UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
CURSO DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

MATTHEUS MARTINS JUCÁ

PRINCÍPIOS EM ANÁLISE COMBINATÓRIA

FORTALEZA – CEARÁ
2021

MATTHEUS MARTINS JUCÁ

PRINCÍPIOS EM ANÁLISE COMBINATÓRIA

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Programa de Pós-Graduação em Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Ensino de Matemática. Área de Concentração: Educação Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Tiago Caúla Ribeiro

Co-orientador: Prof. M.e Manoel Pereira Gomes Neto

FORTALEZA – CEARÁ
2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Estadual do Ceará
Sistema de Bibliotecas

Juca, Mattheus Martins.
Princípios em Análise Combinatória [recurso eletrônico] / Mattheus Martins Juca. - 2021.
107 f. : il.

Dissertação (MESTRADO PROFISSIONAL) - Universidade Estadual do Ceará, Centro de Ciências e Tecnologia, Curso de Mestrado Profissional Em Matemática Rede Nacional - Profissional, Fortaleza, 2021.
Orientação: Prof. Dr. Tiago Caula Ribeiro.
Coorientação: Prof. Me. Manoel Pereira Gomes Neto.

1. Análise Combinatória. 2. Teoria dos Conjuntos. 3. Ensino da Matemática. I. Título.

MATTHEUS MARTINS JUCÁ

PRINCÍPIOS EM ANÁLISE COMBINATÓRIA

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Programa de Pós-Graduação em Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Ensino de Matemática. Área de Concentração: Educação Matemática.

Aprovada em: 05 de Agosto de 2021.

BANCA EXAMINADORA

Tiago Caúla Ribeiro

Prof. Dr. Tiago Caúla Ribeiro (Orientador)
Universidade Estadual do Ceará – UECE

Claudemir Silvino Leandro

Prof. Dr. Claudemir Silvino Leandro
Universidade Estadual do Ceará – UECE

Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo
Universidade Federal do Ceará – UFC

Dedico este trabalho a quem mais me deu suporte e me apoiou durante toda a produção, minha companheira Bruna Pinheiro, e a todos os meus alunos que, muitas vezes mesmo sem saber, contribuíram significativamente com texto aqui redigido.

AGRADECIMENTOS

À minha companheira, Bruna Pinheiro, por sempre estar ao meu lado, por ter me apoiado em casa durante as várias horas de produção deste trabalho, por me amar e por acreditar nos meus sonhos.

Aos professores Dr. Tiago Caúla Ribeiro e M.e Manoel Pereira Gomes Neto pela orientação, pela confiança e pela ajuda no aperfeiçoamento do trabalho com sugestões acerca do conteúdo.

Aos membros da banca Prof. Dr. Claudemir Silvino Leandro e Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo pelas observações, questionamentos, críticas e sugestões.

Aos professores João Montenegro, Léo Ivo, Nicolas Alcântara e Francisco Noronha que lecionaram as disciplinas do curso, sem os quais eu não teria chegado aqui.

À Universidade Estadual do Ceará (UECE) e à Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) pela oportunidade de realizar o curso.

Aos colegas de curso pelos conhecimentos trocados e pela boa convivência ao longo dos dois anos de aulas.

Ao Prof. Ademar Celedônio, que foi meu primeiro incentivador para cursar o mestrado e me apresentou o Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

Aos meus demais colegas de profissão, que muito colaboram e me incentivam na jornada pelas salas de aula.

A todos os meus alunos que, muitas vezes mesmo sem saber, contribuíram significativamente para minha evolução como profissional de educação, através de suas dúvidas e observações ao longo das aulas, contribuições que estão presentes no corpo do texto aqui redigido.

"Tão correto e tão bonito, o infinito é realmente um dos deuses mais lindos”.

(Renato Russo)

RESUMO

A Análise Combinatória é uma área da Matemática com um nível de importância considerável na educação básica, tendo em vista que, hoje em dia, é a maior parte prevista para ser estudada em Álgebra ao longo do 2º Ano do Ensino Médio. Além disso, a Base Nacional Comum Curricular prevê estudo de métodos de contagem e outras técnicas de Análise Combinatória, deste o Ensino Fundamental I. Apesar de o assunto possuir um amplo espaço de tempo para ser discutido, é comum encontrar alunos e professores que o consideram o assunto mais difícil da Matemática do Ensino Médio. Levando isso em consideração, este trabalho tem como objetivo apresentar uma visão ampla do processo de ensino e aprendizagem dos princípios basilares da Análise Combinatória com diferentes abordagens e técnicas. Partindo desde os pré-requisitos e dos princípios básicos de contagem, mostrando a importância de dominá-los para que se tenha um bom entendimento sobre como proceder nos diversos problemas de Análise Combinatória, o objetivo é debater ideias relevantes que contribuam para uma boa preparação dos estudantes para exames vestibulares, inclusive as provas militares. Desta forma, espera-se contribuir para tornar o processo de ensino e de aprendizagem da Análise Combinatória mais fluído, fazendo com que esta matéria se torne mais facilmente compreendida pelos estudantes de Ensino Médio.

Palavras-chave: Análise Combinatória. Teoria dos Conjuntos. Ensino da Matemática.

ABSTRACT

Combinatorics is an area of Mathematics with a very importance to basic education, considering that, nowadays, this is the biggest part of Algebra studied during the 2nd year of high school. In addition, the National Common Curriculum Base provides for the study of counting methods and other techniques of Combinatorics since the beginning of Elementary School. Although the subject has ample time to be discussed, it is common for students and teachers to consider it the most difficult area of Mathematics in High School. Taking this into account, this work aims to present a broad view of the teaching and learning process of the basic principles of Combinatorics with different approaches and techniques. Starting from the prerequisites and the problems of basic counting principles, showing the importance of mastering them so that you have a good understanding of how to proceed in the various combinatorics problems, the goal is to debate relevant ideas that contribute to a good preparation of students for entrance exams, including military exams. In this way, it is expected to contribute with the teaching and learning process of Combinatorics, making this process more fluid and this matter more easily understood by high school students.

Keywords: Combinatorics. Set theory. Mathematics teaching.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
EN	Escola Naval
ENQ	Exame Nacional de Qualificação
EUA	Estados Unidos da América
FGV	Fundação Getúlio Vargas
IBMEC	Instituto Brasileiro de Mercado de Capitais
IFCE	Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará
ITA	Instituto Tecnológico de Aeronáutica
PE	*Pre Ecolier*
P.F.C.	Princípio Fundamental da Contagem
PROFMAT	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
RJ	Rio de Janeiro
u.c.	Unidades de comprimento
UNICAMP	Universidade Estadual de Campinas

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Ao entrar em uma sala de aula de uma turma de preparação para o vestibular e questionar aos alunos qual parte da Matemática eles apresentam maior dificuldade, é comum obter Análise Combinatória como resposta de boa parte deles.

Essa dificuldade não se limita somente aos alunos. “A Análise Combinatória tem sido frequentemente indicada por professores [...] como sendo a parte da Matemática mais difícil de ensinar.” (MORGADO *et al*; 2006, Prefácio).

“Apesar de repleta de problemas capazes de motivar os alunos, é considerada uma disciplina complicada, em que os alunos têm dificuldade de encontrar a fórmula correta para cada problema.” (MORGADO *et al*; 2006, Prefácio).

Com isso, começa a surgir um questionamento: a maneira como a Análise Combinatória é ensinada ao longo do Ensino Médio pode ser adaptada a fim de diminuir as dificuldades destes alunos?

Morgado e Carvalho (2015) apresentam diversos questionamentos ao longo de sua obra sobre o assunto. Entre eles, o fato de muitas vezes o princípio básico de contagem ser posto em segundo plano frente a fórmulas de arranjos, permutações e combinações.

“O que é Análise Combinatória ou simplesmente Combinatória? A maior parte dos alunos [...] responderia que ela é o estudo das combinações, arranjos e permutações. Isso no entanto é uma resposta parcial [...]” (MORGADO *et al*; 2006, p. 1).

Esse sentimento entre os alunos faz com que, muitas vezes, eles procurem simplesmente memorizar as fórmulas de arranjos, permutações e combinações para tentar resolver os problemas de Análise Combinatória.

Porém, esta estratégia pode se tornar um grande problema, Morgado e Carvalho (2015) destacam que, ao trocar o princípio básico de contagem pelas fórmulas, uma pessoa pode ter dificuldade de resolver até mesmo os problemas mais simples. Desta maneira, os autores enfatizam que não é interessante fazer fórmulas demais ou casos particulares demais, pois isso pode obscurecer ideias gerais e tornar o processo de aprendizagem mais complicado.

Nesse contexto, o objetivo deste trabalho é apresentar uma visão detalhada dos conceitos basilares da Análise Combinatória, destacando a importância dos princípios básicos de contagem para um bom entendimento de problemas dessa categoria.

Desse modo, o trabalho busca “[...] resolver problemas de contagem através do uso de alguns princípios fundamentais, evitando, sempre que possível, recorrer ao uso de fórmulas.” (MORGADO *et al*; 2006, Prefácio).

Todavia, é importante enfatizar que a Análise Combinatória não se limita somente a resolução de problemas de contagem. “De maneira mais geral, podemos dizer que a Análise Combinatória é a parte da Matemática que analisa estruturas e relações discretas.” (MORGADO *et al*; 2006, p. 1).

Assim sendo, no estudo também são trabalhados problemas de outras categorias, por exemplo os de demonstrar a existência, em um conjunto dado, de subconjuntos que satisfazem determinadas condições.

Com isso, através do confronto de diferentes referências bibliográficas com distintas visões sobre a temática, além da ratificação de boas práticas por diferentes autores, espera-se contribuir para tornar o processo de ensino e de aprendizagem da Análise Combinatória mais fluído, fazendo com que esta matéria se torne mais facilmente compreendida pelos estudantes de Ensino Médio.

Esta pesquisa foi dividida em seis partes, para que o leitor possa incorporar e assimilar de forma gradativa as ideias aqui contidas.

Tendo em vista que a fundamentação dos estudos algébricos em Matemática se dá através da Teoria dos Conjuntos, a primeira parte deste trabalho visa introduzir os principais conceitos associados a conjuntos e elementos, além de, ao mesmo tempo, fixar as notações que serão utilizadas nas partes posteriores.

Na segunda parte, dá-se início ao estudo da Análise Combinatória propriamente dita, através de uma ampla discussão sobre os três princípios básicos de contagem: o princípio aditivo, o princípio multiplicativo e o princípio da preferência.

Tal discussão visa apresentar a importância de estudar cada um dos princípios e de dominar o momento de utilização dos mesmos, além de debater boas práticas para uma abordagem inicial da Análise Combinatória, de modo a tornar sua compreensão mais atingível por parte dos estudantes de Ensino Médio.

A parte seguinte do trabalho visa mostrar uma ampla conexão do que foi estudado até o momento, trazendo importantes aplicações dos princípios de contagem em contextos de Teoria dos Conjuntos, trabalhando as quantificações de subconjuntos e as quantificações de n-uplas de subconjuntos sobre determinadas condições.

A quarta parte do trabalho apresentará um dos mais importantes resultados de Análise Combinatória e de Teoria dos Conjuntos: o Princípio da Inclusão e Exclusão, que é extremamente relevante na quantificação do número de elementos da união de dois ou mais conjuntos.

Buscando aprofundar o que fora apresentado na discussão anterior, a penúltima parte deste estudo apresentará duas importantes desigualdades, que são consequência do Princípio da Inclusão e Exclusão: a Desigualdade de Boole e a Desigualdade de Bonferroni.

Para cada uma das desigualdades apresentadas, serão discutidos todos os aspectos relevantes associados as mesmas, como as condições de ocorrência para igualdade, além de apresentar seus contextos de aplicação.

Por fim, visando atingir o objetivo de mostrar que a Análise Combinatória não se limita somente à contagem, a última parte do trabalho apresentará o Princípio das Gavetas de Dirichlet, mostrando suas diversas aplicações, inclusive abordando áreas diversas da Matemática, como Geometria Plana, Geometria Analítica e Teoria dos Números.

Ao longo de toda a obra, os textos teóricos serão complementados com resoluções de vários exercícios das mais diversas fontes, permitindo, assim, que os conceitos explicados sejam aplicados em nível prático e contribuindo para a preparação de estudantes para os vestibulares, inclusive para as provas militares.

2 TEORIA DOS CONJUNTOS

“Toda a Matemática atual é formulada na linguagem de conjuntos. Portanto, a noção de conjunto é a mais fundamental: a partir dela, todos os conceitos matemáticos podem ser expressos. Ela é também a mais simples das ideias matemáticas.” (LIMA, 2017, p. 2).

Como no estudo de toda e qualquer área da Matemática, é importante assegurar que os estudantes estejam em dia com todos os pré-requisitos necessários para o bom entendimento dos conceitos que serão apresentados.

Assim, destaca-se a recapitulação dos conceitos de Teoria dos Conjuntos como uma boa prática antes de iniciar o ensino da Análise Combinatória propriamente dita.

Desta forma, ao longo desta seção, serão apresentadas várias definições relativas à Teoria dos Conjuntos, que fundamentarão futuras discussões presentes neste trabalho. Tais definições podem ser encontradas em Lima (2017), Morgado *et al*; (2006) ou Iezzi e Muramaki (2004).

Intuitivamente, a ideia de **conjunto** é formada como um agrupamento, ou uma coleção, qualquer de objetos, que são os seus **elementos**. As noções de conjunto e elemento são noções primitivas em matemática (não são definidas).

2.1 Representações dos conjuntos

Por padrão, costuma-se adotar letras maiúsculas, como A, B, ..., Y, Z, para indicar conjuntos e letras minúsculas, como a, b, ..., x, y, z, para indicar os elementos destes conjuntos. A partir disso, existem três formas de representação de conjuntos que são bastante utilizadas. A seguir, descreve-se cada uma delas.

2.1.1 Listagem de elementos

Um conjunto com um número finito de elementos pode ser indicado simplesmente pela listagem de seus elementos. Tal listagem se dá entre chaves, e cada elemento é separado por uma vírgula ou por um ponto e vírgula.

Exemplo 2.1.1.1: O conjunto dos divisores positivos de 10 pode ser representado por D = {1; 2; 5; 10}.

2.1.2 Propriedades dos elementos

Pode-se, também, representar um conjunto através de uma propriedade *P*, comum a todos os seus elementos. Tal representação é feita da seguinte maneira:

$$A = \{x \mid x \text{ tem a propriedade } P\}$$

Exemplo 2.1.2.1: A = {x é um número primo / x < 10} é uma forma de representar o conjunto A = {2; 3; 5; 7}.

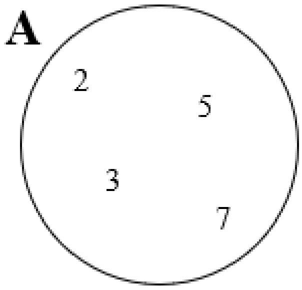
2.1.3 Diagrama de Euler-Venn

A terceira forma de representar conjuntos é listar seus elementos dentro de uma linha fechada (normalmente um círculo, um retângulo ou uma elipse). Em situações genéricas, costuma-se representar conjuntos apenas pelas regiões delimitadas pelas linhas, não havendo necessidade de listar todos os elementos.

Tal representação é conhecida por diagrama de Euler-Venn, ou simplesmente diagrama de Venn, e sua principal vantagem é a facilidade de raciocínio e interpretação associada.

Exemplo 2.1.3.1: O conjunto A = {2; 3; 5; 7} pode ser representado conforme Figura 1.

Figura 1 – Representação de um conjunto em diagrama de Euler-Venn



2.2 Relação de pertinência

A relação de pertinência se estabelece entre elementos e conjuntos. Ao tomar um conjunto *A* e um objeto qualquer *a*, o questionamento a ser realizado é se *a* é ou não elemento de *A*, de onde surgem as duas possibilidades:

i) Se *a* é um elemento de *A*, diz-se que *a* **pertence** a *A* e representa-se $a \in A$.

ii) Se *a* não é um elemento de *A*, diz-se que *a* **não pertence** a *A* e representa-se $a \notin A$.

Exemplo 2.2.1: No conjunto A = {1; 2; 3}, pode-se afirmar que $1 \in A$ e $4 \notin A$.

2.3 Cardinalidade de um conjunto finito

Dado um conjunto finito *A*, define-se sua **cardinalidade** como a quantidade de elementos distintos que pertencem a ele e representa-se por n(*A*).

Exemplo 2.3.1: No conjunto A = {1; 2; 4}, tem-se n(A) = 3.

Os conjuntos com cardinalidade um, isto é, possuem um, e somente um, elemento, são chamados de **conjuntos unitários**.

Exemplo 2.3.2: O conjunto A = {x é um número primo / x é par}, ou seja, A = {2}, possui apenas um elemento, assim n(A) = 1 e A é um conjunto unitário.

O conjunto com cardinalidade zero, isto é, não possui nenhum elemento, será chamado de **conjunto vazio** e será representado por ∅ ou por { }.

2.4 Relação de inclusão e subconjuntos

A relação de inclusão se estabelece entre dois conjuntos e será definida e estudada nos parágrafos a seguir.

2.4.1 Definições

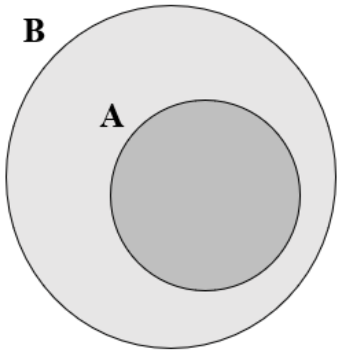
Dados dois conjuntos *A* e *B*, diz-se que *A* é um **subconjunto** de *B*, que *A* é **parte** de *B* ou que *A* **está contido** em *B* se, e somente se, todo elemento que pertence ao conjunto *A* também pertence ao conjunto *B*, indicando-se este fato por $A \subset B$.

Alternativamente, nas mesmas condições, pode-se dizer que *B* **contém** *A*. Neste caso, indica-se por $B \supset A$. Simbolicamente:

$$\mathrm{A} \subset \mathrm{B} \Leftrightarrow \mathrm{B} \supset \mathrm{A} \Leftrightarrow \forall x\ (x \in \mathrm{A} \Rightarrow x \in \mathrm{B})$$

Tal situação pode, ainda, ser representada através de diagrama de Venn, conforme Figura 2.

Figura 2 – Representação da relação de inclusão no diagrama de Venn



Exemplo 2.4.1.1: Se A = {0; 2} e B = {0; 1; 2; 3}, pode-se afirmar que $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$.

Existem algumas definições importantes que são construídas a partir da relação de inclusão. A primeira delas é o conceito de **conjuntos comparáveis**, enunciado da seguinte maneira: Dois conjuntos *A* e *B* são ditos **comparáveis** se, e somente se, $A \subset B$ ou $B \subset A$.

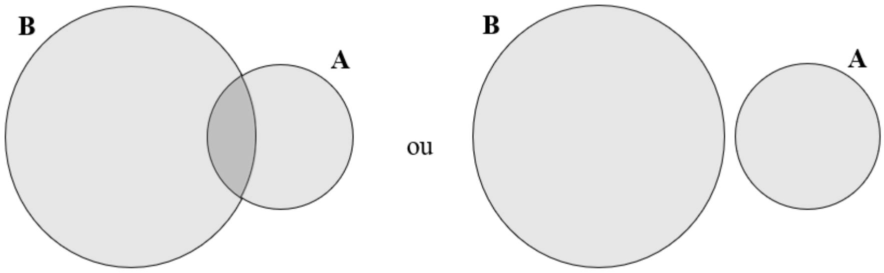
Exemplo 2.4.1.2: A = {0; 2} e B = {0; 1; 2; 3} são comparáveis, pois A ⊂ B.

Além disso, diz-se que um conjunto *A* é um **subconjunto próprio** de *B* se, e somente se, $A \subset B$ e $A \neq B$, isto é, existe pelo menos um elemento $b \in B$ tal que $b \notin A$.

Exemplo 2.4.1.3: A = {0; 2} é um subconjunto próprio de B = {0; 1; 2; 3}, basta observar que 1 ∈ B e 1 ∉ A ou que 3 ∈ B e 3 ∉ A.

Caso exista pelo menos um elemento de um conjunto *A* que não pertença a outro conjunto *B*, então a sentença $A \subset B$ é falsa. Neste caso, diz-se que *A* **não está contido** em *B*, representando-se por $A \not\subset B$, ou que *B* **não contém** *A*, representando-se por B ⊅ A. Em diagrama de Venn, esta situação pode ser retratada de duas maneiras, conforme Figura 3.

Figura 3 – Representações de um conjunto não contido em outro em diagramas de Venn



Exemplo 2.4.1.4: Se A = {0; 2} e B = {1; 2; 3}, pode-se afirmar que A ⊄ B, pois 0 ∈ A e 0 ∉ B.

Lima (2017) destaca duas inclusões extremas. A primeira é que para todo conjunto *A*, vale $A \subset A$ (pois todo elemento de *A* pertence a *A*). A outra, no mínimo curiosa, diz que $\emptyset \subset A$, qualquer que seja o conjunto *A*. Com efeito, para mostrar que $\emptyset \not\subset A$, seria necessário encontrar um objeto *x* tal que $x \in \emptyset$, mas $x \notin A$. Como $x \in \emptyset$ é impossível, chega-se à conclusão que $\emptyset \subset A$, ou seja, que o conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto.

A ênfase nas duas inclusões extremas é importante, pois são casos comumente esquecidos por estudantes na resolução de problemas em que é necessário listar ou quantificar o total de subconjuntos de um conjunto dado. Abaixo apresenta-se a resolução de um exercício do tipo.

Exercício resolvido 2.4.1.1: Liste todos os subconjuntos do conjunto A = {1; 2; 3}.

Resolução: Inicialmente, pode-se começar listando os subconjuntos com apenas um elemento, que são {1}, {2} e {3}.

Em seguida, listam-se os conjuntos com dois elementos, a saber {1; 2}, {1, 3} e {1; 4}.

