução, vamos interpretar "um trajeto com a menor probabilidade de engarrafamento possível" como sendo "a menor probabilidade de haver engarrafamento em pelo menos um dos dois trechos do trajeto".
A probabilidade de engarrafamento é 1 menos a probabilidade de não pegar engarrafamento em nenhum dos dois trechos do trajeto percorrido. Assim, a probabilidade de pegar engarrafamento no trajeto:
1) E1E3 é 1 - 0,2 . 0,5 = 0,90
2) E1E4 é 1 - 0,2 . 0,7 = 0,86
3) E2E5 é 1 - 0,3 . 0,6 = 0,82
4) E2E6 é 1 - 0,3 . 0,4 = 0,88
Assim, o trajeto de menor probabilidade de engarrafa mento é E2E5.

Questão 173

O diretor de um colégio leu numa revista que os pés das mulheres estavam aumentando. Há alguns anos, a média do tamanho dos calçados das mulheres era de 35,5 e, hoje, é de 37,0. Embora não fosse uma informação científica, ele ficou curioso e fez uma pesquisa com as funcionárias do seu colégio, obtendo o quadro a seguir:

TAMANHO DOS CALÇADOS	NÚMERO DE FUNCIONÁRIAS
39,0	1
38,0	10
37,0	3
36,0	5
35,0	6

Escolhendo uma funcionária ao acaso e sabendo que ela tem calçado maior que 36,0, a probabilidade de ela calçar 38,0 é

(A) $\frac{1}{3}$

(B) $\frac{1}{5}$

(C) $\frac{2}{5}$

(D) $\frac{5}{7}$

(E) $\frac{5}{14}$

Gabarito - D

Comentário:

Número de funcionárias com calçado maior que 36 é: 1 + 10 + 3 = 14 funcionárias

Número de funcionárias com calçado igual a 38: 10 funcionárias

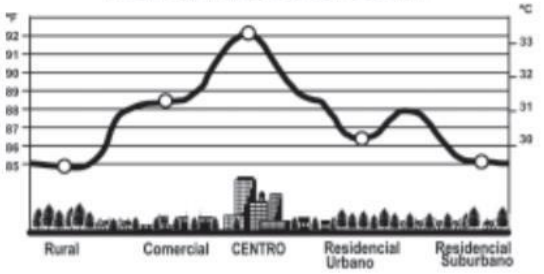
Assim a probabilidade da funcionária calçar 38 será: P = 10/14 = **5/7**

ENEM 2011 - PROBABILIDADE

QUESTÃO 159

Rafael mora no Centro de uma cidade e decidiu se mudar, por recomendações médicas, para uma das regiões: Rural, Comercial, Residencial Urbano ou Residencial Suburbano. A principal recomendação médica foi com as temperaturas das "ilhas de calor" da região, que deveriam ser inferiores a 31°C. Tais temperaturas são apresentadas no gráfico:

PERFIL DA ILHA DE CALOR URBANA



Fonte: EPA

Escolhendo, aleatoriamente, uma das outras regiões para morar, a probabilidade de ele escolher uma região que seja adequada às recomendações médicas é

A) $\frac{1}{5}$

B) $\frac{1}{4}$

C) $\frac{2}{5}$

D) $\frac{3}{5}$

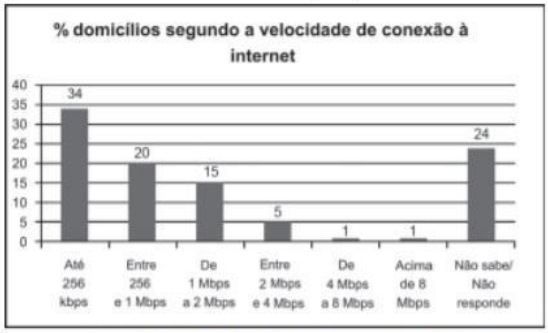
E) $\frac{3}{4}$

Gabarito - E

Comentário:
Das outras regiões da cidade (Rural, Comercial, Residencial Urbana e Residencial Suburbana), estão abaixo de 31°C as regiões Rural, Residencial Urbana e Residencial Suburbana. Dessa forma, a probabilidade pedida é de 3/4

QUESTÃO 165

O gráfico mostra a velocidade de conexão à internet utilizada em domicílios no Brasil. Esses dados são resultado da mais recente pesquisa, de 2009, realizada pelo Comitê Gestor da Internet (CGI).



Disponível em: http://agencia.ipea.gov.br. Acesso em: 28 abr. 2010 (adaptado).

Escolhendo-se, aleatoriamente, um domicílio pesquisado, qual a chance de haver banda larga de conexão de pelo menos 1 Mbps neste domicílio?

A 0,45
B 0,42
C 0,30
D 0,22
E 0,15

Gabarito - D

Comentário:
Supondo que entre os 24% que não sabem ou não responderam não haja domicílios com conexão de pelo menos 1 Mbps, há pelo menos 1 Mbps em
(15 + 5 + 1 + 1)% domicílios.
Logo, em 22% = 0,22 dos domicílios há pelo menos 1 Mbps.

QUESTÃO 166

Todo o país passa pela primeira fase de campanha de vacinação contra a gripe suína (H1N1). Segundo um médico infectologista do Instituto Emílio Ribas, de São Paulo, a imunização "deve mudar", no país, a história da epidemia. Com a vacina, de acordo com ele, o Brasil tem a chance de barrar uma tendência do crescimento da doença, que já matou 17 mil no mundo. A tabela apresenta dados específicos de um único posto de vacinação.

Campanha de vacinação contra a gripe suína

Datas da vacinação	Público-alvo	Quantidade de pessoas vacinadas
8 a 19 de março	Trabalhadores da saúde e indígenas	42
22 de março a 2 de abril	Portadores de doenças crônicas	22
5 a 23 de abril	Adultos saudáveis entre 20 e 29 anos	56
24 de abril a 7 de maio	População com mais de 60 anos	30
10 a 21 de maio	Adultos saudáveis entre 30 e 39 anos	50

Disponível em: http://img.terra.com.br. Acesso em: 26 abr. 2010 (adaptado).

Escolhendo-se aleatoriamente uma pessoa atendida nesse posto de vacinação, a probabilidade de ela ser portadora de doença crônica é

A 8%.
B 9%.
C 11%.
D 12%.
E 22%.

Gabarito - C

Comentário:
O total de pessoas atendidas no referido posto de vacinação é
42 + 22 + 56 + 30 + 50 = 200
Dessas pessoas, apenas 22 são portadoras de doenças crônicas. A probabilidade de uma dessas pessoas ser selecionada é
22/200 = 11/100 = 11%

ENEM 2012 - PROBABILIDADE

QUESTÃO 138

Em um jogo há duas urnas com 10 bolas de mesmo tamanho em cada urna. A tabela a seguir indica as quantidades de bolas de cada cor em cada urna.

Cor	Urna 1	Urna 2
Amarela	4	0
Azul	3	1
Branca	2	2
Verde	1	3
Vermelha	0	4

Uma jogada consiste em:

1º) o jogador apresenta um palpite sobre a cor da bola que será retirada por ele da urna 2;

2º) ele retira, aleatoriamente, uma bola da urna 1 e a coloca na urna 2, misturando-a com as que lá estão;

3º) em seguida ele retira, também aleatoriamente, uma bola da urna 2;

4º) se a cor da última bola retirada for a mesma do palpite inicial, ele ganha o jogo.

Qual cor deve ser escolhida pelo jogador para que ele tenha a maior probabilidade de ganhar?

A) Azul.
B) Amarela.
C) Branca.
D) Verde.
E) Vermelha.

GABARITO - E

Comentário:

Após a transferência de uma bola da urna 1 para a urna 2, esta pode conter:

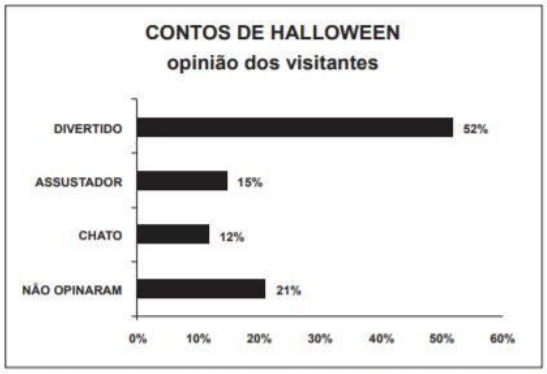
0 ou 1 bolas amarelas
1 ou 2 azuis
2 ou 3 brancas
3 ou 4 verdes
4 vermelhas
Um total de 11 bolas.
Sendo assim, a probabilidade de retirar uma vermelha será de 4/11, enquanto a probabilidade da verde será algum valor entre 3/11 e 4/11.

Assim, a probabilidade de ser retirada a bola vermelha é a maior.

QUESTÃO 164

Em um *blog* de variedades, músicas, mantras e informações diversas, foram postados "Contos de Halloween". Após a leitura, os visitantes poderiam opinar, assinalando suas reações em: "Divertido", "Assustador" ou "Chato". Ao final de uma semana, o *blog* registrou que 500 visitantes distintos acessaram esta postagem.

O gráfico a seguir apresenta o resultado da enquete.



O administrador do *blog* irá sortear um livro entre os visitantes que opinaram na postagem "Contos de Halloween".

Sabendo que nenhum visitante votou mais de uma vez, a probabilidade de uma pessoa escolhida ao acaso entre as que opinaram ter assinalado que o conto "Contos de Halloween" é "Chato" é mais aproximada por

A) 0,09.
B) 0,12.
C) 0,14.
D) 0,15.
E) 0,18.

Gabarito - D

Comentário:

Primeiro, devemos calcular o número de pessoas do espaço amostral subtraindo o número de pessoas que não opinaram, sendo, portanto, um caso de probabilidade condicional.

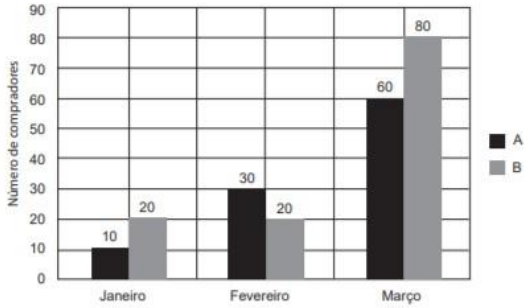
Assim, o espaço amostral é de 100%-21%=79%, retirando-se do total de entrevistados aqueles que não opinaram e o número de casos favoráveis é o percentual de pessoas que responderam "chato", ou seja, 12%.

A probabilidade pedida é dada por:
12%/79% ≅ 0,15

ENEM 2013 - PROBABILIDADE

QUESTÃO 141

Uma loja acompanhou o número de compradores de dois produtos, A e B, durante os meses de janeiro, fevereiro e março de 2012. Com isso, obteve este gráfico:



A loja sorteará um brinde entre os compradores do produto A e outro brinde entre os compradores do produto B.

Qual a probabilidade de que os dois sorteados tenham feito suas compras em fevereiro de 2012?

