



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ**  
**CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA**  
**MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL**

**EVILSON RANGEL DOS SANTOS**

**ALGUNS PROBLEMAS ECONÔMICOS**

**FORTALEZA – CEARÁ**

**2021**

EVILSON RANGEL DOS SANTOS

ALGUNS PROBLEMAS ECONÔMICOS

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática em Rede Nacional. Área de concentração: Matemática Aplicada.

Orientador: Prof. Dr. Leo Ivo da Silva Souza.

FORTALEZA – CEARÁ

2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Estadual do Ceará  
Sistema de Bibliotecas

Santos, Evilson Rangel dos.

Alguns problemas econômicos [recurso eletrônico] / Evilson Rangel dos Santos. - 2021.  
77 f. : il.

Dissertação (MESTRADO PROFISSIONAL) -  
Universidade Estadual do Ceará, Centro de Ciências  
e Tecnologia, Curso de Mestrado Profissional Em  
Matemática Rede Nacional - Profissional,  
Fortaleza, 2021.

Orientação: Prof. Dr. Leo Ivo da Silva Souza..  
1. Matemática Financeira. Cálculo Diferencial.  
Funções Econômicas.. I. Título.

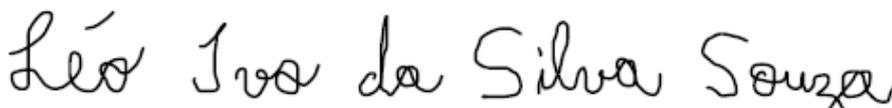
EVILSON RANGEL DOS SANTOS

ALGUNS PROBLEMAS ECONÔMICOS

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática em Rede Nacional. Área de concentração: Matemática Aplicada.

Aprovada em: 27 de julho de 2021

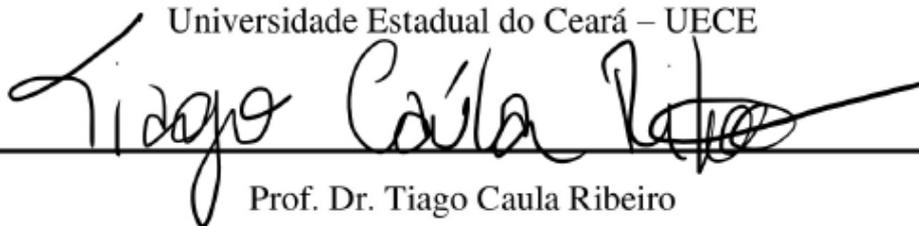
BANCA EXAMINADORA



---

Prof. Dr. Leo Ivo da Silva Souza (Orientador)

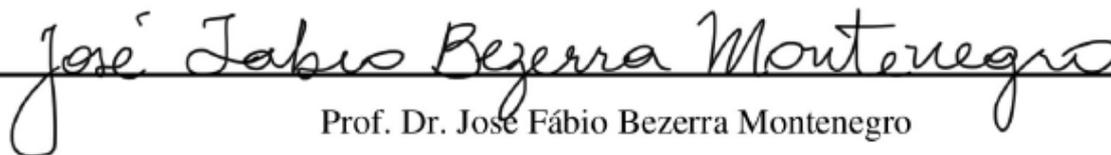
Universidade Estadual do Ceará – UECE



---

Prof. Dr. Tiago Caula Ribeiro

Universidade Estadual do Ceará – UECE



---

Prof. Dr. José Fábio Bezerra Montenegro

Universidade Federal do Ceará – UFC

A minha família: Elaine (esposa), Arthur (filho), Alcineide (mãe) e Milson (pai, in memoriam).

## **AGRADECIMENTOS**

A Deus, por iluminar e abençoar a minha caminhada.

Ao meu orientador, professor Dr. Leo Ivo da Silva Souza, pela dedicação, paciência, ensinamentos e contribuições para o trabalho.

Aos professores membros da banca examinadora.

Aos professores do Mestrado Profissional em Matemática da UECE, pelo conhecimento compartilhado, contribuindo para minha formação.

Aos colegas de curso, pelos incentivos e amizade durante este percurso.

Aos meus colegas de trabalho, pela colaboração e motivação.

Obrigado a todos!

## RESUMO

A pesquisa tem como propósito compreender o Cálculo Diferencial como ferramenta para resolução de problemas envolvendo funções usadas no campo da Economia. Justifica-se a investigação pela necessidade de estabelecer uma conexão entre o que é transmitido em sala de aula e o que é empregado no mundo dos negócios. Desse modo, pretende-se que os alunos do Ensino Médio desenvolvam com mais eficiência a capacidade de elaborar soluções diante de situações problemas e de fortalecer as suas escolhas. Este trabalho tem como base três tópicos temáticos: a Matemática Financeira como suporte básico para o estudo da Economia, o Cálculo Diferencial como ferramenta para trabalhar os problemas de funções econômicas e a Análise Marginal como fundamento para entender os problemas sobre receita marginal, lucro marginal e custo marginal. Para tanto, apresenta-se um trabalho que explora a abordagem qualitativa e utiliza pesquisa bibliográfica, realizada a partir da coleta de informações extraídas em materiais como artigos, dissertações e livros que destacam o tema abordado. Assim, pretende-se aprofundar o conhecimento acerca dos conteúdos econômicos, bem como definir os pontos relevantes do conhecimento matemático que será aplicado a tais conteúdos.

**Palavras-chave:** Matemática Financeira. Cálculo Diferencial. Funções Econômicas.

## **ABSTRACT**

The research aims to understand Differential Calculus as a tool for solving problems involving functions used in the field of Economics. Research is justified by the need to establish a connection between what is transmitted in the classroom and what is used in the business world. Thus it is intended that high school develop more efficiently the ability to develop solutions in the face of problem situations and to strengthen their choices. This work is based on three thematic topics: Financial Mathematics as basic support for the study of Economics Differential Calculus as a tool to work on the problems for economic functions and Marginal Analysis as a foundation to understand the problems about marginal revenue marginal profit and marginal cost. To this end, a study is presented that qualitative approach and uses bibliographic research carried out from the collection of information extracted from materials such as articles dissertations, and books that highlight the topic addressed. Thus it is intended to deepen the knowledge about the economic contentes as well as to define relevant points of the mathematical knowledge that will be applied to such contents.

**Keywords:** Finacial Mathematics. Differential Calculus. Economic Functions.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

<b>Tabela 1 –</b>	<b>Apresentação das formas de porcentagem.....</b>	<b>14</b>
<b>Tabela 2 –</b>	<b>Explicação do montante em juros compostos.....</b>	<b>16</b>
<b>Tabela 3 –</b>	<b>Relação entre juros simples e juros compostos.....</b>	<b>17</b>
<b>Tabela 4 –</b>	<b>Sistema SAC.....</b>	<b>21</b>
<b>Tabela 5 –</b>	<b>Sistema PRICE.....</b>	<b>23</b>
<b>Figura 1 –</b>	<b>Evolução dos montantes.....</b>	<b>17</b>
<b>Figura 2 –</b>	<b>Custo Médio Mínimo.....</b>	<b>65</b>
<b>Figura 3 –</b>	<b>Lucro Máximo.....</b>	<b>68</b>
<b>Figura 4 –</b>	<b>Diferencial de uma função.....</b>	<b>73</b>

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO.....</b>	<b>11</b>
<b>2</b>	<b>MATEMÁTICA FINANCEIRA.....</b>	<b>13</b>
<b>2.1</b>	<b>Juros simples.....</b>	<b>13</b>
2.1.1	Montante.....	15
<b>2.2</b>	<b>Juros compostos.....</b>	<b>15</b>
2.2.1	Evolução dos montantes.....	16
<b>2.3</b>	<b>Tipos de taxas de juros.....</b>	<b>17</b>
2.3.1	Taxas proporcionais.....	18
2.3.2	Taxa efetiva.....	18
2.3.3	Taxa nominal.....	18
2.3.4	Taxas equivalentes.....	19
2.3.5	Capitais equivalentes.....	19
<b>2.4</b>	<b>Sistemas de amortização.....</b>	<b>20</b>
2.4.1	Sistema de amortização constante (SAC) .....	21
2.4.2	Sistema de amortização francês (PRICE) .....	22
<b>3</b>	<b>CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL.....</b>	<b>24</b>
<b>3.1</b>	<b>Propriedades do conjunto dos números reais (<math>\mathbb{R}</math>) .....</b>	<b>24</b>
3.1.1	Supremo.....	24
3.1.2	Ínfimo.....	25
<b>3.2</b>	<b>Sequências.....</b>	<b>30</b>
3.2.1	Limite de sequências.....	31
<b>3.3</b>	<b>Limite.....</b>	<b>35</b>
3.3.1	Unicidade do Limite.....	35
3.3.2	Propriedades do limite.....	36
3.3.3	Continuidade de uma função em um ponto.....	41
3.3.4	Limites no infinito.....	42
3.3.5	Limites infinitos.....	43
<b>3.4</b>	<b>Derivada de uma Função.....</b>	<b>44</b>
3.4.1	Fórmulas de Derivação.....	45
3.4.2	Regras de Derivação.....	49

3.4.3	Regra da cadeia.....	51
3.4.4	Estudo da variação das funções.....	52
3.4.5	Fórmula de Taylor.....	55
<b>3.5</b>	<b>Noções de Integração.....</b>	<b>55</b>
<b>4</b>	<b>PROBLEMAS ECONÔMICOS.....</b>	<b>58</b>
<b>4.1</b>	<b>Funções Marginais.....</b>	<b>58</b>
4.1.1	Função Custo Marginal.....	58
4.1.2	Função custo médio.....	60
4.1.3	Função receita marginal.....	61
4.1.4	Função lucro marginal.....	61
4.1.5	Minimizando custos.....	63
4.1.6	Maximizando lucros.....	65
4.1.7	Maximizando receitas.....	67
<b>4.2</b>	<b>Elasticidade da demanda.....</b>	<b>69</b>
<b>4.3</b>	<b>Interpretações da derivada.....</b>	<b>72</b>
4.3.1	Taxa de inflação de uma Economia.....	72
4.3.2	A diferencial de uma função aproximando valores.....	73
<b>4.3.2.1</b>	<b><i>Financiamento Imobiliário</i>.....</b>	<b>74</b>
<b>4.3.2.2</b>	<b><i>Previdência Privada</i>.....</b>	<b>75</b>
<b>5</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS.....</b>	<b>76</b>
	<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>77</b>

## 1 INTRODUÇÃO

No ensino de Matemática é importante compreender que se faz necessário trabalhar com aplicações da Matemática em situações práticas que contribuem para a vida das pessoas. Nesse sentido, os alunos do Ensino Médio precisam entender o significado dos conteúdos direcionados na sala de aula e perceber como alguns assuntos abordados podem ajudá-los a despertar para o mercado de trabalho e auxiliar em tomadas de decisões futuras. Por isso, é preciso procurar alternativas de mecanismos que motivem e proporcionem um maior entendimento do conhecimento matemático. A Matemática está presente em várias áreas do conhecimento, uma delas é a Economia que é fundamentada pelos conceitos básicos da Matemática Financeira. Diante da necessidade dos alunos de Ensino Médio obter informações relevantes para sua formação, apresentamos nesse trabalho as funções marginais: receita marginal, lucro marginal e custo marginal – a fim de destacar as ideias principais associadas à Matemática Financeira e mostrar o caminho definido pelo Cálculo Diferencial para a solução de problemas que envolvem tais funções.

A aplicação do Cálculo Diferencial nos problemas de análise marginal tem como objetivo ampliar o processo de tomada de decisão das pessoas bem como possibilitá-las responder questionamentos do tipo: Qual a quantidade de um determinado produto? É preciso vender para maximizar o lucro? Quanto devo produzir para manter o custo mínimo na empresa? Essas situações levam o aluno a perceber a utilidade e o significado da Matemática no seu cotidiano.

Diante disso, o presente trabalho foi motivado pela necessidade de estabelecer uma conexão entre o que é transmitido em sala de aula e o que é empregado no mundo dos negócios. Desse modo, os alunos do Ensino Médio irão desenvolver com mais eficiência a capacidade de elaborar soluções diante de situações problemas e de fortalecer as suas escolhas.

O objetivo geral da pesquisa é compreender o Cálculo Diferencial como ferramenta para a resolução de problemas envolvendo funções econômicas. E tem como objetivos específicos: registrar os conceitos básicos da Matemática Financeira estudados no Ensino Médio, apresentar os principais teoremas e propriedades do Cálculo Diferencial relacionados às áreas das finanças e economia, explicar as definições ligadas às funções econômicas marginais – receita marginal, lucro marginal e custo marginal – e destacar aplicações da Derivada de função de única variável real em problemas que envolvem situações do mundo dos negócios.

Com o intuito de buscar construir informações importantes e objetivas sobre o tema referido neste projeto, decidi desenvolver uma pesquisa que explora a abordagem qualitativa.

O trabalho apresenta características bibliográficas, sendo realizado a partir da coleta de informações extraídas em materiais como artigos, dissertações e livros que destacam o tema abordado. Com a pesquisa bibliográfica pretende-se aprofundar o conhecimento acerca dos conteúdos econômicos bem como definir os pontos relevantes do conhecimento matemático que serão aplicados a tais conteúdos.

A pesquisa está organizada em três momentos. Inicialmente, temos um resumo de tópicos de Matemática Financeira no qual observamos assuntos de maior destaque no Ensino Médio. Em seguida, relatamos noções de Cálculo Diferencial dando ênfase a propriedades que servirão de ferramenta para aplicar em problemas relacionados ao campo da Economia. No último momento, observamos os principais elementos sobre as funções econômicas que compõem a análise marginal.

Diante do esquema definido acima, deseja-se obter informações que contribuirão para atingir o objetivo deste trabalho.

## 2 MATEMÁTICA FINANCEIRA

Nesta parte da pesquisa serão trabalhados os conceitos básicos da Matemática Financeira que é discutida no Ensino Médio apresentando as definições de juros simples e de juros compostos, com alguns exemplos. Iremos mostrar alguns tipos de taxas de juros e trabalhar com capitais equivalentes. Por fim, abordaremos dois sistemas de amortização sendo eles, SAC e PRICE – uma vez que compreendemos que esses modelos são praticados pelas instituições financeiras nas eventuais situações de empréstimos e financiamento de imóveis e de veículos.

### 2.1 Juros simples

Faz-se necessário, inicialmente, compreender o que vem a ser juro. Entende-se que juro corresponde a um valor a ser pago quando queremos adiantar uma compra, ou seja, uma quantia cobrada por querer comprar no presente e não no futuro.

Segundo Gomes e Mathias (2008), o juro pode ser considerado como sendo o custo do crédito ou a remuneração do capital empregado. Ou ainda, o juro é o pagamento pelo uso de poder aquisitivo por um determinado período.

Chamamos de juros simples quando a remuneração produzida pelo capital inicial é diretamente proporcional ao seu valor e ao período da transação. Ou seja, os juros são sempre calculados sobre o valor inicial durante todo o período da negociação. Concluindo, assim, que o fator de proporcionalidade é a taxa de juros.

Suponhamos que você pegou 1000 reais emprestados com seu irmão para pagar depois de 3 meses, a juros simples de 5% ao mês. No final desse período, qual é o valor que você terá que devolver ao seu irmão?

Como o acordo entre você e seu irmão foi sobre a prática dos juros simples, então no primeiro mês os juros correspondem a 5% de 1000 reais que equivale a 50 reais. Logo sua dívida agora é igual a 1050 reais, o valor inicial de 1000 reais acrescidos dos juros de 50 reais. Da mesma forma, no segundo mês os juros obtidos correspondem a 50 reais, porque iremos calcular 5% de 1000 reais, determinamos os juros sempre sobre o valor inicial. Daí, nesse momento, a sua dívida corresponde a 1100 reais. Finalmente, no terceiro mês, você deverá ao seu irmão uma quantia de 1150 reais. Ou seja, o valor inicial do empréstimo de 1000 reais mais 3 parcelas de 50 reais que correspondem aos juros produzidos durante esse período. É

fácil perceber que os juros de 150 reais são obtidos a partir do cálculo:  $5\% \cdot 1000 \cdot 3$ , que já nos indica como montar a fórmula para o cálculo dos juros simples.

É importante destacar que a taxa de juros é expressa de duas maneiras: na forma percentual ou na decimal. Quando precisamos transformar a forma percentual na forma decimal basta dividir por 100 a taxa apresentada na forma percentual.

Vejamos alguns exemplos na tabela 1:

**Tabela 1 – Apresentação das formas de porcentagem**

Forma Porcentual	Divisão	Forma Decimal
3%	$\frac{3}{100}$	0,03
11%	$\frac{11}{100}$	0,11
20%	$\frac{20}{100}$	0,20

Fonte: Elaborado pelo autor.

Analogamente, quando queremos transformar a taxa de juros da forma decimal para a forma percentual basta multiplicarmos a taxa decimal por 100.

Neste trabalho, a fim de simplificar os cálculos será utilizada a forma decimal.

Para determinar os juros simples em uma operação financeira usamos a seguinte fórmula:

$$J = Cit$$

Onde:

$J$  = Juros

$C$  = Capital inicial

$i$  = taxa de juros

$t$  = tempo da aplicação

É relevante observar que o tempo da aplicação  $t$  deve estar expresso na mesma unidade de tempo a que se refere à taxa de juros  $i$ .

**Exemplo 2.1.** Qual é o juro simples que um capital de 2500 reais produz durante 1 semestre, aplicados a uma taxa de juros de 1,5% a.m?

**Solução 2.1.** Observe que o tempo da aplicação não apresenta a mesma unidade de tempo da taxa de juros. Assim fica que, 1 semestre é igual a 6 meses. Logo, encontramos:

$$J = 2500 \cdot 0,015 \cdot 6 = 225.$$

### 2.1.1 Montante

Definimos montante como a soma do capital inicial com os juros. Assim temos que:  $M = C + J \Rightarrow M = C + Cit$  e, portanto:

$$M = C(1 + it)$$

Onde:

$M$  = Montante

$C$  = Capital inicial

$i$  = taxa de juros

$t$  = tempo da aplicação

**Exemplo 2.2.** Qual é o montante que será gerado por um capital de 3000 reais durante 1 ano, aplicados a uma taxa de juros simples de 2% a.m?

**Solução 2.2.** Observe que o tempo da aplicação não apresenta a mesma unidade de tempo da taxa de juros. Como 1 ano é igual a 12 meses. Logo, encontramos:

$$M = 3000(1 + 0,02 \cdot 12) = 3000 \cdot 1,24 = 3720.$$

## 2.2 Juros compostos

Mais conhecido como juros sobre juros. Essa modalidade de regime de capitalização retrata a realidade, o cotidiano das pessoas ao adquirir um empréstimo, financiamento ou qualquer outra transação financeira. No regime de capitalização composta o juro produzido pela aplicação será agregado à mesma para gerar novos juros no período seguinte. Dessa forma, não só o capital inicial produz juros, mas os juros gerados anteriormente.

Vamos considerar o problema introdutório anterior, só que agora, sob o regime de juros compostos e supondo que você tenha solicitado o empréstimo a um banco. É importante lembrar que você precisa determinar os juros sobre o valor que já foi gerado no mês anterior.

Suponhamos que você pegou 1000 reais emprestados em um banco para pagar depois de 3 meses, a taxa de juros compostos de 5% ao mês. No final desse período, qual é o valor que você terá que devolver ao banco?