Por fim, listando as inclusões extremas, {1; 2; 3} e ∅, chega-se a resposta final, exibida a seguir:

{1}, {2}, {3}, {1; 2}, {1; 3}, {2; 3}, {1; 2; 3} e ∅.

No exercício anterior, listou-se todos os subconjuntos de um conjunto *A* dado, a partir desta situação, define-se o **conjunto das partes** de um conjunto *A* dado, que é o conjunto formado por todos os seus subconjuntos, sendo representado por P(*A*).

Exemplo 2.4.1.5: O conjunto das partes de A = {1; 2; 3} é P(A) = {{1}, {2}, {3}, {1; 2}, {1; 3}, {2; 3}, {1; 2; 3}, ∅}.

Um problema importante de Análise Combinatória é a quantificação dos subconjuntos de um conjunto dado, isto é, a cardinalidade do seu conjunto das partes. Tal problema será estudado em capítulos posteriores.

2.4.2 Propriedades

A relação de inclusão em conjuntos apresenta três propriedades importantes: a reflexividade, a antissimetria e a transitividade. Tais propriedades são apresentadas a seguir para conjuntos *A*, *B* e *C* genéricos.

i) **Reflexividade:** $A \subset A$;

ii) **Antissimetria:** se $A \subset B$ e $B \subset A$, então $A = B$;

iii) **Transitividade:** se $A \subset B$ e $B \subset C$, então $A = C$.

> A propriedade antissimétrica é constantemente usada nos raciocínios matemáticos. Quando se deseja mostrar que os conjuntos *A* e *B* são iguais, prova-se que $A \subset B$ e $B \subset A$, ou seja, que todo elemento de *A* pertence a *B* e todo elemento de *B* pertence a *A*. Na realidade, a propriedade antissimétrica da relação de inclusão contém, nela embutida, a condição de igualdade entre os conjuntos: os conjuntos *A* e *B* são iguais se, e somente se, têm os mesmos elementos. (LIMA, 2017, p. 4)

2.5 Conjunto universo

Em determinados problemas, há a fixação de um conjunto *U*, chamado de **universo do discurso** ou **conjunto-universo**. De acordo com Lima (2017), *U* poderia ser chamado de o assunto da discussão ou o tema em pauta, isto é, no problema em questão está falando-se somente sobre os elementos de *U*.

"Uma vez fixado *U*, todos os elementos a serem considerados pertencerão a *U* e todos os conjuntos serão subconjuntos de *U*, ou derivados destes. Por exemplo, na Geometria Plana, *U* é o plano. Na teoria aritmética da divisibilidade, *U* é o conjunto dos números inteiros." (LIMA, 2017, p. 7).

2.6 Operações com conjuntos

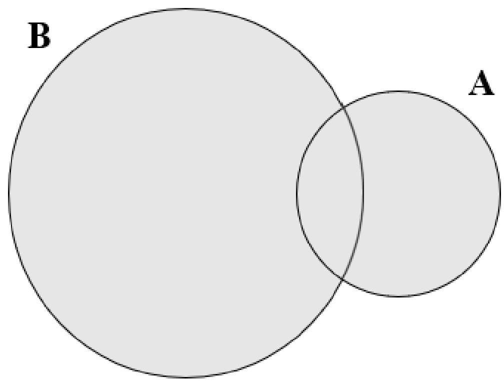
2.6.1 União

Dados dois conjuntos *A* e *B*, chama-se união ou reunião de *A* e *B*, representando-se por $A \cup B$, o conjunto formado pelos elementos que pertencem a *A* ou a *B*, isto é, o conjunto dos elementos que pertencem a pelo menos um dos conjuntos. Simbolicamente:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

A Figura 4 representa a união de dois conjuntos em diagrama de Venn.

Figura 4 – Representação, em destaque cinza, da união de dois conjuntos em diagrama de Venn



Exemplo 2.6.1.1: {1; 2; 3; 4}∪{0; 2; 4} = {0; 1; 2; 3; 4}

De modo análogo pode-se definir a união de três ou mais conjuntos. A união de *n* conjuntos A_1, A_2, A_3, ..., A_n pode ser representada por:

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

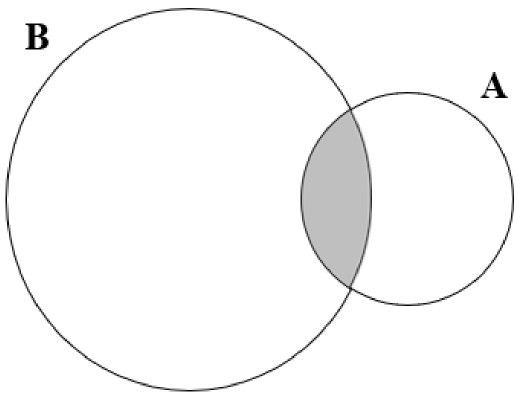
2.6.2 Interseção

Dados dois conjuntos *A* e *B*, chama-se interseção de *A* e *B*, representando-se por *A*∩*B*, o conjunto formado pelos elementos que pertencem a *A* e a *B*, isto é, o conjunto dos elementos que pertencem simultaneamente aos dois conjuntos. Simbolicamente:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$$

A Figura 5 representa a união de dois conjuntos em diagrama de Venn.

Figura 5 – Representação, em destaque cinza, da interseção de dois conjuntos em diagrama de Venn



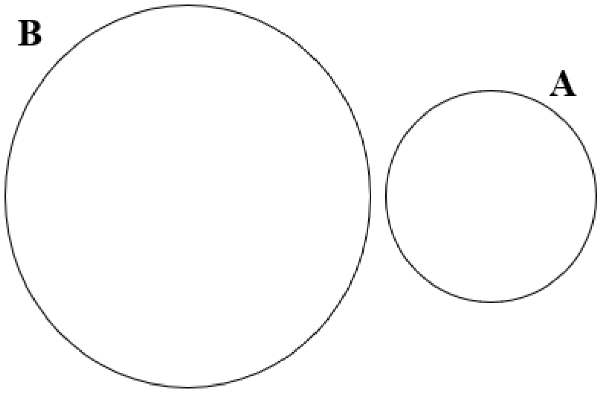
Exemplo 2.6.2.1: {1; 2; 3; 4}∩{0; 2; 4} = {2; 4}

De modo análogo pode-se definir a interseção de três ou mais conjuntos. A interseção de *n* conjuntos A_1, A_2, A_3, ..., A_n pode ser representada por:

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

Eventualmente, não existe nenhum elemento que pertença simultaneamente a dois conjuntos dados A e B, neste caso, $A \cap B = \emptyset$ e os conjuntos são ditos **disjuntos**. Tal situação é representada em diagrama de Venn na Figura 6.

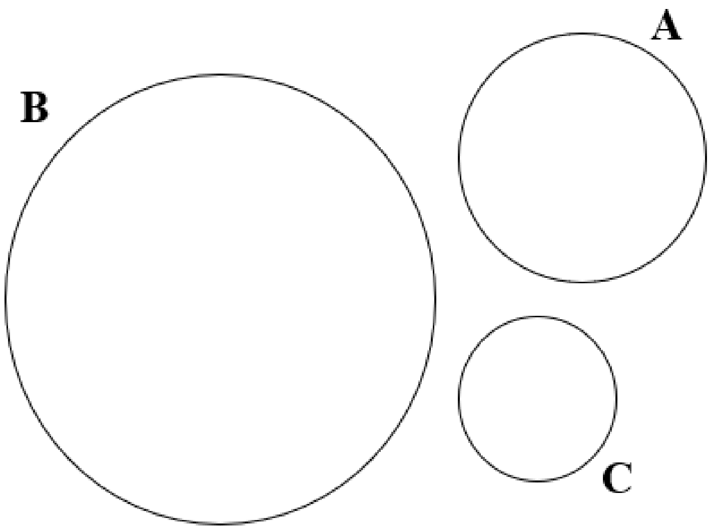
Figura 6 – Representação de dois conjuntos disjuntos em diagrama de Venn



Exemplo 2.6.2.2: $\{1; 3\}$ e $\{0; 2\}$ são dois conjuntos disjuntos, tendo em vista que $\{1; 3\} \cap \{0; 2\} = \emptyset$.

Quando há uma quantidade maior de conjuntos, diz-se que eles são disjuntos quando forem disjuntos tomados 2 a 2. A Figura 7 ilustra o caso de três conjuntos disjuntos.

Figura 7 – Representação de três conjuntos disjuntos em diagrama de Venn



2.6.3 Propriedades da União e da Interseção

Conforme destaca Lima (2017), as operações de união e interseção são obviamente comutativas e associativas. Isto é, valem as propriedades:

i) **Comutatividade:** $A \cup B = B \cup A$ e $A \cap B = B \cap A$;

ii) **Associatividade:** $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ e $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

Além disso, cada uma delas é distributiva em relação à outra

iii) **Distributiva da interseção com relação à união:**

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

iv) **Distributiva da união com relação à interseção:**

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

“Estas igualdades, que podem ser verificadas mediante a consideração dos casos possíveis, constituem, na realidade, regras que regem o uso combinado dos conectivos lógicos ‘ou’ e ‘e’.” (LIMA, 2017, p. 11).

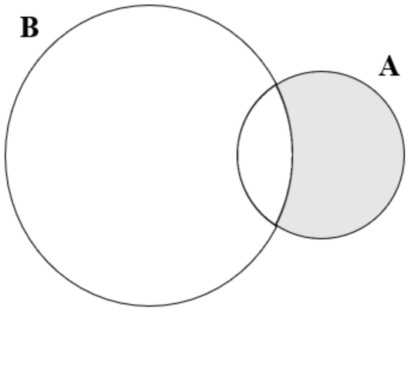
2.6.4 Diferença

Dados dois conjuntos *A* e *B*, chama-se diferença entre *A* e *B*, representando-se por *A* – *B*, o conjunto formado pelos elementos que pertencem a *A* e não pertencem a *B*. Simbolicamente:

$$A - B = \{x \,/\, x \in A \text{ e } x \notin B\}$$

A Figura 8 representa a diferença entre dois conjuntos *A* e *B* em diagrama de Venn.

Figura 8 – Representação, em destaque cinza, da diferença entre dois conjuntos A e B em diagrama de Venn

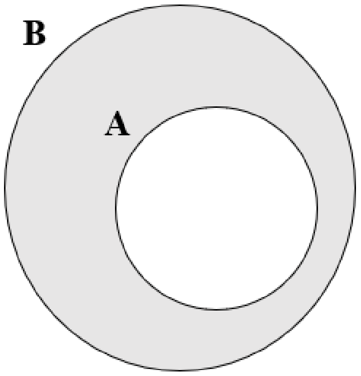


Exemplo 2.6.4.1: {1; 2; 3; 4} – {2; 4} = {1; 3}

2.6.5 Complementar

Dados dois conjuntos A e B, se $A \subset B$, a diferença $B - A$ é denominada **complementar de *A* em relação a *B*** e é representada por C_B^A. O resultado desta operação pode ser interpretado como o conjunto dos elementos que faltam em A para que ele se torne B e está representado na Figura 9.

Figura 9 – Representação, em destaque cinza, do complementar de um conjunto A em relação a um conjunto B em diagrama de Venn



Exemplo 2.6.5.1: Se A = {2; 4} e B = {1; 2; 3; 4}, então $\mathrm{C_B^A}$ = B – A = {1; 3}.

Em situações em que está definido um conjunto universo U, define-se o complementar de um conjunto $A \subset U$ em relação a U simplesmente como o **complementar de *A***, sendo representado por A^C, $\bar{A}$ ou A'.

Vale lembrar que, conforme destaca Lima (2017), ao fixar um determinado conjunto $A \subset U$, para cada elemento x em U, vale uma, e somente uma, das alternativas: $x \in A$ ou $x \notin A$.

"O fato de que, para todo $x \in U$, não existe uma outra opção além de $x \in A$ ou $x \notin A$ é conhecido em Lógica como o **princípio do terceiro excluído**, e o fato de que as alternativas $x \in A$ e $x \notin A$ não podem ser verdadeiras ao mesmo tempo chama-se o **princípio da não-contradição**." (LIMA, 2017, p. 7).

A partir destes dois princípios, conclui-se duas importantes propriedades com relação a complementação de conjuntos. São elas:

i) $(A^C)^C = A$;

ii) $A \subset B \Leftrightarrow B^C \subset A^C$.

2.6.6 Leis de De Morgan

Dados dois conjuntos *A* e *B* contidos em um dado conjunto *C*, valem as seguintes propriedades:

i) $C_C^{A\cap B} = C_C^A \cup C_C^B$;

ii) $C_C^{A\cup B} = C_C^A \cap C_C^B$.

Em relação a um conjunto universo *U*, escreve-se:

iii) $(A\cap B)^C = A^C \cup B^C$;

iv) $(A\cup B)^C = A^C \cap B^C$.

"Estas relações, atribuídas ao matemático inglês Augustus De Morgan, significam que a negação de '*P* ou *Q*' é 'nem *P* nem *Q*' e a negação de '*P* e *Q*' é 'não *P* ou não *Q*'." (LIMA, 2017, p. 12).

2.6.7 Produto Cartesiano

Dados dois conjuntos *A* e *B*, chama-se produto cartesiano de *A* por *B*, representando-se por $A \times B$, o conjunto formado pelos pares ordenados $(a; b)$ tais que $a \in A$ e $b \in B$. Simbolicamente:

$$A \times B = \{(a; b) / a \in A \text{ e } b \in B\}$$

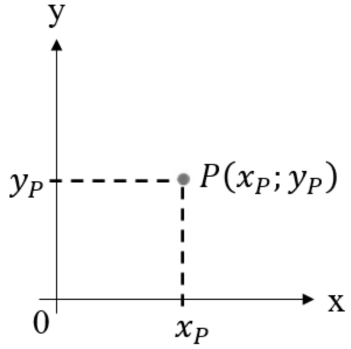
Exemplo 2.6.7.1: $\{1; 2; 3\} \times \{1; 2\} = \{(1; 1), (1; 2), (2; 1), (2; 2), (3; 1), (3; 2)\}$.

É importante notar que os elementos do produto cartesiano são pares ordenados, entes algébricos formados por dois números escritos em ordem, onde o primeiro número é chamado de abscissa e o segundo é chamado de ordenada.

Dessa forma, pode-se dizer que existem 6 elementos no produto cartesiano do último exemplo. Mais a frente, a partir de conhecimentos combinatórios, será mostrado como determinar a quantidade de elementos de um produto cartesiano qualquer.

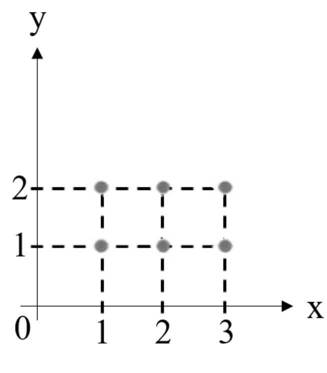
Graficamente, cada par ordenado representa um ponto em um plano munido com o sistema de coordenadas cartesianas usual, onde a abscissa e a ordenada são, respectivamente, as coordenadas no eixo horizontal (eixo-x) e no eixo vertical (eixo-y), conforme figura a seguir.

Figura 10 – Representação gráfica de um par ordenado genérico



Desse modo, pode-se representar graficamente um produto cartesiano, conforme pode ser observado na próxima figura, que mostra a representação gráfica do produto cartesiano do Exemplo 2.6.7.1.

Figura 11 – Representação gráfica do produto cartesiano {1; 2; 3} × {1; 2}



3 PRINCÍPIOS DE CONTAGEM

> A procura por técnicas de contagem está diretamente vinculada à história da Matemática e à forma pela qual as pessoas tem seu primeiro contato com esta disciplina. A primeira técnica matemática aprendida por uma criança é 'contar', ou seja, enumerar os elementos de um conjunto de forma a determinar quantos são os seus elementos. As operações aritméticas são também motivadas (e aprendidas pelas crianças) através de sua aplicação a problemas de contagem. (MORGADO *et al*; 2006, p. 17)

Esta visão apresentada por Morgado *et al*; (2006) é ratificada pela BNCC (Base Nacional Comum Curricular), que prevê nas primeiras habilidades de Matemática, ainda no 1º Ano do Ensino Fundamental, os objetos de conhecimento contagem de rotina, contagem ascendente e descendente e quantificação de elementos de uma coleção.

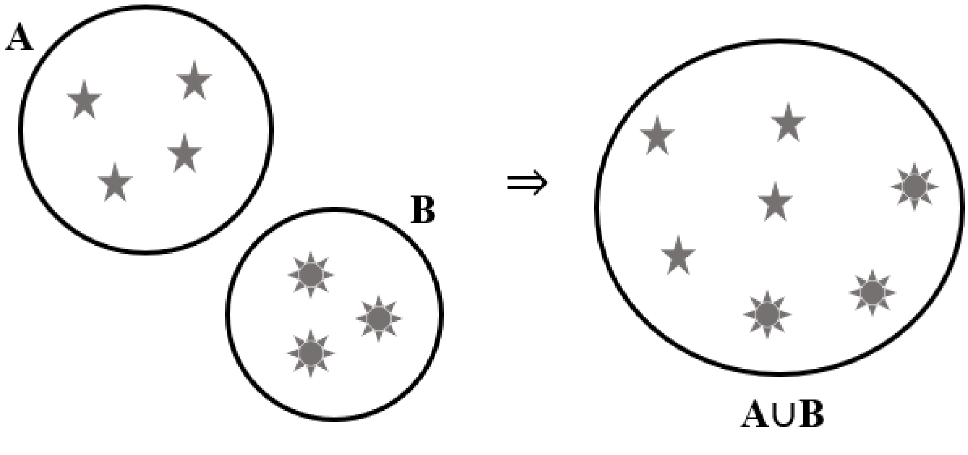
3.1 Princípio Aditivo

Após os objetos de conhecimento sobre contagem e sobre leitura, escrita e comparação dos números naturais, a BNCC traz a construção de fatos básicos da adição como conhecimento a ser trabalhado.

"A construção dos fatos básicos decorre do desenvolvimento de procedimentos para resolver problemas, conhecendo formas diversas de representação, inclusive com a apresentação dos sinais de adição e igualdade." (BRASIL, 2018).

Conforme destacado por Morgado *et al*; (2006), os problemas utilizados nesta etapa, geralmente são problemas de contagem, conforme o ilustrado na figura abaixo.

Figura 12 – Representação em diagrama de Venn de um problema introdutório de contagem



O problema exposto ilustra o princípio mais básico de contagem, conhecido como Princípio Aditivo, que pode ser formalmente enunciado conforme se segue:

"Se A e B são dois conjuntos disjuntos, com **p** e **q** elementos respectivamente, então $A \cup B$ possui p + q elementos." (MORGADO *et al*; 2006, p. 18).

Tendo em vista que este princípio é desenvolvido na mentalidade dos estudantes da educação básica ainda no início da vivência deles com Matemática, é interessante que eles sejam apresentados a problemas de Análise Combinatória cuja resolução pode ser realizada apenas através do Princípio Aditivo.

A seguir, será apresentado um exemplo de exercício que pode ser utilizado com este objetivo, seguido de sua resolução.

Exercício resolvido 3.1.1: Um aluno do ensino médio possui 3 blusas pretas e 2 blusas brancas, todas distintas entre si, que pode utilizar como farda para ir ao colégio. De quantas maneiras este aluno pode escolher uma blusa para vestir para ir ao colégio?

Resolução: Uma primeira alternativa é escolher uma blusa preta, nesta possibilidade o aluno possui 3 opções de escolha.

A segunda alternativa, seria escolher uma blusa branca, onde o aluno possui 2 opções de escolha.

Desta forma, ao todo, o aluno pode escolher uma blusa para vestir para ir ao colégio de 3 + 2 = 5 maneiras.

Por conta desta vivência prévia do aluno com as ideias por trás do Princípio Aditivo, os problemas nesta categoria tendem a ter resoluções intuitivas, o que contribui para os alunos criarem uma visão da Análise Combinatória como algo de compreensão atingível.

Buscando tornar o processo mais atrativo, pode-se trazer exercícios olímpicos que abordem a temática, isso é frequente em provas de olimpíada de Matemática em níveis iniciais do Ensino Fundamental. A seguir, será apresentado como exemplo um exercício da Olimpíada Canguru de Matemática, que esteve presente na prova Nível PE (*Pre Ecolier*) de 2016, com resolução proposta pela banca elaboradora.

Exercício resolvido 3.1.2: (CANGURU 2016) Numa caverna havia dois cavalos marinhos, uma estrela do mar e três tartarugas. Depois, chegaram mais cinco cavalos marinhos, três estrelas do mar e quatro tartarugas. Quantos animais marinhos estão agora na caverna?

(A) 6

(B) 9

(C) 12

(D) 15

(E) 18

Resolução:

"Inicialmente havia 2 + 1 + 3 = 6 animais marinhos na caverna. Depois chegaram mais 5 + 3 + 4 = 12, totalizando 6 + 12 = 18 animais marinhos na caverna." (CONSELHO DO KANGOUROU SANS FRONTIÈRES (KSF), 2016).

A resposta para o exercício é encontrada, portanto, na alternativa (E).

3.2 Princípio Multiplicativo

Como consequência imediata do Princípio Aditivo, surge o princípio mais importante da Análise Combinatória, conhecido como Princípio Fundamental da Contagem (P.F.C.), que é o Princípio Multiplicativo.

É fundamental destacar que o Princípio Multiplicativo nada mais é do que uma aplicação do Princípio Aditivo, afinal uma multiplicação nada mais é do que uma adição com parcelas todas iguais.

Tal contextualização pode ser realizada através de exercícios resolvidos. Como exemplo disso, pode-se observar o exercício resolvido abaixo que está disponível em Mendes, Neto e Silva (2019).

Exercício resolvido 3.2.1: Daniel quer ir a uma festa e não sabe qual roupa vai usar. Sabendo que ele tem 6 camisas e 3 calças, de quantos modos ele pode se vestir?

Resolução:

“Note que, se Daniel escolher a 1ª camisa, terá 3 possibilidades de calça para vestir. Se escolher a 2ª camisa, terá 3 possibilidades de calça, e assim sucessivamente. Como ele possui 6 camisas, o total de modos que ele pode se vestir é: 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 18.” (MENDES; NETO; SILVA, 2019, p. 87)

Desta maneira, pode-se perceber que a quantidade de modos pode ser determinada por $6 \cdot 3 = 18$.

