



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ  
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA  
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

**Leonardo da Vince de Araujo Carvalho**

# **Teoremas de Pappus-Guldin para Áreas de Superfícies e Volumes de Sólidos de Revolução**

**Teresina - 2021**



**Leonardo da Vince de Araujo Carvalho**

**Dissertação de Mestrado:**

**Teoremas de Pappus-Guldin para Áreas de Superfícies e Volumes  
de Sólidos de Revolução**

Dissertação submetida à Coordenação do Programa de Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT, da Universidade Federal do Piauí, como requisito para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:  
Prof. Dra. Aurineide Castro Fonseca.

**Teresina - 2021**

*Copyright © 2021 by Leonardo da Vince de Araujo Carvalho.*

*Direitos reservados, 2021 por Leonardo da Vince de Araujo Carvalho.*

*Universidade Federal do Piauí - UFPI, Centro de Ciência da Natureza - CCN, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Mestrado Profissional em Matemática. Cep 64049-550 - Teresina, PI.*

Nenhuma parte desta dissertação pode ser reproduzida sem a expressa autorização do autor.

#### Ficha Catalográfica

Carvalho, Leonardo da Vince de Araujo.  
Teoremas de Pappus-Guldin para Áreas de Superfícies e  
Volumes de Sólidos de Revolução - Teresina-PI, UFPI. 2021.

Orientadora: Prof. Dra. Aurineide Castro Fonseca.

XXX.XX CDD(1.ed.) 512.5

Leonardo da Vince de Araujo Carvalho

Teoremas de Pappus-Guldin para Áreas de Superfícies e Volumes  
de Sólidos de Revolução

Dissertação submetida à banca examinadora  
abaixo discriminada em defesa pública e apro-  
vada em 21/08/2021.

**BANCA EXAMINADORA**



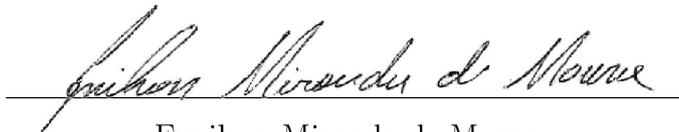
Aurineide Castro Fonseca (Orientadora)

Universidade Federal do Piauí



Mário Gomes dos Santos

Universidade Federal do Piauí



Egnilson Miranda de Moura

Colégio Técnico de Bom Jesus / UFPI

**Teresina - 2021**

*Dedico esta dissertação ao meu pai, Jose Raimundo Lopes de Carvalho (in memoriam), pela educação que me proporcionou, por sempre me apoiar e caminhar ao meu lado e pela garra que sempre teve.*

# Agradecimentos

*Agradeço a Deus por me dar força interior e coragem para concluir mais uma formação e pela perseverança de não desistir nunca.*

*Agradeço em especial ao meu pai, Jose Raimundo Lopes de Carvalho (in memorian), que não mediu esforços para a minha educação, à minha mãe, Mary de Araújo Carvalho, meus irmãos e a minha família, pela motivação e pelo incentivo que contribuíram para que eu conseguisse concluir essa etapa e concretizar esse sonho.*

*Agradeço à minha Orientadora Professora Doutora Aurineide Castro Fonseca, pela paciência e dedicação, aos meus professores e amigos do PROFMAT, em especial a Daniel (in memorian), pelo incentivo e apoio, que colaboraram com dedicação, paciência e comprometimento para a realização desse trabalho e aos professores Mário Gomes dos Santos e Egnilson Miranda de Moura, pelas contribuições.*

*"Aprender é a única coisa de que a mente nunca se cansa, nunca tem medo e nunca se arrepende."*

Leonardo da Vinci.

# Resumo

Este trabalho trata do estudo dos Teoremas de Pappus-Guldin para cálculo da área de superfícies de revolução e volumes de sólidos de revolução. Para isso, são apresentadas as definições de centro de gravidade de poligonais, superfícies de revolução e sólidos de revolução. As fórmulas clássicas para cálculos de áreas e volumes de sólidos de revolução são apresentadas e demonstradas. É feita a equivalência das fórmulas clássicas e as fórmulas apresentadas pelos teoremas de Pappus-Guldin. Além disso, é feito um breve relato histórico sobre Pappus de Alexandria e Paul Guldin. Para finalizar apresentamos uma proposta de minicurso na escola pública CEJA Artur Furtado.

Palavras-chave: Centro de Gravidade; Sólidos de Revolução; Teorema de Pappus-Guldin; Cone; Cilindro; Esfera.

# Abstract

This work deals with the study of the Pappus-Guldin Theorems for calculating the area of revolution of surfaces and volumes of solids of revolution. For this, the definitions of center of gravity of polygonals, surfaces of revolution and solids of revolution are presented. The classic formulas for calculating areas and volumes of solids of revolution are presented and demonstrated. The equivalence of the classical formulas and the formulas presented by the Pappus-Guldin theorems is made. In addition, a brief historical account of Pappus of Alexandria and Paul Guldin is given. Finally, we present a proposal for a short course at the public school CEJA Artur Furtado.

Key words: Gravity Center; Revolution Solids; Pappus-Guldin Theorem; Cone; Cylinder; Ball.

# Lista de Figuras

1	Sólidos Geométricos, Fonte: o autor . . . . .	3
2	Linha Simples, Fonte: o autor . . . . .	4
3	Cilindro, Fonte: o autor . . . . .	4
4	Cilindro, Fonte: o autor . . . . .	5
5	Planificação do Cilindro, Fonte: o autor . . . . .	5
6	Cilindro e Prisma, Fonte: DOLCE, O. e POMPEU, Jose Nicolau. Fundamentos da matemática Elementar volume 10 (2000, p. 221) . . . . .	6
7	Cone, Fonte: o autor . . . . .	7
8	Planificação do Cone, Fonte: o autor . . . . .	7
9	Cone e Pirâmide, Fonte: DOLCE, O. e POMPEU, Jose Nicolau. Fundamentos da matemática Elementar volume 10 (2000, p. 240) . . . . .	8
10	Esfera, Fonte: mundoeducacao.uol.com.br . . . . .	9
11	Cilindro, Fonte: o autor . . . . .	10
12	Cilindro, Clépsidra e Anticlépsidra, Fonte: DOLCE, O. e POMPEU, Jose Nicolau. Fundamentos da matemática Elementar volume 10 (2000, p. 253) . . . . .	11
13	Cilindro, clepsidra e anticlépsidra no plano alfa, Fonte: o autor . . . . .	11
14	Poligonal, Fonte: o autor . . . . .	13
15	Triângulo, Fonte: o autor . . . . .	13
16	Poligonal, Fonte: o autor . . . . .	14
17	Trapézio, Fonte: o autor . . . . .	15
18	Capa da Coleção de Pappus, Fonte: <a href="https://www.biografiasyvidas.com/biografia/p/pappo.html">https://www.biografiasyvidas.com/biografia/p/pappo.html</a> . . . . .	16
19	Guldini, Fonte: <a href="http://serge.mehl.free.fr/chrono/Guldin.html">http://serge.mehl.free.fr/chrono/Guldin.html</a> . . . . .	17
20	Rotação de uma Linha . . . . .	19
21	Toro, Fonte: o autor . . . . .	21
22	Cilindro Vazado, Fonte: o autor . . . . .	21
23	Paralelepípedo, Fonte: o autor . . . . .	21
24	Sólido, Fonte: o autor . . . . .	22
25	Casca Cilíndrica, Fonte: o autor . . . . .	23

26	Região entre curvas, Fonte: o autor . . . . .	23
27	Rotação de um sólido, Fonte: o autor . . . . .	24
28	Linha Rotacionada, Fonte: o autor . . . . .	25
29	Rotação de um retângulo, Fonte: o autor . . . . .	26
30	Linha Rotacionada, Fonte: o autor . . . . .	27
31	Rotação do triângulo, Fonte: o autor . . . . .	27
32	Retângulo, Fonte: o autor . . . . .	29
33	Linha Rotacionada, Fonte: o autor . . . . .	29
34	Rotação da semicircunferência, Fonte: o autor . . . . .	30

# Sumário

<b>Agradecimentos</b>	<b>ii</b>
<b>Resumo</b>	<b>iv</b>
<b>Abstract</b>	<b>v</b>
<b>Sumário</b>	<b>viii</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>3</b>
1.1 O Princípio de Cavalieri . . . . .	3
1.2 Sólidos de Revolução . . . . .	4
1.2.1 O Cilindro: Reto e Oblíquo . . . . .	4
1.2.2 O Cone: Reto e Oblíquo . . . . .	6
1.2.3 A Esfera . . . . .	9
1.3 Centro de Gravidade ou Centro de Massa . . . . .	12
1.4 Uma Breve História de Pappus e Guldin . . . . .	15
1.4.1 Pappus de Alexandria . . . . .	15
1.4.2 Poul Guldini . . . . .	16
<b>2 Teoremas de Pappus-Guldin</b>	<b>19</b>
2.1 Primeiro e Segundo Teorema de Pappus-Guldin . . . . .	19
2.2 Método: Cascas Cilíndricas . . . . .	21
<b>3 Área de Superfícies e Volume de Sólidos de Revolução usando os Teoremas de Pappus-Guldin</b>	<b>25</b>
3.1 Área da Superfície e Volume do Cilindro . . . . .	25
3.2 Área da Superfície e Volume do Cone . . . . .	27
3.3 Área da Superfície e Volume da Esfera . . . . .	29
<b>4 Descrição da Proposta de Projeto de Curso e Considerações Finais</b>	<b>33</b>
<b>Apêndice A</b>	<b>36</b>

---

<b>Apêndice B</b>	<b>38</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>40</b>

# Introdução

Esse trabalho baseia-se no estudo da geometria espacial, mais especificamente na área de superfície e no volume de sólidos de revolução, rotacionados em torno de um eixo, que inicia-se no ensino médio e estende-se até o nível superior. Onde estaremos, com a utilização de uma única fórmula para o cálculo da área da superfície e uma outra fórmula para o cálculo do volume dos seguintes sólidos: Cilindro, Cone e Esfera. Podendo também ser utilizada no cálculo da área e do volume de outros sólidos.

Não é preciso de muito tempo lecionando matemática, para se perceber a dificuldade dos alunos em aprender as fórmulas para o cálculo de áreas e volume de sólidos de revolução, haja vista que são diversas fórmulas. A partir dessa dificuldade e conhecendo os teoremas de Pappus, onde o primeiro permite o cálculo de áreas de superfície e o segundo permite o cálculo do volume de sólidos de revolução, faremos uma abordagem diferente, com o objetivo de proporcionar aos alunos um novo método para esses cálculos, fugindo assim das diversas e tradicionais fórmulas.

O teorema de Pappus-Guldin, em homenagem aos matemáticos Pappus de Alexandria e Paul Guldin é muito importante para o cálculo de áreas de superfícies e do volume de sólidos de revolução.

Este trabalho está dividido em 4 capítulos, onde o primeiro capítulo aborda o princípio de Cavalieri, o conceito e os elementos que compõem o cilindro, o cone e a esfera, bem como o centro de gravidade e a demonstração da fórmula da área de superfície e do volume de cada um desses sólidos utilizando o princípio mencionado. Esse capítulo também aborda um pouco da história de Pappus de Alexandria e de Paul Guldin.

O segundo capítulo enuncia e demonstra os dois teoremas, onde o primeiro é para o cálculo da área da superfície e o segundo é para o cálculo do volume de um sólido. Para a demonstração do segundo teorema utilizamos a fórmula do volume calculado pela integral aplicando o método de cascas cilíndricas.

No terceiro capítulo será feita uma abordagem sobre a área e o volume do cilindro, do cone e da esfera, onde partiremos das fórmulas de áreas e volume tradicionais estudadas no ensino médio e chegaremos na fórmula enunciada por Pappus e provada por Guldin.

No último capítulo apresentaremos o projeto de curso, onde será feito um minicurso com alunos do 3º ano de uma escola pública do estado do Piauí. Será dividido em dois momentos, sendo o primeiro para um treinamento sobre o software GeoGebra, e o segundo para mostrar aos alunos que os teoremas são muito úteis e práticos na resolução de situações problemas envolvendo a área e o volume de sólidos de revolução. Finalizaremos nosso trabalho com as considerações finais.