(A) $\frac{1}{20}$

(B) $\frac{3}{242}$

(C) $\frac{5}{22}$

(D) $\frac{6}{25}$

(E) $\frac{7}{15}$

Gabarito - A

Comentário:

- Produto A

Número de compradores total = 10+30+60 = 100

Probabilidade de ser sorteado um comprador de fevereiro:

P_1 =30/100

- Produto B

Número de compradores total = 20+20+80 = 120

Probabilidade de ser sorteado um comprador de fevereiro:

P2 =20/120

A probabilidade de que os dois sorteados tenham feito suas compras em fevereiro de 2012 é

$P_1 . P_2 = (30/100) . (20/120) = 600/12000 = 1/20$

QUESTÃO 155

Numa escola com 1 200 alunos foi realizada uma pesquisa sobre o conhecimento desses em duas línguas estrangeiras, inglês e espanhol.

Nessa pesquisa constatou-se que 600 alunos falam inglês, 500 falam espanhol e 300 não falam qualquer um desses idiomas.

Escolhendo-se um aluno dessa escola ao acaso e sabendo-se que ele não fala inglês, qual a probabilidade de que esse aluno fale espanhol?

(A) $\frac{1}{2}$

(B) $\frac{5}{8}$

(C) $\frac{1}{4}$

(D) $\frac{5}{6}$

(E) $\frac{5}{14}$

Gabarito - A

Comentário:

Dos 1200 alunos, 300 não falam nenhuma língua, logo apenas 1200 – 300 = 900 alunos falam pelo menos 1 língua. Desses, 600 falam inglês, 500 espanhol e certa quantidade (x) falam as duas línguas. Sendo assim, (600 - x) falam somente inglês, (500 - x) falam somente espanhol e x falam as duas línguas. A soma das três parcelas devem totalizar os 900 alunos, assim:

(600 - x) + (500 - x) + x = 900

– x – x + x = 900 – 600 – 500

– x = – 200 ·(– 1)

Logo, x = 200

Para calcular a probabilidade pedida, primeiramente calcula-se o número de elementos do espaço amostral. Neste caso, sabe-se que o aluno escolhido não fala inglês, logo são 1200 - 600 = 600 alunos. Desses (500 - x) = 500 - 200 = 300 alunos falam espanhol. Sendo assim, a

	probabilidade pedida é igual a 300/600=1/2.
QUESTÃO 175 Uma fábrica de parafusos possui duas máquinas, I e II, para a produção de certo tipo de parafuso. Em setembro, a máquina I produziu $\frac{54}{100}$ do total de parafusos produzidos pela fábrica. Dos parafusos produzidos por essa máquina, $\frac{25}{1\,000}$ eram defeituosos. Por sua vez, $\frac{38}{1\,000}$ dos parafusos produzidos no mesmo mês pela máquina II eram defeituosos. O desempenho conjunto das duas máquinas é classificado conforme o quadro, em que P indica a probabilidade de um parafuso escolhido ao acaso ser defeituoso. $0 \leq P < \frac{2}{100}$ Excelente $\frac{2}{100} \leq P < \frac{4}{100}$ Bom $\frac{4}{100} \leq P < \frac{6}{100}$ Regular $\frac{6}{100} \leq P < \frac{8}{100}$ Ruim $\frac{8}{100} \leq P \leq 1$ Péssimo O desempenho conjunto dessas máquinas, em setembro, pode ser classificado como A excelente. B bom. C regular. D ruim. E péssimo.	Gabarito - B Comentário: Um parafuso ao ser escolhido ao acaso terá 54% de ter sido produzido na máquina I e 46% na máquina II. Como probabilidade do parafuso da máquina I ser defeituoso é de 25/1000=1/40 e na máquina II é de 38/1000, a probabilidade de ele ser defeituoso (P) ao ser escolhido ao acaso é de 54/100·1/40+46/100·38/1000 = 1,35% + 1,748% = 3,098%, pois ele pode ser produzido na máquina I ou II. Como 2% ≤ P <4%, o desempenho conjunto pode ser classificado como “bom”.

ENEM 2014 - PROBABILIDADE	
QUESTÃO 152 O psicólogo de uma empresa aplica um teste para analisar a aptidão de um candidato a determinado cargo. O teste consiste em uma série de perguntas cujas respostas devem ser verdadeiro ou falso e termina quando o psicólogo fizer a décima pergunta ou quando o candidato der a segunda resposta errada. Com base em testes anteriores, o psicólogo sabe que a probabilidade de o candidato errar uma resposta é 0,20. A probabilidade de o teste terminar na quinta pergunta é A 0,02048. B 0,08192. C 0,24000. D 0,40960. E 0,49152.	Gabarito - B Comentário: Temos que a probabilidade desse candidato acertar a questão é de 20% = 0,20. Então a probabilidade dele errar é de 80% = 0,80. Assim, para que o teste termine na 5ª pergunta, temos que: 1 - Devemos errar apenas uma das 4 primeiras respostas com probabilidade 4 x 0,20=0,80 2 - Devemos acertar as outras 3 respostas com probabilidade é $0,8^3$ 3 - Devemos errar a 5ª resposta com probabilidade é de 0,2 Logo, a probabilidade desse teste terminar é de: $0,8 . 0,8^3 . 0,2 = 0,08192$.

ENEM 2015 - PROBABILIDADE	
QUESTÃO 149 Em uma escola, a probabilidade de um aluno compreender e falar inglês é de 30%. Três alunos dessa escola, que estão em fase final de seleção de intercâmbio, aguardam, em uma sala, serem chamados para uma entrevista. Mas, ao invés de chamá-los um a um, o entrevistador entra na sala e faz, oralmente, uma pergunta em inglês que pode ser respondida por qualquer um dos alunos. A probabilidade de o entrevistador ser entendido e ter sua pergunta oralmente respondida em inglês é A 23,7% B 30,0% C 44,1% D 65,7% E 90,0%	Gabarito - D Comentário: A probabilidade de nenhum dos 3 alunos responder a pergunta é de: 70% . 70% . 70% = 34,3%, assim, a probabilidade pedida é dada por 100% – 34,3% = 65,7%.

QUESTÃO 175

Uma competição esportiva envolveu 20 equipes com 10 atletas cada. Uma denúncia à organização dizia que um dos atletas havia utilizado substância proibida. Os organizadores, então, decidiram fazer um exame *antidoping*. Foram propostos três modos diferentes para escolher os atletas que irão realizá-lo:

Modo I: sortear três atletas dentre todos os participantes;

Modo II: sortear primeiro uma das equipes e, desta, sortear três atletas;

Modo III: sortear primeiro três equipes e, então, sortear um atleta de cada uma dessas três equipes.

Considere que todos os atletas têm igual probabilidade de serem sorteados e que $P(I)$, $P(II)$ e $P(III)$ sejam as probabilidades de o atleta que utilizou a substância proibida seja um dos escolhidos para o exame no caso do sorteio ser feito pelo modo I, II ou III.

Comparando-se essas probabilidades, obtém-se

A) $P(I) < P(III) < P(II)$
B) $P(II) < P(I) < P(III)$
C) $P(I) < P(II) = P(III)$
D) $P(I) = P(II) < P(III)$
E) $P(I) = P(II) = P(III)$

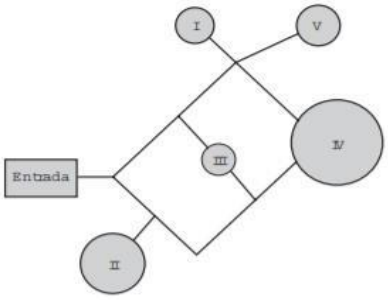
Gabarito - E

Comentário:
Temos 20 equipes, cada uma com 10 atletas, logo, 200 atletas no total.
Temos que:
P(I) = 3 . 1/200 . 199/199 . 198/198 = 3/200.
P(II) = 1/20 . 3 . 1/10 . 9/9 . 8/8 = 3/200, pois a probabilidade da equipe do atleta ser sorteada é de 1/10.
P(III) = 3. 1/20 . 19/19 . 18/18 . 1/10 . 10/10 . 10/10 = 3/200, pois a equipe desse atleta pode ser a primeira a segunda ou a terceira sorteada, e a probabilidade dele ser sorteado na equipe é de 1/10.
Assim, temos P(I) = P(II) = P(III).

ENEM 2016 - PROBABILIDADE

QUESTÃO 147

Um adolescente vai a um parque de diversões tendo, prioritariamente, o desejo de ir a um brinquedo que se encontra na área IV, dentre as áreas I, II, III, IV e V existentes. O esquema ilustra o mapa do parque, com a localização da entrada, das cinco áreas com os brinquedos disponíveis e dos possíveis caminhos para se chegar a cada área. O adolescente não tem conhecimento do mapa do parque e decide ir caminhando da entrada até chegar à área IV.



Suponha que relativamente a cada ramificação, as opções existentes de percurso pelos caminhos apresentem iguais probabilidades de escolha, que a caminhada foi feita escolhendo ao acaso os caminhos existentes e que, ao tomar um caminho que chegue a uma área distinta da IV, o adolescente necessariamente passa por ela ou retorna.

Nessas condições, a probabilidade de ele chegar à área IV sem passar por outras áreas e sem retornar é igual a

A) $\frac{1}{96}$

B) $\frac{1}{64}$

C) $\frac{5}{24}$

D) $\frac{1}{4}$

E) $\frac{5}{12}$

Gabarito - C

Comentário:

Existem apenas duas opções favoráveis de percurso: uma no sentido horário e outra no sentido anti-horário. Logo, segue que a resposta é dada por 1/2.1/2.1/3 + 1/2.1/2.1/2 = 5/24

Sendo A, B, C, D e E as ramificações como mostradas no desenho anterior, temos apenas dois caminhos sem passar por outras áreas e sem retornar:
entrada - A - B - C - IV
entrada - A - D - E - IV
O primeiro caminho tem probabilidade (1/2).(1/2).(1/3) = 1/12, já o segundo tem probabilidade (1/2).(1/2).(1/2) = 1/8.
Assim, a resposta é 1/12 + 1/8 = 5/24

ENEM 2017 - PROBABILIDADE

QUESTÃO 142

Um morador de uma região metropolitana tem 50% de probabilidade de atrasar-se para o trabalho quando chove na região; caso não chova, sua probabilidade de atraso é de 25%. Para um determinado dia, o serviço de meteorologia estima em 30% a probabilidade da ocorrência de chuva nessa região.

Qual é a probabilidade de esse morador se atrasar para o serviço no dia para o qual foi dada a estimativa de chuva?

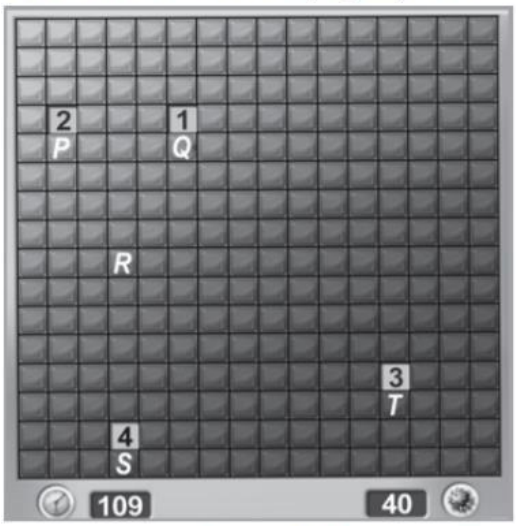
A 0,075
B 0,150
C 0,325
D 0,600
E 0,800

Gabarito - C

Comentário:
Chover e atrasar ou não chover e atrasar:
30% . 50% + 70% . 25% = 32,5%

QUESTÃO 155

A figura ilustra uma partida de Campo Minado, o jogo presente em praticamente todo computador pessoal. Quatro quadrados em um tabuleiro 16 × 16 foram abertos, e os números em suas faces indicam quantos dos seus 8 vizinhos contêm minas (a serem evitadas). O número 40 no canto inferior direito é o número total de minas no tabuleiro, cujas posições foram escolhidas ao acaso, de forma uniforme, antes de se abrir qualquer quadrado.