Outro problema é proposto com o mesmo objetivo por Morgado *et al*; (2006).

Exercício resolvido 3.2.2: Numa sala há 3 homens e 4 mulheres. De quantos modos é possível selecionar um casal homem-mulher?

1ª Resolução: Com o 1º homem, há 4 casais possíveis, pois há quatro mulheres a disposição para juntar com ele. Já com o 2º homem, existem 4 casais possíveis. Da mesma forma, 4 casais possíveis com o 3º homem. Logo, a quantidade de modos de selecionar um casal homem-mulher é: $4 + 4 + 4 = 3 \cdot 4 = 12$.

De modo geral, pode-se enunciar formalmente o Princípio Fundamental da Contagem (P.F.C.) da seguinte forma:

“Se uma decisão d_1 pode ser tomada de x maneiras e se, uma vez tomada a decisão d_1, a decisão d_2 puder ser tomada de y maneiras, então o número de maneiras de se tomarem as decisões d_1 e d_2 em sequência é $x \cdot y$.” (MORGADO *et al*; 2006, p. 18).

Na resolução de problemas, costuma-se fazer, simplesmente, uma aplicação direta do P.F.C., mas conhecer sua origem ajuda o aluno a compreender que o mesmo só pode ser aplicado quando a escolha tomada na primeira decisão não impactar na quantidade de possibilidades da escolha da decisão seguinte.

Uma boa estratégia para verificar isto é utilizar a técnica de simular as escolhas que estão sendo realizadas, verificando assim, o impacto das primeiras decisões nas decisões seguintes.

A seguir, será retomado o exercício resolvido 3.2.2 para ilustrar a aplicação de tal técnica.

Exercício resolvido 3.2.2: Numa sala há 3 homens e 4 mulheres. De quantos modos é possível selecionar um casal homem-mulher?

2ª Resolução: Pode-se dividir o problema em duas decisões: escolha do homem do casal e escolha da mulher do casal. Representa-se estas duas decisões através de duas barras horizontais:

escolha do homem	escolha da mulher
_____	_____

Para tornar a simulação mais visual, é interessante escrever as possibilidades de escolha abaixo da barra que representa a tomada de decisão. Nomeando os homens de h_1, h_2 e h_3, tem-se, portanto:

	escolha do homem	escolha da mulher
	_____	_____
	h_1	
possibilidades	h_2	
	h_3	

Abaixo das possibilidades, escreve-se a quantidade:

	escolha do homem	escolha da mulher
	_____	_____
	h_1	
possibilidades	h_2	
	h_3	
quantidade	3	

Em seguida, faz-se uma escolha, que pode ser qualquer uma das possibilidades a disposição, e escreve-se a mesma na barra da decisão. Por exemplo, tomando h_1:

	escolha do homem	escolha da mulher
	$\underline{h_1}$	____
possibilidades	h_1 h_2 h_3	
quantidade	3	

Após tomar a primeira decisão, repete-se o processo para a segunda. Nomeando as mulheres de m_1, m_2, m_3 e m_4, tem-se:

	escolha do homem	escolha da mulher
	$\underline{h_1}$	____
possibilidades	h_1 h_2 h_3	m_1 m_2 m_3 m_4
quantidade	3	4

É importante notar que, independente da decisão tomada na primeira etapa, sempre ficam quatro possibilidades de escolha para a segunda decisão, isso é o que torna as parcelas iguais no Princípio Aditivo e gera o Princípio Multiplicativo.

Assim, basta multiplicar as quantidades de possibilidades anotadas na última linha, fazendo com que a resposta da questão fique:

$$3 \cdot 4 = 12 \text{ modos}$$

Em uma primeira visualização, pode parecer que se perde tempo escrevendo um número maior de informações do que o necessário, afinal a maioria dos livros de Ensino Médio escreve apenas a quantidade de possibilidades abaixo das barras horizontais.

Entretanto, listar todas as possibilidades de cada etapa e simular as escolhas que estão sendo realizadas pode esclarecer para os alunos de forma mais visual as quantidades que estão sendo escritas, principalmente em problemas que envolvem restrições e um número maior de decisões a serem realizadas.

Hazzan (2013) enuncia o Princípio Fundamental da Contagem de uma maneira bem interessante. Inicialmente para dois conjuntos: considerando os conjuntos $A = \{a_1; a_2; \dots; a_x\}$ e $B = \{b_1; b_2; \dots; b_y\}$, com x e y elementos respectivamente, pode-se formar $x \cdot y$ pares ordenados $(a_i; b_j)$ em que $a_i \in A$ e $b_j \in B$.

Percebe-se que este enunciado fornece o número de elementos de $A \times B$ para dois conjuntos finitos A e B, isto é, n$(A \times B)$ = n$(A) \cdot$ n(B). Com esta interpretação, pode-se constatar que qualquer problema de aplicação direta do P.F.C. em um problema de duas etapas pode ser entendido como a determinação da quantidade de pares ordenados que podem ser formados com os elementos de dois conjuntos, isto é, o número de elementos de um produto cartesiano.

Aplicando a propriedade associativa da multiplicação e a propriedade distributiva da adição com relação a multiplicação, pode-se generalizar o P.F.C., que foi enunciado apenas para duas decisões, para uma quantidade qualquer de decisões a serem tomadas.

Novamente, com uma versão enunciada por Hazzan (2013), pode-se afirmar que dados r conjuntos $A = \{a_1; a_2; \dots; a_{n_1}\}$, $B = \{b_1; b_2; \dots; b_{n_2}\}$, ..., $Z = \{z_1; z_2; \dots; z_{n_r}\}$, com n$(A) = n_1$, n$(B) = n_2$, ..., n$(Z) = n_r$, o número de r-uplas ordenadas (sequências de r elementos) do tipo $(a_i; b_j; \dots; z_p)$ em que $a_i \in A$, $b_j \in B$, ..., $z_p \in Z$ é $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_r$.

Desse modo, pode-se interpretar que qualquer problema de aplicação direta do P.F.C. pode ser entendido como a determinação da quantidade de r-uplas ordenadas que podem ser formadas com os elementos de r conjuntos.

Tal interpretação contribui para um entendimento das características de diversos problemas de Análise Combinatória, mostrando que problemas aparentemente distintos questionam, em essência, a mesma coisa. Essa abordagem será retomada mais à frente.

A seguir, será iniciada a resolução de uma série de exercícios resolvidos, que visam trazer aplicações do P.F.C. e da técnica de simulação para diversos tipos de problemas em que há decisões a serem realizadas.

Exercício resolvido 3.2.3: Quantos números naturais de três algarismos distintos podem ser escritos utilizando-se 1, 2, 3, 4 ou 5?

Resolução: Pode-se dividir o problema em três decisões: escolha do 1º algarismo, escolha do 2º e escolha do 3º. Assim, tem-se a seguinte representação:

1º	2º	3º
—	—	—

Os algarismos disponíveis são 1, 2, 3, 4 e 5. Assim, para a primeira decisão tem-se:

	1º	2º	3º
	—	—	—
	1		
	2		
possibilidades	3		
	4		
	5		
quantidade	5		

Realizando uma escolha:

	1º	2º	3º
	1	—	—
	1		
	2		
possibilidades	3		
	4		
	5		
quantidade	5		

Como deseja-se números de três algarismos distintos, a escolha realizada não estará disponível na próxima etapa, desta forma:

	1º	2º	3º
	1	__	__
possibilidades	1 2 3 4 5	2 3 4 5	
quantidade	5	4	

Vale destacar que se pode continuar a resolução com o pensamento de aplicar o P.F.C., pois a escolha realizada não muda a quantidade de possibilidades disponíveis para a posição seguinte, por exemplo, caso houvesse sido escolhido o número 2 para o primeiro algarismo, restariam 1, 3, 4 e 5 como opções para o segundo, mantendo-se quatro possibilidades.

Efetuando-se, portanto, uma escolha qualquer:

	1º	2º	3º
	1	2	__
possibilidades	1 2 3 4 5	2 3 4 5	
quantidade	5	4	

No cenário simulado, restaram como possibilidades para a última decisão os algarismos 3, 4 e 5. Assim:

	1º	2º	3º
	1	2	__
possibilidades	1 2 3 4 5	2 3 4 5	3 4 5
quantidade	5	4	3

Logo, a resposta da questão fica:

$$5 \cdot 4 \cdot 3 = 60 \text{ números}$$

Vale destacar que, para que se tenha sucesso na simulação da contagem que está sendo realizada e na aplicação do P.F.C., é importante atentar-se à postura adotada durante a escrita da resolução.

Conforme destacam Morgado e Carvalho (2015), durante uma resolução deve-se sempre procurar desempenhar o papel da pessoa que deve fazer a ação solicitada pelo problema e analisar quais decisões devem ser tomadas. Por exemplo, no exercício resolvido 3.2.2, o texto da resolução colocou-se no lugar da pessoa responsável por formar o casal, já no exercício resolvido 3.2.3, colocou-se no lugar da pessoa responsável por montar o número.

Seguindo na linha de mostrar aplicações das técnicas apresentadas, a seguir será apresentada a resolução de um exercício adaptado de um problema originalmente proposto em Morgado e Carvalho (2015).

Exercício resolvido 3.2.4: Uma turma de preparação para olimpíadas científicas tem aulas às terças, às quintas e aos sábados, das 08h às 09h e das 09h30 às 10h30. As matérias estudadas nessa turma são Física, Química e Matemática, sendo cada uma com duas aulas por semana, em dias necessariamente diferentes. Obedecendo as restrições estabelecidas, de quantas formas pode ser feito o horário semanal para as aulas dessa turma?

Resolução: Pode-se dividir o problema em três decisões: montagem do horário de terça, montagem do horário de quinta e montagem do horário de sábado. Assim, tem-se a seguinte representação:

TER	QUI	SÁB
____	____	____

Ao todo, serão duas aulas de Matemática, que serão representadas por M e M, duas aulas de Física, a serem representadas por F e F, e duas aulas de Química, Q e Q. Em cada dia, deve-se escolher duas destas disciplinas (duas letras distintas na representação adotada), onde uma será a 1ª aula e outra será a 2ª aula.

Assim, as possibilidades da terça-feira são:

	TER	QUI	SÁB
	____	____	____
possibilidades	M F F M M Q Q M F Q Q F		
quantidade	6		

Realizando uma escolha:

	TER	QUI	SÁB
	MF	____	____
possibilidades	M F F M M Q Q M F Q Q F		
quantidade	6		

Pode-se perceber que a disciplina não escolhida no 1º dia (na simulação realizada foi Química, mas poderia ser qualquer outra) terá que ser obrigatoriamente escolhida no 2º dia.

Caso não seja, sobrarão apenas as duas aulas dela para o último dia, o que não pode acontecer (no exemplo simulado, caso seja colocado no M e F no 2º dia, o 3º dia teria que ser Q e Q, o que não obedeceria a restrição de as aulas de uma mesma disciplina estarem em dias necessariamente diferentes).

Assim, as possibilidades para quinta-feira são:

	TER	QUI	SÁB
	MF	____	____
possibilidades	M F F M M Q Q M F Q Q F	M Q Q M F Q Q F	
quantidade	6	4	

Realizando uma escolha:

	TER	QUI	SÁB
	MF	MQ	____
possibilidades	M F F M M Q Q M F Q Q F	M Q Q M F Q Q F	
quantidade	6	4	

Por fim, as possibilidades que restam para o último dia são representadas:

	TER	QUI	SÁB
	MF	MQ	____
	M F		
	F M	M Q	
possibilidades	M Q	Q M	F Q
	Q M	F Q	Q F
	F Q	Q F	
	Q F		
quantidade	6	4	2

Logo, aplicando o P.F.C., a resposta da questão fica:

$6 \cdot 4 \cdot 2 = 48$ modos de montar o horário dessa turma.

3.3 Princípio Aditivo x Princípio Multiplicativo

Apesar disso está intrinsecamente relacionado com a falta de entendimento sobre o que enunciam os princípios aditivo e multiplicativo, muitos alunos costumam apresentar dúvidas sobre qual dos dois princípios deve ser utilizado durante a resolução de um problema de contagem.

Tal situação ocorre quando o estudante se depara com duas quantidades x e y de opções e fica em dúvida se, na próxima etapa da resolução de um problema, deve efetuar a multiplicação $x \cdot y$ ou a adição $x + y$.

Levando isso em consideração, será apresentada agora uma breve recapitulação dos dois princípios, buscando transmitir uma importante diferença conceitual entre as definições de etapas e alternativas.

Em seguida, serão expostos alguns exercícios resolvidos, visando reforçar as explicações apresentadas.

3.3.1 Princípio Multiplicativo

O Princípio Multiplicativo é aplicável em situações onde um determinado evento possui diversas decisões a serem tomadas, isto é, quando o evento em questão pode ser subdividido em etapas independentes, que podem ser sucessivas ou simultâneas.

3.3.2 Princípio Aditivo

Já em outras situações, é necessário decidir entre uma ou outra possibilidade, isto é, no processo de contagem apresentam-se escolhas que são alternativas. É neste tipo de cenário que deve ser utilizado o Princípio Aditivo, somando-se as quantidades de opções obtidas para cada uma das alternativas.

Exercício resolvido 3.3.1: Em um plano munido com o sistema de coordenadas cartesianas usual, fixada uma unidade de comprimento (u.c.), marcam-se os pontos do produto cartesiano $A \times A$, sendo $A = \{1; 2; 3; \dots; n\}$ para um n natural maior do que 1. Quantos quadrados com lados paralelos aos eixos coordenados podem ser construídos tomando-se os pontos marcados como vértices?

Resolução: A medida do lado do quadrado impactará na quantidade de quadrados que podem ser construídos. Dessa forma, pode-se dividir a resolução em casos.

1º caso) Quadrados com lado medindo 1 u.c.

Escolhendo um vértice, com sua posição relativa aos demais fixada, o quadrado estará determinado. Tomando o vértice superior direito como referência, serão realizadas duas escolhas, a abscissa e a ordenada deste vértice. Assim, monta-se a estrutura:

abscissa   ordenada

____   ____

Ao optar por escolher o vértice superior direito do quadrado, cada uma das coordenadas pode ser escolhida dentre os valores do conjunto $\{2; 3; \dots; n-1; n\}$, pois para que seja possível manter o quadrado dentro da malha quadriculada as coordenadas de seu vértice superior direito precisam ser maiores que a medida de seu lado. Dessa forma:

	abscissa	ordenada
	____	____
	2	2
	3	3
possibilidades	4	4
	...	...
	n	n
quantidade	$n-1$	$n-1$

Portanto, são $(n-1)\cdot(n-1)=(n-1)^2$ quadrados neste primeiro caso.

2º caso) Quadrados com lado medindo 2 u.c.

Da mesma maneira, basta escolher as coordenadas do vértice superior direito. Neste caso, tais valores só podem ser selecionados no conjunto $\{3; 4; \ldots; n\}$, fornecendo $n-2$ possibilidades para cada um, sendo a estrutura simplificada:

	abscissa	ordenada
	____	____
quantidade	$n-2$	$n-2$

Desse modo, são $(n-2)\cdot(n-2)=(n-2)^2$ quadrados neste caso.

3º caso) Quadrados com lado medindo 3 u.c.

Agora, as coordenadas do vértice superior direito devem ser escolhidas no conjunto $\{4; 5; \ldots; n\}$, o que fornecerá $(n-3)\cdot(n-3)=(n-3)^2$ quadrados.

Assim seguirá até o último caso, existirão sempre $(n-i)^2$ com lado medindo i u.c., para qualquer $i \in \{1; 2; \ldots; n-1\}$. Aplicando o Princípio Aditivo, o total de quadrados será dado pelo somatório:

$$S=(n-1)^2+(n-2)^2+\cdots+2^2+1^2$$

Invertendo a ordem das parcelas:

$$S=1^2+2^2+\cdots+(n-2)^2+(n-1)^2$$

A soma dos quadrados dos primeiros n números naturais pode ser determinada pela fórmula a seguir, cuja demonstração encontra-se no Apêndice A deste trabalho.

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$$

Aplicando a fórmula em questão, chega-se na resposta do problema:

$$S = 1^2 + 2^2 + \cdots + (n-2)^2 + (n-1)^2 = \frac{(n-1) \cdot (n-1+1) \cdot (2(n-1)+1)}{6}$$

$$= \frac{(n-1) \cdot n \cdot (2n-2+1)}{6} = \frac{(n-1) \cdot n \cdot (2n-1)}{6}.$$

Logo, são $\frac{(n-1) \cdot n \cdot (2n-1)}{6}$ quadrados.

Pode-se perceber que, no problema anterior, dentro de cada caso aplicou-se o Princípio Multiplicativo, pois a determinação do vértice foi dividida em duas etapas (escolha da abscissa e escolha da ordenada).

Já no final, somou-se o número de possibilidades de cada caso, pois os casos representavam alternativas de escolha para a medida do lado do quadrado, ou o quadrado tem um lado medindo 1 u.c., ou tem lado medindo 2 u.c., e assim por diante.

A seguir, segue um problema com uma abordagem muito similar.

Exercício resolvido 3.3.2: Seja o conjunto X = {1, 2, 3, ..., 100}, o número de ternos ordenados *(a; b; c)* tais que $a < b$ e $a < c$, sendo $a, b, c \in$ X, é igual a

(A) 4 950.

(B) 166 650.

(C) 328 350.

(D) 970 200.

(E) 980 100.

Resolução: Primeiramente, percebe-se que a escolha do número *a* impacta diretamente na quantidade de possibilidades de escolha para *b* e *c*. Desse modo, não será possível resolver com um único P.F.C. e o problema será dividido em casos.

1º caso) Se $a = 1$.

Neste cenário, b e c podem ser escolhidos dentre os elementos de {2, 3, ..., 100}, sendo 99 possibilidades de escolha para cada um. Assim, são $99 \cdot 99 = 99^2$ ternos.

2º caso) Se $a = 2$.

Agora, b e c podem ser escolhidos em {3, 4, ..., 100}, o que fornece 98 possibilidades para cada um. Sendo, portanto, $98 \cdot 98 = 98^2$ ternos.

Assim seguirá até o 99º caso, em que sendo $a = 99$, ficam $1 \cdot 1 = 1^2$ ternos.

Desse modo, o total de ternos será dado por:

$$S = 99^2 + 98^2 + \cdots + 2^2 + 1^2$$

Aplicando a mesma fórmula utilizada no exercício anterior:

$$S = 99^2 + 98^2 + \cdots + 2^2 + 1^2$$

$$S = 1^2 + 2^2 + \cdots + 98^2 + 99^2$$

$$S = \frac{99 \cdot (99 + 1) \cdot (2 \cdot 99 + 1)}{6}$$

$$S = \frac{99 \cdot 100 \cdot (198 + 1)}{6}$$

$$S = 1\ 650 \cdot 199$$

$$S = 328\ 350$$

Logo, são 328 350 ternos e a resposta correta do exercício proposto é encontrada na alternativa (C).

Pode-se perceber que os dois problemas recaíram em um mesmo resultado, a soma dos quadrados dos primeiros números naturais. Este interessante fato ocorreu porque, ao analisar em mais detalhes, percebe-se que no exercício 3.3.1 foi realizada justamente a escolha de três valores: o comprimento do lado do quadrado, a abscissa do vértice superior direito e a ordenada do vértice superior direito.

O comprimento do lado do quadrado foi selecionado dentre os elementos do conjunto {1, 2, 3, ..., n – 1, n}, mas o número n não poderia ser escolhido, essas são exatamente as mesmas restrições para a escolha do número a do exercício 3.3.2.

Em seguida, escolheu-se a abscissa e a ordenada do vértice superior direito do quadrado, que são escolhas equivalentes a escolha dos números b e c do exercício 3.3.2, onde os primeiros elementos do conjunto não poderiam ser selecionados em cada escolha, pois as coordenadas do vértice superior direito precisam ser maiores do que o comprimento do lado, bem como b e c precisavam ser maiores do que a.

Tal interpretação, ratifica o que foi discutido na explicação do P.F.C. da seção 3.2, que aplicações do Princípio Multiplicativo podem ser entendidas como escolhas de r-uplas ordenadas em elementos de conjuntos. Na próxima seção deste estudo, esse tipo de exercício será aprofundado na escolha de r-uplas de subconjuntos de um determinado conjunto dado.

A seguir, será apresentada uma variação do exercício resolvido 3.3.1, agora sem que haja a limitação dos lados dos quadrados serem paralelos aos eixos coordenados. A ideia da solução apresentada foi parcialmente embasada na resolução proposta por Mota (2017) para um problema equivalente.

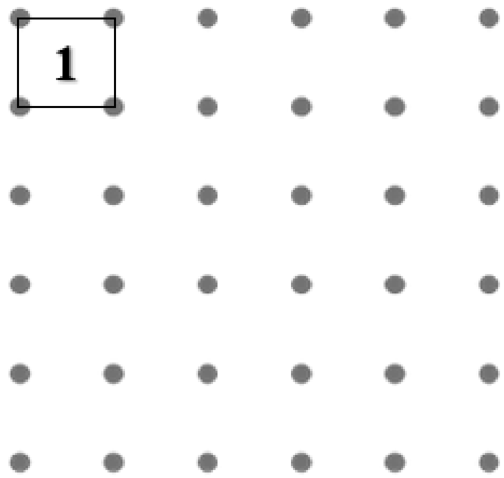
Exercício resolvido 3.3.3: Em um plano munido com o sistema de coordenadas cartesianas usual, fixada uma unidade de comprimento (u.c.), marcam-se os pontos do produto cartesiano $A \times A$, sendo $A = \{1; 2; 3; \dots; n\}$ para um n natural maior do que 1. Quantos quadrados distintos, com lados não necessariamente paralelos aos eixos coordenados, podem ser construídos tomando-se os pontos marcados como vértices?