# Capítulo 1

## Preliminares

Neste capítulo, faremos uma breve apresentação do Princípio de Cavalieri e suas aplicações no cálculo de volúmenes de sólidos. Além disso, apresentaremos as definições de centro de gravidade e sólidos de revolução.

### 1.1 O Princípio de Cavalieri

Bonaventura Cavalieri, nasceu em 1598 na cidade de Milão na Itália e faleceu em 1647 na cidade de Bolonha, também na Itália. Quando nasceu recebeu o nome de Francesco Cavalieri, mas em 1615 quando ingressou na ordem religiosa dos Jesuati, adotou o nome de Bonaventura Cavalieri, em homenagem ao seu pai.

Cavalieri teve 11 livros publicados, onde o mais conhecido é *Geometria Indivibilibus Continuorum Nova* ou (Nova Geometria dos Invisíveis Contínuos), onde ele apresentou o princípio de Cavalieri, usado nos cálculos de volume de sólidos geométricos. Considerado um discípulo de Galileu, em 1629, assumiu uma das cadeiras de professor em Bolonia, a qual ocupou até a sua morte. Para mais informações, ver p. 50 até 54, em [11].

Para a demonstração dos volumes do cilindro, cone e esfera usaremos o princípio de Cavalieri, no qual:

**Teorema 1.1.1.** *Dados dois sólidos geométricos  $A$  e  $B$  de mesma altura e áreas das bases, que, por sua vez, estão contidas no mesmo plano  $\alpha$ . Os sólidos  $A$  e  $B$  têm o mesmo volume se qualquer plano  $\beta$ , paralelo a  $\alpha$ , determinar duas seções transversais com áreas iguais (ver [13]).*

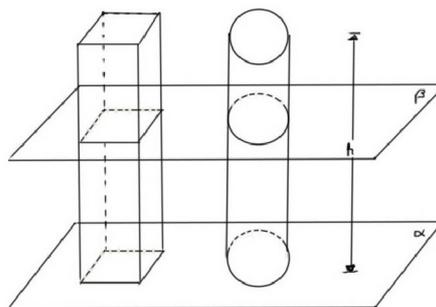
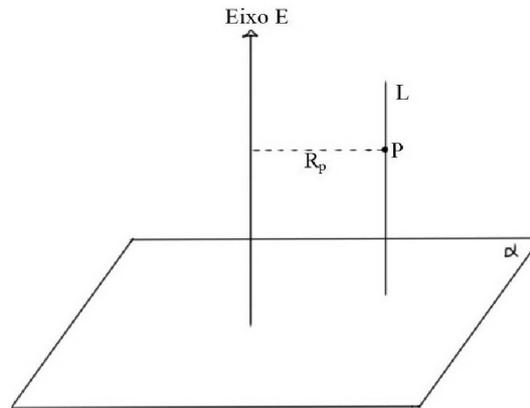


Figura 1: Sólidos Geométricos, Fonte: o autor

## 1.2 Sólidos de Revolução

Sejam  $\alpha$  um plano,  $E$  um eixo e  $L$  uma linha simples que não corte esse eixo. Para cada  $P \in L$ , considere  $R_p$  como a distância de  $P$  ao eixo  $E$ .



**Figura 2:** Linha Simples, Fonte: o autor

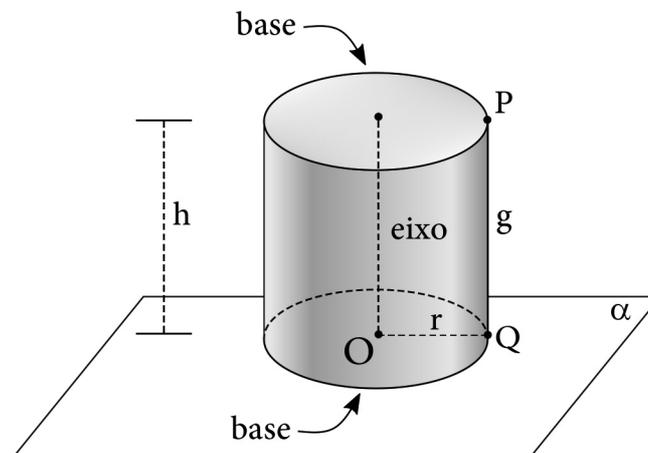
Definimos uma *superfície de revolução* como sendo a união de todas as circunferências passando por  $P \in L$  com raio  $R_p$ .

Se a linha  $L$  for fechada ou seus extremos pertencentes à  $E$ , esta superfície de revolução delimita um sólido chamado *sólido de revolução*.

Como exemplos de sólidos de revolução, temos o cilindro, o cone e a esfera.

### 1.2.1 O Cilindro: Reto e Oblíquo

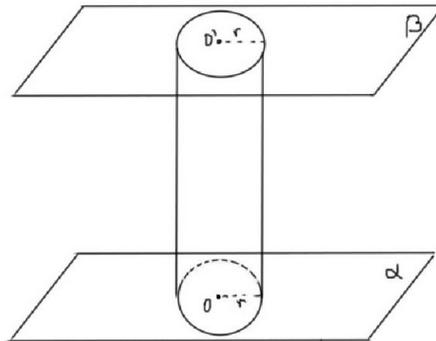
Consideremos um círculo (região circular) de centro  $O$  e raio  $r$ , situado num plano  $\alpha$ , e um segmento de reta  $PQ$ , não nulo, não paralelo e não contido em  $\alpha$ . Chama-se cilindro circular ou cilindro à união dos segmentos congruentes e paralelos a  $PQ$ , com uma extremidade nos pontos do círculo e situados num mesmo semi-espaco dos determinados por  $\alpha$  (ver Figura 3).



**Figura 3:** Cilindro, Fonte: o autor

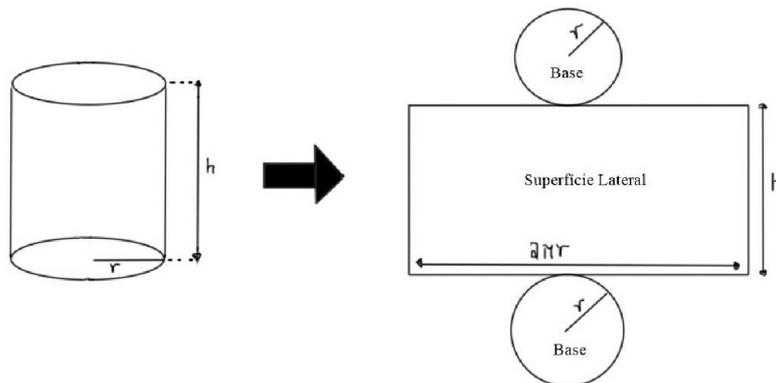
O cilindro circular é também chamado cilindro de revolução, pois é gerado pela rotação de um retângulo em torno de um eixo que contém um dos seus lados. Quando o eixo do cilindro é perpendicular às suas bases, dizemos que o cilindro é reto. Quando o eixo do cilindro não é perpendicular às suas bases, dizemos que o cilindro é oblíquo. As fórmulas e demonstrações apresentadas nesse trabalho são válidas para os dois casos.

O cilindro é composto por duas bases que são, círculos congruentes situados em planos paralelos, geratrizes que são os segmentos com uma extremidade em um ponto da circunferência de centro  $O$  e raio  $r$  e a outra no ponto correspondente da circunferência de centro  $O'$  e raio  $r$ .



**Figura 4:** Cilindro, Fonte: o autor

Sendo  $r$  o raio da base, altura que é a distância  $h$  entre os planos da base, um eixo que é a reta determinada pelos centros das bases, uma superfície lateral que é a união das geratrizes, a área dessa superfície é chamada de área lateral e indicada por  $A_l$  e uma superfície total que é a união da superfície lateral com os círculos das bases, a área dessa superfície é chamada de área total e indicada por  $A_t$ .



**Figura 5:** Planificação do Cilindro, Fonte: o autor

A superfície lateral de um cilindro circular reto ou cilindro de revolução (ver Figura 5) é equivalente a um retângulo de dimensões  $2\pi r$  (comprimento da circunferência da base) e  $h$  (altura do cilindro). Isso significa que a superfície lateral de um cilindro de revolução desenvolvida num plano (planificada) é um retângulo de dimensões  $2\pi r$  e  $h$ , portanto, a área lateral do cilindro é

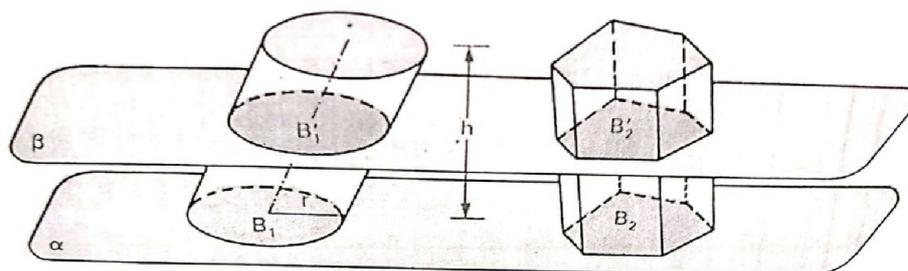
$$A_l = 2\pi r h.$$

Já a área total de um cilindro é a soma da área lateral ( $A_l$ ) com as áreas das duas bases ( $A_b = \pi r^2$ ), ou seja,

$$A_t = 2\pi r(h + r).$$

Para a demonstração do volume, consideremos um cilindro de altura  $h$  e área da base  $B_1 = B$  e um prisma de altura  $h$  e área da base  $B_2 = B$ . O cilindro e o prisma têm alturas congruentes e bases equivalentes e tomaremos como base a fórmula do volume de um prisma, que é  $V = A_b \cdot h$ , onde  $A_b$  é a área da base e  $h$  é a altura.

Suponhamos que os dois sólidos tem as bases num mesmo plano  $\alpha$  e estão num dos semi-espacos determinados por  $\alpha$  (ver Figura 6).



**Figura 6:** Cilindro e Prisma, Fonte: DOLCE, O. e POMPEU, Jose Nicolau. Fundamentos da matemática Elementar volume 10 (2000, p. 221)

Qualquer plano  $\beta$  paralelo a  $\alpha$ , que secciona o cilindro, também secciona o prisma e as seções ( $B_1'$  e  $B_2'$ , respectivamente) têm áreas iguais, pois são congruentes às respectivas bases, ou seja, ( $B_1' = B_1$ ,  $B_2' = B_2$ ,  $B_1 = B_2 = B$ ) implicando em  $B_1' = B_2'$ , e sendo  $V_{cil}$  e  $V_{pri}$  o volume do cilindro e do prisma respectivamente, como  $V_{pri} = B_2 \cdot h$  e  $B_1 = B_2 = B$ , então

$$V_{pri} = B \cdot h.$$

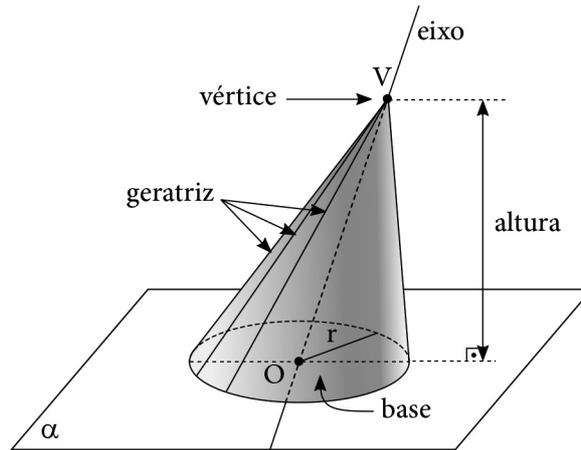
Portanto

$$V_{cil} = B \cdot h.$$

Logo, concluímos que o volume de um cilindro é o produto da área da base pela medida da altura. Se  $A_b = \pi \cdot r^2$ , temos que  $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$ .