Observe que no primeiro mês os juros correspondem a 5% de 1000 reais que equivale a 50 reais. Logo, sua dívida agora é igual a 1050 reais, o valor inicial de 1000 reais acrescidos dos juros de 50 reais. No segundo mês os juros obtidos correspondem a 52,50 reais, porque iremos calcular 5% de 1050 reais, os juros produzidos no primeiro mês são

somados aos 1000 reais, para formar novos juros, daí vem a expressão juros sobre juros. Agora, nesse momento, a sua dívida corresponde a 1102,50 reais. Finalmente, no final do terceiro mês, os juros compostos gerados serão de 5% de 1102,50, ou seja, 57,12 reais. Portanto, você deverá ao banco uma quantia de 1157,62 reais. Isto é, o valor de 1000 reais mais os juros de 157, 62 reais. Perceba que a mesma situação em juros simples gerou 150 reais de juros. Assim, essa diferença torna os juros compostos mais vantajosos para as instituições financeiras.

A tabela 2 mostra a ideia associada ao cálculo do montante de juros compostos em uma situação qualquer:

**Tabela 2 – Explicação do montante em juros compostos**

Período	Cálculo numérico	Cálculo algébrico
1	1000. 1,05 = 1050	$C(1 + i)$
2	1050. 1,05 = 1102,50	$C(1 + i)(1 + i) = C(1 + i)^2$
3	1102,50.1,05=1157,62	$C(1 + i)^2(1 + i) = C(1 + i)^3$

Fonte: Elaborado pelo autor.

Dessa forma, podemos generalizar o modelo usado na tabela 2 para calcular o montante ao final de  $t$  períodos à taxa de  $i$  juros compostos:

$$M = C(1 + i)^t$$

É importante destacar que a taxa de juros compostos  $i$  e o período  $t$  devem obedecer à mesma medida de tempo. Neste material a taxa de juros será dada na forma decimal na solução dos problemas propostos.

**Exemplo 2.3.** Qual é o montante que será gerado por um capital de 3000 reais durante 5 meses aplicados a uma taxa de juros compostos de 1% a.m.?

**Solução 2.3.** Observe que o tempo da aplicação apresenta a mesma medida de tempo da taxa de juros. Logo, encontramos:

$$M = C(1 + i)^t = 3000 (1 + 0,01)^5 = 3000 (1,01)^5 \cong 3000 \cdot 1,051 = 3153$$

### 2.2.1 Evolução dos montantes

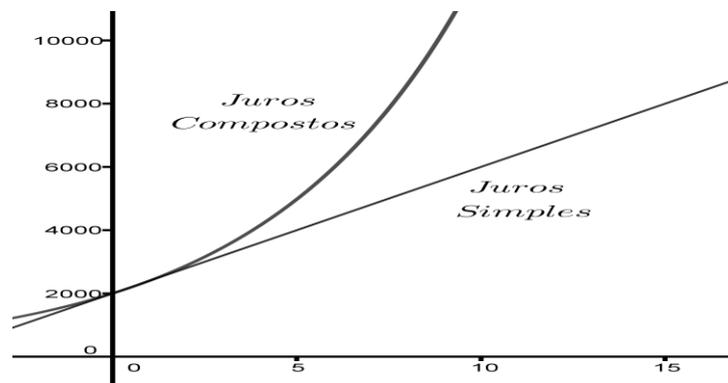
Vejamos um exemplo para facilitar o entendimento entre a diferença dos dois regimes de capitalização: dado um valor inicial de 2000 reais aplicado à taxa de 20% a.a por um período de 4 anos a juros simples e compostos.

**Tabela 3 – Relação entre juros simples e juros compostos**

Período	Juros simples	Juros compostos
1	$2000 + 400 = 2400$	$2000 \cdot 1,2 = 2400$
2	$2000 + 800 = 2800$	$2000 \cdot 1,2^2 = 2880$
3	$2000 + 1200 = 3200$	$2000 \cdot 1,2^3 = 3456$
4	$2000 + 1600 = 3600$	$2000 \cdot 1,2^4 = 4147$

Fonte: Elaborado pelo autor.

Percebemos que a construção do montante em juros simples é linear e em juros compostos é exponencial. O gráfico da figura 1 nos mostra a evolução dos montantes em cada regime de juros. Observe que a reta representa os juros simples e a curva representa o crescimento dos juros compostos.

**Figura 1 – Evolução dos montantes**

Fonte: Elaborado pelo autor.

### 2.3 Tipos de taxas de juros

Nos financiamentos de veículos e de imóveis, normalmente só temos conhecimento da taxa mensal de juros e não atentamos para taxa anual que foi praticada. É importante observar e entender o funcionamento dos tipos de taxas de juros para podermos avaliar os riscos de algumas transações financeiras. Diante disso, vamos destacar neste trabalho alguns tipos de taxas de juros.

### 2.3.1 Taxas proporcionais

Dadas duas taxas de juros simples se ocorre a igualdade do quociente das taxas com o quociente dos respectivos períodos, dizemos que essas taxas são proporcionais.

Sendo  $i_1$  e  $i_2$  taxas de juros proporcionais com seus respectivos períodos  $t_1$  e  $t_2$ , definidos na mesma unidade de tempo temos que

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{t_1}{t_2}$$

**Exemplo 2.4.** Obtenha a taxa de juros mensal proporcional à taxa de juros de 60% ao ano.

**Solução 2.4.** Basta lembrar que 1 ano corresponde a 12 meses e considerar a igualdade

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{t_1}{t_2} \Rightarrow \frac{60}{i_2} = \frac{12}{1} \Rightarrow i_2 = \frac{60}{12} \Rightarrow i_2 = 5\%.$$

### 2.3.2 Taxa efetiva

Seja  $i$  uma taxa de juros aplicada em um período de tempo  $t$ , dizemos que  $i$  é uma taxa efetiva quando  $i$  e  $t$  apresentam a mesma unidade de tempo.

Por exemplo:

1. 2% ao mês, capitalizados mensalmente.
2. 18% ao ano, capitalizados anualmente.

### 2.3.3 Taxa nominal

Seja  $i$  uma taxa de juros aplicada em um período de tempo  $t$ , dizemos que  $i$  é uma taxa nominal quando  $i$  e  $t$  não apresentam a mesma unidade de tempo.

Por exemplo:

1. 36 % ao ano, capitalizados mensalmente.
2. 9% ao ano, capitalizados bimestralmente.

### 2.3.4 Taxas equivalentes

Dadas duas taxas de juros  $i_1$  e  $i_2$ , tal que  $i_1 \neq i_2$ , dizemos que essas taxas são equivalentes quando sendo aplicadas a um mesmo capital inicial por intervalo de tempo igual produzem o mesmo montante.

É fácil perceber que em juros simples às taxas de juros proporcionais correspondem as taxas de juros equivalentes. Em juros compostos, isso não acontece.

De fato, se pegarmos a aplicação de dois capitais iniciais iguais, durante o mesmo intervalo de tempo, sendo as taxas de juros distintas,  $i_1$  e  $i_2$ , de tal modo que  $t_2$  equivale a  $n$  períodos de  $t_1$ , ambas as taxas produzirão mesmo montante se forem equivalentes. Logo,

$$(1 + i_1)^n = (1 + i_2)$$

$$i_2 = (1 + i_1)^n - 1$$

**Exemplo 2.5.** Calcule a taxa anual equivalente a uma taxa de juros mensal de 3%.

**Solução 2.5.** Temos que:

$$i_2 = (1 + i_1)^n - 1 \Rightarrow i_2 = (1 + 0,03)^{12} - 1 \Rightarrow i_2 = 0,4257.$$

Logo, a taxa anual é de 42,57%.

### 2.3.5 Capitais equivalentes

Quando observados em uma mesma data, dois capitais são equivalentes se forem iguais. Essa parte do trabalho é interessante porque visa mostrar como o valor do dinheiro funciona no tempo e perceber o real valor de um produto no caso de uma compra a prazo. Assim, precisamos entender alguns conceitos básicos como data focal, valor atual e valor nominal.

De acordo com Gomes e Mathias (2008), data focal é a data que se considera como base de comparação dos valores referidos a datas diferentes. Valor nominal é o valor de um título na data do vencimento. Valor atual é o valor da aplicação em uma data anterior ao vencimento.

Dessa forma, usando  $N$  para representar o valor nominal e  $A$  para valor atual, temos que:

Considerando um conjunto de  $n$  valores nominais  $\{N_1, N_2, N_3, \dots, N_n\}$  e suas datas de vencimento, aplicados a uma taxa de juros  $i$ , estes capitais são equivalentes na data focal zero, se:

$$\frac{N_1}{(1+i)} = \frac{N_2}{(1+i)^2} = \frac{N_3}{(1+i)^3} = \dots = \frac{N_n}{(1+i)^n}$$

**Exemplo 2.7.** Sabe-se que a taxa de juros compostos aplicada no mercado é de 4% ao mês. Caso um título no valor nominal de 8857,10 reais com vencimento para 6 meses é substituído por outro no valor de 8188,60 reais para vencer em 4 meses, verifique se a substituição é vantajosa.

**Solução 2.7.** Basta verificarmos se os capitais são equivalentes. Para isso, vamos considerar a data focal zero. Inicialmente devemos calcular o valor atual na data focal zero do capital de 8188,60 reais. Assim, temos:

$$A = \frac{N_1}{(1+i)^t} = \frac{8188,60}{(1,04)^4} = 7000$$

Em seguida, calculemos o valor atual referente ao capital de 8857,10 reais na data focal zero. Assim, fica:

$$A = \frac{N_2}{(1+i)^t} = \frac{8857,10}{(1,04)^6} = 7000$$

Portanto, não ocorre vantagem na troca dos títulos, pois os valores atuais são iguais na data focal zero.

**Exemplo 2.8.** Um aparelho celular custa 1300 reais à vista. Se o cliente preferir pode fazer a compra a prazo por 600 reais de entrada e mais duas parcelas mensais de 400 reais. Considerando a taxa de juros de 2% ao mês, qual é a melhor opção para o cliente?

**Solução 2.8.** Vamos analisar esses valores na data focal zero. Assim, temos:

$$A = 600 + \frac{400}{(1,02)} + \frac{400}{(1,02)^2} = 600 + 392,15 + 384,61 = 1376,76$$

Sendo assim, a melhor opção para o cliente é fazer o pagamento à vista de 1300 reais, pois a outra opção resultaria na venda do celular por 1376,76 reais.

## 2.4 Sistemas de amortização

Quando contraímos uma dívida de longo prazo, empréstimo ou financiamento, temos a obrigação de devolver o valor que foi emprestado acrescido de juros, no período determinado.

A amortização é o mecanismo de pagamento de uma dívida por parcelas periódicas. As parcelas de amortização são as parcelas de devolução de parte do valor emprestado, ou seja, é o valor descontado no total da dívida. Já a prestação corresponde à soma da amortização com os juros. O saldo devedor é o débito em um determinado período,

sendo os juros calculados sempre sobre o saldo devedor. Nos sistemas de amortização é considerado o regime de juros compostos, caso aconteça o não pagamento de juros em período específico resultará a um saldo devedor maior sendo determinado juro sobre juro.

Os principais sistemas de amortização usados no mercado financeiro atual e que destacamos neste trabalho são os seguintes:

#### 2.4.1 Sistema de amortização constante (SAC)

Esse sistema é caracterizado por apresentar as parcelas de amortização constante, prestação decrescente e montante menor. Os juros são obtidos a cada intervalo de tempo, multiplicando a taxa de juros pelo saldo devedor no período anterior. Para calcular a parcela de amortização basta dividir o valor da dívida pela quantidade de prestações. Vejamos um exemplo para ilustrar melhor essa ideia.

Uma pessoa solicitou um empréstimo no valor de 10.000 reais a um banco que aplica taxa de juros de 2% ao mês. Sabendo que o capital emprestado deve ser devolvido em 8 parcelas mensais, construa uma tabela SAC para explicar essa situação.

Temos que o valor amortizado corresponde a 10.000 reais dividido por 8, isto é, 1250 reais. Logo, a coluna da amortização será toda preenchida por 1250. Como os juros são calculados sobre o saldo devedor, no primeiro mês é calculado 2% de 10.000 que obtemos 200. Assim a prestação no final do primeiro mês resulta em  $1250 + 200$ , ou seja, 1450 reais.

**Tabela 4 – Sistema SAC**

<b>Período</b>	<b>Juros</b>	<b>Amortização</b>	<b>Prestação</b>	<b>Saldo devedor</b>
0	-	-	-	10000
1	200	1250	1450	8750
2	175	1250	1425	7500
3	150	1250	1400	6250
4	125	1250	1375	5000
5	100	1250	1350	3750
6	75	1250	1325	2500
7	50	1250	1300	1250
8	25	1250	1275	0

Fonte: Elaborado pelo autor.

Atentem que do saldo devedor é sempre retirado o valor constante de 1250 reais. Dessa forma, a coluna relativa ao saldo devedor pode ser preenchida automaticamente desde o início da elaboração da planilha. Basta subtrair 1250 do saldo devedor do período anterior e continuar fazendo essa conta até o último período. Para o cálculo dos juros do segundo mês, é preciso determinar 2% de 8750 que é a dívida resultante do primeiro mês e assim por diante. Para verificar se as contas estão corretas basta somar os resultados da coluna da prestação que dá 10.900 reais, em seguida, somar os valores relativos aos juros calculados que encontramos 900. Logo, o capital inicial de 10.000 reais mais os juros de 900 reais é gerado o montante de 10.900 reais.

#### 2.4.2 Sistema de amortização francês (PRICE)

Esse sistema é caracterizado por apresentar as parcelas de amortização variáveis, isto é, crescentes com prestação fixa e montante maior quando comparado com a tabela SAC. Assim como no sistema SAC, os juros são obtidos a cada intervalo de tempo, multiplicando a taxa de juros pelo saldo devedor no período anterior. Para calcular a parcela de amortização basta subtrair os juros do valor da prestação.

Vamos considerar a mesma situação problema usada para explicar a elaboração da tabela SAC na seção anterior.

Uma pessoa solicitou um empréstimo no valor de 10.000 reais a um banco que aplica taxa de juros de 2% ao mês. Sabendo que o capital emprestado deve ser devolvido em 8 parcelas mensais, construa uma tabela PRICE para explicar essa situação.

Inicialmente é preciso determinar o valor da prestação. Como no sistema PRICE as prestações são constantes, ou seja, apresentam valores sempre iguais em cada intervalo de tempo, mas são pagas em meses diferentes, vamos usar a ideia de capitais equivalentes já explicadas neste material. Portanto, chamando a prestação de  $P$  e considerando a data focal zero, pois a dívida é 10 000 reais no início do empréstimo. Temos:

$$\frac{P}{(1,02)^8} + \frac{P}{(1,02)^7} + \frac{P}{(1,02)^6} + \frac{P}{(1,02)^5} + \frac{P}{(1,02)^4} + \frac{P}{(1,02)^3} + \frac{P}{(1,02)^2} + \frac{P}{(1,02)} = 10000$$

Daí, encontramos uma soma de progressão geométrica da razão 1,02 e primeiro termo  $\frac{P}{(1,02)^8}$ . Lembrando a fórmula da soma da PG finita, fica que:

$$S = a \frac{(q^n - 1)}{(q - 1)}$$

$$S = \frac{P}{(1,02)^8} \cdot \frac{(1,02^8 - 1)}{(1,02 - 1)} \Rightarrow 10000 = \frac{0,1716P}{0,0234} \Rightarrow P = 1363,64$$

Temos que o valor da prestação resulta em 1363,64 reais. Logo, na tabela 5 a coluna da prestação será toda preenchida por 1363,64. Como os juros é calculado sobre o saldo devedor, no primeiro mês é calculado 2% de 10.000 reais que obtemos 200 reais. Assim o valor da parcela de amortização no final do primeiro mês resulta em 1363,64 reais menos 200 reais, ou seja, 1163,64 reais. Atentem que a pessoa paga 1363,64 reais de prestação, mas o que será abatido de sua dívida corresponde a 1163,64 reais. Depois de calcular o novo saldo devedor, para o cálculo dos juros do segundo mês é preciso determinar 2% de 8836,36 que é a dívida resultante do primeiro mês. Em seguida, esse procedimento deve ser realizado até o final do período.

**Tabela 5 – Sistema PRICE**

<b>Período</b>	<b>Juros</b>	<b>Amortização</b>	<b>Prestação</b>	<b>Saldo devedor</b>
0	-	-	-	10000,00
1	200,00	1163,64	1363,64	8836,36
2	176,72	1186,92	1363,64	7649,44
3	152,98	1210,66	1363,64	6438,78
4	128,77	1234,87	1363,64	5203,91
5	104,07	1259,57	1363,64	3944,34
6	78,88	1284,76	1363,64	2659,13
7	53,19	1310,45	1363,64	1349,13
8	26,98	1336,66	1363,64	12,47

Fonte: Elaborado pelo autor.

Observe que no final do oitavo mês encontramos um saldo devedor de 12,47 reais. Isso se deve aos arredondamentos que foram feitos durante a elaboração da tabela. Essa diferença pode ser acrescentada na última parcela de amortização a fim de zerar o saldo devedor. Outro ponto importante para destacar é relativo à soma das prestações: na tabela PRICE foi gerado 10.909,12 reais enquanto que no sistema SAC foi produzido 10.900 reais. Ao longo prazo, no caso de financiamento de imóveis, a opção pelo sistema SAC é mais vantajoso.

### 3 CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

Neste capítulo desenvolvemos um estudo simplificado do Cálculo Diferencial e Integral no âmbito de funções de única variável real. No início tratamos uma abordagem simples sobre supremo, ínfimo e sequências que formam uma estrutura para estudar o Cálculo Diferencial e Integral. Em seguida, apresentamos uma noção de limite e algumas propriedades relevantes. Por fim, serão destacadas as principais definições, os teoremas importantes e algumas demonstrações de Derivada que servirá de fundamento para aplicações na resolução de problemas das áreas da Administração e Economia. Esta parte da pesquisa é baseada nos livros: Curso de Análise de Elon Lages Lima (2012) e Um Curso de Cálculo de Hamilton Luiz Guidorizzi (2008).

#### 3.1 Propriedades do conjunto dos números reais ( $\mathbb{R}$ )

##### 3.1.1 Supremo

Considerando um conjunto  $A \subset \mathbb{R}$ , não vazio, dizemos que é limitado superiormente, se existir um número real  $b$  tal que  $A \subset (-\infty, b]$ . Assim, dizemos que  $b$  é uma cota superior para  $A$ .

De maneira análoga, dado um conjunto  $A \subset \mathbb{R}$ , não vazio, dizemos que é limitado inferiormente, se existir um número real  $a$  tal que  $A \subset [a, +\infty)$ . Assim, dizemos que  $a$  é uma cota inferior para  $A$ .

Logo, se o conjunto  $A \subset \mathbb{R}$ , não vazio, é ao mesmo tempo limitado superior e inferiormente, dizemos que  $A$  é limitado.

**Definição 3.1.** Dizemos que  $b$  é o supremo de  $A$ , e denotamos  $b = \sup A$ , se  $A \subset \mathbb{R}$ , não vazio, é limitado superiormente e  $b$  é a menor cota superior de  $A$ .

Para que um número real  $b$  seja supremo de um conjunto  $A \subset \mathbb{R}$ , é necessário e suficiente que as condições sejam satisfeitas:

- 1) Para todo  $x \in A$ , tem-se  $x \leq b$
- 2) Se  $c \in \mathbb{R}$ , tal que  $x \leq c$  para todo  $x \in A$ , então  $b \leq c$ .

A primeira condição diz que  $b$  é cota superior de  $A$ , enquanto a segunda condição afirma que qualquer outra cota superior de  $A$ , deve ser maior que ou igual a  $b$ .

Assim, a segunda condição pode ser escrita da seguinte forma:

3) Dado  $c < b$  em  $\mathbb{R}$ , existe  $x \in A$  tal que  $c < x$ .