Em sua próxima jogada, o jogador deve escolher dentre os quadrados marcados com as letras *P*, *Q*, *R*, *S* e *T* um para abrir, sendo que deve escolher aquele com a menor probabilidade de conter uma mina.

O jogador deverá abrir o quadrado marcado com a letra

A *P*.
B *Q*.
C *R*.
D *S*.
E *T*.

Gabarito - B

Comentário:
[a probabilidade da bomba estar no ponto P]= 4/28 = 1/7 e [a probabilidade dele não estar]= 6/7
[a probabilidade da bomba estar no ponto Q]=1/8 e [a probabilidade de ele não estar] = 7/8
[a probabilidade da bomba estar no ponto S]=35/70=1/2 e [a probabilidade de ele não estar]=35/70=1/2
[a probabilidade da bomba estar no ponto T]=21/56=3/8 e [a probabilidade de ele não estar]=5/8
[a probabilidade da bomba estar no ponto R]=30/220=3/22 e [a probabilidade de ele não estar]=19/22

Como 7/8>19/22>6/7>5/8>1/2.
Q>R>P>T>S Então o quadrado aberto será com a letra Q.

QUESTÃO 171

Numa avenida existem 10 semáforos. Por causa de uma pane no sistema, os semáforos ficaram sem controle durante uma hora, e fixaram suas luzes unicamente em verde ou vermelho. Os semáforos funcionam de forma independente; a probabilidade de acusar a cor verde é de $\frac{2}{3}$ e a de acusar a cor vermelha é de $\frac{1}{3}$. Uma pessoa percorreu a pé toda essa avenida durante o período da pane, observando a cor da luz de cada um desses semáforos.

Qual a probabilidade de que esta pessoa tenha observado exatamente um sinal na cor verde?

A) $\frac{10 \times 2}{3^{10}}$

B) $\frac{10 \times 2^9}{3^{10}}$

C) $\frac{2^{10}}{3^{100}}$

D) $\frac{2^{90}}{3^{100}}$

E) $\frac{2}{3^{10}}$

Gabarito - A

Comentário:

Considerem-se os eventos

A: acusar cor verde
B: acusar cor vermelha

$$P(A) = \frac{2}{3} \qquad P(B) = \frac{1}{3}$$

A probabilidade de somente o primeiro semáforo acusar a cor verde é dada por:

$$\underset{\downarrow}{A}\ \underset{\downarrow}{B}\ \underset{\downarrow}{B}\ \underset{\downarrow}{B}\ \underset{\downarrow}{B}\ \underset{\downarrow}{B}\ \underset{\downarrow}{B}\ \underset{\downarrow}{B}\ \underset{\downarrow}{B}\ \underset{\downarrow}{B}$$

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^9$$

Como tem-se 10 semáforos, existem 10 formas de somente um deles acusar a cor verde.

Logo, a probabilidade p pedida é dada por:

$$P = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^9 \cdot 10$$

$$P = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3^9} \cdot 10$$

$$\therefore P = \frac{10 \cdot 2}{3^{10}}$$

ENEM 2018 - PROBABILIDADE

QUESTÃO 140 Um rapaz estuda em uma escola que fica longe de sua casa, e por isso precisa utilizar o transporte público. Como é muito observador, todos os dias ele anota a hora exata (sem considerar os segundos) em que o ônibus passa pelo ponto de espera. Também notou que nunca consegue chegar ao ponto de ônibus antes de 6 h 15 min da manhã. Analisando os dados coletados durante o mês de fevereiro, o qual teve 21 dias letivos, ele concluiu que 6 h 21 min foi o que mais se repetiu, e que a mediana do conjunto de dados é 6 h 22 min. A probabilidade de que, em algum dos dias letivos de fevereiro, esse rapaz tenha apanhado o ônibus antes de 6 h 21 min da manhã é, no máximo, A $\frac{4}{21}$ B $\frac{5}{21}$ C $\frac{6}{21}$ D $\frac{7}{21}$ E $\frac{8}{21}$	Gabarito - D Comentário: Como a mediana é 6:22 e temos 21 elementos, sabemos que existem 10 elementos que estão entre 6:15 e 6:21. Além disso, a probabilidade máxima ocorrerá quando a moda 6:21 for formada por 3 elementos. Ou seja. dos 10, temos 7 elementos antes de 6:21 em um total de 21 elementos. P = 7/21.
QUESTÃO 163 O gerente do setor de recursos humanos de uma empresa está organizando uma avaliação em que uma das etapas é um jogo de perguntas e respostas. Para essa etapa, ele classificou as perguntas, pelo nível de dificuldade, em fácil, médio e difícil, e escreveu cada pergunta em cartões para colocação em uma urna. Contudo, após depositar vinte perguntas de diferentes níveis na urna, ele observou que 25% delas eram de nível fácil. Querendo que as perguntas de nível fácil sejam a maioria, o gerente decidiu acrescentar mais perguntas de nível fácil à urna, de modo que a probabilidade de o primeiro participante retirar, aleatoriamente, uma pergunta de nível fácil seja de 75%. Com essas informações, a quantidade de perguntas de nível fácil que o gerente deve acrescentar à urna é igual a A 10. B 15. C 35. D 40. E 45.	Gabarito - D Comentário: Inicialmente, há 5 perguntas fáceis (25% de 20). Vamos acrescentar x perguntas fáceis, assim teremos: $\frac{5+x}{20+x} = \frac{75}{100}$ $\frac{5+x}{20+x} = \frac{3}{4}$ $20+4x = 60+3x$ $x = 40$

QUESTÃO 173

O salto ornamental é um esporte em que cada competidor realiza seis saltos. A nota em cada salto é calculada pela soma das notas dos juízes, multiplicada pela nota de partida (o grau de dificuldade de cada salto). Fica em primeiro lugar o atleta que obtiver a maior soma das seis notas recebidas.

O atleta 10 irá realizar o último salto da final. Ele observa no Quadro 1, antes de executar o salto, o recorte do quadro parcial de notas com a sua classificação e a dos três primeiros lugares até aquele momento.

Quadro 1

Classificação	Atleta	6º Salto	Total
1º	3	135,0	829,0
2º	4	140,0	825,2
3º	8	140,4	824,2
6º	10		687,5

Ele precisa decidir com seu treinador qual salto deverá realizar. Os dados dos possíveis tipos de salto estão no Quadro 2.

Quadro 2

Tipo de salto	Nota de partida	Estimativa da soma das notas dos juízes	Probabilidade de obter a nota
T1	2,2	57	89,76%
T2	2,4	58	93,74%
T3	2,6	55	91,88%
T4	2,8	50	95,38%
T5	3,0	53	87,34%

O atleta optará pelo salto com a maior probabilidade de obter a nota estimada, de maneira que lhe permita alcançar o primeiro lugar.

Considerando essas condições, o salto que o atleta deverá escolher é o de tipo

A) T1.
B) T2.
C) T3.
D) T4.
E) T5.

Gabarito - C

Comentário:

O atleta 10 precisa ser o primeiro colocado. Para isso, ele precisa superar o atleta 2. Assim, para tal, o atleta 10 precisa tirar 829,0 - 687,5 = 141,5. Agora, iremos analisar a nota com os saltos:

- T1 = 57 x 2,2 = 125,4
- T2 = 58 x 2,4 = 139,2
- T3 = 55 x 2,6 = 143
- T4 = 50 x 2,8 = 140
- T5 = 53 x 3 = 159

Assim, ele ganharia a competição se fizesse os saltos T3 e T5. Como a probabilidade de obter a nota é maior para o T3, esse é o salto que ele deverá escolher.

QUESTÃO 176

Para ganhar um prêmio, uma pessoa deverá retirar, sucessivamente e sem reposição, duas bolas pretas de uma mesma urna.

Inicialmente, as quantidades e cores das bolas são como descritas a seguir:

- Urna A – Possui três bolas brancas, duas bolas pretas e uma bola verde;
- Urna B – Possui seis bolas brancas, três bolas pretas e uma bola verde;
- Urna C – Possui duas bolas pretas e duas bolas verdes;
- Urna D – Possui três bolas brancas e três bolas pretas.

A pessoa deve escolher uma entre as cinco opções apresentadas:

- Opção 1 – Retirar, aleatoriamente, duas bolas da urna A;
- Opção 2 – Retirar, aleatoriamente, duas bolas da urna B;
- Opção 3 – Passar, aleatoriamente, uma bola da urna C para a urna A; após isso, retirar, aleatoriamente, duas bolas da urna A;
- Opção 4 – Passar, aleatoriamente, uma bola da urna D para a urna C; após isso, retirar, aleatoriamente, duas bolas da urna C;
- Opção 5 – Passar, aleatoriamente, uma bola da urna C para a urna D; após isso, retirar, aleatoriamente, duas bolas da urna D.

Com o objetivo de obter a maior probabilidade possível de ganhar o prêmio, a pessoa deve escolher a opção

A) 1.
B) 2.
C) 3.
D) 4.
E) 5.

Gabarito - E

Comentário:

As probabilidades de ganhar o prêmio são dadas pelas equações abaixo:

$$P_1 = \frac{2}{6}.\frac{1}{5} = 0.066$$

$$P_2 = \frac{3}{10}.\frac{2}{9} = 0.066$$

$$P_3 = \frac{3}{7}.\frac{2}{6} + \frac{2}{7}.\frac{1}{6} = 0.19$$

$$P_4 = \frac{3}{5}.\frac{2}{4} + \frac{2}{5}.\frac{1}{4} = 0.4$$

$$P_5 = \frac{4}{7}.\frac{2}{4} + \frac{3}{7}.\frac{2}{6} = 0.42$$

Logo, a pessoa deve escolher a opção 5 para ter a maior probabilidade possível de ganhar o prêmio.

ENEM 2019 – PROBABILIDADE	
Questão 176 Em um determinado ano, os computadores da receita federal de um país identificaram como inconsistentes 20% das declarações de imposto de renda que lhe foram encaminhadas. Uma declaração é classificada como inconsistente quando apresenta algum tipo de erro ou conflito nas informações prestadas. Essas declarações consideradas inconsistentes foram analisadas pelos auditores, que constataram que 25% delas eram fraudulentas. Constatou-se ainda que, dentre as declarações que não apresentaram inconsistências, 6,25% eram fraudulentas. Qual é a probabilidade de, nesse ano, a declaração de um contribuinte ser considerada inconsistente, dado que ela era fraudulenta? A 0,0500 B 0,1000 C 0,1125 D 0,3125 E 0,5000	Gabarito - E Comentário: $TOTAL\begin{cases} 20\%\ inconsistente \Rightarrow 25\% .20\%\ f raudulentas \\ 80\%\ consistente \Rightarrow 6,25\% .80\%\ f raudulentas \end{cases}$ $p(I/F) = \frac{0,25.0,20}{0,25.0,20+0,0625.0,80} = \frac{0,05}{0,05+0,05} = \frac{0,05}{2.0,05} = \frac{1}{2} = 0,5$

ANEXO C - Questões de Cominatória aplicadas no ENEM entre os anos de 2009 e 2019.