### 1.2.2 O Cone: Reto e Oblíquo

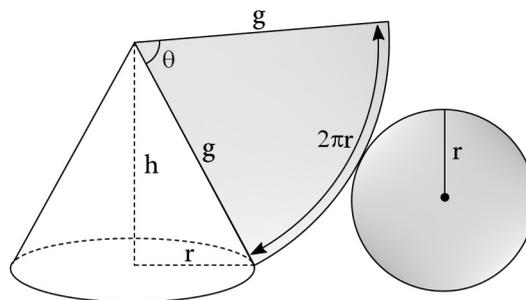
Consideremos um círculo (região circular) de centro  $O$  e raio  $r$ , situado num plano  $\alpha$ , e um ponto  $V$  fora de  $\alpha$ . Chama-se cone circular ou cone à união dos segmentos de reta com uma extremidade em  $V$  e a outra nos pontos do círculo (ver Figura 7).



**Figura 7:** Cone, Fonte: o autor

O cone circular é também chamado cone de revolução, pois é gerado pela rotação de um triângulo retângulo em torno de um eixo que contém um dos seus catetos. O cone é definido como reto, quando o seu eixo coincide com a sua altura, ou seja, o segmento que liga o vértice ao centro da circunferência da base é perpendicular ao plano que contém a base do cone. O cone é definido como oblíquo, quando o segmento que liga o vértice com o centro da sua base, não coincide com a sua altura, ou seja, não é perpendicular ao plano que contém a base do cone. As fórmulas e demonstrações apresentadas nesse trabalho são válidas para os dois casos.

O cone é composto de uma base formada por um círculo de centro  $O$  e raio  $r$ , geratrizes (ou apótema) que são os segmentos com uma extremidade em  $V$  e a outra nos pontos da circunferência da base, um vértice  $V$  e o raio da base  $r$ , uma altura que é a distância entre o vértice e o plano da base, um eixo que é a reta determinada pelo vértice e pelo centro da base. Além disso, o cone também possui uma superfície lateral que é a união das geratrizes, a área dessa superfície é chamada de área lateral e indicada por  $A_l$  e uma superfície total que é a reunião da superfície lateral com o círculo da base, a área dessa superfície é chamada de área total e indicada por  $A_t$ .



**Figura 8:** Planificação do Cone, Fonte: o autor

A superfície lateral de um cone circular reto ou cone de revolução (ver Figura 8) de raio da base  $r$  e geratriz  $g$  é equivalente a um setor circular de raio  $g$  e comprimento do arco  $2\pi r$ . Isso significa que a superfície lateral de um cone de revolução desenvolvida num plano (planificada) é um setor circular cujo raio é  $g$  e comprimento do arco  $2\pi r$  e sendo  $\theta$  o ângulo do setor, este ângulo é dado por

$$\theta = \frac{2\pi r}{g} \text{ rad ou } \theta = \frac{360 \cdot r}{g} \text{ graus.}$$

A área lateral do cone poderá ser calculada usando a fórmula da área de um triângulo

$$A_l = \frac{1}{2} \cdot (\text{comprimento do arco}) \cdot (\text{raio}).$$

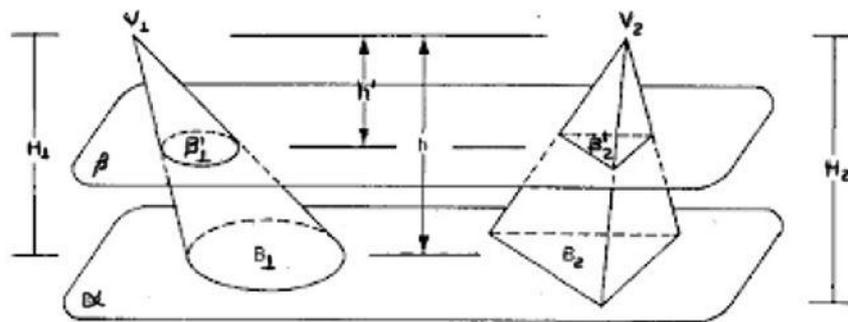
Assim,

$$A_l = \frac{1}{2} \cdot 2\pi r g. \quad (1.1)$$

De (1.1),

$$A_l = \pi r g.$$

A área total de um cone é a soma da área lateral ( $A_l$ ) com a área da base ( $B = \pi r^2$ ), ou seja,  $A_t = \pi r(g + r)$



**Figura 9:** Cone e Pirâmide, Fonte: DOLCE, O. e POMPEU, Jose Nicolau. Fundamentos da matemática Elementar volume 10 (2000, p. 240)

Para o volume, consideremos um cone de altura  $H_1 = h$  e área da base  $B_1 = B$  e um tetraedro de altura  $H_2 = h$  e área da base  $B_2 = B$ . Temos que o cone e a pirâmide têm alturas congruentes e bases equivalentes e tomaremos como base a fórmula do volume de um tetraedro, que é  $V = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h$ , onde  $A_b$  é a área da base e  $h$  é a altura.

Suponhamos que os dois sólidos tem as bases num mesmo plano  $\alpha$  e que os vértices estão num mesmo semi-espaco dos determinados por  $\alpha$ .

Qualquer plano secante  $\beta$  paralelo a  $\alpha$  (ver Figura 9), distando  $h'$  dos vértices que secciona o cone, também secciona o tetraedro, e sendo as áreas das seções  $B_1'$  e  $B_2'$ , respectivamente, temos,  $\left( \frac{B_1'}{B_1} = \left( \frac{h'}{h} \right)^2, \frac{B_2'}{B_2} = \left( \frac{h'}{h} \right)^2 \right)$ , implicando em  $\frac{B_1'}{B_1} = \frac{B_2'}{B_2}$ . Sendo  $V_c$  e  $V_t$  o volume do cone e do tetraedro respectivamente, pelo princípio de Cavalieri, o cone e o tetraedro têm volumes iguais.

Como

$$V_t = \frac{1}{3} \cdot B_2 \cdot h.$$

obtemos

$$V_t = \frac{1}{3} \cdot B \cdot h.$$

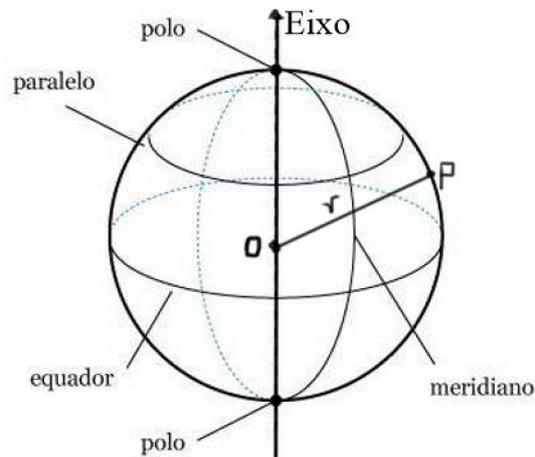
Portanto,

$$V_c = \frac{1}{3} \cdot B \cdot h.$$

Logo, concluímos que o volume de um cone é um terço do produto da área da base pela medida da altura. Se  $B = \pi \cdot r^2$ , temos que  $V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$ .

### 1.2.3 A Esfera

Consideremos um ponto  $O$  e um segmento de medida  $r$ , chama-se esfera de centro  $O$  e raio  $r$  (ver Figura 10), ao conjunto dos pontos  $P$  do espaço, tais que a distância  $\overline{OP}$  seja menor ou igual a  $r$ . A esfera é também o sólido de revolução gerado pela rotação de um semicírculo em torno de um eixo que contém o diâmetro. Chama-se superfície da esfera de centro  $O$  e raio  $r$  ao conjunto dos pontos  $P$  do espaço, tais que a distância  $\overline{OP}$  seja igual a  $r$ .



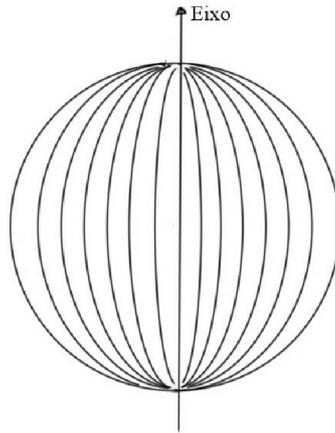
**Figura 10:** Esfera, Fonte: mundoeducacao.uol.com.br

A esfera é composta por: *dois polos*, que são as interseções da superfície com o eixo, *um equador*, que é a secção perpendicular ao eixo, pelo centro da superfície, *paralelo*, que é a secção perpendicular ao eixo e paralela ao equador, *um meridiano*, que é uma secção cujo plano passa pelo eixo e pelo *raio*, que é a distância do centro à superfície lateral.

Considere uma esfera de raio  $R$  e então a área da superfície da esfera é dada por

$$A = 4\pi r^2. \tag{1.2}$$

Para justificar a fórmula 1.2, suponhamos que a esfera seja dividida em  $n$  regiões,  $n$  suficientemente grande, tal que suas respectivas áreas e perímetros sejam muito pequenos.



**Figura 11:** Cilindro, Fonte: o autor

Sendo  $n$  muito grande, as regiões são quase planas e podemos considerar cones com bases nessas regiões e vértices no centro da esfera. Assim a esfera ficará dividida em  $n$  cones, tais que o volume da esfera é igual a soma dos volumes desses  $n$  cones.

Segue então que

$$V_{Esfera} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3 = \frac{1}{3} \cdot A_1 \cdot R + \frac{1}{3} \cdot A_2 \cdot R + \dots + \frac{1}{3} \cdot A_n \cdot R$$

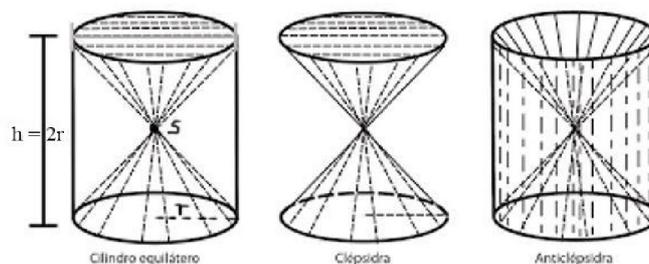
e daí,

$$\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3 = \frac{1}{3} \cdot (A_1 + A_2 + \dots + A_n) \cdot R = \frac{1}{3} \cdot A \cdot R,$$

ou seja,

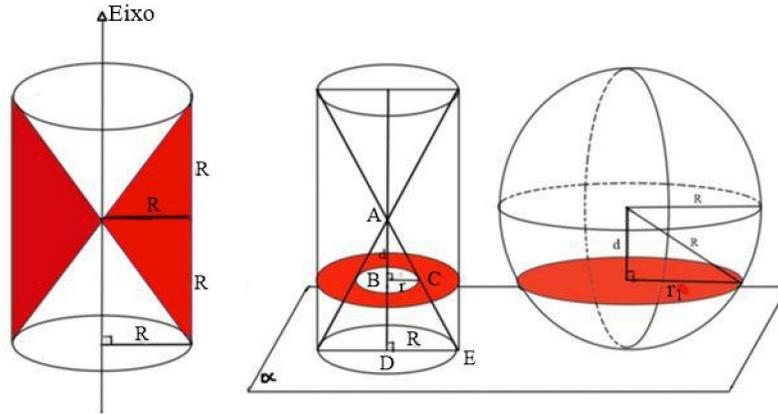
$$A = 4\pi r^2.$$

Para a demonstração do volume, consideremos um cilindro equilátero de raio da base  $r$ , altura  $2r$  e seja  $S$  o ponto médio do eixo do cilindro (ver Figura 12). Tomemos dois cones tendo como bases as do cilindro e  $S$  como vértice comum. A reunião desses dois cones é um sólido chamado clepsidra e o sólido que está dentro do cilindro e fora dos dois cones chama-se de anticlépsidra.



**Figura 12:** Cilindro, Clépsidra e Anticlépsidra, Fonte: DOLCE, O. e POMPEU, Jose Nicolau. Fundamentos da matemática Elementar volume 10 (2000, p. 253)

Consideremos agora uma esfera de raio  $R$  e uma anticlépsidra de altura e diâmetro da base iguais à  $2R$  (ver Figura 13), apoiadas em um mesmo plano  $\alpha$  como mostra a figura abaixo.