A terceira condição diz que nenhum elemento de  $\mathbb{R}$ , que seja inferior a  $b$ , pode ser cota superior de  $A$ .

Se dois elementos  $b_1$  e  $b_2$  em  $\mathbb{R}$  obedecem às condições 1 e 2 acima, precisa apresentar  $b_1 \leq b_2$  e  $b_2 \leq b_1$ , ou seja,  $b_1 = b_2$ . Portanto, o supremo de um conjunto, quando existe, é único.

As condições que caracterizam o supremo podem, portanto, ser escritas assim:

1)  $x \in A \Rightarrow x \leq \sup A$ .

2)  $c \geq x$  para todo  $x \in A$ , então  $c \geq \sup A$ .

3) Se  $c < \sup A$ , então existe  $x \in A$  tal que  $c < x$ .

**Exemplo 3.1.** Dado o conjunto  $A = (-\infty, 1)$ , verifique que  $\sup A = 1$ .

**Solução 3.1.** Temos que 1 é cota superior de  $A$ , pois  $x < 1$  para todo  $x$  em  $A$ . De fato, se tomarmos algum  $d < 1$ , temos que

$$d < \frac{d+1}{2} < 1$$

logo

$$\frac{d+1}{2} \in A$$

Portanto  $d$  não pode ser cota superior para  $A$ , o que segue  $\sup A = 1$ .

### 3.1.2 Ínfimo

**Definição 3.2.** Dizemos que  $a$  é o ínfimo de  $A$ , e denotamos  $a = \inf A$ , se  $A \subset \mathbb{R}$ , não vazio, é limitado inferiormente e  $a$  é a maior cota inferior de  $A$ .

Para que um número real  $a$  seja ínfimo de um conjunto  $A \subset \mathbb{R}$ , é necessário e suficiente que as condições sejam satisfeitas:

1) Para todo  $y \in A$ , tem-se  $a \leq y$ .

2) Se  $c \in \mathbb{R}$ , tal que  $c \leq y$  para todo  $y \in A$ , então  $c \leq a$ .

A primeira condição diz que  $a$  é cota inferior de  $A$ , enquanto a segunda condição afirma que qualquer outra cota inferior de  $A$ , deve ser menor que ou igual a  $a$ .

Assim, a segunda condição pode ser reescrita:

3) Dado  $a < c$  em  $\mathbb{R}$ , existe  $y \in A$  tal que  $y < c$ .

A terceira condição diz que nenhum elemento de  $\mathbb{R}$ , que seja maior do que a  $a$ , pode ser cota inferior de  $A$ .

Se dois elementos  $a_1$  e  $a_2$  em  $\mathbb{R}$  obedecem às condições 1 e 2 acima, precisa apresentar  $a_1 \leq a_2$  e  $a_2 \leq a_1$ , ou seja,  $a_1 = a_2$ . Portanto, o ínfimo de um conjunto, quando existe, é único.

As condições que caracterizam o ínfimo podem, portanto, ser escritas assim:

- 1)  $y \in A \Rightarrow y \geq \inf A$
- 2)  $c \leq y$  para todo  $y \in A$ , então  $c \leq \inf A$ .
- 3) Se  $c > \inf A$ , então existe  $y \in A$  tal que  $y < c$ .

**Exemplo 3.2.** Dado o conjunto  $A = \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$  verifique que  $\inf A = \frac{1}{2}$ .

**Solução 3.2.** Temos que  $\frac{1}{2}$  é cota inferior de  $A$ , pois  $\frac{1}{2} < x$  para todo  $x$  em  $A$ . De fato, se tomarmos algum  $\frac{1}{2} < d$ , temos

$$\frac{1}{2} < \frac{2d+1}{4} < d$$

logo

$$\frac{2d+1}{4} \in A$$

e, portanto,  $d$  não pode ser cota inferior para  $A$ , o que segue  $\inf A = \frac{1}{2}$ .

**Exemplo 3.3.** O axioma fundamental da análise nos diz que, cada subconjunto de  $\mathbb{R}$  que é não vazio e limitado superiormente tem supremo. Seja  $c$  um número real. Tem – se  $c \leq \sup A$  se, e somente se, para cada  $\varepsilon > 0$  real dado pode – se achar  $x \in A$  tal que  $c - \varepsilon < x$ .

**Solução 3.3.** ( $\Rightarrow$ ) Suponha por absurdo que exista  $\varepsilon_0 > 0$  tal que  $x \leq c - \varepsilon_0$ , para todo  $x \in A$ . Assim,  $c - \varepsilon_0$  é uma cota superior de  $A$ . Por outro lado,

$$c - \varepsilon_0 < c \leq \sup A$$

ou seja,

$$c - \varepsilon_0 < \sup A$$

(Absurdo). Concluimos que, para cada  $\varepsilon > 0$  real dado pode-se achar  $x \in A$  tal que  $c - \varepsilon < x$ .

( $\Leftarrow$ ) Suponha por absurdo que  $c > \sup A$ . Temos por hipótese que para todo  $\varepsilon > 0$ , assim existe  $x_1 \in A$  tal que  $c - \varepsilon < x_1$ , escolhendo um  $\varepsilon_0 = c - \sup A > 0$  e existirá um  $x_0 \in A$  tal que  $c - \varepsilon_0 < x_0$ . Portanto

$$c - (c - \sup A) < x_0$$

ou seja,  $\sup A < x_0$ .

E assim  $\sup A$  não é cota superior de  $A$  (Absurdo). Assim, concluimos que  $c \leq \sup A$ .

**Exemplo 3.4.** Sejam  $A \subset \mathbb{R}$ , não vazio, limitado inferiormente, e um número real  $c$ . Tem-se se  $c \geq \inf A$  se, e somente se, para cada  $\varepsilon > 0$  real dado pode-se achar  $x \in A$  tal que  $c + \varepsilon > x$ .

**Solução 3.4.** ( $\Rightarrow$ ) Suponha por absurdo que exista  $\varepsilon_0 > 0$  tal que  $x > c + \varepsilon_0$ , para todo  $x \in A$ . Assim,  $c + \varepsilon_0$  é uma cota inferior de  $A$ . Por outro lado,

$$c + \varepsilon_0 > c > \inf A$$

ou seja,

$$c + \varepsilon_0 > \inf A.$$

Absurdo, pois  $\inf A$  é a maior das cotas inferiores de  $A$ . Concluimos que, para cada  $\varepsilon > 0$  real dado pode-se achar  $x \in A$  tal que  $c + \varepsilon > x$ .

( $\Leftarrow$ ) Suponha por absurdo que  $c < \inf A$ . Temos por hipótese que  $\forall \varepsilon > 0$ , existe um  $x_1 \in A$  tal que  $c + \varepsilon > x_1$ , escolhendo um  $\varepsilon_0 = \inf A - c > 0$  e existirá um  $x_0 \in A$ . Portanto,

$$c + \varepsilon_0 > x_0,$$

porém

$$c + (\inf A - c) > x_0,$$

ou seja,  $\inf A > x_0$  e  $\inf A$  não é cota inferior de  $A$ . (Absurdo). Concluimos que,  $c \geq \inf A$ .

**Exemplo 3.5.** Sejam  $A, B$  conjuntos não-vazios de números reais, com  $x \in A, y \in B \Rightarrow x \leq y$ . Prove que  $\sup A \leq \inf B$ . Prove que  $\sup A = \inf B$  se, e somente se, para todo  $\varepsilon > 0$  dado, podem-se obter  $x \in A$  e  $y \in B$  tais que  $y - x < \varepsilon$ .

**Solução 3.5.** Inicialmente vamos provar que  $\sup A \leq \inf B$ , dados  $A, B$  conjuntos não-vazios de números reais com  $x \in A, y \in B$ . Considerando um  $y$  qualquer de  $B$ . Como  $x \leq y$  para todo  $x \in A$ , temos que  $A \subset (-\infty, y]$ , isto é,  $y$  é uma cota superior para  $A$  e portanto,  $A$  é limitado superiormente, assim  $\sup A \leq y$ . Ora, como  $\sup A \leq y, \forall y \in B$ , temos que  $B \subset [\sup A, +\infty)$ , isto é,  $\sup A$  é uma cota inferior para  $B$ . Logo,  $B$  é limitado inferiormente e  $\sup A \leq \inf B$ .

( $\Rightarrow$ ) Pelos exemplos anteriores, sabemos que existe  $x_\varepsilon \in A$  e existe  $y_\varepsilon \in B$ , tais que

$$\sup A - \frac{\varepsilon}{2} < x_\varepsilon \leq \sup A$$

e

$$\inf B \leq y_\varepsilon < \inf B + \frac{\varepsilon}{2}$$

de

$$\sup A - \frac{\varepsilon}{2} < x_\varepsilon$$

temos

$$-x_\varepsilon < -\sup A + \frac{\varepsilon}{2}$$

e somando com

$$y_\varepsilon < \inf B + \frac{\varepsilon}{2}$$

resulta em

$$y_\varepsilon - x_\varepsilon < \inf B - \sup A + \varepsilon,$$

por hipótese,  $\sup A = \inf B$ , assim  $y_\varepsilon - x_\varepsilon < \inf B - \inf B + \varepsilon$ , logo  $y - x < \varepsilon$ .

( $\Leftarrow$ ) Suponha por absurdo que  $\sup A < \inf B$ . Como sabemos que  $\forall \varepsilon > 0$ , existe  $x_\varepsilon \in A$  e existe  $y_\varepsilon \in B$  tal que  $y_\varepsilon - x_\varepsilon < \varepsilon$ , escolhendo  $\varepsilon_0 = \inf B - \sup A > 0$  temos que existem  $x_0 \in A$  e  $y_0 \in B$ , tais que

$$y_0 - x_0 < \varepsilon_0 = \inf B - \sup A$$

assim fica,

$$y_0 - \inf B < x_0 - \sup A,$$

como,

$$x_0 \leq \sup A \Rightarrow y_0 - \inf B < 0 \Rightarrow y_0 < \inf B$$

(Absurdo). Logo,  $\sup A = \inf B$ .

**Exemplo 3.6.** Seja  $X = \left\{ \frac{1}{n}; n \in \mathbb{N} \right\}$ . Prove que  $\inf X = 0$ .

**Solução 3.6.** Como  $\frac{1}{n} > 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , temos que 0 é cota inferior de  $X$ .

Devemos mostrar que nenhum real  $c > 0$  é cota inferior de  $X$ .

Considerando o conjunto  $A = \{n \in \mathbb{N}; nc > 1\}$ , temos que  $A \subset \mathbb{N}$  e  $A \neq \emptyset$ , pois se  $A = \emptyset$  teríamos  $nc \leq 1$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ , e assim  $n \leq \frac{1}{c}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , ou seja,  $\mathbb{N}$  seria limitado. Absurdo, pois,  $\mathbb{N}$  é ilimitado superiormente. Pelo Princípio da Boa Ordenação, existe  $n_0 \in \mathbb{N}$ , tal que  $n_0$  é o menor elemento de  $A$ . Assim,  $n_0 c > 1$ , ou seja,  $0 < \frac{1}{n_0} < c$ . Logo,  $c$  não é cota inferior de  $X$ . Portanto,  $\inf X = 0$ .

**Exemplo 3.7.** Dado  $A \subset \mathbb{R}$  não vazio, limitado inferiormente, seja  $-A = \{-x; x \in A\}$ . Prove que  $-A$  é limitado superiormente e que  $\sup(-A) = -\inf A$ .

**Solução 3.7.** Se  $A$  é limitado inferiormente e  $c > 0$  tal que  $x \geq c$ ,  $\forall x \in A$ , então  $-x \leq -c$ , para todo  $x \in A$ . Mas como  $-x \in (-A)$  conclui-se que  $-x \leq -c$ , para todo  $-x \in (-A)$ , ou seja,  $-c$  é cota superior, logo  $(-A)$  é limitado superiormente.

Para todo  $x \in A$  tem-se  $\inf A \leq x$ , então,  $-\inf A \geq -x$ ,  $\forall -x \in (-A)$ , logo  $-\inf A \geq \sup(-A)$ , pois  $-A$  é limitado superiormente. Por outro lado,  $-x \leq \sup(-A)$ ,  $\forall -x \in (-A)$ . Logo, temos  $x \geq -\sup(-A)$ , para todo  $x \in A$ , assim, pela definição de ínfimo,  $\inf A \geq -\sup(-A)$ , daí fica  $-\inf A \leq \sup(-A)$ . Como  $-\inf A \geq \sup(-A)$  e  $-\inf A \leq \sup(-A)$ , portanto, concluímos que  $\sup(-A) = -\inf A$ .

**Exemplo 3.8.** Dado  $A \subset \mathbb{R}$  não vazio, limitado superiormente, seja  $-A = \{-x; x \in A\}$ . Prove que  $-A$  é limitado inferiormente e que  $\inf(-A) = -\sup A$ .

**Solução 3.8.** Se  $A$  é limitado superiormente e  $c > 0$  tal que  $x \leq c$ ,  $\forall x \in A$ , então  $-x \geq -c$ , para todo  $x \in A$ . Mas como  $-x \in (-A)$  conclui-se que  $-x \geq -c$ , para todo  $-x \in -A$ , ou seja,  $-c$  é cota inferior, logo  $(-A)$  é limitado inferiormente.

Para todo  $x \in A$ , tem-se  $\sup A \geq x$ , então,  $-\sup A \leq -x$ ,  $\forall -x \in (-A)$ , logo,  $-\sup A \leq \inf(-A)$ , pois  $(-A)$  é limitado inferiormente. Por outro lado, tem-se  $\inf(-A) \leq -x$ ,  $\forall -x \in (-A)$ , assim  $-\inf(-A) \geq x$ , para todo  $x \in A$ , daí pela definição de supremo, fica que  $\sup A \leq -\inf(-A)$  que implica em  $-\sup A \geq \inf(-A)$ .

Como  $-\sup A \leq \inf(-A)$  e  $-\sup A \geq \inf(-A)$ , conclui-se que  $\inf(-A) = -\sup A$ .

**Exemplo 3.9.** Seja  $A \subset \mathbb{R}$  não vazio, limitado. Dado  $c > 0$ , seja,  $c \cdot A = \{c \cdot x; x \in A\}$ . Prove que  $c \cdot A$  é limitado e que  $\sup(c \cdot A) = c \cdot \sup A$ ,  $\inf(c \cdot A) = c \cdot \inf A$ .

**Solução 3.9.** Como  $A$  é limitado, temos que, para todo  $x \in A$ ,  $x \leq \sup A$  assim,  $c \cdot x \leq c \cdot \sup A$ , logo,  $c \cdot \sup A$  é cota superior de  $c \cdot A$ , portanto  $c \cdot A$  é limitado superiormente. Por outro lado, para todo  $x \in A$ ,  $x \geq \inf A$  assim,  $c \cdot x \geq c \cdot \inf A$ , logo,  $c \cdot \inf A$  é cota inferior de  $c \cdot A$ , portanto  $c \cdot A$  é limitado inferiormente. Daí, o conjunto  $c \cdot A$  é limitado.

Sabemos que para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $x_\varepsilon \in A$  tal que

$$\sup A - \frac{\varepsilon}{c} < x_\varepsilon \leq \sup A,$$

com  $c > 0$ . Multiplicando a desigualdade por  $c$  temos

$$c \cdot \sup A - \varepsilon < c \cdot x_\varepsilon \leq c \cdot \sup A.$$

Com  $c \cdot x_\varepsilon \in c \cdot A$ , ou seja, para qualquer número  $c \cdot \sup A$ , temos  $\sup(c \cdot A) = c \cdot \sup A$ .

Por outro lado, para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $x_\varepsilon \in A$  tal que

$$\inf A < x_\varepsilon \leq \inf A + \frac{\varepsilon}{c},$$

com  $c > 0$ . Multiplicando a desigualdade por  $c$  temos

$$c \cdot \inf A < c \cdot x_\varepsilon \leq c \cdot \inf A + \varepsilon$$

Com  $c \cdot x_\varepsilon \in c \cdot A$ , ou seja, para qualquer número  $c \cdot \inf A$ , temos  $\inf(c \cdot A) = c \cdot \inf A$ .

**Observação 3.1.** Uma propriedade do conjunto dos números reais é que todo conjunto limitado possui supremo e ínfimo. Essa propriedade não é verdadeira para o conjunto dos números racionais  $\mathbb{Q}$ .

### 3.2 Sequências

**Definição 3.3.** Uma sequência de números reais é uma função  $x: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que, todo número natural  $n$  está associado um número real  $x_n$ . Esse real  $x_n$  é chamado de  $n$ -ésimo termo da sequência.

Para representar uma sequência podemos usar:  $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ ,  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , ou ainda,  $(x_n)$ .

Uma sequência  $(x_n)$  é limitada quando todos os termos pertencem a um intervalo  $[a, b]$ . Se a sequência  $(x_n)$  não é limitada, diz-se que ela é ilimitada.

Uma sequência  $(x_n)$  diz-se limitada superiormente quando existe um número real  $b$  tal que  $x_n \leq b$  para todo número natural  $n$ . Isto quer dizer que todos os termos  $x_n$  pertencem à semi reta  $(-\infty, b]$ . De modo análogo, diz-se que  $x_n$  é limitada inferiormente quando existe um número real  $a$  tal que  $a \leq x_n$  para todo natural  $n$ , ou seja,  $x_n \in [a, +\infty)$ .

Assim, uma sequência é limitada se, e somente se, é limitada superior e inferiormente.

Dada uma sequência  $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de números reais, uma subsequência de  $x$  é a restrição da função  $x$  a um subconjunto infinito  $\mathbb{N}_1 = n_1 < n_2 < \dots < n_i < \dots$  de  $\mathbb{N}$ . Indica-se uma subsequência  $x_1$  por  $x_1 = (x_n)_{n \in \mathbb{N}_1}$ , ou  $(x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_i}, \dots)$  ou  $(x_{n_i})_{n_i \in \mathbb{N}}$ .

Toda subsequência de uma sequência limitada é limitada.

Uma sequência  $(x_n)$  diz-se crescente quando  $x_1 < x_2 < x_3 < \dots$ , ou seja, quando  $x_n < x_{n+1}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Se  $x_n \leq x_{n+1}$  para todo  $n$ , chamamos  $(x_n)$  de sequência monótona não decrescente.

Quando  $x_1 > x_2 > x_3 > \dots$ , ou seja,  $x_n > x_{n+1}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , a sequência  $(x_n)$  é decrescente. A sequência monótona é não crescente quando  $x_n \geq x_{n+1}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Denominam-se sequências monótonas as sequências crescentes, não decrescentes, decrescentes e não crescentes.

**Observação 3.2.** Uma sequência não decrescente é sempre limitada inferiormente pelo seu primeiro termo. Da mesma forma, uma sequência não crescente é sempre limitada superiormente.

Para que uma sequência monótona seja limitada é necessário e suficiente que ela possua uma subsequência limitada. Assim, dada a subsequência limitada  $x_{n_1} \leq x_{n_2} \leq \dots \leq x_{n_k} \leq \dots \leq b$  da sequência não decrescente  $(x_n)$  temos que, para qualquer  $n \in \mathbb{N}$ , existe um  $n_k > n$  e, portanto,  $x_n \leq x_{n_k} \leq b$ . Daí,  $x_n \leq b$  para todo  $n$ , a sequência  $(x_n)$  é limitada superiormente. Por outro lado,  $n_1 \geq 1$  isso implica que  $x_1 \leq x_{n_1}$  logo,  $x_1 \leq x_n \leq b, \forall n \in \mathbb{N}$ . Tomando  $a = x_1$  temos que  $a \leq x_n \leq b$  logo,  $(x_n)$  é limitada inferiormente e, portanto, limitada.

