



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA - PROFMAT

**Uma abordagem geométrica para o estudo de
Funções Racionais no Ensino Médio**

Ethiamara da Silva Sousa Vênis

Teresina - 2013

Ethiamara da Silva Sousa Vênus

Dissertação de Mestrado:

**Uma abordagem geométrica para o estudo de Funções Racionais
no Ensino Médio**

Dissertação submetida à Coordenação Acadêmica Institucional do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional na Universidade Federal do Piauí, oferecido em associação com a Sociedade Brasileira de Matemática, como requisito parcial para obtenção do grau de mestre em Matemática.

Orientador:

Prof. Dr. Newton Luís Santos

Teresina - 2013

Vênus, E.

xxxx Uma abordagem geométrica para o estudo de
Funções Racionais no Ensino Médio

Ethiamara da Silva Sousa Vênus – Teresina: 2013.

Orientador: Prof. Dr. Newton Luis Santos

1. Área de Concentração

CDD 516.36

À minha família: Jesus, Isabelle e Ítalo.

Agradecimentos

Agradeço a Deus pois sem Ele nada seria possível. Obrigada, Senhor, pela força e coragem que me concedeste para que eu tivesse condições de superar todos os obstáculos. Obrigada por guiar cada passo meu, iluminar todos os dias a minha caminhada e por me agradecer com mais essa conquista.

A meu esposo, amigo e companheiro, Jesus Vênus, por todo apoio, dedicação, paciência e amor dedicados a mim e a nossos filhos. Obrigada, amor, por ter sido “dono de casa”, pai e também mãe, por muitas vezes durante esses dois anos e por sempre acreditar em mim mesmo quando eu não acreditava, não me deixando desistir.

A meus filhos, Isabelle e Ítalo, sempre me motivando com seus sorrisos, abraços e demonstrações de amor e carinho. Obrigada por compreenderem a minha ausência principalmente nos fins de semana.

A meus pais e minha irmã pois são minha fortaleza e estão sempre a meu lado. Obrigada pelo apoio e amor incondicional e por nunca terem medido esforços pra que eu pudesse ir sempre mais alto.

Aos colegas de mestrado pela troca de experiências e conhecimentos, em especial, aos amigos do grupo de estudo: Zaigla, Valtercio, Hélder, Edivan, Paulo, Marcos, Janiel e Nascimento, pela amizade construída e com os quais aprendi muito.

Ao professor Dr. Newton Santos, meu orientador, pela confiança depositada em mim, pela humildade e paciência em transmitir seus conhecimentos e por sua disposição em ajudar.

Aos professores do mestrado pela atenção, dedicação, amizade e confiança dispendidas a nossa turma, ressaltando a grande competência de cada um.

Aos professores Dr.Afonso Norberto e Dr.Jefferson Leite, por aceitarem participar da banca de defesa da dissertação.

Aos amigos e familiares por todas as palavras de motivação e pelas contribuições e sugestões na realização deste trabalho.

À Secretaria da Educação e Cultura do Piauí pela liberação de minhas atividades docentes para que eu pudesse me dedicar aos estudos.

À CAPES pelo apoio financeiro.

*“Não há nenhum ramo da Matemática,
por mais abstrato que seja, que não possa
um dia vir a ser aplicado aos fenômenos
do mundo real.”*

Nikolai Lobachevsky.

Resumo

Nesta dissertação são estudadas transformações fracionais lineares sobre o corpo dos números reais e dos números complexos sob um ponto de vista geométrico, dando ênfase à dependência geométrica nos coeficientes que as definem. São estudados os efeitos no traço do gráfico de tais funções quando são alterados seus coeficientes evidenciando assim a influência de cada um deles. São apresentadas também algumas aplicações.

Palavras-chave: Transformações no plano; Função afim; Funções Racionais; Complexos; Transformações de Möbius.

Abstract

In this dissertation are studied linear fractional transformations on the field of real numbers and complex numbers beneath a geometrical point of view, emphasizing the geometric dependence in the coefficients that define them. Were studied the tracing graphic effects of these functions when its coefficients are changed demonstrating the influence of each one. Also are presented some applications.

Keywords: Transformations in the plane; Affine Function; Rational Functions; Complex; Möbius Transformations.

Sumário

Introdução	1
1 Noções Preliminares	4
1.1 Funções Reais e Gráficos	4
1.2 Transformações no Plano	11
2 Função Afim	18
2.1 Função Constante	18
2.2 Função Identidade	19
2.3 Função Linear	21
2.4 Função Afim	25
2.5 Aplicações	31
3 Funções Racionais em \mathbb{R}	35
3.1 Função inverso de um número real	39
3.2 Funções racionais do tipo $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$	44
3.3 Aplicações	51
4 Números Complexos	54
4.1 Breve Histórico	54
4.2 Representação Algébrica	55
4.3 Representação Geométrica	58
4.4 Forma polar ou trigonométrica	63
4.5 Identidade de Euler: $e^{i\pi} + 1 = 0$	71
4.6 Extração de raízes n-ésimas	72
4.7 Aplicações	77

5	Funções Racionais em \mathbb{C}	81
5.1	Transformações elementares em \mathbb{C}	81
5.2	Transformações de Möbius	91
	Referências Bibliográficas	95

Introdução

Durante um bom tempo fiquei pensando sobre o que escrever, pois na Matemática há tanta beleza e quanto mais se estuda mais beleza se encontra. Pesquisei na internet, em livros, em revistas, pedi a opinião de amigos e professores e muita coisa eu achava interessante. Então, como escolher?

Foi aí que lembrei de uma aula da disciplina Polinômios e Equações Algébricas-PROFMAT, na qual o professor falava tão entusiasmado das transformações de Möbius e do que poderíamos fazer e descobrir no ‘mundo’ dos números complexos.

Mas essas transformações, que na verdade são funções racionais complexas de variável complexa, não são estudadas no Ensino Médio pois “não cai no ENEM” e nem aparecem nos livros didáticos. Estuda-se o conjunto dos números complexos algebricamente: suas operações, exemplos e exercícios. Depois, a representação do número complexo no plano e as operações dos números complexos na forma trigonométrica porém, sem muita relação com a Geometria. Tal fato pode ser justificado pela forma como o assunto é explicado nos livros didáticos pois, alguns destes não fazem essa relação com a Geometria e os que fazem, o fazem de uma forma rápida, sem muitos detalhes ou exemplos. Nas escolas públicas, por exemplo, essa última parte quase não é estudada. Ressalto isso aqui, pois sempre trabalhei em escola pública e sei o quanto o tempo é limitado. Aliado a isso, tem-se as dificuldades de aprendizagem dos alunos, algumas deficiências trazidas por eles das séries anteriores, desde o Ensino Fundamental, a falta de recursos, dentre outros problemas. Em algumas escolas públicas não há nem pincel. Então, ensinar determinados assuntos é loucura! E como dizem alguns colegas de profissão: “ Vou pular esse conteúdo!”, “ É perda de tempo!”, “Eles não vão entender! ” Será mesmo que não?

Muitas vezes alguns conteúdos são ensinados de forma superficial, não só no Ensino Médio mas também no Fundamental. Ensina-se apenas o básico e da forma mais tradicional possível. Assim, os alunos deixam de aprender a essência de alguns conteúdos que são

fundamentais para a continuidade do aprendizado. Isso reflete nas séries mais avançadas. É claro que essa situação não é regra, mas é importante discutir sobre as condições de trabalho do professor e como as aulas estão sendo planejadas, pois o planejamento deve ser feito de acordo com a realidade de cada turma, de cada escola, de cada região, enfim levando em consideração todas particularidades.

Seria, então, interessante ou relevante escrever sobre tal assunto? Para alguns professores esse assunto é visto como desnecessário de ser ensinado no Ensino Médio e acreditam que as aplicações que envolvem os números complexos só fazem sentido em cursos mais avançados.

E se estudarmos as funções racionais reais de variáveis reais? Outro problema! As funções racionais também não são estudadas no Ensino Médio, nem no corpo dos reais e nem no corpo dos complexos. Em alguns livros didáticos, aparecem apenas uns exemplos, muitas vezes descontextualizados, quando se fala sobre a construção de gráficos de funções reais. E por que não estudamos com mais detalhe tais funções?

Muitas vezes, em sala de aula, nós professores nos preocupamos (e somos, de certa forma, pressionados a fazer isso!) apenas em concluir o conteúdo que está no programa e ensinar o que “cai no ENEM” e nos diversos vestibulares, nos acomodando com o que está pronto, ou, às vezes, buscamos outras justificativas, como a falta de interesse dos alunos, por exemplo. Assim, nos eximimos de incluir conteúdos que seriam bem interessantes de se aprender e ensinar e ou simplesmente de associá-los a outros considerados mais “relevantes”. Será, então, um desafio ensinar tais conteúdos? E como fazer?

Pensando nisso e ressaltando um dos objetivos do PROFMAT, o de “Estimular a melhoria do ensino de Matemática em todos os níveis”, já que este conteúdo contempla conhecimentos de nível básico e superior, propomos estudar o gráfico de algumas *Funções Racionais*, sobre o corpo dos números reais e dos números complexos, mais especificamente, as funções da forma

$$f(\alpha) = \frac{a\alpha + b}{c\alpha + d},$$

que em alguns livros, como em CHURCHILL(1975), são chamadas *Transformações Lineares Fracionárias*, ou ainda, Função Fracionária Linear, analisando a relação de cada um dos seus coeficientes com as transformações que os gráficos sofrem, bem como sua definição e algumas de suas propriedades. Pois, de acordo com o PCN+(2002,p.121) “[...]a ênfase do estudo das diferentes funções deve estar no conceito de função e em suas propri-

idades em relação às operações, na interpretação de seus gráficos e nas aplicações dessas funções”.

Além disso, segundo as Orientações Curriculares para o Ensino Médio(2006, p.72) “[...] é importante destacar o significado da representação gráfica das funções, quando alteramos seus parâmetros, ou seja, identificar os movimentos realizados pelo gráfico de uma função quando alteramos seus coeficientes”

Primeiramente, estudaremos a Função Fracionária Linear f definida em \mathbb{R} , ou seja, $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, como os coeficientes destas determinam seus gráficos e também suas particularidades: domínio, imagem, comportamento no infinito, assíntotas, comportamento da função próximo às assíntotas. Com o intuito de facilitar a assimilação do conteúdo, optamos por iniciar nosso estudo considerando as situações mais elementares e progressivamente aumentando a generalidade.

Nesta primeira parte, é interessante e será de grande valia, o conhecimento do PROJETO NOVAS TECNOLOGIAS NO ENSINO da UFRJ, que possui dentre seus objetivos o de usar os recursos computacionais para explorar e integrar aspectos gráficos, geométricos, numéricos e analíticos. Bem como, o conhecimento do projeto do Instituto de Matemática e Estatística da USP, o site eCALCULO, no qual o conteúdo disponibilizado contém uma parte do que é desenvolvido no Ensino Médio e é apresentado segundo uma abordagem que enfatiza a articulação ao curso de Cálculo.

Logo depois, estudaremos a Função Fracionária Linear f sobre \mathbb{C} , $f : E \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, começando pelos números complexos, suas formas algébrica e trigonométrica e as operações entre eles, uma vez que estas operações estão relacionadas aos movimentos de translação, rotação, simetrias, dilatação e contração no plano complexo, chegando também a generalidade, que neste caso recebe um nome especial: *Transformações de Möbius*.

Desta maneira, dando ao estudo das funções um caráter mais geométrico, ou seja, aproximando Álgebra e Geometria, buscamos tornar o aprendizado destes conteúdos mais significativo no Ensino Médio.

Como ferramenta auxiliar para a construção dos gráficos, utilizaremos o GeoGebra, um software gratuito de matemática dinâmica desenvolvido para o ensino e aprendizagem da matemática nos vários níveis de ensino que reúne recursos de geometria, álgebra, tabelas, gráficos, probabilidade, estatística e cálculos simbólicos em um único ambiente.

Capítulo 1

Noções Preliminares

1.1 Funções Reais e Gráficos

Ao se falar de função, é sempre bom ter em mente algumas definições, por isso reservamos esta seção às funções reais e gráficos.

Dados os conjuntos X, Y , uma função $f : X \rightarrow Y$ (lê-se “uma função de X em Y ”) é uma regra (ou conjunto de instruções) que diz como associar a cada elemento $x \in X$ um elemento $y = f(x) \in Y$. O conjunto X chama-se domínio e Y é o contradomínio da função f . Para cada $x \in X$, o elemento $f(x) \in Y$ chama-se a imagem de x pela função f , ou o valor assumido pela função f no ponto $x \in X$. Escreve-se $x \rightarrow f(x)$ para indicar que f transforma (ou leva) x em $f(x)$.

Uma função chama-se injetiva quando elementos diferentes em X são transformados por f em elementos diferentes em Y , ou seja, $x \neq x' \text{ em } X \implies f(x) \neq f(x')$. Chama-se sobrejetiva quando, para qualquer elemento $y \in Y$, podemos encontrar um elemento $x \in X$ tal que $f(x) = y$. É chamada-se uma bijeção quando é ao mesmo tempo injetiva e sobrejetiva.

Se $f : A \rightarrow B$ e $g : C \rightarrow D$ são funções tais que $f(A) \subset C$, definimos a composta de g com f como sendo a função $g \circ f : A \rightarrow D$ dada por $(g \circ f)(a) = g(f(a))$ para todo $a \in A$.

Se $f : A \rightarrow B$ é bijetiva, então existe uma única função $h : B \rightarrow A$ tal que $(h \circ f)(a) = a$ para todo $a \in A$ e $(f \circ h)(b) = b$ para todo $b \in B$. Tal função h é chamada a inversa de f e é denotada por f^{-1} .

E ainda, sendo $y = f(x)$ uma função real com valores reais, a razão

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}, \quad (1.1)$$

pode ser interpretada como a *taxa de variação* da variável y em relação à variável x , isto é, uma forma de medir “quão rápido” a variável y está mudando à medida em que a variável x muda.

Definição 1.1.1 (Gráfico de uma função). *Dado um conjunto não vazio $D \subset \mathbb{R}$, consideremos funções $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Assim, o gráfico de uma função f é o subconjunto do plano cartesiano \mathbb{R}^2 , dado por*

$$\text{graf}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \in D, y = f(x)\}, \quad (1.2)$$

Isso significa que um ponto (x, y) pertence ao gráfico de f se, e somente se, $x \in D$ e os números reais x e y satisfazem a lei de associação de f , ou seja, temos que o gráfico de uma função f é o lugar geométrico dos pontos que satisfazem sua lei de associação. Com isso, percebemos a relação direta entre a Álgebra e a Geometria no estudo do gráfico de uma função, o que nem sempre fica claro para nossos alunos.

No Ensino Médio, a forma mais apresentada aos alunos para se esboçar gráficos é a chamada *tabela de valores*. Nesta são atribuídos valores a x para encontrarmos os correspondentes valores de $f(x)$, ou seja, os valores de y . Obtendo-se, então, pontos no plano cartesiano por onde passará o gráfico. Com a ajuda desta tabela de valores podemos dar aos alunos uma ideia aproximada do comportamento da função em todo seu domínio. Mas este método é totalmente confiável? Quantos pontos são necessários para se esboçar o gráfico de uma função?

Isso depende da função que se está considerando. Veremos a seguir o caso da Função Afim, a qual basta o conhecimento de dois pontos do seu gráfico para que possamos esboçá-lo, já que este é uma reta, e da Geometria sabemos que dois pontos distintos determinam uma única reta. No entanto, para outras funções, a utilização apenas da tabela de valores é insuficiente, dificultando uma reflexão matemática mais detalhada sobre a função.

Uma outra forma de se apresentar os gráficos aos alunos é utilizando a tecnologia como ferramenta auxiliar, pois temos uma grande variedade de programas que disponibilizam recursos para facilitar a exploração algébrica e gráfica, de forma simultânea, ajudando o aluno a melhor entender certos conceitos. Mas estes programas não são auto

suficientes, por isso se faz necessário e muito importante que o professor tenha domínio do conteúdo para que possa utilizar tais recursos de modo satisfatório. Não podemos “usar por usar”, sem um planejamento prévio. Devemos sempre questionar o que o programa faz pra verificar se está em harmonia com a Álgebra proposta e ainda testar a atividade antes de apresentar aos alunos.

A seguir, veremos alguns exemplos de funções cujos gráficos serão construídos a partir da tabela de valores e com a utilização do Geogebra.

Exemplo 1.1.1. *Construa o gráfico da função $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $p(x) = x^2 + 4x - 3$.*

Construindo o gráfico desta função a partir da tabela de valores abaixo e marcando os pontos encontrados no plano cartesiano, temos a possível interpretação geométrica do seu gráfico.

Tabela1.1.

x	$p(x) = x^2 + 4x - 3$	(x, y)
-1	$p(-1) = (-1)^2 + 4(-1) - 3 = -6$	A(-1,-6)
0	$p(0) = 0^2 + 4 \cdot 0 - 3 = -3$	B(0,-3)
1	$p(1) = 1^2 + 4 \cdot 1 - 3 = 2$	C(1,2)
2	$p(2) = 2^2 + 4 \cdot 2 - 3 = 9$	D(2,9)

Na Figura 1.1, note que os pontos sugerem o formato de uma curva, mas não podemos afirmar que a função p é toda crescente, ou se ela possui pontos de máximo e mínimo, por exemplo.

Tal fato confirma que a utilização apenas da tabela de valores não nos garante o esboço fiel do gráfico de algumas funções. É por isso que o professor precisa ter domínio do conteúdo e fazer um planejamento prévio da atividade a ser realizada.

Neste caso, o professor já sabendo que se trata de uma parábola acrescenta mais dois pontos, como podemos ver na Figura 1.2, e traça o gráfico.

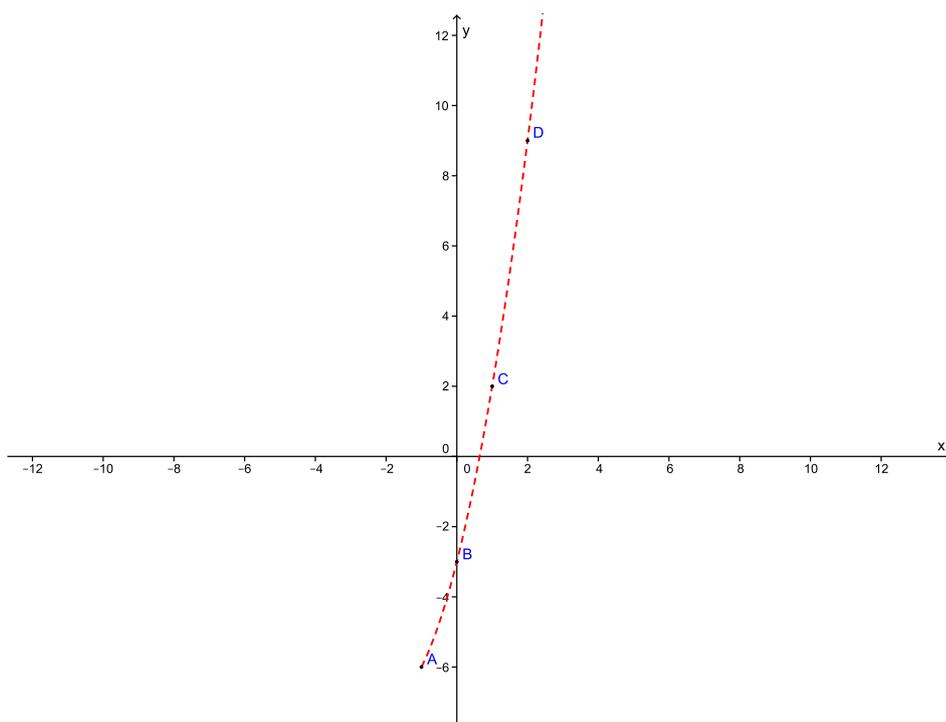


Figura 1.1: Pontos A,B,C e D obtidos pela tabela 1.1

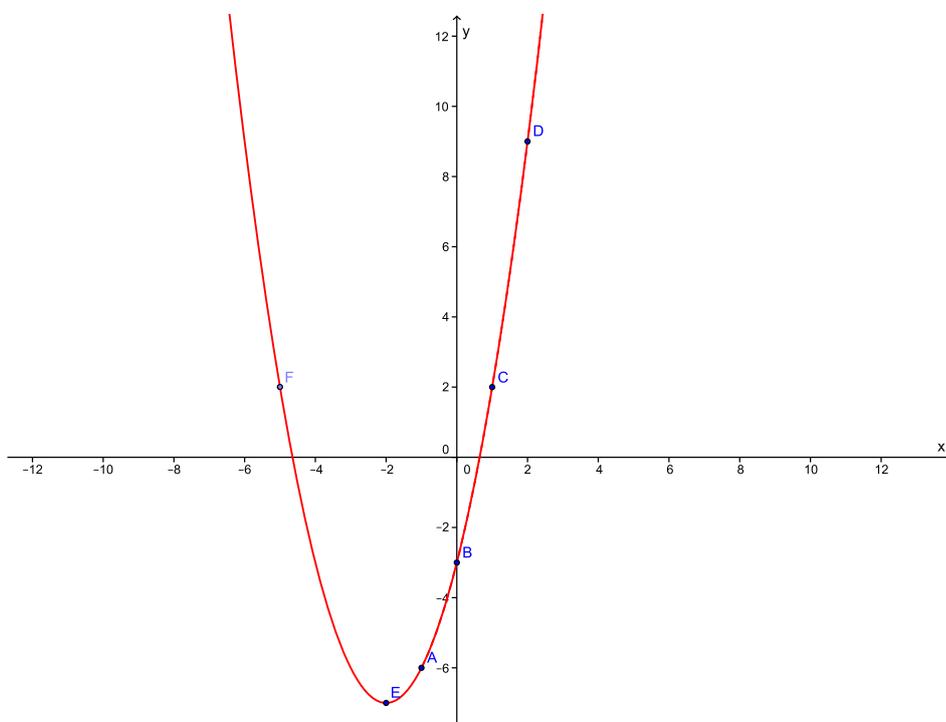


Figura 1.2: Gráfico da função $p(x) = x^2 + 4x - 3$

Exemplo 1.1.2. Considere a função $q : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $q(x) = \frac{|x|}{x}$

Construindo o gráfico desta função a partir da tabela de valores (tabela 1.2) e marcando os pontos correspondentes no plano cartesiano, não podemos afirmar muita coisa sobre o gráfico e muito menos responder a questionamentos, como: “É uma curva?”.

Tabela1.2.

x	$q(x) = \frac{ x }{x}$	(x, y)
-2	$q(-2) = \frac{ -2 }{-2} = -1$	F(-2, -1)
-1	$q(-1) = \frac{ -1 }{-1} = -1$	G(-1, -1)
1	$q(x) = \frac{ 1 }{1} = 1$	H(1, 1)
2	$q(2) = \frac{ 2 }{2} = 1$	I(2, 1)

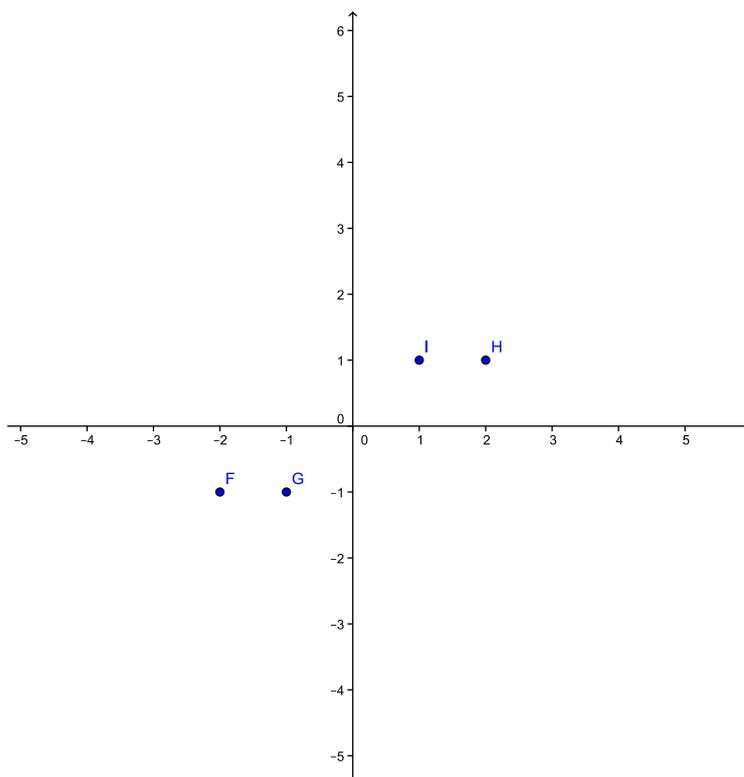


Figura 1.3: Pontos F,G,H,I obtidos pela tabela 1.2

Neste exemplo, só verificamos o já foi dito sobre a utilização da tabela de valores. De fato, dependendo da escolha dos pontos, podemos perder muitas informações

importantes sobre o gráfico.

Na Figura 1.4. temos o gráfico da mesma função construído no Geogebra. Um questionamento natural que surge é se o traço apresentado corresponde ao gráfico da função $q(x)$, de fato. Visualmente, o aluno poderia indagar se ao ponto 0 correspondem os valores 1 e -1 . Como isto pode ocorrer se $q(x)$ não está definida para $x = 0$? O questionamento é procedente.

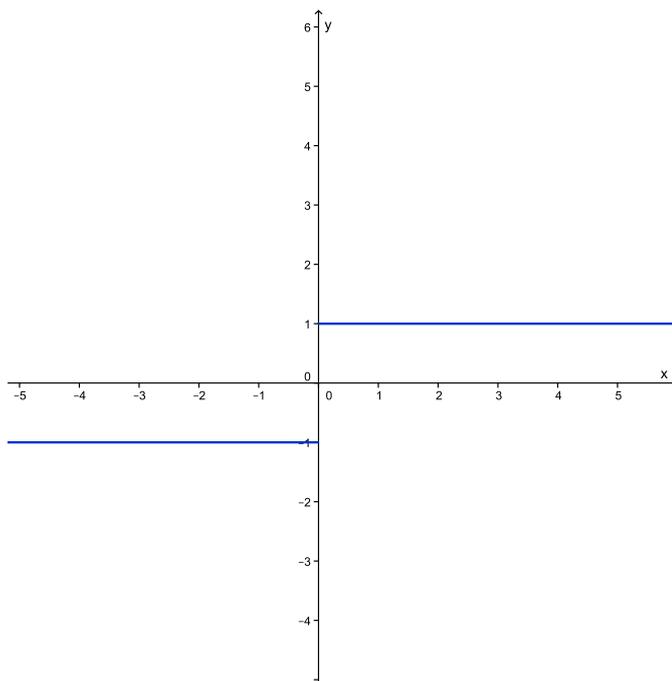


Figura 1.4: Gráfico da função $q(x) = \frac{|x|}{x}$ construído no Geogebra

Neste momento cabe ao professor orientar a classe sobre como um computador desenha o gráfico de uma função: se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função e $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ é uma partição do intervalo $[a, b]$ ¹ então o computador² determina numericamente os valores $f(t_i)$ e liga os pontos $(t_i, f(t_i))$ a $(t_{i+1}, f(t_{i+1}))$ por um segmento, isto é, o resultado desta construção é uma poligonal, que se mostrará uma curva suave (se f for suave) se os espaçamentos $t_{i+1} - t_i$ forem pequenos.

¹Uma partição do intervalo $[a, b]$ é um subconjunto finito de pontos $P = t_0, t_1, \dots, t_n \subset [a, b]$ tal que $a \in P$ e $b \in P$.

²Para situações de aplicações computacionais, usualmente tomamos os pontos da partição igualmente espaçados, isto é, $t_1 - t_0 = t_2 - t_1 = \dots = t_n - t_{n-1}$

No caso da função $q(t) = \frac{|t|}{t}$, se $t \neq 0$, tomando-se o espaçamento (também chamado de passo) constante e pequeno, de modo que $t_i = 0$ não pertença à partição, podemos não ter a acuidade visual suficiente para perceber que no ponto $x = 0$ não assume valor algum, apesar de, aparentemente estar assumindo ambos os valores 1 e -1 , não sendo uma função (um equívoco visual!).

Logo, para traçá-lo corretamente, devemos considerar o fato de que $x = 0$ não pertence ao domínio de $q(x)$, observando que

$$q(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases},$$

portanto, o gráfico tem uma interrupção neste ponto, que em geral representamos por uma bolinha aberta como mostra a Figura 1.5.

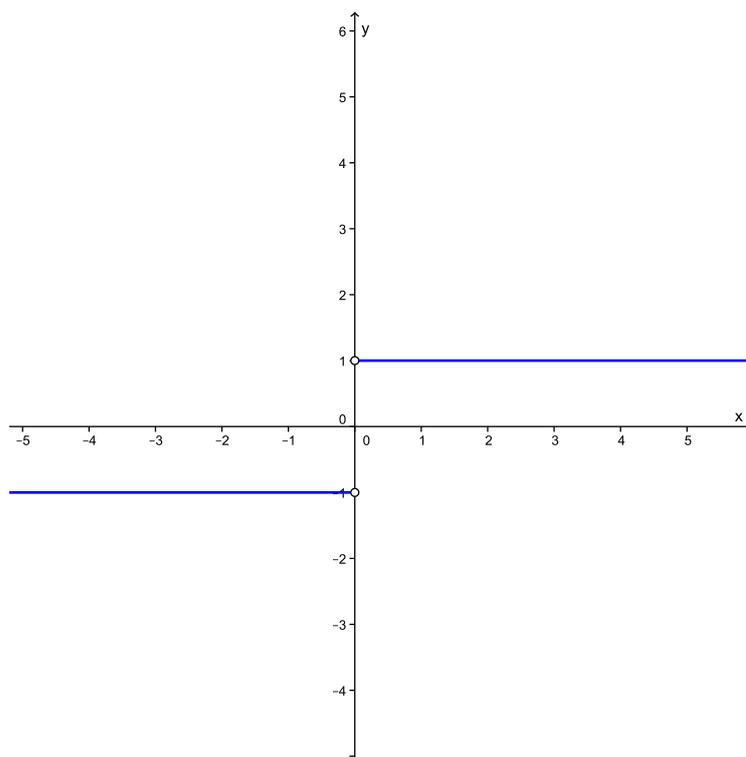


Figura 1.5: Gráfico da função $q(x) = \frac{|x|}{x}$, com $x \neq 0$

Assim, independente da forma que se utilize para a construção de gráficos de funções, seja por meio de tabelas de valores ou programas como o Geogebra, devemos estar

atentos para que os exemplos propostos estejam sempre em harmonia com as definições estudadas, levando em consideração as propriedades algébricas e geométricas da função.

1.2 Transformações no Plano

Uma transformação T no plano Π é uma função $T : \Pi \rightarrow \Pi$, isto é, uma correspondência que associa a cada ponto P do plano outro ponto $P_1 = T(P)$ do plano, chamado sua imagem por T .

Definição 1.2.1. *Uma isometria do plano Π é uma transformação $T : \Pi \rightarrow \Pi$ que preserva distâncias, ou seja, T é uma isometria quando se tem $d(T(P), T(Q)) = d(P, Q)$.*

Como essas transformações não distorcem as imagens, são também conhecidas como movimentos rígidos no plano

Citaremos algumas propriedades das isometrias cujas demonstrações podem ser encontradas em LIMA(2011,p.140):

1. Toda isometria $T : \Pi \rightarrow \Pi$ é uma bijeção, ou seja, para todo ponto P_1 em Π existe um único ponto P tal que $T(P) = P_1$;
2. A imagem de uma reta r por uma isometria T é uma reta $r_1 = T(r)$;
3. Uma isometria transforma retas paralelas em retas paralelas;
4. Toda isometria transforma um triângulo retângulo noutro triângulo retângulo;
5. Uma isometria preserva quaisquer ângulos;

As transformações isométricas do plano são: translação, reflexão e rotação, assim como todas as combinações entre elas.