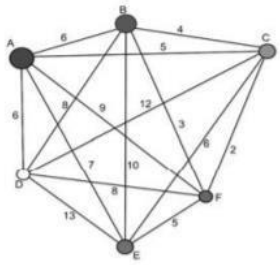
ENEM 2009 - CÁLCULO COMBINATÓRIO	

OBS.: Não foram encontradas questões de cálculo combinatório no ano de 2009

ENEM 2010 – CÁLCULO COMBINATÓRIO

Questão 174

João mora na cidade A e precisa visitar cinco clientes, localizados em cidades diferentes da sua. Cada trajeto possível pode ser representado por uma sequência de 7 letras. Por exemplo, o trajeto ABCDEFA, informa que ele sairá da cidade A, visitando as cidades B, C, D, E e F nesta ordem, voltando para a cidade A. Além disso, o número indicado entre as letras informa o custo do deslocamento entre as cidades. A figura mostra o custo de deslocamento entre cada uma das cidades.



Como João quer economizar, ele precisa determinar qual o trajeto de menor custo para visitar os cinco clientes. Examinando a figura, percebe que precisa considerar somente parte das sequências, pois os trajetos ABCDEFA e AFEDCBA têm o mesmo custo. Ele gasta 1min30s para examinar uma sequência e descartar sua simétrica, conforme apresentado.

O tempo mínimo necessário para João verificar todas as sequências possíveis no problema é de

A 60 min.
B 90 min.
C 120 min.
D 180 min.
E 360 min.

Gabarito – B

Comentário:
As possibilidades de João efetuar as visitas são iguais a $5!/2 = 120/2 = 60$, que é o total de possibilidades descartando as simétricas. Como a questão fornece que João gasta 90 segundos (1min30) para cada sequência, logo, o tempo mínimo necessário é de 60x90 segundos=5400 segundos (90min).

ENEM 2011 - CÁLCULO COMBINATÓRIO	
QUESTÃO 167 Em um jogo disputado em uma mesa de sinuca, há 16 bolas: 1 branca e 15 coloridas, as quais, de acordo com a coloração, valem de 1 a 15 pontos (um valor para cada bola colorida). O jogador acerta o taco na bola branca de forma que esta acerte as outras, com o objetivo de acertar duas das quinze bolas em quaisquer caçapas. Os valores dessas duas bolas são somados e devem resultar em um valor escolhido pelo jogador antes do início da jogada. Arthur, Bernardo e Caio escolhem os números 12, 17 e 22 como sendo resultados de suas respectivas somas. Com essa escolha, quem tem a maior probabilidade de ganhar o jogo é **A** Arthur, pois a soma que escolheu é a menor. **B** Bernardo, pois há 7 possibilidades de compor a soma escolhida por ele, contra 4 possibilidades para a escolha de Arthur e 4 possibilidades para a escolha de Caio. **C** Bernardo, pois há 7 possibilidades de compor a soma escolhida por ele, contra 5 possibilidades para a escolha de Arthur e 4 possibilidades para a escolha de Caio. **D** Caio, pois há 10 possibilidades de compor a soma escolhida por ele, contra 5 possibilidades para a escolha de Arthur e 8 possibilidades para a escolha de Bernardo. **E** Caio, pois a soma que escolheu é a maior.	Gabarito - C Comentário: Há 5 possibilidades de compor a soma 12 que o Arthur escolheu: (1; 11), (2; 10), (3; 9), (4; 8) e (5; 7) Para a soma 17 que o Bernardo escolheu existem 7 possibilidades: (2; 15), (3; 14), (4; 13), (5; 12), (6; 11), (7; 10) e (8; 9) Para o Caio, que escolheu soma 22, existem apenas 4 possibilidades: (7; 15), (8; 14), (9; 13) e (10; 12)

ENEM 2012 - CÁLCULO COMBINATÓRIO	
QUESTÃO 136 O diretor de uma escola convidou os 280 alunos de terceiro ano a participarem de uma brincadeira. Suponha que existem 5 objetos e 6 personagens numa casa de 9 cômodos; um dos personagens esconde um dos objetos em um dos cômodos da casa. O objetivo da brincadeira é adivinhar qual objeto foi escondido por qual personagem e em qual cômodo da casa o objeto foi escondido. Todos os alunos decidiram participar. A cada vez um aluno é sorteado e dá a sua resposta. As respostas devem ser sempre distintas das anteriores, e um mesmo aluno não pode ser sorteado mais de uma vez. Se a resposta do aluno estiver correta, ele é declarado vencedor e a brincadeira é encerrada. O diretor sabe que algum aluno acertará a resposta porque há **A** 10 alunos a mais do que possíveis respostas distintas. **B** 20 alunos a mais do que possíveis respostas distintas. **C** 119 alunos a mais do que possíveis respostas distintas. **D** 260 alunos a mais do que possíveis respostas distintas. **E** 270 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.	Gabarito - A Comentário: O número total de possibilidades de uma personagem esconder um dos 5 brinquedos em um dos 9 cômodos é 6 . 5 . 9 = 270. Já que as respostas devem ser sempre diferentes, algum aluno acertou a resposta porque “há 10 alunos a mais do que possíveis respostas distintas”.

QUESTÃO 146 Um maquinista de trem ganha R$ 100,00 por viagem e só pode viajar a cada 4 dias. Ele ganha somente se fizer a viagem e sabe que estará de férias de 1º a 10 de junho, quando não poderá viajar. Sua primeira viagem ocorreu no dia primeiro de janeiro. Considere que o ano tem 365 dias. Se o maquinista quiser ganhar o máximo possível, quantas viagens precisará fazer? A) 37 B) 51 C) 88 D) 89 E) 91	Gabarito - C Comentário: Admitindo-se que cada viagem tenha duração de quatro dias e que o maquinista não pode retornar da viagem em período de férias, teremos: 1) de 1o de janeiro até 31 de maio, são 151 dias e neste período ele faz, no máximo, 37 viagens, pois 151 = 37 . 4 + 3 2) De 11 de junho até 31 de dezembro, são 204 dias e neste período ele faz, no máximo, 51 viagens, pois 204 = 51 . 4 3) No total, o número máximo de viagens é 37 + 51 = 88
QUESTÃO 173 O *designer* português Miguel Neiva criou um sistema de símbolos que permite que pessoas daltônicas identifiquem cores. O sistema consiste na utilização de símbolos que identificam as cores primárias (azul, amarelo e vermelho). Além disso, a justaposição de dois desses símbolos permite identificar cores secundárias (como o verde, que é o amarelo combinado com o azul). O preto e o branco são identificados por pequenos quadrados: o que simboliza o preto é cheio, enquanto o que simboliza o branco é vazio. Os símbolos que representam preto e branco também podem estar associados aos símbolos que identificam cores, significando se estas são claras ou escuras. **Folha de São Paulo**. Disponível em: www1.folha.uol.com.br. Acesso em: 18 fev. 2012 (adaptado). De acordo com o texto, quantas cores podem ser representadas pelo sistema proposto? A) 14 B) 18 C) 20 D) 21 E) 23	Gabarito - C Comentário: Primeiramente são quantificadas as cores secundárias, das 3 cores primárias devemos escolher 2, como a ordem de escolha não importa, trata-se de uma combinação. Portanto são 3 primárias e 3 secundárias, 6 no total. Sendo que cada uma destas 6 pode estar no seu tom original, claro ou escuro, totalizando 6 x 3 = 18 possibilidades. Ainda devem ser contabilizadas as cores: preto e branco. Finalizando em 20 cores.
QUESTÃO 174 José, Paulo e Antônio estão jogando dados não viciados, nos quais, em cada uma das seis faces, há um número de 1 a 6. Cada um deles jogará dois dados simultaneamente. José acredita que, após jogar seus dados, os números das faces voltadas para cima lhe darão uma soma igual a 7. Já Paulo acredita que sua soma será igual a 4 e Antônio acredita que sua soma será igual a 8. Com essa escolha, quem tem a maior probabilidade de acertar sua respectiva soma é A) Antônio, já que sua soma é a maior de todas as escolhidas. B) José e Antônio, já que há 6 possibilidades tanto para a escolha de José quanto para a escolha de Antônio, e há apenas 4 possibilidades para a escolha de Paulo. C) José e Antônio, já que há 3 possibilidades tanto para a escolha de José quanto para a escolha de Antônio, e há apenas 2 possibilidades para a escolha de Paulo. D) José, já que há 6 possibilidades para formar sua soma, 5 possibilidades para formar a soma de Antônio e apenas 3 possibilidades para formar a soma de Paulo. E) Paulo, já que sua soma é a menor de todas.	Gabarito - D Comentário: Paulo: Para somar 4 temos as seguintes 3 possibilidades: (1; 3), (2; 2) e (3; 1). João: Para somar 7 temos as seguintes 6 possibilidades: (1; 6), (2; 5), (3; 4), (4; 3), (5; 2) e (6; 1). Antônio: Para somar 8 temos as seguintes 5 possibilidades: (2; 6), (3; 5), (4; 4), (5; 3) e (6; 2). Quem tem a maior probabilidade de acertar sua respectiva soma é João, pois para a sua soma, tem-se 6 possibilidades.

ENEM 2013 - CÁLCULO COMBINATÓRIO

QUESTÃO 158

Um banco solicitou aos seus clientes a criação de uma senha pessoal de seis dígitos, formada somente por algarismos de 0 a 9, para acesso à conta corrente pela internet.

Entretanto, um especialista em sistemas de segurança eletrônica recomendou à direção do banco recadastrar seus usuários, solicitando, para cada um deles, a criação de uma nova senha com seis dígitos, permitindo agora o uso das 26 letras do alfabeto, além dos algarismos de 0 a 9. Nesse novo sistema, cada letra maiúscula era considerada distinta de sua versão minúscula. Além disso, era proibido o uso de outros tipos de caracteres.

Uma forma de avaliar uma alteração no sistema de senhas é a verificação do coeficiente de melhora, que é a razão do novo número de possibilidades de senhas em relação ao antigo.

O coeficiente de melhora da alteração recomendada é

(A) $\frac{62^6}{10^6}$

(B) $\frac{62!}{10!}$

(C) $\frac{62!\,4!}{10!\,56!}$

(D) $62! - 10!$

(E) $62^6 - 10^6$

Gabarito - A

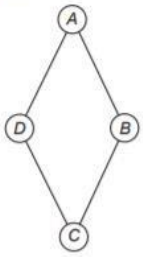
Comentário:
Antigamente, havia 10 possibilidades para cada dígito (algarismos de 0 a 9). Após a recomendação do especialista além dessas 10 possibilidades, outras 52 seriam possíveis, sendo as 26 letras minúsculas e as 26 maiúsculas do alfabeto. Sendo a senha composta por seis dígitos podendo ter repetição, pelo princípio multiplicativo, havia 106 maneiras de se criar a senha, com a nova maneira esse número passa a ser de 62^6. Portanto, a razão pedida é $62^6/10^6$.