**Figura 13:** Cilindro, clepsidra e anticlépsidra no plano alfa, Fonte: o autor

Como a anticlépsidra, região vermelha é o volume do cilindro menos o dobro do volume dos cones, temos:

$$V_{anticlepsidra} = V_{cilindro} - 2 \cdot V_{cone}$$

$$V = \pi \cdot R^2 \cdot 2R - \frac{2 \cdot \pi \cdot R^2 \cdot R}{3} = 2 \cdot \pi \cdot R^3 - \frac{2 \cdot \pi \cdot R^3}{3} = \frac{6 \cdot \pi \cdot R^3 - 2 \cdot \pi \cdot R^3}{3}. \quad (1.3)$$

Portanto,

$$V_{anticlepsidra} = \frac{4 \cdot \pi \cdot R^3}{3}.$$

Seja  $\beta$  um plano que secciona os dois sólidos a uma mesma altura, formando uma coroa circular na anticlépsidra e um círculo menor na esfera.

Seja  $A_{cc}$  a área da coroa circular, teremos  $A_{cc} = \pi \cdot (R^2 - r^2)$ , onde usando semelhança de triângulos em  $\triangle ABC$  e  $\triangle ADE$ , temos  $\frac{d}{r} = \frac{R}{R}$ , donde vem que  $d = r$ . Logo,  $A_{cc} = \pi \cdot (R^2 - d^2)$ .

Seja também  $A_{cm}$  área do círculo menor teremos  $A_{cm} = \pi \cdot r_1^2$ , onde aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo que está no interior da esfera, temos  $r_1^2 + d^2 = R^2$ , donde vem que  $r_1^2 = R^2 - d^2$ . Logo,  $A_{cm} = \pi \cdot (R^2 - d^2)$ . Portanto, como a área da coroa circular é igual à área do círculo menor, pelo princípio de Cavaliere, os sólidos também terão volumes iguais, com isso

$$V_{esfera} = \frac{4 \cdot \pi \cdot R^3}{3}.$$

## 1.3 Centro de Gravidade ou Centro de Massa

O centro de gravidade é um conceito estudado na física. Também chamado de baricentro, o centro de gravidade é um ponto específico de um corpo onde pode ser aplicada a força de gravidade, ou seja, é o ponto de atração ou força-peso, onde todas as forças de atração podem se equilibrar.

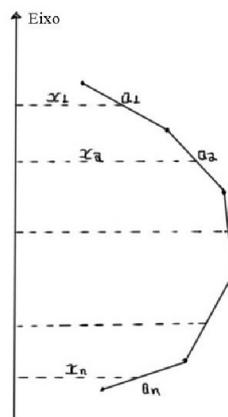
Os estudos da física indicam que o centro de gravidade de um corpo é exatamente o ponto que coincide com o centro de massa. A palavra baricentro vem do grego, onde bari significa peso.

O conceito do centro de gravidade foi estudo pela primeira vez por Arquimedes, cientista que definiu o baricentro de dois pontos de massa. De uma maneira geral, o centro de gravidade está relacionado ao conceito de Estabilização Dinâmica.

O centro de gravidade (*CG*) também pode ser definido como o centro da distribuição do peso de um objeto, sendo que a força da gravidade é atuante no sistema sem alterar o equilíbrio do objeto. Também podemos dizer que o centro de gravidade é o ponto onde o peso (*P*) de um objeto se concentra (ver [9]).

Na definição a seguir é apresentada o centro de gravidade para uma poligonal.

**Definição 1.** Se uma poligonal *P* é formada por segmentos consecutivos  $l_1, l_2, \dots, l_n$  de comprimentos  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , respectivamente e sendo  $(x_k, y_k)$  o ponto médio do segmento  $l_k$ , o centro de gravidade de *P* é o ponto  $G = (x, y)$ , onde;



**Figura 14:** Poligonal, Fonte: o autor

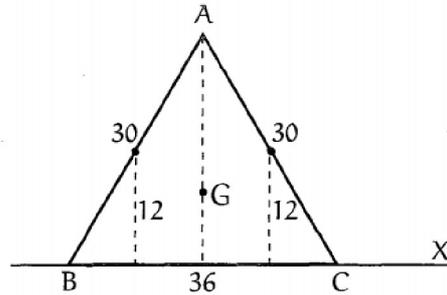
$$x = \frac{a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \dots + a_n \cdot x_n}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}$$

e

$$y = \frac{a_1 \cdot y_1 + a_2 \cdot y_2 + \dots + a_n \cdot y_n}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}.$$

**Exemplo 1.** Determine a posição do centro de gravidade do bordo de um triângulo cujos lados medem 30cm, 30cm e 36cm.

**Solução:** Seja  $ABC$  o triângulo cujos lados  $AB$ ,  $AC$  e  $BC$  medem 30, 30 e 36, respectivamente. Considere a reta  $X$  que contém  $BC$ .



**Figura 15:** Triângulo, Fonte: o autor

Como o triângulo é isósceles, temos que o centro de gravidade pertence ao seu eixo de simetria, ou seja, está na altura relativa ao lado  $BC$ . Desta forma, para determinar a posição do centro de gravidade, é suficiente determinar sua distância em relação à reta  $X$ .

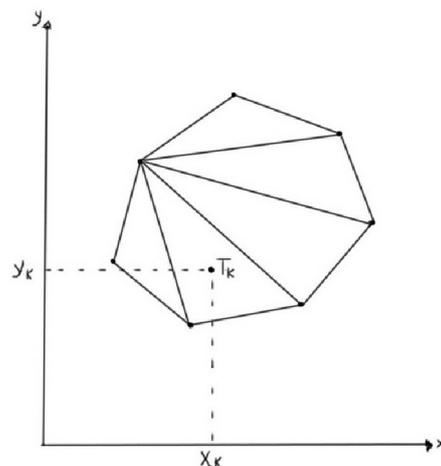
Usando o Teorema de Pitágoras, as distâncias dos pontos médios de  $AB$  e  $AC$  à reta  $X$  é igual a 12 e, pela definição, o centro de gravidade de  $ABC$  tem distância

$$y = \frac{30 \cdot 12 + 30 \cdot 12 + 36 \cdot 0}{30 + 30 + 36} = 7,5$$

da reta  $X$ .

Observe que no exemplo acima, o baricentro do triângulo  $ABC$  está a uma distância da reta  $X$  igual a 8, pois a definição de baricentro que conhecemos é o centro de gravidade da superfície de  $ABC$ . A definição de centro de gravidade da superfície de um polígono é dada a seguir.

**Definição 2.** Seja  $P$  um polígono dividido em figuras  $T_1, T_2, \dots, T_n$ , de áreas  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , respectivamente e sendo  $(x_k, y_k)$  o baricentro da figura  $T_k$ , o centro de gravidade da superfície de  $P$  é o ponto  $G = (\bar{x}, \bar{y})$ , tal que;



**Figura 16:** Poligonal, Fonte: o autor

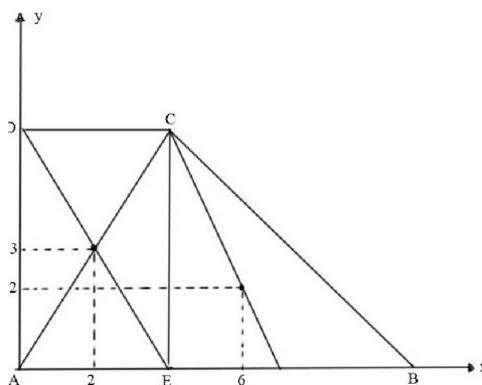
$$\bar{x} = \frac{A_1 \cdot x_1 + A_2 \cdot x_2 + \cdots + A_n \cdot x_n}{A_1 + A_2 + \cdots + A_n}$$

e

$$\bar{y} = \frac{A_1 \cdot y_1 + A_2 \cdot y_2 + \cdots + A_n \cdot y_n}{A_1 + A_2 + \cdots + A_n}$$

**Exemplo 2.** Determine a posição do centro de gravidade da superfície do trapézio  $ABCD$ , onde  $A = D = 90^\circ$ ,  $AB = 10$ ,  $CD = 4$  e  $AD = 6$ .

**Solução:** Consideremos em um sistema de coordenadas,  $A = (0, 0)$ ,  $B = (10, 0)$ ,  $C = (4, 6)$  e  $D = (0, 6)$ , como na figura a seguir.



**Figura 17:** Trapézio, Fonte: o autor

Dividindo o trapézio em duas figuras, sendo elas: um retângulo  $ADCE$  e um triângulo retângulo  $CEB$ , cujas áreas dessas figuras são  $A_1 = 24$  e  $A_2 = 18$ , respectivamente. O baricentro do retângulo é o ponto  $(2, 3)$  e o baricentro do triângulo é o ponto  $(6, 2)$ .

Se  $G = (\bar{x}, \bar{y})$  é o centro de gravidade da superfície de  $ABCD$ , temos:

$$\bar{x} = \frac{24 \cdot 2 + 18 \cdot 6}{24 + 18} = \frac{26}{7}$$

e

$$\bar{y} = \frac{24 \cdot 3 + 18 \cdot 2}{24 + 18} = \frac{18}{7}$$

O cálculo do centro de gravidade dos polígonos, necessários para determinar as áreas de superfícies e os volumes dos sólidos de revolução (cilindro, cone e esfera), será apresentado no capítulo 3.

## 1.4 Uma Breve História de Pappus e Guldin

Nesta seção apresentaremos um pouco da história de Pappus de Alexandria, que foi importante geômetra da civilização antiga grega e dentre as muitas de suas contribuições, enunciou os teoremas que abordaremos neste trabalho. Também será apresentada um pouco da história de Poul Guldin, que escreveu sobre volumes e centro de gravidade, redescobriu os teoremas de Pappus, os demonstrou e publicou.

### 1.4.1 Pappus de Alexandria

Pappus de Alexandria (c. 290 d.C - c. 350 d.C.), sucessor de grandes nomes que fizeram parte da primeira fase da Escola de Alexandria como Ptolomeu, Apolônio, Euclides e Arquimedes, fez parte da segunda fase dessa escola, sendo considerado por muitos como um dos últimos grandes matemáticos gregos.

Foi um geômetra que no ano 320 d.C., escreveu sua principal obra, chamada Coleção Matemática, que é composta por oito livros que haviam comentários e proposições, nos quais o primeiro e parte do segundo extraviaram-se.

No livro *V*, dedica-se ao estudo da Isoperimetria, que é a comparação de áreas de figuras que são limitadas por perímetros iguais e de volumes de sólidos que são limitados por áreas iguais. Nesse livro também tem uma passagem interessante a respeito das diferentes maneiras que as abelhas se preparavam para fabricar os seus favos, onde a mais eficiente era com o formato de hexágonos.

Intitulado por Tesouro de Análise, o livro *VII* traz duas afirmações (pois não apresenta provas sobre elas) sobre áreas de superfícies e volume de sólidos de revolução. Essas afirmações são conhecidas como Teoremas de Pappus-Guldin, sendo que o "*Guldin*" é devido ao fato do matemático Paul Guldin (1577-1643) ter redescoberto esses teoremas, demonstrado e os publicados (para mais informações, ver p. 210 em [3]).

A morte de Pappus aos 60 anos de idade em algum lugar da Grécia, teve um impacto muito grande em Alexandria, tendo sido considerado por muitos como o fim de Alexandria como grande centro de Matemática (Ver p. 58 em [1]).

Um pouco mais da sua história e contribuições à matemática, podem ser encontrados no artigo; Pappus de Alexandria: contribuições à matemática (ver p.10-16 em [8]).



**Figura 18:** Capa da Coleção de Pappus, Fonte: <https://www.biografiasyvidas.com/biografia/p/pappo.html>.

### 1.4.2 Poul Guldini

Nasceu em 12 de junho de 1577 em St Gall (agora Sankt Gallen), Suíça e faleceu em 3 de novembro de 1643 em Graz, Áustria. Paul Guldin foi um matemático suíço que escreveu sobre volumes e centros de gravidade. Seus o nomearam de Habacuque Guldin, que é um nome judeu vindo de um dos doze profetas menores. Foi criado na fé protestante, mas ao ler uma série de livros, começou a ter dúvidas sobre a religião protestante que praticava. Foi à abadia beneditina de Weihestephan, em Freising, e explicou suas dúvidas ao prior da abadia, que o aconselhou a renunciar a religião protestante em que fora criado.