A *Translação* $T_v : \Pi \rightarrow \Pi$, determinada pelo vetor v , é a transformação que leva cada ponto P do plano Π no ponto $T_v(P) = P + v$, ou seja, todos os pontos de uma figura se deslocam numa mesma direção, sentido e a uma mesma distância. Em outras palavras, como podemos ver na figura 1.6, a translação transforma uma figura em outra figura geometricamente igual.

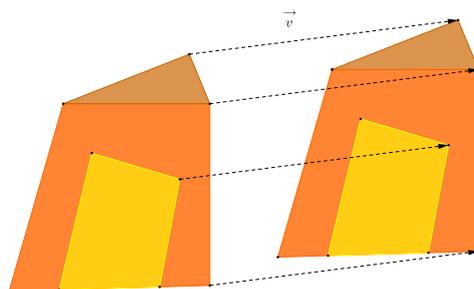


Figura 1.6: Translação

A *Reflexão* em torno da reta r (eixo de simetria) é a transformação T que faz corresponder a cada ponto P do plano o ponto $P' = T(P)$, simétrico de P em relação a r . O ponto P' chama-se simétrico do ponto P em relação à reta r quando r é mediatriz do segmento PP' . (Figura 1.7)

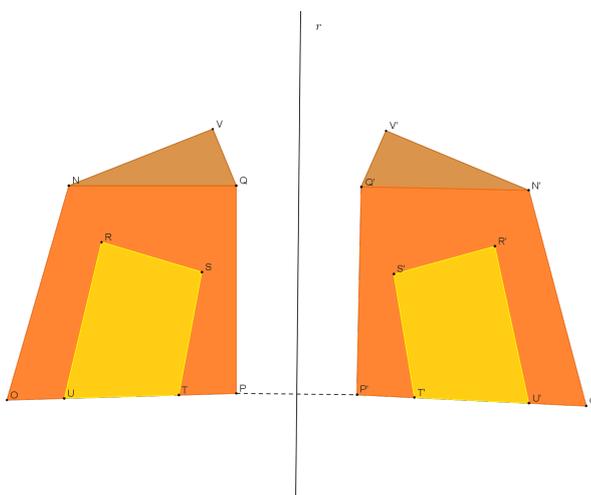


Figura 1.7: Reflexão

A *Rotação* de centro O e ângulo α transforma o ponto $P = (x, y)$ no ponto $P_1 = (x_1, y_1)$, girando P em torno de O a um ângulo α . (Figura 1.8)

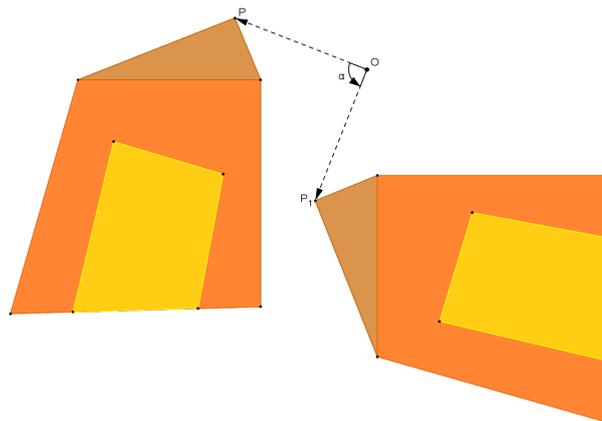


Figura 1.8: Rotação

Definição 1.2.2. *Seja r um número real positivo. Uma **Semelhança** de razão r no plano Π é uma transformação $\sigma : \Pi \rightarrow \Pi$ que multiplica por r a distância entre dois pontos P, Q quaisquer em Π , isto é, $d(\sigma(P), \sigma(Q)) = r \cdot d(P, Q)$, ou seja, as semelhanças podem mudar o tamanho da figura sem mudar sua forma.*

Exemplos simples de semelhança são as homotetias. A *homotetia* de centro O e razão r no plano Π é a transformação $H : \Pi \rightarrow \Pi$ que associa a cada ponto P em Π o ponto $P' = H(P)$ tal que $\vec{OP'} = r \cdot \vec{OP}$ para todo P :

1. Se $r > 1$, a homotetia aumenta o tamanho da figura original e pode ser chamada de *dilatação*. Na Figura 1.9 temos um exemplo de dilatação.
2. Quando $0 < r < 1$, a homotetia diminui o tamanho da figura original sendo chamada de *contração*.
3. E no caso $r = 1$, a homotetia é uma isometria.

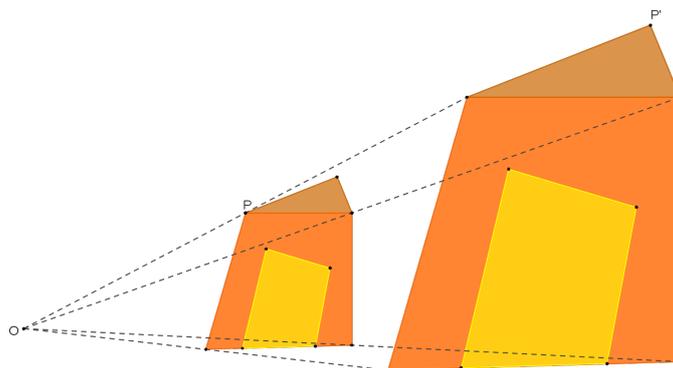


Figura 1.9: Homotetia

O entendimento das propriedades dessas transformações geométricas pode ser um importante auxílio no estudo das funções matemáticas, pois conhecendo um gráfico, que aqui chamaremos de mais “simples” e aplicando o conhecimento sobre esses movimentos do plano, poderemos obter diversos outros gráficos decorrentes desses mais “simples”.

Vejam como isso pode nos ajudar analisando um exemplo de função bem explorada no Ensino Médio, a Função Quadrática. Aqui nosso foco não será estudar as propriedades desta função, mas apenas seu gráfico a partir das transformações.

Tomaremos como mais simples a função $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $r(x) = x^2$ para analisar o efeito de cada um dos parâmetros a , b , c e d reais, em funções quadráticas do tipo

$$y = c(dx + a)^2 + b. \tag{1.3}$$

Vejam:

1. **Parâmetro a :** O gráfico de $y = f(x)$ difere do gráfico de $y = f(x + a)$ por uma *translação horizontal* de $|a|$ unidades. O deslocamento é para a direita se $a < 0$ e para a esquerda se $a > 0$.

A Figura 1.10 nos mostra esse tipo de translação fazendo a comparação entre o gráfico de r e os gráficos das funções $r_1, r_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por $r_1(x) = (x + 1)^2$ e $r_2(x) = (x - 1)^2$.

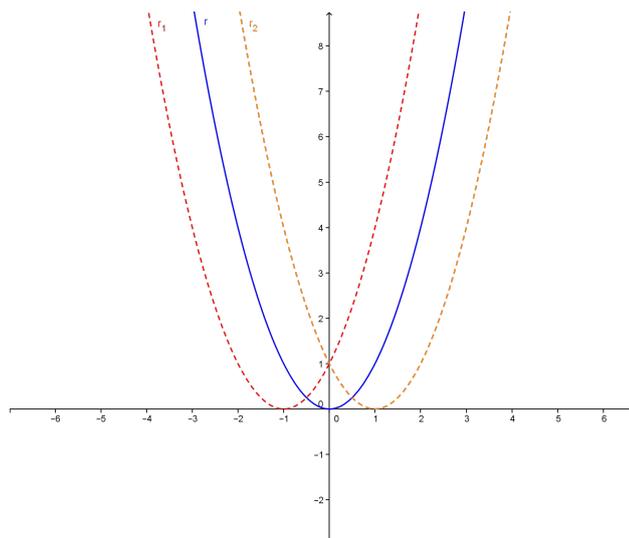


Figura 1.10: Comparação entre os gráficos de r , r_1 , e r_2

2. **Parâmetro b :** O gráfico de $y = f(x) + b$ difere do gráfico de $y = f(x)$ por uma *translação vertical* de $|b|$ unidades. O deslocamento é para cima se $b > 0$ e para baixo se $b < 0$.

A Figura 1.11 mostra a comparação entre o gráfico de r e os gráficos das funções $r_3, r_4 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por $r_3(x) = x^2 + 1$ e $r_4(x) = x^2 - 1$.

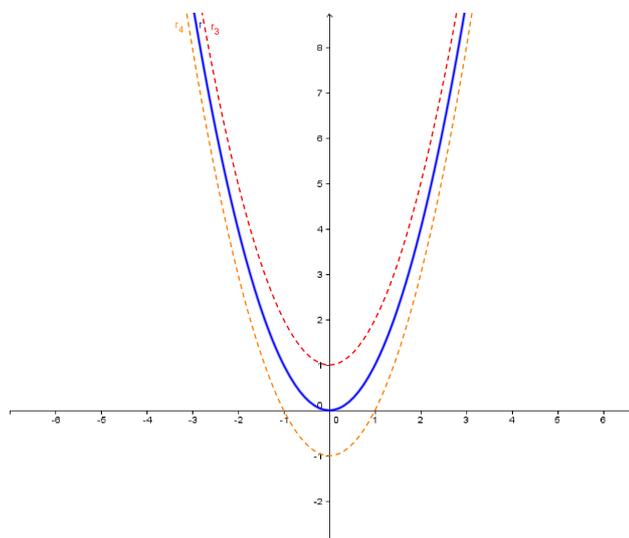


Figura 1.11: Comparação entre os gráficos de r , r_3 , e r_4

Devemos ressaltar, que as translações, por serem movimentos rígidos do plano, mesmo o gráfico sofrendo deslocamentos pra direita, pra esquerda, pra cima e pra baixo, seu aspecto original é conservado.

3. **Parâmetro c :** Neste caso, temos que o gráfico de $y = cf(x)$ para $c > 0$, difere do gráfico de $y = f(x)$ pela taxa de crescimento de y . Se $c > 1$ a taxa de variação de y fica aumentada, e se $0 < c < 1$, a taxa de variação de y fica diminuída. Assim, temos uma *dilatação ou contração vertical* do gráfico. Em outras palavras, o gráfico da função sofre um esticamento vertical, quando $c > 1$, e uma encolhimento vertical, quando $0 < c < 1$. Além disso, o gráfico de $y = f(x)$ fica refletido em relação ao eixo das abscissas, se $c < 0$, como mostra a Figura 1.12.

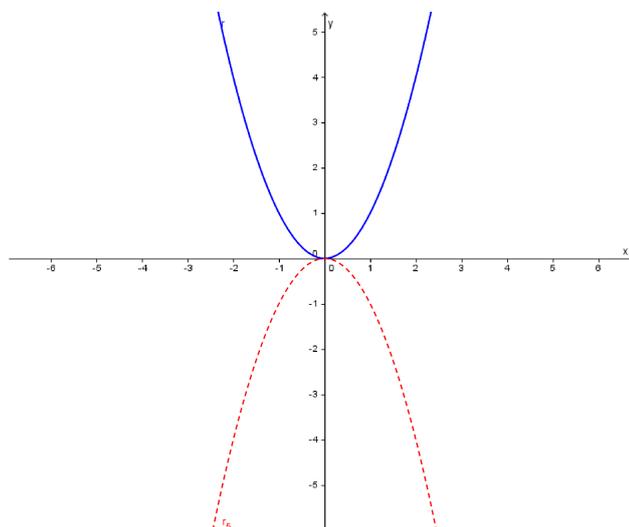


Figura 1.12: Reflexão da função r em relação ao eixo das abscissas

Na Figura 1.13 temos os gráficos das funções $r_6, r_7, r_8 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por $r_6(x) = 4x^2$, $r_7(x) = \frac{1}{4}x^2$ e $r_8(x) = -\frac{1}{4}x^2$. No caso da função r_8 , além da contração, o gráfico sofreu uma reflexão em relação ao eixo das abscissas.

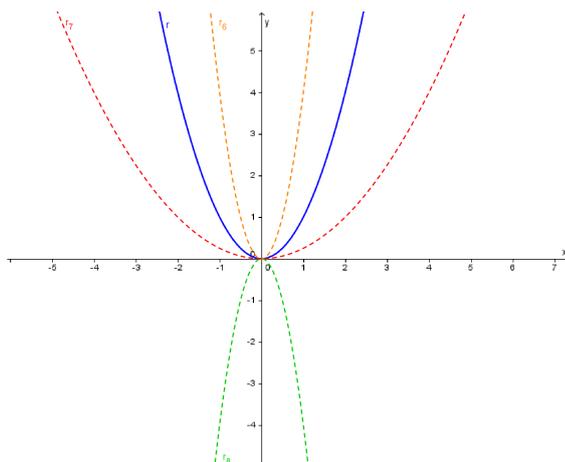


Figura 1.13: Comparação entre os gráficos de r, r_6, r_7 , e r_8

4. **Parâmetro d:** Este parâmetro faz o gráfico de $y = f(dx)$ para $d > 0$, diferir do gráfico de $y = f(x)$ pela taxa de crescimento de x . Se $d > 1$ a taxa de variação de x fica diminuída, e se $0 < d < 1$ a taxa de variação de x fica aumentada. Isso provoca uma *dilatação ou contração horizontal* do gráfico, ou seja, o gráfico da função sofre um esticamento horizontal, quando $0 < d < 1$, e um encolhimento horizontal, quando $d > 1$.

Vejam na figura 1.14 a comparação entre o gráfico da função r e das funções $r_9, r_{10} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por $r_9(x) = (4x)^2$ e $r_{10}(x) = (\frac{1}{4}x)^2$. Perceba que neste caso, para valores de d menores do que zero, não ocorre reflexão por conta do expoente par da função.

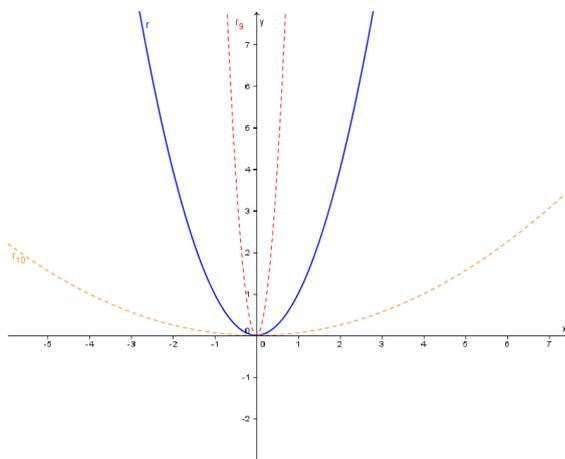


Figura 1.14: Comparação entre os gráficos de r, r_9 e r_{10}

Capítulo 2

Função Afim

Reservamos um capítulo para esta classe de funções reais, que são as mais simples, pois além de serem casos especiais de funções racionais, estão entre as mais importantes em Matemática. Tal função é estudada na 1ª série do Ensino Médio e como referências citamos LIMA(2012) e IEZZI(2004).

2.1 Função Constante

Uma função $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ chama-se **constante** quando a cada elemento $x \in \mathbb{R}$ associa sempre o mesmo elemento $c \in \mathbb{R}$, ou seja,

$$F(x) = c. \tag{2.1}$$

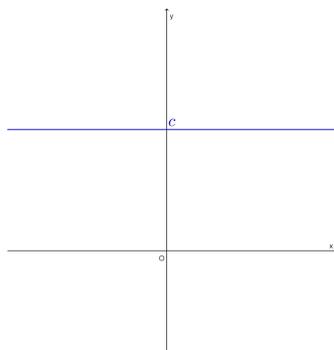


Figura 2.1: Gráfico da função constante $F(x) = 2$

O gráfico da função constante é uma reta paralela ao eixo das abscissas passando pelo ponto $(0, c)$. De fato, para todo valor atribuído a variável x o valor de y será sempre

o mesmo, ou seja, teremos infinitos pontos da forma (x, c) .

Assim, a taxa de variação da função constante é sempre nula, ou seja, y não varia, pois dados dois pontos $P_1, P_2 \in \text{graf}(F)$, temos $\frac{F(x_2)-F(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{c-c}{x_2-x_1} = 0$.

2.2 Função Identidade

Uma função $\text{id} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ chama-se **identidade** quando a cada elemento $x \in \mathbb{R}$ associa o próprio x , ou seja,

$$\text{id}(x) = x \tag{2.2}$$

Daí, temos que , os pares ordenados serão do tipo (x, x) . Com isso, o gráfico da função identidade, dado por $\text{graf}(\text{id}) = \{(x, x)/x \in \mathbb{R}\}$, é uma reta que contém as bissetrizes do 1º e 3º quadrantes.(Figura 2.2)

Com efeito, sabendo que $y = x$, percebemos que o gráfico dessa função passa pelos pontos $(0, 0)$ e $(1, 1)$. Sejam $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$, $C = (1, 1)$, $D = (0, 1)$ e θ o ângulo que a reta $y = x$ forma com o eixo das abscissas, conforme o gráfico da figura 2.2:

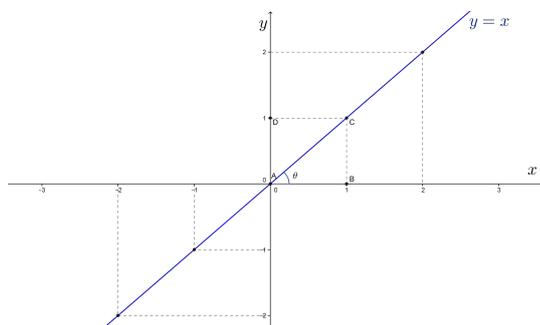


Figura 2.2: Gráfico da função identidade

Desta forma, $\text{tg}\theta = \frac{BC}{AB} = 1 \Rightarrow \theta = 45^\circ$. Logo a reta $y = x$ contém as bissetrizes do 1º e do 3º quadrantes, ou seja, dos quadrantes ímpares.

A taxa de variação da função identidade será sempre igual a 1, pois dados $P_1, P_2 \in \text{graf}(\text{id})$, temos que $\frac{\text{id}(x_2)-\text{id}(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{x_2-x_1}{x_2-x_1} = 1$.

E o que acontece com o gráfico da função identidade se somarmos à variável x um número real b ? Em outras palavras, qual o significado geométrico da constante b real nas funções do tipo $f_b(x) = x + b$?

Vejamos o exemplo da função $f_1(x) = x + 1$, analisando a tabela de valores abaixo:

Tabela2.1.

x	$y = x + 1$	(x, y)
-2	$y = -2 + 1 = -1$	$(-2, -1)$
-1	$y = -1 + 1 = 0$	$(-1, 0)$
0	$y = 0 + 1 = 1$	$(0, 1)$
1	$y = 1 + 1 = 2$	$(1, 2)$
2	$y = 2 + 1 = 3$	$(2, 3)$

Note que os valores de y da função f_1 aumentaram $|1|$ unidade em relação aos valores de y da função (2.2). Com isso, o gráfico de (2.2) transladado $|1|$ unidade para cima, coincide com o gráfico da função, $f_1 = x + 1$.

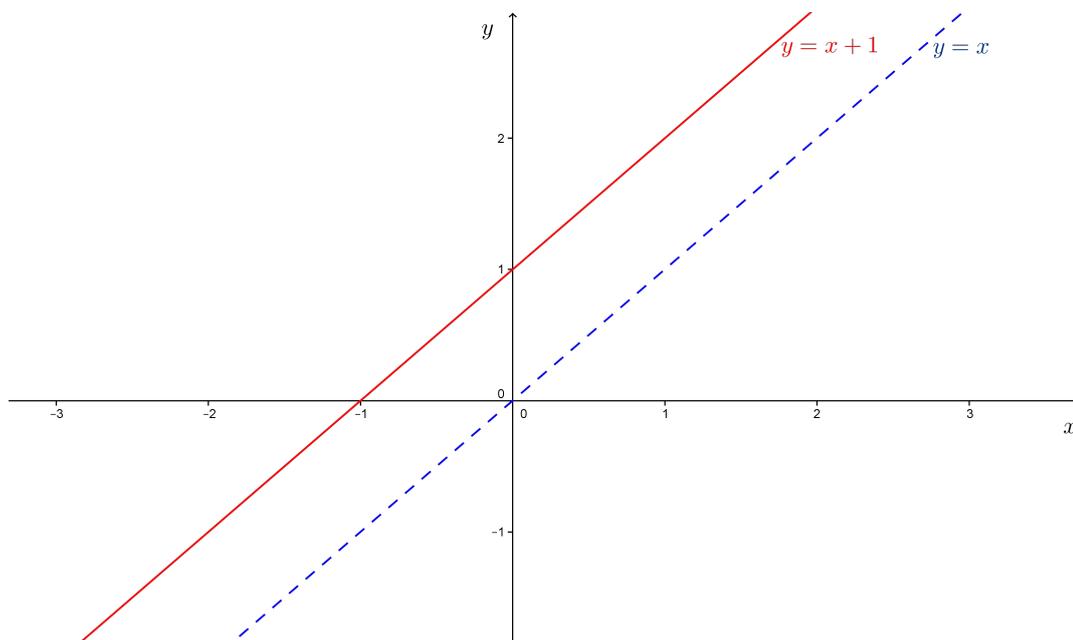


Figura 2.3: Gráfico da função $f_1(x) = x + 1$

Analisando mais alguns casos (Figura 2.4), percebemos que o gráfico das funções do tipo $f_b(x) = x + b$ são retas paralelas à reta $y = x$, que é gráfico da função id , pois ocorreu uma translação desta reta em $|b|$ unidades para cima ou para baixo.

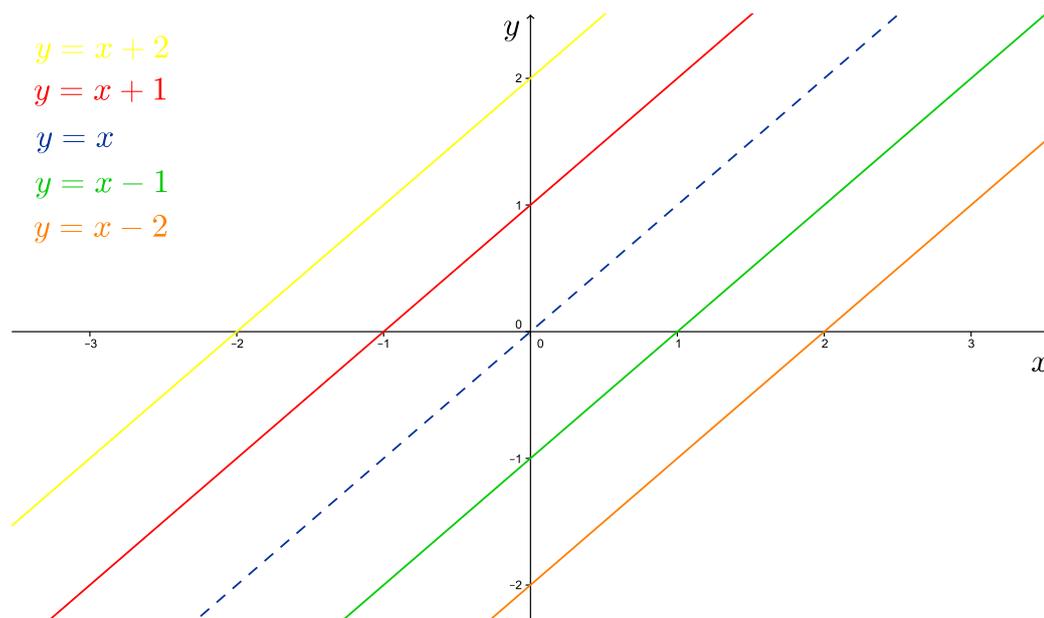


Figura 2.4: Gráfico das funções do tipo $f_b(x) = x + b$, para $b = -2, -1, 0, 1, 2$

E o que acontece ao gráfico da função identidade se multiplicarmos a variável x , um número real a , ou seja, como seria o gráfico de uma função do tipo $f(x) = ax$, com $a \neq 0$?

2.3 Função Linear

Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ chama-se **linear** quando a cada elemento $x \in \mathbb{R}$ associa o elemento $ax \in \mathbb{R}$ em que $a \neq 0$ é um número real dado, ou seja,

$$f(x) = ax \quad (a \neq 0). \tag{2.3}$$

Como é o gráfico desta função? E qual o significado geométrico da constante a ?

Note que o gráfico passa pela origem, pois, $f(0) = a \cdot 0 = 0$. Então, podemos dizer que o gráfico de uma função linear é uma reta que passa pela origem. E assim como os parâmetros c e d da eq.(1.3) vistos na seção 1.2, o coeficiente a também determina uma contração ou uma dilatação nos valores de y . Como se trata de uma reta, o efeito geométrico disso é uma rotação da reta.

Analisemos alguns exemplos para ver o que ocorre com o gráfico da função linear em comparação com o gráfico da função identidade a medida que alteramos o valor de a .

Para isso, separamos o estudo em dois casos:

1º caso: quando $a > 0$

Podemos perceber na Figura 2.5, que quanto mais o valor de a aumenta mais o gráfico se aproxima do eixo das ordenadas. Isso acontece porque para uma mesma abscissa, o valor de y está se tornando cada vez maior. Além disso, quando o valor de x aumenta o valor de y também aumenta. Isso caracteriza uma função crescente.

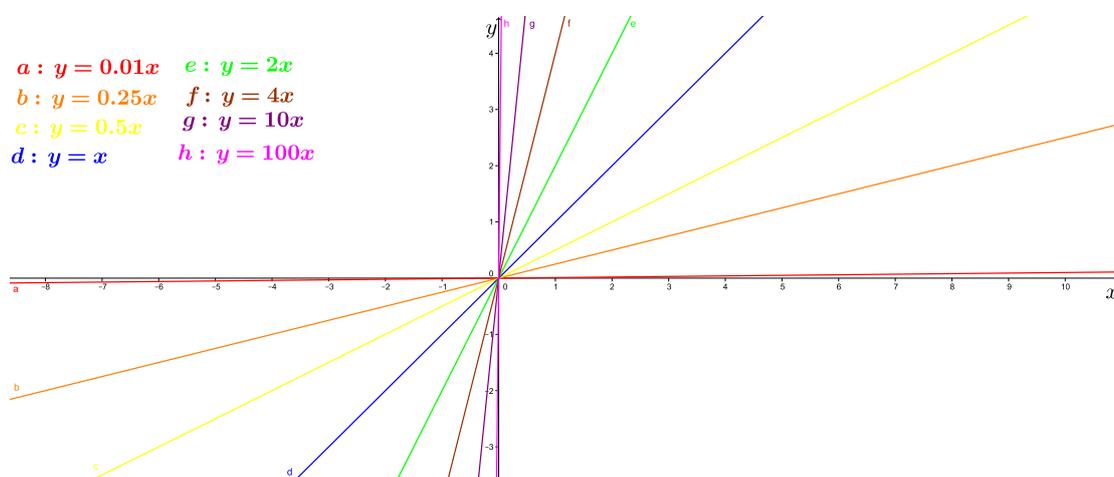


Figura 2.5: Gráfico de funções lineares para $a > 0$

2º caso: quando $a < 0$

Na Figura 2.6, temos a comparação do gráfico de $y = x$ com o gráfico de $y = -x$. Note que as ordenadas de mesma abscissa são opostas. Geometricamente isso nos diz que são simétricas em relação ao eixo das abscissas. Assim, nos casos em que $a < 0$ além da dilatação ou contração dos valores de y , temos uma reflexão do gráfico de $y = x$ em relação ao eixo das abscissas, como podemos verificar na Figura 2.7.

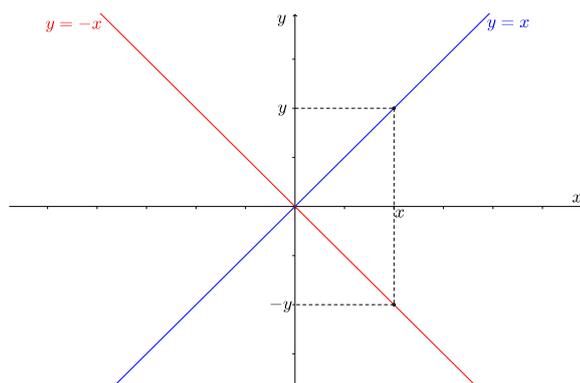


Figura 2.6: Gráfico das funções $y = x$ e $y = -x$

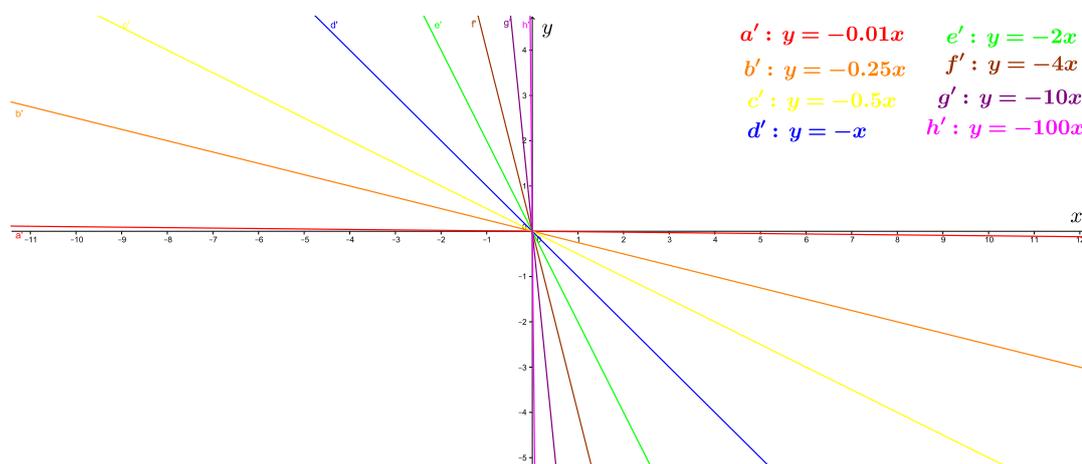


Figura 2.7: Gráfico de funções lineares para $a < 0$

Desta maneira, quanto mais o valor de a aumenta mais distante do eixo y fica o gráfico de $y = x$ e quando o valor de x aumenta, y diminui, o que caracteriza um função decrescente.

Note que nos dois casos o valor de a influencia na inclinação da reta, pois a medida que aumentamos o valor de a , o ângulo (no sentido anti-horário) formado entre o gráfico e o eixo das abscissas também aumenta. Assim, podemos relacionar o valor do parâmetro a a esse ângulo, que denominaremos θ . De fato, atribuindo a x os valores x_1 e x_2 obtemos, respectivamente, $f(x_1) = ax_1$ e $f(x_2) = ax_2$. Portanto,

$$f(x_2) - f(x_1) = ax_2 - ax_1 = a(x_2 - x_1),$$

logo

$$\mathbf{a} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \quad (2.4)$$

Note que (2.4), pode ser interpretada como a tangente do ângulo que a reta $y = \mathbf{a}x$ faz com o eixo das abscissas. De fato, da Figura 2.8 temos que,

$$\mathbf{a} = \operatorname{tg}\theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},$$

onde \mathbf{a} é também conhecido como **coeficiente angular** da reta. Além disso, coincide com a expressão da taxa de variação em (1.1).