QUESTÃO 161

Um artesão de joias tem à sua disposição pedras brasileiras de três cores: vermelhas, azuis e verdes.

Ele pretende produzir joias constituídas por uma liga metálica, a partir de um molde no formato de um losango não quadrado com pedras nos seus vértices, de modo que dois vértices consecutivos tenham sempre pedras de cores diferentes.

A figura ilustra uma joia, produzida por esse artesão, cujos vértices *A*, *B*, *C* e *D* correspondem às posições ocupadas pelas pedras.



Com base nas informações fornecidas, quantas joias diferentes, nesse formato, o artesão poderá obter?

A) 6
B) 12
C) 18
D) 24
E) 36

Gabarito - B

Comentário:

Nessa questão, existem 3 casos diferentes que devem ser analisados:

1º caso: As pedras nos vértices A e C com a mesma cor e as pedras nos vértices B e D também com a mesma cor, porém de cor diferente das pedras A e C.

3 maneiras de escolher a cor de A e C 2 maneiras de escolher a cor de B e D

Quantidade de maneiras: 3 . 2 = 6 possíveis jóias diferentes

2º. caso: As pedras nos vértices A e C com a mesma cor e as pedras nos vértices B e D com cores diferentes entre sí e diferentes de A e C.

(3 . 2)/2= 3 possíveis jóias diferentes

3º. caso: As pedras nos vértices A e C com cores diferentes e as pedras nos vértices B e D com cores diferentes das cores de A e C.

(3 . 2)/2 = 3 possíveis jóias diferentes

No total é possível se obter: 6 + 3 + 3 = **12 jóias diferentes**

QUESTÃO 176

Considere o seguinte jogo de apostas:

Numa cartela com 60 números disponíveis, um apostador escolhe de 6 a 10 números. Dentre os números disponíveis, serão sorteados apenas 6. O apostador será premiado caso os 6 números sorteados estejam entre os números escolhidos por ele numa mesma cartela.

O quadro apresenta o preço de cada cartela, de acordo com a quantidade de números escolhidos.

Quantidade de números escolhidos em uma cartela	Preço da cartela (R$)
6	2,00
7	12,00
8	40,00
9	125,00
10	250,00

Cinco apostadores, cada um com R$ 500,00 para apostar, fizeram as seguintes opções:

Arthur: 250 cartelas com 6 números escolhidos;

Bruno: 41 cartelas com 7 números escolhidos e 4 cartelas com 6 números escolhidos;

Caio: 12 cartelas com 8 números escolhidos e 10 cartelas com 6 números escolhidos;

Douglas: 4 cartelas com 9 números escolhidos;

Eduardo: 2 cartelas com 10 números escolhidos.

Os dois apostadores com maiores probabilidades de serem premiados são

(A) Caio e Eduardo.
(B) Arthur e Eduardo.
(C) Bruno e Caio.
(D) Arthur e Bruno.
(E) Douglas e Eduardo.

Gabarito - A

Comentário:

De acordo com o enunciado, temos as seguintes possibilidades ganhar o prêmio:

Arthur: $250.C_{6,6} = 250.\ 1 = 250$
Bruno: $41.\ C_{7,6} + 4.\ C_{6,6} = 41.\ 7 + 4.\ 1 = 287 + 4 = 291$
Caio: $12.\ C_{8,6} + 10.\ C_{6,6} = 12.\ 28 + 10.\ 1 = 336 + 10 = 346$
Douglas: $4.\ C_{9,6} = 4.\ 84 = 336$
Eduardo: $2.\ C_{10,6} = 2.\ 210 = 420$
Assim, os dois apostadores com maiores probabilidades de serem premiados são Eduardo com 420 possibilidades e Caio com 346 possibilidades.

ENEM 2014 – CÁLCULO COMBINATÓRIO

QUESTÃO 151

Um cliente de uma videolocadora tem o hábito de alugar dois filmes por vez. Quando os devolve, sempre pega outros dois filmes e assim sucessivamente. Ele soube que a videolocadora recebeu alguns lançamentos, sendo 8 filmes de ação, 5 de comédia e 3 de drama e, por isso, estabeleceu uma estratégia para ver todos esses 16 lançamentos. Inicialmente alugará, em cada vez, um filme de ação e um de comédia. Quando se esgotarem as possibilidades de comédia, o cliente alugará um filme de ação e um de drama, até que todos os lançamentos sejam vistos e sem que nenhum filme seja repetido.

De quantas formas distintas a estratégia desse cliente poderá ser posta em prática?

A) $20 \times 8! + (3!)^2$

B) $8! \times 5! \times 3!$

C) $\frac{8! \times 5! \times 3!}{2^0}$

D) $\frac{8! \times 5! \times 3!}{2^2}$

E) $\frac{16!}{2^8}$

Gabarito - B

Comentário:

Para esse cliente alugar os 16 filmes lançamentos, vão ser necessários 8 locações, pois podemos alugar apenas 2 filmes por vez.

O número formas diferentes de alugar esse filme é dada por 8.7.6.5.4.3.2.1 = 8!

O número de formas diferentes para alugar os 5 filmes de comédia, nas 5 primeiras locações é de 5.4.3.2.1 = 5!

O número de formas diferentes para alugar os 3 filmes de drama, nas últimas 3 locações é de 3.2.1 = 3!

Logo, o número de formas distintas é de 8!.5!.3!

ENEM 2015 – CÁLCULO COMBINATÓRIO

QUESTÃO 142

Numa cidade, cinco escolas de samba (I, II, III, IV e V) participaram do desfile de Carnaval. Quatro quesitos são julgados, cada um por dois jurados, que podem atribuir somente uma dentre as notas 6, 7, 8, 9 ou 10. A campeã será a escola que obtiver maior pontuação na soma de todas as notas emitidas. Em caso de empate, a campeã será a que alcançar a maior soma das notas atribuídas pelos jurados no quesito Enredo e Harmonia. A tabela mostra as notas do desfile desse ano no momento em que faltava somente a divulgação das notas do jurado B no quesito Bateria.

Quesitos	1. Fantasia e Alegoria		2. Evolução e Conjunto		3. Enredo e Harmonia		4. Bateria		Total
Jurado	A	B	A	B	A	B	A	B	
Escola I	6	7	8	8	9	9	8		55
Escola II	9	8	10	9	10	10	10		66
Escola III	8	8	7	8	6	7	6		50
Escola IV	9	10	10	10	9	10	10		68
Escola V	8	7	9	8	6	8	8		54

Quantas configurações distintas das notas a serem atribuídas pelo jurado B no quesito Bateria tornariam campeã a Escola II?

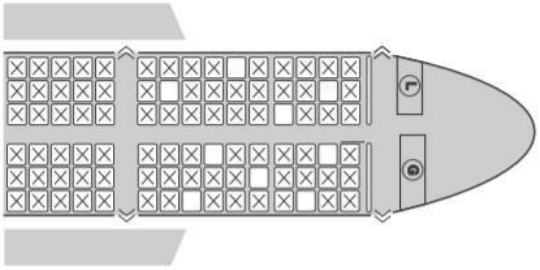
A) 21
B) 90
C) 750
D) 1 250
E) 3 125

Gabarito - C

Comentário:
Primeiro, as escolas I, III e V não podem ser campeãs, já que elas não conseguiriam ficar acima de 68 pontos. Em caso de empate, a campeã é a escola II, pois ganha no quesito enredo. A escola II é campeã em 6 casos possíveis e em cada um deles temos 5 possíveis maneiras de cada uma das outras escolas se colocarem. Assim, o número total de configurações será de 6 . 5 . 5 = 750.

QUESTÃO 170

Uma família composta por sete pessoas adultas, após decidir o itinerário de sua viagem, consultou o *site* de uma empresa aérea e constatou que o voo para a data escolhida estava quase lotado. Na figura, disponibilizada pelo *site*, as poltronas ocupadas estão marcadas com X e as únicas poltronas disponíveis são as mostradas em branco.



Disponível em: www.gebh.net. Acesso em: 30 out. 2013 (adaptado).

O número de formas distintas de se acomodar a família nesse voo é calculado por

A) $\frac{9!}{2!}$

B) $\frac{9!}{7! \times 2!}$

C) $7!$

D) $\frac{5!}{2!} \times 4!$

E) $\frac{5!}{4!} \times \frac{4!}{3!}$

Gabarito - A

Comentário:
Para encontrar o número de maneiras de se escolher 7 lugares em 9 possíveis é dado por: $C^9_7 = 9!/7!.2!$

Para cada uma das maneiras possíveis, podemos permutar as pessoas que ocuparão esses 7 lugares, então, temos que o número de maneiras será de:
$7!.9!/7!.2! = 9!/2!$

ENEM 2016 - CÁLCULO COMBINATÓRIO

QUESTÃO 153

Para cadastrar-se em um *site*, uma pessoa precisa escolher uma senha composta por quatro caracteres, sendo dois algarismos e duas letras (maiúsculas ou minúsculas). As letras e os algarismos podem estar em qualquer posição. Essa pessoa sabe que o alfabeto é composto por vinte e seis letras e que uma letra maiúscula difere da minúscula em uma senha.

Disponível em: www.infowester.com. Acesso em: 14 dez. 2012.

O número total de senhas possíveis para o cadastramento nesse *site* é dado por

A $10^2 \cdot 26^2$

B $10^2 \cdot 52^2$

C $10^2 \cdot 52^2 \cdot \frac{4!}{2!}$

D $10^2 \cdot 26^2 \cdot \frac{4!}{2! \cdot 2!}$

E $10^2 \cdot 52^2 \cdot \frac{4!}{2! \cdot 2!}$

Gabarito - E

Comentário:
Total de senhas = 10 . 10 . 52 . 52 . 4! / 2!.2! = $10^2.52^2$. 4! / 2!.2!

QUESTÃO 157

O tênis é um esporte em que a estratégia de jogo a ser adotada depende, entre outros fatores, de o adversário ser canhoto ou destro.

Um clube tem um grupo de 10 tenistas, sendo que 4 são canhotos e 6 são destros. O técnico do clube deseja realizar uma partida de exibição entre dois desses jogadores, porém, não poderão ser ambos canhotos.

Qual o número de possibilidades de escolha dos tenistas para a partida de exibição?

A $\frac{10!}{2! \times 8!} - \frac{4!}{2! \times 2!}$

B $\frac{10!}{8!} - \frac{4!}{2!}$

C $\frac{10!}{2! \times 8!} - 2$

D $\frac{6!}{4!} + 4 \times 4$

E $\frac{6!}{4!} + 6 \times 4$

Gabarito - A

Comentário:
O número de possibilidades de escolher dois tenistas com a condição de que ambos não possam ser canhotos é dado pelo total de maneiras de se escolher dois jogadores dentre os dez possíveis menos o total de maneiras de se escolher dois jogadores dentre os quatro canhotos.

ENEM 2017 – CÁLCULO COMBINATÓRIO

QUESTÃO 140

Uma empresa construirá sua página na internet e espera atrair um público de aproximadamente um milhão de clientes. Para acessar essa página, será necessária uma senha com formato a ser definido pela empresa. Existem cinco opções de formato oferecidas pelo programador, descritas no quadro, em que "L" e "D" representam, respectivamente, letra maiúscula e dígito.