**Observação 3.3.** Seja  $x_n$  uma sequência não crescente, isto é,  $x_n \geq x_{n+1}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Como  $x_n \geq x_{n+1}$  implica que  $-x_n \leq -x_{n+1}$ , fazendo  $(y_n) = (-x_n)$  temos que  $y_n \leq y_{n+1}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , logo  $(y_n)$  é não decrescente. Pela explanação anterior, conclui-se que  $(y_n)$  é limitada e, portanto  $(x_n)$  é limitada.

**Observação 3.4.** Considerando a sequência  $(x_n) = n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Obtemos a sequência  $(1, 2, 3, \dots, n, \dots)$  que é limitada inferiormente, ilimitada superiormente e monótona crescente.

### 3.2.1 Limite de sequências

**Definição 3.4.** Dizemos que uma sequência  $(x_n)$  converge para um real  $a$  quando, fixado arbitrariamente um erro  $\varepsilon > 0$  para o valor  $a$ , existir um índice  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $|x_n - a| < \varepsilon$ , para todo  $n > n_0$ .

Quando a sequência  $(x_n)$  convergir para  $a$ , dizemos que a sequência é convergente e que  $a$  é um limite de  $(x_n)$  e denotamos por  $\lim x_n = a$  ou  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ .

Uma sequência será chamada de divergente quando não convergir para real algum.

**Teorema 3.1.** (Unicidade do limite). Se  $\lim x_n = a$  e  $\lim x_n = b$  então  $a = b$ .

**Demonstração.** Suponha por absurdo que  $a \neq b$ . Assim, dor definição, se  $\lim x_n = a$ , temos que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}; \forall n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Também temos de  $\lim x_n = b$ , que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_1 \in \mathbb{N}; \forall n > n_1 \Rightarrow |x_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tomando um  $n_2 = \max \{n_0, n_1\} \in \mathbb{N}$ , temos que, para todo

$$n > n_2 \Rightarrow |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}, |x_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall \varepsilon > 0.$$

Como  $n_2 + 1 > n_2$ , temos que

$$|x_{(n_2+1)} - a| < \frac{\varepsilon}{2}, |x_{(n_2+1)} - b| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall \varepsilon > 0.$$

Assim, escrevendo

$$|a - b| = |a - x_{(n_2+1)} + x_{(n_2+1)} - b|$$

Por desigualdade triangular temos que,  $\forall \varepsilon > 0$

$$|a - b| = |a - x_{(n_2+1)} + x_{(n_2+1)} - b| \leq |a - x_{(n_2+1)}| + |x_{(n_2+1)} - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Tomando  $\varepsilon = |a - b|$ ,  $a \neq b$  e como  $|a - b| < \varepsilon$ , encontramos  $|a - b| < |a - b|$ . Absurdo.

Portanto o limite é único.

**Teorema 3.2.** Toda sequência convergente é limitada.

*Demonstração.* Seja  $\lim x_n = a$ , assim para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $n > n_0$  implica em  $|x_n - a| < \varepsilon$ . Escolhendo  $\varepsilon = 1$ , tomando  $n_0 \in \mathbb{N}$  correspondente, temos que para todo  $n > n_0$  implica em  $|x_n - a| < 1$ . Escrevendo  $|x_n| = |x_n - a + a|$  e aplicando desigualdade triangular, para todo  $n > n_0$  encontramos,

$$|x_n| = |x_n - a + a| \leq |x_n - a| + |a| < 1 + |a|.$$

Por outro lado, para todo  $n \leq n_0$ , temos

$$|x_n| \leq \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_{n_0}|\} = c.$$

Tomando um  $k = \max\{1 + |a|, c\} > 0$ , temos que  $|x_n| \leq k$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Logo,  $(x_n)$  é limitada.

**Teorema 3.3.** Toda sequência monótona limitada é convergente.

*Demonstração.* Dada a sequência  $(x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots \leq x_n \leq \dots)$  não decrescente limitada. Sendo  $a = \sup\{x_n; n = 1, 2, \dots\}$ . Afirmamos que  $a = \lim x_n$ . Com efeito, qualquer  $\varepsilon > 0$ , como  $a - \varepsilon < a$ , o número  $a - \varepsilon$  não é cota superior do conjunto  $x_n$ . Logo, existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $a - \varepsilon < x_{n_0}$ . Como a sequência não decrescente,  $n > n_0$  implica em  $x_{n_0} \leq x_n$  e, daí,  $a - \varepsilon < x_n$ . Como  $x_n \leq a$  para todo  $n$ , vemos que  $n > n_0$  que implica em  $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$ . Assim, temos de fato  $\lim x_n = a$ .

**Observação 3.5.** Se  $(x_n)$  fosse não crescente, teríamos  $\lim x_n = \inf\{x_n; n = 1, 2, \dots\}$ .

*Demonstração.* Se  $(x_n)$  é não crescente,  $(y_n) = (-x_n)$  é não decrescente. Assim, pelo teorema 3.3 temos que

$$\lim y_n = \sup\{y_n; n \in \mathbb{N}\}$$

logo,

$$\lim y_n = \sup\{-x_n; n \in \mathbb{N}\}$$

pelo exemplo 3.7 sabe-se que  $\sup(-A) = -\inf A$  então, considerando  $A = \{x_n; n \in \mathbb{N}\}$  temos que  $-A = \{-x_n; n \in \mathbb{N}\}$  e portanto,

$$\lim y_n = -\inf \{x_n; n \in \mathbb{N}\}$$

assim,

$$-\lim x_n = -\inf \{x_n; n \in \mathbb{N}\}$$

e, portanto,

$$\lim x_n = \inf \{x_n; n \in \mathbb{N}\}.$$

**Exemplo 3.10.** A sequência  $\left(\frac{1}{n}\right)$ ,  $n \in \mathbb{N}$  é convergente e  $\lim \frac{1}{n} = 0$ .

**Solução 3.10.** Sabe-se que  $n + 1 > n$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$  isso implica que  $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$  com  $n \in \mathbb{N}$ , assim a sequência  $\left(\frac{1}{n}\right)$ ,  $n \in \mathbb{N}$  é decrescente. Logo, a sequência é monótona limitada visto que  $0 < \frac{1}{n} < 1$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$  e, pelo teorema 3.3, a sequência é convergente. Pela observação 3.2 temos,  $\lim x_n = \inf \{x_n; n \in \mathbb{N}\}$ , logo,

$$\lim \frac{1}{n} = \inf \left\{ \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

E, pelo exemplo 3.6 sabe-se que

$$\inf \left\{ \frac{1}{n}; n \in \mathbb{N} \right\} = 0.$$

Portanto,  $\lim \frac{1}{n} = 0$ .

**Corolário 3.1.** Sejam  $(x_n)$  e  $(y_n)$  sequências convergentes. Se  $x_n < y_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  então  $\lim x_n \leq \lim y_n$ .

**Teorema 3.4.** Se  $\lim x_n = 0$  e  $(y_n)$  é uma sequência limitada, então  $\lim x_n \cdot y_n = 0$  (mesmo que não exista  $\lim y_n$ ).

**Demonstração.** Existe  $c > 0$  tal que  $|y_n| < c$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , como  $\lim x_n = 0$ , podemos encontrar  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$n > n_0 \Rightarrow |x_n| < \frac{\varepsilon}{c}.$$

Logo,

$$n > n_0 \Rightarrow |x_n \cdot y_n| = |x_n| \cdot |y_n| < \frac{\varepsilon}{c} \cdot c = \varepsilon.$$

Isto mostra que  $x_n \cdot y_n \rightarrow 0$ .

**Exemplo 3.11.** Calcule  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n}$ .

**Solução 3.11.** Note que  $|(-1)^n| \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$  e  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ , então, pelo teorema 3.4, temos  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$ . Por outro lado,  $(-1)^n$  não é convergente, pois se  $n$  é par, temos que  $(-1)^n = 1$  e  $(-1)^{n+1} = -1$  já que  $n + 1$  é ímpar. Logo,  $\lim (-1)^n \neq \lim (-1)^{n+1}$ .

**Teorema 3.5.** Se  $\lim x_n = a$  e  $\lim y_n = b$ , então:

1.  $\lim(x_n + y_n) = a + b; \lim(x_n - y_n) = a - b$
2.  $\lim(x_n \cdot y_n) = a \cdot b$
3.  $\lim\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{a}{b}$  se  $b \neq 0$ .

**Demonstração.** 1. De  $\lim x_n = a$ , temos que,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}; \forall n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

E de  $\lim y_n = b$ , temos que,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_1 \in \mathbb{N}; \forall n > n_1 \Rightarrow |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tome  $n_2 = \max\{n_0, n_1\} \in \mathbb{N}$ , temos que  $n > n_2$ . Observe que

$$|(x_n + y_n) - (a + b)| = |(x_n - a) + (y_n - b)|.$$

Logo, para todo  $n > n_2$ , por desigualdade triangular tem-se:

$$|(x_n + y_n) - (a + b)| = |(x_n - a) + (y_n - b)| \leq |x_n - a| + |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Portanto,  $\lim(x_n + y_n) = a + b$ .

O caso da diferença é feito de forma análoga.

3. Pelo teorema 3.2, podemos tomar  $k > 0$  tal que  $|y_n| < k, \forall n \in \mathbb{N}$ . Assim, de  $\lim x_n = a$ , temos que,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}; \forall n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2k}.$$

E de  $\lim y_n = b$ , temos que,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_1 \in \mathbb{N}; \forall n > n_1 \Rightarrow |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2(|a| + 1)}.$$

Então, para  $n_2 > \max\{n_0, n_1\} \in \mathbb{N}$ , temos que  $n > n_2$ . Observe que

$$|x_n \cdot y_n - a \cdot b| = |x_n \cdot y_n - a \cdot y_n + a \cdot y_n - a \cdot b| = |(x_n - a)y_n + a(y_n - b)|$$

Logo, para todo  $n > n_2$ , por desigualdade triangular tem-se:

$$|(x_n - a)y_n + a(y_n - b)| \leq |x_n - a||y_n| + |a||y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2k} \cdot k + |a| \cdot \frac{\varepsilon}{2(|a| + 1)} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Portanto,  $\lim(x_n \cdot y_n) = a \cdot b$

3. Inicialmente, vamos tomar  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $|y_n - b| < \frac{|b|}{2}$  para  $n > n_0$ . Observe que,

$$\left| \frac{1}{y_n} - \frac{1}{b} \right| = \frac{1}{|b|} \cdot \frac{|y_n - b|}{|y_n|}.$$

Usando novamente a desigualdade triangular, temos que

$$\frac{1}{|b|} \cdot \frac{|y_n - b|}{|y_n|} \leq \frac{1}{|b|} \cdot \frac{|y_n - b|}{|b| - |y_n - b|} < \frac{1}{|b|} \cdot \frac{|y_n - b|}{|b| - \frac{|b|}{2}} = \frac{2}{|b|^2} \cdot |y_n - b|.$$

Dessa forma, dado  $\varepsilon > 0$ , tomemos  $n_1 \in \mathbb{N}$  tal que

$$n > n_1 \Rightarrow |y_n - b| < \frac{\varepsilon |b|^2}{2}.$$

Portanto, para  $n > \max \{n_1, n_2\}$  temos

$$\left| \frac{1}{y_n} - \frac{1}{b} \right| < \frac{2}{|b|^2} \cdot |y_n - b| < \frac{2}{|b|^2} \cdot \frac{\varepsilon |b|^2}{2} = \varepsilon.$$

Portanto,  $\lim \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \frac{a}{b}$ , se  $b \neq 0$ .

### 3.3 Limite

**Definição 3.5.** Dados um número real  $x_0$  e uma função definida para  $x \in I - x_0$ , intervalo aberto. Definimos que o limite de  $f(x)$ , quando  $x$  tende a  $x_0$ , é  $L$  e representamos por

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L,$$

Se para todo  $\varepsilon > 0$ , existir  $\delta > 0$  tal que se  $0 < |x - x_0| < \delta$  então  $|f(x) - L| < \varepsilon$ .

#### 3.3.1 Unicidade do Limite

**Teorema 3.6.** Se  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L_1$  e  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L_2$  então  $L_1 = L_2$ .

**Demonstração.** Usaremos redução ao absurdo. Suponhamos que  $L_1 \neq L_2$ , assim temos que:

De  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L_1$ , fica que:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1 > 0; 0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L_1| < \varepsilon$$

De  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L_2$ , fica que:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_2 > 0; 0 < |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - L_2| < \varepsilon$$

Podemos escrever  $L_1 - L_2$  como  $L_1 - f(x) + f(x) - L_2$  e por desigualdade triangular

$$|a + b| \leq |a| + |b|, \forall a, b \in \mathbb{R},$$

encontramos:

$$|L_1 - f(x) + f(x) - L_2| \leq |L_1 - f(x)| + |f(x) - L_2| = |f(x) - L_1| + |f(x) - L_2|$$

Considerando um número  $\delta$  tal que  $\delta \leq \delta_1$  e  $\delta \leq \delta_2$  e de acordo com as informações anteriores, obtemos que:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0; 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L_1| + |f(x) - L_2| < 2\varepsilon$$

e usando o fato que

$$|L_1 - L_2| < |f(x) - L_1| + |f(x) - L_2|,$$

temos que:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0; 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |L_1 - L_2| < 2\varepsilon.$$

Se pegarmos

$$\varepsilon = \frac{|L_1 - L_2|}{2},$$

existe  $\delta$  com  $\delta \leq \delta_1$  e  $\delta \leq \delta_2$  tal que

$$0 < |x - x_0| < \varepsilon \Rightarrow |L_1 - L_2| < |L_1 - L_2|$$

que é uma contradição. Logo  $L_1 = L_2$ .

### 3.3.2 Propriedades do limite

**Teorema 3.7.** Se  $k$  é um número real e seja  $f$  uma função dada por  $f(x) = k$ , para todo  $x$  real, então

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = k.$$

**Demonstração.** Temos que provar que para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que,  $0 < |x - x_0| < \delta$  implica em  $|f(x) - k| < \varepsilon$ . De fato:  $|f(x) - k| = |k - k| = 0 < \varepsilon$ .

**Teorema 3.8.** Se  $k \in \mathbb{R}$  e  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$  então  $\lim_{x \rightarrow x_0} [k \cdot f(x)] = k \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = k \cdot L$

**Demonstração.** Inicialmente vamos verificar para  $k = 0$ .

Se  $k = 0$ , então  $k \cdot f(x) = 0 \cdot f(x) = 0$  e  $k \cdot L = 0 \cdot L = 0$ .

Pelo teorema anterior, fica que:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [k \cdot f(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} 0 = 0 = k \cdot L$$

Agora, vamos verificar para  $k \neq 0$ .

Temos que provar que para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que, se

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |k \cdot f(x) - k \cdot L| < \varepsilon$$

Temos que  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$  assim,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0; 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Assim:

$$\exists \delta > 0; 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{|k|}$$

isto é,

$$\exists \delta > 0; 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |k| |f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{|k|} \cdot |k| = \varepsilon$$

logo,

$$\exists \delta > 0; 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |k \cdot f(x) - k \cdot L| < \varepsilon.$$

**Teorema 3.9.** Se  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L_1$  e  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L_2$  então  $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = L_1 + L_2$ .

*Demonstração.* Temos que provar que:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0; 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |(f+g)(x) - (L_1 + L_2)| < \varepsilon.$$

De  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L_1$ , fica que:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1 > 0; 0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L_1| < \frac{\varepsilon}{2}$$

De  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L_2$ , fica que:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_2 > 0; 0 < |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Agora, iremos considerar  $\delta \leq \delta_1$  e  $\delta \leq \delta_2$ , daí temos:

$$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}; 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L_1| + |g(x) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Por desigualdade triangular, encontramos:

$$|f(x) - L_1| + |g(x) - L_2| \geq |f(x) + g(x) - (L_1 + L_2)| = |(f+g)(x) - (L_1 + L_2)|$$

Logo:

$$\exists \delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}; 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |(f+g)(x) - (L_1 + L_2)| < \varepsilon.$$

**Teorema 3.10.** Se  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L_1$  e  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L_2$  então  $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)] = L_1 - L_2$ .

*Demonstração.* Usaremos os resultados mostrados nos teoremas anteriores:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + (-1) \cdot g(x)],$$

logo,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} [(-1) \cdot g(x)],$$

portanto,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L_1 - L_2.$$

**Teorema 3.11.** Se  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L_1$  e  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L_2$  então  $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = L_1 \cdot L_2$ .

*Demonstração.* Observe que:

$$f(x) \cdot g(x) = f(x) \cdot g(x) - L_1 \cdot g(x) + L_1 \cdot g(x) - L_1 L_2 + L_1 L_2,$$

ou seja,

$$f(x) \cdot g(x) = [f(x) - L_1] \cdot g(x) + L_1 \cdot [g(x) - L_2] + L_1 L_2$$

Agora, precisamos considerar as afirmações a seguir:

$$1. \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L_1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - L_1) = 0,$$

$$2. \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L_2 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} (g(x) - L_2) = 0,$$

$$3. \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - L_1) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L_2 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow x_0} [(f(x) - L_1) \cdot g(x)] = 0.$$

Assim temos:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} [[f(x) - L_1] \cdot g(x) + L_1 \cdot [g(x) - L_2] + L_1 \cdot L_2]$$

ou seja,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} [(f(x) - L_1) \cdot g(x)] + \lim_{x \rightarrow x_0} [L_1 \cdot (g(x) - L_2)] + \lim_{x \rightarrow x_0} L_1 \cdot L_2$$

Logo,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = L_1 \cdot L_2$$

**Teorema 3.12.** Se  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L_1$  e  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L_2 \neq 0$  então  $\lim_{x \rightarrow x_0} \left[ \frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{L_1}{L_2}$ .

**Demonstração.** Precisamos provar que, se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L_2 \neq 0$$

então

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{L_2}.$$

De

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L_2 \neq 0$$

temos que:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0; 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |g(x) - L_2| < \varepsilon.$$

Assim como:

$$\exists \delta_1 > 0, \exists k > 0; 0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |g(x) - L_2| < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{|g(x)|} < \frac{1}{k},$$

Considerando  $\varepsilon \cdot |L_1| \cdot k$  fica que:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_2 > 0; 0 < |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - L_2| < \varepsilon \cdot |L_1| \cdot k$$

Seja  $\delta \leq \delta_1$  e  $\delta \leq \delta_2$  fica que:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0; 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow$$

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{L_2} \right| = \left| \frac{g(x) - L_2}{g(x) \cdot L_2} \right| = |g(x) - L_2| \cdot \frac{1}{|g(x)|} \cdot \frac{1}{|L_2|} < \frac{\varepsilon \cdot |L_1| \cdot k}{k \cdot |L_1|} = \varepsilon.$$

Como

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L_1$$

e

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{L_2}$$

pelo o teorema 3.10, temos que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left[ f(x) \cdot \frac{1}{g(x)} \right] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2}.$$

**Teorema 3.13.(do confronto).** Sejam  $I$  um intervalo,  $x_0 \in I$  e  $f, g, h: I \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$  funções reais que  $g(x)$  pertence ao intervalo de extremidades  $f(x)$  e  $h(x)$ , para todo  $x \in I \setminus \{x_0\}$ . Se  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = L$ , então  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$  também existe e é igual a  $L$ .

**Demonstração.** Dado  $\varepsilon > 0$ , queremos encontrar  $\delta > 0$  tal que as condições  $x \in I$  e  $0 < |x - x_0| < \delta$  impliquem  $|g(x) - L| < \varepsilon$ . Para tanto, se  $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ , então

$$f(x) - L \leq g(x) - L \leq h(x) - L,$$

a partir daí, é fácil concluir que

$$|g(x) - L| \leq \max \{ |f(x) - L|, |h(x) - L| \}.$$

Se  $h(x) \leq g(x) \leq f(x)$ , concluímos, de modo análogo, a validade da desigualdade anterior.