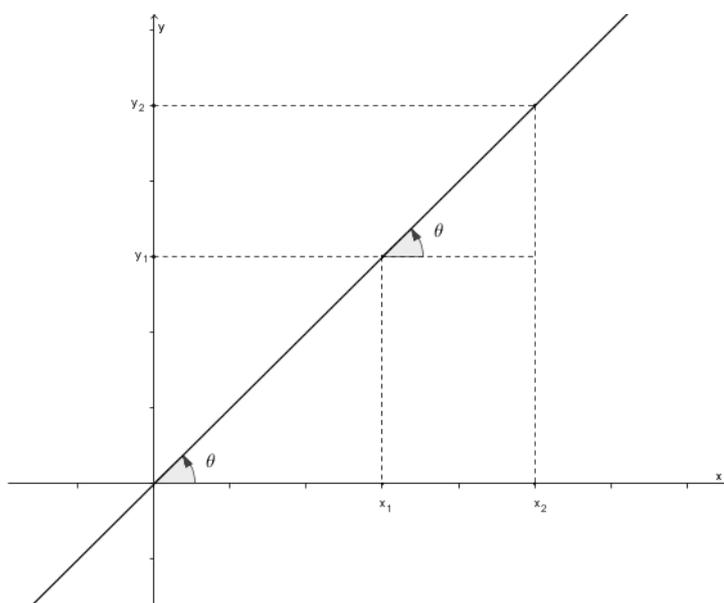


Figura 2.8: $\mathbf{a} = \operatorname{tg}\theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Devemos ter uma atenção especial em relação ao coeficiente \mathbf{a} , pois como afirma RAMOS(2007) em um de seus artigos:

“Na representação gráfica de uma função afim, na qual os eixos são construídos numa mesma escala e as grandezas relacionadas são de mesma dimensão, podemos afirmar que as taxas de variações associadas aos gráficos são, de fato, os coeficientes angulares e identificá-las como a tangente do ângulo, sem correr o risco de estar cometendo equívocos.

No entanto, quando se representa uma função afim que descreve um experimento, alguns cuidados devem ser tomados:

- Numa função em que as grandezas associadas não possuem a mesma dimensão, as taxas de variações associadas ao gráfico não podem ser chamadas de coeficiente angular, já que este é um número puro e a taxa de variação é uma grandeza que possui dimensão.
- Numa função em que o gráfico é construído com escalas diferentes, sendo ou não as grandezas de mesma dimensão, as taxas de variação não podem ser a tangente do ângulo, uma vez que o ângulo representado neste gráfico não representará o coeficiente angular da reta.”

Em resumo: tem-se taxa de variação de uma função e coeficiente angular de uma reta.

O crescimento e o decrescimento da função também estão relacionados ao coeficiente α , onde para α positivo a função é crescente e para α negativo a função é decrescente. De fato:

1. Uma função é **crescente** quando $\forall x_1, x_2, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, ou seja,

$$x_2 - x_1 > 0 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) > 0.$$

Daí,

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0.$$

Portanto, $\alpha > 0$.

2. Uma função é **decrescente** quando $\forall x_1, x_2, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$, ou seja,

$$x_2 - x_1 > 0 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) < 0.$$

Daí,

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0.$$

Portanto, $\alpha < 0$.

2.4 Função Afim

Uma função chama-se *afim* quando existem números α e b reais, com $\alpha \neq 0$, tal que para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \alpha x + b. \tag{2.5}$$

Note que:

1. Para $a = 0$, f é a função constante;
2. Para $a = 1$ e $b = 0$, f é a função identidade;
3. Para $b = 0$, f é a função linear;

É importante ressaltar que a análise do coeficiente a feita na seção anterior vale para toda função afim.

Teorema 2.4.1. *O gráfico de uma função afim é uma reta não-vertical. Reciprocamente, toda reta não-vertical é o gráfico de uma função afim.*

Demonstração. Para provar que o gráfico de uma função afim $f(x) = ax + b$ é uma reta, basta mostrar que três pontos quaisquer $P_1 = (x_1, ax_1 + b)$, $P_2 = (x_2, ax_2 + b)$ e $P_3 = (x_3, ax_3 + b)$ desse gráfico são colineares como mostra a Figura 2.9. Para que isto ocorra, é necessário e suficiente que o maior dos três números $d(P_1, P_2)$, $d(P_2, P_3)$ e $d(P_1, P_3)$ seja igual à soma dos outros dois.

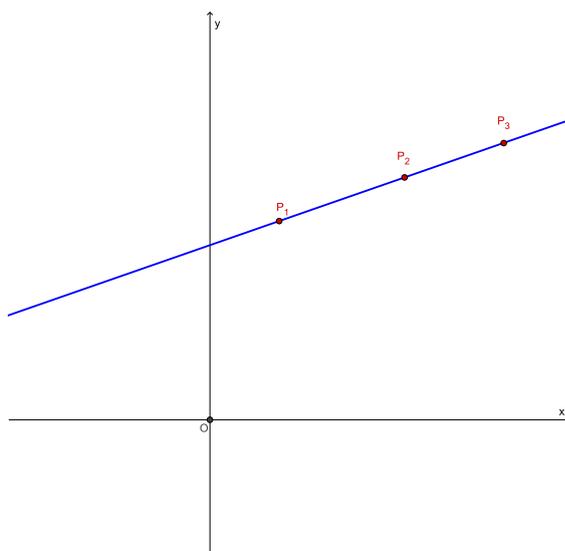


Figura 2.9: Pontos P_1 , P_2 e P_3 colineares

Ora, podemos sempre supor que as abscissas x_1 , x_2 e x_3 foram numeradas de modo que $x_1 < x_2 < x_3$. A fórmula da distância entre dois pontos nos dá:

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + a^2(x_2 - x_1)^2} = (x_2 - x_1)\sqrt{1 + a^2},$$

$$d(P_2, P_3) = (x_3 - x_2)\sqrt{1 + a^2}$$

e

$$d(P_1, P_3) = (x_3 - x_1)\sqrt{1 + a^2}.$$

Daí, se segue imediatamente que

$$d(P_1, P_3) = d(P_1, P_2) + d(P_2, P_3).$$

□

A demonstração da recíproca pode ser encontrada em LIMA(2012, p.94).

Como esboçar o gráfico de uma função afim?

Vimos que o gráfico de tal função é uma reta e como dois pontos são suficientes para determinar uma reta, podemos utilizar a tabela de valores para obtê-los.

Exemplo 2.4.1. *Esboce o gráfico da função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2x - 4$*

A partir da tabela 2.2, obtemos o gráfico da Figura 2.10.

Tabela2.2.

x	$y = 2x - 4$	(x, y)
1	$y = 2 \cdot 1 - 4 = -2$	$(1, -2)$
3	$y = 2 \cdot 3 - 4 = 2$	$(3, 2)$

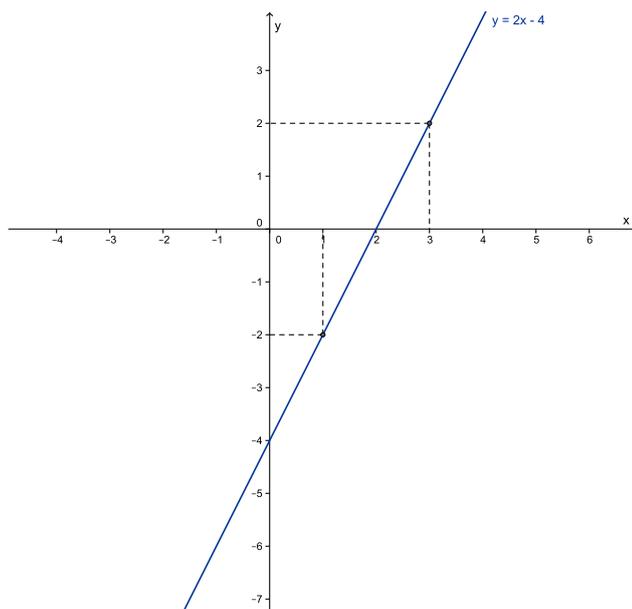


Figura 2.10: Gráfico da função $f(x) = 2x - 4$

Outra forma de se esboçar o gráfico da função afim é obtendo informações a partir de seus coeficientes e de sua raiz. Vejamos:

1. O coeficiente a da função $f(x) = ax + b$, é denominado *coeficiente angular* ou declive da reta representada no plano cartesiano. Além disso, se $a > 0$ a função é crescente e se $a < 0$ a função é decrescente.
2. O coeficiente b da função $f(x) = ax + b$, é denominado *coeficiente linear*. Note que b representa a ordenada do ponto onde o gráfico corta o eixo y . De fato, tomando, $x = 0$, temos $y = b$.
3. *Raiz* de uma função é todo número α cuja imagem é nula, ou seja, $f(\alpha) = 0$. Assim, sendo α a raiz da função $f(x) = ax + b$, temos $f(\alpha) = a\alpha + b = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{-b}{a}$. Com isso, o gráfico da função afim corta o eixo x no ponto $(\frac{-b}{a}, 0)$.

Exemplo 2.4.2. *Esboce o gráfico da função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = -3x + 6$.*

Solução:

Coeficiente angular: $a = -3$. Como $a < 0$, então a função é decrescente.

Coeficiente linear: $b = 6$. Logo, o gráfico corta o eixo das ordenadas no ponto $(0, 6)$.

Raiz: $\alpha = 2$. Logo, o gráfico da função corta o eixo das abscissas no ponto $(2, 0)$

Como o gráfico da função afim é uma reta, basta traçar o gráfico passando por estes dois pontos, como mostra a Figura 2.11.

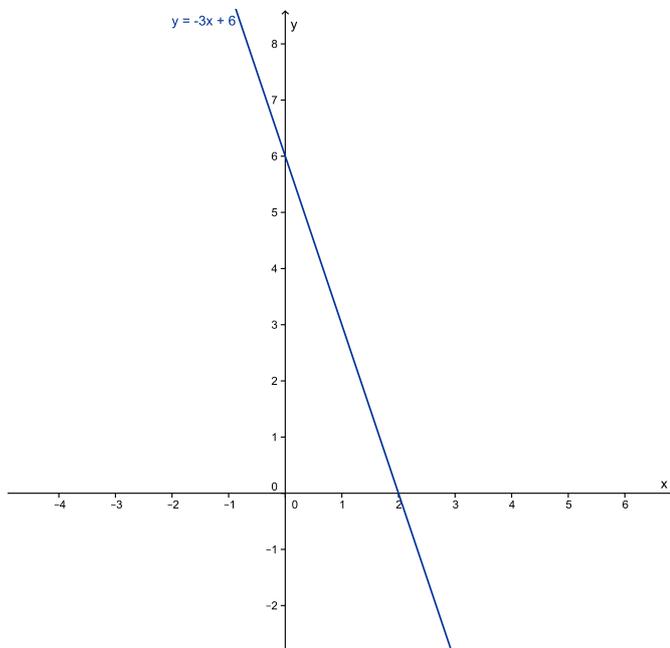


Figura 2.11: Gráfico da função $f(x) = -3x + 6$

Mas, de acordo com o que já foi visto nas seções anteriores, o que acontecerá com o gráfico da função (2.5) se o compararmos ao gráfico da função identidade?

De modo geral, conhecido o gráfico de $y = x$, podemos desenhar $y = ax$ e, em seguida, $y = ax + b$. Geometricamente, isso significa que primeiro ocorre uma dilatação (ou contração) no gráfico de $y = x$, pois em cada ponto a ordenada de $y = ax$ é igual àquela do ponto de mesma abscissa em $y = x$, multiplicada pelo coeficiente a , por consequência, ocorre uma mudança de inclinação. Em seguida, o gráfico de $y = ax$ sofre uma translação vertical de b unidades, pois, para cada abscissa, a ordenada do ponto no gráfico de $y = ax + b$ ficou acrescida de b , quando comparada à ordenada do ponto de mesma abscissa no gráfico de $y = ax$. Desta forma, temos em sequência

$$y = x \longrightarrow y = ax \longrightarrow y = ax + b, \quad (2.6)$$

ou seja, uma rotação e uma translação.

Mudando a sequência descrita acima, o resultado final será o mesmo? Geometricamente, podemos até responder que sim, pois é só transladar e depois rotacionar, mas algebricamente a resposta não é a mesma. Ora, se considerarmos as funções $h(x) = ax$ e $g(x) = x + b$ temos que:

$$h \circ g(x) = h(g(x)) = ax + ab \text{ e } g \circ h(x) = g(h(x)) = ax + b.$$

Assim,

$$h \circ g \neq g \circ h.$$

Logo, uma função afim da forma $f(x) = ax + b$ pode ser escrita como a composta de g com h . Portanto, primeiro ocorre a rotação e depois a translação do gráfico.

Exemplo 2.4.3. *Esboce o gráfico da função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2x + 5$.*

Seguiremos a sequência sugerida em (2.6). Logo, $y = x \rightarrow y = 2x \rightarrow y = 2x + 5$.

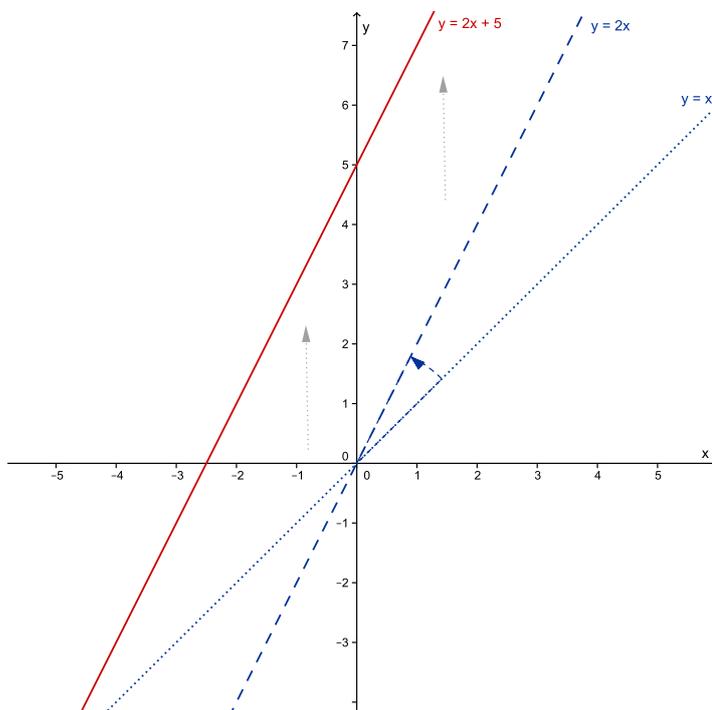


Figura 2.12: Gráfico da função $f(x) = 2x + 5$

2.5 Aplicações

Exemplo 2.5.1. *Alguns bares e restaurantes, para atrair mais clientes, oferecem música ao vivo. O ruim disso, para os clientes (é claro!), é que muitos desses restaurantes cobram uma taxa de couvert artístico para os músicos que em média custa 10 reais por mesa. Além dos “famosos” 10% para os garçons.*

Essa situação recai em uma função afim. De fato, considerando x o valor gasto com comida e bebida, e observando que acrescentar 10% a um valor equivale a multiplicá-lo por 1,1 e ainda, acrescentando a taxa fixa de 10 reais, temos que o valor y a ser pago pelo cliente é dado por $y = 1,1x + 10$. O gráfico desta função é uma reta que corta o eixo das ordenadas no ponto $(0, 10)$ e que tem inclinação igual a 1,1.

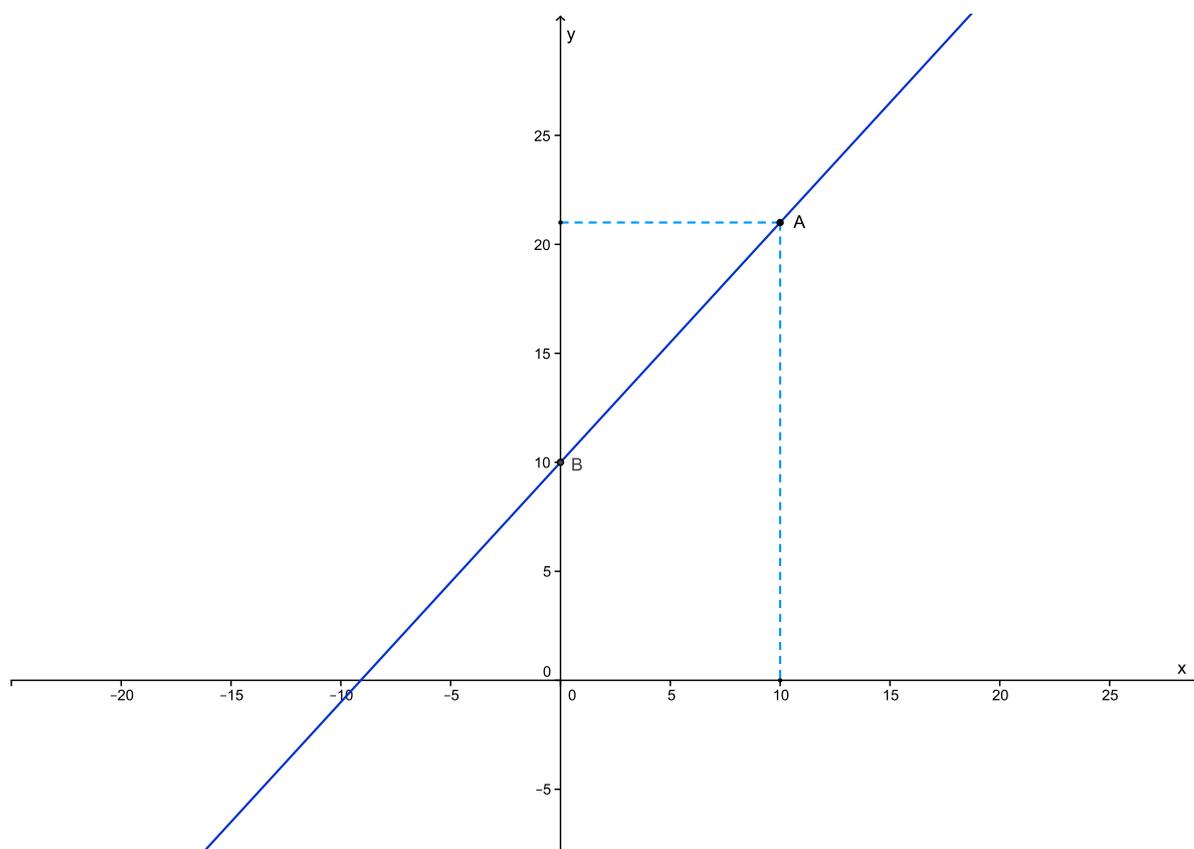


Figura 2.13:

O gráfico apresentado na Figura 2.13 representa o esboço da função $y = 1,1x + 10$, mas não condiz com a situação apresentada no problema, pois como a variável x representa os gastos com comida e bebida (em R\$), não podemos considerar os valores de x menores

que zero. Assim, o menor valor de y (valor total da conta em R\$) é 10. Na verdade, isso nos diz que o simples fato de sentar-se à mesa, você já paga R\$10,00.

Devemos sempre nos questionar: Para que valores de x , no contexto do problema, $f(x)$ tem interpretação prática? Isso nos motiva a um ter um cuidado maior na representação geométrica de situações do cotidiano.

Com isso, o gráfico apresentado na Figura 2.14 melhor esboça a situação apresentada no problema.

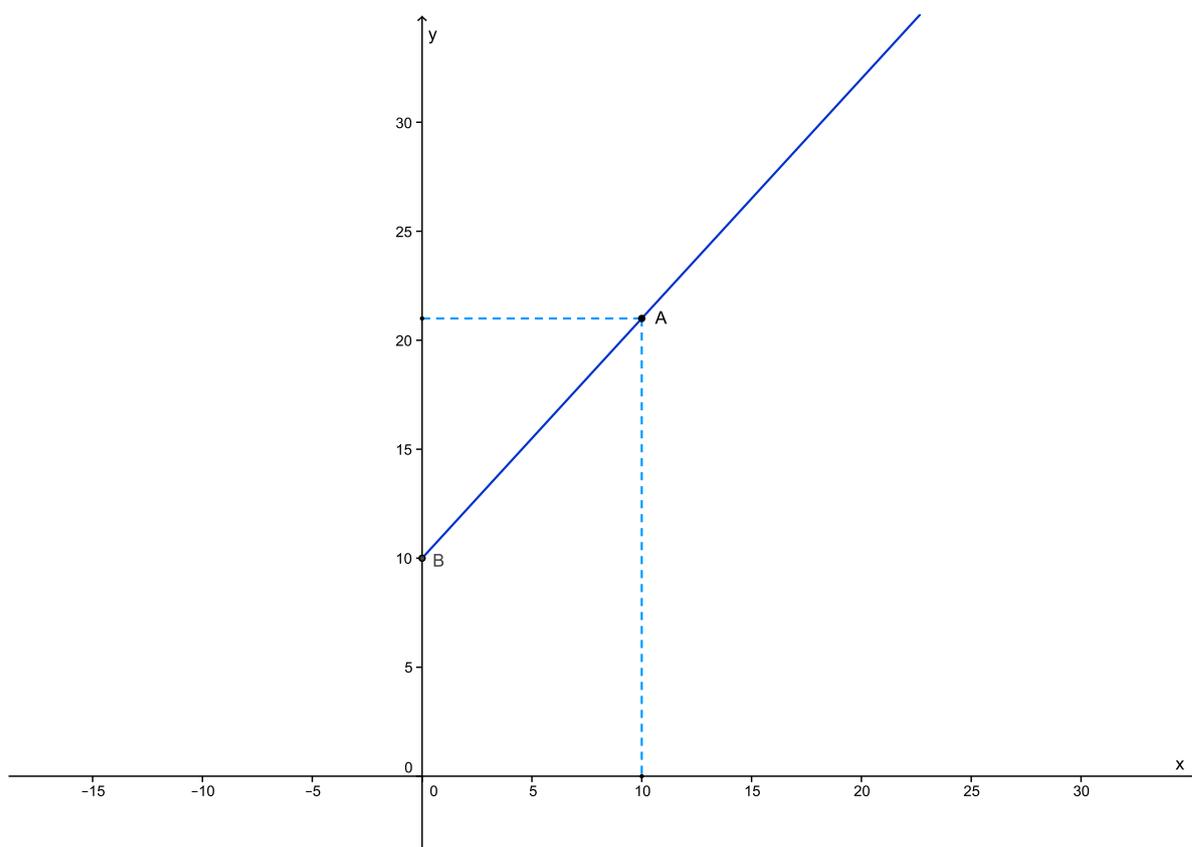


Figura 2.14:

Exemplo 2.5.2 (Exame de Acesso PROFMAT 2011 - Questão 13). *Na loja A, um aparelho custa 3800 reais mais uma taxa de manutenção mensal de 20 reais. Na loja B, o mesmo aparelho custa 2500 reais, porém a taxa de manutenção é de 50 reais por mês. A partir de quantos meses de uso a compra na loja A se torna mais vantajosa que a da loja B?*

a. 30

b. 72

c. 39

d. 63

e. 44

Considere x a quantidade de meses de uso do produto e y o valor a ser pago pelo produto. Assim, a expressão que representa a proposta da loja A é dada pela função afim $a(x) = 20x + 3800$ e a que representa a proposta da loja B, por $b(x) = 50x + 2500$.

Queremos que a seguinte relação seja satisfeita: $20x + 3800 < 50x + 2500$. Logo, $30x > 1300$. Portanto, $x > 43,3$, ou seja, a partir de 44 meses de uso a compra na loja A se torna mais vantajosa que a da loja B.

Podemos, ainda, visualizar essa situação comparando os gráficos das duas funções. Note que a função a assume valores menores que a função b , para $x > 43,3$, aproximadamente.

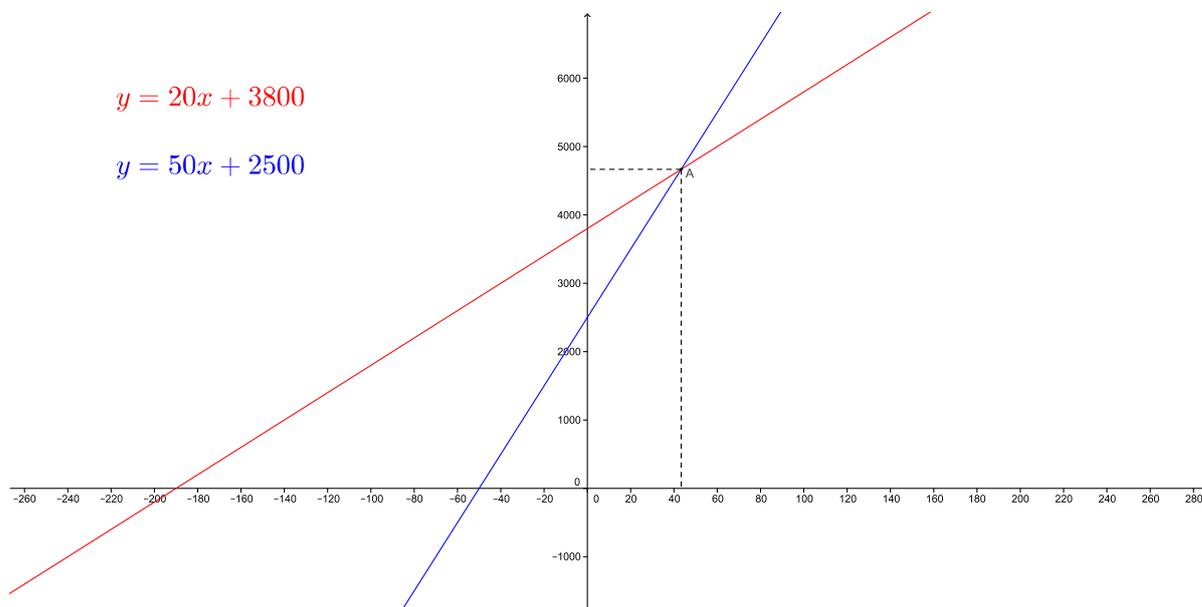
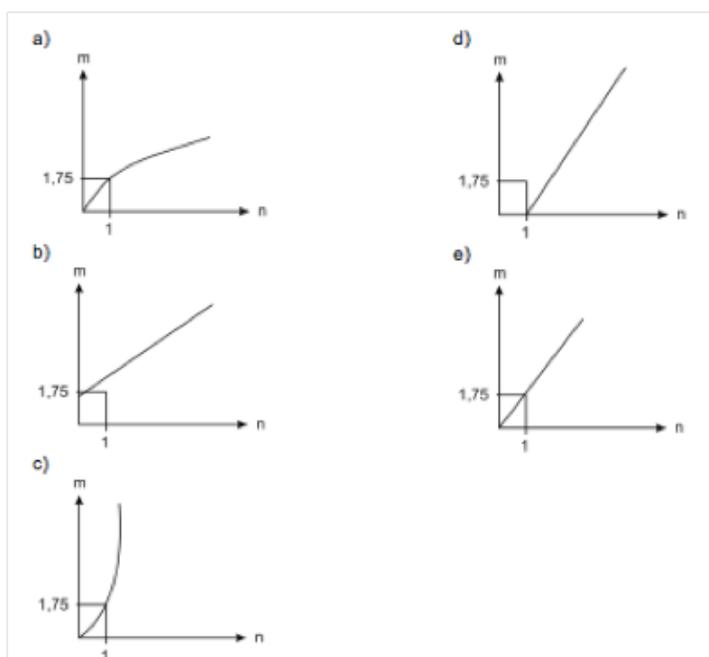


Figura 2.15: Exame de acesso

Exemplo 2.5.3 (ENEM 2011 - Questão 152 - Prova Azul). *As frutas que antes se compravam por dúzias, hoje em dia, podem ser compradas por quilogramas, existindo também a variação dos preços de acordo com a época de produção. Considere que, independente da época ou variação de preço, certa fruta custa R\$ 1,75 o quilograma. Dos gráficos a seguir, o que representa o preço m pago em reais pela compra de n quilogramas desse produto é:*



A expressão que represente a relação entre m e n é dada pela função linear $m = 1,75n$. Vimos na seção 2.3, que o gráfico da função linear é uma reta que passa pela origem. Assim, das 5 alternativas a única que apresenta uma reta que passa pela origem é a letra E.

Capítulo 3

Funções Racionais em \mathbb{R}

Em grande parte dos livros didáticos de Matemática do Ensino Médio, não se tem um capítulo ou um tópico reservado às Funções Racionais. O aluno só tem contato com tais funções quando estuda gráficos de funções reais de um modo geral, onde elas aparecem nos exemplos, ou quando estuda o domínio, o contradomínio e a imagem de funções reais, onde também aparecem como exemplos. Esses conteúdos são estudados na 1ª série do Ensino médio, ressaltando que o nome *Funções Racionais* não é citado em nenhum destes exemplos. Podemos, ainda, associar tais funções com o quociente de duas funções polinomiais, tópico apresentado na 3ª série do Ensino Médio, quando estudamos Funções Polinomiais, e ainda, no 7º ano quando estudamos Polinômios.

Num outro momento chegamos até a estudar o sinal de algumas funções racionais (implicitamente) quando vemos as inequações, mais precisamente as inequações-quociente. Tópico visto, inicialmente, dentro do estudo das Funções Afins e posteriormente no estudo das Funções Quadráticas, também na 1ª série do Ensino médio.

Citaremos o exemplo 3.0.4 como uma motivação para justificar a relevância do estudo das funções racionais no Ensino Médio e sua relação com conteúdos já conhecidos pelos alunos.

Exemplo 3.0.4. *Vamos resolver a inequação quociente $\frac{2x + 4}{x - 3} > 0$.*

Resolver uma inequação-quociente consiste em encontrar os valores de x que satisfazem a condição estabelecida pela inequação, ou seja, queremos encontrar os valores de x tais que tornem o quociente positivo. Para isso utilizamos o estudo do sinal de uma função. Então, considere $f(x) = 2x + 4$ e $g(x) = x - 3$ e estude o sinal de cada uma das

funções.

- Estudo do sinal de $f(x) = 2x + 4$

f é um função afim, crescente, pois $a = 2 > 0$, e tem raiz igual a -2 , ou seja, a função é positiva quando $x > -2$, negativa quando $x < -2$ e nula quando $x = -2$.

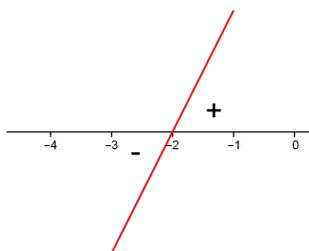


Figura 3.1: Estudo do sinal da função $f(x) = 2x - 4$

- Estudo do sinal de $g(x) = x - 3$

g é uma função afim crescente, pois $a = 1 > 0$, e tem raiz igual a 3 , ou seja, a função é positiva quando $x > 3$ e negativa quando $x < 3$. (obs.: só consideramos os valores de x tal que $g(x) \neq 0$).

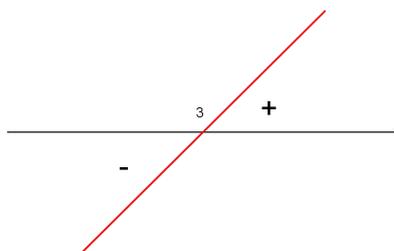


Figura 3.2: Estudo do sinal da função $g(x) = x - 3$

Na Figura 3.3 temos a análise dos sinais nos subintervalos formados pelas raízes de cada função. Logo, a solução da inequação é dada pelos valores de x , tais que, $x < -2$ e $x > 3$.

f	-	-2	+	3	+
g	-	-2	-	3	+
f/g	+	-2	-	3	+

Figura 3.3: Estudo do sinal do quociente $\frac{f}{g}$

Considerando a função racional $r(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, ou seja, $r(x) = \frac{2x + 4}{x - 3}$, o que há de semelhante com a inequação-quociente vista no exemplo 3.0.4?