**Figura 19:** Guldini, Fonte: <http://serge.mehl.free.fr/chrono/Guldin.html>.

Após isso, mudou seu nome de Habacuque para Paulo, converteu-se ao catolicismo aos 20 anos e ingressou na Ordem dos Jesuítas em Munique como Irmão Coadjutor. Até este ponto, Guldin certamente não teria estudado matemática; na verdade, é duvidoso que ele tenha recebido muita educação além de saber ler e escrever. Os jesuítas, no entanto, eram uma ordem comprometida com uma educação rigorosa e Guldin passou por um longo processo educacional que levou ao doutorado em divindade. Passados alguns anos, tornou-se Jesuíta Escolástico e, ainda mais tarde, foi ordenado sacerdote Jesuíta.

Como Guldin mostrou habilidades matemáticas consideráveis, então, em 1609, ele foi enviado para o Jesuíta Collegio Romano em Roma para estudar com Clavius, que era o professor de matemática lá. Depois de ser instruído por Clavius, Guldin ensinou matemática no Colégio Jesuíta em Roma. Então, em 1617, ele se mudou para o Colégio Jesuíta em Graz, quando teve seu primeiro trabalho publicado. Lecionou também na universidade de Viena e no principado da Silésia de Sagan, mas depois de alguns anos um grave problema de saúde o forçou a desistir de dar aulas.

Tendo aceitado a idéia de que o centro de gravidade de todo grande corpo tenta se mover de modo que coincida com o centro de gravidade do universo, em 1622 publicou um trabalho sobre o centro de gravidade da Terra. E como consequência disso Guldin argumentou que a terra estaria em constante movimento.

Uma correspondência interessante que Guldin fez foi com Johannes Kepler. Infelizmente, apenas as cartas de Kepler a Guldin foram preservadas, mas, mesmo assim, elas nos fornecem informações interessantes. Kepler escreveu onze cartas para Guldin entre 1618 e 1628. Kepler buscou o conselho de Guldin tanto em questões científicas quanto em questões religiosas, e ele também pediu a Guldin que usasse sua influência no tribunal.

A posição financeira do Kepler era ruim durante o período de sua correspondência e Guldin estava preocupado que o Kepler não pudesse pagar um telescópio para realizar trabalhos científicos. Um dos amigos jesuítas de Guldin, Nicolas Zucchi, era um fabricante de telescópios e Guldin pediu-lhe que desse a Kepler um de seus telescópios. Kepler respondeu a Guldin mostrando que estava extremamente grato pelo presente.

O trabalho mais importante de Guldin é *Centrobarycæ seu de centro gravitatis trium specierum quantitatis continuæ* publicado em 4 volumes entre 1635 e 1641 . O volume 1 começa com a palestra que descreve as ciências matemáticas que ele deu em 1622. Em particular, no Volume 1, ele discute o centro de gravidade da Terra.

O volume 2 foi publicado em 1640 e contém sua, agora famosa, regra sobre os centros de gravidade. O objetivo principal deste livro era estudar figuras obtidas girando outras figuras, por exemplo a esfera obtida girando um semicírculo em torno de seu diâmetro. Sua famosa regra pode ser expressa da seguinte forma:

*Se uma figura plana é girada em torno de um eixo em seu plano, o volume do corpo sólido formado é igual ao produto da área com a distância percorrida pelo centro de gravidade.*

Que é o teorema de que se trata essa dissertação.

O volume 3 contém trabalho na superfície e volumes de cones, cilindros e sólidos de revolução. E no volume 4 publicado em 1641, além de usar para atacar outros matemáticos pelos métodos que estão usando, ele tenta uma reconstrução da maior parte do que então era considerado matemática. Seu objetivo é provar os resultados sem usar o método da contradição (Mais detalhes podem ser obtidos em [10]).

# Capítulo 2

## Teoremas de Pappus-Guldin

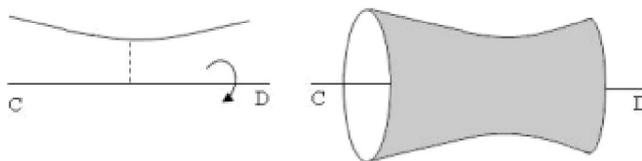
Neste capítulo, serão enunciados e demonstrados os dois teoremas de Pappus e Guldin, onde para a demonstração do segundo teorema, estaremos considerando um sólido rotacionado em torno do eixo  $y$ , cujo cálculo de tal volume será via cálculo integral.

### 2.1 Primeiro e Segundo Teorema de Pappus-Guldin

Pappus de Alexandria afirmou no livro *VII* de sua coleção, que era possível calcular a área de qualquer superfície gerada por uma linha em torno de um eixo, com conhecimento apenas do comprimento dessa linha e da circunferência descrita pelo seu centro de gravidade, tendo sido provado posteriormente por Paul Guldin.

O teorema a seguir, trata do cálculo da área da superfície do sólido gerado pela rotação de uma curva plana em torno de um eixo.

**Teorema 2.1.1.** (*Primeiro teorema de Pappus-Guldin*) *Se uma linha plana gira em torno de um eixo de seu plano, a área da superfície gerada é igual ao comprimento dessa linha multiplicado pelo comprimento da circunferência descrita pelo seu baricentro (ver, p. 284 em [6]).*



**Figura 20:** Rotação de uma Linha

Para demonstrar o teorema acima, precisamos das proposições abaixo, as quais tem demonstração em, p. 413 e 414 em [4].

**Proposição 1.** *Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  função com derivada contínua,  $f(x) \geq 0$  em  $[a, b]$  e tal que o gráfico de  $f$  seja a linha dada pelo enunciado. Então a área da superfície obtida pela rotação do gráfico de  $f$ , em torno do eixo  $x$ , é dada por:*

$$A_x = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx,$$

e a área da superfície obtida pela rotação do gráfico de  $f$ , em torno do eixo  $y$ , é dada por:

$$A_y = 2\pi \int_a^b x \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx,$$

**Proposição 2.** *Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  função com derivada contínua em  $[a, b]$ . Então, o centro de massa do gráfico de  $f$ , é o ponto  $(x_c, y_c)$ , dado por:*

$$x_c = \frac{1}{L} \int_a^b x \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

e

$$y_c = \frac{1}{L} \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx,$$

onde  $L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$  é o comprimento do gráfico de  $f$ .

Agora, faremos a demonstração do Teorema 2.1.1.

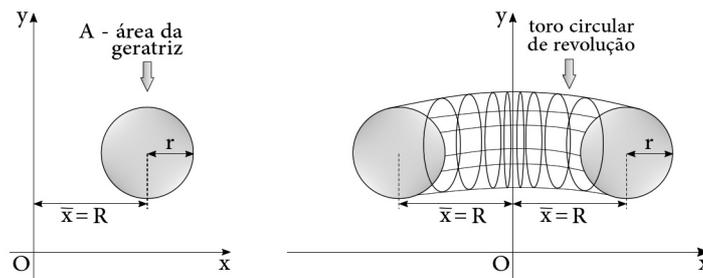
**Demonstração: (Teorema 2.1.1)** *Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua tal que o gráfico de  $f$  seja a linha plana e  $f(x) \geq 0$  em  $[a, b]$ . Então, a área da superfície do sólido gerado pela rotação do gráfico de  $f$  em torno do eixo  $x$ , pela proposição 1 e proposição 2 é dada por:*

$$\begin{aligned} A_x &= 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx \\ &= (2\pi L) \frac{1}{L} \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx \\ &= (2\pi L) x \\ &= 2\pi xL, \end{aligned}$$

onde  $L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$  é o comprimento dessa linha e  $x = \frac{1}{L} \int_a^b x \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$  é a distância do baricentro dessa linha ao eixo  $x$ .

**Teorema 2.1.2.** *(Segundo teorema de Pappus-Guldin) Se uma figura gira em torno de um eixo de seu plano, o volume gerado é igual à área dessa figura multiplicado pelo comprimento da circunferência descrita pelo seu baricentro (para mais informações, ver p. 290 em [6]).*

Em outras palavras, se uma figura plana tem área  $S$  e se  $x$  é a distância do baricentro dessa figura a um eixo  $E$ , o segundo Teorema de Pappus afirma que o volume do sólido de revolução gerado pela rotação dessa figura em torno de  $E$  vale  $2\pi xS$  (ver Figura 21).

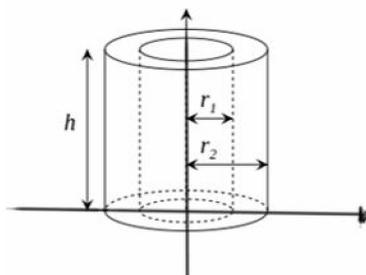


**Figura 21:** Toro, Fonte: o autor

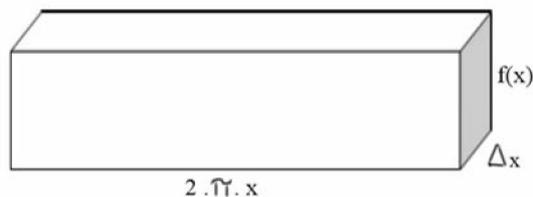
Para a demonstração desse teorema vamos considerar uma figura qualquer no plano  $xy$ , quando a rotação desta figura ocorre em torno do eixo  $y$ . Para isso vamos precisar da fórmula do volume do sólido de revolução calculada via integral e para esse cálculo de volume estaremos utilizando o método de cascas cilíndricas o qual é apresentado na seção seguinte.

## 2.2 Método: Cascas Cilíndricas

O volume de uma casca cilíndrica (ver Figura 22) é equivalente ao volume de um paralelepípedo (ver Figura 23). O volume  $V$  de uma casca cilíndrica é calculado pela subtração do volume  $V_1$  do cilindro interno do volume  $V_2$  do cilindro externo.



**Figura 22:** Cilindro Vazado, Fonte: o autor



**Figura 23:** Paralelepípedo, Fonte: o autor

Se a casca cilíndrica tem raio externo  $r_2$ , raio interno  $r_1$ , e altura  $h$ , seu volume é dado por:

$$V = V_2 - V_1 = \pi \cdot r_2^2 \cdot h - \pi \cdot r_1^2 \cdot h = \pi \cdot h \cdot (r_2^2 - r_1^2) = \pi \cdot h \cdot (r_2 + r_1) \cdot (r_2 - r_1). \quad (2.1)$$

Multiplicando o numerador e o denominador por 2, em (2.1), obtemos

$$V = 2\pi \cdot h \frac{(r_2 + r_1)}{2} (r_2 - r_1).$$

Considere a altura da casca cilíndrica sendo  $h = f(x)$ , a espessura da casca é  $(r_2 - r_1) = \Delta_r$  e o raio médio da casca  $\frac{(r_2 + r_1)}{2} = x$ . Então podemos escrever o volume da casca cilíndrica

$$V = 2\pi x h \Delta_r.$$

Para mais detalher, ver , p. 69 e 70 em [1].