Pela definição de limite, sabemos que existem números reais  $\delta_1, \delta_2 > 0$ , tais que

$$x \in I \text{ e } 0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

e

$$x \in I \text{ e } 0 < |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |h(x) - L| < \varepsilon.$$

Portanto, se  $\delta = \min \{ \delta_1, \delta_2 \}$ , temos  $\delta > 0$  e

$$x \in I \text{ e } 0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow \begin{cases} |f(x) - L| < \varepsilon \\ |h(x) - L| < \varepsilon. \end{cases}$$

Assim, para  $x \in I$  tal que  $0 < |x - x_0| < \delta$ , temos

$$|g(x) - L| \leq \max \{ |f(x) - L|, |h(x) - L| \} < \varepsilon.$$

**Teorema 3.14.** Sejam  $X \subset \mathbb{R}$ ,  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $X = I - a$ , sendo  $I$  um intervalo. Para que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ , é necessário e suficiente que se tenha  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = L$  para toda sequência de pontos  $x_n \in X - \{a\}$ , tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ .

**Demonstração.** Suponhamos que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  e que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , com  $x_n \in X - \{a\}$ .

Dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$0 < |x - a| < \delta, x \in X \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Existe também  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$n > n_0 \Rightarrow 0 < |x_n - a| < \delta.$$

Segue-se que

$$n > n_0 \Rightarrow 0 < |f(x_n) - L| < \varepsilon,$$

onde  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = L$ . Para demonstrar a recíproca, suponhamos que não se tenha  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ .

Então existe  $\varepsilon > 0$  tal que para todo  $n \in \mathbb{N}$  podemos obter  $x_n \in X$  com

$$0 < |x_n - a| < \frac{1}{n}; |f(x_n) - L| \geq \varepsilon.$$

Então  $x_n \rightarrow a$ , mas não se tem  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = L$ .

**Exemplo 3.12.** Mostre que o  $\lim_{x \rightarrow 0} \text{sen} \left( \frac{1}{x} \right)$  não existe.

**Solução 3.12.** Devemos mostrar que existem duas sequências  $x_n$  e  $y_n$  pertencentes ao domínio da função, com  $x_n \neq y_n$  tais que  $\lim x_n = \lim y_n = 0$ , mas que

$$\lim \text{sen} \left( \frac{1}{x_n} \right) \neq \lim \text{sen} \left( \frac{1}{y_n} \right).$$

Seja

$$x_n = \frac{1}{2\pi n},$$

temos que, quando  $n \rightarrow \infty$  tem-se  $x_n \rightarrow 0$ . Assim,

$$\text{sen} \left( \frac{1}{x_n} \right) = \text{sen} (2\pi n) = 0.$$

Sendo

$$y_n = \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}},$$

temos que, quando  $n \rightarrow \infty$  tem-se  $y_n \rightarrow 0$ . Então,

$$\text{sen} \left( \frac{1}{y_n} \right) = \text{sen} \left( 2\pi + \frac{\pi}{2} \right) = 1.$$

Assim,

$$\lim \operatorname{sen} \left( \frac{1}{x_n} \right) \neq \lim \operatorname{sen} \left( \frac{1}{y_n} \right).$$

Portanto,  $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sen} \left( \frac{1}{x} \right)$  não existe.

### 3.3.3 Continuidade de uma função em um ponto

**Definição 3.6.** Seja  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  uma função e um ponto  $x_0 \in A$ . Dizemos que  $f$  é contínua em  $x_0$ , se  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ . Assim, para que  $f$  seja contínua em  $x_0$  devemos observar as condições:

1. existe  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$
2.  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

É importante destacar que se  $f$  não for contínua em  $x_0$ , dizemos que  $f$  é descontínua em  $x_0$ .

**Teorema 3.15.** Seja  $f: X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função e  $a \in X$ . A função  $f$  é contínua no ponto  $a$  se, e somente se, para todo  $x \in X$  com  $x_n \rightarrow a$ , se tenha  $f(x_n) \rightarrow f(a)$ .

*Demonstração.* Aplique o teorema 3.12.

Dado um intervalo fechado  $[a, b]$ , seja  $f$  uma função  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Defina o conjunto  $S := \{x \in [a, b]; f(x) < d\}$ , onde  $d$  é um número real entre  $f(a)$  e  $f(b)$ . O conjunto  $S$  é diferente do vazio, pois se  $f(a) < d < f(b)$ ,  $a \in S$  e se  $f(b) < d < f(a)$ ,  $b \in S$ . Por outro lado  $S$  é limitado, pois  $S \subset [a, b]$ , logo admite supremo e ínfimo. Tomemos  $c \in [a, b]$  tal que  $c = \sup S$ . Posteriormente provaremos que  $c \in (a, b)$ .

**Observação 3.6.** Existe uma sequência  $(c_n)$  em  $S$  tal que  $c_n \rightarrow c$ . Ora, como  $c = \sup S$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$ , existe um elemento  $c_n \in S$ , tal que  $c - \frac{1}{n} < c_n \leq c$ . Logo construímos assim uma sequência  $c_n$  em  $S$  e pelo Teorema do Confronto,  $c_n \rightarrow c$ .

**Teorema 3.16. (do valor intermediário).** Seja  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , contínua. Dado um número real  $d$  entre  $f(a)$  e  $f(b)$ , existe  $c \in (a, b)$ , tal que  $f(c) = d$ .

*Demonstração.* Suponha sem perda de generalidade que  $f(a) < d < f(b)$ . Consideremos o conjunto  $S$  definido anteriormente, temos que  $a \in S$ , pois  $f(a) < d$ . Portanto, o conjunto  $S$  é não vazio. Além disso,  $S$  é limitado, pois  $S \subset [a, b]$ . Seja  $c = \sup S$ . Como  $c \in$

$[a, b]$ , então  $f$  é contínua em  $c$ . Assim, pelo teorema 3.14 temos que  $f(c_n) \rightarrow f(c)$ . Além disso,  $f(c_n) < d$ , pois  $c_n \in S$ , e assim  $f(c) \leq d$ . Note que  $c \neq b$ , pois  $d < f(b)$ . Defina para cada  $n$ , a sequência  $b_n = c + \frac{b-c}{n}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Claramente,  $b_n \rightarrow c$ . Por continuidade de  $f$  em  $c$ ,  $f(b_n) \rightarrow f(c)$ . Como  $b_n > c$  e  $c := \sup S$ , temos que  $b_n$  não pertence ao conjunto  $S$ , isto é,  $f(b_n) \geq d$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Assim, temos que  $f(c) \geq d$ . Em particular,  $c \neq a$ . Portanto  $c \in (a, b)$  e  $f(c) = d$ .

### 3.3.4 Limites no infinito

Nosso objetivo aqui é mostrar o significado das expressões  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$  e  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ .

**Definição 3.7.** Seja  $f$  uma função definida em um intervalo aberto  $(a, +\infty)$ . Dizemos que, quando  $x$  cresce ilimitadamente,  $f(x)$  se aproxima de  $L$  e escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$$

se, para qualquer número  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que se  $x > \delta$  então  $|f(x) - L| < \varepsilon$ .

**Definição 3.8.** Seja  $f$  uma função definida em um intervalo aberto  $(-\infty, a)$ . Dizemos que, quando  $x$  cresce ilimitadamente,  $f(x)$  se aproxima de  $L$  e escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$$

se, para qualquer número  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta < 0$  tal que se  $x < \delta$  então  $|f(x) - L| < \varepsilon$ .

**Exemplo 3.13.** Mostre que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ .

**Solução 3.13.** É fácil perceber que quanto maior o valor de  $x$ , mais próximo de zero estará  $\frac{1}{x}$ .

De fato, dado  $\varepsilon > 0$  e tomando-se  $\delta = \frac{1}{\varepsilon}$ , temos que,

$$x > \delta \Rightarrow x > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow 0 < \frac{1}{x} < \varepsilon.$$

Assim,

$$0 - \varepsilon < \frac{1}{x} < 0 + \varepsilon.$$

Portanto,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

**Exemplo 3.14.** Calcule  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n}$ , onde  $n > 0$  e  $n \in \mathbb{N}$ .

**Solução 3.14.** Observe que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^n$$

fazendo uma mudança de variável do tipo  $u = \frac{1}{x}$  sabemos que quando  $x \rightarrow +\infty$  a variável  $u \rightarrow 0$ , assim temos,  $\lim_{u \rightarrow 0} u^n = 0$ . Portanto,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0.$$

**Exemplo 3.15.** Calcule  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 + x^2 - 3x + 2}{x^3 + 3x^2 + x - 3}$ .

**Solução 3.15.** Para facilitar o cálculo do limite, colocamos em evidência a maior potência de  $x$  no numerador e denominador. Assim, temos expressões do tipo  $\frac{1}{x^n}$  que, quando  $x \rightarrow +\infty$ , tendem a zero. Logo:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 + x^2 - 3x + 2}{x^3 + 3x^2 + x - 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 \left(2 + \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right)}{x^3 \left(1 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{3}{x^3}\right)}$$

Portanto,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 + x^2 - 3x + 2}{x^3 + 3x^2 + x - 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3}}{1 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{3}{x^3}} = 2.$$

### 3.3.5 Limites infinitos

**Definição 3.7.** Sejam  $f$  uma função,  $x_0$  um número real e suponhamos que exista  $c$  tal que  $(x_0, c)$  está contido no domínio da função. Definimos

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ com } x_0 + \delta < c, \text{ tal que} \\ x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow f(x) > \varepsilon. \end{cases}$$

De modo análogo, definimos

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty \end{cases}$$

### 3.4 Derivada de uma Função

**Definição 3.8.** Sejam  $f$  uma função e  $x_0$  um ponto de seu domínio. Denomina-se derivada de  $f$  em  $x_0$  e representa-se por  $f'(x_0)$ , o limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

quando existe e é finito. Assim,

$$f'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Dizemos que  $f$  é derivável em  $x_0$ , quando  $f$  admite derivada em  $x_0$ .

Uma função  $f$  derivável e definida no intervalo  $[x_1, x_2]$ . A sua derivada pode ser representada por  $\frac{dy}{dx}$  e ser interpretada como a taxa de variação de  $y$  em relação à  $x$ .

A variação em  $x$  será dada por  $\Delta x = x_2 - x_1$ . A variação correspondente em  $y$  é definida por  $\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$ . O quociente destas variações será dado por:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Esta é a taxa média de variação de  $f$  em relação à  $x$ , no intervalo  $[x_1, x_2]$ .

O limite quando  $\Delta x \rightarrow 0$  é a derivada de  $f$  em  $x_1$ . E pode ser entendida como a taxa de variação instantânea de  $y$  em relação à  $x$ . Assim, temos que:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Portanto, a derivada  $f'(x_1)$  mede a taxa de variação da função  $f(x)$  em  $x = x_1$ .

**Teorema 3.17.** Se  $f$  for derivável em  $x_0$ , então  $f$  será contínua em  $x_0$ .

**Demonstração.** Como  $f$  é derivável em  $x_0$ , temos que

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Observe que,

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0)$$

com  $x \neq x_0$ , logo,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) = f'(x_0) \cdot 0 = 0$$

ou seja,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = 0$$

assim,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Portanto,  $f$  é contínua em  $x_0$ .

**Observação 3.8.** Das propriedades de limites temos que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x + x_0) - f(x_0)}{\Delta x},$$

pois fazendo  $\Delta x = x - x_0$ , temos que  $x = \Delta x + x_0$  e quando  $x \rightarrow x_0$  encontramos  $\Delta x \rightarrow 0$ .

Logo,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x + x_0) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

### 3.4.1 Fórmulas de Derivação

**Teorema 3.18.** As fórmulas de derivação a seguir são válidas para todo natural  $n \neq 0$ .

1. Se  $f(x) = k \Rightarrow f'(x) = 0$  com  $k$  constante.
2. Se  $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$
3. Se  $f(x) = x^{-n} \Rightarrow f'(x) = -n \cdot x^{-n-1}$ ,  $x \neq 0$ .
4. Se  $f(x) = x^{\frac{1}{n}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1}$ .
5. Se  $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$ .
6. Se  $f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$ ,  $x > 0$ .

**Demonstração.** 1. Como  $f(x) = k$ ,  $\forall x$ , assim, para todo  $x$  e todo  $\Delta x$  temos  $f(\Delta x + x) = k$ .

Logo,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x + x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{k - k}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 0 = 0$$

2. De

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x + x) - f(x)}{\Delta x}$$

temos

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\Delta x + x)^n - x^n}{\Delta x}.$$

Tomando  $u = \Delta x + x$  (quando  $\Delta x \rightarrow 0$  implica que  $u \rightarrow x$ ), assim temos

$$f'(x) = \lim_{u \rightarrow x} \frac{u^n - x^n}{u - x}.$$

Mas,

$$(u^n - x^n) = (u - x)(u^{n-1} + u^{n-2}x + u^{n-3}x^2 + \dots + x^{n-1})$$

substituindo encontramos

$$f'(x) = \lim_{u \rightarrow x} (u^{n-1} + u^{n-2}x + u^{n-3}x^2 + \dots + x^{n-1})$$

logo

$$\begin{aligned} f'(x) &= x^{n-1} + x^{n-2}x + x^{n-3}x^2 + \dots + x^{n-1} \\ f'(x) &= x^{n-1} + x^{n-1} + x^{n-1} + \dots + x^{n-1} = n \cdot x^{n-1} \end{aligned}$$

3. De

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x + x) - f(x)}{\Delta x}$$

temos

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\Delta x + x)^{-n} - x^{-n}}{\Delta x}$$

sabemos que

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\Delta x + x)^{-n} - x^{-n}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{(\Delta x + x)^n} - \frac{1}{x^n}}{\Delta x}$$

assim,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} - \frac{(\Delta x + x)^n - x^n}{\Delta x} \cdot \frac{1}{(\Delta x + x)^n x^n}$$

Pelo item (2),

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\Delta x + x)^n - x^n}{\Delta x} = nx^{n-1}$$

e como

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{(\Delta x + x)^n x^n} = \frac{1}{x^{2n}}$$

resulta que,

$$f'(x) = -n \cdot x^{n-1} \cdot \frac{1}{x^{2n}} = -n \cdot x^{-n-1}.$$

4. Sabemos que  $f(x) = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$ . Logo:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{\Delta x + x} - \sqrt[n]{x}}{\Delta x} = \lim_{u \rightarrow x} \frac{\sqrt[n]{u} - \sqrt[n]{x}}{u - x},$$

pois  $u = \Delta x + x$  (quando  $\Delta x \rightarrow 0$  implica que  $u \rightarrow x$ ). Chamando  $a = \sqrt[n]{u}$  e  $b = \sqrt[n]{x}$  temos  $u = a^n$  e  $x = b^n$ , assim,

$$f'(x) = \lim_{a \rightarrow b} \frac{a - b}{a^n - b^n} = \lim_{a \rightarrow b} \frac{1}{\frac{a^n - b^n}{a - b}} = \frac{1}{nb^{n-1}}$$

Portanto, para  $x \neq 0$  e  $x$  no domínio de  $f$ , temos

$$f'(x) = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}} = \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1}$$

5. De

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x + x) - f(x)}{\Delta x}$$

temos

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{\Delta x + x} - e^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} e^x \cdot \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

Precisamos calcular

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}.$$

Fazendo  $u = e^{\Delta x} - 1$  temos que  $\Delta x = \ln(u + 1)$  assim,

$$\frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = \frac{u}{\ln(1 + u)} = \frac{1}{\frac{1}{u} \cdot \ln(1 + u)} = \frac{1}{\ln(1 + u)^{\frac{1}{u}}}$$

Observe que,  $\Delta x \rightarrow 0 \Rightarrow u \rightarrow 0$ , logo

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{\ln(1 + u)^{\frac{1}{u}}}$$

Por outro lado, sabemos que

$$\lim_{v \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{v}\right)^v = e,$$

Fazendo  $u = \frac{1}{v}$  ( $v \rightarrow \infty \Rightarrow u \rightarrow 0$ ).

Então

$$\lim_{u \rightarrow 0} (1 + u)^{\frac{1}{u}} = e.$$

Daí

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{\ln(1+u)^{\frac{1}{u}}} = \frac{1}{\ln e} = 1$$

Logo,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{\Delta x + x} - e^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} e^x \cdot \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

Portanto,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} e^x \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^x \cdot 1 = e^x$$

5. De

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x + x) - f(x)}{\Delta x}$$

temos

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln(\Delta x + x) - \ln(x)}{\Delta x}$$

Usando as propriedades de logaritmos

$$\frac{\ln(\Delta x + x) - \ln(x)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \cdot \ln\left(\frac{\Delta x + x}{x}\right) = \frac{1}{\Delta x} \cdot \ln\left(\frac{\Delta x}{x} + 1\right)$$

Logo,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln(\Delta x + x) - \ln(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \cdot \ln\left(\frac{\Delta x}{x} + 1\right)$$

Fazendo  $u = \frac{\Delta x}{x}$ , resulta em

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \cdot \ln\left(\frac{\Delta x}{x} + 1\right)$$

$$f'(x) = \lim_{u \rightarrow 0} \ln(1+u)^{\frac{1}{ux}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} \ln \lim_{u \rightarrow 0} (1+u)^{\frac{1}{u}}$$

Como

$$\lim_{u \rightarrow 0} (1+u)^{\frac{1}{u}} = e,$$

Encontramos

$$f'(x) = \frac{1}{x} \ln \lim_{u \rightarrow 0} (1+u)^{\frac{1}{u}} = \frac{1}{x} \ln e = \frac{1}{x}$$

## 3.4.2 Regras de Derivação

**Teorema 3.19.** Sejam  $f$  e  $g$  deriváveis em  $x_0$  e dado uma constante real  $k$ . Então são deriváveis em  $x_0$  as funções  $f + g$ ,  $kf$ ,  $f \cdot g$  e  $\frac{f}{g}$  têm - se

1.  $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$
2.  $(kf)'(x_0) = kf'(x_0)$
3.  $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$
4.  $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$ , se  $g(x_0) \neq 0$ .

**Demonstração.** 1.

$$\begin{aligned} (f + g)'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{[f(x) + g(x)] - [f(x_0) + g(x_0)]}{x - x_0} \\ (f + g)'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{[f(x) - f(x_0)] + [g(x) - g(x_0)]}{x - x_0} \\ (f + g)'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{[f(x) - f(x_0)]}{x - x_0} + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{[g(x) - g(x_0)]}{x - x_0} \\ (f + g)'(x_0) &= f'(x_0) + g'(x_0) \end{aligned}$$

Conclusão: A derivada de uma soma é igual à soma das derivadas das parcelas.

2.

$$(kf)'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{kf(x) - kf(x_0)}{x - x_0} = k \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = kf'(x_0)$$

Conclusão: A derivada do produto de uma constante por uma função é igual ao produto da constante pela derivada da função.

3.

$$\begin{aligned} (f \cdot g)'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{[f(x) \cdot g(x)] - [f(x_0) \cdot g(x_0)]}{x - x_0} \\ (f \cdot g)'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) \cdot g(x) - f(x_0) \cdot g(x) + f(x_0) \cdot g(x) - f(x_0) \cdot g(x_0)}{x - x_0} \\ (f \cdot g)'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left[ \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot g(x) \right] + \lim_{x \rightarrow x_0} \left[ f(x_0) \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right] \\ (f \cdot g)'(x_0) &= f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0) \end{aligned}$$

Conclusão: A derivada do produto de duas funções é igual à derivada da primeira multiplicada pela segunda mais a primeira multiplicada pela derivada da segunda.