O procedimento que se usa para estudar o sinal da função racional é o mesmo utilizado no estudo do sinal da inequação-quociente. A diferença é que na função analisamos todos os casos e na inequação só nos interessa o que foi determinado pela desigualdade.

Vejam os:

1. a função r é positiva em $\{x \in \mathbb{R}; x < -2 \text{ ou } x > 3\}$
2. a função r é negativa em $\{x \in \mathbb{R}; -2 < x < 3\}$
3. a função r é nula em $x = -2$

Mas geometricamente no que consiste essa solução? O que há por trás destas análises? Em relação às funções racionais, é possível esboçar seu gráfico utilizando apenas os conteúdos do Ensino Médio, sem utilizar conhecimentos de Cálculo (limite, derivada...)? Como determinar os intervalos de crescimento e decrescimento? E seu comportamento assintótico?

Estudaremos as Funções Racionais cujos numerador e denominador são funções afins e mostraremos a influência e a importância dos parâmetros na construção dos seus gráficos levando em consideração os conhecimentos de um aluno do Ensino Médio. Mas antes devemos ter em mente algumas definições que nos serão úteis.

Definição 3.0.1. Uma função $R : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D = \{x \in \mathbb{R}; Q(x) \neq 0\}$, é chamada Função Racional se, e somente se, existirem duas funções polinomiais P e Q tais que:

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad \forall x \in D \tag{3.1}$$

O domínio de $R(x)$ é o conjunto de todos os números reais para os quais $Q(x) \neq 0$. Vejamos alguns exemplos de funções racionais:

$$f(x) = \frac{1}{x}; \quad g(x) = \frac{x-1}{3x+4}; \quad h(x) = \frac{x^2-3}{x^3+x^2-4}; \quad p(x) = x^4 + 3x^2 - 1.$$

Podemos afirmar, que toda função polinomial é uma função racional, basta considerar $Q(x) = 1$. No entanto, ao contrário dos polinômios, cujos gráficos são curvas contínuas, o gráfico da função racional pode apresentar descontinuidades (interrupções) nos pontos onde o denominador é igual a zero, isto é, nas raízes de $Q(x)$.

Neste caso, dizemos que a função não está definida para estes valores de x , o que significa que nestes pontos, podemos imaginar retas verticais, as quais o gráfico da função aproxima-se, mas nunca as toca, as chamadas *assíntotas verticais*.

Para determinar as assíntotas verticais de uma função $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, encontramos os valores $x = k$ nos quais $Q(x) = 0$ e analisamos o comportamento de R quando x se aproxima de k (pela esquerda ou pela direita). Assim, uma assíntota vertical mostra o comportamento de uma função $R(x)$ nas vizinhanças de um ponto $x = k$. É importante lembrar que os valores em que a função não é definida serão apenas candidatos a assíntotas, mas não serão necessariamente assíntotas verticais.

Além disso, a função racional possui *assíntota horizontal* $y = L$ se, quando $|x|$ cresce sem limites, $R(x)$ se aproxima de L . Indicamos tal fato escrevendo $R(x) \rightarrow L$ quando $x \rightarrow \infty$ ou $x \rightarrow -\infty$.

$R(x)$ pode possuir inúmeras assíntotas verticais, dependendo de seus pontos críticos, e no máximo uma assíntota horizontal, que pode ser encontrada comparando-se o grau de $P(x)$ com o grau de $Q(x)$. Assim:

1. Se o grau de $P(x)$ é menor que o grau de $Q(x)$, então $R(x)$ tem para assíntota horizontal a reta $y = 0$.
2. Se o grau de $P(x)$ é igual ao de $Q(x)$, então $R(x)$ tem para assíntota horizontal a reta $y = \frac{a_n}{b_n}$, onde a_n é o coeficiente líder (coeficiente do termo com o grau mais alto) de $P(x)$ e b_n é o coeficiente líder de $Q(x)$.
3. Se o grau de $P(x)$ é maior que o de $Q(x)$, então $R(x)$ não tem assíntota horizontal.

Em relação ao gráfico de uma função racional dizemos que este é analisado em termos de simetria, interceptos, assíntotas e comportamento do sinal da função.

3.1 Função inverso de um número real

A função inverso de um número real não nulo é expressa na forma:

$$f^I(x) = \frac{1}{x}, x \neq 0. \quad (3.2)$$

Para cada valor da variável independente x , temos determinado, em correspondência, o valor de seu inverso. O domínio desta função é o conjunto dos números reais diferentes de zero e seu gráfico representado na Figura 3.4, é uma curva denominada hipérbole, estudada em Geometria Analítica.

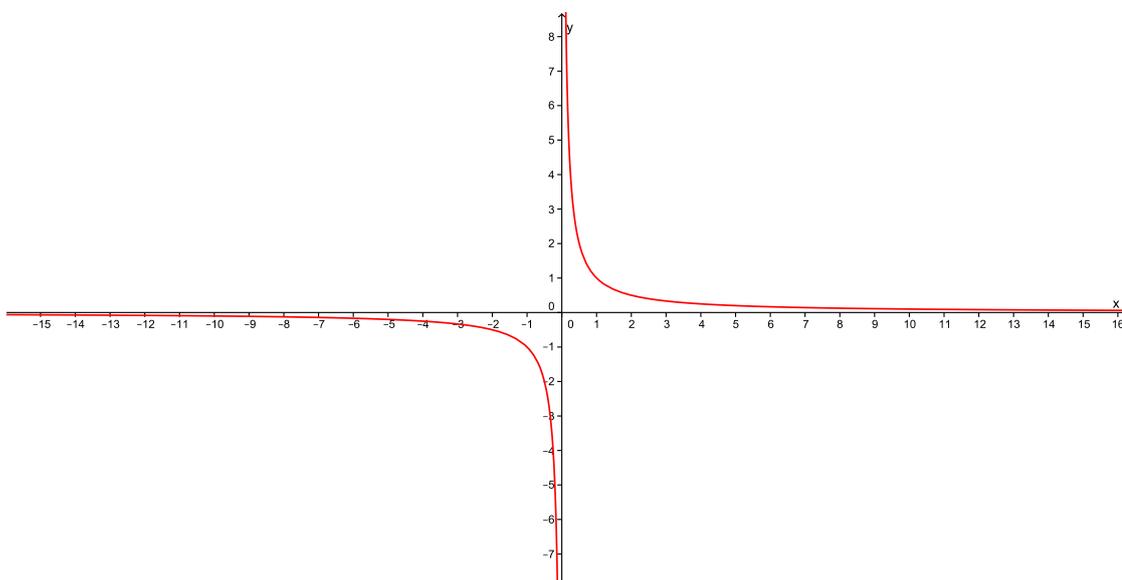


Figura 3.4: Função inverso de um número real

Note que esta função não está definida para $x = 0$. Geometricamente, isso significa que o gráfico não corta o eixo das ordenadas em nenhum ponto, ou seja, o gráfico se aproxima do eixo y pela esquerda ou pela direita, mas não o corta. Com isso, a reta $x = 0$ é a assíntota vertical desta função.

Além disso, a mera observação do gráfico de f^I , nos leva a perceber que o mesmo também não toca o eixo das abscissas e que quanto mais $|x|$ cresce, ou seja, quando $x \rightarrow \infty$ ou $x \rightarrow -\infty$, mais o gráfico da função aproxima-se da reta $y = 0$. Neste caso, dizemos que o eixo das abscissas é a assíntota horizontal da função f^I .

Podemos, neste momento, falar intuitivamente da noção de limite. Assim:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

Na busca de funções do mesmo tipo, porém mais gerais, podemos examinar as possíveis transformações sofridas pelo gráfico de f^I .

Como será o gráfico de uma função do tipo $f^k(x) = \frac{1}{x} + k$, com $x \neq 0$?

Efeito da translação na imagem de f^I

Vejamos o gráfico de algumas dessas funções na Figura 3.5:

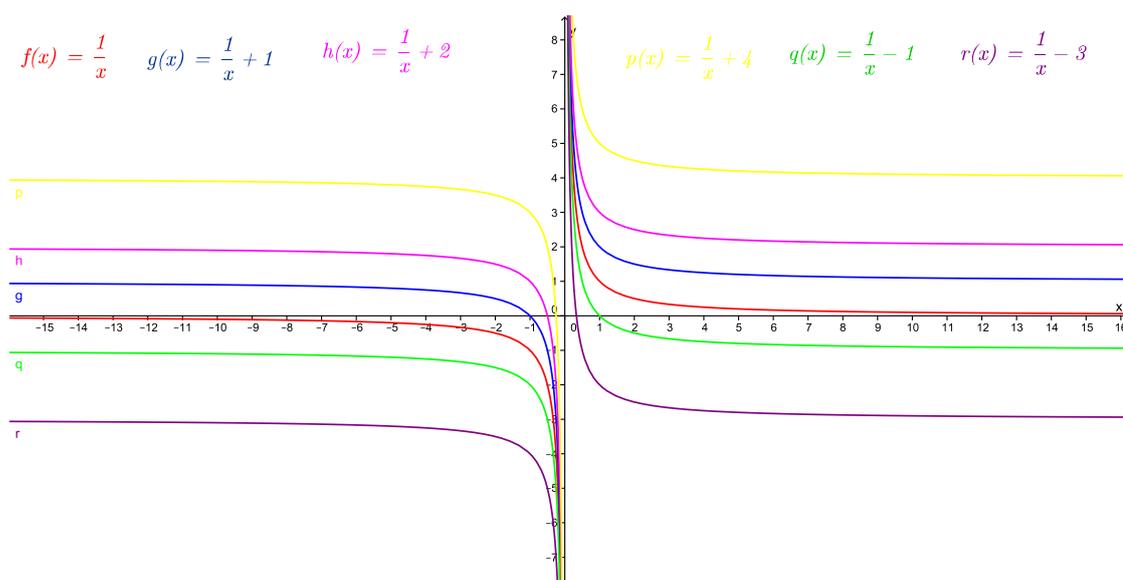


Figura 3.5: Gráfico das funções do tipo $f^k(x) = \frac{1}{x} + k$ para $k = -3, -1, 0, 1, 2, 4$

Note que houve uma translação vertical de $|k|$ unidades para cima(ou para baixo), ou seja, cada ponto do gráfico de $f^k(x) = \frac{1}{x} + k$ tem ordenada igual a k unidades a mais (ou a menos) do que a ordenada do ponto de mesma abscissa no gráfico de $f^I(x) = \frac{1}{x}$. Neste caso, o raciocínio é análogo ao utilizado na seção 2.2, quando comparamos o gráfico das funções do tipo $f_b(x) = x + b$ com o gráfico da função identidade.

Com isso, temos que o gráfico de uma função f^k é uma hipérbole obtida por uma translação vertical no plano do gráfico de f^1 . Logo, sua assíntota vertical também será o eixo das ordenadas. Já em relação as assíntotas horizontais, quanto mais o $|x|$ cresce, mais o gráfico se aproxima de $y = k$. Assim, a reta $y = k$ será a assíntota horizontal da função f^k .

Exemplo 3.1.1. Como podemos ver na figura 3.6, o gráfico da função $f^1(x) = \frac{1}{x} + 1$, tanto pela esquerda quanto pela direita, aproxima-se do eixo das ordenadas mas não o toca. Assim, a assíntota vertical é o eixo das ordenadas. E ainda, quando $|x|$ cresce muito, o gráfico aproxima-se da reta $y = 1$. Logo, esta será a assíntota horizontal.

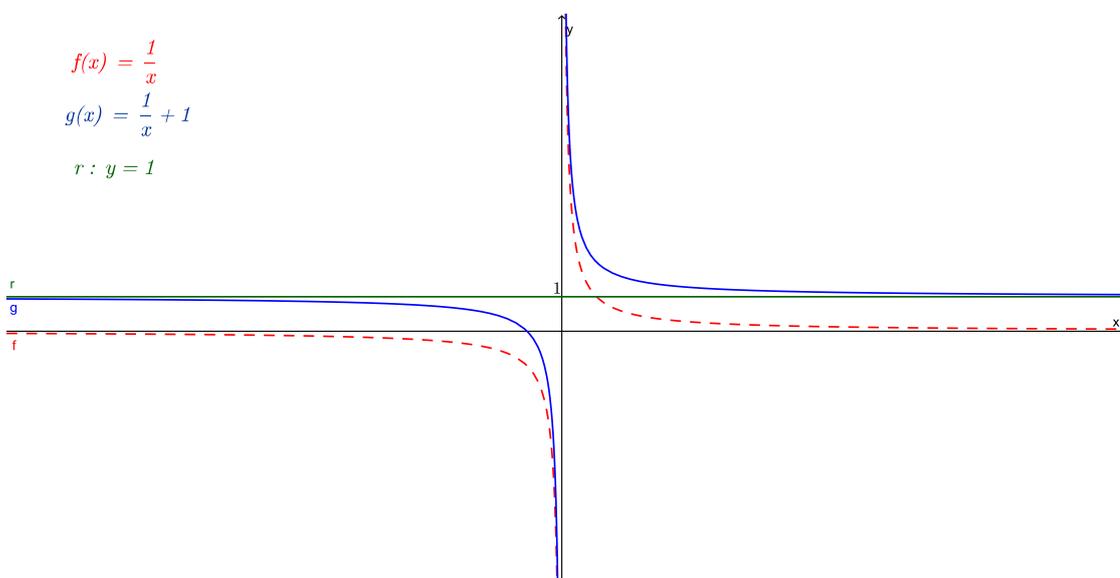


Figura 3.6: Gráfico da função $f^1(x) = \frac{1}{x} + 1$

E quando a constante $k \in \mathbb{R}$ vem somada a x , o que acontece?

Efeito da translação no domínio de f^1

Vimos na seção 1.2 que gráfico de $y = f(x)$ difere do gráfico de $y = f(x + k)$ por uma translação horizontal de $|k|$ unidades. O deslocamento é para a direita se $k < 0$ e para a esquerda se $k > 0$.

Então, o gráfico de uma função do tipo $f_k(x) = \frac{1}{x+k}$, com $x \neq -k$ é uma hipérbole obtida pela translação horizontal no plano do gráfico de $f^I(x) = \frac{1}{x}$. Sua assíntota horizontal será o eixo das abscissas, pois quanto mais $|x|$ cresce mais o gráfico se aproxima da reta $y = 0$. Veja que função f_k não está definida para $x = -k$. Neste caso, a reta $x = -k$ será a assíntota vertical. Vejamos na Figura 3.7 os gráficos de algumas dessas funções.

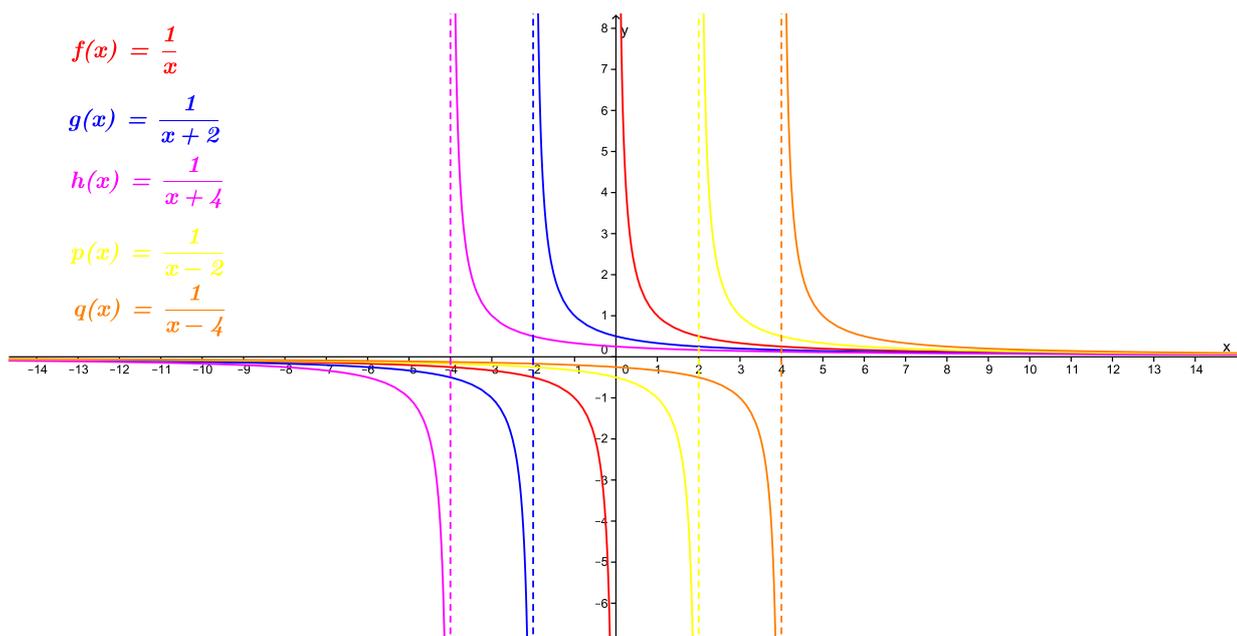


Figura 3.7: Gráfico das funções do tipo $f_k(x) = \frac{1}{x+k}$ para $k = -4, -2, 0, 2, 4$

Efeito da multiplicação de f^I por um escalar não nulo.

Veremos agora o que acontece ao gráfico $f^I(x) = \frac{1}{x}$, quando multiplicamos um número real a por $\frac{1}{x}$, ou seja, como será o gráfico de uma função do tipo $f(x) = \frac{a}{x}$, $x \neq 0$. É importante ressaltar que as assíntotas vertical e horizontal são respectivamente, o eixo das ordenadas e eixo das abscissas. Podemos analisar duas situações:

1. Quando $a > 0$

Na Figura 3.8 podemos perceber que quanto mais o valor de a aumenta mais o gráfico se afasta dos eixos, isso acontece porque quando multiplicamos $\frac{1}{x}$ por um número real a há uma dilatação dos valores de y quando $a > 1$ ou contração quando $0 < a < 1$.

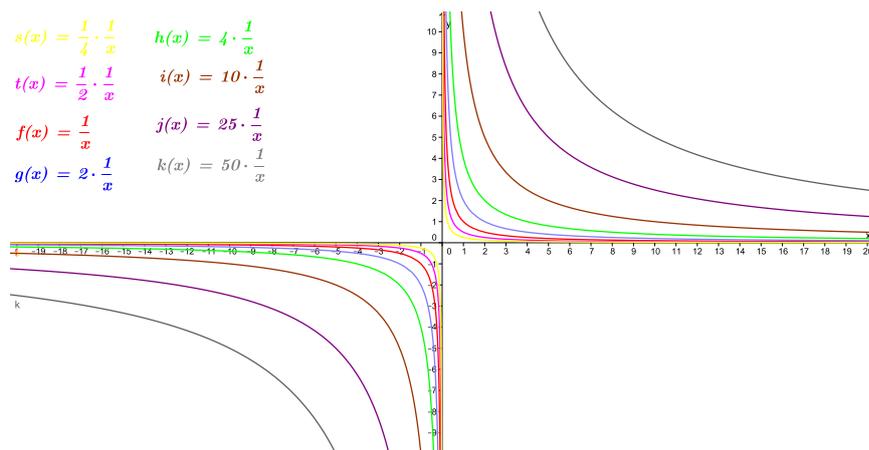


Figura 3.8: Gráficos das funções do tipo $f(x) = \frac{a}{x}$ para $a = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, 10, 25, 50$

2. Quando $a < 0$

Vamos analisar primeiro o gráfico da função $y = -\frac{1}{x}$ em relação ao gráfico de f^1 . Veja na Figura 3.9, que tal gráfico é obtido do gráfico de f^1 por simetria em relação ao eixo das abscissas.

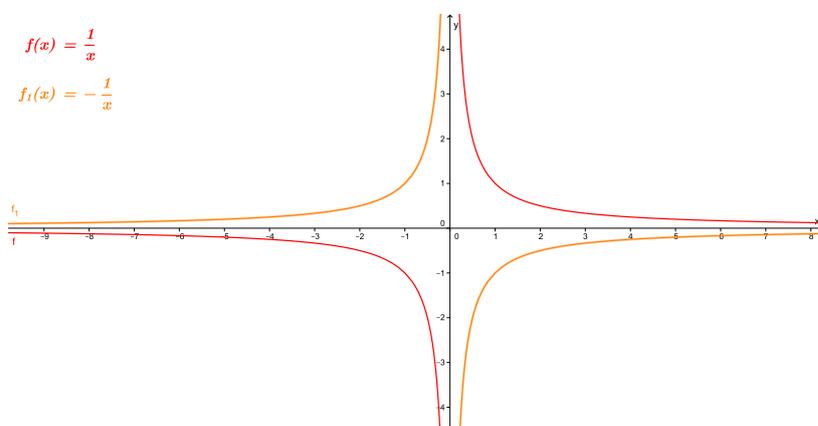


Figura 3.9: Gráficos das funções $y = \frac{1}{x}$ e $y = -\frac{1}{x}$

Assim, no caso em que $a < 0$, o gráfico de f pode ser obtido do gráfico de f^1 após duas transformações no plano: simetria em relação ao eixo das abscissas e homotetia. Note ainda, na Figura 3.10, que quanto mais o valor de a diminui mais o gráfico se afasta dos eixos.

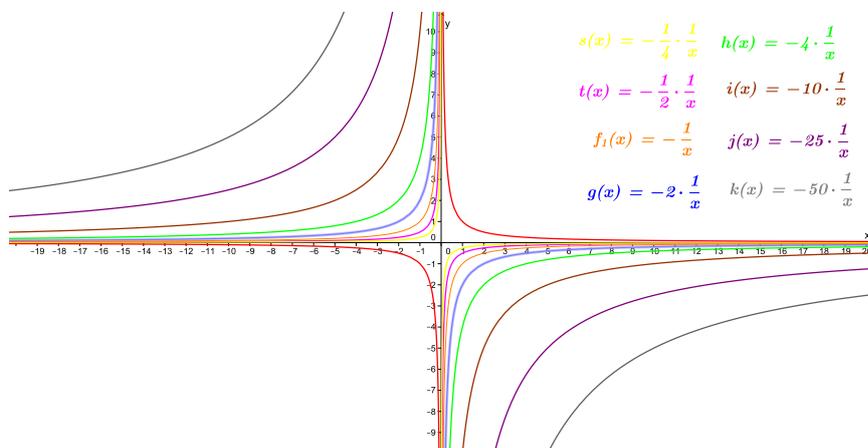


Figura 3.10: Gráficos das funções do tipo $f(x) = \frac{a}{x}$ para $a = -50, -25, -10, -4, -2, -1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}$

Analisando o caso das funções do tipo $f(x) = \frac{1}{cx}$, percebemos que o raciocínio análogo ao anterior. Basta considerar $c = \frac{1}{a}$.

3.2 Funções racionais do tipo $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$

Nesta seção veremos o caso geral da função racional cujo numerador e denominador são funções afins, ou seja,

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d} \quad x \neq -\frac{d}{c} \tag{3.3}$$

e como podemos esboçar os gráficos destas funções.

Exemplo 3.2.1. *Construa o gráfico da função racional $f(x) = \frac{x + 2}{x - 3}$.*

No exemplo 3.0.4 vimos como resolver uma inequação-quociente. Naquele exemplo foi feito o estudo dos sinais de cada uma das funções para então encontrar a solução que satisfaça a desigualdade. Utilizando o mesmo método, que é conhecido dos alunos no Ensino Médio, tentaremos esboçar o gráfico desta função. Assim,

1. a função f é positiva em $x \in \mathbb{R}; x < -2$ ou $x > 3$;

2. a função f é negativa em $x \in \mathbb{R}; -2 < x < 3$;
3. a função f é nula em $x = -2$;
4. a função f não está definida em $x = 3$;

Essas informações não são suficientes para esboçar o gráfico da função f , pois nos diz apenas onde a função é positiva ou negativa, mas não sabemos o comportamento da função para os valores de x muito grandes ou muito pequenos, por exemplo.

Mas na seção 1.1, vimos que podemos esboçar o gráfico de uma função a partir da tabela de valores. Então, escolhendo alguns valores para x encontraremos valores correspondentes de y (Tabela 3.2.1). Assim, encontramos pontos do plano que pertencem ao gráfico de f como mostra a Figura 3.11.

Neste momento é recomendado ao professor esclarecer aos alunos que a tabela de valores sempre fornecerá um retrato aproximado do gráfico por isso é importante que se escolham pontos relevantes, ou seja, pontos que mostrem o comportamento da função. No exemplo 3.2.1, esses pontos estão determinados nas tabelas 3.2.1, 3.2.2 e 3.2.3.

Tabela 3.2.1

x	-4	-2	0	1	2	4	5	6	8
y	0,285	0	0,666...	-1,5	-4	6	3,5	2,666...	2

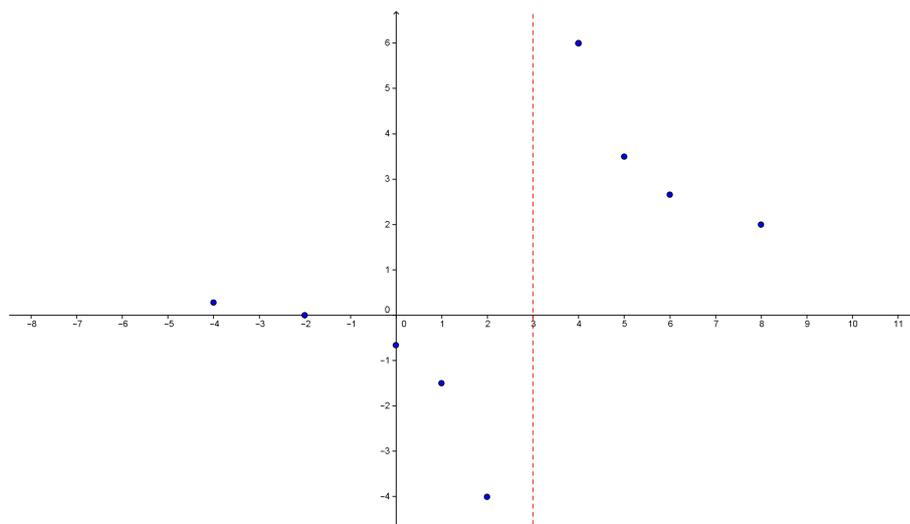


Figura 3.11: Pontos obtidos pela tabela 3.2.1

Os pontos no plano representado na Figura 3.11 sugerem uma curva e ainda, quando os valores de x se aproximam do ponto onde a função não está definida, ou seja,

onde $x = 3$, podemos observar que pela esquerda os valores de y tendem ficar cada vez menores e quando se aproximam de $x=3$ pela direita os valores de y tendem a ficar cada vez maiores.

É importante observar que $x = 3$ é a raiz da função que está no denominador. Isso nos diz que a função não está definida para esse valor de x . Logo, a função tem para assíntota vertical a reta $x = 3$. Observe, ainda, que quando a função se aproxima dessa reta, ela assume valores muito grandes positivos ou negativos. Em outras palavras, utilizando a notação de limite, temos que:

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty \quad e \quad \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty$$

Por outro lado, a tabela não nos deixa claro o comportamento da função quando os valores de x ficam muito grandes em módulo. Assim, utilizaremos as tabelas de valores 3.2.2 e 3.2.3 para analisar tal questão.

Tabela 3.2.2

x	-5	-6	-7	-8	-9	-10
y	0,375	0,444...	0,5	0,5454...	0,58333...	0,615

Tabela 3.2.3

x	8	9	10	11	12	13
y	2	1,8333...	1,71	1,625	1,555...	1,5

Perceba que quando x cresce muito em módulo os valores de $f(x)$ ficam cada vez mais próximos de 1. Isto ocorre porque para valores grandes de x as constantes 2 e -3 tendem a ficar desprezíveis. Podemos indicar tal fato escrevendo $f(x) \rightarrow 1$ quando $x \rightarrow \infty$ ou $x \rightarrow -\infty$ e utilizando a notação de limite:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x + 2}{x - 3} = 1.$$

Portanto, a função f possui assíntota horizontal $y = 1$ se, quando $|x|$ cresce sem limites, $f(x)$ se aproxima de 1.

Vejamos então como fica o esboço do gráfico da função f na Figura 3.12:

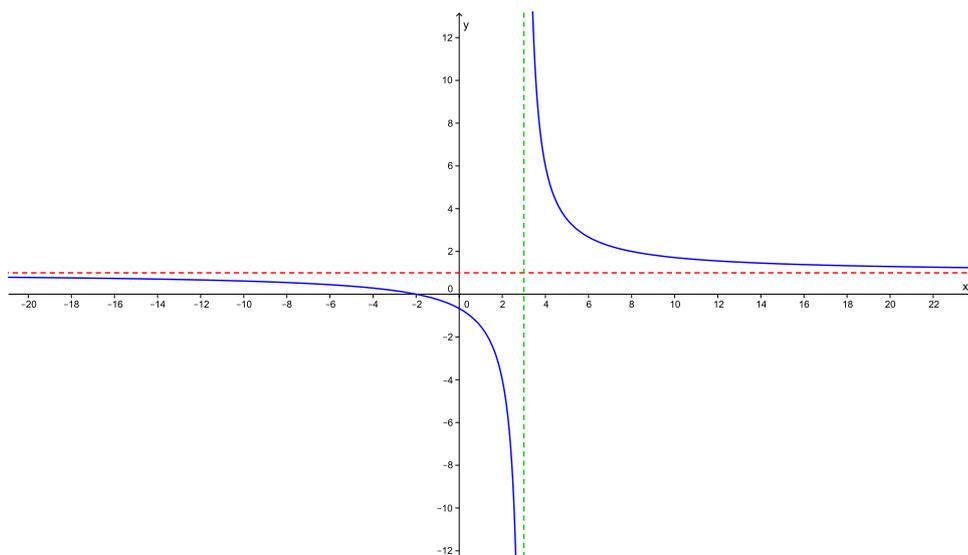


Figura 3.12: Gráfico da função $f(x) = \frac{x+2}{x-3}$

Como chegar ao gráfico da função racional (3.3) a partir do gráfico da função $f^I = \frac{1}{x}$?

De modo geral, $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, com $x \neq -\frac{d}{c}$, pode ser obtida a partir do gráfico da função f^I uma vez que pode ser escrita na forma

$$f(x) = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c^2} \cdot \frac{1}{x + \frac{d}{c}}. \tag{3.4}$$

De fato,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{ax + b}{cx + d} = \frac{a \cdot \left(x + \frac{b}{a}\right)}{c \cdot \left(x + \frac{d}{c}\right)} = \frac{a}{c} \cdot \frac{x + \frac{b}{a}}{x + \frac{d}{c}} \\ &= \frac{a}{c} \cdot \frac{x + \frac{d}{c} - \frac{d}{c} + \frac{b}{a}}{x + \frac{d}{c}} = \frac{a}{c} \left(1 + \frac{\frac{bc - ad}{ac}}{x + \frac{d}{c}} \right) \\ &= \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c^2} \cdot \frac{1}{x + \frac{d}{c}} \end{aligned}$$

Ao colocarmos o parâmetro c em evidência, consideramos $c \neq 0$. Além disso, $a \neq 0$, pois se $a = 0$ e $c = 0$ então a função f é constante. E se $ad - bc = 0$ (em 3.4), a função também é constante. Logo, devemos sempre considerar $ad - bc \neq 0$.