**Proposição 3.** *Seja uma região limitada pelos gráficos das funções  $f$  e  $g$ , na qual  $g$  é identicamente nula e pelas retas  $x = a$  e  $x = b$ . Se o sólido de revolução for obtido pela rotação da região entre as funções  $f$  e  $g$  em torno do eixo  $y$ , então o volume do sólido é dado por*

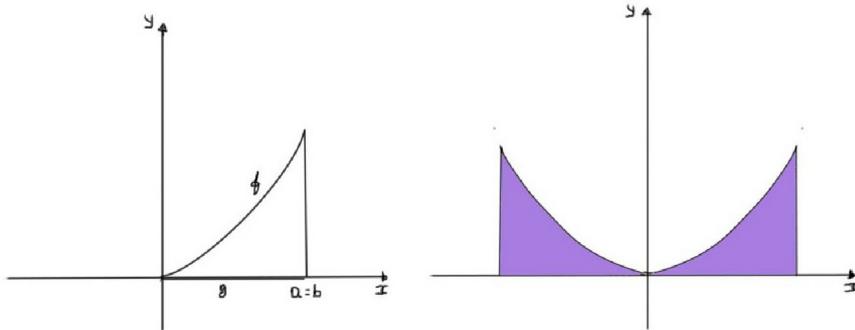


Figura 24: Sólido, Fonte: o autor

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx.$$

Demonstração:

Considerando um intervalo  $x$  de  $[a, b]$ , dividindo o intervalo em  $n$  subintervalos  $[x_{i-1}, x_i]$  de mesma largura  $\Delta x_i$ , e considerando  $(\bar{x}_i)$  o ponto médio do  $i$ -ésimo subintervalo. Fazendo a rotação do retângulo de base  $[x_{i-1}, x_i]$  e altura  $f(\bar{x}_i)$  em torno do eixo  $y$  temos a casca cilíndrica com o raio médio  $\bar{x}_i$ , altura  $f(\bar{x}_i)$  e espessura  $\Delta x_i$ . Substituindo na fórmula do volume de cascas cilíndricas, encontramos

$$V_i = 2\pi \bar{x}_i f(\bar{x}_i) \Delta x_i.$$

Para obter uma aproximação do volume do sólido basta somar os volumes dessas cascas,

$$V \approx \sum_{i=1}^n V_i = 2\pi \sum_{i=1}^n \bar{x}_i f(\bar{x}_i) \Delta x_i.$$

Usando uma aproximação para  $n$  tendendo a infinito,

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} 2\pi \sum_{i=1}^n \bar{x}_i f(\bar{x}_i) \Delta x_i = 2\pi \int_a^b x f(x) dx.$$

Dadas as funções  $f$  e  $g$  contínuas, com  $f(x) > g(x) > 0$ , o volume do sólido é gerado pela rotação em torno do eixo  $y$  da região delimitada entre as curvas  $f$  e  $g$  e pelas retas  $x = a$  e  $x = b$  é dado por,

$$V = 2\pi \int_a^b x[f(x) - g(x)] dx.$$

A figura (ver Figura 25), temos uma casca cilíndrica típica e a região entre as duas funções  $y = x$  e  $y = x^2$ , rotacionadas em torno do eixo  $y$ .

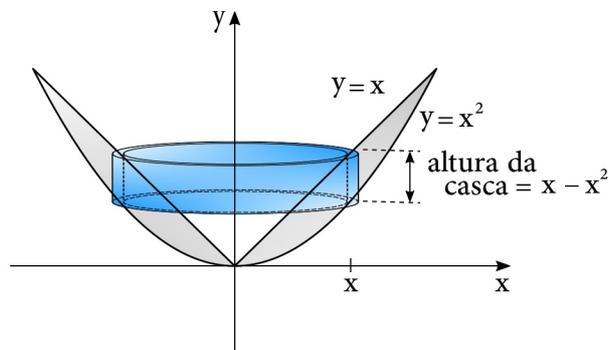


Figura 25: Casca Cilíndrica, Fonte: o autor

**Proposição 4.** Se uma região  $R$  está entre as curvas  $y = f(x)$  e  $y = g(x)$ , sendo  $g(x) \leq f(x)$  em que  $f$  e  $g$  são positivas no intervalo  $x_A \leq x \leq x_B$ , então a abscissa do centroide é dado por

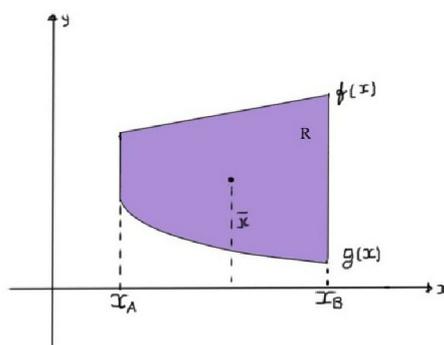


Figura 26: Região entre curvas, Fonte: o autor

$$\bar{x} = \frac{1}{A} \int_{x_A}^{x_B} x[f(x) - g(x)] dx.$$

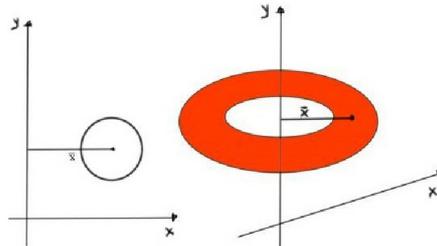
Detalhes de como fazer essa demonstração podem ser encontrados em, p. 33-36 em [1].

(Teorema de Pappus-Guldin para figura rotacionada em torno do eixo  $y$ ). Dada uma figura plana rotacionada em torno do eixo  $y$  de seu plano, então o volume do sólido gerado é igual ao produto da área da figura plana pelo comprimento da circunferência percorrida pelo seu centro de massa (centroide) da figura.

Demonstração:

O teorema diz que dada uma figura (ver Figura 27) de área  $A$  e  $\bar{x}$  a distância de seu centroide ao eixo  $y$ . O volume  $V$  do sólido obtido pela rotação de  $A$  em torno do eixo  $y$  é dado por

$$V = 2\pi\bar{x}A.$$



**Figura 27:** Rotação de um sólido, Fonte: o autor

Para calcular o volume do sólido a partir da rotação de uma figura qualquer no eixo  $y$ , usaremos a fórmula do volume calculado pela integral aplicando o método de Cascas Cilíndricas, já apresentada na seção 2.2 (ver Teorema 2.1.2). A expressão que nos permite obter esse volume é

$$V = 2\pi \int_{x_A}^{x_B} x[f(x) - g(x)]dx.$$

Multiplicando o numerador e o denominador por  $A$ , encontramos,

$$V = 2\pi \cdot A \cdot \frac{1}{A} \int_{x_A}^{x_B} x[f(x) - g(x)]dx.$$

De acordo com a proposição (ver Proposição 4), que fala sobre a abscissa do centroide, encontramos

$$V = 2\pi\bar{x}A.$$

Logo, podemos concluir que o volume de um sólido de revolução obtido pela rotação de uma figura plana qualquer em torno do eixo  $y$  é  $V = 2\pi\bar{x}A$ .

## Capítulo 3

# Área de Superfícies e Volume de Sólidos de Revolução usando os Teoremas de Pappus-Guldin

Neste capítulo, faremos abordagem sobre o a área da superfície e o volume do cilindro, do cone e da esfera. Partiremos das fórmulas de volume tradicionais estudadas no ensino médio, cujas demonstrações foram feitas no Capítulo 1 dessa dissertação e chegaremos na fórmula enunciada por Pappus e provada por Guldin.

### 3.1 Área da Superfície e Volume do Cilindro

Iniciaremos com o cálculo da área da superfície do cilindro. Para tal, sejam o eixo  $E$  e um segmento de reta paralelo ao eixo  $E$ . Suponha que este segmento de reta tem comprimento  $h$  (ver figura 28). Então pelo 1° Teorema de Pappus-Guldin, a área da superfície do cilindro é dada por

$$A = 2 \cdot \pi \cdot x \cdot h$$

onde  $x$  é a distância do ponto médio do segmento de reta de comprimento  $h$  ao eixo de rotação.

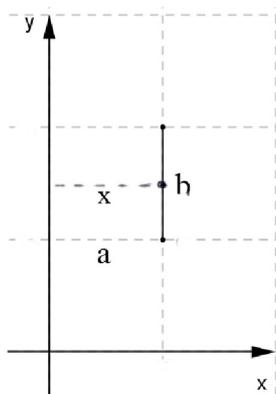


Figura 28: Linha Rotacionada, Fonte: o autor

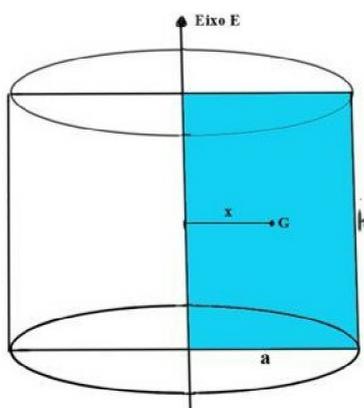
Pela definição de baricentro de uma poligonal, temos que  $x = a$  (raio da circunferência da base do cilindro) e daí,

$$A = 2 \cdot \pi \cdot a \cdot h$$

Seja  $S$  a área do retângulo a ser rotacionado (ver Figura 29). Temos que

$$S = a \cdot h$$

e se  $\bar{x}$  é a distância do baricentro ao eixo  $E$ , temos que  $\bar{x} = \frac{a}{2}$ . Então  $a = 2\bar{x}$  e esse resultado sera utilizado no cálculo do volume do cilindro.



**Figura 29:** Rotação de um retângulo, Fonte: o autor

Como conhecemos, o volume do cilindro é dado por:  $V = \pi \cdot R^2 \cdot h$ .

Agora sairemos da formula do volume do cilindro já conhecida pelos alunos e através dela chegaremos na fórmula do cálculo do volume via Pappus.

$$V = \pi \cdot R^2 \cdot h.$$

Onde o raio  $R$  do cilindro e sua altura  $h$ , são representados no retângulo respectivamente por  $a$  e  $h$ , donde segue que,

$$V = \pi \cdot a \cdot a \cdot h. \tag{3.1}$$

Como  $a = 2\bar{x}$  e  $S = a \cdot h$ , e substituindo em (3.1) temos,

$$V = \pi \cdot 2\bar{x} \cdot S.$$

E organizando os termos, concluímos que,

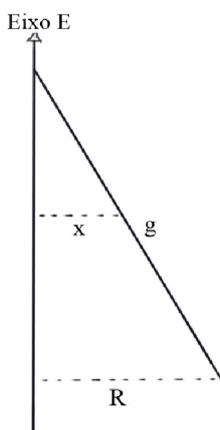
$$V = 2 \cdot \pi \cdot \bar{x} \cdot S.$$

### 3.2 Área da Superfície e Volume do Cone

A área da superfície do cone, pelo 1º Teorema de Pappus-Guldin, é dada por

$$A = 2 \cdot \pi \cdot x \cdot L,$$

onde  $x$  é a distância do segmento de reta de comprimento  $g$  ao eixo de rotação. (ver figura 30).

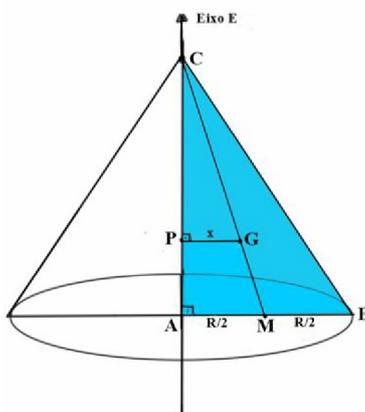


**Figura 30:** Linha Rotacionada, Fonte: o autor

Pela definição de baricentro de uma poligonal, temos que  $x = \frac{R}{2}$  e logo,

$$A = 2 \cdot \pi \cdot \frac{R}{2} \cdot g = \pi \cdot R \cdot g$$

Seja  $CM$  a mediana do  $\Delta ABC$ , relativa à base  $AB$ , o ponto  $G$  fica sobre essa mediana, de tal forma que  $CG = \frac{2 \cdot CM}{3}$  (ver Figura 31).



**Figura 31:** Rotação do triângulo, Fonte: o autor

Como  $CM$  é a mediana, então  $AM = BM = \frac{R}{2}$  e  $\bar{x}$  é a distância de  $G$  ao eixo. Os  $\triangle ACM$  e  $\triangle PCG$  são semelhantes, pelo caso A.A., sendo  $\hat{C}$  ângulo comum aos dois triângulos e  $\hat{M} \equiv \hat{G}$ , pois são correspondentes.