4.

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x - x_0}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{x - x_0} \cdot \frac{1}{g(x)g(x_0)}$$

Somando e subtraindo  $f(x_0)g(x_0)$  ao numerador resulta

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x_0) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \cdot \frac{1}{g(x)g(x_0)}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \left[ \left( \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right) \cdot \frac{1}{g(x)g(x_0)} \right]$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot g(x_0) - \lim_{x \rightarrow x_0} f(x_0) \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{g(x)g(x_0)}$$

Portanto,

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}.$$

Conclusão: A derivada do quociente de duas funções é igual à derivada do numerador multiplicada pelo denominador menos o numerador multiplicado pela derivada do denominador, sobre o quadrado do denominador.

**Exemplo 3.16.** Dada a função  $f(x) = 3x^2 \ln x - 4e^x$ , calcule  $f'(x)$ .

**Solução 3.16.** Temos que

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$$

e como

$$(3x^2)' = 6x, (\ln x)' = \frac{1}{x}, (4e^x)' = 4e^x$$

Logo

$$f'(x) = 6x \ln x + 3x^2 \cdot \frac{1}{x} - 4e^x$$

e, portanto,

$$f'(x) = 6x \ln x + 3x - 4e^x$$

**Exemplo 3.17.** Considerando a função  $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$ , determine  $f'(x)$ .

**Solução 3.17.** Temos que

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$$

e como

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, (x^2)' = 2x$$

Logo

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x^2 - 2x \cdot \ln x}{x^4} = \frac{x - 2x \cdot \ln x}{x^4}$$

Portanto

$$f'(x) = \frac{1 - 2 \ln x}{x^3}.$$

### 3.4.3 Regra da cadeia

**Teorema 3.19.** Sejam  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(X) \subset Y$ ,  $a \in X \cap X'$ ,  $b = f(a) \in Y \cap Y'$ . Se existem  $f'(a)$  e  $g'(b)$  então a composta de  $g$  em  $f$  é derivável no ponto  $a$ , valendo

$$(g \circ f)'(a) = g'(b) \cdot f'(a)$$

**Demonstração.** Temos que

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \Leftrightarrow$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a) \right] = 0$$

Fazendo

$$\rho(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a),$$

encontramos

$$f(a+h) = f(a) + [f'(a) + \rho(h)] \cdot h$$

Onde

$$\lim_{h \rightarrow 0} \rho(h) = 0.$$

De modo análogo,

$$g(b+k) = g(b) + [g'(b) + \sigma(k)] \cdot k$$

onde

$$\lim_{k \rightarrow 0} \sigma(k) = 0.$$

Para simplificar, vamos escrever  $\rho$  e  $\sigma$  em vez de  $\rho(h)$  e  $\sigma(k)$  respectivamente. Tomando

$$k = f(a+h) - f(a) = [f'(a) + \rho] \cdot h,$$

temos  $f(a+h) = b + k$  e

$$(g \circ f)(a+h) = g[f(a+h)] = g(b+k) = g(b) + [g'(b) + \sigma] \cdot k$$

$$(g \circ f)(a+h) = g(b) + [g'(b) + \sigma] \cdot [f'(a) + \rho] \cdot h$$

$$(g \circ f)(a+h) = g(b) + [g'(b) \cdot f'(a) + \theta] \cdot h,$$

Com

$$\theta(h) = \sigma(f(a+h) - f(a)) \cdot [f'(a) + \rho(h)] + g'(b) \cdot \rho(h).$$

Como  $f$  é contínua no ponto  $a$  e  $\sigma$  é contínua no ponto 0, temos

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sigma(f(a+h) - f(a)) = 0$$

logo

$$\lim_{h \rightarrow 0} \theta(h) = 0,$$

o que prova o teorema.

### 3.4.4 Estudo da variação das funções

**Definição 3.9.** Sejam  $f$  uma função e  $p \in A$ , com  $A \subset D_f$ . Dizemos que  $f(p)$  é o valor máximo de  $f$  em  $A$  ou que  $p$  um ponto de máximo de  $f$  em  $A$  se,  $\forall x$  em  $A$ , tivermos  $f(x) \leq f(p)$ . E, dizemos que  $f(p)$  é o valor mínimo de  $f$  em  $A$  ou que  $p$  é um ponto de mínimo de  $f$  em  $A$  se, para todo  $x$  em  $A$ , tivermos  $f(x) \geq f(p)$ .

**Definição 3.10.** Sejam  $f$  uma função e  $p \in D_f$ . Dizemos que  $f(p)$  é o valor máximo global de  $f$  ou que  $p$  é um ponto de máximo global de  $f$  se,  $\forall x$  em  $D_f$ , tivermos  $f(x) \leq f(p)$ . E, dizemos que  $f(p)$  é o valor mínimo global de  $f$  ou que  $p$  é um ponto de mínimo global de  $f$  se, para todo  $x$  em  $D_f$ , tivermos  $f(x) \geq f(p)$ .

**Definição 3.11.** Sejam  $f$  uma função e  $p \in D_f$ . Dizemos que  $p$  é o ponto de máximo local de  $f$  se existir  $r > 0$  tal que  $f(x) \leq f(p)$  para todo  $x$  em  $(p-r, p+r) \cap D_f$ . E, dizemos que  $f(p)$  é o ponto mínimo local de  $f$  se existir  $r > 0$  tal que  $f(x) \geq f(p) \forall x$  em  $(p-r, p+r) \cap D_f$ .

**Teorema 3.20.** Seja  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  derivável. Se  $f$  atinge máximo ou mínimo em  $c \in (a, b)$ . Então  $f'(c) = 0$ .

**Demonstração.** Suponha  $c$  ponto máximo de  $f$  em  $(a, b)$ , ou seja,  $f(x) \leq f(c)$ , para todo  $x \in [a, b]$ . Defina

$$f'_+(c) = \lim_{x \rightarrow c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

e

$$f'_-(c) = \lim_{x \rightarrow c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

Note que  $f'_+(c) \leq 0$ , já que  $x > c$  e  $f(x) \leq f(c)$ , logo

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0.$$

Note também que  $f'_-(c) \geq 0$ , já que  $x < c$  e  $f(x) \leq f(c)$ , assim

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0.$$

Como  $f$  é derivável em  $c \in (a, b)$ , temos

$$f'_+(c) = f'_-(c) = f'(c),$$

e assim,  $0 \leq f'(c) \leq 0$ , daí  $f'(c) = 0$ .

**Teorema 3.21. (de Rolle).** Seja  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  contínua, tal que  $f(a) = f(b)$ . Se  $f$  é derivável em  $(a, b)$  então existe um ponto  $c \in (a, b)$  onde  $f'(c) = 0$ .

**Demonstração.** Se  $f$  é constante em  $[a, b]$  então  $f'(c) = 0$  para todo  $c \in (a, b)$ . Caso contrário,  $f$  atingirá seu mínimo  $m$  ou seu máximo  $M$  num ponto interior  $c \in (a, b)$ , pois se ambos fossem atingidos nas extremidades, teríamos  $m = M$  e  $f$  seria constante. Logo, se  $c$  é interior ao intervalo  $(a, b)$ , pelo teorema 3.20,  $f'(c) = 0$ .

**Exemplo 3.18.** Entre duas raízes reais distintas de um polinômio  $P(x)$  existe pelo menos uma raiz real de  $P'(x)$ .

**Solução 3.18.** Sejam  $x_1$  e  $x_2$  raízes de  $P(x)$ . Suponha sem perda de generalidade que  $x_1 < x_2$ . Assim, de  $P(x_1) = P(x_2) = 0$  e  $P$  é derivável em  $(x_1, x_2)$ , pelo Teorema de Rolle,  $\exists c \in (x_1, x_2)$  tal que  $P'(c) = 0$ .

**Exemplo 3.19.** Seja  $P$  um polinômio de grau  $n$ . Suponha que  $P$  possua  $m$  raízes reais e distintas, com  $m \leq n$ . Prove que  $P'$  possui pelo menos  $m - 1$  raízes reais e distintas.

**Solução 3.19.** Sejam  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_m$  raízes do polinômio  $P(x)$  de grau  $n$ , com  $m \leq n$ . Supondo sem perda de generalidade que  $x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_m$ .

Assim, como

$$P(x_1) = P(x_2) = P(x_3) = \dots = P(x_m) = 0$$

e  $P$  é derivável em  $(x_1, x_m)$ , o Teorema de Rolle garante que, existem  $c_1, c_2, c_3, \dots, c_{m-1}$ , com

$$c_1 \in (x_1, x_2), c_2 \in (x_2, x_3), c_3 \in (x_3, x_4), \dots, c_{m-1} \in (x_{m-1}, x_m),$$

tal que

$$P'(c_1) = 0, P'(c_2) = 0, \dots, P'(c_{m-1}) = 0,$$

logo  $P'(x)$  possui pelo menos  $m - 1$  raízes reais e distintas.

**Teorema 3.22. (do Valor Médio).** Seja  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  contínua. Se  $f$  é derivável em  $(a, b)$ , existe  $c \in (a, b)$ , tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

**Demonstração.** Seja  $g(x)$  o polinômio de grau  $\leq 1$  tal que  $g(a) = f(a)$  e  $g(b) = f(b)$ . Ou seja,  $g(x)$  é do tipo  $g(x) = Ax + B$  e  $g'(x) = A$ . Temos que  $f(a) = Aa + B$  e  $f(b) = Ab + B$ , assim

$$f(b) - f(a) = Ab - Aa = A(b - a)$$

$$A = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

logo Portanto:

$$g'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

$\forall x \in [a, b]$ . Considerando a função  $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $\varphi(x) = f(x) - g(x)$ , assim temos,

$$\varphi(a) = f(a) - g(a) = 0 \text{ e } \varphi(b) = f(b) - g(b) = 0$$

logo,

$$\varphi(a) = \varphi(b) = 0 \text{ e } \varphi'(x) = f'(x) - g'(x),$$

que satisfaz o Teorema de Rolle, logo existe  $c \in (a, b)$ , tal que  $\varphi'(c) = f'(c) - g'(c) = 0$ , que dá a conclusão desejada.

**Teorema 3.23.** Seja  $f$  contínua no intervalo  $[a, b]$  e derivável em  $(a, b)$ .

1.  $f'(x) \geq 0$  para todo  $x \in (a, b)$  se, somente se,  $f$  é crescente em  $[a, b]$ .
2.  $f'(x) \leq 0$  para todo  $x \in (a, b)$  se, somente se,  $f$  é decrescente em  $[a, b]$ .

A prova desse teorema pode ser encontrada em Fundamentos de Matemática Elementar, vol. 8, pag. 174.

**Definição 3.12.** Dizemos que  $f$ , uma função derivável no intervalo aberto  $I$ , tem a concavidade para cima se o gráfico de  $f$  estiver acima de todas as suas tangentes no intervalo aberto  $I$ . E, dizemos que  $f$  tem a concavidade para baixo se o gráfico de  $f$  estiver abaixo de todas as suas tangentes no intervalo aberto  $I$ .

**Definição 3.13.** Sejam uma função  $f$  e  $c \in D_f$ , com  $f$  contínua em  $c$ . Dizemos que  $c$  é ponto de inflexão de  $f$  se existirem reais  $a$  e  $b$ , com  $c \in (a, b)$  no domínio de  $f$ , tal que  $f$  tenha concavidades de nomes contrários em  $(a, c)$  e em  $(c, b)$ .

**Teorema 3.24.** Seja  $f$  derivável até a segunda ordem em  $(a, b)$ .

1.  $f''(x) \geq 0$  em  $(a, b)$  se, somente se,  $f$  terá a concavidade para cima em  $(a, b)$ .
2.  $f''(x) \leq 0$  em  $(a, b)$  se, somente se,  $f$  terá a concavidade para baixo em  $(a, b)$ .

**Definição 3.14.** Dado um ponto  $c$ , com  $c \in D_f$ , dizemos que  $c$  é ponto crítico de  $f$ , uma função derivável em seu domínio, se  $f'(c) = 0$ .

**Teorema 3.25.** Sejam  $f$  derivável até a segunda ordem em  $(a, b)$  e  $c \in (a, b)$ .

1. Se  $f'(c) = 0$  e  $f''(x) > 0$  isso implica que  $c$  é ponto de mínimo local.

2. Se  $f'(c) = 0$  e  $f''(x) < 0$  isso implica que  $c$  é ponto de máximo local.

As provas dos teoremas 3.24 e 3.25 podem ser encontradas em Guidorizzi (2008).

### 3.4.5 Fórmula de Taylor

Seja  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$   $n$  vezes derivável no ponto  $a \in I$ . Então, para todo  $h$  tal que  $(a + h) \in I$ , tem-se

$$f(a + h) = f(a) + f'(a) \cdot h + \frac{f''(a)}{2!} \cdot h^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot h^n + r(h)$$

Onde

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{h^n} = 0.$$

**Observação 3.9.** Dado um polinômio  $P$  de grau  $n$  e  $a, h \in \mathbb{R}$ , pela fórmula de Taylor temos que:

$$P(a + h) = P(a) + P'(a) \cdot h + \frac{P''(a)}{2!} \cdot h^2 + \dots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!} \cdot h^n + r(h).$$

Atente que  $r(h)$  é um polinômio de grau menor ou igual a  $n$ , cujas derivadas, desde a ordem 0 até  $n$ , se anulam no ponto 0. Logo  $r = 0$  e, assim, a fórmula de Taylor serve para polinômios sem resto. Portanto, o polinômio de Taylor fica

$$P(a + h) = P(a) + P'(a) \cdot h + \frac{P''(a)}{2!} \cdot h^2 + \dots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!} \cdot h^n.$$

Destaca-se neste trabalho uma aplicação importante da fórmula de Taylor em problemas de máximos e mínimos locais.

Seja  $f$  uma função  $n$  vezes derivável num ponto  $a$ , interior ao domínio de  $f$ . Suponhamos que

$$f'(a) = f''(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0,$$

mas  $f^{(n)}(a) \neq 0$ . Afirmamos que:

1. Se  $n$  for par, então  $a$  será um ponto de máximo local se  $f^{(n)}(a) < 0$ , ou um ponto de mínimo local se  $f^{(n)}(a) > 0$ .

2. Se  $n$  for ímpar, o ponto  $a$  não será de máximo nem de mínimo.

Sugerimos a leitura do livro Curso de Análise vol.1, de Elon Lages Lima, para um maior aprofundamento sobre o assunto em questão.

## 3.5 Noções de Integração

**Definição 3.15. (de Primitiva de uma função)** Dada uma função  $f$  definida em um intervalo  $I$ . Uma **primitiva** de  $f$  em  $I$  é uma função  $F$  definida em  $I$ , tal que

$$F'(x) = f(x)$$

para todo  $x \in I$ .

**Definição 3.16. (de Integral Indefinida)** Sendo  $F$  uma primitiva de  $f$ , toda primitiva de  $f$  é

do tipo  $F(x) + k$ , onde  $k$  é uma constante real qualquer. Chamamos de **Integral Indefinida** de  $f$  a expressão  $F(x) + k$ . Representamos por:

$$\int f(x) dx = F(x) + k.$$

De grande importância para os resultados da nossa pesquisa, destacaremos algumas regras de integração indefinida:

1.  $\int a dx = a \cdot x + k$ ;
2.  $\int \alpha f(x) dx = \alpha \cdot \int f(x) dx$ ;
3.  $\int [\alpha f(x) \pm \beta \cdot g(x)] dx = \alpha \cdot \int f(x) dx \pm \beta \cdot \int g(x) dx$ ;
4.  $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + k, n \neq -1$ ;
5.  $\int x^{-1} dx = \ln x + k, n = -1, x > 0$ ;
6.  $\int e^x dx = e^x + k$ .

**Definição 3.17. (de Integral de Riemann)** Sejam  $f$  uma função no intervalo  $[a, b]$  e  $L$  um número real. Dizemos que

$$\sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i$$

tende a  $L$ , quando  $\max \Delta x_i \rightarrow 0$ , e denotamos

$$\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i = L$$

se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0; \left| \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i - L \right| < \varepsilon$$

para toda partição de  $[a, b]$ , com  $\max \Delta x_i < \delta$  e para qualquer escolha de  $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ .

Por definição temos ainda que,

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i.$$

Quando o referido limite existe dizemos que  $f$  é integrável (segundo Riemann) em  $[a, b]$ . E chamamos a  $\int_a^b f(x)dx$  como **integral definida** de  $f$  em  $[a, b]$ .

**Observação 3.10.** Ainda temos, por definição, que:

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

e

$$\int_b^a f(x)dx = - \int_a^b f(x)dx ; (a < b).$$

Vamos destacar algumas propriedades da integral definida. Em Guidorizzi (2008, p. 303-305), a demonstração destas propriedades poderá ser consultada.

**Teorema 3.26.** Sejam  $f, g$  integráveis em  $[a, b]$  e  $k$  constante. Então

1.  $f + g$  é integrável em  $[a, b]$  e

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

2.  $kf$  é integrável em  $[a, b]$  e

$$\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx.$$

3. Se  $f(x) \geq 0$  em  $[a, b]$ , então

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

4. Se  $c \in (a, b)$  e  $f$  é integrável em  $[a, b]$  em  $[a, c]$  e em  $[c, b]$  então

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

## 4 PROBLEMAS ECONÔMICOS

Nesta parte da pesquisa destacam-se aplicações da derivada de uma função em problemas empregados nas áreas da Administração e Economia. O propósito deste momento do trabalho é mostrar a utilidade prática do conhecimento matemático na vida das pessoas e, assim, possibilitar a tomada de decisões diante de problemas. Dessa forma, apresentamos questões cuja ideia principal envolve maximização de lucros, minimização de custos, taxa de inflação, financiamento imobiliário e previdência privada.

### 4.1 Funções Marginais

#### 4.1.1 Função Custo Marginal

Nos campos da Administração e Economia é comum a preocupação com a taxa da variação do custo total em relação à quantidade produzida de um determinado bem e, não só, o custo total envolvido na produção desse bem.

De acordo com Tan (2007), a análise marginal é o estudo das taxas de variação das quantidades econômicas.

Segundo Bonetto e Murolo (2012), analisar a variação de uma grandeza em relação ao aumento de uma unidade na outra grandeza, à qual é dependente, é interessante no campo econômico para tomada de decisões.

Desse modo, a expressão marginal corresponde a quanto um fator está variando em relação a um ponto considerado. Vamos trabalhar com um problema para melhor entender essa ideia.

O custo total semanal em reais incorrido por uma empresa para a fabricação de  $x$  ventiladores é dado pela função custo total

$$C(x) = 6000 + 300x - 0,2x^2 ; (0 \leq x \leq 200)$$

1. Qual o custo total envolvido na produção do 151º ventilador?

O custo real envolvido na produção do 151º ventilador é igual à diferença entre os custos de produção de 151 e 150 ventiladores. Assim, temos

$$C(151) = [6000 + 300 \cdot 151 - 0,2 \cdot (151)^2]$$

e

$$C(150) = [6000 + 300 \cdot 150 - 0,2 \cdot (150)^2]$$

logo,

$$C(151) - C(150) = 46739,8 - 46500 = 239,8$$

2. Obtenha a taxa de variação da função custo total com relação a  $x$ , quando  $x = 150$ .

A taxa de variação do custo total  $C$  com relação a  $x$  é dada pela derivada de  $C$ , logo,

$$C'(x) = 300 - 0,4x$$

Assim, quando a produção for de 150 aparelhos telefônicos, a taxa de variação do custo total com relação a  $x$  é dada por

$$C'(x) = 300 - 0,4 \cdot 150 = 240$$

Analisando a solução do problema proposto, temos o seguinte, pelo item *a* encontramos que o custo para produzir o ventilador 151<sup>o</sup> é igual a 239,8 reais. Que é um valor bem próximo da resposta encontrada no item *b*, de 240 reais. Por que isso acontece?