Observe que, se $a \neq 0$ e $c = 0$, com $d \neq 0$ e b um real qualquer, então f é uma

função afim, já estudada capítulo 2.

Portanto, podemos esquematizar a construção do gráfico de f da seguinte forma:

- 1º O gráfico de $f(x) = \frac{1}{x}$ é transladado horizontalmente em $|\frac{d}{c}|$ unidades chegando ao gráfico da função $f(x) = \frac{1}{x + \frac{d}{c}}$;
- 2º A função $f(x) = \frac{1}{x + \frac{d}{c}}$, ao ser multiplicada pelo fator $\frac{bc - ad}{c^2}$, muda de inclinação produzindo o gráfico de $f(x) = \frac{bc - ad}{c^2} \cdot \frac{1}{x + \frac{d}{c}}$;
- 3º Por fim, adicionando-se o fator $\frac{a}{c}$ o gráfico de $f(x) = \frac{bc - ad}{c^2} \cdot \frac{1}{x + \frac{d}{c}}$ sofre uma translação vertical de $|\frac{a}{c}|$ unidades, chegando então ao gráfico da função $f(x) = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c^2} \cdot \frac{1}{x + \frac{d}{c}}$.

Uma forma mais simples de se obter a função (3.3) na forma (3.4), é recorrendo ao seguinte teorema, cuja demonstração pode ser encontrada em (LIMA,2004,p.205).

Teorema 3.2.1. *O quociente q e o resto r da divisão de um polinômio D por um polinômio d (não identicamente nulo) existem e são únicos.*

Dividir um polinômio D por um polinômio d não identicamente nulo consiste em obter polinômios q e r , chamados, respectivamente, de quociente e resto da divisão, que cumpram:

$$\text{grau}(r) < \text{grau}(d) \quad e \quad D = dq + r.$$

Dividindo ambos os membros da igualdade por d , temos que $\frac{D}{d} = q + \frac{r}{d}$. Assim, em (3.4), podemos considerar que

$$D(x) = ax + b, \quad d(x) = cx + d, \quad q(x) = \frac{a}{c} \quad e \quad r(x) = \frac{bc - ad}{c}.$$

Perceba que a função (3.3) não está definida para $x \neq -\frac{d}{c}$. Portanto, sua assíntota vertical é a reta $x = -\frac{d}{c}$. E quando $|x|$ cresce muito, o gráfico aproxima-se cada vez mais da reta $y = \frac{a}{c}$. Logo, tal reta é sua assíntota horizontal.

Com efeito, pois utilizando conhecimentos de Cálculo podemos confirmar tais afirmações:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c^2} \cdot \frac{1}{x + \frac{d}{c}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c^2} \cdot \frac{1}{x + \frac{d}{c}} = \frac{a}{c}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{d}{c}^+} \frac{1}{x} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\frac{d}{c}^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

Exemplo 3.2.2. Construa o gráfico da função $f(x) = \frac{2x + 5}{3x - 6}$.

Considere $D(x) = 2x + 5$ e $d(x) = 3x - 6$. Logo, $q(x) = \frac{2}{3}$ e $r(x) = 9$. De fato,

$$D(x) = 2x + 5 = (3x - 6) \cdot \frac{2}{3} + 9.$$

Logo,

$$\frac{D(x)}{d(x)} = \frac{2}{3} + \frac{9}{3x - 6} = \frac{2}{3} + 3 \cdot \frac{1}{x - 2}.$$

Construiremos o gráfico desta função passo a passo:

1º passo: O gráfico da função $f^I(x) = \frac{1}{x}$ é transladado horizontalmente para a direita em $|2|$ unidades chegando ao gráfico da função $f_1(x) = \frac{1}{x - 2}$. (Figura 3.13)

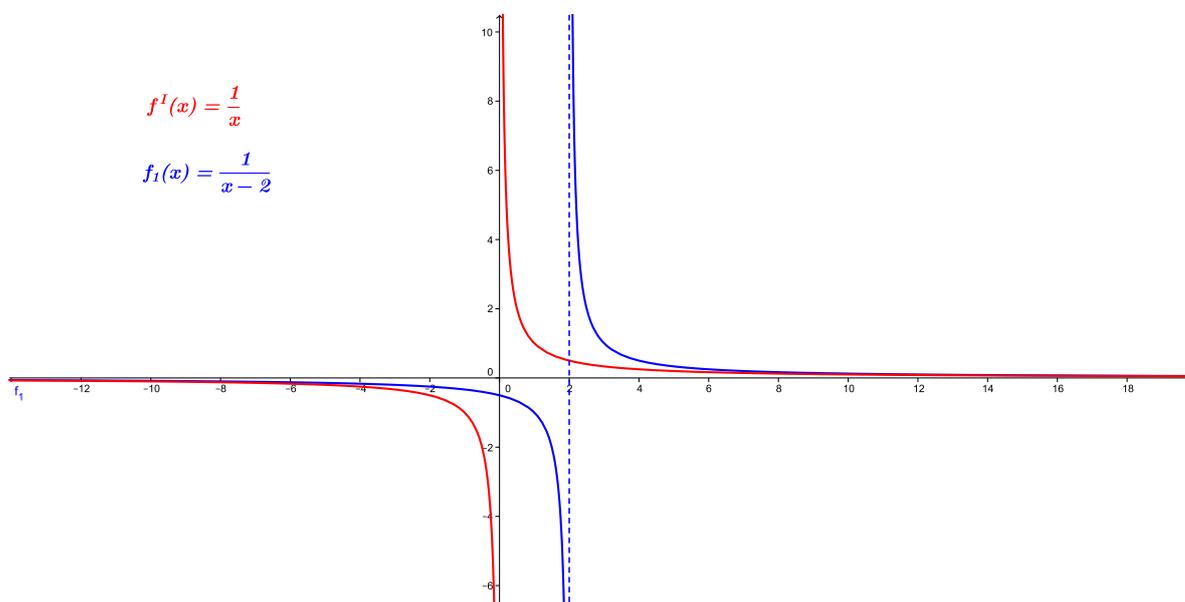


Figura 3.13: Gráfico da função $f_1(x) = \frac{1}{x - 2}$

2º passo: O gráfico de f_1 , ao ser multiplicada por 3, muda de inclinação produzindo o gráfico de $f_2(x) = 3 \cdot \frac{1}{x - 2}$. (Figura 3.14)

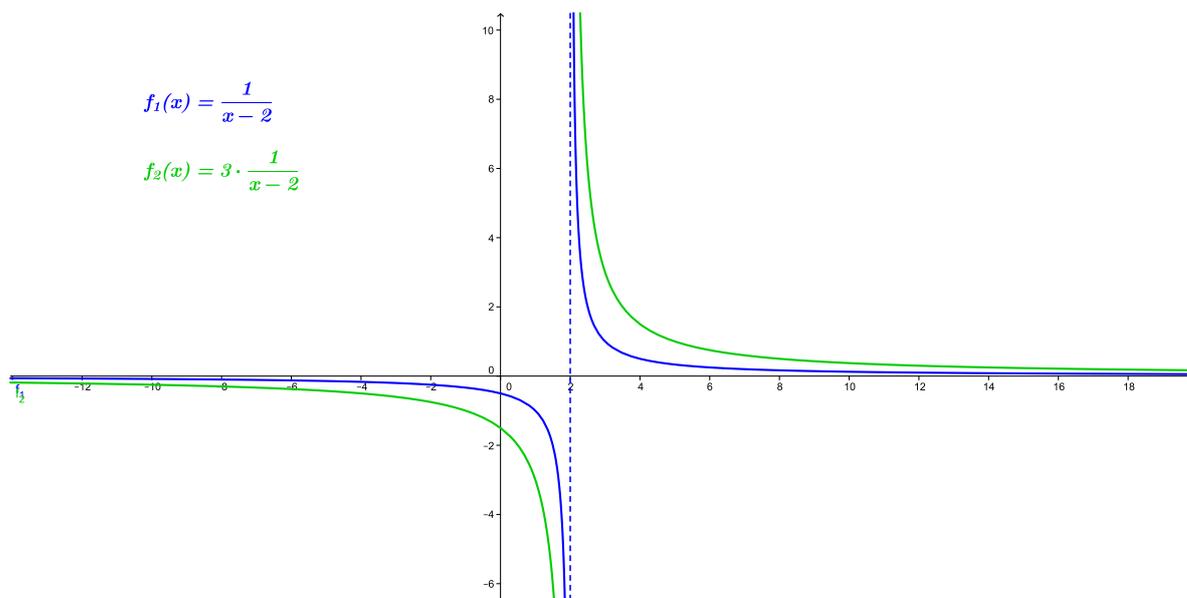


Figura 3.14: Gráfico da função $f_2(x) = 3 \cdot \frac{1}{x-2}$

3º passo: Adicionando-se $\frac{2}{3}$ o gráfico de f_2 sofre uma translação vertical para cima de $|\frac{2}{3}|$ unidades, chegando então ao gráfico da função $f_3(x) = \frac{2}{3} + 3 \cdot \frac{1}{x-2}$, que é equivalente à $f(x) = \frac{2x+5}{3x-6}$. (Figura 3.15)

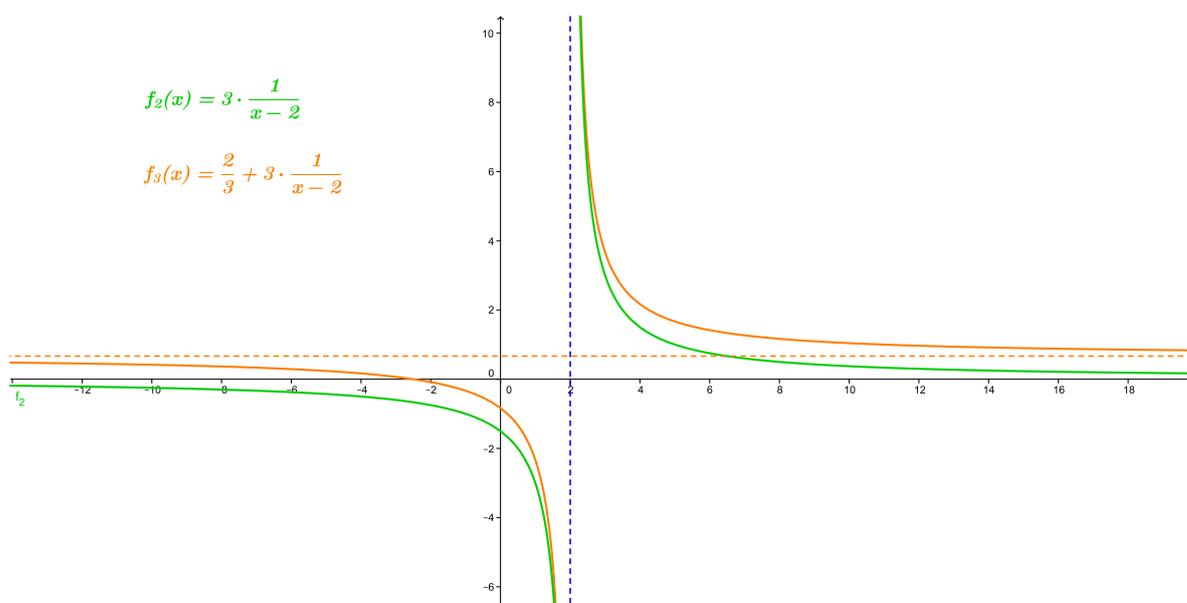


Figura 3.15: Gráfico da função $f_3(x) = \frac{2}{3} + 3 \cdot \frac{1}{x-2} = f(x)$

3.3 Aplicações

Exemplo 3.3.1 (Função Custo Médio). *O custo médio para produzir x unidades de um determinado produto é obtido dividindo o custo total de produção pelo número de unidades produzidas. Logo, supondo que $C(x)$ seja a função custo total, então a função custo médio, é dada por $\bar{C}(x) = \frac{C(x)}{x}$.*

Assim, se o custo (em reais) para produzir cada unidade de um produto é R\$20,00 e além disso ainda tem a taxa fixa de R\$400,00 para os gastos extras, então o custo total para se produzir x unidades, é dado por $C(x) = 400 + 20x$. Logo, a função custo médio é

$$\bar{C}(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{400 + 20x}{x} = 20 + \frac{400}{x}$$

O gráfico da Figura 3.16 mostra o comportamento da função \bar{C} , sem se preocupar com o contexto, pois no caso da variável x , devemos considerar apenas os valores maiores que zero.

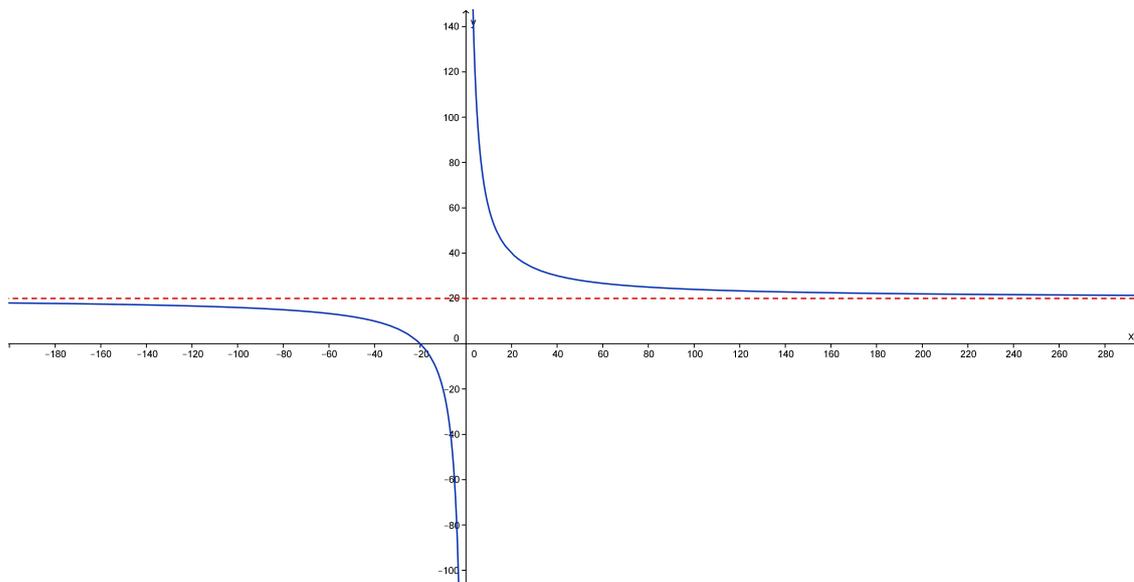


Figura 3.16: Gráfico da função $\bar{C}(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{400+20x}{x}$

Já o gráfico da Figura 3.17 considera como domínio apenas o intervalo de interesse. Note que quanto mais unidades do produto são vendidas mais o custo médio se aproxima do custo constante de uma unidade de produção, que é de R\$ 20,00.

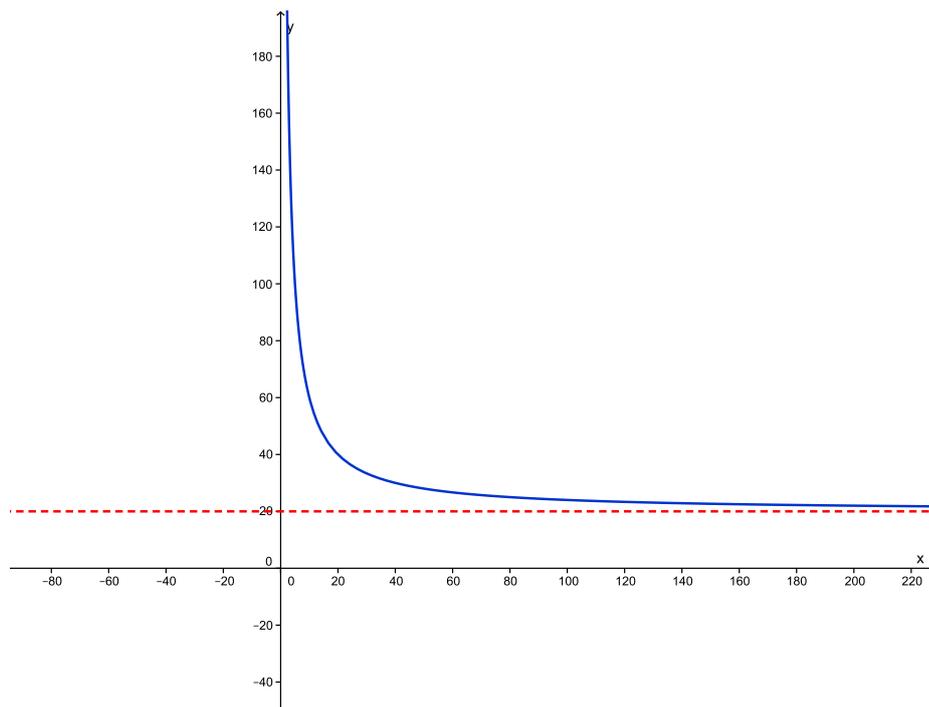


Figura 3.17: Gráfico da função $\bar{C}(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{400+20x}{x}$, para $x > 0$

Exemplo 3.3.2 (Uma aplicação em Biologia - (ÁVILA, 2008, p.53)). *A hipérbole intervem quando consideramos o equilíbrio entre a produção de calor no interior de um corpo e o calor que emana pela superfície. Imagine um corpo esférico de raio r , que produz calor à taxa de q calorias por unidade de volume e por unidade de tempo. Então o calor total produzido no corpo, na unidade de tempo, é $Q = \frac{4\pi r^3}{3}q$. Suponhamos que a temperatura de cada ponto do corpo não varie com o tempo (regime estacionário), de forma que todo o calor produzido saia da superfície, digamos, à taxa de k calorias por unidade de superfície e por unidade de tempo, donde $Q = (4\pi r^2)k$. Igualando esta expressão à anterior, encontramos:*

$$q = \frac{3k}{r} \quad (3.5)$$

Assim, vemos que a taxa q é inversamente proporcional ao raio r : quanto maior o corpo, tanto menor deve ser a sua produção de calor para a mesma taxa k . Considerando k constante, o gráfico de q como função de r é um ramo da hipérbole. Vejamos o gráfico na Figura 3.18, notando que $r > 0$

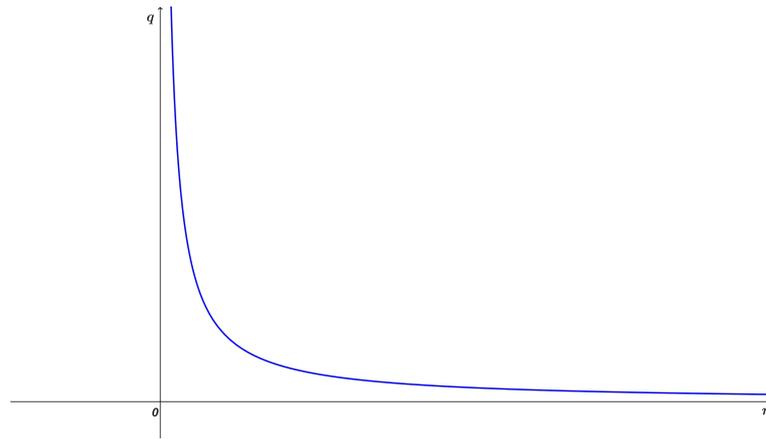


Figura 3.18: Gráfico da função $q = \frac{3k}{r}$, para $r > 0$ e k constante

Essas considerações se aplicam a corpos semelhantes, não necessariamente esféricos, já que o volume é proporcional ao cubo de um comprimento típico do corpo e a superfície é proporcional ao quadrado desse comprimento. No caso dos animais, por exemplo, a eq.(3.5) mostra que quanto maior o animal, tanto menor a sua produção de calor por unidade de volume, para manter a mesma temperatura num certo ambiente (k depende, entre outros fatores, da diferença de temperatura entre o corpo e o meio ambiente). Isso explica por que as atividade metabólicas variam nos animais, conforme o seu tamanho: quanto maior o animal, menos intenso é o seu metabolismo; e quanto menor o animal, mais intenso é o metabolismo. É por isso que um elefante é tão vagaroso quando comparado a um beija-flor e este quando comparado a uma formiga.

Capítulo 4

Números Complexos

Neste capítulo estudaremos os números complexos, porém não nos aprofundaremos muito em relação às suas propriedades, pois nosso interesse maior é entender e visualizar cada operação geometricamente.

A teoria aqui abordada pode ser encontrada de forma mais detalhada, com exemplos, exercícios e demonstrações, em HEFEZ(2012), em LIMA(2004), em IEZZI(1993) ou em FERNANDEZ;BERNARDES JR(2008).

4.1 Breve Histórico

Em alguns livros didáticos de Ensino Médio o conteúdo **Números Complexos** tem como motivação inicial a resolução de equações do 2º grau que não possuem raízes reais, nas quais aparece a raiz quadrada de um número negativo em sua “possível” solução.

É uma boa motivação, mas não podemos esquecer os fatos históricos, pois o surgimento dos números complexos está relacionado ao problema da resolução de equações do 3º grau, quando Jerônimo Cardano (Itália, 1501-1576) chegou a uma solução na qual aparecia a raiz quadrada de um número negativo, o que era considerado inexistente na época.

Cardano publicou a obra intitulada *Ars Magna* (Arte maior), onde apresentou a fórmula geral para resolver equações do tipo $x^3 + px = q$, com p e q reais, descoberta por Tartaglia (cerca de 1500-1557). A primeira dificuldade surgiu quando Cardano aplicou essa fórmula na resolução da equação $x^3 - 15x = 4$, chegando à solução $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$. Isso o intrigou bastante, pois Cardano sabia que

$x = 4$ era uma solução da equação $x^3 - 15x = 4$ e por mais que tentasse, não conseguia evitar nas suas fórmulas o uso dos radicais quadráticos de números negativos para expressar soluções reais de algumas equações do terceiro grau como esta.

Rafael Bombelli (Itália, 1526-1572) sentiu-se motivado a prosseguir com a solução encontrada por Cardano, criando novos números. Considerou $\sqrt{-1}$ um número “imaginário” e desenvolveu regras para trabalhar com esse tipo de número, recebendo olhares céticos dos matemáticos da época, inclusive de Cardano, que relutavam em aceitar entidades matemáticas que não tivessem algum significado geométrico. Os resultados desses estudos foram publicados por Bombelli em 1572 no livro *L'Algebra*.

Para representar $\sqrt{-1}$, Leonhard Euler (Suíça, 1707-1783), em 1777, usou pela primeira vez o símbolo i e determinou várias propriedades dos números introduzidos por Bombelli, sendo também dele a representação polar (trigonométrica) dos mesmos.

Caspar Wessel (Noruega, 1745-1818) e Jean Robert Argand (Suíça, 1768-1822) foram os primeiros autores a notar a associação entre números complexos e pontos reais no plano. Essa simples idéia de considerar as partes real e imaginária de um número complexo $a+bi$ como as coordenadas retangulares de um ponto do plano fez com que os matemáticos se sentissem muito mais à vontade com números imaginários, pois esses números podiam agora ser efetivamente visualizados, no sentido de que cada número complexo corresponde um único ponto do plano e vice-versa.

Em 1831, Carl Friedrich Gauss (Alemanha, 1777-1855) batizou esses números de números complexos. Sua contribuição foi reproduzida nas suas *Obras Reunidas* e contribuíram para a aceitação dos números complexos como uma estrutura numérica genuína.

E finalmente, em 1837, William Rowan Hamilton, deu um belíssimo tratamento aos números complexos apresentando-os simplesmente como pares de números reais: (\mathbf{a}, \mathbf{b}) .

4.2 Representação Algébrica

O modo como se define atualmente o conjunto dos números complexos assim como sua álgebra e aritmética é devido a Hamilton (veja, por exemplo, em EVES (2004, p.549)). Partindo da representação dada por Hamilton, definimos o corpo dos números complexos como sendo o conjunto

$$\mathbb{C} = \{(\mathbf{a}, \mathbf{b}) : \mathbf{a} \in \mathbb{R} \text{ e } \mathbf{b} \in \mathbb{R}\}.$$

Hamilton definiu a igualdade de dois pares (\mathbf{a}, \mathbf{b}) e (\mathbf{c}, \mathbf{d}) pelas condições $\mathbf{a} = \mathbf{c}$ e $\mathbf{b} = \mathbf{d}$. A adição e a multiplicação de tais pares foram definidas por ele por

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + (\mathbf{c}, \mathbf{d}) = (\mathbf{a} + \mathbf{c}, \mathbf{b} + \mathbf{d}) \quad \text{e} \quad (\mathbf{a}, \mathbf{b})(\mathbf{c}, \mathbf{d}) = (\mathbf{ac} - \mathbf{bd}, \mathbf{ad} + \mathbf{bc}).$$

Com essas definições é fácil mostrar que a adição e a multiplicação de pares ordenados de números reais são comutativas e associativas e que a multiplicação é distributiva em relação à adição, assumindo-se, obviamente, que essas leis valham para a adição e a multiplicação usuais de números reais.

Deve-se notar que assim o sistema dos números reais está mergulhado no sistema dos números complexos. Isso significa que, identificando-se cada número real r como o par correspondente $(r, 0)$, essa correspondência preserva a adição e a multiplicação, pois temos:

$$(\mathbf{a}, 0) + (\mathbf{b}, 0) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}, 0) \quad \text{e} \quad (\mathbf{a}, 0)(\mathbf{b}, 0) = (\mathbf{ab}, 0).$$

Assim, para obter a forma algébrica de um número complexo, a partir da forma de Hamilton, basta notar que todo número complexo da forma (\mathbf{a}, \mathbf{b}) pode ser escrito como

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{a}, 0) + (0, \mathbf{b}) = (\mathbf{a}, 0) + (\mathbf{b}, 0)(0, 1) = \mathbf{a} + \mathbf{bi},$$

onde $(0, 1)$ é representado pelo símbolo i e se identificam $(\mathbf{a}, 0)$ e $(\mathbf{b}, 0)$ como os números reais \mathbf{a} e \mathbf{b} . Desta forma, observemos que $i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1$.

Concluimos, então, que todo número complexo z pode ser escrito de uma maneira única na forma algébrica $z = \mathbf{a} + \mathbf{bi}$, com \mathbf{a} e \mathbf{b} reais, chamados, respectivamente, de *parte real* de z e *parte imaginária* de z , denotados: $\mathbf{a} = \text{Re}(z)$ e $\mathbf{b} = \text{Im}(z)$, e representado geometricamente, como par ordenado (\mathbf{a}, \mathbf{b}) .

As propriedades de adição e multiplicação, como definidas acima, satisfazem as propriedades descritas na proposição 4.2.1.

Proposição 4.2.1. *As seguintes propriedades se verificam para quaisquer $z, w, t \in \mathbb{C}$:*

(i) *comutativas:* $z + w = w + z$ e $zw = wz$.

(ii) *associativas:* $z + (w + t) = (z + w) + t$ e $z(wt) = (zw)t$.

(iii) *distributiva:* $z(w + t) = zw + zt$.

(iv) *elemento neutro:* $z + 0 = z$ e $z \cdot 1 = z$.

(v) *simétrico*: $z + (-z) = 0$.

(vi) *inverso*: $z \cdot z^{-1} = 1$, com $z \neq 0$.

As demonstrações das propriedades ficam a cargo do leitor ou podem ser encontradas em IEZZI(1993).

Para cada número complexo $z = a + bi$, definimos o **oposto** de z por $-z = -a - bi$ e o **inverso** de z por $z^{-1} = \frac{1}{z}$, com $z \neq 0$.

Definimos, ainda, as operações de subtração e divisão da maneira usual. Assim, sendo $z = a + bi$ e $w = c + di$ números complexos, segue que:

1. a diferença entre z e w é dada por $z - w = (a - c) + (b - d)i$, ou seja, para subtrair dois números complexos, subtraímos as partes reais e imaginárias separadamente.
2. o quociente entre z e w é dado por $\frac{z}{w} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{(bc - ad)i}{c^2 + d^2}$, com $w \neq 0$.

De fato,

$$\frac{z}{w} = \frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{(bc - ad)i}{c^2 + d^2},$$

ou seja, para dividir dois números complexos, multiplicamos o numerador e o denominador da fração pelo conjugado do denominador, substituindo i^2 por -1 , quando aparecer. Consequentemente, podemos definir o inverso de z por

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{b}{a^2 + b^2}i.$$

Exemplo 4.2.1. *Dados os números complexo $z = 2 - 5i$ e $w = 4 + 3i$, temos que:*

a) $z + w = (2 + 4) + (-5 + 3)i = 6 - 2i$

b) $z - w = (2 - 4) + (-5 - 3)i = -2 - 8i$

c) $z \cdot w = (2 \cdot 4 - (-5) \cdot 3) + (2 \cdot 3 + (-5) \cdot 4)i = 23 - 3i$

d) $\frac{z}{w} = \frac{z \cdot \bar{w}}{w \cdot \bar{w}} = \frac{(2 - 5i) \cdot (4 - 3i)}{(4 + 3i) \cdot (4 - 3i)} = \frac{-7 - 26i}{25}$

e) $z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{2 - 5i} = \frac{2 + 5i}{(2 - 5i) \cdot (2 + 5i)} = \frac{2 + 5i}{29}$

f) $-z = -(2 - 5i) = -2 + 5i$

4.3 Representação Geométrica

Da definição adotada, cada número complexo $z = a + bi$ pode ser representado pelo ponto (a,b) do plano, este ponto é chamado *afixo*, cujas coordenadas são a e b . Vejamos na Figura 4.1 sua representação geométrica no plano cartesiano. Neste caso, o plano cartesiano é chamado de *plano complexo* ou *plano de Argand-Gauss*, o eixo das abscissas de *eixo real* e o eixo das ordenadas de *eixo imaginário*.

Podemos, ainda, apresentá-lo como o vetor de origem na origem O do sistema de

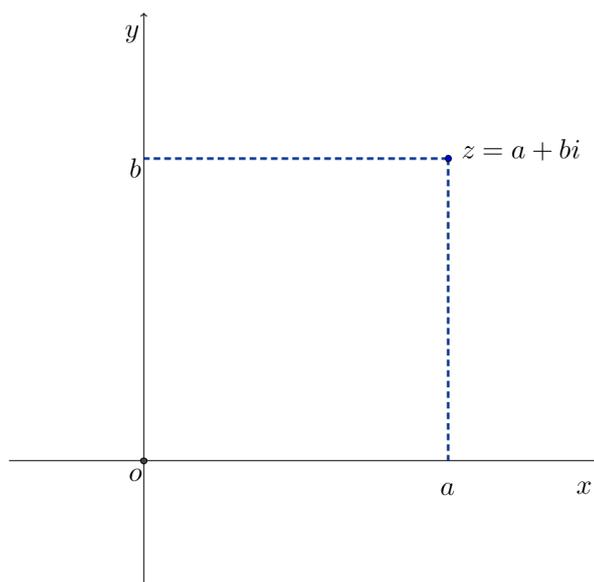


Figura 4.1: Representação de números complexos por pontos do plano

coordenadas e extremidade (a, b) , neste caso a e b são chamadas componentes do vetor Oz .

Com essa ideia vetorial, estudaremos geometricamente as operações de adição, subtração e multiplicação de números complexos.

A **adição** de dois números complexos $z = a + bi$ e $w = c + di$, corresponde à soma dos vetores com ponto inicial $O = (0, 0)$ e pontos finais $A = (a, b)$ e $A' = (c, d)$, respectivamente, isto é, a adição de dois números complexos é representado por um vetor cujas componentes são as somas das componentes dos vetores dados.