Resolução: Para a resolução desse problema, será realizada uma verificação sobre os quadrados que podem ser construídos com vértices sobre os lados dos quadrados de lados paralelos aos eixos.

1º caso) Quadrados gerados a partir dos quadrados de lado medindo 1 u.c.

Dentro dos quadrados com lado medindo 1.u.c., não é possível construir novos quadrados, pois não existem pontos de $A \times A$ pertencentes aos seus lados, conforme pode ser observado na ilustração da Figura 13, onde os pontos de $A \times A$ são representados numa malha quadriculada.

Figura 13 – Quadrado de lado medindo 1 u.c. e vértices sobre uma malha quadriculada

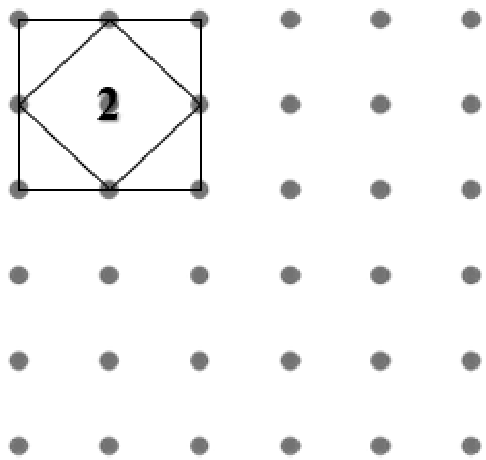


Do 1º caso da resolução do exercício 3.3.1, conclui-se que são $(n-1)^2$ quadrados neste caso.

2º caso) Quadrados gerados a partir dos quadrados de lado medindo 2 u.c.

Dentro de cada quadrado com lado medindo 2 u.c., é possível construir um novo quadrado, conforme pode-se verificar na Figura 14.

Figura 14 – Quadrado de lado medindo 2 u.c. e vértices sobre uma malha quadriculada, junto de seus quadrados internos

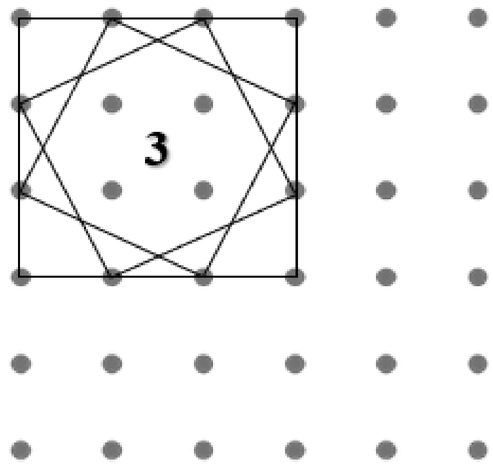


Na resolução do exercício 3.3.1, concluiu-se que eram $(n-2)^2$ quadrados com lado medindo 2 u.c. Como existirá um novo quadrado interno para cada um, este valor deverá ser multiplicado por 2, fornecendo $2 \cdot (n-2)^2$ quadrados neste segundo caso.

3º caso) Quadrados gerados a partir dos quadrados de lado medindo 3 u.c.

Já internamente aos quadrados com lado medindo 3 u.c., é possível construir dois novos quadrados, tal fato pode ser observado na Figura 15.

Figura 15 – Quadrado de lado medindo 3 u.c. e vértices sobre uma malha quadriculada, junto de seus quadrados internos



Novamente trazendo um resultado da resolução do exercício 3.3.1, sabe-se que existem $(n-3)^2$ quadrados de lados medindo 3 u.c. e lados paralelos aos eixos, adicionando-se os dois internos para cada um deles, deve-se multiplicar esse resultado por 3, obtendo um total de $3 \cdot (n-3)^2$ quadrados neste caso.

Assim seguirá até o último caso. Aplicando o Princípio Aditivo, o total de quadrados será dado pelo somatório:

$$S = 1 \cdot (n-1)^2 + 2 \cdot (n-2)^2 + \cdots + (n-2) \cdot 2^2 + (n-1) \cdot 1^2$$

Isto é:

$$S = \sum_{i=1}^{n-1} i \cdot (n-i)^2 = \sum_{i=1}^{n-1} i \cdot (n^2 - 2 \cdot n \cdot i + i^2) = \sum_{i=1}^{n-1} (n^2 \cdot i - 2n \cdot i^2 + i^3)$$

Aplicando propriedades dos somatórios:

$$S = \sum_{i=1}^{n-1} (n^2 \cdot i - 2n \cdot i^2 + i^3) = n^2 \sum_{i=1}^{n-1} i - 2n \cdot \sum_{i=1}^{n-1} i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} i^3$$

Para dar procedimento a resolução, serão utilizados os seguintes resultados:

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1^2 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n \cdot (n+1)}{2}\right]^2$$

As demonstrações para estes fatos estão discutidas no Apêndice A deste trabalho. Aplicando tais fórmulas, chega-se à resposta do problema:

$$S = n^2 \sum_{i=1}^{n-1} i - 2n \cdot \sum_{i=1}^{n-1} i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} i^3$$

$$S = n^2 \cdot \frac{(n-1) \cdot n}{2} - 2n \cdot \frac{(n-1) \cdot n \cdot (2n-1)}{6} + \left[\frac{(n-1) \cdot n}{2}\right]^2$$

$$S = n^2 \cdot \frac{n^2 - n}{2} - n^2 \cdot \frac{(n-1) \cdot (2n-1)}{3} + \frac{(n^2 - 2n + 1) \cdot n^2}{4}$$

$$S = n^2 \cdot \left(\frac{n^2 - n}{2} - \frac{2n^2 - 3n + 1}{3} + \frac{n^2 - 2n + 1}{4}\right)$$

$$S = n^2 \cdot \left(\frac{6n^2 - 6n - 8n^2 + 12n - 4 + 3n^2 - 6n + 3}{12}\right)$$

$$S = \frac{n^2 \cdot (n^2 - 1)}{12}$$

Logo, são $\frac{n^2 \cdot (n^2 - 1)}{12}$ quadrados.

3.4 Princípio da Preferência

Muitas vezes, a dificuldade do estudante em resolver um problema de contagem consiste em saber por qual etapa iniciar a resolução. Visando auxiliar neste processo, surge o Princípio da Preferência.

De acordo com este princípio, em uma contagem deve-se dar preferência por iniciar pelas etapas que apresentarem restrições, priorizando àquelas que apresentarem uma maior quantidade de restrições.

O próximo exercício, uma adaptação do exercício resolvido 3.2.3, visa contextualizar a aplicação de tal princípio.

Exercício resolvido 3.4.1: Quantos números pares de três algarismos distintos podem ser escritos utilizando-se 1, 2, 3, 4 ou 5?

Resolução: Neste caso, há uma restrição com relação ao algarismo da ordem das unidades, o mesmo precisa ser par para que o número formado também seja par.

Desse modo, pelo Princípio da Preferência, deve-se iniciar a simulação pela etapa de selecionar o algarismo das unidades. Adotando U para unidade, D para dezena e C para centena, tem-se a seguinte estrutura de simulação:

	C	D	U
	__	__	__
possibilidades			2 4
quantidade			2

Efetuando-se uma escolha para as unidades, qualquer um dos algarismos restantes a disposição poderá ser escolhido para as centenas e para as dezenas, deste modo, pode-se continuar a contagem por qualquer uma das etapas.

Efetuando a escolha do número 2 para o algarismo das unidades e optando-se por continuar a contagem pelas dezenas, tem-se a simulação:

	C	D	U
	__	__	2
possibilidades		1 3 4 5	2 4
quantidade		4	2

Efetuando uma escolha para o algarismo das dezenas e continuando a simulação, tem-se:

	C	D	U
	___	1	2
possibilidades	3 4 5	1 3 4 5	2 4
quantidade	3	4	2

Assim sendo, pelo P.F.C., conclui-se que a resposta do problema é $3 \cdot 4 \cdot 2 = 24$ números.

É importante notar que se a resolução tivesse sido iniciada pelo algarismo das centenas, conforme foi feito no exercício resolvido 3.2.3, haveria 5 modos de escolher o algarismo das centenas, depois 4 modos para escolher os algarismos das dezenas e, em seguida, enfrenta-se um problema: de quantos modos pode-se selecionar o algarismo das unidades?

Neste caso, não seria possível aplicar o P.F.C., pois a resposta para essa pergunta é que depende das escolhas realizadas anteriormente. Caso os números 1 e 3, por exemplo, houvessem sido escolhidos para as ordens das centenas e das dezenas, restariam duas possibilidades para as unidades. De outra forma, caso os números 2 e 4 houvessem sido escolhidos, não restaria nenhuma possibilidade para o algarismo das unidades.

Conforme comentado anteriormente, o P.F.C. só pode ser aplicado quando a escolha de uma etapa não influenciar na quantidade de possibilidades de escolha para a etapa seguinte.

Assim sendo, pode-se perceber a importância de obedecer ao Princípio da Preferência. Ao iniciar o processo pela escolha que, de princípio, é mais problemática do que a dos outros algarismos, pode-se aplicar tranquilamente o P.F.C.

“Daí a recomendação: *Pequenas dificuldades adiadas costumam-se transformar-se em grandes dificuldades. Se alguma decisão é mais complicada que as demais, ela deve ser tomada em primeiro lugar*.” (MORGADO *et al*; 2006, p. 20).

Vale enfatizar que, ao longo dos últimos parágrafos, a discussão de um caminho errado tornou-se construtiva para o melhor entendimento dos princípios de contagem presentes em Análise Combinatória.

Durante o estudo dos problemas de contagem em sala de aula, é natural que surjam resoluções equivocadas, afinal os alunos estão em processo de aprendizagem. Estes momentos devem ser encarados como uma oportunidade de reforçar os conceitos importantes.

Morgado e Carvalho (2015) destacam a importância disso, ao dizerem que é importante aprender e fazer com que os estudantes aprendam com os erros. “É importante, diante de uma solução errada, analisar porque ela está errada.” (MORGADO; CARVALHO, 2015, p. 134).

Desse modo, quando uma determinada contagem errada exceder o valor esperado, pode-se realizar alguns questionamentos, por exemplo, quais casos foram contados a mais? Ou então, quais casos foram contados mais de uma vez?

Também vale o contrário. Em situações que a contagem errada for menor do que o valor esperado como gabarito de determinado problema, vale a análise: o que não foi contado ainda?

Eventualmente, os erros não consistem em contagens em excesso ou em contagens faltantes, neste caso vale questionar: o procedimento errôneo responde qual problema? No que o enunciado seria diferente?

4 APLICAÇÕES DE CONTAGEM EM TEORIA DOS CONJUNTOS

Existem diversos resultados importantes em Teoria dos Conjuntos que podem ser justificados através dos princípios basilares de Análise Combinatória, os quais foram estudados na última seção.

Tendo isso em vista, esta parte do estudo visa apresentar uma série de exercícios resolvidos, úteis em diversos contextos de Teoria dos Conjuntos e de Análise Combinatória.

4.1 Quantificação de subconjuntos

O primeiro resultado a ser apresentado é uma das principais aplicações do P.F.C. no contexto de Teoria dos Conjuntos, trata-se da quantificação dos subconjuntos de um determinado conjunto finito. Tal problema é proposto, por exemplo, por Morgado *et al*; (2006).

Exercício resolvido 4.1.1: Quantos subconjuntos possui um conjunto que tem *n* elementos?

Resolução: Seja um conjunto com *n* elementos $\{x_1; x_2; x_3; \ldots; x_n\}$.

“Para formar um subconjunto, deve-se decidir, para cada elemento do conjunto, se ele pertencerá ou não ao subconjunto. Há 2 modos de decidir o que fazer com o primeiro elemento do conjunto, 2 modos com o segundo, etc.” (MORGADO *et al*; 2006, p. 188).

Para detalhar um pouco mais a ideia, pode-se adotar o símbolo + para representar a decisão de que o elemento pertencerá ao subconjunto e o símbolo – para representar a decisão de que o elemento não pertencerá ao subconjunto, desse modo cada subconjunto pode ser associado a uma sequência de símbolos + e –.

Por exemplo, o subconjunto $\{x_1; x_3\}$ pode ser representado pela sequência + – + – ... –. Já o subconjunto $\{x_1; x_2; x_3; \ldots; x_n\}$ seria representado pela sequência + + + ... + e o subconjunto $\emptyset$ por – – – ... –.

Assim, pode-se montar a estrutura de simulação:

	x_1	x_2	x_3	...	x_n
	___	___	___	...	___
possibilidades	+ –	+ –	+ –	...	+ –
quantidade	2	2	2	...	2

Desse modo, a resposta para o problema é $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot ... \cdot 2 = 2^n$.

Exemplo 4.1: O conjunto A = {1; 2; 3} possui $2^3 = 8$ subconjuntos (tais subconjuntos foram listados na resolução do exercício resolvido 2.4.1.1).

O resultado do exercício 4.1 fornece a quantidade de elementos do conjunto das partes de um conjunto finito *A*. Representando-se por:

$$n\big(P(A)\big) = 2^{n(A)}.$$

Este resultado possui uma série de aplicações importantes, por exemplo, pode ser utilizado para determinar um importante somatório de combinações, através da técnica combinatória de contagem dupla.

Em 2004, o vestibular do Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA) também propôs a resolução do último exercício, além de um novo problema envolvendo o resultado. Tal questão será resolvida a seguir.

Exercício resolvido 4.1.2: (ITA 2004) Seja A um conjunto não-vazio.

a) Se n(A) = m, calcule n(P(A)) em termos de m.

b) Denotando $P^1(A) = P(A)$ e $P^{k+1}(A) = P(P^k(A))$, para todo número natural $k \geq 1$, determine o menor k, tal que $n(P^k(A)) \geq 65\,000$, sabendo que n(A) = 2.

Resolução:

a) Do que foi realizado no exercício resolvido 4.1.1, segue que a resposta é $n(P(A)) = 2^m$.

b) Do resultado do item (a), $n(P(A)) = 2^{n(A)} \Rightarrow n(P(A)) = 2^2 \Rightarrow n(P(A)) = 4$.

- $P^2(A) = P(P(A)) \Rightarrow n(P^2(A)) = n(P(P(A)) \Rightarrow n(P^2(A)) = 2^{n(P(A))} \Rightarrow n(P^2(A)) = 2^4 \Rightarrow n(P^2(A)) = 16$.

- $P^3(A) = P(P^2(A)) \Rightarrow n(P^3(A)) = n(P(P^2(A)) \Rightarrow n(P^3(A)) = 2^{n(P^2(A))} \Rightarrow$ $n(P^3(A)) = 2^{16} \Rightarrow n(P^2(A)) = 65\ 536$, que é maior do que 65 000.

Percebe-se, portanto, que o menor k, tal que $n(P^k(A)) \geq 65\ 000$, é k = 3.

Seguindo na linha de apresentar problemas sobre a quantificação de subconjuntos, serão apresentados mais dois exercícios resolvidos. O primeiro foi proposto pelo vestibular do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE) em 2016, ao passo que o segundo é uma generalização do resultado, proposto pelo vestibular da Escola Naval (EN) em 2017.

Exercício resolvido 4.1.3: (IFCE 2016) A quantidade de subconjuntos X que satisfazem a inclusão $\{1; 2\} \subset X \subset \{1; 2; 3; 4\}$ é

(A) 4.

(B) 5.

(C) 3.

(D) 2.

(E) 1.

Resolução: Como $\{1; 2\} \subset X$, os números 1 e 2 devem ser elementos de X, isto é, o X com menor cardinalidade possível é $\{1; 2\}$.

Além disso, $X \subset \{1, 2, 3, 4\}$, o que garante que X não pode ter nenhum elemento diferente de 1, 2, 3 e 4, assim, além dos números 1 e 2, podem pertencer ao conjunto X o número 3, o número 4 ou ambos.

Assim sendo, as possibilidades para X são:

- $X = \{1; 2\}$
- $X = \{1; 2; 3\}$
- $X = \{1; 2; 4\}$
- $X = \{1; 2; 3; 4\}$

Logo, são 4 possíveis conjuntos X, e a resposta correta da questão pode ser encontrada na alternativa (A).

Exercício resolvido 4.1.4: (EN 2017) *A* é um conjunto com *n* elementos e *B* é seu subconjunto com *p* elementos, com $n > p$ e $n, p \in \mathbb{N}$. Determine o número de conjuntos *X* tais que $B \subset X \subset A$ e assinale a opção correta.

(A) 2^{n-p}

(B) 2^{n-p+1}

(C) 2^{n+p}

(D) 2^{n+p-1}

(E) 2^{n-p-1}

Resolução: Seja *A* um conjunto com *n* elementos: $\{x_1; x_2; x_3; ...; x_p; x_{p+1}; ...; x_n\}$. Sem perda de generalidade, tome $B = \{x_1; x_2; x_3; ...; x_p\}$. Para determinar um conjunto *X* tal que $B \subset X$, todos os elementos de *B* devem pertencer a *X*, assim sendo, ao construir o subconjunto *X*, haverá apenas 1 opção de escolha para todos eles, pertencer ao conjunto *X*, novamente será utilizado o símbolo + para representar isso.

Já para os demais elementos de *A*, que são x_{p+1}, x_{p+2}, ..., x_{n-1} e x_n, há 2 possibilidades de escolha para cada na hora de construir o subconjunto *X*, pertencer a *X* (representado por +) ou não pertencer a *X* (representado por –).

Desse modo, pode-se montar a estrutura de simulação:

	x_1	x_2	x_3	...	x_p	x_{p+1}	...	x_n
	—	—	—	...	—	—	...	—
possibilidades	+	+	+	...	+	+ –	...	+ –
quantidade	1	1	1	...	1	2	...	2

Como de x_{p+1} a x_n existem exatamente $n - p$ elementos, serão exatamente $n - p$ fatores 2. Ao aplicar o Princípio Multiplicativo, a resposta do problema é 2^{n-p}.

Desse modo, a alternativa correta é a letra (A).

4.2 Quantificação de n-uplas de subconjuntos

Além de problemas sobre a quantificação de subconjuntos, totais ou que satisfazem determinadas condições, outro tipo de exercício interessante é quantificação de n-uplas, ordenadas ou não, de subconjuntos de um determinado conjunto dado.

A técnica para a resolução consiste em listar as possibilidades onde os elementos em questão podem se encaixar nos subconjuntos da n-upla. A seguir, será apresentada uma série de exercícios resolvidos com esta temática, visando mostrar diversas aplicações da técnica citada.

O primeiro exercício é proposto originalmente em Lozansky e Rousseau (1991), enquanto que os demais são exercícios propostos em olimpíadas científicas de diversos países, principalmente dos Estados Unidos da América (EUA).

Exercício resolvido 4.2.1: Encontre o número de k-uplas ordenadas $(S_1; S_2; \dots; S_k)$ satisfazendo $S_1 \subset S_2 \subset \cdots \subset S_k \subset \{1; 2; 3; \dots; n\}$, para dados n e k naturais.

Resolução: Por conta da inclusão apresentada $S_1 \subset S_2 \subset \cdots \subset S_k$, sempre que um elemento pertencer a um dado subconjunto S_i da k-upla, deve pertencer simultaneamente a todos os subconjuntos S_j tais que $j > i$.

Desse modo, para cada um dos elementos de $\{1; 2; 3; \dots; n\}$ deve-se escolher entre uma das seguintes possibilidades:

(i) Pertencer ao conjunto S_k;

(ii) Pertencer aos conjuntos S_k e S_{k-1};

(iii) Pertencer aos conjuntos S_k, S_{k-1} e S_{k-2};

... ...

(k) Pertencer aos conjuntos S_k, S_{k-1}, S_{k-2}, ..., S_2 e S_1.

(k + 1) Não pertencer a nenhum dos conjuntos da k-upla.

Assim, são (k + 1) opções de escolha para cada um dos elementos de $\{1; 2; 3; \dots; n\}$. Montando uma estrutura simplificada:

	1	2	3	...	n
	____	____	____	...	____
quantidade	$k+1$	$k+1$	$k+1$	...	$k+1$

Pelo P.F.C., segue que a resposta do problema é

$$(k+1)\cdot(k+1)\cdot(k+1)\cdot\ldots(k+1) = (k+1)^n \ k\text{-uplas.}$$

Exercício resolvido 4.2.2: (IRÃ 1995) Seja X um conjunto com n elementos. Mostre que o número de pares (A; B), tais que $A \subset B \subset X$, com $A \neq B$, é $3^n - 2^n$.

Resolução: De forma muito similar à realizada no exercício anterior, para cada um dos n elementos de X, existem as seguintes possibilidades:

(i) Pertencer ao conjunto A;

(ii) Pertencer aos conjuntos A e B;

(iii) Não pertencer a nenhum dos conjuntos A ou B.

Desse modo, há 3^n pares ordenados (A; B), tais que $A \subset B \subset X$. Destes, é necessário descontar os pares em que $A = B$.

Para selecionar um par em que $A = B$, basta selecionar um subconjunto, pois o outro será igual. Conforme determinado no exercício resolvido 4.1.1, a quantidade de formas de selecionar um subconjunto qualquer no conjunto X de n elementos é 2^n.

Segue, portanto, que existem $3^n - 2^n$ pares (A; B) de subconjuntos de X, tais que $A \subset B \subset X$, com $A \neq B$■

Exercício resolvido 4.2.3: (EUA) O número de ternos ordenados (A_1; A_2; A_3) nos quais os conjuntos A_1, A_2, A_3 satisfazem $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \{1; 2; 3; ...; 10\}$ e $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \emptyset$ é

(A) 8^{10}. (B) 6^{10}. (C) 5^{10}.

(D) 4^{10}. (E) 2^{10}.

Resolução: Para cada um dos elementos de {1; 2; 3; 4; ...; 10} existem as seguintes possibilidades:

(i) Pertencer somente ao conjunto A_1;
(ii) Pertencer somente ao conjunto A_2;
(iii) Pertencer somente ao conjunto A_3;
(iv) Pertencer somente aos conjuntos A_1 e A_2;
(v) Pertencer somente aos conjuntos A_2 e A_3;
(vi) Pertencer somente aos conjuntos A_1 e A_3;

Desse modo, são 6 possibilidades de escolha para cada um dos 10 elementos, fornecendo $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^{10}$ possíveis ternos ordenados $(A_1; A_2; A_3)$. Sendo alternativa (B) a resposta correta da questão.