Opção	Formato
I	LDDDDD
II	DDDDDD
III	LLDDDD
IV	DDDDD
V	LLLDD

As letras do alfabeto, entre as 26 possíveis, bem como os dígitos, entre os 10 possíveis, podem se repetir em qualquer das opções.

A empresa quer escolher uma opção de formato cujo número de senhas distintas possíveis seja superior ao número esperado de clientes, mas que esse número não seja superior ao dobro do número esperado de clientes.

A opção que mais se adequa às condições da empresa é

A) I.
B) II.
C) III.
D) IV.
E) V.

Gabarito - E

Comentário:
O número de senhas para cada modelo de senha é:
I - 26.10.10.10.10.10 = 26 . 10^5
II - 10.10.10.10.10.10 = 10^6
III - 26.26.10.10.10.10 = 26^2.10^4
IV - 10.10.10.10.10 = 10^5
V - 26.26.26.10.10 = 26^3.10^2
Calculando cada valor o que se enquadra nas restrições feitas é a opção V.

QUESTÃO 141

Como não são adeptos da prática de esportes, um grupo de amigos resolveu fazer um torneio de futebol utilizando *videogame*. Decidiram que cada jogador joga uma única vez com cada um dos outros jogadores. O campeão será aquele que conseguir o maior número de pontos. Observaram que o número de partidas jogadas depende do número de jogadores, como mostra o quadro:

Quantidade de jogadores	2	3	4	5	6	7
Número de partidas	1	3	6	10	15	21

Se a quantidade de jogadores for 8, quantas partidas serão realizadas?

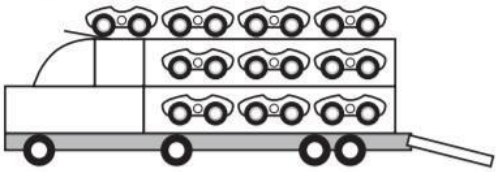
A) 64
B) 56
C) 49
D) 36
E) 28

Gabarito - E

Comentário:
Para criar uma partida precisamos selecionar 2 jogadores entre 8 possíveis. Como a ordem de seleção dos jogadores não alteram a partida formada usaremos a combinação: C8,2 = 28.

QUESTÃO 149

Um brinquedo infantil caminhão-cegonha é formado por uma carreta e dez carrinhos nela transportados, conforme a figura.



No setor de produção da empresa que fabrica esse brinquedo, é feita a pintura de todos os carrinhos para que o aspecto do brinquedo fique mais atraente. São utilizadas as cores amarelo, branco, laranja e verde, e cada carrinho é pintado apenas com uma cor. O caminhão-cegonha tem uma cor fixa. A empresa determinou que em todo caminhão-cegonha deve haver pelo menos um carrinho de cada uma das quatro cores disponíveis. Mudança de posição dos carrinhos no caminhão-cegonha não gera um novo modelo do brinquedo.

Com base nessas informações, quantos são os modelos distintos do brinquedo caminhão-cegonha que essa empresa poderá produzir?

A $C_{6,4}$

B $C_{9,3}$

C $C_{10,4}$

D 6^4

E 4^6

Gabarito - B

Comentário:
Como todo caminhão cegonha deve ter pelo menos 1 carrinho de cada cor, é necessário colorir os 6 carrinhos restantes com as cores disponíveis. Isso pode ser feito de:
9!/(6!3!) = C9,3

QUESTÃO 166

Uma bicicleta do tipo *mountain bike* tem uma coroa com 3 engrenagens e uma catraca com 6 engrenagens, que, combinadas entre si, determinam 18 marchas (número de engrenagens da coroa vezes o número de engrenagens da catraca).

Os números de dentes das engrenagens das coroas e das catracas dessa bicicleta estão listados no quadro.

Engrenagens	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª
Nº de dentes da coroa	46	36	26	-	-	-
Nº de dentes da catraca	24	22	20	18	16	14

Sabe-se que o número de voltas efetuadas pela roda traseira a cada pedalada é calculado dividindo-se a quantidade de dentes da coroa pela quantidade de dentes da catraca.

Durante um passeio em uma bicicleta desse tipo, deseja-se fazer um percurso o mais devagar possível, escolhendo, para isso, uma das seguintes combinações de engrenagens (coroa x catraca):

I	II	III	IV	V
$1^a \times 1^a$	$1^a \times 6^a$	$2^a \times 4^a$	$3^a \times 1^a$	$3^a \times 6^a$

A combinação escolhida para realizar esse passeio da forma desejada é

A) I.
B) II.
C) III.
D) IV.
E) V.

Gabarito – D

Comentário:
Devemos buscar a menor razão. Logo a IV que é 26/24=1,08 é o valor procurado

QUESTÃO 167

O comitê organizador da Copa do Mundo 2014 criou a logomarca da Copa, composta de uma figura plana e o *slogan* "Juntos num só ritmo", com mãos que se unem formando a taça Fifa. Considere que o comitê organizador resolvesse utilizar todas as cores da bandeira nacional (verde, amarelo, azul e branco) para colorir a logomarca, de forma que regiões vizinhas tenham cores diferentes.

JUNTOS NUM SÓ RITMO

Disponível em: www.pt.fifa.com. Acesso em: 19 nov. 2013 (adaptado).

De quantas maneiras diferentes o comitê organizador da Copa poderia pintar a logomarca com as cores citadas?

A) 15
B) 30
C) 108
D) 360
E) 972

Gabarito – E

Comentário:
Sejam A, B, C, D, E e F as 6 regiões da logomarca, como mostrado na figura.
O número de colorações possíveis, com no máximo 4 cores, é $4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 972$;
com exatamente 3 cores é :
$C(4,3) \times 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 384$
com exatamente 2 cores:
$C(4,2) \times 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 12$
e, com uma cor, é impossível.
Pelo Princípio da Inclusão-Exclusão, o número de maneiras de pintar usando todas as
cores é
$972 - 384 + 12 = 600$
Observação: no enunciado, caso o comitê resolvesse utilizar no máximo as quatro cores da bandeira nacional, a alternativa correta seria a E, $4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 972$.

ENEM 2018 – CÁLCULO COMBINATÓRIO

QUESTÃO 149

Torneios de tênis, em geral, são disputados em sistema de eliminatória simples. Nesse sistema, são disputadas partidas entre dois competidores, com a eliminação do perdedor e promoção do vencedor para a fase seguinte. Dessa forma, se na 1ª fase o torneio conta com $2n$ competidores, então na 2ª fase restarão n competidores, e assim sucessivamente até a partida final.

Em um torneio de tênis, disputado nesse sistema, participam 128 tenistas.

Para se definir o campeão desse torneio, o número de partidas necessárias é dado por

A) 2×128
B) $64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2$
C) $128 + 64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1$
D) $128 + 64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2$
E) $64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1$

Gabarito - E

Comentário:

Podemos montar a seguinte tabela:

JOGADORES	128	64	32	16	8	4	2
PARTIDAS	64	32	16	8	4	2	1

Ou seja, temos um total de $64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1$ partidas.

QUESTÃO 161

O Salão do Automóvel de São Paulo é um evento no qual vários fabricantes expõem seus modelos mais recentes de veículos, mostrando, principalmente, suas inovações em *design* e tecnologia.

Disponível em: http://g1.globo.com. Acesso em: 4 fev. 2015 (adaptado).

Uma montadora pretende participar desse evento com dois estandes, um na entrada e outro na região central do salão, expondo, em cada um deles, um carro compacto e uma caminhonete.

Para compor os estandes, foram disponibilizados pela montadora quatro carros compactos, de modelos distintos, e seis caminhonetes de diferentes cores para serem escolhidos aqueles que serão expostos. A posição dos carros dentro de cada estande é irrelevante.

Uma expressão que fornece a quantidade de maneiras diferentes que os estandes podem ser compostos é

A) A_{10}^4
B) C_{10}^4
C) $C_4^2 \times C_6^2 \times 2 \times 2$
D) $A_4^2 \times A_6^2 \times 2 \times 2$
E) $C_4^2 \times C_6^2$

Gabarito - C

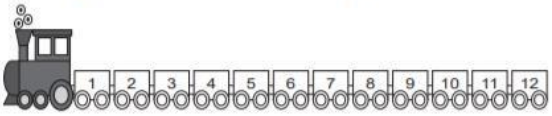
Comentário:

Temos que escolher 2 carros em um total de 4. Ou seja $C_{4,2}$. Agora, precisamos escolher 2 caminhões em um total de 6, ou seja, $C_{6,2}$. Por fim, existem duas formas de colocarmos o caminhões que são entrada e centro e duas formas de colocarmos os carros, também entrada e centro. Ou seja, $C_{4,2} \times C_{6,2} \times 2 \times 2$

ENEM 2019 – CÁLCULO COMBINATÓRIO

Questão 137

Uma empresa confecciona e comercializa um brinquedo formado por uma locomotiva, pintada na cor preta, mais 12 vagões de iguais formato e tamanho, numerados de 1 a 12. Dos 12 vagões, 4 são pintados na cor vermelha, 3 na cor azul, 3 na cor verde e 2 na cor amarela. O trem é montado utilizando-se uma locomotiva e 12 vagões, ordenados crescentemente segundo suas numerações, conforme ilustrado na figura.



De acordo com as possíveis variações nas colorações dos vagões, a quantidade de trens que podem ser montados, expressa por meio de combinações, é dada por

A) $C_{12}^4 \times C_{12}^3 \times C_{12}^3 \times C_{12}^2$
B) $C_{12}^4 + C_8^3 + C_5^3 + C_2^2$
C) $C_{12}^4 \times 2 \times C_8^3 \times C_5^2$
D) $C_{12}^4 + 2 \times C_{12}^3 + C_{12}^2$
E) $C_{12}^4 \times C_8^3 \times C_5^3 \times C_2^2$

Gabarito - E

Comentário:

1) Escolhemos 4 vagões para serem pintados de vermelho C_{12}^4
2) Escolhemos 3 vagões para serem pintados de azul C_8^3
3) Escolhemos 3 vagões para serem pintados de verde C_5^3
4) Escolhemos 2 vagões para serem pintados de azul C_2^2

Questão 160

Durante suas férias, oito amigos, dos quais dois são canhotos, decidem realizar um torneio de vôlei de praia. Eles precisam formar quatro duplas para a realização do torneio. Nenhuma dupla pode ser formada por dois jogadores canhotos.

De quantas maneiras diferentes podem ser formadas essas quatro duplas?

A) 69
B) 70
C) 90
D) 104
E) 105

Gabarito - C

Comentário:

Devemos considerar inicialmente para a formação de 4 duplas distintas as possíveis combinações: $\frac{C_{8,2}.C_{6,2}.C_{4,2}.C_{2,2}}{4!}$ (devemos dividir por 4! pois para posicionar as duplas, a ordem não importa). Devemos agora descontar o caso onde uma das duplas é canhota e calcular as outras combinações $\frac{1.C_{6,2}.C_{4,2}.C_{2,2}}{3!}$. Logo a solução é dada por:

$$\frac{C_{8,2}.C_{6,2}.C_{4,2}.C_{2,2}}{4!} - \frac{1.C_{6,2}.C_{4,2}.C_{2,2}}{3!}$$

$105 - 15 = 90$

Anexo B

Habilidades em Matemática e suas tecnologias segundo o Currículo Básico Comum de Minas Gerais

ANEXO B: HABILIDADES DA MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS – Conforme CBC- MG

Competência 1 : Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.