É fácil observar que:

$$C(151) - C(150) = \frac{C(151) - C(150)}{1}$$

ou seja,

$$C(151) - C(150) = \frac{C(150 + h) - C(150)}{h}$$

com  $h = 1$ .

Desse modo, a diferença  $C(151) - C(150) = 239,8$  é dada pela taxa de variação média da função custo total  $C$  no intervalo  $[150,151]$ . Note, também que,  $C'(x) = 240$  corresponde à taxa de variação instantânea da função  $C$  em  $x = 150$ . Assim, quando tomarmos um  $h$  bem pequeno, a taxa de variação média da função  $C$  será uma boa aproximação para a taxa de variação instantânea da função  $C$ . Logo,

$$C(151) - C(150) = \frac{C(150 + 1) - C(150)}{1}$$

$$C(151) - C(150) \approx \lim_{h \rightarrow 0} \frac{C(150 + h) - C(150)}{h}$$

o que acontece no referido problema.

Denomina-se de custo marginal o custo gerado na fabricação de uma unidade adicional de determinado produto por uma fábrica que trabalha com específico índice de produção. Diante do exposto no problema anterior, a taxa de variação da função custo total, em um ponto dado, corresponde ao valor aproximado do custo marginal. Dessa forma, a função custo marginal é definida como a derivada da função custo total associada.

**Definição 4.1.** Seja  $C(x)$  a função custo total derivável, com  $x \geq 0$  e  $C(x) \geq 0$  temos que a função custo marginal é dada por sua derivada  $C'(x)$ .

#### 4.1.2 Função custo médio

Entendemos que a função custo total corresponde a soma das funções custo fixo e custo variável.

É importante destacar que a função custo médio é decrescente para valores de produção baixos porque, nesse intervalo o custo fixo médio e o custo variável médio estão caindo. A partir de certo nível de produção, a função custo médio torna-se crescente, visto que o aumento do custo variável médio passa a superar a redução do custo fixo médio.

**Definição 4.2.** Seja  $C(x)$  uma função custo total, onde  $C(x) \geq 0$ , a função custo médio, representada por  $\bar{C}$ , é definida por

$$\bar{C}(x) = \frac{C(x)}{x}$$

Com  $x > 0$ , onde  $x$  indica a quantidade de certo produto.

**Definição 4.3.** Seja  $\bar{C}(x)$  uma função custo médio derivável, temos que a função custo médio marginal é dada por sua derivada  $\bar{C}'(x)$ .

Bonetto e Murolo (2012) afirmam que o custo médio marginal nos dá a variação do custo médio de um produto correspondente a produção de uma unidade a mais desse produto.

**Exemplo 4.1.** O custo total mensal na fabricação de certo produto é dado por

$$C(x) = 0,0002x^3 - 0,11x^2 + 60x + 8000 ; (0 \leq x \leq 500)$$

Determine as funções custo médio e custo médio marginal. Obtenha  $\bar{C}'(400)$ .

**Solução 4.1.** A função custo médio é dada por:

$$\bar{C}(x) = 0,0002x^2 - 0,11x + 60 + \frac{8000}{x}$$

E a função custo médio marginal é dada por:

$$\bar{C}'(x) = 0,0004x - 0,11 + \frac{8000}{x^2}$$

assim,

$$\bar{C}'(400) = 0,0004 \cdot 400 - 0,11 - \frac{8000}{400^2} \Rightarrow \bar{C}'(400) = 0$$

#### 4.1.3 Função receita marginal

Temos que a função receita é o valor gerado por uma empresa com a venda de  $x$  unidades de determinado produto por um preço  $p$  relacionado a cada unidade. Assim, a função receita é definida por  $R(x) = px$ .

A receita marginal é a receita conquistada por uma empresa com a venda de uma unidade adicional de um produto a partir de um número específico de vendas. Desse modo, a função receita marginal compreende a taxa de variação da função receita.

**Definição 4.4.** Seja  $R(x)$  a função receita derivável, com  $x \geq 0$  e  $R(x) \geq 0$  temos que a função receita marginal é dada por sua derivada  $R'(x)$ .

#### 4.1.4 Função lucro marginal

Considerando  $R(x)$  a função receita,  $C(x)$  a função custo e  $x$  a quantidade de um bem produzido ou vendido, com  $x \geq 0$ . Define-se a função lucro por:

$$L(x) = R(x) - C(x).$$

A função lucro marginal corresponde à taxa de variação da função lucro a partir da venda de uma unidade adicional de certo produto.

**Definição 4.5.** Seja  $L(x)$  a função lucro derivável, temos que a função lucro marginal é dada por sua derivada  $L'(x)$ .

**Exemplo 4.2.** A demanda mensal por certo modelo de camisa é dada por

$$p = 300 - 0,4x$$

( $0 \leq x \leq 300$ ), onde  $p$  é preço por unidade em reais e  $x$  a quantidade demandada. Sabendo que a função custo total mensal correspondente à produção desse modelo de camisa é dado por

$$C(x) = 0,0002x^3 - 0,04x^2 + 70x + 2000 .$$

Determine:

1. a função custo marginal  $C'$ , a função receita marginal  $R'$  e a função lucro marginal  $L'$ .
2.  $C'(200)$ ,  $R'(200)$ ,  $L'(200)$  e interprete esses valores.

**Solução 4.2.** 1. Inicialmente precisamos calcular as funções receita  $R(x)$  e lucro  $L(x)$ .

Assim, temos:

$$R(x) = xp = x(300 - 0,4x) = 300x - 0,4x^2$$

$$L(x) = R(x) - C(x) = 300x - 0,4x^2 - (0,0002x^3 - 0,04x^2 + 70x + 2000)$$

$$L(x) = -0,0002x^3 - 0,36x^2 + 230x - 2000$$

Agora, calculando as funções marginais, encontramos:

$$C'(x) = 0,0006x^2 - 0,08x + 70$$

$$R'(x) = 300 - 0,8x$$

$$L'(x) = -0,0006x^2 - 0,72x + 230$$

2. Pelo item anterior encontramos:

$$C'(200) = 0,0006 \cdot 40000 - 0,08 \cdot 200 + 70 = 78$$

Isto é, quando o nível de produção corresponder a 200 camisas, o custo real para produzir uma camisa a mais é de aproximadamente 78 reais. Agora,

$$R'(200) = 300 - 0,8 \cdot 200 = 140$$

Ou seja, a receita real conquistada pela venda da 201ª camisa é, de aproximadamente, 140 reais. Pra finalizar,

$$L'(200) = -0,0006 \cdot 40000 - 0,72 \cdot 200 + 230 = 62$$

Portanto, o lucro real obtido pela venda da 201ª camisa é, de aproximadamente, 62 reais.

**Exemplo 4.3.** Considere a função custo total definida por

$$C(x) = 12 + \ln\left(3x + \frac{1}{5}\right)$$

$x \in [100, 300]$ , onde  $x$  corresponde à quantidade produzida por período. Determine o valor mínimo e valor máximo dessa função.

**Solução 4.3.** A função custo marginal é dada pela derivada de  $C(x)$ , logo:

$$C'(x) = \frac{15}{15x + 1}$$

ou seja, o custo gerado pela produção de uma unidade a mais, no intervalo  $[100, 300]$  é determinado por  $C'(x)$ . Além disso, pelo teorema 3.22 temos que, se  $C'(x) > 0$  então  $C(x)$  é crescente, nesse intervalo. Note que  $C'(x)$  não é definida para  $x = -\frac{1}{15}$ , pois  $x > 0$  e não se anula para nenhum valor de  $x$ . Isto é,  $C(x)$  não possui pontos críticos nesse intervalo. Calculando a segunda derivada temos

$$C''(x) = \frac{-225}{(15x + 1)^2}$$

ou seja, a segunda derivada é sempre negativa para todo  $x$ . Logo, a função custo dada atinge valor mínimo quando  $x = 100$  e valor máximo quando  $x = 300$ .

No mundo dos negócios é sempre importante observar em que ponto encontra-se o custo mínimo e em que situação produzirá o lucro máximo para que, diante dessas análises, as pessoas possam fundamentar suas escolhas e facilitar as tomadas de decisões. Desse modo, apresentamos informações que irão contribuir nesse processo.

## 4.1.5 Minimizando custos

**Exemplo 4.4.** Seja  $C(x)$  a função custo total e  $\bar{C}(x)$  a função custo médio, com  $x > 0$  e  $C(x) \geq 0$ , ambas deriváveis. Então:

1. Se  $C'(x) > \bar{C}(x)$ , então  $\bar{C}(x)$  é crescente.
2. Se  $C'(x) < \bar{C}(x)$ , então  $\bar{C}(x)$  é decrescente.
3.  $x_0$  é um ponto crítico de  $\bar{C}(x)$  se, e somente se  $\bar{C}(x_0) = C'(x_0)$ .

**Solução 4.4.** 1. Da hipótese, temos que,  $C'(x) > \bar{C}(x)$ ,  $x > 0$ . Assim,

$$C'(x) - \bar{C}(x) > 0.$$

Observe que a função custo médio é definida pelo quociente entre a função custo  $C(x)$  e a quantidade produzida  $x$ , com  $x > 0$ .

A partir da derivada da função custo médio, temos

$$\bar{C}'(x) = \frac{C'(x) \cdot x - C(x)}{x^2}.$$

Logo,

$$\bar{C}'(x) = \frac{C'(x) - \bar{C}(x)}{x}$$

como  $C'(x) - \bar{C}(x) > 0$  e  $x > 0$ , temos que,  $\bar{C}'(x) > 0$  portanto, pelo teorema 3.23,  $\bar{C}(x)$  é crescente.

2. Por hipótese, temos que,  $C'(x) < \bar{C}(x)$ ,  $x > 0$ . Assim,

$$C'(x) - \bar{C}(x) < 0.$$

Como

$$\bar{C}'(x) = \frac{C'(x) - \bar{C}(x)}{x}$$

temos que,  $\bar{C}'(x) < 0$  portanto, pelo teorema 3.23,  $\bar{C}(x)$  é decrescente.

3. Temos que

$$\bar{C}'(x_0) = 0 \Rightarrow \frac{C'(x_0) \cdot x_0 - C(x_0) \cdot 1}{x_0^2} = 0$$

logo,

$$C'(x_0) \cdot x_0 - C(x_0) \cdot 1 = 0$$

$$C'(x_0) \cdot x_0 = C(x_0).$$

Portanto,  $C'(x_0) = \frac{C(x_0)}{x_0} \Rightarrow C'(x_0) = \bar{C}(x_0)$ .

**Exemplo 4.5.** Seja  $C(x)$  uma função custo total derivável até a segunda ordem. Prove que, se  $\bar{C}(x_0) = C'(x_0)$  e  $C''(x_0) > 0$  com  $x_0 \in (0, +\infty)$ , então o custo médio é mínimo em  $x_0$ .

**Solução 4.5.** Como  $\bar{C}(x_0) = C'(x_0)$ , pelo terceiro item do exemplo 4.4, temos que  $x_0$  é ponto crítico de  $\bar{C}(x)$ . Por outro lado,

$$\bar{C}'(x) = \frac{C'(x) \cdot x - C(x)}{x^2}$$

assim,

$$\bar{C}''(x) = \frac{[C'(x) + C''(x)x - C'(x)]x^2 - 2x[C'(x)x - C(x)]}{x^4}$$

logo,

$$\bar{C}''(x) = \frac{C''(x)x^2 - 2[C'(x)x - C(x)]}{x^3}$$

Observando em  $x_0$ , temos

$$\bar{C}''(x_0) = \frac{C''(x_0)x_0^2 - 2[C'(x_0)x_0 - C(x_0)]}{x_0^3}$$

Mas,

$$C'(x_0)x_0 - C(x_0) = 0$$

assim

$$\bar{C}''(x_0) = \frac{C''(x_0)x_0^2}{x_0^3}$$

logo,

$$\bar{C}''(x_0) = \frac{C''(x_0)}{x_0} > 0$$

Portanto, pelo teorema 3.25,  $x_0$  é ponto de mínimo local de  $\bar{C}(x)$ .

**Exemplo 4.6.** Seja  $C(x) = 2x^2 + 100x + 450$  a função custo total de fabricação de certo produto, onde  $x$  representa o número de unidades produzidas. Qual é o nível de produção para que se tenha o custo médio mínimo?

**Solução 4.6.** Calculemos a derivada da função custo  $C(x)$  para obter o custo marginal:

$$C'(x) = 4x + 100$$

Determinemos, agora, a função custo médio, dividindo a função custo  $C(x)$  por  $x$ , assim,

$$\bar{C}(x) = \frac{2x^2 + 100x + 450}{x} = 2x + 100 + \frac{450}{x}$$

Temos que,

$$\bar{C}(x_0) = C'(x_0)$$

logo,

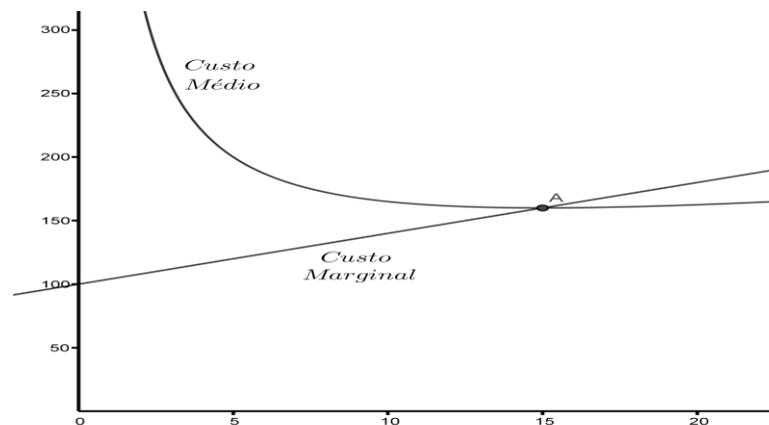
$$2x_0 + 100 + \frac{450}{x_0} = 4x_0 + 100$$

então,

$$2x_0^2 = 450 \Rightarrow x_0 = 15.$$

Portanto,  $x_0 = 15$  produz um custo médio mínimo, visto que  $C''(15) > 0$ .

**Figura 2 – Custo Médio Mínimo**



Fonte: Elaborado pelo autor.

#### 4.1.6 Maximizando lucros

Sabemos que o lucro total é a diferença entre a receita total e o custo total. Em situações normais, o lucro total  $L(x)$  e a quantidade produzida  $x$  são sempre números reais não negativos e

$$x_1 < x_2 \Rightarrow L(x_1) < L(x_2)$$

Desse modo, o lucro aumenta quando o consumo aumenta. Assim, podemos observar que  $L'(x) \geq 0$  para todo  $x$ , desde que  $L(x)$  seja derivável.

Além disso, é importante destacar que para se obter o lucro total máximo é preciso maximizar a receita total e minimizar o custo total.

**Exemplo 4.7.** Seja  $L(x)$  uma função lucro total derivável até a segunda ordem, com  $x \geq 0$ .

Mostre que:

1. Se  $R'(x) > C'(x)$ , então  $L(x)$  é crescente.
2. Se  $R'(x) < C'(x)$ , então  $L(x)$  é decrescente .

3. Se  $x_0$  rende lucro máximo com  $x_0 \in (0, +\infty)$ , então  $R'(x_0) = C'(x_0)$  e  $R''(x_0) \leq C''(x_0)$ .

**Solução 4.7.** 1. Temos que,

$$L(x) = R(x) - C(x)$$

assim,

$$L'(x) = R'(x) - C'(x)$$

Por hipótese,

$$R'(x) > C'(x),$$

ou seja,

$$R'(x) - C'(x) > 0$$

logo,  $L'(x) > 0$  e portanto, pelo Teorema 3.23,  $L(x)$  é crescente.

2. Como

$$L(x) = R(x) - C(x)$$

temos que,

$$L'(x) = R'(x) - C'(x)$$

De

$$R'(x) < C'(x),$$

$$R'(x) - C'(x) < 0,$$

logo,  $L'(x) < 0$  e portanto, pelo teorema 3.23,  $L(x)$  é decrescente.

3. Como  $x_0$  rende lucro máximo, pelo Teorema 3.24, temos que  $L'(x_0) = 0$  e  $L''(x_0) \leq 0$ .

Assim,

$$L'(x_0) = R'(x_0) - C'(x_0)$$

logo,

$$0 = R'(x_0) - C'(x_0),$$

portanto

$$R'(x_0) = C'(x_0).$$

De

$$L'(x_0) = R'(x_0) - C'(x_0)$$

temos que,

$$L''(x_0) = R''(x_0) - C''(x_0)$$

como  $L''(x_0) \leq 0$  resulta

$$R''(x_0) - C''(x_0) \leq 0$$

Logo

$$R''(x_0) \leq C''(x_0).$$

Diante do que foi exposto, quando  $R'(x) > C'(x)$ , provocando um lucro crescente, conclui-se que a produção da unidade adicional do produto deve ser realizada. E, quando o lucro for decrescente, ou seja,  $R'(x) < C'(x)$  temos que a produção da unidade adicional não deve ser realizada.

#### 4.1.7 Maximizando receitas

**Exemplo 4.8.** Seja  $\bar{R}(x) = \frac{R(x)}{x}$  com  $x > 0$  a função receita média. Prove que se a função receita  $R(x)$  apresenta concavidade para baixo, então o nível de vendas que produzirá uma receita média máxima acontece quando  $\bar{R}(x) = R'(x)$ .

**Solução 4.8.** Como a função receita  $R(x)$  tem concavidade para baixo em  $(0, +\infty)$ , pelo Teorema 3.23 temos que  $R''(x) \leq 0$  para todo  $x \in (0, +\infty)$ . Seja  $x_0 \in (0, +\infty)$  o nível de vendas que resulta em uma receita média máxima, assim, o teorema 3.25 nos diz que se  $\bar{R}'(x_0) = 0$  e  $\bar{R}''(x_0) \leq 0$ ,  $x_0$  é um ponto de máximo local da função  $\bar{R}(x)$ . Logo,

$$\bar{R}(x_0) = \frac{R(x_0)}{x_0}$$

$x_0 \in (0, +\infty)$ . Calculando a derivada de  $\bar{R}(x_0)$ , obtemos:

$$\bar{R}'(x) = \frac{R'(x_0) \cdot x_0 - R(x_0)}{(x_0)^2}$$

Como  $R'(x_0) = 0$  resulta em

$$0 = \frac{R'(x_0) \cdot x_0 - R(x_0)}{(x_0)^2}$$

assim,

$$0 = \frac{R'(x_0)}{x_0} - \frac{R(x_0)}{(x_0)^2}$$

logo,

$$\frac{R'(x_0)}{(x_0)} = \frac{R(x_0)}{(x_0)^2}$$

Portanto,

$$R'(x_0) = \bar{R}(x_0).$$

**Exemplo 4.9.** (Ver problema em Tan (2007, p.323)) A demanda semanal por DVDs fabricados peça Herald Media Corporation é dada por

$$p = -0,0005x^2 + 60, \quad 0 \leq x \leq 1095$$

onde  $p$  é o preço unitário em dólares e  $x$  é a quantidade demandada. A função custo total semanal associada à produção de discos é dada por

$$C(x) = -0,001x^2 + 18x + 4000$$

onde  $C(x)$  denota o custo total (em dólares) de prensagem de  $x$  discos. Determine o nível de produção que renderá lucro máximo ao fabricante.