Exercício resolvido 4.2.4: (EUA 2010) Define-se uma tripla ordenada $(A; B; C)$ de conjuntos como *minimamente intersectada* se n$(A \cap B)$ = n$(B \cap C)$ = n$(A \cap C)$ = 1 e $A \cap B \cap C = \emptyset$. Por exemplo, $(\{1; 2\}, \{2; 3\}; \{1; 3; 4\})$ é uma tripla *minimamente intersectada*. Seja N o número de triplas ordenadas *minimamente intersectadas* de subconjuntos do conjunto $\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$. Encontre o resto da divisão de N por 1 000.

Resolução: Inicialmente, escolhe-se os elementos comuns de cada um dos pares de conjuntos. Conforme estrutura de simulação, onde selecionou-se o número 1 como o elemento de $A \cap B$, o número 2 para $B \cap C$ e o número 3 para $A \cap C$.

	$A \cap B$	$B \cap C$	$A \cap C$
	1	2	3
possibilidades	1 2 3 4 5 6 7	2 3 4 5 6 7	3 4 5 6 7
quantidade	7	6	5

Desse modo, são $7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$ formas de selecionar os elementos das interseções dois a dois. Para cada um dos demais elementos, nesta simulação os números 4, 5, 6 e 7, há as seguintes possibilidades:

(i) Pertencer somente ao conjunto A;
(ii) Pertencer somente ao conjunto B;
(iii) Pertencer somente ao conjunto C;
(iv) Não pertencer a nenhum dos conjuntos A, B ou C.

Assim, há $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^4 = 256$ modos de distribuir os outros 4 elementos.

Portanto, $N = 210 \cdot 256 = 53\,760$ e o seu resto na divisão por 1 000 é dado pelos seus três últimos algarismos, isto é, 760.

Exercício resolvido 4.2.5: (EUA 1993) Seja S um conjunto com seis elementos a, b, c, d, e e f. Qual é o número de maneiras distintas segundo as quais pode-se selecionar dois subconjuntos de S, não necessariamente distintos, de modo que a união dos dois subconjuntos seja S? A ordem da seleção não é importante, por exemplo, o par de subconjuntos ({a; c}, {b; c; d; e; f}) representa a mesma seleção do par ({b; c; d; e; f}; {a; c}).

Resolução: Inicialmente, pode-se contar o número de pares ordenados (A; B) de subconjuntos de S, não necessariamente distintos, de modo que a união dos dois subconjuntos seja S. Neste cenário, para cada um dos elementos de S, há as seguintes possibilidades:

(i) Pertencer somente ao conjunto A;
(ii) Pertencer somente ao conjunto B;
(iii) Pertencer aos conjuntos A e B simultaneamente.

Desse modo, são $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^6 = 729$ pares ordenados de subconjuntos de S, não necessariamente distintos, cuja união dos dois subconjuntos é S.

Nesta contagem, cada par não ordenado com dois conjuntos diferentes foi contado duas vezes, ao passo que pares com dois conjuntos iguais foram contados apenas uma vez.

A única forma de construir um par com dois conjuntos iguais é realizando a escolha (iii) para todos os elementos, formando o par (S; S).

Desse modo, dos 729 pares ordenados, 728 são pares ordenados com conjuntos distintos e 1 é um par ordenado com conjuntos iguais.

Assim, são $\frac{728}{2} + 1 = 364 + 1 = 365$ pares não ordenados de subconjuntos de S, não necessariamente distintos, cuja união dos dois subconjuntos é S.

Exercício resolvido 4.2.6: (EUA 2002) Seja $S = \{1; 2; 3; ...; 10\}$. Encontre o número de pares não ordenados $(A; B)$, em que A e B são subconjuntos disjuntos não vazios de S.

Resolução: Inicialmente, pode-se contar o número de pares ordenados de subconjuntos disjuntos de S. Neste cenário, para cada um dos elementos de S, há as seguintes possibilidades:

(i) Pertencer somente ao conjunto A;

(ii) Pertencer somente ao conjunto B;

(iii) Não pertencer a nenhum dos conjuntos A ou B.

Desse modo, são $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^{10} = 59\ 049$ pares ordenados de subconjuntos disjuntos de S.

Nesta contagem, cada par não ordenado com dois conjuntos diferentes foi contado duas vezes, ao passo que pares com dois conjuntos iguais foram contados apenas uma vez.

A única forma de construir um par com dois conjuntos iguais é realizando a escolha (iii) para todos os elementos, formando o par $(\emptyset; \emptyset)$.

Desse modo, dos 59 049 pares ordenados, 59 048 são pares ordenados com conjuntos distintos e 1 é um par ordenado com conjuntos iguais.

Assim, são $\frac{59\ 048}{2} + 1 = 29\ 524 + 1 = 29\ 525$ pares não ordenados de subconjuntos disjuntos de S.

Precisa-se agora retirar os pares que envolvem o conjunto vazio. Como vazio é disjunto com qualquer outro conjunto, todos os pares da forma $(\emptyset; X)$ onde X é um subconjunto qualquer de S estão na contagem.

Conforme resultado do exercício resolvido 4.1.1, existem $2^{10} = 1\ 024$ subconjuntos em *S*, isto é, existem 1 024 pares não ordenados envolvendo o conjunto vazio.

Logo, existem 29 525 – 1 024 = 28 501 pares não ordenados (*A*; *B*), em que *A* e *B* são subconjuntos disjuntos não vazios de *S*.

5 PRINCÍPIO DA INCLUSÃO E EXCLUSÃO

Na seção 3.1 deste estudo, ao estabelecer o Princípio Aditivo da contagem, foi determinada a forma de quantificar o número de elementos da união de dois conjuntos disjuntos, que era encontrada pela soma dos números de elementos de cada conjunto.

Com o objetivo de realizar essa mesma contagem para conjuntos finitos quaisquer, surge o Princípio da Inclusão e Exclusão, "[...] uma fórmula para contar o número de elementos que pertencem à união de vários conjuntos não necessariamente disjuntos." (MORGADO *et al*; 2006, p. 56).

5.1 Dois conjuntos

Em sua versão mais simples, o princípio é enunciado para dois conjuntos *A* e *B* da seguinte forma:

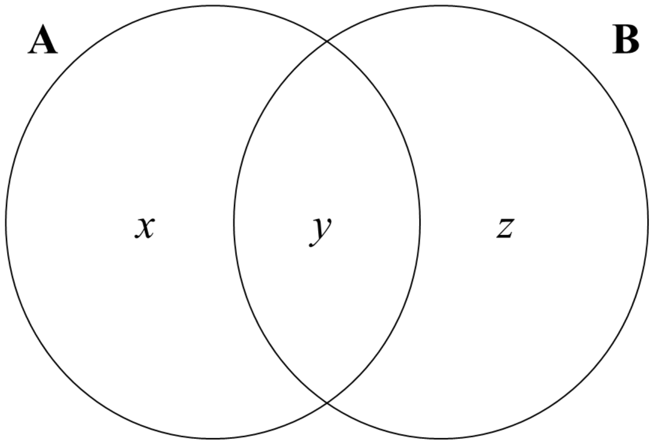
$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

A seguir, serão apresentadas duas demonstrações disponíveis em Morgado *et al*; (2006).

5.1.1 Primeira demonstração

Inicialmente, pode-se assumir que haja *x* elementos que pertençam ao conjunto *A* e não pertençam ao conjunto *B*, isto é, *x* elementos que pertençam somente ao conjunto *A*. Além disso, *y* elementos que pertençam, simultaneamente, aos conjuntos *A* e *B* e *z* elementos que pertençam ao conjunto *B*, mas não pertençam ao conjunto *A*, conforme exibido na figura a seguir.

Figura 16 – Representação genérica de dois conjuntos *A* e *B*, com os números de elementos de cada região indicados



Como A – B, A∩B e B – A são conjuntos disjuntos, o Princípio Aditivo permite escrever:

$$n(A\cup B) = x + y + z$$

$$n(A\cup B) = x + y + z + y - y$$

$$n(A\cup B) = (x + y) + (z + y) - y$$

$$n(A\cup B) = n(A) + n(B) - n(A\cap B)\blacksquare$$

5.1.2 Segunda demonstração

Determinar n(A∪B) é determinar o número de elementos que pertencem a pelo menos um dos dois conjuntos *A* e *B*. Desse modo, pode-se contar todos os elementos de *A* e todos os elementos de *B*, isto é somar n(A) e n(B).

Ao executar esta operação, os elementos de A∩B foram contados duas vezes, uma ao adicionar n(A) e outra ao adicionar n(B), desse modo a segunda contagem de tais elementos deve ser descontada, obtendo-se:

$$n(A\cup B) = n(A) + n(B) - n(A\cap B)\blacksquare$$

Essa última demonstração que retira contagens duplas é bem interessante, pois essa ideia pode ser utilizada na resolução de diversos exercícios. A seguir, será exibido um exercício resolvido visando aplicar tal proposta.

Exercício resolvido 5.1.2.1: O número de subconjuntos de {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8} que não são subconjuntos de {1, 2, 3, 4, 5} nem de {4, 5, 6, 7, 8} é

(A) 196.

(B) 197.

(C) 198.

(D) 199.

(E) 200.

Resolução:

O total de subconjuntos de {1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8} é $2^8 = 256$.

Destes subconjuntos, deve-se retirar os subconjuntos de {1; 2; 3; 4; 5}, que são $2^5 = 32$ subconjuntos.

Também deve-se retirar os subconjuntos de {4; 5; 6; 7; 8}, que são $2^5 = 32$ subconjuntos.

Dessa forma, ficam, até então, 256 – 32 – 32 = 192 subconjuntos.

Porém, os subconjuntos de {1; 2; 3; 4; 5} ∩ {4; 5; 6; 7; 8} = {4; 5} foram retirados duas vezes, ao retirar os subconjuntos de {1; 2; 3; 4; 5} e ao retirar os subconjuntos de {4; 5; 6; 7; 8}, desse modo estes $2^2 = 4$ subconjuntos devem ser adicionados uma vez.

Assim, a resposta do problema fica 192 + 4 = 196 subconjuntos, o que pode ser encontrado na alternativa (A).

5.2 Três conjuntos

Para três conjuntos *A*, *B* e *C*, o Princípio da Inclusão e Exclusão enuncia que

$$n(A\cup B\cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A\cap B) - n(A\cap C) - n(B\cap C) + n(A\cap B\cap C)$$

Abaixo, segue uma demonstração baseada no enunciado do princípio para dois conjuntos e nas propriedades da união e da interseção. Tal demonstração também pode ser encontrada em Morgado *et al*; (2006).

$n(A\cup B\cup C) = n[(A\cup B)\cup C]$

$n(A\cup B\cup C) = n(A\cup B) + n(C) - n[(A\cup B)\cap C]$

$n(A\cup B\cup C) = n(A) + n(B) - n(A\cap B) + n(C) - n[(A\cap C)\cup(B\cap C)]$

$n(A\cup B\cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A\cap B) - n[(A\cap C)\cup(B\cap C)]$

$n(A\cup B\cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A\cap B) - [n(A\cap C) + n(B\cap C) - n(A\cap C\cap B\cap C)]$

$n(A\cup B\cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A\cap B) - n(A\cap C) - n(B\cap C) + n(A\cap C\cap B\cap C)$

$n(A\cup B\cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A\cap B) - n(A\cap C) - n(B\cap C) + n(A\cap B\cap C)$■

A seguir será resolvido um problema proposto do vestibular do ITA de 2000, cuja resolução envolve a aplicação do Princípio da Inclusão e Exclusão para dois e para três conjuntos, que são os casos mais frequentes em exames vestibulares.

Exercício resolvido 5.2.1: (ITA 2000) Denotemos por n(x) o número de elementos de um conjunto finito X. Sejam A, B e C conjuntos tais que $n(A\cup B) = 8$, $n(A\cup C) = 9$, $n(B\cup C) = 10$, $n(A\cup B\cup C) = 11$ e $n(A\cap B\cap C) = 2$. Então $n(A) + n(B) + n(C)$ é igual a

(A) 11.

(B) 14.

(C) 15.

(D) 18.

(E) 25.

Resolução: A resolução segue através de várias aplicações do Princípio da Inclusão e Exclusão. Inicialmente, para cada par de conjuntos:

$$n(A\cup B) = 8 \Rightarrow n(A) + n(B) - n(A\cap B) = 8 \Rightarrow -n(A\cap B) = 8 - n(A) - n(B) \qquad \text{(i)}$$

$$n(A\cup C) = 9 \Rightarrow n(A) + n(C) - n(A\cap C) = 9 \Rightarrow -n(A\cap C) = 9 - n(A) - n(C) \qquad \text{(ii)}$$

$$n(B\cup C) = 10 \Rightarrow n(B) + n(C) - n(B\cap C) = 10 \Rightarrow -n(B\cap C) = 10 - n(B) - n(C) \qquad \text{(iii)}$$

Agora, para os três conjuntos:

$$n(A \cup B \cup C) = 11$$

$$n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C) = 11$$

Substituindo (i), (ii), (iii) e $n(A \cap B \cap C) = 2$, tem-se:

$$n(A) + n(B) + n(C) + 8 - n(A) - n(B) + 9 - n(A) - n(C) + 10 - n(B) - n(C) + 2 = 11$$

$$29 - n(A) - n(B) - n(C) = 11$$

$$29 - 11 = n(A) + n(B) + n(C)$$

$$n(A) + n(B) + n(C) = 18$$

5.3 Caso geral

> Em suma, o número de elementos da união é obtido somando os números de elementos de cada conjunto, subtraindo os números de elementos das interseções dois a dois, somando os das interseções três a três, subtraindo os das interseções quatro a quatro etc. (MORGADO *et al*; 2006, p. 59)

Isto é:

$$n\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right) = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k+1} \left(\sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le m} n\left(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}\right) \right)$$

Para a demonstração para este caso geral, será realizada uma indução em *m*, isto é, seguir os passos:

i) Verificar a validade para casos iniciais;

ii) Considerar a propriedade válida para um valor m – 1 (hipótese de indução);

iii) Provar a validade para *m*.

Com isso, conclui-se a validade da propriedade para todos os valores de *m* maiores que os casos iniciais.

Para o Princípio da Inclusão e Exclusão, já foram realizados os casos iniciais, pois o mesmo já foi demonstrado para dois e para três conjuntos.

Assume-se, como hipótese de indução, a validade do princípio para m – 1 conjuntos, isto é:

$$n\left(\bigcup_{i=1}^{m-1} A_i\right) = \sum_{k=1}^{m-1} (-1)^{k+1} \left(\sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le m-1} n\left(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}\right) \right)$$

Agora, demonstra-se a validade para *m* conjuntos. Inicialmente, tem-se a identidade:

$$n\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right) = n\left[\left(\bigcup_{i=1}^{m-1} A_i\right) \cup A_m\right]$$

Aplicando o Princípio da Inclusão e Exclusão para dois conjuntos:

$$n\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right) = n\left(\bigcup_{i=1}^{m-1} A_i\right) + n(A_m) - n\left[\left(\bigcup_{i=1}^{m-1} A_i\right) \cap A_m\right]$$

Agora, aplica-se a propriedade distributiva da interseção com relação à união.

$$n\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right) = n\left(\bigcup_{i=1}^{m-1} A_i\right) + n(A_m) - n\left(\bigcup_{i=1}^{m-1} A_i \cap A_m\right)$$

Substituindo a hipótese de indução, tem-se:

$$n\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right) = \sum_{k=1}^{m-1} (-1)^{k+1} \left(\sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le m-1} n\left(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}\right) \right) + n(A_m)$$
$$- \sum_{k=1}^{m-1} (-1)^{k+1} \left(\sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le m-1} n\left(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k} \cap A_m\right) \right)$$

Conforme destaca Neto (2016), pode-se perceber que os números de elementos das interseções que não envolvem o novo conjunto A_m conservaram o mesmo sinal. Já as interseções que envolvem o novo conjunto A_m terão um conjunto a mais e, portanto, seus números de elementos deverão ter os sinais invertidos, o sinal negativo na frente do somatório da última parcela garante isso.

Logo, por indução, tem-se que o Princípio da Inclusão e Exclusão válido para qualquer quantidade m de conjuntos, com m $\geq$ 2. Isto é:

$$n\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right) = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k+1}\left(\sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le m} n\left(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}\right)\right) \blacksquare$$

Por exemplo, para quatro conjuntos *A*, *B*, *C* e *D*, tem-se:

$$n(A \cup B \cup C \cup D) = n(A) + n(B) + n(C) + n(D) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(A \cap D) - n(B \cap C)$$
$$- n(B \cap D) - n(C \cap D) + n(A \cap B \cap C) + n(A \cap B \cap D) + n(A \cap C \cap D) + n(B \cap C \cap D)$$
$$- n(A \cap B \cap C \cap D)$$

6 DESIGUALDADES IMPORTANTES

6.1 Desigualdade de Boole

A segunda demonstração realizada para o Princípio da Inclusão e Exclusão com dois conjuntos, na seção 5.1.2, que destaca uma contagem dupla, motiva uma importante consequência imediata do princípio geral, enunciada a seguir para uma coleção de conjuntos finitos A_1, A_2, A_3, ..., A_m.

$$n(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_m) \leq n(A_1) + n(A_2) + n(A_3) + \ldots + n(A_m)$$

Isto é:

$$n\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right) \leq \sum_{k=1}^{m} n(A_k)$$

A igualdade ocorre quando os conjuntos A_1, A_2, A_3, ..., A_m são disjuntos, sendo uma aplicação direta do Princípio Aditivo.

Rifo (2021) enuncia a desigualdade ao dizer que o total de elementos da união de conjuntos é menor que ou igual a soma dos totais de elementos de cada conjunto, já que se houver interseção não-vazia, os elementos da interseção serão contados mais de uma vez.

A desigualdade apresentada possui uma série de aplicações interessantes no estudo das probabilidades e é conhecida como Desigualdade de Boole.

6.2 Desigualdade de Bonferroni

Uma importante consequência da Desigualdade de Boole é a Desigualdade de Bonferroni, enunciada a seguir para uma coleção de conjuntos finitos A_1, A_2, A_3, ..., A_m.

$$n(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m) \geq n(A_1) + n(A_2) + \ldots + n(A_m) - (m-1) \cdot n(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m)$$

Isto é:

$$n\left(\bigcap_{i=1}^{m} A_i\right) \geq \sum_{k=1}^{m} n(A_k) - (m-1) \cdot n(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m)$$

Para facilitar o entendimento da demonstração da desigualdade de Bonferroni, será adotada a seguinte notação para o complementar de qualquer um dos conjuntos da coleção A_1, A_2, A_3, ..., A_m em relação a união de todos eles:

$$\widetilde{A_i} = C^{A_i}_{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m}, \forall i \in \{1; 2; \ldots; m\}$$

Da definição de complementar, $\widetilde{A_i} \cap A_i = \emptyset$ e $\widetilde{A_i} \cup A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m$, para qualquer $i \in \{1; 2; \ldots; m\}$. Desse modo, pode-se escrever que:

$$n\left(\widetilde{A_i}\right) + n(A_i) = n(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m) \Rightarrow n\left(\widetilde{A_i}\right) = n(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m) - n(A_i)$$

Aplicando este fato e a Desigualdade de Boole para a coleção de conjuntos $\widetilde{A_1}$, $\widetilde{A_2}$, $\widetilde{A_3}$, ..., $\widetilde{A_m}$, tem-se:

$$n\left(\widetilde{A_1} \cup \widetilde{A_2} \cup \ldots \cup \widetilde{A_m}\right) \leq n\left(\widetilde{A_1}\right) + n\left(\widetilde{A_2}\right) + \ldots + n\left(\widetilde{A_m}\right)$$

$$n\left(\widetilde{A_1} \cup \widetilde{A_2} \cup \ldots \cup \widetilde{A_m}\right) \leq n(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m) - n(A_1) + n(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m) - n(A_2) + \cdots + n(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m) - n(A_m)$$

$$n\left(\widetilde{A_1} \cup \widetilde{A_2} \cup \ldots \cup \widetilde{A_m}\right) \leq m \cdot n(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m) - n(A_1) - n(A_2) - \cdots - n(A_m)$$

Das Leis de De Morgan, tem-se que:

$$\widetilde{A_1} \cup \widetilde{A_2} \cup \ldots \cup \widetilde{A_m} = \widetilde{A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m} = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m - A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m$$

Como $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m \subset A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m$, conclui-se que:

$$n\left(\widetilde{A_1} \cup \widetilde{A_2} \cup \ldots \cup \widetilde{A_m}\right) = n(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m) - n(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m)$$

Substituindo este resultado na desigualdade antes encontrada, tem-se:

$$n\left(\widetilde{A_1} \cup \widetilde{A_2} \cup \ldots \cup \widetilde{A_m}\right) \leq m \cdot n(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m) - n(A_1) - n(A_2) - \cdots - n(A_m)$$

$$n(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m) - n(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m) \leq m \cdot n(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m) - n(A_1) - n(A_2) - \cdots - n(A_m)$$

$$-n(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m) \leq (m-1) \cdot n(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m) - n(A_1) - n(A_2) - \cdots - n(A_m)$$

Passando as parcelas do 1º membro para o 2º membro e as do 2º membro para o 1º membro da desigualdade, obtém-se:

$$n(A_1) + n(A_2) + \ldots + n(A_m) - (m-1) \cdot n(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m) \leq n(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m)$$

Isto é:

$$n(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m) \geq n(A_1) + n(A_2) + \ldots + n(A_m) - (m-1) \cdot n(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m) \blacksquare$$

Apesar de mais conhecida e utilizada quando adaptada ao contexto das probabilidades, sendo "(...) particularmente útil quando é difícil (ou mesmo impossível) calcular a probabilidade da interseção, mas é importante ter alguma ideia do tamanho desta probabilidade" (CASELLA e BERGER, 2011, p.10), a Desigualdade de Bonferroni na forma apresentada também pode ser bastante útil na resolução de problemas de Teoria dos Conjuntos em cenários similares, conforme poderá ser verificado nos exercícios resolvidos que serão apresentados a seguir.