Com isso,

$$\frac{\bar{x}}{\frac{R}{2}} = \frac{2 \cdot CM}{CM}.$$

Que implica em,

$$\bar{x} = \frac{R}{3}.$$

A área do  $\triangle ABC$  é dada por,

$$S = \frac{R \cdot h}{2}.$$

O volume do cone é dado por,

$$V = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot h}{3}.$$

Agora sairemos da fórmula do volume do cone, já conhecida pelos alunos e através dela chegaremos na fórmula do cálculo do volume via Pappus.

$$V = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot h}{3}.$$

Multiplicando numerador e denominador por dois, e fazendo  $R^2 = R \cdot R$ , obtemos,

$$V = \frac{2}{2} \cdot \frac{\pi \cdot R \cdot R \cdot h}{3}.$$

Organizando os termos, chegamos em,

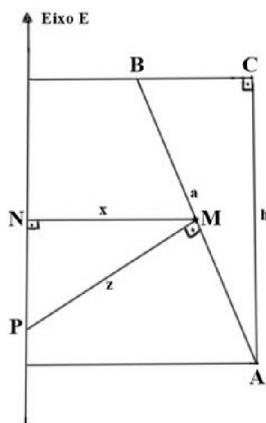
$$V = 2\pi \cdot \frac{R}{3} \cdot \frac{R \cdot h}{2}.$$

Como  $\bar{x} = \frac{R}{3}$  e  $S = \frac{R \cdot h}{2}$ , concluímos que,

$$V = 2\pi \cdot \bar{x} \cdot S.$$

### 3.3 Área da Superfície e Volume da Esfera

Nessa figura (ver Figura 32), a reta  $E$  e o  $\overline{AB}$  estão contidos em um mesmo plano.



**Figura 32:** Retângulo, Fonte: o autor

Seja  $a$  o comprimento do segmento  $\overline{AB}$ ,  $\bar{x}$  a menor distância do ponto médio de  $\overline{AB}$  à reta  $E$ ,  $h$  o comprimento da projeção de  $\overline{AB}$  sobre o eixo  $E$  e  $z$  o comprimento da mediatriz de  $\overline{AB}$ , compreendido entre  $\overline{AB}$  e  $E$ , esse segmento  $z$  chamaremos de apótema de  $\overline{AB}$ .

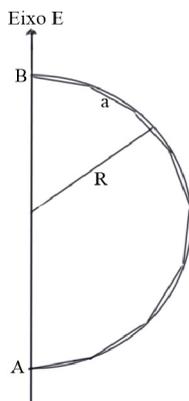
Analisando a imagem e aplicando semelhança, nos  $\triangle ABC$  e  $\triangle MPN$ , temos,

$$\frac{h}{a} = \frac{\bar{x}}{z}.$$

O que implica em,

$$a\bar{x} = zh. \tag{3.2}$$

Agora, mostraremos que a área da superfície da esfera é



**Figura 33:** Linha Rotacionada, Fonte: o autor

$$A = 4 \cdot \pi \cdot R^2$$

De fato, sejam uma semicircunferência de raio  $R$  e um eixo  $E$ , que contém o seu diâmetro  $AB$ . Dividindo a semicircunferência em  $n$  partes iguais, considere uma linha poligonal regular inscrita nela, cujos lados são  $l_1, l_2, \dots, l_n$  e têm comprimento  $a$ . Sejam  $h_k$  o comprimento da projeção do lado  $l_k$  sobre  $E$  e  $z$  é o apótema dos lados.

Pela definição de centro de gravidade, sendo  $X$  a distância do do eixo  $E$  ao centro de gravidade dessa poligonal e usando  $a\bar{x} = zh$ , obtemos

$$\begin{aligned} X &= \frac{a \cdot x_1 + a \cdot x_2 + \dots + a \cdot x_n}{a + a + \dots + a} \\ &= \frac{z \cdot h_1 + z \cdot h_2 + \dots + z \cdot h_n}{a + a + \dots + a} \\ &= \frac{z}{n \cdot a} \cdot 2R. \end{aligned} \tag{3.3}$$

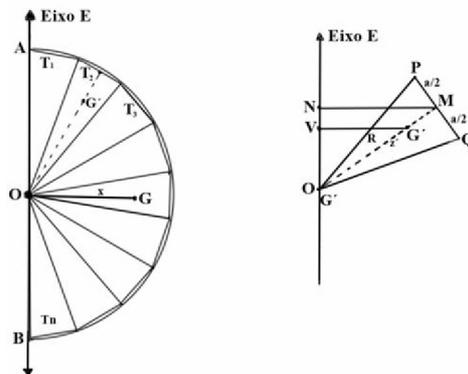
Note que, quando  $n \rightarrow \infty$ , obtemos  $z \rightarrow R$  e  $na \rightarrow \pi R$ , daí, obtemos em (3.3)

$$X = \frac{R}{\pi R} \cdot 2R = \frac{2R}{\pi}.$$

Pelo primeiro Teorema de Pappus-Guldin, a área da superfície gerada pela semicircunferência após rotação em torno do eixo  $E$ , ou seja, a superfície da esfera é dada por:

$$A = 2 \cdot \pi \cdot X \cdot L = 2 \cdot \pi \cdot \frac{2R}{\pi} \cdot \pi R = 4\pi R^2.$$

Na Figura (ver Figura 34), ao extrairmos um dos triângulos isósceles  $\triangle OPQ$ , onde,  $\overline{VG'} = \frac{2 \cdot \overline{MN}}{3}$ ,  $\overline{MN}$  é a distância do ponto médio da base do triângulo  $OPQ$  até o eixo  $E$ , o segmento  $\overline{OM}$  possuindo medida  $Z$  que representa a apótema e a altura desse triângulo.



**Figura 34:** Rotação da semicircunferência, Fonte: o autor

O segmento  $\overline{OP}$  é o raio da semicircunferência, o segmento  $\overline{PQ}$  com medida  $a$  é a base do triângulo, que possui como baricentro o ponto  $G'$  e a área de cada triângulo será dada por,

$$A = \frac{a \cdot z}{2}.$$

E a área  $S$  da superfície (semicírculo) na qual foi feita a rotação em torno do eixo  $E$  será dada por,

$$S = \frac{\pi \cdot R^2}{2}.$$

Como  $G$  é o centro de gravidade e  $\bar{x}$  é a distância do centro de gravidade ao eixo e a definição de centro de gravidade de um polígono, diz que:  $\bar{x}$  será a média ponderada entre as áreas dos triângulos com o centro de gravidade de cada triângulo, temos,

$$\bar{x} = \frac{A_1 \cdot \frac{2}{3} \cdot x_1 + A_2 \cdot \frac{2}{3} \cdot x_2 + \cdots + A_n \cdot \frac{2}{3} \cdot x_n}{A_1 + A_2 + \cdots + A_n}. \quad (3.4)$$

Como  $A_1, A_2, \dots, A_n$  são as áreas dos triângulos, que são todas iguais, estaremos representando todas por  $A$ , com isso, temos, em (3.4)

$$\bar{x} = \frac{A \cdot \frac{2}{3} \cdot x_1 + A \cdot \frac{2}{3} \cdot x_2 + \cdots + A \cdot \frac{2}{3} \cdot x_n}{A + A + \cdots + A}. \quad (3.5)$$

Onde escrevendo  $\frac{2}{3}$  em evidência, em (3.5) passamos a ter,

$$\bar{x} = \frac{\frac{2}{3} \cdot (A \cdot x_1 + A \cdot x_2 + \cdots + A \cdot x_n)}{A + A + \cdots + A}. \quad (3.6)$$

Como  $A = \frac{a \cdot z}{2}$ , em (3.6) temos,

$$\bar{x} = \frac{\frac{2}{3} \cdot \left( \frac{a \cdot z}{2} \cdot x_1 + \frac{a \cdot z}{2} \cdot x_2 + \cdots + \frac{a \cdot z}{2} \cdot x_n \right)}{A + A + \cdots + A}. \quad (3.7)$$

Simplificando o 2 e evidenciando o  $z$ , em (3.7) chegamos a,

$$\bar{x} = \frac{\frac{z}{3} \cdot (a \cdot x_1 + a \cdot x_2 + \cdots + a \cdot x_n)}{n \cdot A}. \quad (3.8)$$

Como, por (3.2), substituindo em (3.8) segue que,

$$\bar{x} = \frac{\frac{z}{3} \cdot (z \cdot h_1 + z \cdot h_2 + \cdots + z \cdot h_n)}{n \cdot A}. \quad (3.9)$$

Mais uma vez botando  $z$  em evidência, agora em (3.9) temos,

$$\bar{x} = \frac{\frac{z^2}{3} \cdot (h_1 + h_2 + \dots + h_n)}{n \cdot A}. \quad (3.10)$$

Como  $h_1, h_2, \dots, h_n$  são as alturas dos triângulos, cujas somas tendem ao dobro do raio da circunferência, temos,

$$\bar{x} = \frac{\frac{z^2}{3} \cdot 2R}{n \cdot A} = \frac{\frac{z^2 \cdot 2R}{3}}{n \cdot A} = \frac{z^2 \cdot 2R}{3} \cdot \frac{1}{n \cdot A} = \frac{z^2 \cdot 2R}{3 \cdot n \cdot A}. \quad (3.11)$$

Quando  $n$  cresce,  $n \cdot A$  que é a área do polígono  $P$  tende para a área da semicircunferência, ou seja,  $n \cdot A = \frac{\pi \cdot R^2}{2}$  e a apótema  $Z$  tende para o raio  $R$ , logo, a distância do centro de gravidade ao eixo, será,

$$\bar{x} = \frac{z^2 \cdot 2R}{3 \cdot n \cdot A} = \frac{\frac{R^2 \cdot 2R}{2}}{\frac{3 \cdot \pi \cdot R^2}{2}} = 2R^3 \cdot \frac{2}{3 \cdot \pi \cdot R^2} = \frac{4R}{3\pi}. \quad (3.12)$$

Como conhecemos, o volume da esfera é dado por,

$$V = \frac{4 \cdot \pi \cdot R^3}{3}. \quad (3.13)$$

Agora sairemos da fórmula do volume da esfera, (3.13) que já é de conhecimento dos alunos e através dela chegaremos na fórmula do cálculo do volume via Pappus.

Fazendo  $R^3 = R \cdot R^2$  e multiplicando o numerador e o denominador, por dois, em (3.13) ficamos com,

$$V = \frac{4 \cdot \pi \cdot R \cdot R^2}{3} \cdot \frac{2}{2}. \quad (3.14)$$

Organizando os termos e multiplicando o numerador e o denominador, por  $\pi$ , obtemos, em (3.14)

$$V = \frac{2 \cdot \pi \cdot 4 \cdot R}{3 \cdot \pi} \cdot \frac{\pi \cdot R^2}{2}. \quad (3.15)$$

Como  $\bar{x} = \frac{4R}{3\pi}$  e  $S = \frac{\pi \cdot R^2}{2}$ , obtemos em (3.15),

$$V = 2 \cdot \pi \cdot \bar{x} \cdot S.$$

## Capítulo 4

# Descrição da Proposta de Projeto de Curso e Considerações Finais

O trabalho intitulado como “Descobrimo o volume de forma prática e rápida” será apresentado na escola CEJA PROFESSOR ARTUR FURTADO, com duração de 8 horas a ser realizado em quatro dias no turno noite, visando proporcionar ao aluno uma nova forma para o cálculo da área da superfície e do volume de diversos sólidos de revolução fugindo das fórmulas tradicionais e utilizando uma fórmula única. Esta proposta de projeto se encontra no apêndice, juntamente com uma atividade que será aplicada em sala de aula.

Atualmente, vestibulares muito concorridos abordam questões bem complexas envolvendo o cálculo de área e do volume de sólidos de revolução. Para a resolução dessas questões usando as fórmulas tradicionais, é necessário contar com uma excelente interpretação, muita atenção e bem mais que uma fórmula. Através desse minicurso, os alunos conseguirão resolver essas questões de forma fácil e rápida.

No ato da inscrição cada aluno deve fornecer um e-mail para o recebimento de um certificado de participação no minicurso, que será realizado nos dias 05, 06, 12 e 13 de novembro de 2021, com início às 19:00, com uma duração de oito horas, divididas igualmente entre os quatro dias, com um intervalo de 20 minutos entre cada hora, sendo assim, cada um dos dias se encerará às 21:20.

A realização desse minicurso, dar-se-a de forma presencial, respeitando todos os protocolos da *OMS*, com a utilização da internet e dos computadores da escola, haja vista que o público alvo são estudantes de uma escola pública e a maioria absoluta não tem acesso à uma internet de qualidade nem a notebook, que seriam necessários para uma possível realização de forma online.