Para encontrar o vetor soma $z+w$, trasladamos paralelamente o vetor w , ao longo do segmento Oz de modo que a origem de w coincida com a extremidade de z (Figura 4.2). Os pontos 0 , z e $z+w$ são vértices de um paralelogramo.

Semelhantemente, se arrastarmos o vetor z paralelamente ao longo do segmento

Ow (figura 4.3), o vetor soma $w+z$ será o vértice do paralelogramo que tem O , w e $w+z$ por vértices . Essa representação justifica a propriedade comutativa da adição.

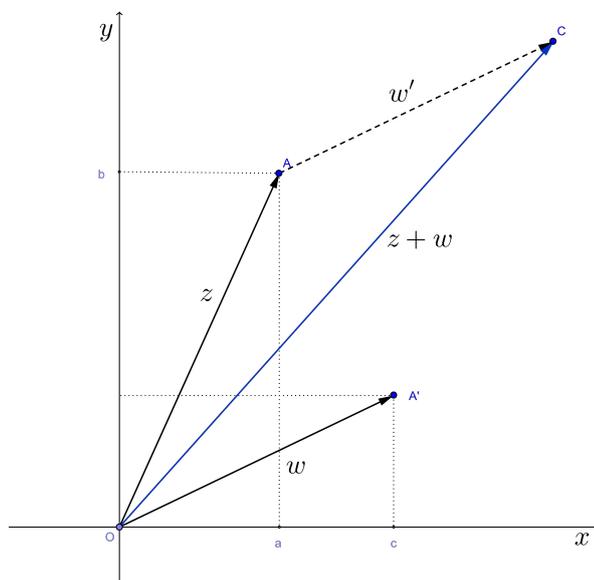


Figura 4.2: Adição no plano complexo: translação do vetor w

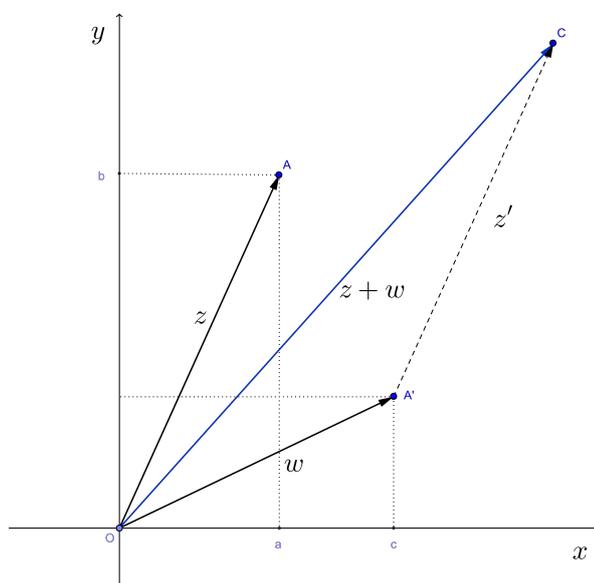


Figura 4.3: Adição no plano complexo: translação do vetor z

Vale lembrar que a partir dessa representação vetorial, a adição dos números complexos pode ser obtida pela regra do paralelogramo utilizada para a soma de vetores. Na Figura 4.4. o paralelogramo com lados adjacentes OA e OA' tem diagonal OC , onde

o ponto $C = (a + c, b + d)$ corresponde a soma $z + w = (a + c) + (b + d)i$.

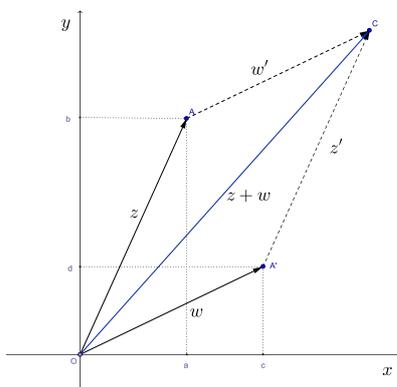


Figura 4.4: Regra do paralelogramo para a soma $z + w$

É interessante, também, interpretar geometricamente a diferença de números complexos. Para isto, interpretemos antes o simétrico de um número complexo z . Como mostra a Figura 4.5, o vetor representante do simétrico do número complexo z é o vetor de mesmo módulo, mesma direção e sentido contrário ao do vetor que representa o número complexo z , ou seja, pode ser visto como o simétrico de z em relação à origem.

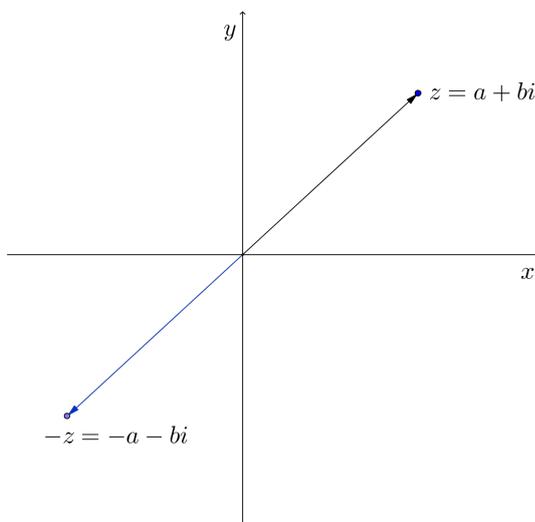


Figura 4.5: Simétrico de z

Podemos definir a **diferença** entre números complexos como a adição do vetor que representa z com o oposto do vetor que representa w . De fato, basta considerar $z - w = z + (-w)$. Note que $w - z = -(z - w)$, ou seja, geometricamente, $w - z$ é o simétrico de $z - w$ em relação à origem. (Figura 4.6)

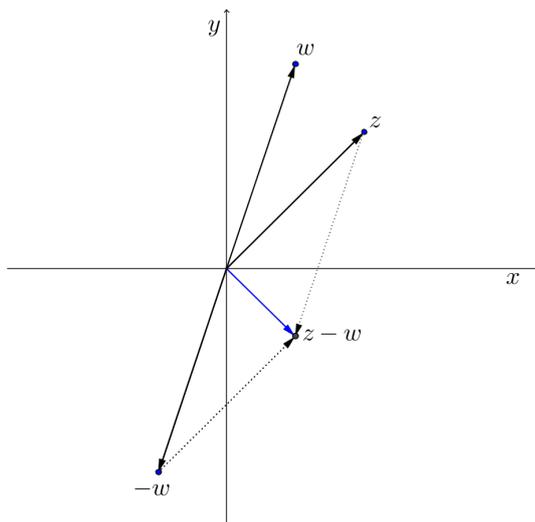


Figura 4.6: Representação geométrica de $z-w$

Exemplo 4.3.1. *Dados os números complexos $z = 1 - 3i$ e $w = 4 + 2i$, determine os números $z + w$ e $z - w$, representando-os geometricamente.*

Solução:

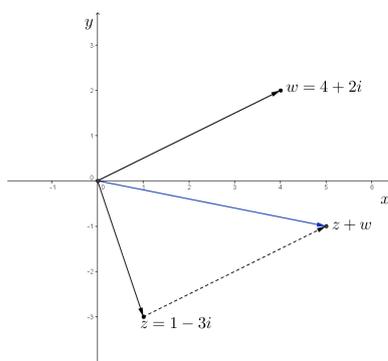


Figura 4.7: $z + w = 5 - i$

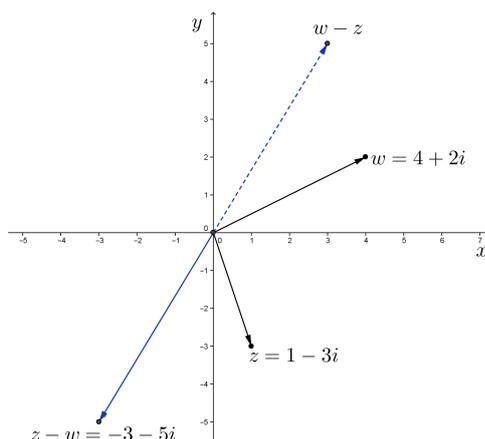


Figura 4.8: $z - w = -3 - 5i$ e $w - z = 3 + 5i$

A interpretação geométrica da multiplicação, da divisão e da potenciação será mostrada na seção 4.4, quando falaremos da forma trigonométrica dos números complexos.

Dado um número complexo $z = a + bi$, definimos o seu **conjugado** como sendo o número complexo $\bar{z} = a - bi$, que corresponde geometricamente ao simétrico de z com relação ao eixo das abscissas.

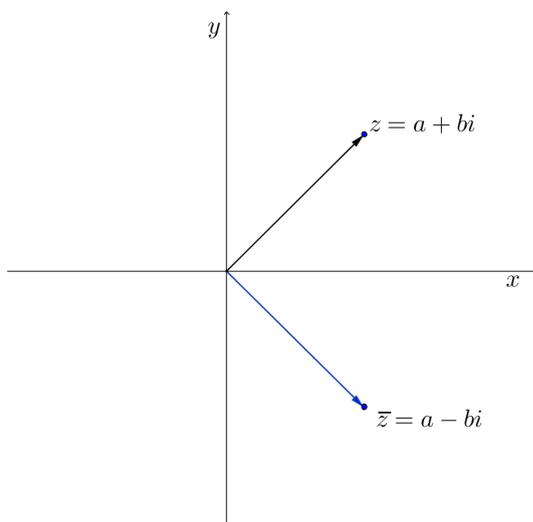
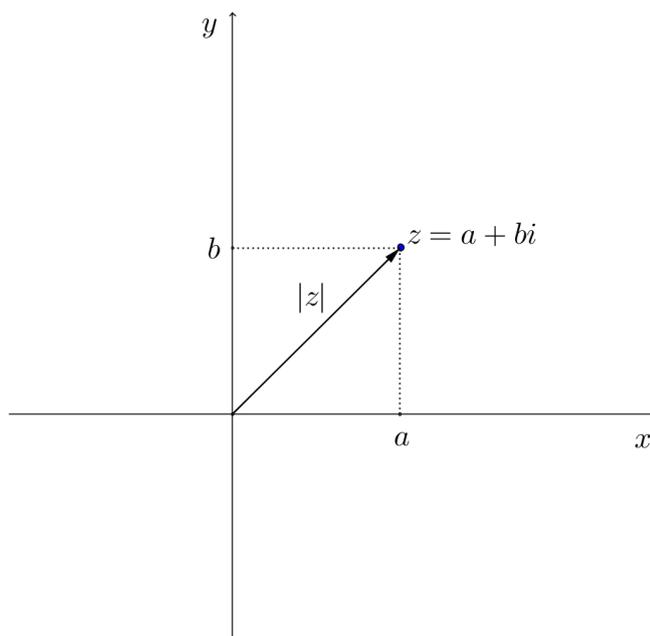


Figura 4.9: Conjugado de z

O **módulo** de um número complexo $z = a + bi$ é o número real não negativo $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. A interpretação geométrica do módulo de z é o módulo do vetor de origem $(0, 0)$ e de extremidade (a, b) .

Figura 4.10: Módulo de z

O módulo tem as seguintes propriedades, para todo $z \in \mathbb{C}$:

- i. $z \cdot \bar{z} = |z|^2$
- ii. $|z| = |\bar{z}| = |-z|$
- iii. $|zw| = |z| \cdot |w|$

4.4 Forma polar ou trigonométrica

Nesta seção veremos a forma trigonométrica, também chamada forma polar dos números complexos. Essa forma relaciona os números complexos com as funções trigonométricas, permitindo, calcular com mais facilidade o produto e a divisão de dois números complexos, as potências e a extração de raízes, bem como interpretar geometricamente cada uma destas operações.

Consideremos um número complexo $z = a + bi$ não nulo. Seja θ o ângulo que o eixo real positivo forma com o vetor correspondente a z no sentido anti-horário, cuja medida em radiano está no intervalo $[0, 2\pi)$. O número real θ é chamado **argumento** principal de z e é denotado por $\arg(z) = \theta$.

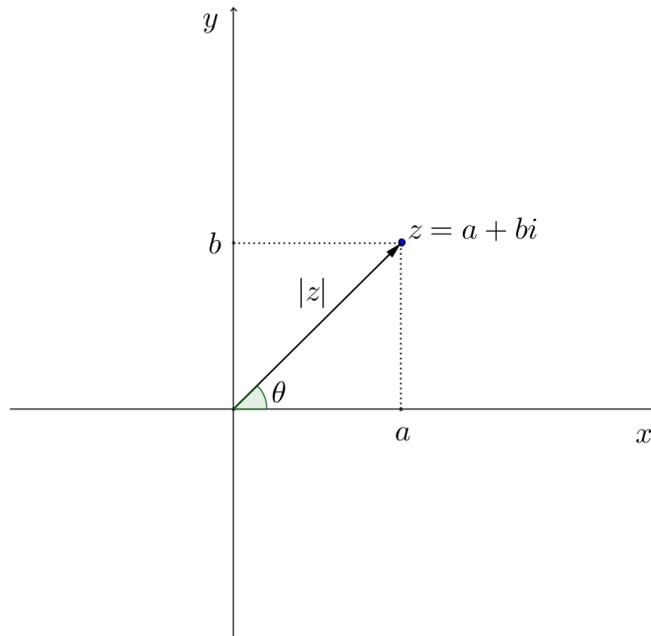


Figura 4.11: Argumento de z

Observe que $\cos\theta = \frac{a}{|z|}$ e $\text{sen}\theta = \frac{b}{|z|}$. Daí, $a = |z|\cos\theta$ e $b = |z|\text{sen}\theta$. Substituindo na forma algébrica temos: $z = a + bi = |z|\cos\theta + |z|i.\text{sen}\theta$

Assim, é sempre possível representar z na forma:

$$z = |z|(\cos\theta + i\text{sen}\theta), \quad \theta \text{ real.} \tag{4.1}$$

Tal representação é chamada *forma trigonométrica ou polar* de z .

Entretanto, qualquer θ' da forma $\theta + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, também satisfaz(4.1), já que as funções seno e cosseno são funções periódicas de período 2π . Portanto, podemos utilizar a expressão:

$$z = |z|(\cos(\theta + 2k\pi) + i\text{sen}(\theta + 2k\pi)) \tag{4.2}$$

Geometricamente, $2k\pi$ corresponde a k voltas no círculo unitário.

Exemplo 4.4.1. *Expresse o número complexo $z = 1 + i$ na forma trigonométrica e represente-o geometricamente.*

Solução:

Como $|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, temos $\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\text{sen}\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Dessa forma, $\theta = \frac{\pi}{4}$.

Logo, $1 + i = \sqrt{2} \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\text{sen}\frac{\pi}{4} \right)$,

ou ainda, $1 + i = \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) + i\text{sen}\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) \right)$, com $k \in \mathbb{Z}$

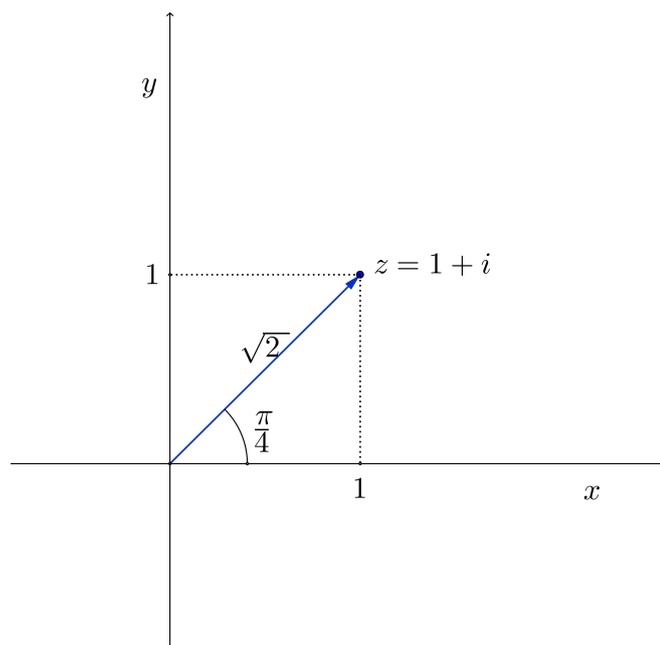


Figura 4.12: Representação geométrica de $z = 1 + i$

Com os conceitos de módulo e argumento principal, daremos uma interpretação geométrica para as operações de multiplicação, divisão e potenciação de números complexos.

Proposição 4.4.1. *Dados $z = |z|(\cos\theta + i\text{sen}\theta)$ e $w = |w|(\cos\theta' + i\text{sen}\theta')$, temos que*

$$z.w = |z|.|w|(\cos(\theta + \theta') + i\text{sen}(\theta + \theta')) \quad (4.3)$$

Demonstração. Utilizando duas expressões trigonométricas bastante conhecidas:

$$\text{sen}(\theta + \theta') = \text{sen}\theta\cos\theta' + \text{sen}\theta'\cos\theta$$

$$\cos(\theta + \theta') = \cos\theta\cos\theta' - \text{sen}\theta\text{sen}\theta'$$

Temos,

$$\begin{aligned} z.w &= |z|(\cos\theta + i\text{sen}\theta).|w|(\cos\theta' + i\text{sen}\theta') \\ &= |z|.|w|.(\cos\theta + i\text{sen}\theta).(\cos\theta' + i\text{sen}\theta') \\ &= |z|.|w|.(\cos\theta\cos\theta' + i\cos\theta\text{sen}\theta' + i\cos\theta'\text{sen}\theta - \text{sen}\theta\text{sen}\theta') \\ &= |z|.|w|.((\cos\theta\cos\theta' - \text{sen}\theta\text{sen}\theta') + i(\text{sen}\theta\cos\theta' + \text{sen}\theta'\cos\theta)) \\ &= |z|.|w|.(\cos(\theta + \theta') + i\text{sen}(\theta + \theta')) \end{aligned}$$

□

Assim, no produto de dois números complexos não nulos, devemos multiplicar os módulos e somar os argumentos. Geometricamente, isso nos remete à composição de uma homotetia com uma rotação, respectivamente.

Exemplo 4.4.2. Determine a forma trigonométrica do produto zw , sendo $z = -2\sqrt{3} + 2i$ e $w = 3\sqrt{3} - 3i$, e represente-o no plano complexo.

Solução:

Como $|z| = \sqrt{(-2\sqrt{3})^2 + 2^2} = \sqrt{16} = 4$, $\cos\theta = \frac{-2\sqrt{3}}{4} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ e $\text{sen}\theta = \frac{1}{2}$, então $\theta = \arg(z) = \frac{5\pi}{6}$.

Como $|w| = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 + (-3)^2} = \sqrt{36} = 6$, $\cos\theta' = \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\text{sen}\theta' = \frac{-1}{2}$, então $\theta' = \arg(w) = \frac{11\pi}{6}$.

Logo, $|z| \cdot |w| = 24$ e $\theta + \theta' = \frac{5\pi}{6} + \frac{11\pi}{6} = \frac{2\pi}{3} + 2\pi$.

Portanto a forma trigonométrica de $z \cdot w$ é:

$$zw = 24 \left(\cos\left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi\right) + i \cdot \text{sen}\left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi\right) \right) = 24 \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i \cdot \text{sen}\frac{2\pi}{3} \right).$$

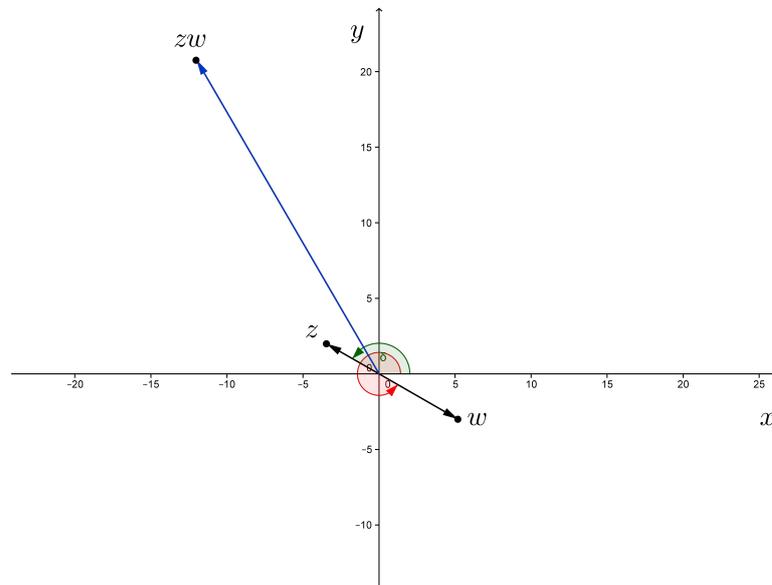


Figura 4.13: $zw = 24 \left(\cos\left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi\right) + i \cdot \text{sen}\left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi\right) \right)$

Exemplo 4.4.3. O que significa multiplicar um número complexo $z \neq 0$ por i ?

Veja que $i = \left(\cos\frac{\pi}{2} + i \cdot \text{sen}\frac{\pi}{2} \right)$. Como no produto de dois números complexos multiplicamos os módulos e somamos os argumentos, e considerando um número complexo $z \neq 0$, de módulo $|z|$ e argumento θ , segue que $z \cdot i = |z| \cdot \left(\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) + i \cdot \text{sen}\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \right)$.

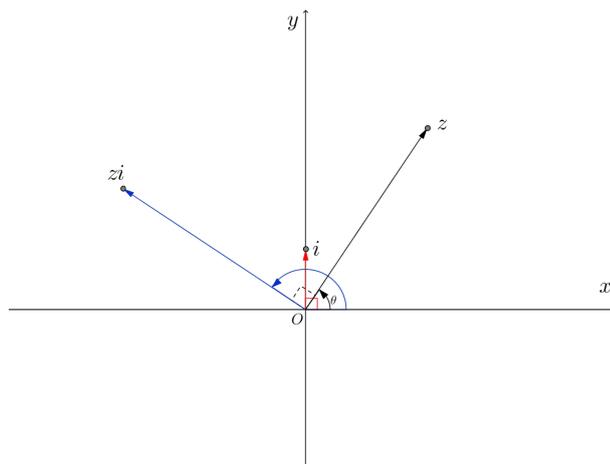


Figura 4.14: Multiplicação de um número complexo $z \neq 0$ por i

Geometricamente, isso significa uma rotação no plano de 90° em torno da origem, no sentido anti-horário.

Exemplo 4.4.4. *Se multiplicarmos um número complexo $z \neq 0$ por i^2 , o que acontece?*

Neste caso teremos duas rotações de 90° , ou seja, uma rotação de 180° . Isso nos remete a uma reflexão em relação a origem, que algebricamente significa multiplicar o número complexo por -1 . Uma boa explicação para a igualdade $i^2 = -1$.

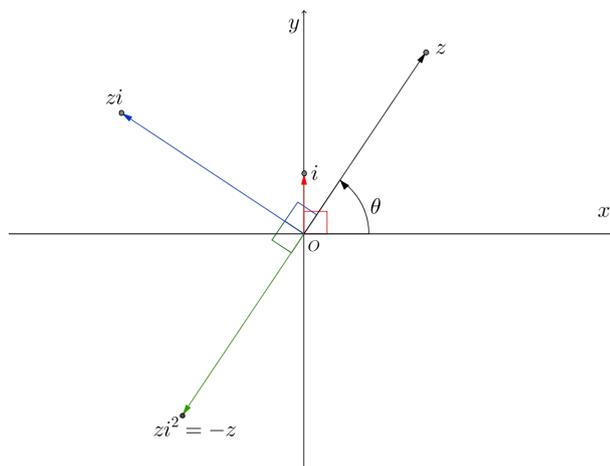


Figura 4.15: Multiplicação de um número complexo $z \neq 0$ por i^2

Veja que, com as notações da proposição 4.4.1, podemos chegar na expressão da divisão de z por w , dada por:

$$\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|} (\cos(\theta - \theta') + i \operatorname{sen}(\theta - \theta')) \quad (4.4)$$

De fato, como $\arg(\bar{w}) = -\arg(w)$, temos:

$$\begin{aligned} \frac{z}{w} &= \frac{z \cdot \bar{w}}{w \cdot \bar{w}} \\ &= \frac{|z| \cdot |\bar{w}| \cdot (\cos(\theta + (-\theta')) + i \operatorname{sen}(\theta + (-\theta')))}{|w| \cdot |\bar{w}| \cdot (\cos(\theta' + (-\theta')) + i \operatorname{sen}(\theta' + (-\theta')))} \\ &= \frac{|z| \cdot (\cos(\theta - \theta') + i \operatorname{sen}(\theta - \theta'))}{|w| \cdot (\cos 0 + i \operatorname{sen} 0)} \\ &= \frac{|z|}{|w|} (\cos(\theta - \theta') + i \operatorname{sen}(\theta - \theta')) \end{aligned}$$

Desta maneira, na divisão de dois números complexos, dividimos os seus módulos e subtraímos os seus argumentos.

Exemplo 4.4.5. *Dados os números complexos $z = 5 + 5i$ e $w = 2 - 2i$, determine a forma trigonométrica do número $\frac{z}{w}$ e represente-o no plano complexo.*

Solução:

$$|z| = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2},$$

$$\cos \theta = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \operatorname{sen} \theta = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \operatorname{logo} \theta = \arg(z) = \frac{\pi}{4}$$

$$|w| = \sqrt{2^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2},$$

$$\cos \theta' = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \operatorname{sen} \theta' = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2}, \operatorname{logo} \theta' = \arg(w) = \frac{7\pi}{4}$$

Portanto a forma trigonométrica de $\frac{z}{w}$ é: (Figura 4.16)

$$\frac{z}{w} = \frac{5\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{7\pi}{4}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{7\pi}{4}\right) \right) = \frac{5}{2} \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} \right) = \frac{5}{2} i.$$

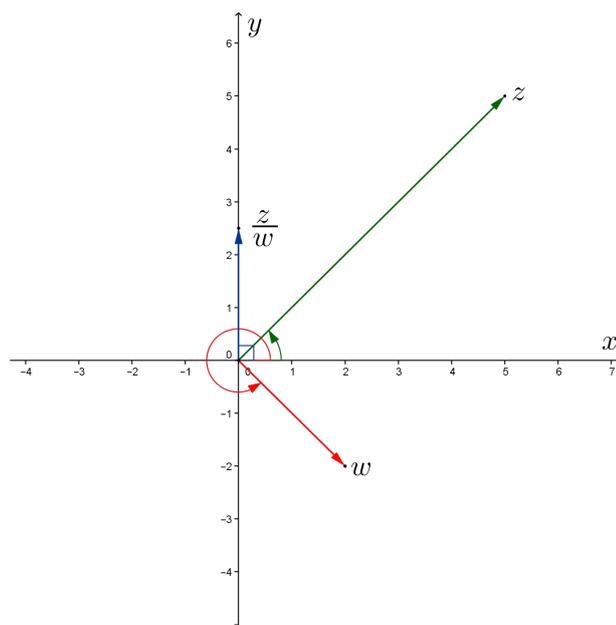


Figura 4.16: $\frac{z}{w} = \frac{5}{2}$

A proposição 4.4.1 nos permite, ainda, encontrar uma expressão para potências de expoente inteiro n cuja base é um número complexo não nulo.

Proposição 4.4.2 (Fórmula de De Moivre). *Dado um número complexo não nulo $z = |z|(\cos\theta + i\text{sen}\theta)$, então, para cada número inteiro n , tem-se:*

$$z^n = |z|^n(\cos(n\theta) + i\text{sen}(n\theta)) \tag{4.5}$$

Demonstração. 1ª parte: Faremos a demonstração por indução sobre o expoente n , quando n for natural.

i. A verificação é imediata para $n = 1$. Com efeito, se $n = 1$, então

$$z^1 = |z|^1(\cos(1.\theta) + i\text{sen}(1.\theta)) = z$$

ii. Sendo $n \geq 1$, suponhamos que a igualdade seja válida para n , ou seja,

$$z^n = |z|^n(\cos(n\theta) + i\text{sen}(n\theta)) \text{ (HI-hipótese de indução)}$$

iii. Verifiquemos que a igualdade é válida para $n + 1$

$$\begin{aligned} z^{n+1} &= z.z^n \\ &= |z|(\cos\theta + i\text{sen}\theta).|z|^n(\cos(n\theta) + i\text{sen}(n\theta)) \quad \text{(HI)} \\ &= |z|.|z|^n(\cos(\theta + n\theta) + i\text{sen}(\theta + n\theta)) \\ &= |z|^{n+1}(\cos((1 + n)\theta) + i\text{sen}((1 + n)\theta)) \end{aligned}$$

Logo,

$z^n = |z|^n(\cos(n\theta) + i\text{sen}(n\theta))$ é válida para todo n natural.

Note que a igualdade também vale para $n=0$. De fato, pois

$$z^0 = 1, |z|^0 = 1, \cos 0 = 1 \text{ e } \text{sen} 0 = 0.$$

Portanto, $z^0 = |z|^0 \cdot (\cos 0 + i\text{sen} 0) = 1$

2ª parte: Seja $n < 0$ um inteiro. Então $-n > 0$ e $z^n = (z^{-1})^{-n}$. Como

$$z^{-1} = \frac{1 \cdot \bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \frac{1}{|z|}(\cos\theta - i\text{sen}\theta) = \frac{1}{|z|}(\cos(-\theta) + i\text{sen}(-\theta)),$$

então, pela igualdade já demonstrada na 1ª parte, temos:

$$(z^{-1})^{-n} = (|z|^{-1})^{-n}(\cos((-n) \cdot (-\theta)) + i\text{sen}((-n) \cdot (-\theta))) = |z|^n(\cos(n\theta) + i\text{sen}(n\theta))$$

Logo, a igualdade vale para todo $n \in \mathbb{Z}$. □

Vale lembrar que a potenciação é definida da maneira usual por:

$$z^0 = 1; \quad z^n = \underbrace{z \dots z}_{n\text{vezes}}; \quad z^{-n} = \underbrace{z^{-1} \dots z^{-1}}_{n\text{vezes}}, \quad \text{se } z \neq 0 \quad \text{e} \quad n \geq 1.$$

Exemplo 4.4.6. Dado o número complexo $z = -1 + \sqrt{3}i$ calcule z^3 .

Solução:

Como $|z| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2$, então $\text{sen}\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\cos\theta = \frac{-1}{2}$.