Exercício resolvido 6.2.1: (EUA) Dados conjuntos A, B e C, sejam n(A), n(B), n(C) suas quantidades de elementos, respectivamente, e sejam s(A), s(B), s(C) suas quantidades de subconjuntos, respectivamente. Sabendo que n(A) = n(B) = 100 e s(A) + s(B) + s(C) = $s(A \cup B \cup C)$, determine:

a) n(C).

b) $n(A \cup B \cup C)$.

c) o valor mínimo de $n(A \cap B \cap C)$.

Resolução: Conforme demonstrado na resolução do exercício resolvido 2.1, a quantidade de subconjuntos de um conjunto de n elementos é dado por 2^n, assim:

$$s(A) = 2^{n(A)},\ s(B) = 2^{n(B)},\ s(C) = 2^{n(C)} \text{ e } s(A \cup B \cup C) = 2^{n(A \cup B \cup C)}.$$

Substituindo na relação dada no enunciado:

$$s(A) + s(B) + s(C) = s(A \cup B \cup C)$$

$$2^{n(A)} + 2^{n(B)} + 2^{n(C)} = 2^{n(A \cup B \cup C)}$$

$$2^{100} + 2^{100} + 2^{n(C)} = 2^{n(A \cup B \cup C)}$$

$$2 \cdot 2^{100} + 2^{n(C)} = 2^{n(A \cup B \cup C)}$$

$$2^{101} + 2^{n(C)} = 2^{n(A \cup B \cup C)}$$

a) A soma de duas potências de 2 só gera uma nova potência de 2 se for a soma de duas potências iguais. Assim, n(C) = 101.

b) Substituindo o valor encontrado em (a) na equação exponencial:

$$2^{101} + 2^{n(C)} = 2^{n(A \cup B \cup C)} \Rightarrow 2^{101} + 2^{101} = 2^{n(A \cup B \cup C)} \Rightarrow 2 \cdot 2^{101} = 2^{n(A \cup B \cup C)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2^{102} = 2^{n(A \cup B \cup C)} \Rightarrow n(A \cup B \cup C) = 102.$$

c) Aplicando a Desigualdade de Bonferroni para três conjuntos:

$$n(A \cap B \cap C) \geq n(A) + n(B) + n(C) - (3 - 1) \cdot n(A \cup B \cup C)$$

$$n(A \cap B \cap C) \geq 100 + 100 + 101 - 2 \cdot 102$$

$$n(A \cap B \cap C) \geq 97$$

Logo, o valor mínimo de $n(A \cap B \cap C)$ é 97.

Exercício resolvido 6.2.2: (IBMEC-RJ 2002) Numa certa empresa, em cada 100 funcionários, 85 possuem cartão de crédito, 70 possuem telefone celular, 75 possuem automóvel e 80 possuem computador portátil. Logo, o número mínimo dos que, simultaneamente, possuem cartão de crédito, telefone celular, automóvel e computador portátil é, em porcentagem, de

(A) 10

(B) 20

(C) 30

(D) 40

(E) 50

1ª Resolução: Sejam C_C o conjunto formado pelos funcionários que possuem cartão de crédito, T_C o conjunto formado pelos que possuem telefone celular, A o conjunto formado pelos que possuem automóvel e C_P o conjunto formado pelos que possuem computador portátil. Aplicando a Desigualdade de Bonferroni para quatro conjuntos, tem-se:

$$n(C_C \cap T_C \cap A \cap C_P) \geq n(C_C) + n(T_C) + n(A) + n(C_P) - (4 - 1) \cdot n(C_C \cup T_C \cup A \cup C_P)$$

$$n(C_C \cap T_C \cap A \cap C_P) \geq n(C_C) + n(T_C) + n(A) + n(C_P) - 3 \cdot n(C_C \cup T_C \cup A \cup C_P)$$

Em um grupo de 100 funcionários:

$$n(C_C \cap T_C \cap A \cap C_P) \geq 85 + 70 + 75 + 80 - 3 \cdot n(C_C \cup T_C \cup A \cup C_P)$$

$$n(C_C \cap T_C \cap A \cap C_P) \geq 310 - 3 \cdot n(C_C \cup T_C \cup A \cup C_P)$$

Para que se obtenha o menor valor possível para $n(C_C \cap T_C \cap A \cap C_P)$ na desigualdade, toma-se $C_C \cup T_C \cup A \cup C_P$ como universo deste grupo de funcionários. Assim, adota-se $n(C_C \cup T_C \cup A \cup C_P) = 100$, obtendo:

$$n(C_C \cap T_C \cap A \cap C_P) \geq 310 - 3 \cdot 100$$

$$n(C_C \cap T_C \cap A \cap C_P) \geq 10$$

Desse modo, o número mínimo dos que, simultaneamente, possuem cartão de crédito, telefone celular, automóvel e computador portátil é 10 a cada 100 funcionários, isto é, 10 em porcentagem.

Logo, a alternativa (A) é a resposta da questão.

Mais a frente, após uma discussão teórica, será exibida uma segunda proposta de resolução para o problema anterior. Por enquanto, segue mais um exercício.

Exercício resolvido 6.2.3: (EN 1988) Se 70% da população gostam de samba, 75% de choro, 80% de bolero e 85% de rock, quantos por cento da população, no mínimo, gostam de samba, choro, bolero e rock?

(A) 5%

(B) 10%

(C) 20%

(D) 45%

(E) 70%

Resolução: Sejam P a população em questão, S o conjunto das pessoas que gostam de samba, C das pessoas que gostam de choro, B de bolero e R de rock. Aplicando a Desigualdade de Bonferroni para quatro conjuntos:

$$n(S \cap C \cap B \cap R) \geq n(S) + n(C) + n(B) + n(R) - (4 - 1) \cdot n(S \cup C \cup B \cup R)$$

$$n(S \cap C \cap B \cap R) \geq n(S) + n(C) + n(B) + n(R) - 3 \cdot n(S \cup C \cup B \cup R)$$

Dividindo ambos os lados da igualdade por n(P):

$$\frac{n(S \cap C \cap B \cap R)}{n(P)} \geq \frac{n(S)}{n(P)} + \frac{n(C)}{n(P)} + \frac{n(B)}{n(P)} + \frac{n(R)}{n(P)} - 3 \cdot \frac{n(S \cup C \cup B \cup R)}{n(P)}$$

Adotando a notação p(A) para representar o percentual de um conjunto desta situação com relação ao universo, tem-se:

$$p(S \cap C \cap B \cap R) \geq p(S) + p(C) + p(B) + p(R) - 3 \cdot p(S \cup C \cup B \cup R)$$

Substituindo os dados fornecidos pelo enunciado:

$$p(S \cap C \cap B \cap R) \geq 70\% + 75\% + 80\% + 85\% - 3 \cdot p(S \cup C \cup B \cup R)$$

$$p(S \cap C \cap B \cap R) \geq 310\% - 3 \cdot p(S \cup C \cup B \cup R)$$

Para que se obtenha o menor valor possível para $p(S \cap C \cap B \cap R)$, deve-se adotar o maior valor possível para $p(S \cup C \cup B \cup R)$, isto é, $p(S \cup C \cup B \cup R) = 100\%$. Assim sendo:

$$p(S \cap C \cap B \cap R) \geq 310\% - 3 \cdot 100\%$$

$$p(S \cap C \cap B \cap R) \geq 10\%$$

Logo, no mínimo, 10% gostam de samba, choro, bolero e rock e a alternativa correta da questão é a alternativa (B).

Ao se analisar uma desigualdade, é importante analisar quando a igualdade do resultado é atingida. No caso da Desigualdade de Bonferroni, a igualdade está relacionada à igualdade da Desigualdade de Boole no passo:

$$n\left(\widetilde{A_1} \cup \widetilde{A_2} \cup \ldots \cup \widetilde{A_m}\right) \leq n\left(\widetilde{A_1}\right) + n\left(\widetilde{A_2}\right) + \ldots + n\left(\widetilde{A_m}\right)$$

Isto é, a igualdade ocorre quando os complementares de cada conjunto com relação à união deles forem disjuntos, ou seja, cada elemento que não pertence a um determinado conjunto A_i da coleção A_1, A_2, A_3, ..., A_m não pertence somente a este conjunto A_i.

Simbolicamente:

$$\widetilde{A_i} \cap \widetilde{A_j} = \emptyset, \forall i,j \in \{1; 2; 3; ...; m\}$$

Aplicando o complementar com relação a união de todos os conjuntos da coleção em ambos os lados da igualdade e a Lei de De Morgan para a interseção, tem-se:

$$\widetilde{\widetilde{A_i} \cap \widetilde{A_j}} = \widetilde{\emptyset}, \forall i,j \in \{1; 2; 3; \ldots; m\}$$

$$A_i \cup A_j = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m, \forall i,j \in \{1; 2; 3; ...; m\}$$

Em suma, quando ocorre a igualdade, cada elemento da coleção de conjuntos ou pertence a todos os m conjuntos ou pertence a (m – 1) deles. Esse contexto foi cobrado em uma questão proposta pelo vestibular do Instituto Militar de Engenharia (IME) em 2011, que será resolvida a seguir.

Exercício resolvido 6.2.4: (IME 2011) Um curso oferece as disciplinas A, B, C e D. Foram feitas as matrículas dos alunos da seguinte forma:

- 6 alunos se matricularam na disciplina A;
- 5 alunos se matricularam na disciplina B;
- 5 alunos se matricularam na disciplina C; e
- 4 alunos se matricularam na disciplina D.

Sabe-se que cada aluno se matriculou em, no mínimo, 3 disciplinas. Determine a quantidade mínima de alunos que se matricularam nas quatro disciplinas.

(A) 0.

(B) 1.

(C) 2.

(D) 3.

(E) 4.

Resolução: Se cada aluno se matriculou em, no mínimo, 3 disciplinas, existem dois tipos de alunos: os matriculados em 3 disciplinas e os matriculados em 4 disciplinas.

Sendo x a quantidade de alunos matriculados em 3 disciplinas e y a quantidade de alunos em 4 disciplinas, o total de matrículas pode ser calculado pela expressão $3x + 4y$.

Além disso, o total de matrículas também pode ser calculado somando-se o número de matriculados em cada disciplina, isto é, 6 + 5 + 5 + 4 = 20.

Desse modo, $3x + 4y = 20$.

Como x e y devem ser números inteiros não negativos, as únicas soluções possíveis para a equação são:

$$\begin{cases} x = 0; y = 5 \\ x = 4; y = 2 \end{cases}$$

Caso $x = 0$ e $y = 5$, todos os alunos estariam matriculados nas 4 disciplinas, isso seria contraditório com os dados do problema, pois faria todas as disciplinas terem mesma quantidade de matriculados, o que não ocorre para as disciplinas A e D.

Desse modo, conclui-se que o único valor possível para y é 2, sendo este o número de alunos que se matricularam nas quatro disciplinas.

Se a única possibilidade para o número de alunos que se matricularam nas quatros disciplinas é 2, este é o valor mínimo para essa quantidade e a resposta da questão pode ser encontrada na alternativa (C).

Baseando-se no procedimento de demonstração da Desigualdade de Bonferroni, compreender quando ocorre a igualdade pode ser útil para propor outras soluções para alguns problemas. A seguir, será exibida uma segunda resolução para o exercício resolvido 6.2.2.

Exercício resolvido 6.2.2: (IBMEC-RJ 2002) Numa certa empresa, em cada 100 funcionários, 85 possuem cartão de crédito, 70 possuem telefone celular, 75 possuem automóvel e 80 possuem computador portátil. Logo, o número mínimo dos que, simultaneamente, possuem cartão de crédito, telefone celular, automóvel e computador portátil é, em porcentagem, de

(A) 10 (B) 20 (C) 30 (D) 40 (E) 50

2ª Resolução: Em um grupo de 100 funcionários, se:

- 85 possuem cartão de crédito, 100 – 85 = 15 não possuem cartão de crédito;
- 70 possuem telefone celular, 100 – 70 = 30 não possuem telefone celular;
- 75 possuem automóvel, 100 – 75 = 25 não possuem automóvel;
- 80 possuem computador portátil, 100 – 80 = 20 não possuem computador portátil.

O número mínimo de funcionários possuindo, simultaneamente, cartão de crédito, telefone celular, automóvel e computador portátil ocorre quando os conjuntos complementares de cada um dos conjuntos de funcionários forem disjuntos, ou seja, o número de pessoas que não possuem pelo menos um dos objetos for calculado pela soma dos que não possuem cada um destes objetos, isto é, 15 + 30 + 25 + 20 = 90.

Se 90 dos 100 funcionários não possuem pelo menos um dos objetos, 100 – 90 = 10 possuem, simultaneamente, todos os objetos, sendo a alternativa (A) a resposta da questão.

É importante destacar que nem sempre a igualdade é atingível na Desigualdade de Bonferroni. No exercício anterior, caso a soma dos funcionários que não possuíam cada um dos objetos ultrapasse o número de elementos do conjunto universo, os conjuntos não poderiam ser disjuntos.

Conforme destacam Casella e Berger, a menos que os números de elementos de cada um dos conjuntos envolvidos sejam suficientemente grandes, ou seja os números de elementos de seus complementares suficientemente pequenos, o limite de Bonferroni é um número negativo inútil (mas correto).

Exemplo 6.2.1: Aplicando a Desigualdade de Bonferroni para três conjuntos A, B e C, tais que $n(A) = 5$, $n(B) = 10$, $n(C) = 15$ e $n(A \cup B \cup C) = 20$, obtém-se:

$$n(A \cap B \cap C) \geq n(A) + n(B) + n(C) - (3 - 1) \cdot n(A \cup B \cup C)$$

$$n(A \cap B \cap C) \geq 5 + 10 + 15 - 2 \cdot 20$$

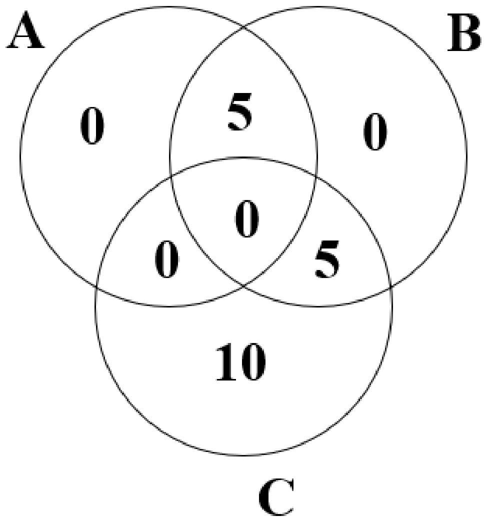
$$n(A \cap B \cap C) \geq -10$$

O resultado encontrado é correto, afinal o número de elementos de um conjunto é maior do que qualquer quantidade negativa, mas a igualdade não é atingível. Isso ocorre, pois as quantidades de elementos fornecidas não permitem que os complementares de cada conjunto com relação a união sejam disjuntos.

Isto é, não é possível distribuir estes elementos de modo que cada um pertença a pelo menos dois conjuntos, necessariamente existirá elemento que pertença a exatamente um dos conjuntos.

Nestes cenários, o número mínimo de elementos da interseção comum a todos os conjuntos é zero. A figura a seguir destaca a possibilidade, através de um exemplo, de ocorrência da interseção comum vazia para o exemplo dado.

Figura 17 – Possível distribuição dos elementos nos conjuntos do Exemplo 6.2.1



7 PRINCÍPIO DAS GAVETAS DE DIRICHLET

"A Análise Combinatória não se ocupa apenas com a contagem de elementos de conjuntos. Muitas vezes, o que se deseja é determinar a existência ou não de conjuntos satisfazendo a certas propriedades." (MORGADO *et al*; 2006, p. 81).

O matemático alemão Lejeune Dirichlet estabeleceu o Princípio das Gavetas de Dirichlet, também conhecido como Princípio das Casas dos Pombos ou simplesmente Princípio de Dirichlet, como uma ferramenta simples para resolver alguns desses problemas.

O princípio consiste na certeza de obter determinado resultado e pode ser enunciado da seguinte maneira: "Se n objetos forem colocados em no máximo, $n - 1$ gavetas então pelo menos uma delas conterá pelo menos dois objetos." (MORGADO *et al*; 2006, p. 81).

Conforme apresentado em Morgado *et al*; (2006), a demonstração segue por absurdo, pois supondo que cada uma das $n - 1$ gavetas contenha, no máximo, um objeto, o número total de objetos nelas colocados será, no máximo, $n - 1$, o que é uma contradição, pois existem n objetos na hipótese.

A aplicação do princípio na resolução de problemas consiste em fazer analogias, conforme pode ser observado no exemplo a seguir.

Exemplo 7.1: Em um conjunto de 8 pessoas, pelo menos duas delas nasceram em um mesmo dia da semana.

No exemplo em questão, as pessoas seriam os objetos e os sete dias da semana fariam o papel das gavetas.

Apesar de pouco privilegiado no estudo da Análise Combinatória no Ensino Médio, "[...] o princípio das gavetas de Dirichlet, é mais simples ou pelo menos tão simples quanto o estudo das combinações, arranjos e permutações." (MORGADO *et al*; 2006, p. 81).

Desse modo, é interessante que ele também seja trabalhado, contribuindo assim para uma visão de que a Análise Combinatória é uma área da Matemática de que pode ser compreendida de maneira adequada por parte dos estudantes.

Além disso, vale destacar que, apesar de ter um enunciado simples, o Princípio das Gavetas de Dirichlet pode ser bastante útil. “Esta ideia tão óbvia é, na realidade, uma poderosa ferramenta na demonstração de muitos resultados bastante difíceis.” (SANTOS, 2018, p.53).

“O que, muitas vezes, torna o problema difícil é a construção de um conjunto ou conjuntos aos quais se possa aplicar este princípio.” (SANTOS, 2018, p.53). Isto é, a realização das analogias citadas anteriormente.

Diversas práticas para enfrentamento desses problemas poderão ser verificadas nos diversos exercícios resolvidos exibidos neste capítulo.

Dando início a estes exercícios, será exibida uma questão proposta pela Fundação para o Vestibular da Universidade Estadual Paulista (VUNESP), destacando a importância do estudo deste princípio também devido a sua presença em exames vestibulares e concursos.

Exercício resolvido 7.1: (VUNESP) Um jantar reúne 13 pessoas de uma mesma família. Das afirmações a seguir, referentes às pessoas reunidas, a única necessariamente verdadeira é:

(A) Pelo menos uma delas tem altura superior a 1,90 m.

(B) Pelo menos duas delas são do sexo feminino.

(C) Pelo menos duas delas fazem aniversário no mesmo mês.

(D) Pelo menos uma delas nasceu num dia par.

(E) Pelo menos uma delas nasceu em janeiro ou fevereiro.

Resolução: A resolução baseia-se em analisar cada uma das alternativas individualmente, conforme segue.

Alternativa (A): Pode ser falsa, basta pegar 13 pessoas todas com 1,70 m de altura, por exemplo.

Alternativa (B): Pode ser falsa, é possível reunir 13 homens de uma mesma família.

Alternativa (C): Necessariamente é verdadeira, como o ano possui 12 meses, pode-se imaginar que os mesmos desempenham o papel de 12 gavetas, as 13 pessoas representariam 13 objetos e, pelo Princípio das Gavetas de Dirichlet, pelo menos duas delas fazem aniversário no mesmo mês.

Alternativa (D): Pode ser falsa, como existem até 16 possibilidades de dia ímpar, é possível que todas as pessoas nasçam em 13 dias ímpares de um mesmo mês, inclusive, ao longo de anos torna-se mais possível ainda.

Alternativa (E): Pode ser falsa, todas podem ter nascido em março, por exemplo. É importante destacar que isso não entra em contradição com a alternativa (C), pois se as 13 pessoas tivessem nascido no mesmo mês, esse mês teria mais do que duas pessoas, portanto teria pelo menos duas.

Desse modo, a resposta do problema é Alternativa (C).

A seguir, será apresentado um clássico problema sobre o Princípio das Gavetas de Dirichlet, que pode ser encontrado, por exemplo, em Morgado *et al*; (2006) e em Santos (2018).

Exercício resolvido 7.2: Assumindo que “conhecer” é uma relação simétrica, ou seja, se a conhece b, então b conhece a. Mostre que, em um conjunto de n pessoas, há sempre duas pessoas que conhecem exatamente o mesmo número de pessoas do conjunto.

Resolução: Como não faz sentido analisar a possibilidade de uma pessoa conhecer a si mesma, pois isso sempre ocorre, pode-se observar que qualquer das pessoas do conjunto conhece, no mínimo, 0 e, no máximo, $n - 1$ das outras pessoas.

Entretanto, se alguma pessoa do conjunto conhecer todas as $n - 1$ outras pessoas, então se torna impossível que haja alguma pessoa conhecendo 0 pessoas. A recíproca também ocorre, isto é, se alguma pessoa do conjunto conhecer 0 das outras pessoas, se torna impossível que haja alguma pessoa conhecendo todas as outras $n - 1$ pessoas.

Agora, para aplicar o Princípio das Gavetas de Dirichlet, pode-se imaginar que as pessoas são objetos a serem alocados de modo que na 1ª gaveta estão as pessoas que conhecem 0 das outras pessoas, na 2ª as pessoas que conhecem 1 outra, e assim por diante, até a n^a gaveta que teria as pessoas que conhecem $n - 1$ outras.

Apesar de serem *n* gavetas, as *n* pessoas são colocadas em, no máximo, *n – 1* gavetas, pois já foi argumentado que a primeira e a última das gavetas não podem ser ocupadas simultaneamente.

Desse modo, pelo menos uma das gavetas conterá pelo menos duas pessoas, isto é, pelo menos duas pessoas conhecem o mesmo número de pessoas do conjunto■

Mais a frente, será apresentada uma variação desse problema, que introduz um importante ramo da Análise Combinatória, conhecido como Teoria de Ramsey, em homenagem ao matemático inglês Frank Ramsey.