Iniciaremos apresentando aos alunos o software GeoGebra que será utilizado para a criação dos principais sólidos geométricos cobrados em vestibulares, para um breve estudo sobre eles, mostrando aos alunos os elementos, conceitos básicos e formulas já conhecidas por eles para posteriormente apresentar aos mesmos o segundo teorema de Pappus-Guldin que é o principal objeto de estudo aqui do nosso minicurso, onde daremos ênfase no cálculo do centro de gravidade de cada sólido. Com o auxílio de equipamentos eletrônicos, entre eles Notebook e Datashow mostraremos o passo a passo da criação dos sólidos e destacaremos o centro de gravidade dos mesmos. Nesse minicurso apresentaremos a fórmula para o cálculo da área e do volume, mas não faremos a demonstração das

mesmas, pois seria necessário um estudo sobre o cálculo de integrais, visto apenas no nível superior e o público alvo são os alunos de ensino médio.

Será utilizado um datashow para projetar do computador do professor ministrante aos alunos toda a primeira parte do minicurso, pois o primeiro dia será destinado para um treinamento do aluno sobre o software GeoGebra, como o professor Me. Rodolfo Soares Teixeira, que mostrará todas as ferramentas a serem utilizadas e fará pequenas construções de figuras e sólidos, mostrando aos alunos o detalhamento e a beleza de cada construção, despertando assim o interesse do aluno e a curiosidade em ir além do que será proposto pelo professor.

O segundo dia de minicurso, será destinado para que os alunos com o auxílio dos professores Rodolfo e Leonardo caso seja necessário, criem utilizando o software GeoGebra os sólidos que serão utilizados nos dias seguintes, nos cálculos de centro de gravidade, área e volume.

Nas duas horas do terceiro dia, aprenderemos a identificar e calcular o centro de gravidade de cada sólido, também revisaremos as fórmulas para o cálculo de área das principais figuras geométricas que poderão estar sendo utilizadas nas questões a serem resolvidas no minicurso e fora dele e será apresentado aos alunos a fórmula do cálculo criada por Pappus de Alexandria e demonstrada por Paul Guldin, utilizada no cálculo da área e do volume dos diversos sólidos de revolução.

No último dia, será feita a solução de algumas questões utilizando a nova fórmula, e cada aluno receberá uma lista de questões que deverão ser respondidas utilizando esses teoremas e contarão com o auxílio do professor para o esclarecimento de algumas dúvidas que podem surgir.

Com esse minicurso os alunos terão uma nova ferramenta (GeoGebra) muito útil no decorrer dos estudos e uma nova fórmula a ser utilizada no cálculo da área e uma a ser utilizada no cálculo do volume de sólidos de revolução, podendo responder questões com um nível mais elevado de forma rápida e fácil, ganhando assim tempo e podendo alcançar seus sonhados concursos ou cursos de graduação e pós-graduação.

Um motivo muito relevante para a criação desse trabalho de conclusão de curso, foi ver a dificuldade dos alunos com a quantidade enorme de fórmulas que precisavam aprender para que pudessem se sair bem em testes, sejam esses da escola em que estudam ou testes de vestibulares. Onde através desse teorema trabalhado, os alunos de escolas públicas terão melhores condições de competir, com alunos de escolas particulares, nas provas de concursos e vestibulares.

Fazer com que o aluno consiga responder com uma única fórmula, em um ou dois minutos, utilizando duas ou três linhas, problemas que requerem um amplo estudo, diversas fórmulas, bastante tempo e muita concentração é o principal objetivo desse projeto.

Esse trabalho serve não só para os alunos, mas também para professores, pois muitos não conhecem esses teoremas e poderão agora ter esse conhecimento, para que no futuro possam repassar aos seus alunos, além também de poderem usar nas provas de concursos públicos, tendo mais chances de alcançar a tão sonhada aprovação.

O principal foco dessa dissertação foi voltado ao cálculo de áreas de superfícies e de volumes, do cilindro, cone e esfera, no qual fizemos referência aos dois teoremas de Pappus e vimos a sua importância. Fica aqui como sugestão a você, que faça também um estudo mais aprofundado a respeito dos demais sólidos de revolução, que também são de

suma importância na geometria espacial. Ganhamos agora um novo aprendizado, novas maneiras de ensinar matemática e poder ajudar ao próximo.

Ao longo desses quase três anos de curso, adquirimos muito conhecimento com toda a equipe docente da UFPI e muitas amizades, que levaremos pra sempre nas nossas missões futuras, mas o principal ensinamento que tivemos nessa pós-graduação foi que *"a união faz a força"*.

Ingressar e cursar um mestrado foi até hoje o maior desafio enfrentado em toda a minha trajetória acadêmica. Poder está aqui agora finalizando mais essa etapa é a maior das recompensas, isso mostra que vale muito a pena sonhar, correr atrás, e poder comemorar com pessoas queridas a realização desses sonhos. E se consegui chegar até aqui, significa que posso ir bem mais longe, agora com o foco voltado para um doutorado.

# Apêndice A

**Professor responsável:** Leonardo da Vince de Araujo Carvalho

**Demais professores participantes:** Rodolfo Soares Teixeira

**E-mail e telefone do responsável:** [leonardo.da.vince18@gmail.com](mailto:leonardo.da.vince18@gmail.com)

## **TÍTULO:**

Descobrir o volume de forma prática e rápida.

## **PUBLICO ALVO:**

Alunos(as) da escola estadual CEJA Professor Artur Furtado.

## **NÚMERO MÁXIMO DE PARTICIPANTES:**

30 participantes

## **OBJETIVO(S):**

Calcular a área da superfície e o volume de sólidos de revolução através de uma única fórmula.

## **EMENTA:**

Centro de gravidade, área da superfície e volume do cilindro, do cone e da esfera.

## **JUSTIFICATIVA:**

Esse minicurso foi pensado, observando a dificuldade enfrentada pelos alunos na resolução de questões envolvendo a área e o volume de sólidos de revolução, bem como a dificuldade dos professores em repassar tal conteúdo.

### **METODOLOGIA:**

Esse minicurso dar-se-a de forma presencial, através de aulas expositivas e dialogadas, com auxílios de equipamentos eletrônicos. Será realizado em quatro dias, onde nos dois primeiros dias estaremos tratando sobre o software GeoGebra, como o professor convidado: Rodolfo Soares Teixeira.

Já nos dois últimos dias, usaremos os aprendizados e dicas advindas dos primeiros dois dias, assim como aprenderemos a encontrar o centro de gravidade de um cilindro, cone e da esfera, para que possamos atingir o objetivo principal, que é calcular a área e o volume desses e de outros sólidos de revolução, de forma prática e rápida.

### **EQUIPAMENTOS E MATERIAIS NECESSÁRIOS:**

Notebook, Datashow, câmera fotográfica, caneta, lápis e borracha.

### **LOCAL:**

Sala de informática do CEJA Professor Artur Furtado

### **DATA DO MINICURSO:**

05, 06, 12 e 13 de novembro de 2021

### **BIBLIOGRAFIA BÁSICA:**

DOLCE, Osvaldo e POMPEU, J. N. Fundamentos da matemática Elementar volume 10: geometria espacial, posição e métrica. 5<sup>a</sup> Edição. São Paulo: SARAIVA, 2000.

LIMA, E. L. Et al. A Matemática do Ensino Médio Volume 2: Matemática Discreta e Geometria Espacial. 5<sup>a</sup> Edição. SBM (2004).

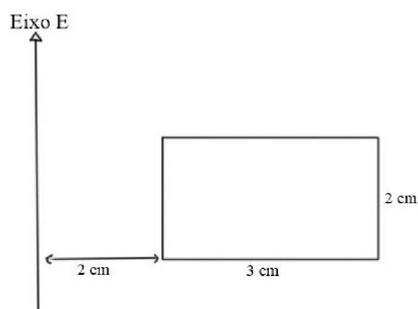
MIRANDA, J. Centro de Gravidade. Física, 2020. Disponível em:  
<https://www.grupoescolar.com/pesquisa/centro-de-gravidade.html>.

# Apêndice B

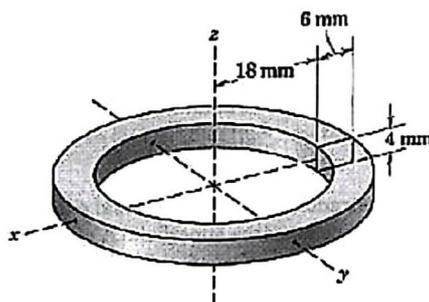
Professor: Leonardo da Vince de Araujo Carvalho

Aluno(a):

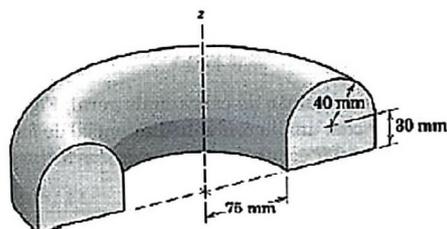
1. Calcule a área e o volume do sólido gerado pela revolução de um retângulo de lados 2 cm e 3 cm em torno do eixo  $E$ , sabendo que a distância desse retângulo ao eixo é igual a 2 cm, como mostra a figura a seguir.



2. Determine a área superficial  $A$  e o volume  $V$  do corpo formado pela revolução da área retangular por  $360^\circ$  em torno do eixo  $z$ .



3. Determine o volume  $V$  e a área superficial  $A$  do sólido gerado pela revolução da área mostrada por  $180^\circ$  em torno do eixo  $z$ .



4. (IME 2010) Sejam  $ABC$  um triângulo equilátero de lado 2 cm e  $r$  uma reta situada no seu plano distante 3 cm do seu baricentro. Calcule a área da superfície gerada pela rotação desse triângulo em torno da reta  $r$ .
  
5. Calcule a área e a superfície do sólido de revolução gerado pela rotação de um triângulo equilátero de lado 1 em torno de um eixo (de seu plano) que contém um vértice e é perpendicular a um lado.
  
6. Calcule a área e o volume de um toro sabendo que as circunferências interna e externa tem diâmetros 10 cm e 16 cm.

# Referências Bibliográficas

- [1] CARDOSO, I. C. S, *Centroides, Teorema de Pappus-Guldin e o cálculo de volume de sólidos de revolução*. Imaculada Coelho da Silva Cardoso, Universidade Federal de Ouro Preto. 2020.
- [2] DOLCE, O. e POMPEU, Jose Nicolau. Fundamentos da matemática Elementar volume 10: geometria espacial, posição e métrica. 5<sup>a</sup> Edição. São Paulo: SARAIVA, 2000.
- [3] EVES, Howard. Introdução à história da matemática 5<sup>a</sup> Edição. Campinas SP: Editora da Unicamp 2011.
- [4] GUIDORIZZI, H. L. Um curso de cálculo 5<sup>a</sup> Edição. Rio de Janeiro RJ: Editora LTC 2001. v.1.
- [5] HEATH, T. A history of greek mathematics. Oxford: The Clarendon Press, 1921. v.2.
- [6] LIMA, E. L. Et al. A Matemática do Ensino Médio Volume 2: Matemática Discreta e Geometria Espacial. 5<sup>a</sup> Edição. SBM (2004).
- [7] LIMA, W. F. *O princípio de Cavalieri com método de demonstração e fundamentação para o cálculo de áreas e volumes*. Wecsley Fernandes Lima, Universidade Federal do Ceará. 2015.
- [8] MAGNO *et. al*, 2020 Pappus de Alexandria: Contribuições à matemática, Universidade do Estado do Pará, 2020.
- [9] MIRANDA, J. Centro de Gravidade. Física, 2020. Disponível em: <https://www.grupoescolar.com/pesquisa/centro-de-gravidade.html>. Acesso em; 03/07/2021.
- [10] O'CONNOR, J.J. e ROBERTSON, E.F. Paul Guldin. História, 2010. Disponível em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Guldin/>. Acesso em; 03/07/2021.
- [11] PINTO, A. *A teoria dos indivisíveis: Uma contribuição do padre Bonaventura Cavalieri*. Aníbal Pinto, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. 2008.
- [12] SANTOS, T. Área da Esfera. Sólidos Geométricos, 2019. Disponível em: <https://www.educamaisbrasil.com.br/enem/matematica/area-da-esfera>. Acesso em; 03/07/2021.

- [13] SILVA, L. P. M. Princípio de Cavalieri. Mundo Educação, 2021. Disponível em: <https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/principio-cavalieri.htm>. Acesso em; 03/07/2021.