Logo, $\theta = \frac{2\pi}{3}$. Daí, temos que:

$$z = 2(\cos\frac{2\pi}{3} + i\text{sen}\frac{2\pi}{3})$$

Portanto,

$$z^3 = 2^3(\cos 3 \cdot \frac{2\pi}{3} + i\text{sen} 3 \cdot \frac{2\pi}{3}) = 8(\cos 2\pi + i\text{sen} 2\pi) = 8. \text{ (Figura 4.17)}$$

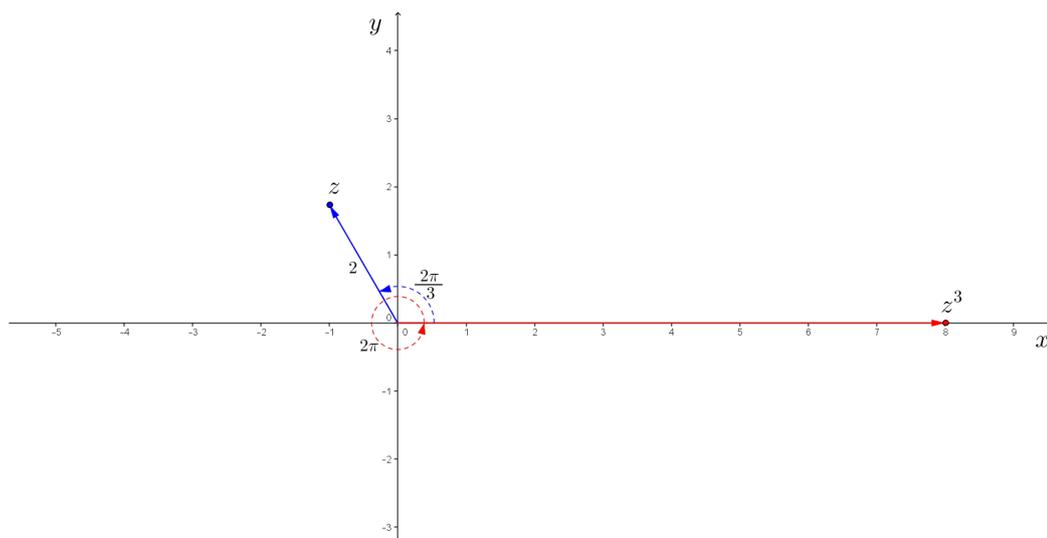


Figura 4.17: $z = -1 + \sqrt{3}i$ e $z^3 = 8(\cos 2\pi + i \cdot \text{sen} 2\pi)$

4.5 Identidade de Euler: $e^{i\pi} + 1 = 0$

Segundo BOYER(2010, p.305):

“Os três símbolos e, π, i pelos quais Euler em grande parte é responsável podem ser combinados com dois dos inteiros mais importantes, 0 e 1, na célebre igualdade $e^{i\pi} + 1 = 0$, que contém os cinco números mais significativos (bem como a mais importante relação e a mais importante operação) em toda a Matemática.”

Leonhard Euler (1707-1783) foi um matemático cujo nome figura em inúmeros ramos da Matemática e deve-se a ele a notabilíssima fórmula

$$e^{ix} = \cos x + i \text{sen} x.$$

Assim, considerando $x = \pi$, a igualdade se transforma em

$$e^{i\pi} + 1 = 0,$$

chamada em alguns livros de matemática de *Identidade de Euler*. Ele definiu a função exponencial para números complexos e descobriu sua relação com funções trigonométricas. Então para demonstrá-la compararam-se as séries de Taylor do seno, do cosseno e da exponencial.

Com isso, podemos expressar todo número complexo não nulo na forma

$$z = r(\cos \theta + i \text{sen} \theta) = r e^{i\theta}, \text{ onde } r = |z|$$

Portanto, o produto entre dois números complexos se expressa como:

$$(re^{i\theta})(r'e^{i\theta'}) = (r.r')e^{i(\theta+\theta')}$$

e a fórmula de De Moivre como:

$$(re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$$

4.6 Extração de raízes n-ésimas

Definição 4.6.1. *Uma raiz n-ésima de um número complexo z, com n natural, é um número w tal que $w^n = z$*

Exemplo 4.6.1. *As raízes quartas complexas de $z = 81$ são $-3, 3, -3i$ e $3i$.*

Com efeito, $(-3)^4 = 81$; $(3)^4 = 81$; $(-3i)^4 = 81$; $(3i)^4 = 81$.

Proposição 4.6.1. *Para cada número natural n, um número complexo $z \neq 0$ tem exatamente n raízes complexas n-ésimas, a saber,*

$$z_k = \sqrt[n]{\rho} \left(\cos \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \right), k = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (4.6)$$

onde $\rho = |z| > 0$ e $\theta = \operatorname{arg}(z)$.

Demonstração. Seja $n \geq 2$ um número natural dado. Considere os números complexos z e w na forma polar:

$$z = \rho(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta), \text{ onde } \rho = |z| \text{ e } \theta = \operatorname{arg}(z)$$

$$w = r(\cos\phi + i\operatorname{sen}\phi), \text{ onde } r = |w| \text{ e } \phi = \operatorname{arg}(w)$$

Pela definição 4.6.1, temos que $\sqrt[n]{z} = w$, tal que $w^n = z$. Logo,

$$r^n(\cos n\phi + i\operatorname{sen} n\phi) = \rho(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$$

se, e somente se,

$$\begin{cases} r^n = \rho \\ n\phi = \theta + 2k\pi \end{cases} \iff \begin{cases} r = \sqrt[n]{\rho}, r > 0 & \text{e} & r \in \mathbb{R} \\ \phi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Portanto, temos

$$w = z_k = \sqrt[n]{\rho} \left(\cos \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \right), k \in \mathbb{Z}$$

Supondo $0 \leq \theta < 2\pi$, vamos determinar os valores de k para os quais resultam valores de ϕ compreendidos entre 0 e 2π :

$$\begin{aligned} k = 0 &\Rightarrow \phi = \frac{\theta}{n} \\ k = 1 &\Rightarrow \phi = \frac{\theta + 2\pi}{n} \\ k = 2 &\Rightarrow \phi = \frac{\theta + 2 \cdot 2\pi}{n} \\ &\vdots \\ k = n - 1 &\Rightarrow \phi = \frac{\theta + 2 \cdot (n-1)\pi}{n} \end{aligned}$$

Estes n valores de ϕ não são congruentes, pois se encontram no intervalo $[0, 2\pi[$. Portanto, originam n valores distintos para z_k .

Note que considerando $k = n$ temos $\phi = \frac{\theta}{n} + 2\pi$. Este valor é congruente ao valor obtido com $k = 0$, sendo tal valor dispensável. O raciocínio é análogo para $k = n + 1, n + 2, n + 3 \dots$ e $k = -1, -2, -3, \dots$

Desta maneira, para obter z_k é suficiente fazer $k = 0, 1, 2, 3, \dots, n - 1$, ou seja, as raízes complexas n -ésimas de z , distintas são dadas por:

$$z_k = \sqrt[n]{\rho} (\cos \phi_k + i \operatorname{sen} \phi_k),$$

onde $\phi_k = \frac{\theta + 2k\pi}{n}$ e $k = 0, 1, \dots, n - 1$ □

Vimos que z_k pode assumir n valores distintos, todos com mesmo módulo. Desta forma, os afixos destes n valores são pontos de um mesmo círculo de raio igual ao módulo de z_k . Perceba que os argumentos principais de z_k formam uma progressão aritmética de primeiro termo $\frac{\theta}{n}$ e razão $\frac{2\pi}{n}$. Dividindo o círculo de centro na origem e raio $|z_k|$, em n partes iguais, observamos que os afixos são vértices do polígono regular de n lados, inscrito neste círculo.

Exemplo 4.6.2. *Determine as raízes complexas quartas de $z = 81$.*

Como $\rho = 81$ e $\theta = \arg(z) = 0$, então as raízes quartas de z tem como módulo o número $r = \sqrt[4]{81} = 3$ e seus argumentos principais são determinados por:

$$\phi_k = \frac{0 + 2k\pi}{4} = \frac{k\pi}{2}, k = 0, 1, 2, 3$$

Logo,

$$\phi_0 = \frac{0 \cdot \pi}{2} = 0 \Rightarrow z_0 = 3(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0) \Rightarrow z_0 = 3$$

$$\phi_1 = \frac{1 \cdot \pi}{2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow z_1 = 3(\cos \frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}) \Rightarrow z_1 = 3i$$

$$\phi_2 = \frac{2 \cdot \pi}{2} = \pi \Rightarrow z_2 = 3(\cos \pi + i \operatorname{sen} \pi) \Rightarrow z_2 = -3$$

$$\phi_3 = \frac{3 \cdot \pi}{2} = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow z_3 = 3(\cos \frac{3\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2}) \Rightarrow z_3 = -3i$$

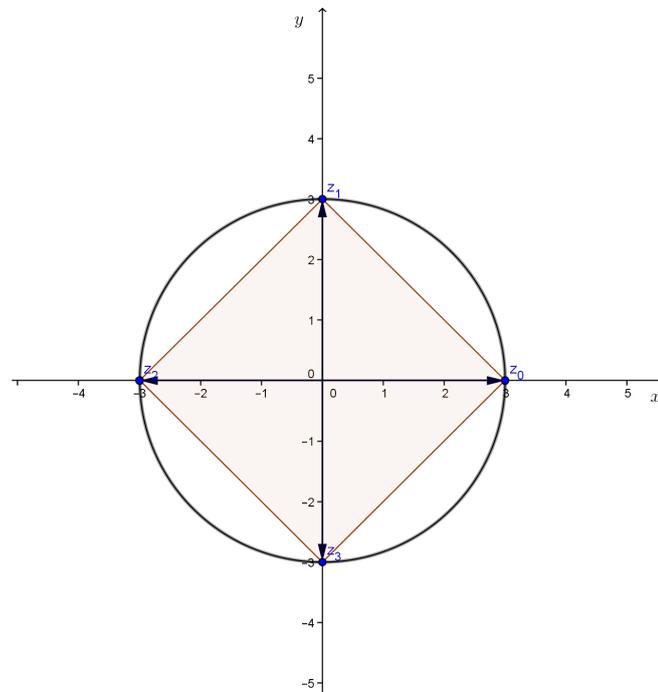


Figura 4.18: Raízes complexas quartas de $z = 81$

Note que as raízes quartas de 81 dividem o círculo centrado na origem e de raio 3, em 4 partes iguais, ou seja, são vértices de um quadrado inscrito neste círculo, como mostra a Figura 4.18.

Exemplo 4.6.3. Determine as raízes complexas oitavas de $z = 1$.

Como $\rho = 1$ e $\theta = \arg(z) = 0$, então as raízes quartas de z tem como módulo o número $r = \sqrt[8]{1} = 1$ e seus argumentos principais são determinados por:

$$\phi_k = \frac{0 + 2k\pi}{8} = \frac{k\pi}{4}, k = 0, 1, 2, \dots, 7$$

Logo,

$$\phi_0 = \frac{0 \cdot \pi}{4} = 0 \Rightarrow z_0 = \cos 0 + i \operatorname{sen} 0 \Rightarrow z_0 = 1$$

$$\phi_1 = \frac{1 \cdot \pi}{4} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow z_1 = \cos \frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \Rightarrow z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\phi_2 = \frac{2 \cdot \pi}{4} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow z_2 = \cos \frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} \Rightarrow z_2 = i$$

$$\phi_3 = \frac{3 \cdot \pi}{4} = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow z_3 = \cos \frac{3\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{3\pi}{4} \Rightarrow z_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\phi_4 = \frac{4 \cdot \pi}{4} = \pi \Rightarrow z_4 = \cos \pi + i \operatorname{sen} \pi \Rightarrow z_4 = -1$$

$$\phi_5 = \frac{5 \cdot \pi}{4} = \frac{5\pi}{4} \Rightarrow z_5 = \cos \frac{5\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{5\pi}{4} \Rightarrow z_5 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\phi_6 = \frac{6 \cdot \pi}{4} = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow z_6 = \cos \frac{3\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} \Rightarrow z_6 = -i$$

$$\phi_7 = \frac{7 \cdot \pi}{4} = \frac{7\pi}{4} \Rightarrow z_7 = \cos \frac{7\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{7\pi}{4} \Rightarrow z_7 = \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}$$

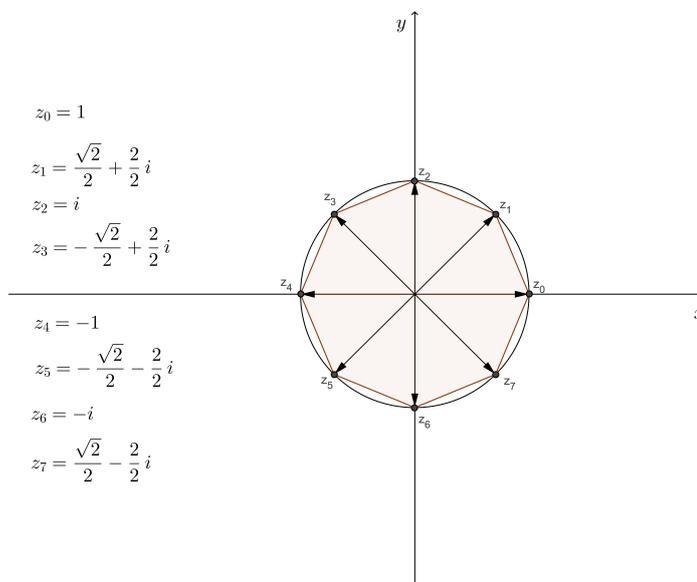


Figura 4.19: Raízes complexas oitava de $z = 1$

Veja na Figura 4.19 a representação geométrica das raízes oitavas de 1. Note que estas dividem o círculo centrado na origem e de raio 1, em 8 partes iguais, ou seja, são vértices de um polígono de 8 lados inscrito neste círculo.

As raízes complexas n -ésimas de 1 são chamadas *raízes n -ésimas da unidade*, dadas por:

$$z_k = \sqrt[n]{\rho}(\cos\phi_k + i\text{sen}\phi_k), \tag{4.7}$$

onde $\phi_k = \frac{2k\pi}{n}$ e $k = 0, 1, \dots, n - 1$.

Geometricamente, estas raízes são vértices de um polígono regular de n lados inscrito num círculo com centro na origem e raio 1, tendo um dos vértices no ponto 1. É interessante ressaltar que conhecendo-se uma das raízes n -ésimas de um número complexo z , podemos determinar todas as outras raízes n -ésimas, multiplicando-a pelas raízes n -ésimas da unidade.

Exemplo 4.6.4. *Determine as raízes complexas oitavas de 256.*

Sabendo que 2 é uma raiz oitava de 256, para determinar as outras raízes vamos multiplicar por 2 cada uma das raízes oitavas da unidade encontradas no exemplo 4.6.3. Assim, as oito raízes complexas oitavas de 256 são:

$$2, \sqrt{2} + i\sqrt{2}, 2i, -\sqrt{2} + i\sqrt{2}, -2, -\sqrt{2} - i\sqrt{2}, -2i, \sqrt{2} - i\sqrt{2}.$$

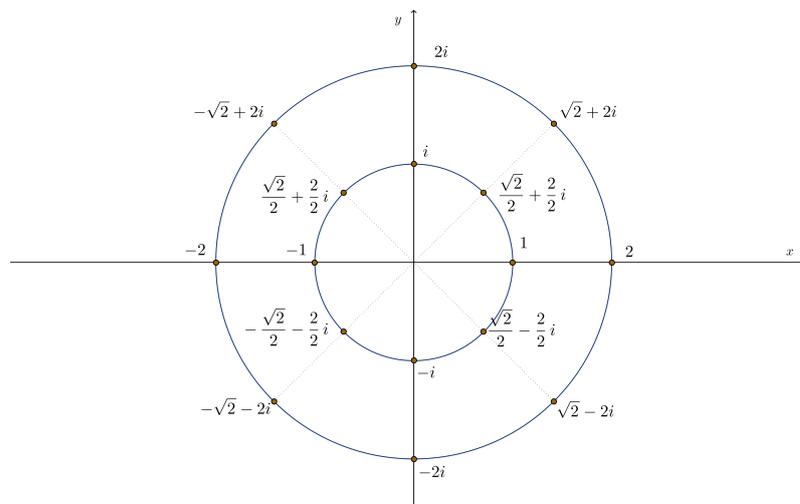


Figura 4.20: Raízes complexas oitava de 256

4.7 Aplicações

Os números complexos podem ser utilizados para resolver problemas de Aritmética, Geometria, Física, dentre outros. Vejamos:

Exemplo 4.7.1. *Mostre que dados dois inteiros m e n , que são somas de dois quadrados (de números naturais), o seu produto também é uma soma de dois quadrados.*

Solução:

Escreva $m = a^2 + b^2$ e $n = c^2 + d^2$ com a, b, c, d naturais. Considere, agora, os números complexos $z = a + bi$ e $w = c + di$. Dai, temos que:

$$\begin{aligned} |z| &= \sqrt{a^2 + b^2} \Rightarrow |z|^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow |z|^2 = m \\ |w| &= \sqrt{c^2 + d^2} \Rightarrow |w|^2 = c^2 + d^2 \Rightarrow |w|^2 = n. \end{aligned}$$

Logo,

$$mn = |z|^2 |w|^2 = |(a + bi) \cdot (c + di)|^2 = |ac - bd + (ad + bc)i|^2 = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2.$$

Podemos escrever, por exemplo, $(2^2 + 5^2)(3^2 + 4^2) = (2 \cdot 3 - 5 \cdot 4)^2 + (2 \cdot 4 + 5 \cdot 3)^2 = 14^2 + 23^2$

Exemplo 4.7.2 (A ilha do tesouro¹). *Dois piratas decidem enterrar um tesouro em uma ilha. Escolhem, como pontos de referência, uma árvore e duas pedras. Começando na árvore, medem o número de passos até a primeira pedra. Em seguida, dobram, segundo um ângulo de 90° , à direita e caminham o mesmo número de passos até alcançar um ponto, onde fazem uma marca. Voltam à árvore, medem o número de passos desde a árvore até a segunda pedra, dobram à esquerda, segundo um ângulo de 90° , e caminham o mesmo número de passos até alcançar um ponto, onde fazem outra marca. Finalmente, enterram o tesouro exatamente no ponto médio entre as duas marcas.*

Anos mais tarde, os dois piratas voltam à ilha e decidem desenterrar o tesouro, mas, para sua decepção, constatam que a árvore não existe mais (o vento, a chuva e os depredadores a haviam arrancado). Então um dos piratas decide arriscar. Escolhe ao acaso um ponto da ilha e diz: “Vamos imaginar que a árvore estivesse aqui.” Repete então os mesmos procedimentos de quando havia enterrado o tesouro: conta os passos até a primeira pedra, dobra à direita, etc., e encontra o tesouro.

A pergunta é: esse pirata era sortudo ou um matemático?

¹Revista do Professor de Matemática n° 47

Solução:

No plano complexo, a diferença entre dois complexos traduz o vetor com origem no primeiro ponto e extremidade no segundo, ou seja, $\overrightarrow{AB} = B - A$. De fato, dados dois complexos A, B eles podem ser identificados como pontos do plano, e no plano esses pontos podem se representado por vetores $\vec{a} = A - 0$ e $\vec{b} = B - 0$, em que \vec{a} é um vetor com origem em $(0,0)$ e extremidade em A , e \vec{b} é um vetor com origem em $(0,0)$ e extremidade em B , logo a diferença $B - A = \vec{b} - \vec{a}$ é o vetor com origem em A e extremidade em B como podemos ver na Figura 4.21.

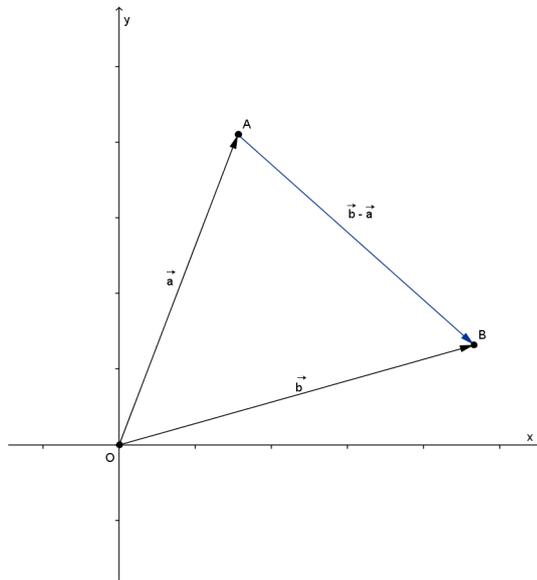


Figura 4.21: $B - A$

Além disso, a multiplicação de um número complexo por i significa, geometricamente, uma rotação no plano de 90° em torno da origem, no sentido anti-horário.

A Figura 4.22 ilustra a situação descrita no problema. Sendo A árvore, e P e Q as pedras, o tesouro será enterrado no ponto T médio dos pontos P' e Q' . Considerando os pontos pertencentes ao plano complexo não importando onde esteja a origem.

Como $PP' = i(PA)$, ou seja, PA sofreu uma rotação de 90° no sentido anti-horário resultando em PP' , temos que $P' - P = i(A - P)$. Logo, $P' = P + i(P - A)$. E usando um raciocínio análogo, com a rotação ser no sentido horário, obtemos $Q' = Q - i(Q - A)$.

Portanto,

$$T = \frac{P' + Q'}{2} = \frac{P + i(P - A) + Q - i(Q - A)}{2} = \frac{P + Q}{2} + i \frac{Q - P}{2}$$

Concluimos então, que a localização do tesouro não depende da posição da árvore. Logo, o pirata era um matemático.

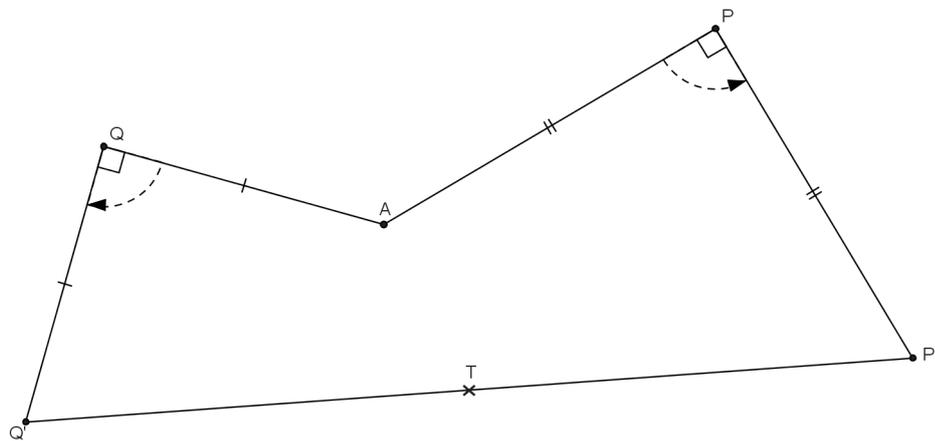


Figura 4.22: Representação geométrica do problema: A ilha do tesouro

Exemplo 4.7.3 (Números Complexos na Engenharia Elétrica - (DANTE, 2011, p.272)).

Em circuitos de corrente alternada, por exemplo, as instalações elétricas residenciais, as grandezas elétricas são analisadas com o auxílio dos números complexos, o que facilita muito os cálculos. A relação $U = Ri$, estudada na Física do ensino médio e que utiliza dos números reais, torna-se $U = Zi$, em que U é a tensão, Z é a impedância e i é a corrente elétrica. Sendo que essas grandezas passam a ser representadas através de números complexos. Para que não haja confusão entre i , símbolo da corrente elétrica, e i , unidade imaginária, os engenheiros elétricos usam j como unidade imaginária na representação algébrica $a + bj$. Além disso usam a notação $|w|\angle\theta$ para forma trigonométrica $|w|(\cos\theta + i\sin\theta)$ do número complexo w .

Com base no texto acima, vamos resolver o problema a seguir: Uma fonte de tensão,

de valor eficaz $220\angle 0^\circ$, alimenta uma carga de impedância $Z = (10 + 10j)$ ohm. Obtenha a corrente fornecida pela fonte.

Solução:

Como $U = Zi \Rightarrow i = \frac{U}{Z}$, para efetuar essa divisão, é preferível ter U e Z na forma trigonométrica. Já temos $U = 220\angle 0^\circ = 220(\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ)$, e agora precisamos obter a forma trigonométrica de Z :

$$Z = 10 + 10j \Rightarrow |Z| = \sqrt{10^2 + 10^2} = 10\sqrt{2}$$

Segue que

$$\left. \begin{array}{l} \cos\theta = \frac{10}{10\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \text{sen}\theta = \frac{10}{10\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \theta = 45^\circ$$

Então: $10 + 10j = 10\sqrt{2}(\cos 45^\circ + j \sin 45^\circ) = 10\sqrt{2}\angle 45^\circ$.

Assim a corrente fornecida pela fonte é dada por:

$$i = \frac{U}{Z} = \frac{220}{10\sqrt{2}} (\cos(0^\circ - 45^\circ) + j \sin(0^\circ - 45^\circ)) = 11\sqrt{2} [\cos(-45^\circ) + j \sin(-45^\circ)]$$

$$i = 11\sqrt{2} [\cos(45^\circ) - j \sin(45^\circ)]$$

$$i = 11\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}j \right)$$

$$i = 11 - 11j \text{ (ou } 11\sqrt{2}\angle -45^\circ\text{)}.$$

Capítulo 5

Funções Racionais em \mathbb{C}

Neste capítulo estudaremos certas funções particulares de uma variável complexa, as *Transformações de Möbius*, que são composições de transformações elementares (translações, rotações, homotetia e inversão) e possuem propriedades geométricas, algébricas, aritméticas e dinâmicas bem interessantes. Limitaremos nosso estudo direcionando-o para o Ensino Médio, procurando associar tais transformações às operações com números complexos vistas no Capítulo 4.

5.1 Transformações elementares em \mathbb{C}

Definição 5.1.1. *Seja $z = x + yi$ e $\beta = a + bi$ números complexos, com β fixo, definimos **translação** de z por β como sendo a transformação $T_\beta(z) = z + \beta = (x + a) + (y + b)i$.*

Note que tal definição está relacionada a adição de números complexos (seção 4.3), pois a transformação T leva cada número complexo z no seu transladado por β . Geometricamente, corresponde ao vetor soma $z + \beta$. (Figura 5.1)

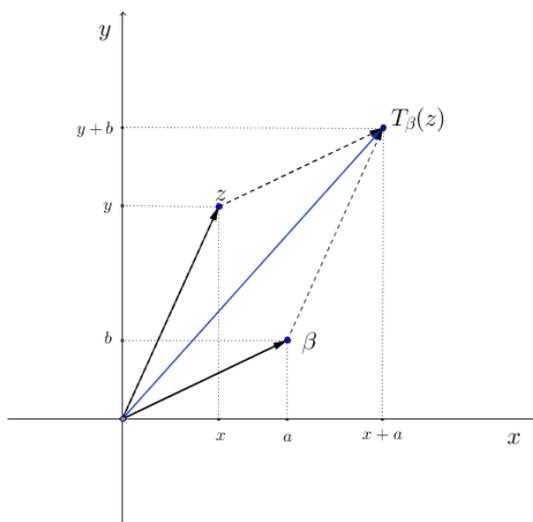


Figura 5.1: Translação $T_\beta(z) = z + \beta$

Exemplo 5.1.1. *Vejamos o que acontece com o triângulo cujos vértices são os números complexos $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 3 + 2i$ e $z_3 = 2 + 4i$ aplicando uma translação por $\beta = 4 - 3i$.*

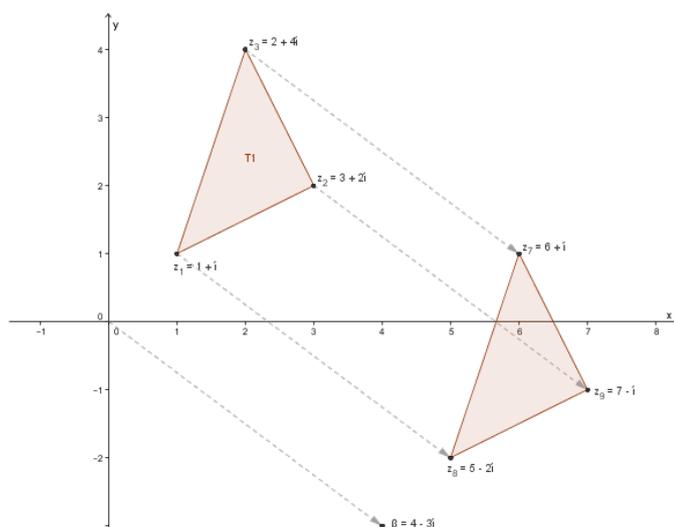


Figura 5.2: Translação do triângulo T_1 por $\beta = 4 - 3i$

Definição 5.1.2. *Se $\theta \in \mathbb{R}$, definimos **rotação de θ radianos** como sendo a transformação $R_\theta(z) = e^{i\theta}z$.*

Note que tal definição está relacionada a multiplicação de números complexos tendo um deles módulo igual a 1. Geometricamente, corresponde a rotação de z em θ radianos, mantendo o mesmo módulo. (Figura 5.3)

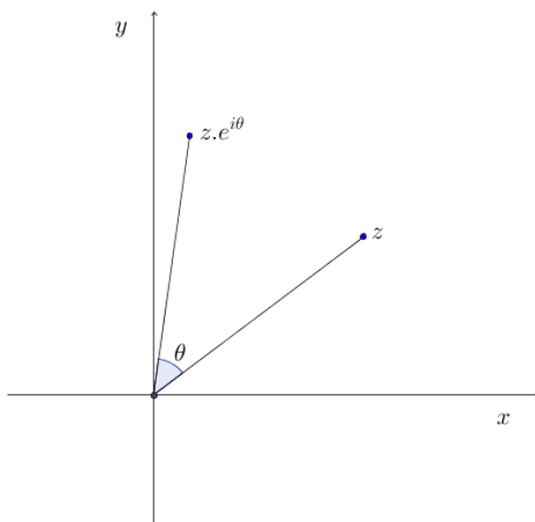


Figura 5.3: Rotação $R_\theta(z) = e^{i\theta}z$

Exemplo 5.1.2. Na Figura 5.4, o triângulo T1 sofreu uma rotação de $\frac{\pi}{3}$ radianos pela transformação $R_{\frac{\pi}{3}}(z) = z.e^{i\frac{\pi}{3}}$ obtendo o triângulo T1' e de $\frac{2\pi}{3}$ radianos pela transformação $R_{\frac{2\pi}{3}}(z) = z.e^{i\frac{2\pi}{3}}$ obtendo o triângulo T2'.

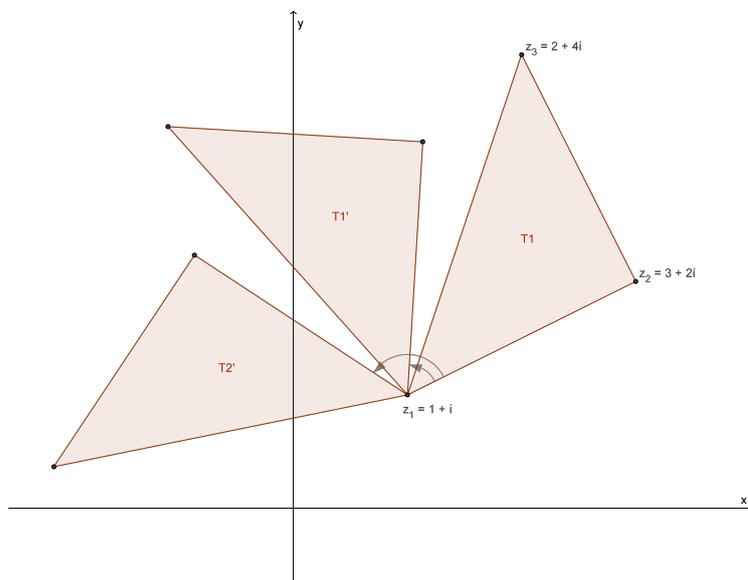


Figura 5.4: Rotação de T1

Definição 5.1.3. Seja $\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq 0$, definimos a **multiplicação por α** como sendo a transformação $H_\alpha(z) = \alpha z$.