Continuando com a resolução de exercícios, será apresentado agora um problema retirado de Lozansky e Rousseau (1991), acompanhado de resolução baseada na proposta pelos autores.

Exercício resolvido 7.3: Um elfo ajudante do Papai Noel fabrica pelo menos um brinquedo todos os dias, mas não mais do que 730 brinquedos em um ano (mesmo nos anos bissextos). Prove que para qualquer inteiro positivo n, o elfo fabrica exatamente n brinquedos em alguma sequência de dias consecutivos.

Note que os anos bissextos são uma parte essencial do problema. De maneira diferente, o elfo poderia fazer dois brinquedos todos os dias e a afirmação a ser provada seria falsa para qualquer n ímpar.

Resolução: Considerando um período significativo de k anos consecutivos, onde r são anos bissextos, o elfo trabalha por $p = 365k + r$ dias e não fabrica mais do que $730k$ brinquedos.

Seja a_s o total de brinquedos fabricados pelo elfo do dia 1 ao dia s do período de anos considerado.

Para um dado inteiro positivo n, considere a sequência de $2p$ números a seguir, dividida em duas linhas.

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_p$$

$$a_1 + n, a_2 + n, a_3 + n, \dots, a_p + n$$

Percebe-se que são $2p = 730k + 2r$ números na sequência criada, e todos estão compreendidos entre 1 e $730k + n$.

Excetuando-se os anos que são múltiplos de 100 e não são múltiplos de 400, todo ano divisível por 4 é um ano bissexto. Desse modo, esperando um período de tempo razoável, torna-se possível ter mais do que $\frac{n}{2}$ anos bissextos para o inteiro positivo n escolhido.

Após este período de tempo, acontecerá que $2r > n$, de modo que a quantidade de números na sequência seja maior do que a quantidade de possíveis valores para os números na mesma. Assim, o Princípio das Gavetas de Dirichlet garante que dois números da sequência precisam ser iguais.

Tendo em vista que o elfo fabrica pelo menos um brinquedo todos os dias, pode-se afirmar que $a_1 < a_2 < \cdots < a_p$. Desse modo, não existem números iguais na linha superior, nem na linha inferior.

Portanto, os dois números iguais devem estar em linhas diferentes, isto é, existem dois números inteiros i e j, com $1 \leq i < j \leq p$, tais que $a_j = a_i + n$.

Desse modo, do dia $i + 1$ ao dia j, o elfo fabrica exatamente n brinquedos■

Buscando resolver uma gama ainda maior de problemas, o Princípio de Dirichlet pode ainda ser generalizado ao ser enunciado do seguinte modo: “Se m objetos são colocados em n gavetas, então pelo menos uma gaveta contém $\left[\frac{m-1}{n}\right] + 1$ objetos.” (MORGADO *et al*; 2006, p. 83).[1]

A demonstração também segue por absurdo, conforme mostra Morgado *et al*; (2006), ao dizer que se cada gaveta contiver, no máximo, $\left[\frac{m-1}{n}\right]$ objetos, então o número total de objetos será, no máximo:

$$n\left[\frac{m-1}{n}\right] \leq n \cdot \frac{m-1}{n} = m - 1 < m,$$

o que é uma contradição com o fato de haver m objetos.

[1] Onde [x] o maior inteiro menor que ou igual a x. Por exemplo, [4,3] = 4 e [6] = 6.

Novamente mostrando a incidência do Princípio das Gavetas de Dirichlet em vestibulares e concursos, serão resolvidos dois exercícios, um proposto pela Fundação Getúlio Vargas (FGV) e outro, em 2015, pelo vestibular da Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP).

Exercício resolvido 7.4: (FGV) Um grupo de 6 estagiários foi designado para rever 50 processos e cada processo deveria ser revisto por apenas um dos estagiários. No final do trabalho, todos os estagiários trabalharam e todos os processos foram revistos. É necessariamente correto afirmar que

(A) um dos estagiários reviu 10 processos.

(B) todos os estagiários reviram, cada um, pelo menos 5 processos.

(C) um dos estagiários só reviu 2 processos.

(D) quatro estagiários reviram 7 processos e dois estagiários reviram 6 processos.

(E) pelo menos um dos estagiários reviu 9 processos ou mais.

1ª Resolução: Efetuando-se a divisão de 50 por 6, obtém-se quociente 8 e resto 2. Desse modo, direcionando 8 processos para cada estagiário, restam 2 que deveram ainda ser distribuídos, de modo que pelo menos um dos estagiários precisa rever 9 processos ou mais. Sendo a resposta da questão a alternativa (E).

2ª Resolução: Aplicando diretamente o Princípio das Gavetas de Dirichlet enunciado mais recentemente, colocando cada processo (objeto) na gaveta da pessoa que o reviu, para m = 50 e n = 6, tem-se que pelo menos uma gaveta conterá, no mínimo, $\left[\frac{50-1}{6}\right]+1=\left[\frac{49}{6}\right]+1=8+1=9$ objetos, isto é, pelo menos um dos estagiários reviu 9 processos ou mais. Ratificando alternativa (E) como resposta correta da questão.

Percebe-se, pela primeira resolução apresentada no último exercício, que nem sempre existe a necessidade de formalizar o Princípio das Gavetas de Dirichlet. Seu enunciado simples permite, por muitas vezes, apenas uma simples argumentação particular para os números de cada problema.

Essa visão colabora para outros modelos de questão, que nem sempre são aplicações diretas do princípio na forma como fora enunciado, mas baseiam-se na ideia por trás do mesmo.

Isso poderá ser observado no próximo exercício, que ao invés de questionar qual situação obrigatoriamente ocorre em uma situação já construída, pergunta qual a condição necessária para que dada condição obrigatoriamente ocorra.

Exercício resolvido 7.5: (UNICAMP 2015) O número mínimo de pessoas que deve haver em um grupo para que possamos garantir que nele há pelo menos três pessoas nascidas no mesmo dia da semana é igual a

(A) 21.

(B) 20.

(C) 15.

(D) 14.

Resolução: A semana possui 7 dias, desse modo, com 7 pessoas é possível colocar uma pessoa (objeto) em cada dia (gaveta). Com $7 \cdot 2 = 14$ pessoas, ainda é possível colocar apenas duas em cada dia. Já se houverem 15 pessoas, pelo Princípio das Gavetas de Dirichlet, haverá pelo menos três pessoas nascidas no mesmo dia da semana, pois $\left[\frac{15-1}{7}\right] + 1 = 3$. Assim, o menor número de pessoas para que se tenha garantia do ocorrido é 15, o que pode ser encontrado na alternativa (C).

O Princípio das Gavetas de Dirichlet também é muito frequente em provas de olimpíadas científicas ao redor do mundo. A seguir, será resolvido um interessante problema proposto pelo Torneio das Cidades em 1994.

Exercício resolvido 7.6: (Torneio das Cidades 1994) Existem 20 alunos em uma escola. Cada um deles possui duas avós, uma materna e uma paterna. Qualquer dois deles possui uma avó em comum. Prove que pelo menos 14 deles possuem uma avó em comum.

Resolução: Sejam V_1 e V_2 as duas avós de um aluno qualquer. Pode-se separar todos os alunos em três conjuntos:

(i) Alunos que possuem V_1 e V_2 como avós;

(ii) Alunos que possuem V_1 e outra como avós;

(iii) Alunos que possuem V_2 e outra como avós.

Todos os alunos estão em um destes conjuntos, pois se o aluno não tiver nem V_1 nem V_2 como avós, ele não terá avó em comum com os alunos do conjunto (i), o que não cumpre as condições do problema.

Os alunos dos conjuntos (ii) e (iii) precisam ter uma avó em comum, seja, portanto, V_3 esta avó. Assim, os três conjuntos onde os alunos estão categorizados se tornam:

(i) Alunos que possuem V_1 e V_2 como avós;

(ii) Alunos que possuem V_1 e V_3 como avós;

(iii) Alunos que possuem V_2 e V_3 como avós.

Considerando esses três conjuntos como gavetas e os alunos os objetos a serem guardados nessas gavetas, pode-se utilizar a ideia do Princípio das Gavetas de Dirichlet para finalizar a resolução do problema.

Dividindo os 20 alunos igualmente nos três conjuntos, ficam 6 alunos em cada conjunto e sobram 2. Com os 6 alunos em cada conjunto, cada avó fica com exatamente 12 netos, pois:

- V_1 tem 6 netos no conjunto (i) e 6 netos no conjunto (ii);
- V_2 tem 6 netos no conjunto (i) e 6 netos no conjunto (ii);
- V_3 tem 6 netos no conjunto (ii) e 6 netos no conjunto (iii).

Nesta configuração, ainda não há nenhuma avó com 14 netos, e é o mais próximo de evitar isso que se pode chegar.

Porém, ainda existem 2 alunos a serem posicionados. Independente dos conjuntos onde esses alunos entrem, eles terão uma avó em comum, o que fará esta avó possuir 12 + 2 = 14 netos.

Logo, pelo menos 14 dos alunos possuem uma avó em comum ■

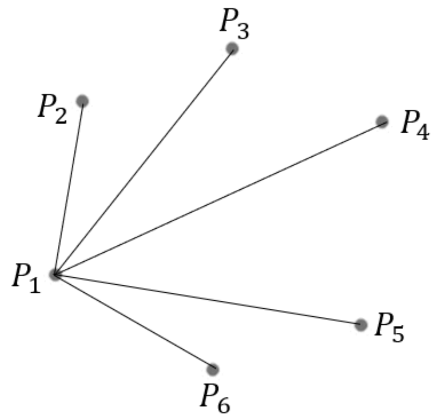
A seguir será resolvido um exercício que permitirá diversas contextualizações, dentre elas uma abordagem similar à trabalhada pelo exercício resolvido 7.2, proposta no vestibular do IME de 1978 e que também terá sua resolução apresentada.

Exercício resolvido 7.7: A partir de 6 pontos do plano não colineares três a três, traçam-se todos os segmentos de reta que os unem. Se cada segmento de reta for pintado de azul ou de preto, prove que existirá pelo menos um triângulo monocromático (em que os três lados serão pintados da mesma cor).

Resolução: Sejam P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 e P_6 os seis pontos em questão.

Inicialmente, pode-se observar que cada um dos pontos pertence a exatamente 5 segmentos de reta, pois é conectado a cada um dos outros cinco, conforme pode ser observado na figura a seguir com os 5 segmentos de reta que envolvem P_1.

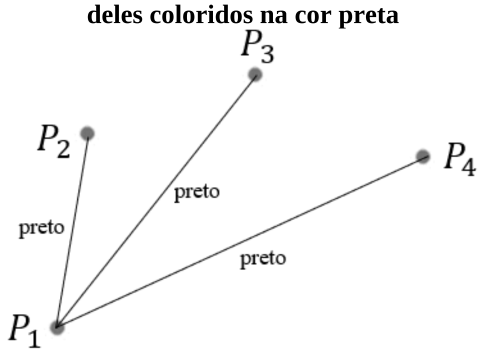
Figura 18 – 6 pontos não colineares no plano com os 5 segmentos de reta determinados por um deles



Esses 5 segmentos precisarão ser distribuídos entre duas cores (azul ou preto), como 5 dividido por 2 fornece quociente 2 e resto um, o Princípio das Gavetas de Dirichlet garante que pelo menos três segmentos serão da mesma cor, de fato $\left[\frac{5-1}{2}\right] + 1 = 3$.

Sem perda de generalidade, pode-se tomar os segmentos $\overline{P_1P_2}$, $\overline{P_1P_3}$ e $\overline{P_1P_4}$ como pretos, de acordo com o que pode ser observado na Figura 19.

Figura 19 – 4 pontos não colineares no plano com os 3 segmentos de reta determinados por um deles coloridos na cor preta



Os demais segmentos que envolvem os pontos destacados na última figura são $\overline{P_2P_3}$, $\overline{P_2P_4}$ e $\overline{P_3P_4}$. Se qualquer um deles for preto, surgirá um triângulo monocromático com os três lados pintados de preto, por exemplo, se $\overline{P_2P_3}$ for preto, então o triângulo $P_1P_2P_3$ será preto.

Já se nenhum destes segmentos for preto, é porque todos são azuis, fazendo o triângulo $P_2P_3P_4$ ser monocromático com os três lados pintados de azul.

Desse modo, sempre existirá um triângulo monocromático■

Exercício resolvido 7.8: (IME 1978) Mostre que, em toda reunião constituída de seis pessoas, uma das hipóteses necessariamente ocorre (podendo ocorrer ambas):

I) Existem três pessoas que se conhecem mutuamente (isto é, das três cada duas se conhecem).

II) Existem três pessoas que se desconhecem mutuamente (isto é, das três cada duas se desconhecem).

Resolução: Pode-se representar as seis pessoas em questão por seis pontos no plano P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 e P_6. De modo que, quando duas determinadas pessoas se conhecerem mutuamente, conecta-se os dois pontos que a representam por um segmento de reta azul. Já se as pessoas se desconhecerem mutuamente, conecta-se os dois pontos que a representam por um segmento de reta preto.

Desse modo, o problema reduz-se a provar que, necessariamente, existe um triângulo com todos os lados azuis (três pessoas que se conhecem mutuamente) ou um triângulo com todos os lados pretos (três pessoas que se desconhecem mutuamente), podendo ocorrer ambas as hipóteses.

A partir de agora, basta repetir a resolução do exercício resolvido 7.5.

Conforme destaca Júnior (2016), este último problema proposto pelo vestibular do IME é um caso particular de um importante resultado conhecido como Teorema de Ramsey, sendo este o teorema inicial da Teoria de Ramsey.

7.1 Problemas envolvendo Teoria dos Conjuntos e Princípios de Contagem

Conectando este capítulo com os anteriores, esta seção busca contextualizar o Princípio das Gavetas de Dirichlet em problemas que envolvam Teoria dos Conjuntos ou os Princípios de Contagem.

O primeiro exercício a ser resolvido é um problema que envolve partições de um conjunto dado em subconjuntos menores e foi proposto pelo Exame Nacional de Qualificação (ENQ) do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) na prova de 2015.1. A resolução apresentada é baseada na proposta pela banca elaboradora.

Exercício resolvido 7.1.1: (ENQ PROFMAT 2015.1)

a) Considere um conjunto formado por 11 números inteiros positivos diferentes, menores do que 21. Prove que podemos escolher dois desses números tais que um divide o outro.

b) Exiba um conjunto com 10 números inteiros positivos, menores do que 21, tais que nenhum deles é múltiplo de outro.

Resolução:

a) A ideia é criar uma partição do conjunto {1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15; 16; 17; 18; 19; 20} de 10 subconjuntos, onde em cada conjunto da partição quaisquer dois elementos dividam um ao outro, por exemplo:

{1; 2; 4; 8; 16}, {3; 6; 12}, {5; 10; 20}, {7; 14}, {9; 18}, {11}, {13}, {15}, {17} e {19}

Como serão selecionados 11 números inteiros diferentes e são somente 10 subconjuntos, o Princípio das Gavetas de Dirichlet, garante que pelo menos 2 números (objetos) serão do mesmo conjunto (gavetas), e portanto, um dividirá o outro ■

b) Existem várias possíveis respostas.

Uma delas é {11; 12; 13; 14; 15; 16; 17; 18; 19; 20}.

Mais à frente, será discutida uma generalização do último exercício, que tornará mais claro como proceder para realizar uma possível partição, como a que foi utilizada no item (a).

Os três problemas seguintes evolvem o P.F.C. e podem ser encontrados em Morgado e Carvalho (2015).

Exercício resolvido 7.1.2: 40 100 candidatos estão fazendo uma prova de 20 questões de múltipla escolha, com 5 alternativas por questão. Suponha que nenhum candidato deixe de responder a nenhuma questão. Considere a afirmação: “Pelo menos k candidatos responderão de modo idêntico às 4 primeiras questões da prova”. Determine o maior valor de k para o qual a afirmação é certamente verdadeira.

Resolução: Sendo as questões de múltipla escolha com 5 alternativas, há 5 possibilidades de resposta para cada questão. Assim, pelo P.F.C., há $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^4 = 625$ possibilidades de resposta para as quatro primeiras questões.

Cada candidato (objeto) responderá uma destas possibilidades de resposta (gaveta). São 40 100 candidatos e 40 100 dividido por 625 fornece quociente 64 e resto 100, desse modo, o Princípio das Gavetas de Dirichlet garante que pelo menos 65 candidatos responderão de modo idêntico às 4 primeiras questões da prova.

É possível montar uma configuração onde não haja 66 candidatos diferentes respondendo de modo idêntico às 4 primeiras questões da prova (basta tomar 65 candidatos em cada um dos 100 primeiros padrões de resposta e 64 candidatos nos 525 padrões restantes),

Logo, o maior valor de k para o qual a afirmação é certamente verdadeira é $k = 65$.

Exercício resolvido 7.1.3: 40 100 candidatos estão fazendo uma prova de 20 questões de múltipla escolha, com 5 alternativas por questão. Suponha que nenhum candidato deixe de responder a nenhuma questão. Considere a afirmação: “Pelo menos 4 candidatos responderão de modo idêntico às k primeiras questões da prova”. Determine o maior valor de k para o qual a afirmação é certamente verdadeira.

Resolução: Sendo as questões de múltipla escolha com 5 alternativas, há 5 possibilidades de resposta para cada questão. Assim, pelo P.F.C., há $5 \cdot 5 \cdot ... \cdot 5 = 5^k$ possibilidades de resposta para as k primeiras questões.

Com $3 \cdot 5^k$ candidatos, ainda é possível que haja apenas 3 candidatos em cada um dos padrões de resposta.

Já com $3 \cdot 5^k + 1$ candidatos, o Princípio das Gavetas de Dirichlet garante que pelo menos 4 candidatos responderão de modo idêntico às k primeiras questões da prova.

Para que isso ocorra com 40 100 candidatos, é necessário que $3 \cdot 5^k + 1 \leq 40\,100 \Rightarrow 3 \cdot 5^k \leq 40\,099 \Rightarrow 5^k \leq 13\,366{,}333...$

Como $5^5 = 3\,125$ e $5^6 = 15\,625$, o maior valor possível para k é $k = 5$.

Exercício resolvido 7.1.4: Uma prova de concurso é formada por questões de múltipla escolha, com 4 alternativas por questão. Admita que nenhum candidato deixe questões sem responder.

a) Qual é o número mínimo de candidatos para que seja possível garantir que pelo menos 3 deles darão exatamente as mesmas respostas nas 5 primeiras questões?

b) Qual é o valor máximo de n para o qual é possível garantir que, em um concurso com 1 000 candidatos, pelo menos 2 darão as mesmas respostas nas primeiras n questões?

Resolução: Sendo as questões de múltipla escolha com 4 alternativas, há 4 possibilidades de resposta para cada questão. Assim, pelo P.F.C., há $4 \cdot 4 \cdot ... \cdot 4 = 4^n$ possibilidades de resposta para as n primeiras questões.

a) Para as 5 primeiras questões, há $4^5 = 1\,024$ possibilidades de resposta.

Com $2 \cdot 1\,024 = 2\,048$ candidatos, ainda é possível apenas 2 terem exatamente cada um dos padrões de resposta para as 5 primeiras questões.

Já com $2 \cdot 1\,024 + 1 = 2\,049$ candidatos, o Princípio das Gavetas de Dirichlet garante que pelo menos 3 deles darão exatamente as mesmas respostas nas 5 primeiras questões.

Logo, o número mínimo de candidatos necessário é 2 049.

b) Com 4^n candidatos, ainda é possível que cada padrão de resposta seja apresentado por exatamente um dos candidatos.

Já com $4^n + 1$ candidatos, o Princípio das Gavetas de Dirichlet garante que pelo menos 2 darão as mesmas respostas nas primeiras n questões.

Para que isso ocorra com 1 000 candidatos, é necessário que $4^n + 1 \leq 1\,000 \Rightarrow 4^n \leq 999$.

Como $4^4 = 256$ e $4^5 = 1\,024$, o valor máximo para n é $n = 4$.

7.2 Problemas envolvendo outras áreas da Matemática

Conforme comentado anteriormente, o Princípio das Gavetas de Dirichlet é bastante útil na demonstração de fatos não triviais. Conforme pode ser notado em Júnior (2016), isso não se limita exclusivamente a problemas da Análise Combinatória.

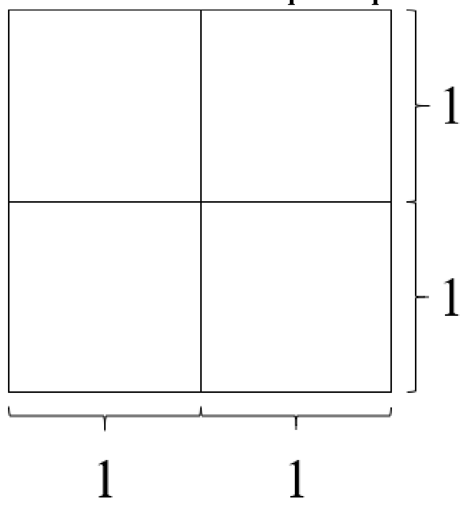
Os próximos três exercícios buscam trazer aplicações do princípio em problemas que envolvam Geometria Plana, Geometria Analítica e Teoria dos Números, respectivamente.

Os exercícios 7.2.1 e 7.2.3 estão presentes em Morgado *et al*; (2006), ao passo que o exercício 7.2.2 fora proposto por Morgado e Carvalho (2015).

Exercício resolvido 7.2.1: Escolhem-se 5 pontos ao acaso sobre a superfície de um quadrado de lado 2. Mostre que pelo menos dois destes pontos estão em uma distância menor que ou igual a $\sqrt{2}$.

Resolução: Pode-se dividir o quadrado de lado 2 em quatro regiões no formato de quadrados menores de lado 1, conforme exibido na figura a seguir.

Figura 20 – Quadrado de lado 2 dividido em quatro quadrados menores de lado 1



Como serão escolhidos 5 pontos (objetos) ao acaso e existem 4 regiões (gavetas) no quadrado, o Princípio das Gavetas de Dirichlet garante que pelo menos dois pontos estarão na mesma região.