**Solução 4.9.** A função receita é definida por:

$$R(x) = px = -0,0005x^3 + 60x$$

logo, a receita marginal é:

$$R'(x) = -0,0015x^2 + 60$$

Temos que o custo marginal resulta em :

$$C'(x) = -0,002x + 18.$$

Seja  $x_0$  a quantidade que produzirá um lucro máximo, assim

$$R'(x_0) = C'(x_0).$$

$$-0,0015x_0^2 + 60 = -0,002x_0 + 18$$

logo

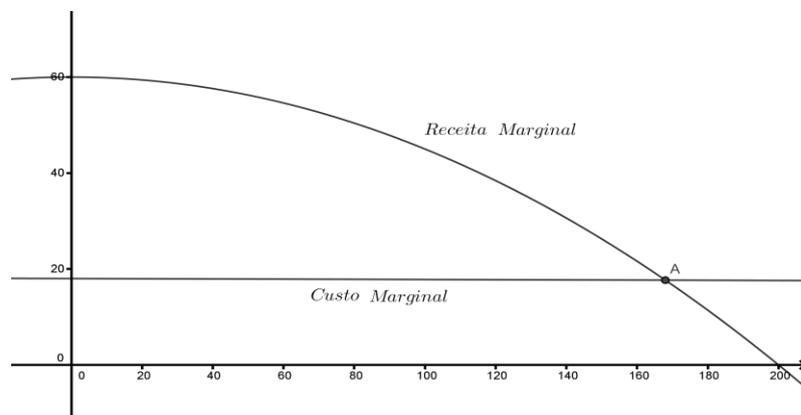
$$0,0015x_0^2 - 0,002x_0 - 42 = 0 \Rightarrow x_0 = 168.$$

Observe que

$$R''(168) = -5,04 < -0,002 = C''(168).$$

E, portanto, o fabricante obterá lucro máximo quando forem produzidas 168 peças.

**Figura 3 – Lucro Máximo**



Fonte: Elaborado pelo autor.

## 4.2 Elasticidade da demanda

Para Silveira (2013), a elasticidade é um conceito quantitativo e é utilizada tanto na teoria quanto na prática. Sendo assim, o seu estudo e entendimento fazem-se necessários uma vez que são muito importantes.

Quando o preço aumenta, o que acontece com a demanda? Geralmente, a demanda diminui e, assim, a função demanda é decrescente.

De acordo com Bonetto e Murolo (2012), para produtos distintos existem distintos comportamentos de alteração da demanda em relação às variações de preços.

Nessa parte do trabalho vamos aprender a determinar a variação percentual que ocorre na demanda a partir da variação de 1% no preço de um produto.

Sejam  $p$  o preço unitário de um bem,  $h$  o aumento do preço,  $f(p)$  a quantidade demandada e  $[f(p+h) - f(p)]$  a variação da quantidade demandada.

Temos que a variação percentual no preço unitário é dada por

$$\frac{h}{p}(100).$$

E a variação percentual da quantidade demandada pode ser escrita da seguinte forma

$$\left[ \frac{f(p+h) - f(p)}{f(p)} \right] (100).$$

Para medir o efeito que uma variação percentual de preços produz na variação percentual da quantidade demandada, basta observar a razão

$$\frac{\left[ \frac{f(p+h) - f(p)}{f(p)} \right] (100)}{\frac{h}{p}(100)} = \frac{p}{f(p)} \frac{f(p+h) - f(p)}{h}.$$

Mas, se  $f$  é derivável em  $p$ , com  $h$  bem pequeno, fica que

$$\frac{f(p+h) - f(p)}{h} \approx f'(p).$$

Logo, o efeito que a variação percentual do preço produz na demanda é dado por

$$\frac{p}{f(p)} f'(p).$$

Segundo Tan (2007) a elasticidade da demanda é definida pelos economistas como o valor negativo dessa razão.

**Definição 4.6.** Seja  $x = f(p)$  uma função demanda derivável, então a elasticidade da demanda para o preço  $p$  é dada por

$$E(p) = -\frac{p}{f(p)} f'(p).$$

**Observação 4.1.** Podemos classificar a demanda a partir de sua elasticidade como:

1. Elástica, se  $E(p) > 1$ .
2. Unitária, se  $E(p) = 1$ .
3. Inelástica, se  $E(p) < 1$ .

**Exemplo 4.10.** A quantidade diária demandada de certo produto é dada por

$$f(p) = \sqrt{300 - 6p}$$

com  $(0 \leq p < 50)$  e  $p$  em reais. Obtenha a função elasticidade da demanda  $E(p)$ . Calcule  $E(10)$  e  $E(40)$ , interpretando os resultados.

**Solução 4.10.** Derivando  $f(p)$ , obtemos:

$$f'(p) = \frac{1}{2} (300 - 6p)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-6)$$

logo,

$$f'(p) = -\frac{3}{\sqrt{300 - 6p}}$$

Desse modo, pela definição 4.6 a função elasticidade da demanda resulta em

$$\begin{aligned} E(p) &= -\frac{p}{f(p)} f'(p) \\ E(p) &= -\frac{p}{\sqrt{300 - 6p}} \cdot \left(-\frac{3}{\sqrt{300 - 6p}}\right) \\ E(p) &= \frac{3p}{300 - 6p} \end{aligned}$$

Calculando  $E(10)$  e  $E(40)$ , encontramos  $E(10) = \frac{30}{240} = \frac{1}{8} = 0,125$ , isto é, a demanda é inelástica. Assim como,  $E(40) = \frac{120}{60} = 2$ , isto é, a demanda é elástica.

Portanto, os resultados nos dizem que quando o preço unitário  $p$  do produto é de 10 reais, uma variação de 1% no preço resultará numa variação de 0,125% na quantidade demandada no sentido contrário à variação do preço. E quando o preço unitário  $p$  do produto é de 40 reais, uma variação de 1% no preço causará uma variação de 2% na quantidade demandada no sentido contrário à variação do preço.

Observando a classificação da demanda a partir do cálculo da elasticidade, verifica-se que se a demanda é unitária, ou seja, se  $E(p) = 1$  para todo  $p$  real positivo, temos:

$$-\frac{p}{f(p)} f'(p) = 1$$

isso implica em

$$\frac{f'(p)}{f(p)} = -\frac{1}{p}$$

$$\int \frac{f'(p)}{f(p)} dp = \int -\frac{1}{p} dp$$

resultando em

$$\ln f(p) + c_1 = -\ln p + c_2$$

fazendo  $\ln c = c_2 - c_1$ , obtemos

$$\ln f(p) = \ln p^{-1} + \ln c$$

assim,

$$\ln f(p) = \ln(p^{-1} \cdot c)$$

logo,  $f(p) = \frac{c}{p}$ ,  $c > 0$  e  $p > 0$ . Como

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} f(p) = 0,$$

se o preço  $p$  cresce enormemente a demanda  $f(p)$  é muito próxima de zero. Assim, percebe-se que quanto maior for o preço menor será a demanda.

Por outro lado, se tomarmos o

$$\lim_{p \rightarrow 0^+} f(p) = +\infty,$$

temos que, quanto menor for  $p$  maior será  $f(p)$ , ou seja, quando o preço de um certo produto diminui consideravelmente a tendência é que a procura por esse produto aumente bastante e a demanda vai crescendo.

O mesmo ocorre quando a demanda é elástica, ou seja, quando  $E(p) > 1$  para todo  $p$  real positivo, temos:

$$-\frac{p}{f(p)} f'(p) > 1$$

isso implica em

$$\frac{f'(p)}{f(p)} < -\frac{1}{p}$$

$$\int \frac{f'(p)}{f(p)} dp \leq \int -\frac{1}{p} dp$$

resultando em

$$\ln f(p) + c_1 \leq -\ln p + c_2$$

fazendo  $\ln c = c_2 - c_1$ , obtemos

$$\ln f(p) \leq \ln p^{-1} + \ln c$$

assim,

$$\ln f(p) \leq \ln(p^{-1} \cdot c)$$

logo,  $f(p) \leq \frac{c}{p}$ ,  $c > 0$  e  $p > 0$ .

Por outro lado, se a demanda é inelástica, ou seja, se  $E(p) < 1$  para todo  $p$  real positivo, encontramos que  $f(p) \geq \frac{c}{p}$ . Assim, se tomarmos o

$$\lim_{p \rightarrow 0^+} f(p) = +\infty,$$

logo, quanto menor for  $p$  maior será  $f(p)$ , ou seja, quando o preço de um certo produto diminui consideravelmente a tendência é que a procura por esse produto aumente bastante e a demanda vai crescendo. Fato esse perfeitamente perceptível no mundo dos negócios.

### 4.3 Interpretações da derivada

#### 4.3.1 Taxa de inflação de uma Economia

Considere que  $f(t)$  seja a função que define o índice de preços ao consumidor (IPC) de uma economia entre os anos  $a$  e  $b$ . E sendo  $t = c$ , onde  $a < c < b$ , temos que  $f'(c)$  corresponde à taxa de variação de  $f$  em  $c$ . A razão

$$\frac{f'(c)}{f(c)}$$

determina a taxa de inflação da economia em  $t = c$ .

**Exemplo 4.11.** O IPC de uma economia é definido pela função

$$f(t) = -0,4t^3 + 5t^2 + 120$$

com  $0 \leq t \leq 5$ ), onde  $t = 0$  indica o ano 2005. Calcule a taxa de inflação em 2009 ( $t = 4$ ).

**Solução 4.11.** Calculando a derivada de  $f(t)$ , temos:

$$f'(t) = -1,2t^2 + 10t.$$

Determinando os valores de  $f'(4)$  e  $f(4)$ , encontramos:

$$f'(4) = -1,2 \cdot 16 + 10 \cdot 40 = 20,8$$

$$f(4) = -0,4 \cdot 64 + 5 \cdot 16 + 120 = 174,4$$

Logo, a taxa de inflação dessa economia durante esses 4 anos, resulta em:

$$\frac{f'(c)}{f(c)} = \frac{20,8}{174,4} = 0,119 = 11,9\%$$

Suponha que o índice de preços ao consumidor (IPC) de um determinado país seja dado por uma função exponencial definida nos reais do tipo

$$f(t) = ke^{\alpha t}$$

onde  $k$  e  $\alpha$  são constantes positivas, com  $t > 0$ . Usando a razão

$$\frac{f'(p)}{f(p)}$$

para todo  $t$  determinamos a taxa de inflação dessa economia, assim,

$$f'(t) = ke^{\alpha t} \cdot \alpha$$

e como

$$f(t) = ke^{\alpha t}$$

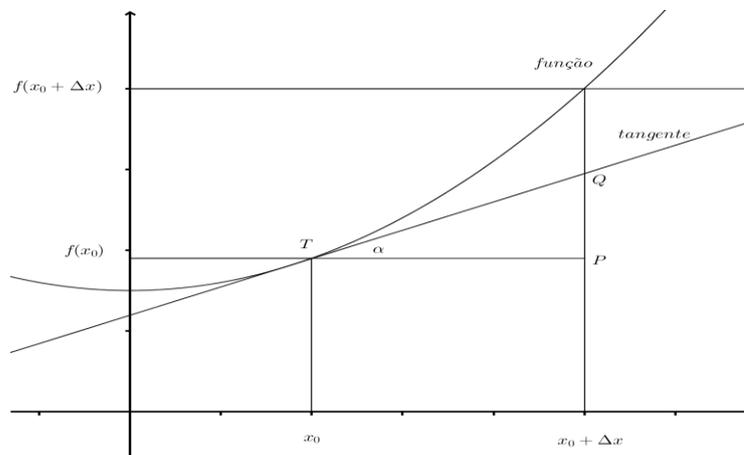
a taxa de inflação resulta em

$$\frac{f'(p)}{f(p)} = \frac{ke^{\alpha t} \cdot \alpha}{ke^{\alpha t}} = \alpha.$$

Isso nos mostra que sempre que o IPC de uma economia for representado por uma função exponencial a taxa de inflação resulta na constante  $\alpha$  que multiplica o período analisado  $t$ . Ou seja, nesse caso a taxa de inflação se torna constante, independente do momento considerado.

#### 4.3.2 A diferencial de uma função aproximando valores

**Figura 4 – Diferencial de uma função**



Fonte: Elaborado pelo autor.

Existem problemas que exigem o estudo da variação de uma variável dependente relacionada a uma pequena mudança da variável independente. Essas situações acontecem na vida das pessoas a partir de alguns modelos. Destacaremos questões práticas que envolvem financiamento de imóveis e previdência privada.

**Definição 4.7.** Seja  $y = f(x)$  uma função derivável. Então:

1. A diferencial da variável independente  $x$  é  $dx = \Delta x$

2. A diferencial da variável dependente  $y$  é  $dy = f'(x)dx$ .

Analisando o gráfico da função  $f$  representado na figura 4, encontramos uma expressão que determina a variação em  $y = f(x)$  a partir de uma pequena variação da variável  $x$ . Perceba que ao examinar os pontos próximos ao ponto de tangência, a reta tangente fica muito próxima do gráfico de  $f$ . Isso nos diz que quando tomarmos um  $\Delta x = \overline{TP}$  pequeno, determinamos um  $dy = \overline{PQ}$  muito próximo de  $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ .

Considerando o triângulo TPQ, temos que

$$\tan \alpha = \frac{\overline{PQ}}{\overline{TP}}.$$

Mas, a inclinação da reta tangente é definida pela derivada de  $f$  no ponto  $x_0$ , ou seja,  $f'(x_0)$ . Logo, temos que

$$f'(x_0) = \frac{dy}{\Delta x},$$

ou seja,

$$dy = f'(x_0)\Delta x.$$

Assim, obtemos a aproximação

$$\Delta y \approx dy = f'(x_0)\Delta x$$

a partir da derivada de  $f$  no ponto  $x_0$ .

#### 4.3.2.1 Financiamento Imobiliário

**Exemplo 4.12.** (Ver problema em Tan (2007, p.207)) A família Miller planeja comprar uma casa em um futuro próximo e estima que precisará de \$120000 para um financiamento de 30 anos a juros constantes. Sua prestação mensal  $P$  (em dólares) pode ser calculada usando a fórmula

$$P = \frac{10000r}{1 - \left(1 + \frac{r}{12}\right)^{-360}}$$

onde  $r$  é a taxa de juros anual. Se a taxa de juros aumenta a taxa presente de 9% ao ano para 9,2% ao ano no momento em que a família Miller decide pelo financiamento, aproximadamente de quanto mais será sua prestação mensal?

**Solução 4.12.** Temos que

$$f(r) = P = \frac{10000r}{1 - \left(1 + \frac{r}{12}\right)^{-360}}.$$

A sua derivada  $f'(r)$  é dada por:

$$f'(r) = \frac{10000 - 10000 \left(1 + \frac{r}{12}\right)^{-360} - 10000r - 30 \left(1 + \frac{r}{12}\right)^{-360}}{\left[1 - \left(1 + \frac{r}{12}\right)^{-360}\right]^2}$$

Calculando o valor de  $f'(0,09)$ , visto que a taxa de juros anterior ao aumento é de  $r = 9\%$ , encontramos  $f'(0,09) = 9031,43$ . Nessa situação, o aumento na prestação mensal gerado pela variação na taxa de juros de 9% para 9,2% será de aproximadamente

$$dP = f'(0,09) = 9031,43 \cdot (0,002) = 18,06.$$

onde  $dr = 0,092 - 0,09 = 0,002$ .

#### 4.3.2.2 Previdência Privada

**Exemplo 4.13.** Paulo contribui com certa quantia em reais por mês para um plano de previdência privada, com rendimentos compostos de  $i\%$  ao ano capitalizado mensalmente. Depois de 20 anos, o montante produzido é definido por

$$M = \frac{20000 \left[ \left(1 + \frac{i}{12}\right)^{240} - 1 \right]}{i}$$

Determine o montante a mais, produzido ao final de 20 anos se os rendimentos fossem 5,1%, em vez de 5%?

**Solução 4.13.** Escrevendo

$$M = f(i) = \frac{20000 \left[ \left(1 + \frac{i}{12}\right)^{240} - 1 \right]}{i}$$

Calculando a derivada  $f'(i)$ , temos:

$$f'(i) = \frac{40000i \left(1 + \frac{i}{12}\right)^{239} - 20000 \left(1 + \frac{i}{12}\right)^{240} + 20000}{i^2}$$

logo

$$f'(0,005) = \frac{19792}{0,0025} = 7916800$$

O aumento do Montante é obtido por:  $dM = f'(i) di$ , onde  $di = 0,051 - 0,05 = 0,001$ , assim,

$$dM = f'(0,005) \cdot 0,001 = 7916800 \cdot 0,001 = 7916,8.$$

Portanto, o aumento da taxa de 0,01% produzirá, no final de 20 anos, um aumento no montante de 7916,8 reais.

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O referido trabalho procurou apresentar, de forma simples e objetiva, algumas aplicações do Cálculo Diferencial no campo da Economia destacando funções e modelos econômicos que podem ser enfatizados em problemas que levam esse conhecimento ao aluno do Ensino Médio. Preocupou-se em dar relevância ao rigor matemático na construção das informações pertinentes à área da Economia a fim de desenvolver o despertar dos nossos alunos para essa área do conhecimento.

A pesquisa realizada se encaixa no âmbito da matemática aplicada ao mundo dos negócios e mostrou uma sequência de elementos vinculados à área da Economia que exigem a aplicabilidade do Cálculo Diferencial. O trabalho apresentou o tema sob três tópicos temáticos: a Matemática Financeira como suporte básico para o estudo da Economia, o Cálculo Diferencial como ferramenta para trabalhar os problemas de funções econômicas e a Análise Marginal como fundamento para entender os problemas que envolvem ideias associadas a maximização de lucros e minimização de custos. Foram destacadas, também, algumas interpretações da Derivada que julgamos importante abordar, tais como, taxa de inflação, financiamento imobiliário e previdência privada.

O propósito maior desse trabalho é de incentivar o estudo no campo da Matemática Financeira e da Economia. Dessa forma, os problemas destacados visam fortalecer a relação entre o conhecimento matemático e a vida do cidadão. A partir dos conceitos e informações, discutidas nessa pesquisa, espera-se que o leitor possa ampliar o seu conhecimento a fim de facilitar a tomada de decisões futuras.

## REFERÊNCIAS

- BARROS, L. E. W. B. de. **Cálculo**: um Estudo de suas Aplicações às Áreas Financeira e Econômica. 2013. 145f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2013.
- GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de cálculo**. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2008.
- IEZZI, G.; HAZZAN, S.; DEGENSZAJN, D. **Fundamentos de Matemática Elementar 11**: matemática comercial, matemática financeira, estatística descritiva. São Paulo: Atual, 2006.
- IEZZI, G.; MURAKAMI, C.; MACHADO, N. J. **Fundamentos de Matemática Elementar 8**: limites, derivadas, noções de integral. 6. ed. São Paulo: Atual, 2004.
- LIMA, E. L. **Curso de análise**. 14. ed. São Paulo: Projeto Euclides, 2012.
- MATHIAS, W. F.; GOMES, J. M. **Matemática Financeira**. 6. ed. São Paulo: Atlas, 2008.
- MUNIZ NETO, A. C. **Fundamentos de cálculo**. Rio de Janeiro: SBM, 2015.
- MUROLO, A. C.; BONETTO, G. **Matemática aplicada a administração, economia e contabilidade**. 2. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2012.
- SILVEIRA, J. J. da. **Economia Matemática I**. Florianópolis: UFSC, 2013.
- TAN, S.T. **Matemática aplicada a administração e economia**. Tradução de Fábio Armando. 2. ed. São Paulo: Thomson Learning, 2007.