Devemos ressaltar que se $\alpha \in \mathbb{R}$ então temos uma **homotetia**. Neste caso, o argumento de z não se altera. Quando $\alpha > 1$ chamamos dilatação, quando $0 < \alpha < 1$ chamamos contração e quando $\alpha = 1$ nada muda. Tal α é chamado fator multiplicativo. Temos um exemplo de homotetia na Figura 5.5:

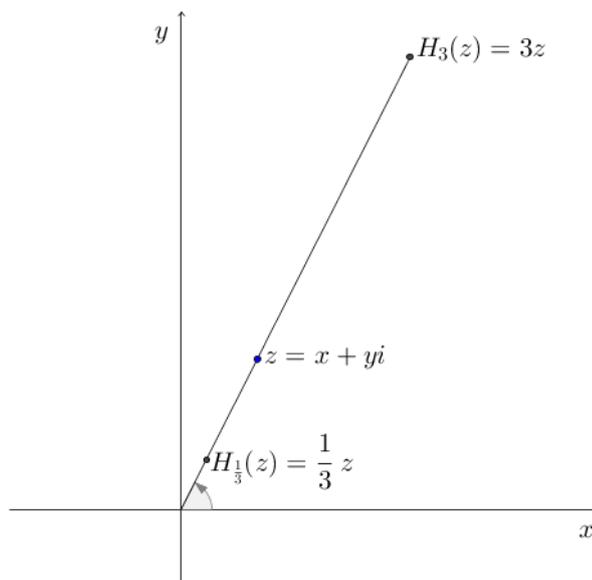


Figura 5.5: Homotetias: $H_{\frac{1}{3}}(z) = \frac{1}{3}z$ e $H_3(z) = 3z$

Exemplo 5.1.3. Vejamos na Figura 5.6 o que acontece com o triângulo cujos vértices são os números complexos $z_1 = 2 + 2i$, $z_2 = 4 + 3i$ e $z_3 = 3 + 5i$ aplicando uma homotetia com fator multiplicativo 2 .

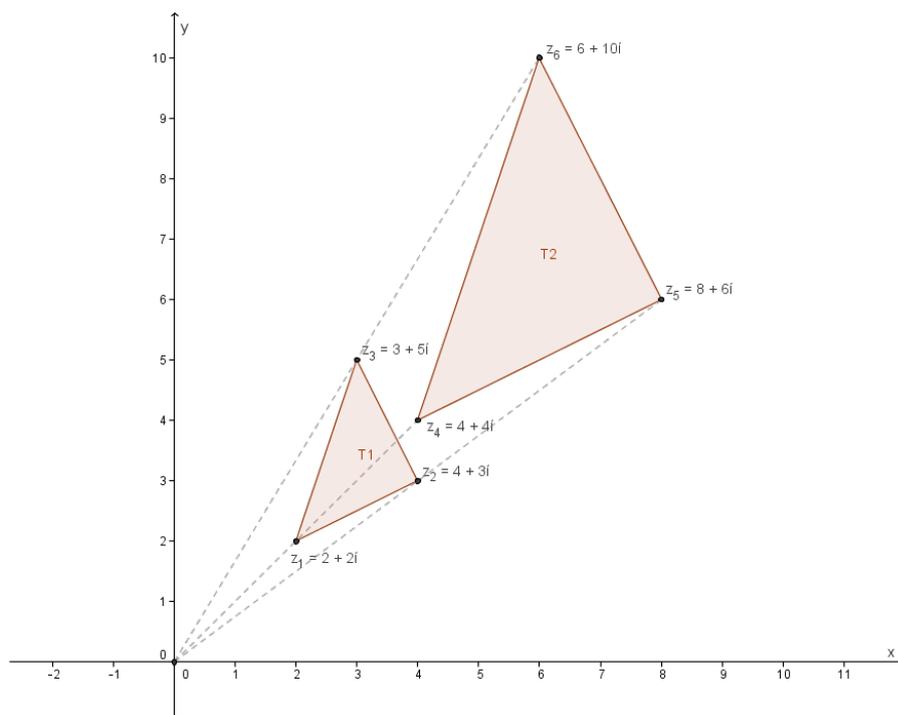


Figura 5.6: Dilatação do triângulo T1

Escrevendo $\alpha = \rho e^{i\theta}$, com $\rho, \theta \in \mathbb{R}$ e $\rho > 0$, na forma polar, podemos interpretar a transformação H_α como sendo a composição da homotetia H_ρ com fator multiplicativo ρ , e da rotação R_θ de θ radianos, ou seja,

$$H_\alpha(z) = \alpha \cdot z = \rho e^{i\theta} \cdot z = \rho \cdot R_\theta(z) = H_\alpha(R_\theta(z))$$

para todo $z \in \mathbb{C}$

Exemplo 5.1.4. *Dados os números complexos $z = 1 + i$ e $\alpha = 2i$ representamos a multiplicação de z por α da seguinte maneira: $H_{2i}(1 + i) = 2i \cdot (1 + i)$.*

Algebricamente, temos que $H_{2i}(1 + i) = -2 + 2i$. E geometricamente, dizemos que o argumento de z aumentou $\frac{\pi}{2}$ radianos e seu módulo dobrou, como podemos perceber na Figura 5.7, ou seja, aconteceu uma rotação de $\frac{\pi}{2}$ radianos e uma homotetia de fator multiplicativo 2. Isso pode ser justificado pela equação (4.3) da proposição 4.4.1.

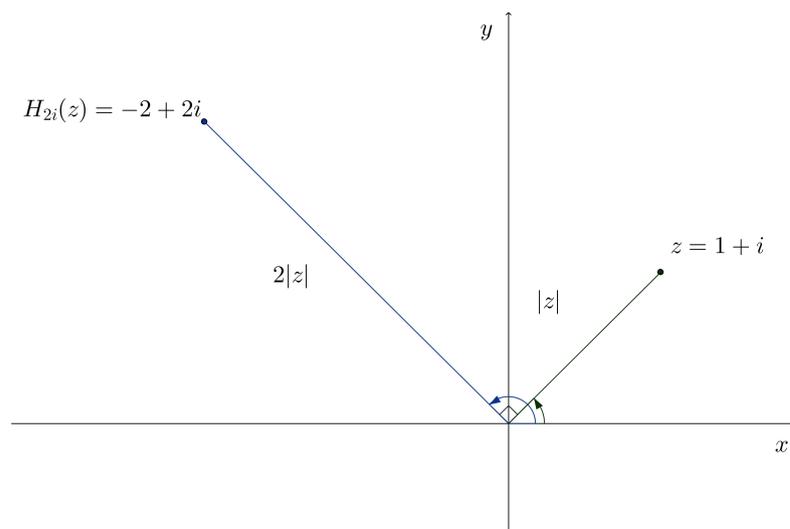


Figura 5.7: $H_{2i}(1 + i) = -2 + 2i$

Definição 5.1.4. A transformação C definida por $C(z) = \bar{z}$ é chamada **conjugação**.

Vimos que algebricamente o conjugado de um número complexo $z = a+bi$ é $\bar{z} = a-bi$. Geometricamente, isso significa que C transforma cada ponto z na sua *reflexão* em relação ao eixo real. (Figura 5.8)

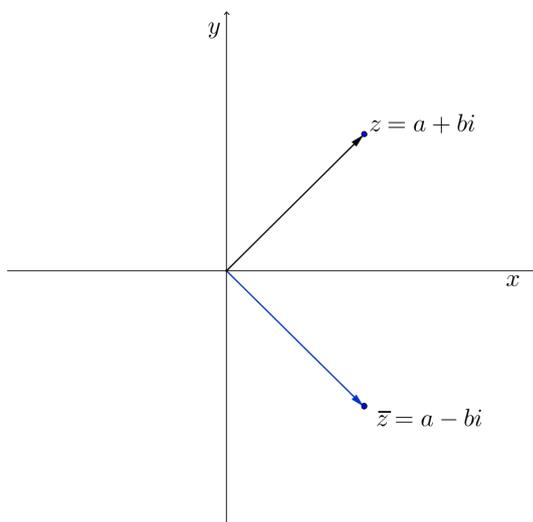


Figura 5.8: $z=a+bi$ e $\bar{z} = a - bi$

Exemplo 5.1.5. Veja na Figura 5.9 que C transforma cada ponto do triângulo T_1 na sua reflexão em relação ao eixo real. De fato, pois os vértices do triângulo T'_1 são dados por $z'_1 = \bar{z}_1$, $z'_2 = \bar{z}_2$ e $z'_3 = \bar{z}_3$.

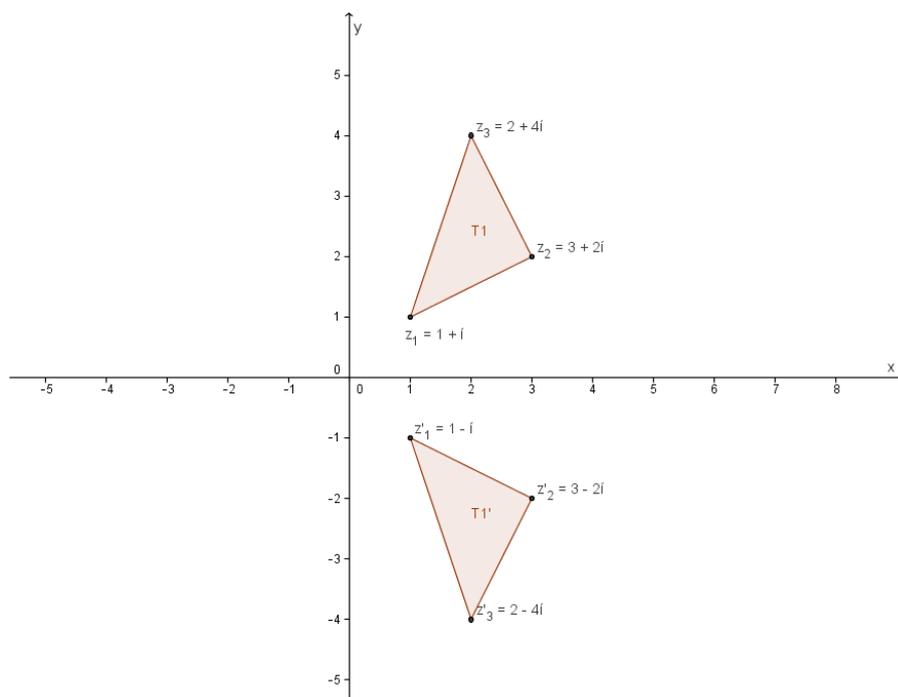


Figura 5.9: Reflexão do triângulo T1 em relação ao eixo real

Definição 5.1.5. Dado $z = |z|e^{i\theta}$, a transformação *inversão em relação ao círculo unitário* é definida como sendo

$$I(z) = \frac{z}{|z|^2} = \frac{1}{|z|}e^{i\theta}.$$

A transformação I leva z no número complexo com mesmo argumento e com módulo igual a $\frac{1}{|z|}$. Logo, $I(z)$ está situado na reta que passa pela origem e por z . (Figura 5.10)

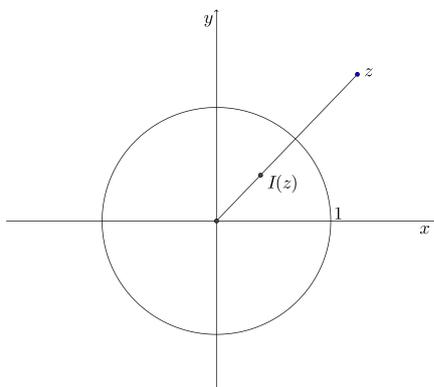


Figura 5.10: $z = |z|e^{i\theta}$ e $I(z) = \frac{z}{|z|^2} = \frac{1}{|z|}e^{i\theta}$

Definição 5.1.6. *Seja dado $z = |z|e^{i\theta}$. A transformação $J(z) = \frac{1}{z}$ é chamada **inversão**.*

A transformação J pode ser interpretada como a composição da inversão I em relação ao círculo unitário com conjugação C . De fato,

$$J(z) = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \overline{I(z)}$$

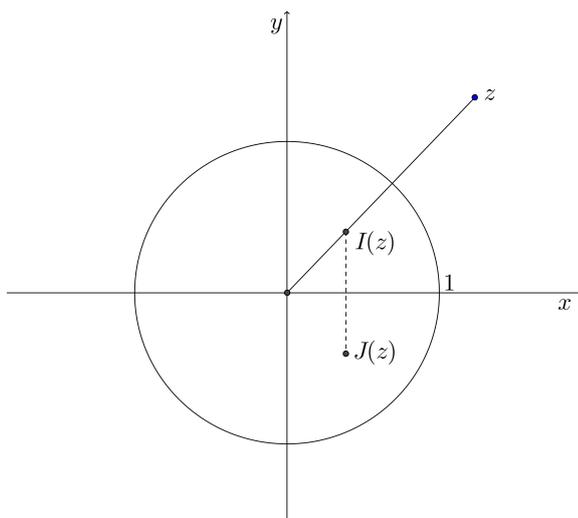


Figura 5.11: $z = |z|e^{i\theta}$, $I(z) = \frac{z}{|z|^2} = \frac{1}{|z|}e^{i\theta}$ e $J(z) = \overline{I(z)}$

Assim, os pontos que ficam fora do círculo unitário são levados ao interior do círculo, e reciprocamente. Os pontos sobre o círculo são simplesmente refletidos no eixo real.

Exemplo 5.1.6. *As regiões T'_1 e T'_2 na Figura 5.12 representam, respectivamente, a imagem por I e J dos pontos de T_1 .*

Podemos perceber uma deformação em relação a figura original. E por que isso acontece? Considere as retas r_1 , r_2 e r_3 na Figura 5.13. Note que a imagem por I dos pontos destas retas são os círculos λ_1 , λ_2 e λ_3 e por J , são os círculos λ_1 , λ'_2 e λ'_3 , ou seja, a inversão transformou retas em círculos. *(Com o intuito de facilitar a visualização fizemos uma associação entre a reta e sua imagem utilizando a mesma cor.)*

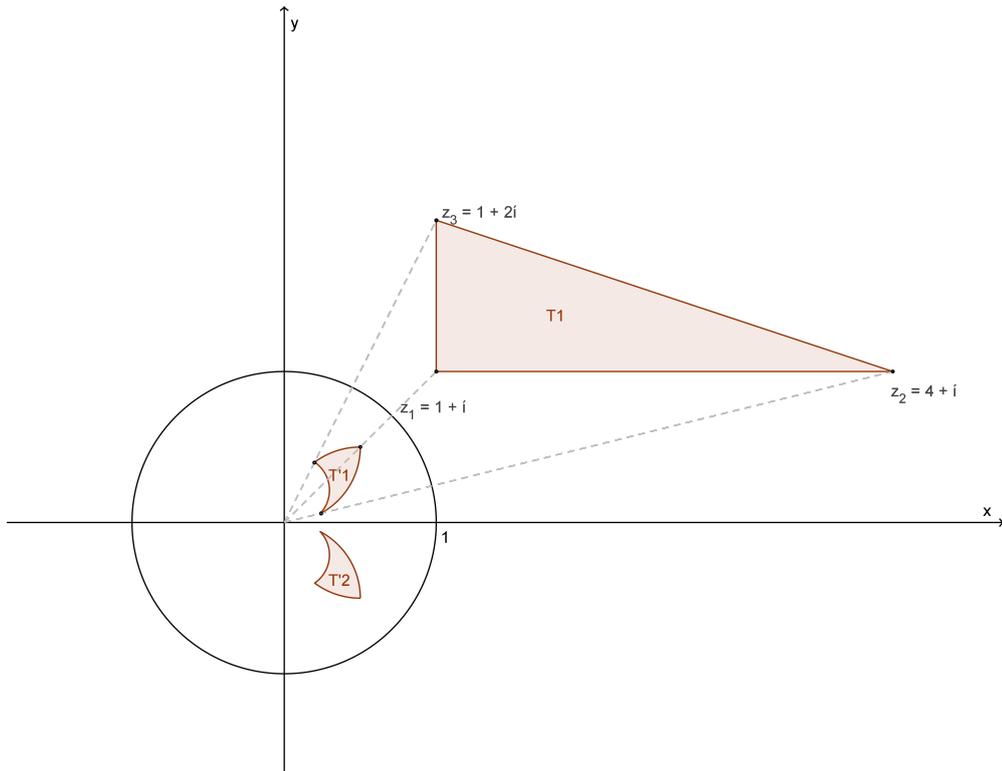


Figura 5.12: Inversão do triângulo T_1

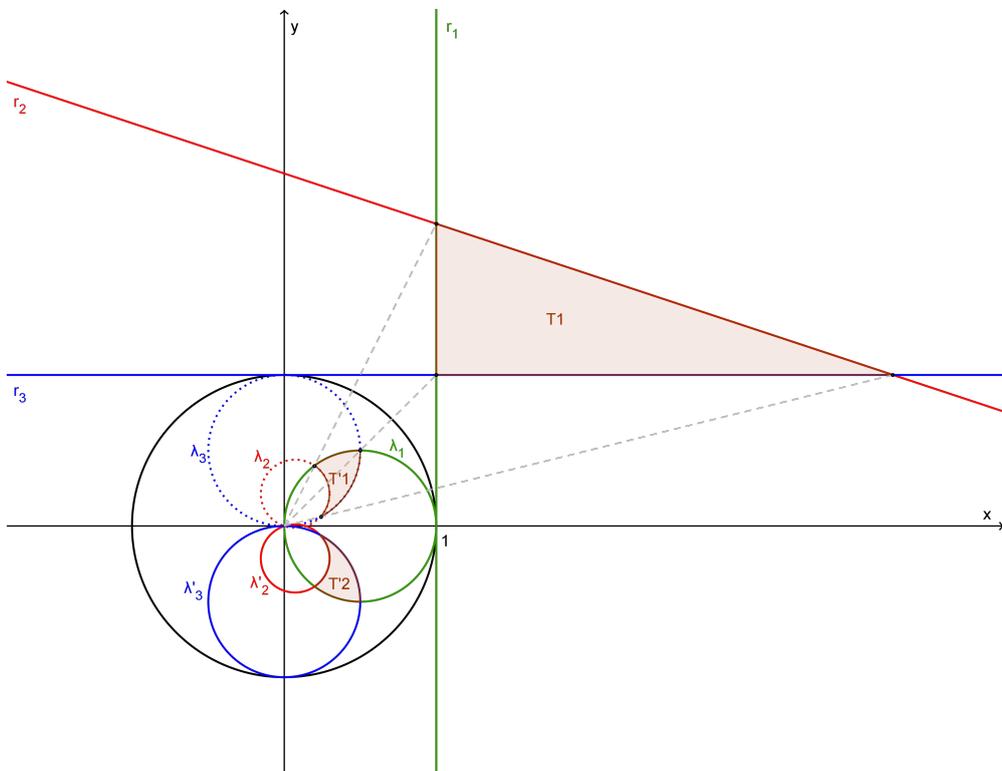


Figura 5.13: Inversão das retas r_1 , r_2 e r_3

Vamos analisar agora o que a transformação J faz com retas e círculos. Denotaremos por $z = x + yi$ a coordenada complexa no domínio e por $w = u + vi$ a coordenada no seu contradomínio.

Em coordenadas cartesianas, a equação $w = \frac{1}{z}$ nos fornece as relações:

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad v = -\frac{y}{x^2 + y^2}$$

e

$$x = \frac{u}{u^2 + v^2}, \quad y = -\frac{v}{u^2 + v^2}.$$

Se a, b, c e d são números reais, a equação

$$a(x^2 + y^2) + bx + cy + d = 0 \tag{5.1}$$

representa um círculo, se $a \neq 0$, ou uma reta, se $a = 0$. Sob a transformação J , ou seja, $w = \frac{1}{z}$, a equação (5.1) se torna

$$d(u^2 + v^2) + bu - cv + a = 0. \tag{5.2}$$

Reciprocamente, u e v satisfazem à equação (5.2), então x e y são soluções da equação (5.1). Portanto, se a e d são distintos de zero, a curva e sua imagem são ambas círculos, isto é, círculos que não passam pela origem são transformados por J em círculos que não passam pela origem.

De modo análogo, as equações (5.1) e (5.2) mostram que todo círculo passando pela origem é transformado por J numa linha reta. Retas por sua vez, se transformam em círculos passando pela origem, a menos que a reta passe pela origem, quando então, a imagem também é uma reta passando pela origem.

Exemplo 5.1.7. *As retas verticais de equação $x = k_1$ são transformadas por J nos círculos*

$$u^2 + v^2 - \frac{u}{k_1} = 0 \Leftrightarrow \left(u - \frac{1}{2k_1}\right)^2 + v^2 = \left(\frac{1}{2k_1}\right)^2,$$

de centro $\left(\frac{1}{2k_1}, 0\right)$ e raio $\frac{1}{2k_1}$, tangentes ao eixo v na origem, se $k_1 \neq 0$.

Na Figura 5.13 a reta $r_1 : x - 1 = 0$ foi transformada por J no círculo $\lambda_1 : x^2 + y^2 - x$, de centro $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ e raio $\frac{1}{2}$.

Exemplo 5.1.8. *As retas horizontais de equação $y = k_2$ são transformadas nos círculos*

$$u^2 + v^2 + \frac{v}{k_2} = 0 \Leftrightarrow u^2 + \left(v + \frac{1}{2k_2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2k_2}\right)^2,$$

de centro $\left(0, -\frac{1}{2k_2}\right)$ e raio $\frac{1}{2k_2}$, tangentes ao eixo u na origem, se $k_2 \neq 0$.

Na Figura 5.13 a reta $r_3 : y - 1 = 0$ foi transformada por J no círculo $\lambda_1 : x^2 + y^2 + y = 0$, de centro $(0, -\frac{1}{2})$ e raio $\frac{1}{2}$

5.2 Transformações de Möbius

Uma Transformação de Möbius ¹ é uma função complexa dada por

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \tag{5.3}$$

com $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ e $ad - bc \neq 0$. A condição $ad - bc \neq 0$ garante que c e d não podem ser simultaneamente nulos. Assim,

1. quando $c = 0$ e $d \neq 0$ a função $f(z) = \frac{az + b}{d}$ está definida para todo complexo z . Logo, $D(f) = \mathbb{C}$
2. quando $c \neq 0$ a função $f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ está definida para todo z tal que $z \neq -\frac{d}{c}$. Logo, $D(f) = \mathbb{C} - \{\frac{d}{c}\}$.

Por outro lado, a equação $f(z) = \lambda$, quando $z \in D(f)$, é equivalente à equação $(a - \lambda c)z = \lambda d - b$, que só não admite solução quando $\lambda = \frac{a}{c}$. Portanto, o conjunto imagem de f é $\mathbb{C} \setminus \{\frac{a}{c}\}$. Além disso se $ad - bc = 0$, ou seja, $ad = bc$, temos duas possibilidades para a função f :

1. Se $c \neq 0$ então $b = \frac{ad}{c}$. Logo,

$$f(z) = \frac{az + \frac{ad}{c}}{cz + d} = \frac{\frac{a}{c}(cz + d)}{cz + d} = \frac{a}{c}.$$

Portanto, f é constante.

2. Se $c = 0$ então $a = 0$. De fato, como $ad = bc$ então $ad = 0$. Mas $d \neq 0$, logo $a = 0$. Assim,

$$f(z) = \frac{b}{d}.$$

Portanto, f é constante.

¹Para visualizar a beleza das Transformações de Möbius, indicamos o vídeo *Möbius Transformations Revealed* de Douglas Arnold e Jonathan Rogness, disponível em < <http://www.ima.umn.edu/arnold//moebius/>>.

Assim, quando $ad - bc = 0$ a função f é constante, logo não é uma transformação.

Podemos escrever a transformação (5.1) da seguinte forma, se $c \neq 0$:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{az + b}{cz + d} = \frac{a \cdot \left(z + \frac{b}{a}\right)}{c \cdot \left(z + \frac{d}{c}\right)} = \frac{a}{c} \cdot \frac{z + \frac{b}{a}}{z + \frac{d}{c}} \\ &= \frac{a}{c} \cdot \frac{z + \frac{d}{c} - \frac{d}{c} + \frac{b}{a}}{z + \frac{d}{c}} = \frac{a}{c} \left(1 + \frac{\frac{bc - ad}{ac}}{z + \frac{d}{c}}\right) \\ &= \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c^2} \cdot \frac{1}{z + \frac{d}{c}} \end{aligned}$$

Portanto, a transformação (5.1) pode ser obtida pela composição:

- da translação $T_1(z) = z + \frac{d}{c}$;
- da inversão $I(z) = \frac{1}{z}$;
- da rotação e dilatação (ou contração) em relação à origem $H(z) = \frac{bc - ad}{c^2} \cdot z$;
- e da translação $T_2(z) = \frac{a}{c} + z$;

Assim, considerando $\alpha = \frac{a}{c}$, $\beta = \frac{bc - ad}{c^2}$ e $\gamma = \frac{d}{c}$, temos que

$$f(z) = T_\alpha \circ H_\beta \circ J \circ T_\gamma(z), \tag{5.4}$$

ou seja, uma toda Transformação de Möbius pode ser obtida por composição de translações, multiplicação por números complexos (homotetia e rotação) e inversão.

Veja na tabela 5.2.1 que todas as transformações vistas na seção anterior, bem como as funções estudadas nos capítulos 2 e 3, são exemplos de Transformações de Möbius. Com efeito:

Tabela 5.2.1

Quando...	Então...	Logo f corresponde a uma...
$a = 0, c = 0, d = 1, b \neq 0; b \in \mathbb{C}$	$f(z) = b$	Função constante
$a = 1, c = 0, d = 1, b = 0; z \in \mathbb{C}$	$f(z) = z$	Função identidade
$a, b, z \in \mathbb{R}; a \neq 0, c = 0, d = 1$	$f(z) = az + b$	Função Afim
$a, b, c, d, z \in \mathbb{R}$	$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$	Função racional em \mathbb{R}
$a = 1, c = 0, d = 1, b \neq 0; b \in \mathbb{C}$	$f(z) = z + b$	Translação por b
$a \in \mathbb{R}, b = 0, c = 0, d = 1$	$f(z) = az$	Homotetia com fator multiplicativo a
$a \in \mathbb{C}, b = 0, c = 0, d = 1; z = 1$	$f(z) = az$	Rotação
$a \in \mathbb{C}, b = 0, c = 0, d = 1; z \neq 1$	$f(z) = az$	Rotação e Homotetia
$a = 0, b = 1, c = 1$ e $d = 0$	$f(z) = \frac{1}{z}$	Inversão
$c = 0$	$f(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$	$f = T_{\frac{b}{d}} \circ H_{\frac{a}{d}}$

Para maiores detalhes sobre as Transformações de Möbius, o leitor pode consultar HEFEZ(2012) ou CHURCHILL(1975). Sugerimos, ainda, a leitura de “Transformações de Möbius-Experimento” (RODRIGUES, 2010) pois a proposta deste experimento é apresentar uma maneira simples de introduzir a Transformação de Möbius através de exemplos, utilizando os conceitos e propriedades de matriz e de número complexo. Em especial, são utilizadas as interpretações geométricas das operações de números complexos.

Conclusão

Neste trabalho apresentamos uma reflexão sobre a importância e a beleza da relação existente entre a Álgebra, o estudo das funções, e a Geometria. Nosso foco foi apresentar uma abordagem geométrica para o estudo de funções racionais, possibilitando ao aluno ter uma compreensão dinâmica do comportamento das Funções Lineares Fracionárias e da dependência nos parâmetros que as definem com o auxílio de ferramentas tecnológicas, propondo deixar as aulas mais dinâmicas. Para tornar a abordagem mais natural, iniciamos nossas considerações partindo das situações mais elementares e familiares aos alunos até as mais gerais e complexas.

Sugerimos então, uma discussão entre os professores de Matemática, a respeito da relevância de se introduzir um tópico sobre Funções Racionais (de um modo geral) nas aulas de Matemática do Ensino Médio, onde possa ser apresentado ao aluno o estudo algébrico (definição, propriedades e particularidades) e a visão geométrica de tais funções através de seus gráficos. E ainda que tenhamos um “olhar” especial ao se estudar os números complexos e suas operações, pois estas são transformações no plano e tais transformações já são estudadas no Ensino Fundamental. Então, já são conhecidas pelos alunos do Ensino Médio, mas apenas sob uma visão geométrica.

Portanto, esperamos que esta dissertação sirva como um suporte para professores e alunos que se encantam com as múltiplas faces da Matemática e não se limitam ao que encontram nos livros didáticos do Ensino Médio.

Referências Bibliográficas

- [1] ÁVILA, Geraldo. - **Cálculo das funções de uma variável**. Volume 1. 7ª edição. Rio de Janeiro: LTC, 2008.
- [2] BOYER, C.B. - **História da Matemática**. Tradução de Elza F. Gomide. 3ª edição. Blucher: São Paulo, 2010.
- [3] BRASIL. Ministério da Educação(MEC), Secretaria de Educação Básica. - **Orientações curriculares para o ensino médio** - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC/SEB, 2006.
- [4] BRASIL. Ministério da Educação(MEC), Secretaria de Educação Média e Tecnológica(Semtec). - **PCN+ Ensino Médio: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais** - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC/Semtec, 2002.
- [5] CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL. - <http://ecalculo.if.usp.br/>. USP-SP: 2000. Disponível em: <<http://ecalculo.if.usp.br/>>. Acesso em: 22 fev.2013
- [6] CARNEIRO, J.P. - **A ilha do tesouro: dois problemas e duas soluções**. Revista do Professor de Matemática (RPM), nº47. Rio de Janeiro: SBM, 2001.
- [7] CHURCHILL, Ruel V. - **Variáveis Complexas e suas aplicações**. Tradução de Tadao Yoshioka. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, 1975.
- [8] DANTE, L.R. - **Matemática: Contexto e Aplicações**. Volume 3. São Paulo: Ática, 2011.
- [9] EVES, H. - **Introdução a História da Matemática**. Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo: Unicamp, 2004. 3ª impressão.

- [10] FERNANDEZ, Cecília S.; BERNARDES JR., Nilson C. - **Introdução às Funções de uma Variável Complexa**. Textos Universitários. Rio de Janeiro: SBM, 2008. 2ª edição.
- [11] HEFEZ, Abramo.; VILLELA, M.L.T. - **Polinômios e Equações Algébricas**. Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: SBM, 2012.
- [12] IEZZI, G.; MURAKAMI, C.; MACHADO, N.J. - **Fundamentos de matemática elementar**. Volume 1. 8ª Edição. São Paulo: Atual, 2004.
- [13] IEZZI, G.; MURAKAMI, C.; MACHADO, N.J. - **Fundamentos de matemática elementar**. Volume 6. 5ª Edição. São Paulo: Atual, 1993.
- [14] LIMA, Elon L. - **Números e Funções Reais**. Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: SBM, 2012.
- [15] LIMA, Elon L.; CARVALHO, P.C. - **Coordenadas no plano**. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2011.
- [16] LIMA, Elon L. et al - **A Matemática do Ensino Médio**. Coleção do professor de matemática. Volume 3. Rio de Janeiro: SBM, 2004. 4ª EDIÇÃO.
- [17] PROJETO NOVAS TECNOLOGIAS NO ENSINO. - **Introdução às Funções Reais**. Rio de Janeiro: UFRJ. Disponível em: <<http://www.dmm.im.ufrj.br/projeto/projetoc/precalculo/>>. Acesso em: 07 jan. 2013
- [18] RODRIGUES, C.I. et al - **Transformações de Mobius-Experimento**. UNICAMP, 2010. Disponível em: <<http://bit.profmat-sbm.org.br/xmlui/handle/123456789/51>>. Acesso em: 12 jan. 2013
- [19] RAMOS, E.E.L. - **Taxa de variação ou coeficiente angular? Uma questão de transposição didática**. In: IX Encontro Nacional de Educação Matemática, 2007, Belo Horizonte. Anais do IX Encontro Nacional de Educação Matemática, 2007. Disponível em: <http://www.sbem.com.br/files/ix_enem/Html/comunicacaoCientifica.html>. Acesso em: 27 mar. 13