A maior distância possível entre esses dois pontos é a diagonal do quadrado de lado 1 que pode ser determinada pelo Teorema de Pitágoras:

$$d^2 = 1^2 + 1^2 \Rightarrow d^2 = 1 + 1 \Rightarrow d^2 = 2 \Rightarrow d = \sqrt{2}.$$

Assim, pelo menos dois pontos estão em uma distância menor que ou igual a $\sqrt{2}$ ■

Exercício resolvido 7.2.2: São dados, no plano, cinco pontos de coordenadas inteiras. Mostre que, entre os dez segmentos determinados por esses pontos, pelo menos um tem como ponto médio um ponto de coordenadas inteiras.

Resolução: Dados dois pontos no plano munido com o sistema de coordenadas cartesianas usual, $A = (x_A; y_A)$ e $B = (x_B; y_B)$, as coordenadas do ponto médio M do segmento $\overline{AB}$ determinado por eles são dadas pelas médias aritméticas das coordenadas dos dois pontos, isto é, $M = \left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$.

Além disso, a média aritmética entre dois números inteiros será, também, um número inteiro se, e somente se, os dois números tiverem a mesma paridade, ou seja, são dois números pares ou dois números ímpares.

Quanto às paridades das coordenadas, um ponto de coordenadas inteiras no plano pode apresentar os seguintes tipos de coordenadas: (PAR; PAR), (PAR; ÍMPAR), (ÍMPAR; PAR) ou (ÍMPAR; ÍMPAR).

Esses 4 tipos de coordenadas determinam 4 gavetas, onde serão alocados os 5 pontos (objetos). Pelo Princípio das Gavetas de Dirichlet, pelo menos dois dos pontos terão coordenadas do mesmo tipo, o que fará com que o ponto médio do segmento determinado por estes dois pontos tenha coordenadas inteiras■

Exercício resolvido 7.2.3: Prove que todo número natural tem um múltiplo que se escreve, na base 10, apenas com os algarismos 0 e 1.

Resolução: Seja n um número natural qualquer e seja a seguinte sequência de $n+1$ números escritos na base 10:

1; 11; 111; 1111; .... ;111...1

Onde o último número da sequência é formado por uma sucessão de $n+1$ algarismos 1.

Para todo número natural n, existem exatamente n possíveis restos que um determinado número natural pode deixar na divisão por n.

Considerando cada possível resto uma gaveta, onde serão alocados os $n+1$ números (objetos) da sequência construída, o Princípio das Gavetas de Dirichlet garante que pelo menos dois números da sequência deixam o mesmo resto ao serem divididos por n.

A diferença entre esses dois números que deixam o mesmo resto será um múltiplo de n que se escreve, na base 10, apenas com os algarismos 0 e 1■

Conforme adiantado, agora será discutida uma generalização do exercício resolvido 7.1.1, cuja resolução também envolve conceitos de Teoria dos Números e pode ser encontrada em Morgado *et al*; (2006).

Exercício resolvido 7.2.4: Considere um conjunto formado por $n+1$ números inteiros positivos diferentes, menores do que $2n$, isto é, um subconjunto com $n+1$ elementos de $\{1; 2; 3; ...; 2n\}$. Prove que podemos escolher dois desses números tais que um divide o outro.

Resolução: Qualquer elemento de $\{1; 2; 3; ...; 2n\}$ pode ser escrito como o produto de uma potência de 2 por um número ímpar. Por exemplo, $1 = 2^0 \cdot 1$ e $12 = 2^2 \cdot 3$.

Isto é, existem k e t inteiros não negativos, com t ímpar, tais que $x = 2^k \cdot t$, para todo $x \in \{1; 2; 3; ...; 2n\}$.

Como $x \leq 2n$, $\forall x \in \{1; 2; 3; ...; 2n\}$, o valor ímpar t pertence ao conjunto $\{1; 3; 5; ...; 2n - 1\}$, isto é, existem n possíveis valores para t.

Como serão selecionados $n + 1$ números inteiros e positivos e só existem n possíveis valores para t, o Princípio das Gavetas de Dirichlet garante que pelo menos dois números selecionados terão o mesmo valor de t.

Desse modo, sendo $x_1 = 2^{k_1} \cdot t$ e $x_2 = 2^{k_2} \cdot t$ esses dois números, com toda certeza um dividirá o outro, pois x_1 divide x_2 se $k_1 \leq k_2$ e x_2 divide x_1 se $k_1 \geq k_2$, ocorrendo, necessariamente, uma das duas hipóteses■

Lozansky e Rousseau (1991) destacam um interessante teorema, no qual o próprio matemático Lejeune Dirichlet teria aplicado o princípio que carrega seu nome com notável sucesso.

“Acredita-se que na demonstração desse teorema, Dirichlet utilizou pela primeira vez em 1834 o Princípio das Gavetas de forma relevante.” (JÚNIOR, 2016, p. 35).

Tal teorema será discutido a seguir na forma de mais um exercício resolvido, com resolução baseada nas apresentadas por Lozansky e Rousseau (1991) e por Júnior (2016).

Exercício resolvido 7.2.5: Seja α um número irracional qualquer. Prove que existem infinitos pares de números inteiros $(h; k)$, com $k > 0$, tais que:

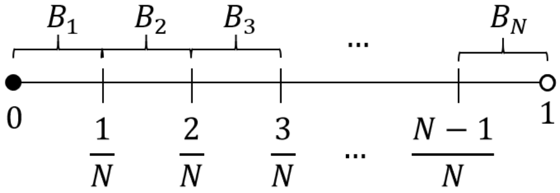
$$\left|\alpha - \frac{h}{k}\right| < \frac{1}{k^2}.$$

Resolução: Seja N um número inteiro positivo qualquer, a partir do qual será criada uma partição do intervalo [0; 1) em N intervalos menores, cada um destes intervalos menores B_k será definido da seguinte forma:

$$B_k = \left\{x \middle| \frac{k-1}{N} \leq x < \frac{k}{N}\right\}, \qquad k \in \{1; 2; ...; N\}$$

A figura a seguir representa esta partição.

Figura 21 – Partição do intervalo [0; 1) em *N* intervalos menores



Estes intervalos farão o papel das gavetas, enquanto os objetos serão todos os números da forma $\{q \cdot \alpha\}$, onde $q \in \{0; 1; 2; \dots; N\}$.[2]

Como são N gavetas e $N + 1$ objetos, o Princípio das Gavetas de Dirichlet garante que pelo menos uma gaveta contém pelo menos dois objetos, isto é, existem dois números q_1 e q_2, com $q_1 > q_2$, em $\{0; 1; 2; \dots; N\}$ tais que $|\{q_1\alpha\} - \{q_2\alpha\}| < \frac{1}{N}$.

Assim:

$$|\{q_1\alpha\} - \{q_2\alpha\}| < \frac{1}{N} \Rightarrow |q_1\alpha - [q_1\alpha] - (q_2\alpha - [q_2\alpha])| < \frac{1}{N}$$

$$\Rightarrow |(q_1 - q_2)\alpha - ([q_1\alpha] - [q_2\alpha])| < \frac{1}{N}$$

Tomando $h = [q_1\alpha] - [q_2\alpha]$ e $k = q_1 - q_2$, tem-se:

$$|k\alpha - h| < \frac{1}{N} \Rightarrow \left|\alpha - \frac{h}{k}\right| < \frac{1}{N \cdot k}$$

Como $q_1, q_2 \in \{0; 1; 2; \dots; N\}$, tem-se $0 \le q_1 \le N$ e $0 \le q_2 \le N$. Com $q_1 > q_2$, tem-se, portanto, $0 < q_1 - q_2 \le N$, isto é, $0 < k \le N$.

$$0 < k \le N \Rightarrow 0 < k \cdot k \le N \cdot k \Rightarrow \frac{1}{k^2} \ge \frac{1}{N \cdot k} \Rightarrow \frac{1}{N \cdot k} \le \frac{1}{k^2}$$

Assim sendo:

$$\left|\alpha - \frac{h}{k}\right| < \frac{1}{N \cdot k} \le \frac{1}{k^2} \Rightarrow \left|\alpha - \frac{h}{k}\right| < \frac{1}{k^2}$$

Com isso, prova-se que existe um par de números inteiros $(h; k)$, com $k > 0$, tais que $\left|\alpha - \frac{h}{k}\right| < \frac{1}{k^2}$. Agora, o problema segue em demonstrar a existência de infinitos destes pares.

[2] Onde {x} define a parte decimal de x, calculada por {x} = x – [x]. Por exemplo, {4,6} = 0,6.

Para isso, toma-se inicialmente um inteiro positivo N_1 qualquer. Pelo desenvolvido a pouco, existe um par de números inteiros $(h_1; k_1)$, tais que

$$\left|\alpha - \frac{h_1}{k_1}\right| < \frac{1}{N_1 \cdot k_1},$$

onde $1 \leq k_1 \leq N_1$.

Como α é irracional, $\left|\alpha - \frac{h_1}{k_1}\right| \neq 0$, o que permite escolher um inteiro positivo N_2 suficientemente grande para que $\frac{1}{N_2} < \left|\alpha - \frac{h_1}{k_1}\right|$.

Também pelo que foi discutido na primeira parte do problema, para este novo inteiro N_2, existe um par de números inteiros $(h_2; k_2)$, tais que

$$\left|\alpha - \frac{h_2}{k_2}\right| < \frac{1}{N_2 \cdot k_2},$$

onde $1 \leq k_2 \leq N_2$. Desse modo:

$$\left|\alpha - \frac{h_2}{k_2}\right| < \frac{1}{N_2 \cdot k_2} \leq \frac{1}{N_2} < \left|\alpha - \frac{h_1}{k_1}\right|$$

O que mostra que os pares $(h_1; k_1)$ e $(h_2; k_2)$ são distintos.

Repetindo-se esse procedimento, obtém-se uma sequência infinita e crescente de números inteiros positivos $N_1 < N_2 < N_3 < \cdots < N_i < \cdots$, onde para cada um existirá um par distinto de números inteiros $(h_i; k_i)$, com $1 \leq k_i \leq N_i$, tais que

$$\left|\alpha - \frac{h_i}{k_i}\right| < \frac{1}{N_i \cdot k_i}.$$

Como $k_i \leq N_i$, tem-se:

$$\left|\alpha - \frac{h_i}{k_i}\right| < \frac{1}{N_i \cdot k_i} \leq \frac{1}{k_i^2} \Rightarrow \left|\alpha - \frac{h_i}{k_i}\right| < \frac{1}{k_i^2}.$$

Logo, existem infinitos pares de números inteiros $(h; k)$, com $k > 0$, satisfazendo a propriedade $\left|\alpha - \frac{h}{k}\right| < \frac{1}{k^2}$ ■

Conforme destacado por Júnior (2016), esse resultado mostra que existem infinitas aproximações racionais para um número irracional, cujo erro é menor do que o inverso do quadrado do denominador do número racional escrito na forma fracionária.

Desse modo, conforme destaca Santos (2018), torna-se possível obter uma sequência infinita de aproximações racionais, cada vez melhores, de um irracional dado.

Aprofundando-se um pouco mais no estudo da Teoria dos Números, ao estudar o tópico de frações contínuas, pode-se estruturar um processo para encontrar aproximações sucessivas de irracionais por racionais.

Cada aproximação de um irracional obtida por frações contínuas é chamada de um convergente deste número racional. Pode-se demonstrar que todos os convergentes $\frac{h}{k}$ de um dado irracional α cumprem a desigualdade estudada no exercício resolvido 7.2.5.

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Agora, ao final deste texto, espera-se que o leitor tenha conseguido compreender os conceitos basilares da Análise Combinatória, tendo domínio sobre as diversas aplicações interessantes de cada um destes conceitos, e que se sinta confortável em transmitir os conhecimentos aqui absorvidos.

Conforme previsto, este trabalho limitou-se a apresentar os principais princípios da Análise Combinatória, destacando que o bom entendimento dos mesmos é a etapa mais importante para o domínio desta disciplina.

Todavia, é importante destacar que isso não significa que os estudo de arranjos, combinações e permutações não deva acontecer, muito pelo contrário, "[...] entre os vários tipos de 'números para contagem' da Análise Combinatória, eles são certamente os mais simples e de uso mais amplo." (MORGADO *et al*; 2006, p. 2).

> Além disso, eles permitem resolver uma grande quantidade de problemas de Análise Combinatória. Outra razão para o seu estudo é a aplicabilidade desses números a problemas de probabilidades finitas, um campo de aplicação importante da Análise Combinatória. (MORGADO *et al*; 2006, p. 2)

Morgado et al; (2006) destaca que o que não deve ser feito é tratar a aplicação desses conceitos de forma mecânica, empregando-os apenas em situações padronizadas, sem procurar habituar o aluno a análise cuidadosa de cada problema.

Também se torna perigoso caso o aluno não entenda a motivação por trás de tais conceitos, por isso ratifica-se, mais uma vez, a importância de sempre enfatizar os princípios básicos de contagem.

De todo modo, alinhado com o discutido nos últimos parágrafos, vislumbra-se uma futura etapa de continuação desse texto, na qual sejam trabalhados os importantes tipos de agrupamentos em Análise Combinatória, além de suas principais consequências.

Além disso, visando um aprofundamento maior no campo da Análise Combinatória, também se vislumbra uma continuação do texto envolvendo campos como Funções Geradoras e Teoria de Grafos.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

CASELLA, George; BERGER, Roger L. **Inferência Estatística**. Tradução da 2ª edição norte-americana. Tradução de Solange Aparecida Visconte. 4ª reimpressão da 1ª edição Brasileira de 2010. São Paulo: Cengage Learning, 2020.

CONSELHO DO KANGOUROU SANS FRONTIÈRES (KSF). **Canguru de Matemática Brasil – Nível PE – Respostas**. 2016. Disponível em: https://drive.google.com/file/d/1bCzfVgcT9WJx9DYAkf3yrsLkbA8olxFh/view. Acesso em: 27 fev. 2021.

HAZZAN, Samuel. **Fundamentos da Matemática Elementar, 5**: combinatória, probabilidade. 8. ed. São Paulo: Atual, 2013.

IEZZI, Gelson; MURAMAKI, Carlos. **Fundamentos da Matemática Elementar, 1**: conjuntos, funções. 8. ed. São Paulo: Atual, 2004.

JÚNIOR, Carlos Alberto Muniz. **Matemática Discreta: Médias e Princípio das Gavetas**. 2016. 63f. Dissertação (Mestrado) - Departamento de Matemática, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2016. Disponível em: <https://repositorio. ufpb.br/jspui/bitstream/tede/9346/2/arquivototal.pdf>. Acesso em: 10 jul. 2021.

LIMA, Elon Lages. **Números e Funções Reais**. 1. ed, 3ª reimpressão. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2017.

LOZANSKY, Edward; ROUSSEAU, Cecil. **Winning Solutions**. USA: Spinger, 1996.

MENDES, Hyderland de Oliveira; NETO, Ilmo Caldas; SILVA, José Jackson Maia (Org.). **Lógica 1: 6º ano**. 3. ed, revista atualizada para 2019. Fortaleza: Sistema Ari de Sá de Ensino, 2019. (Coleção Asas).

MORGADO, Augusto César de Oliveira; CARVALHO, João Bosco Pitombeira de; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; FERNANDEZ, Pedro. **Análise Combinatória e Probabilidade** com as soluções dos exercícios. 9. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006.

MORGADO, Augusto César; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. **Matemática Discreta**. 2. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2015.

MOTA, Antonio Batista. **PRINCÍPIOS DE CONTAGEM E APLICAÇÃO DO PRINCÍPIO ADITIVO: O PROBLEMA DE CONTAGEM DOS QUADRADOS EM UMA QUADRÍCULA E O CÓDIGO QQ**. 2016. 77 f. Dissertação (Mestrado) - Departamento de Matemática, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2017. Disponível em: <http://www.repositorio.ufc.br/bitstream/riufc/22183/1/2017_dis_abmota.pdf>. Acesso em: 24 jun. 2021.

NETO, Sebastião Alves Bezerra. **Matemática Discreta: Aplicações do Princípio da Inclusão e Exclusão**. 2016. 60f. Dissertação (Mestrado) - Departamento de Matemática, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2016. Disponível em: <https://repositorio.ufpb.br/jspui/bitstream/tede/9432/2/arquivototal.pdf>. Acesso em: 07 ago. 2021.

RIFO, Laura. **Análise Combinatória, Probabilidade e Noções de Estatística -** Tema 1 - Elementos da teoria de conjuntos e estruturas de contagem. Campinas: Universidade Estadual de Campinas, 1º semestre 2017. Disponível em: < https://www.ime.unicamp.br/~laurarifo/apostila/apostila1.pdf>. Acesso em: 24 jun. 2021.

SANTOS, José Plínio de Oliveira. **Introdução à Teoria dos Números**. 3. ed, décima primeira impressão. Rio de Janeiro: IMPA, 2018.

APÊNDICE A – SOMAS ENVOLVENDO OS PRIMEIROS NÚMEROS INTEIROS POSITIVOS

A soma dos n primeiros números inteiros positivos pode ser determinada através da fórmula:

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

Para demonstrar este resultado, seja S tal que:

$$S = 1 + 2 + 3 + \cdots + n \qquad (i)$$

Invertendo a ordem das parcelas:

$$S = n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 1 \qquad (ii)$$

Adicionando (i) e (ii) parcela a parcela, tem-se:

$$2 \cdot S = (1+n) + (2+n-1) + (3+n-2) + \cdots + (n+1)$$

$$2 \cdot S = (n+1) + (n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1)$$

$$2 \cdot S = n \cdot (n+1)$$

$$S = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

Assim:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2} \blacksquare$$

A partir deste resultado, pode-se deduzir a soma dos quadrados dos n primeiros números inteiros positivos, que é calculada através da fórmula:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$$

Para chegar na demonstração deste fato, parte-se do desenvolvimento do produto notável:

$$(k+1)^3 = k^3 + 3 \cdot k^2 + 3 \cdot k + 1$$

Desse modo:

$$(k+1)^3 - k^3 = 3 \cdot k^2 + 3 \cdot k + 1$$

Aplicando somatório em ambos os membros da igualdade, tem-se:

$$\sum_{k=1}^{n} [(k+1)^3 - k^3] = \sum_{k=1}^{n} [3 \cdot k^2 + 3 \cdot k + 1]$$

Das propriedades dos somatórios:

$$\sum_{k=1}^{n} [(k+1)^3 - k^3] = 3 \cdot \sum_{k=1}^{n} k^2 + 3 \cdot \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1$$

A soma do lado esquerdo é telescópica:

$$2^3 - 1^3 + 3^3 - 2^3 + \cdots + (n+1)^3 - n^3 = 3 \cdot \sum_{k=1}^{n} k^2 + 3 \cdot \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1$$

$$(n+1)^3 - 1^3 = 3 \cdot \sum_{k=1}^{n} k^2 + 3 \cdot \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1$$

Substituindo as somas conhecidas do lado direito da igualdade:

$$(n+1)^3 - 1 = 3 \cdot \sum_{k=1}^{n} k^2 + 3 \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} + n$$

$$(n+1)^3 - \frac{3 \cdot n \cdot (n+1)}{2} - n - 1 = 3 \cdot \sum_{k=1}^{n} k^2$$

$$3 \cdot \sum_{k=1}^{n} k^2 = (n+1)^3 - \frac{3 \cdot n \cdot (n+1)}{2} - n - 1$$

$$3 \cdot \sum_{k=1}^{n} k^2 = (n+1)\left[(n+1)^2 - \frac{3n}{2} - 1\right]$$

$$3 \cdot \sum_{k=1}^{n} k^2 = (n+1)\left[n^2 + 2n + 1 - \frac{3n}{2} - 1\right]$$

$$3 \cdot \sum_{k=1}^{n} k^2 = (n+1)\left[\frac{2n^2+n}{2}\right]$$

$$3 \cdot \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{(n+1) \cdot n \cdot (2n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$$

Logo:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} \blacksquare$$

Os resultados demonstrados permitem, ainda, calcular a soma dos cubos dos n primeiros números inteiros positivos, dada por:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^2 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n \cdot (n+1)}{2}\right]^2$$

Para chegar nesta demonstração, parte-se do desenvolvimento do produto notável $(k+1)^4 = k^4 + 4 \cdot k^3 + 6 \cdot k^2 + 4 \cdot k + 1$ e segue-se procedimento análogo ao último realizado, conforme segue:

$$(k+1)^4 = k^4 + 4 \cdot k^3 + 6 \cdot k^2 + 4 \cdot k + 1$$

$$(k+1)^4 - k^4 = 4 \cdot k^3 + 6 \cdot k^2 + 4 \cdot k + 1$$

$$\sum_{k=1}^{n} (k+1)^4 - k^4 = \sum_{k=1}^{n} (4 \cdot k^3 + 6 \cdot k^2 + 4 \cdot k + 1)$$

$$2^4 - 1^4 + 3^4 - 2^4 + \cdots + (n+1)^4 - n^4 = 4\sum_{k=1}^{n} k^3 + 6\sum_{k=1}^{n} k^2 + 4\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1$$

$$(n+1)^4 - 1^4 = 4\sum_{k=1}^{n} k^3 + 6 \cdot \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} + 4 \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} + n$$

$$n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1 - 1 = 4\sum_{k=1}^{n} k^3 + 2n^3 + 3n^2 + n + 2n^2 + 2n + n$$

$$n^4 + 2n^3 + n^2 = 4\sum_{k=1}^{n} k^3$$

$$4\sum_{k=1}^{n} k^3 = n^4 + 2n^3 + n^2$$

$$4\sum_{k=1}^{n} k^3 = n^2 \cdot (n^2 + 2n + 1)$$

$$4\sum_{k=1}^{n} k^3 = n^2 \cdot (n+1)^2$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n \cdot (n+1)}{2}\right]^2$$

Logo,

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^2 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n \cdot (n+1)}{2}\right]^2 \blacksquare$$

Alternativamente, também é possível chegar a estes resultados utilizando-se dos conhecimentos de Binômio de Newton e Triângulo de Pascal, fortemente associados ao estudo da Análise Combinatória.