Quadro 1 - Habilidades da Matemática e suas Tecnologias - Competência 1

HABILIDADES	UNIDADE TEMÁTICA	OBJETO DE CONHECIMENTO
(EM13MAT104) Interpretar taxas e índices de natureza socioeconômica (índice de desenvolvimento humano, taxas de inflação, entre outros), investigando os processos de cálculo desses números, para analisar criticamente a realidade e produzir argumentos.	NÚMEROS E ÁLGEBRA	● **Estatística: pesquisa e organização de dados.** ● **Porcentagens: cálculo de índices, taxas e coeficientes.** ● **Estatística: interpretação de gráficos, medidas de tendência central e medidas de dispersão.**
(EM13MAT101) Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais.	NÚMEROS E ÁLGEBRA	● Funções: interpretação de gráficos e de expressões algébricas. ● Sistemas e unidades de medida: leitura e conversão de unidades de grandezas diversas. ● Variação de grandezas, como velocidade, concentração, taxas de crescimento ou decrescimento de populações, índices econômicos etc. ● Estatística: gráficos (e infográficos), medidas de tendência central e de dispersão.
(EM13MAT103) Interpretar e compreender textos científicos ou divulgados pelas mídias, que empregam unidades de medida de diferentes grandezas e as conversões possíveis entre elas, adotadas ou não pelo Sistema Internacional (SI), como as de armazenamento e velocidade de transferência de dados, ligadas aos avanços tecnológicos.	GEOMETRIA E MEDIDAS	● Funções: representação gráfica e algébrica. ● Sistema Internacional de Medidas: principais unidades e conversões. ● Bases de sistemas de contagem (base decimal, base binária, base sexagesimal etc.). ● Principais unidades de armazenamento de dados na informática (bit, byte, kilobyte, megabyte, gigabyte etc.) e transferência de dados (Mbps, Kbps, Gbps etc.).
(EM13MAT105) Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras).	GEOMETRIA E MEDIDAS	● Geometria das Transformações: isometrias (reflexão, translação e rotação) e homotetias (ampliação e redução). ● Noções de geometria dos fractais.

(EM13MAT102) Analisar tabelas, gráficos e amostras de pesquisas estatísticas apresentadas em relatórios divulgados por diferentes meios de comunicação, identificando, quando for o caso, inadequações que possam induzir a erros	PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA	**Funções: interpretação de gráficos e de expressões algébricas. ● Sistemas e unidades de medida: leitura e conversão de unidades de grandezas diversas. interpretação, como escalas e amostras não apropriadas. ● Variação de grandezas, como velocidade, concentração, taxas de crescimento ou decrescimento de populações, índices econômicos etc. ● Estatística: gráficos (e infográficos), medidas de tendência central e de dispersão.**
(EM13MAT106) Identificar situações da vida cotidiana nas quais seja necessário fazer escolhas levando-se em conta os riscos probabilísticos (usar este ou aquele método contraceptivo, optar por um tratamento médico em detrimento de outro etc.).	PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA	**● Porcentagem: cálculo de taxas, índices e coeficientes. ● Probabilidade simples e condicional. ● Eventos sucessivos, mutuamente exclusivos e não mutuamente exclusivos. ● Estatística: distribuição estatística, distribuição normal e medidas de posição (mediana, quartis, decis e percentis).**

Competência 2: Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.

Quadro 2 - Habilidades da Matemática e suas Tecnologias - Competência 2

HABILIDADES	UNIDADE TEMÁTICA	OBJETO DE CONHECIMENTO
(EM13MAT203) Aplicar conceitos matemáticos no planejamento, na execução e na análise de ações envolvendo a utilização de aplicativos e a criação de planilhas (para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros simples e compostos, entre outros), para tomar decisões.	NÚMEROS E ÁLGEBRA	● Cálculos envolvendo porcentagens. ● Conceitos de matemática financeira (juros simples, compostos, taxas de juros etc.). ● Alguns sistemas de amortização e noções de fluxo de caixa. ● Funções: exponenciais e logarítmicas.
(EM13MAT201) Propor ou participar de ações adequadas às demandas da região, preferencialmente para sua comunidade, envolvendo medições e cálculos de perímetro, de área, de volume, de capacidade ou de massa.	GEOMETRIA E MEDIDAS	● Conceitos e procedimentos de geometria métrica. ● Sistema métrico decimal e unidades não convencionais. ● Funções, fórmulas e expressões algébricas.
(EM13MAT202A): Planejar e executar pesquisa amostral sobre questões relevantes, usando dados coletados diretamente ou em diferentes fontes.	PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA	**● Conceitos simples de Estatística Descritiva. ● Medidas de tendência central (média, moda e mediana).**

		● Medidas de dispersão (amplitude, desvio padrão e coeficiente de variância).
(EM13MAT202B): Comunicar os resultados de pesquisas por meio de relatório contendo gráficos e interpretação das medidas de tendência central e das medidas de dispersão (amplitude e desvio padrão), utilizando ou não recursos tecnológicos.	PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA	**● Gráficos estatísticos (histogramas e polígonos de frequência). ● Distribuição normal.**

Competência 3: Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

Quadro 3 - Habilidades da Matemática e suas Tecnologias - Competência 3

HABILIDADES	UNIDADE TEMÁTICA	OBJETO DE CONHECIMENTO
(EM13MAT302A): Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.	NÚMEROS E ÁLGEBRA	● Conceitos de Matemática Financeira. Juros simples ● Funções e gráficos de função de 1º grau.
(EM13MAT302B): Construir modelos empregando as funções polinomiais de 2º, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.	NÚMEROS E ÁLGEBRA	● Conceitos de Matemática Financeira. Juros compostos ● Funções e gráficos de função de 2º grau e exponencial.
(EM13MAT303) Interpretar e comparar situações que envolvam juros simples com as que envolvem juros compostos, por meio de representações gráficas ou análise de planilhas, destacando o crescimento linear ou exponencial de cada caso.	NÚMEROS E ÁLGEBRA	● Conceitos de Matemática Financeira. Juros simples e juros compostos. ● Funções e gráficos de funções de 1º grau e exponencial.
(EM13MAT304) Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros.	NÚMEROS E ÁLGEBRA	● Funções exponenciais. Variação exponencial entre grandezas ● Noções de Matemática Financeira.
(EM13MAT305) Resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como os de abalos sísmicos, pH, radioatividade, Matemática Financeira, entre outros.	NÚMEROS E ÁLGEBRA	● Logaritmo (decimal e natural). Função logarítmica ● Variação entre grandezas: relação entre variação exponencial e logarítmica.
(EM13MAT306) Resolver e elaborar	NÚMEROS E	● Trigonometria no triângulo

problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria.	ÁLGEBRA	retângulo (principais razões trigonométricas). ● Trigonometria no ciclo trigonométrico Unidades de medidas de ângulos (radianos) ● Funções trigonométricas (função seno e função cosseno).
(EM13MAT301) Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.	NÚMEROS E ÁLGEBRA	● Sistemas de equações lineares. Gráficos de funções lineares com uma ou duas variáveis.
(EM13MAT315) Investigar e registrar, por meio de um fluxograma, quando possível, um algoritmo que resolve um problema.	NÚMEROS E ÁLGEBRA	● Noções básicas de Matemática Computacional. Algoritmos e sua representação por fluxogramas.
(EM13MAT307A): Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.).	GEOMETRIA E MEDIDAS	● Áreas de figuras geométricas (cálculo por decomposição, composição ou aproximação).
(EM13MAT307B): Deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais (como o remanejamento e a distribuição de plantações, entre outros), com ou sem apoio de tecnologias digitais.	GEOMETRIA E MEDIDAS	● Áreas de figuras geométricas (cálculo por decomposição, composição ou aproximação). Expressões algébricas.
(EM13MAT309A): Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais (como o cálculo do gasto de material para revestimento ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados), com ou sem apoio de tecnologias digitais.	GEOMETRIA E MEDIDAS	● Geometria Métrica: poliedros e corpos redondos. Área total de prismas, pirâmides e corpos redondos.
(EM13MAT309B): Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais (como o cálculo da capacidade de uma caixa d'água em diferentes formatos), com ou sem apoio de tecnologias digitais.	GEOMETRIA E MEDIDAS	● Geometria Métrica: poliedros e corpos redondos. Volume de prismas, pirâmides e corpos redondos.
(EM13MAT313). Utilizar, quando necessário, a notação científica para expressar uma medida, compreendendo as noções de algarismos significativos e algarismos duvidosos, e reconhecendo que toda medida é inevitavelmente acompanhada de erro.	GEOMETRIA E MEDIDAS	● Notação científica. Algarismos significativos e técnicas de arredondamento ● Estimativa e comparação de valores em notação científica e em arredondamentos. ● Noção de erro em medições.

(EM13MAT314). Resolver e elaborar problemas que envolvem grandezas determinadas pela razão ou pelo produto de outras (velocidade, densidade demográfica, energia elétrica etc.).	GEOMETRIA E MEDIDAS	● Grandezas determinadas pela razão ou produto de outras (velocidade, densidade de um corpo, densidade demográfica, potência elétrica, bytes por segundo etc.). Conversão entre unidades compostas.
(EM13MAT310). Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore.	PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA	● **Noções de combinatória: agrupamentos ordenáveis (arranjos) e não ordenáveis (combinações). Princípio multiplicativo e princípio aditivo ● Modelos para contagem de dados: diagrama de árvore, listas, esquemas, desenhos etc.**
(EM13MAT311A): Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades.	PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA	● **Noções de probabilidade básica: espaço amostral, evento aleatório (equiprovável). Contagem de possibilidades.**
(EM13MAT311B): Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade.	PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA	● **Contagem de possibilidades. Cálculo de probabilidades simples.**
(EM13MAT312). Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos.	PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA	● **Eventos dependentes e independentes. Cálculo de probabilidade de eventos relativos a experimentos aleatórios sucessivos.**
(EM13MAT316). Resolver e elaborar problemas, em diferentes contextos, que envolvem cálculo e interpretação das medidas de tendência central (média, moda, mediana) e das medidas de dispersão (amplitude, variância e desvio padrão).	PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA	● **Noções de estatística descritiva. ● Medidas de tendência central: média, moda e mediana. ● Medidas de dispersão: amplitude, variância e desvio-padrão**.

Competência 4: Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.

Quadro 4 - Habilidades da Matemática e suas Tecnologias - Competência 4

HABILIDADES	UNIDADE TEMÁTICA	OBJETO DE CONHECIMENTO
(EM13MAT401) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o	NÚMEROS E ÁLGEBRA	● Funções afins, lineares, constantes. ● Gráficos de funções a partir de transformações no plano ●

comportamento é proporcional, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica.		Proporcionalidade estudo do crescimento e variação de funções. ● Estudo da variação de funções polinomiais de 1º grau: crescimento, decrescimento, taxa de variação da função.
(EM13MAT402) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica, entre outros materiais.	NÚMEROS E ÁLGEBRA	● Funções polinomiais de 2º grau. ● Gráficos de funções a partir de transformações no plano ● Estudo do comportamento da função quadrática (intervalos de crescimento/decrescimento, ponto de máximo/mínimo e variação da função).
(EM13MAT403A): Analisar, com ou sem apoio de tecnologias digitais, as representações de funções exponencial e logarítmica expressas em tabelas e em plano cartesiano, para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) de cada função.	NÚMEROS E ÁLGEBRA	● Funções: exponencial e logarítmica. ● Gráfico de funções a partir de transformações no plano ● Estudo do crescimento e análise do comportamento das funções exponencial e logarítmica em intervalos numéricos.
(EM13MAT403B): Estabelecer relações, com ou sem apoio de tecnologias digitais, entre as representações de funções exponencial e logarítmica expressas em tabelas e em plano cartesiano.	NÚMEROS E ÁLGEBRA	● Gráfico de funções a partir de transformações no plano. Estudo do crescimento e análise do comportamento das funções exponencial e logarítmica em intervalos numéricos.
(EM13MAT404) Analisar funções definidas por uma ou mais sentenças (tabela do Imposto de Renda, contas de luz, água, gás etc.), em suas representações algébrica e gráfica, identificando domínios de validade, imagem, crescimento e decrescimento, e convertendo essas representações de uma para outra, com ou sem apoio de tecnologias digitais.	NÚMEROS E ÁLGEBRA	● Funções definidas por partes. Gráficos de funções expressas por diversas sentenças. ● Análise do comportamento de funções em intervalos numéricos.
(EM13MAT405) Utilizar conceitos iniciais de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática.	NÚMEROS E ÁLGEBRA	● Noções elementares de matemática computacional: sequências, laços de repetição, variável e condicionais. ● Algoritmos: modelagem de problemas e de soluções. ● Linguagem da programação: fluxogramas.
(EM13MAT406). Construir e interpretar tabelas e gráficos de frequências com base	PROBABILIDADE E	● **Amostragem. Gráficos e diagramas estatísticos:**

em dados obtidos em pesquisas por amostras estatísticas, incluindo ou não o uso de softwares que interrelacionem estatística, geometria e álgebra.	ESTATÍSTICA	**histogramas, polígonos de frequências. ● Medidas de tendência central e medidas de dispersão.**
(EM13MAT407). Interpretar e comparar conjuntos de dados estatísticos por meio de diferentes diagramas e gráficos (histograma, de caixa (box-plot), de ramos e folhas, entre outros), reconhecendo os mais eficientes para sua análise.	PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA	**● Gráficos e diagramas estatísticos: histogramas, polígonos de frequências, diagrama de caixa, ramos e folhas etc. ● Medidas de tendência central e medidas de dispersão.**

Competência 5: Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

Quadro 5 - Habilidades da Matemática e suas Tecnologias - Competência 5

HABILIDADES	UNIDADE TEMÁTICA	OBJETO DE CONHECIMENTO
(EM13MAT510). Investigar conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas, usando ou não tecnologias da informação, e, quando apropriado, levar em conta a variação e utilizar uma reta para descrever a relação observada.	NÚMEROS E ÁLGEBRA	● Funções polinomiais do 1º grau (função afim, linear e constante). Gráficos de funções. ● Taxa de variação de uma função (crescimento/decrescimento). ● Razões trigonométricas: tangente de um ângulo. ● Equação da reta: coeficiente angular.
(EM13MAT501). Investigar relações entre números expressos em tabelas para representa-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau.	NÚMEROS E ÁLGEBRA	● Funções polinomiais do 1º grau (função afim, função linear, função constante, função identidade). Gráficos de funções. ● Taxa de variação de funções polinomiais do 1º grau.
(EM13MAT502). Investigar relações entre números expressos em tabelas para representálos no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 2º grau do tipo y = ax2.	NÚMEROS E ÁLGEBRA	● Funções polinomiais do 2º grau (função quadrática): gráfico, raízes, pontos de máximo/mínimo, crescimento/decrescimento, concavidade. Gráficos de funções.
(EM13MAT503). Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos envolvendo	NÚMEROS E ÁLGEBRA	● Funções polinomiais do 2º grau (função quadrática). Gráficos de funções. ● Pontos

superfícies, Matemática Financeira ou Cinemática, entre outros, com apoio de tecnologias digitais.		críticos de uma função quadrática: concavidade, pontos de máximo ou de mínimo.
(EM13MAT507). Identificar e associar progressões aritméticas (PA) a funções afins de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.	NÚMEROS E ÁLGEBRA	● Funções afins. Sequências numéricas: progressões aritméticas (P.A.).
(EM13MAT508). Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas	NÚMEROS E ÁLGEBRA	● Função exponencial. Sequências numéricas: progressões geométricas (P.G.).
(EM13MAT504). Investigar processos de obtenção da medida do volume de prismas, pirâmides, cilindros e cones, incluindo o princípio de Cavalieri, para a obtenção das fórmulas de cálculo da medida do volume dessas figuras.	GEOMETRIA E MEDIDAS	● Sólidos geométricos (prismas, pirâmides, cilindros e cones). Cálculo de volume de sólidos geométricos.
(EM13MAT505). Resolver problemas sobre ladrilhamento do plano, com ou sem apoio de aplicativos de geometria dinâmica, para conjecturar a respeito dos tipos ou composição de polígonos que podem ser utilizados em ladrilhamento, generalizando padrões observados.	GEOMETRIA E MEDIDAS	● Polígonos regulares e suas características: ângulos internos, ângulos externos etc. ● Pavimentações no plano (usando o mesmo tipo de polígono ou não). Linguagem algébrica: fórmulas e habilidade de generalização.
(EM13MAT506). Representar graficamente a variação da área e do perímetro de um polígono regular quando os comprimentos de seus lados variam, analisando e classificando as funções envolvidas.	GEOMETRIA E MEDIDAS	● Polígonos regulares (perímetro e área). Funções (linear e quadrática).
(EM13MAT509). Investigar a deformação de ângulos e áreas provocada pelas diferentes projeções usadas em cartografia (como a cilíndrica e a cônica), com ou sem suporte de tecnologia digital.	GEOMETRIA E MEDIDAS	● Transformações geométricas (isometrias e homotetias). Posição de figuras geométricas (tangente, secante, externa). ● Inscrição e circunscrição de sólidos geométricos. ● Noções básicas de cartografia (projeção cilíndrica e cônica).
(EM13MAT511A). Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, e de eventos, equiprováveis ou não.	PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA	**● Espaços amostrais discretos ou contínuos. Eventos equiprováveis ou não equiprováveis.**
(EM13MAT511B): Investigar implicações de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, e de eventos, equiprováveis ou não no cálculo de probabilidades.	PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA	**● Probabilidade. Espaços amostrais discretos ou contínuos. ● Eventos equiprováveis ou não equiprováveis.**

Anexo C

Tabela de estruturação das questões em tópicos e formas de abordagem CONFORME CBC - MG

Anexo C: Estruturação das questões em tópicos e formas de abordagem CONFORME CBC - MG

MG

HABILIDADE	OBJETO DO CONHECIMENTO	UNIDADE TEMÁTICA	ANO	QUESTÃO
(EM13MAT101)	● Funções: interpretação de gráficos e deexpressões algébricas. ● Sistemas e unidades de medida: leitura e conversão de unidades de grandezas diversas. ● Variação de grandezas, como velocidade,concentração, taxas de crescimento ou decrescimento de populações, índices econômicos etc. ● Estatística: gráficos (einfográficos), medidas de tendência central e de dispersão.	NÚMEROS E ÁLGEBRA	2009 2010 2011 2012 2013 2014 2015 2016 2017 2018 2019	139, 172
(EM13MAT102)		PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA	2009 2010 2011 2012 2013 2014 2015	148 156, 169 140,
(EM13MAT104)	Funções: interpretação de gráficos e de expressões algébricas. ● Sistemas e unidades de medida: leitura e conversãode unidades de grandezas diversas. interpretação, como escalas e amostras não apropriadas. ● Variação de grandezas, como velocidade, concentração, taxas de crescimento ou decrescimento de populações, índices econômicos etc. ● Estatística: gráficos (e infográficos), medidas de tendência central e de dispersão.	PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA	2016 2017 2018 2019 2009 2010 2011 2012 2013 2014 2015 2016 2017 2018 2019	144, 148, 180 177 150, 157, 165 147, 150, 167 140, 141, 143, 145, 171, 175 148, 150, 172, 173, 176
(EM13MAT106)	Estatística: pesquisa e organização de dados. ● Porcentagens: cálculo de índices, taxas e coeficientes. ● Estatística: interpretação de gráficos, medidas de tendência	PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA	2009 2010 2011 2012 2013 2014 2015 2016	

	central e medidasde dispersão.		2017 2018 2019	
(EM13MAT202A)	Porcentagem: cálculo de taxas, índices e coeficientes. ● Probabilidade simples e condicional. ● Eventos sucessivos, mutuamente exclusivos e não mutuamente exclusivos. ● Estatística: distribuição estatística, distribuição normal e medidas de posição (mediana, quartis, decis e percentis).	PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA	2009 2010 2011 2012 2013 2014 2015 2016 2017 2018 2019	160 167 172 161 141 172, 174
(EM13MAT202B)	● Conceitos simples de Estatística Descritiva. ● Medidas de tendência central (média, moda e mediana). ● Medidas de dispersão (amplitude, desvio padrão e coeficiente de variância).	PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA	2009 2010 2011 2012 2013 2014 2015 2016 2017 2018 2019	 167
(EM13MAT310)		PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA	2009 2010 2011 2012 2013 2014 2015 2016 2017 2018 2019	171 174 176 170 153, 157 141, 149, 167 161 137, 160
(EM13MAT311A)	● Conceitos simples de Estatística Descritiva. ● Medidas de tendência central (média, moda e mediana). ● Medidas de dispersão (amplitude, desvio padrão e		2009 2010 2011	 165

	coeficiente de variância).	PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA	2012 2013 2014 2015 2016 2017 2018 2019	 155 140
(EM13MAT311B)	● Noções de combinatória: agrupamentos ordenáveis (arranjos) e não ordenáveis (combinações). Princípio multiplicativo e princípio aditivo ● Modelos para contagem de dados: diagrama de árvore, listas, esquemas, desenhos etc.	PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA	2009 2010 2011 2012 2013 2014 2015 2016 2017 2018 2019	138 156, 173 159, 166, 167 136, 138, 146, 164, 173, 174 158, 161 151 142 140, 155, 166 149, 163, 173
(EM13MAT312)	● Noções de probabilidade básica: espaço amostral, evento aleatório (equiprovável). Contagem de possibilidades.	PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA	2009 2010 2011 2012 2013 2014 2015 2016 2017 2018 2019	 141, 175 152 149, 175 147 142, 171 176 176
(EM13MAT316)	● Contagem de possibilidades. Cálculo de probabilidades simples.	PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA	2009 2010 2011 2012 2013 2014 2015 2016 2017 2018 2019	 167

	● Eventos dependentes e independentes. Cálculo de probabilidade de eventos relativos a experimentos aleatórios sucessivos. ● Noções de estatística descritiva. Medidas de tendência central: média, moda e mediana. ● Medidas de dispersão: amplitude, variância e desvio-padrão.			