UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

Alexandre Henrique Soares

Uso do jogo Bozó na sala de aula

Campinas

2021

Alexandre Henrique Soares

Uso do jogo Bozó na sala de aula

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para obtenção do título de Mestre

Orientadora: Verónica Andrea González López

Este trabalho corresponde à versão final da Dissertação defendida pelo aluno Alexandre Henrique Soares e orientada pela Prof. Dra. Verónica Andrea González López.

Campinas
2021

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

So11u

Soares, Alexandre Henrique, 1990-
Uso do jogo Bozó na sala de aula / Alexandre Henrique Soares. – Campinas, SP : [s.n.], 2021.

Orientador: Verónica Andrea González-López.
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Educação matemática. 2. Probabilidades. 3. Análise combinatória. 4. Ensino médio. 5. Teoria dos jogos. I. González-López, Verónica Andrea, 1970-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Using the Bozó game in the classroom
Palavras-chave em inglês:
Mathematics education
Probabilities
Combinatorial analysis
High school
Game theory
Área de concentração: Matemática em Rede Nacional
Titulação: Mestre
Banca examinadora:
Verónica Andrea González-López [Orientador]
Roberto Andreani
Márcio Luis Lanfredi Viola
Data de defesa: 01-09-2021
Programa de Pós-Graduação: Matemática em Rede Nacional

Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)
- ORCID do autor: https://orcid.org/0000-0002-7406-2883
- Currículo Lattes do autor: http://lattes.cnpq.br/4747715690289605

Dissertação de Mestrado Profissional defendida em 01 de setembro de 2021 e aprovada pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof(a). Dr(a). VERÓNICA ANDREA GONZÁLEZ LÓPEZ

Prof(a). Dr(a). ROBERTO ANDREANI

Prof(a). Dr(a). MÁRCIO LUIS LANFREDI VIOLA

A Ata da Defesa, assinada pelos membros da Comissão Examinadora, consta no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria de Pós-Graduação do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

Agradecimentos

Primeiramente agradeço à minha orientadora Verónica Andrea González López que aceitou me orientar, dedicar seu tempo, me instigou a prosseguir com este trabalho desde nossa primeira conversa e tanto contribuiu para a conclusão dele.

Em segundo lugar, agradeço aos meus pais Alair Sawaris Soares e Ricardo Soares por terem me educado, me dado condições e incentivado a chegar onde cheguei. Agradeço ao meu noivo Wellington Luiz Teixeira por todo o apoio, compreensão e ânimo durante os anos de mestrado. Agradeço também ao meu irmão Eduardo Henrique Soares pela amizade e inspiração e à todos os outros familiares e amigos que apoiam e incentivam meus estudos. Sem o amor e dedicação destas pessoas, nada disto seria possível.

Agradeço também aos colegas de turma do mestrado pelo convívio e enriquecimento do curso: Almir Lanzoni, Ana Cláudia Piau, Bruno Tafarello, Caio Bargas, Claudia Meneghin, Diego Valero, Fábio Simon, Francisco C. de Souza, Gustavo Batista, Raul Cid, Rodrigo Palma e Yudi Bombarda.

Agradeço àqueles que trabalham com divulgação científica no Brasil e em especial a Átila Iamarino, Altay de Souza, Ken Fujioka e Fernando Malta por manterem acesos e estimularem minha curiosidade e pensamento científico.

Agradeço a todos professores que acreditam no PROFMAT e em especial àqueles que lecionaram para minha turma: Angelo C. Bianchi, Claudina I. Rodrigues, Lino A. da S. Grama, Pedro J. Catuogno, Ricardo M. Martins, Roberto Andreani, Verónica A. G. López, Sergio A. Tozoni.

Resumo

Neste trabalho apresentamos a fundamentação teórica do uso de jogos no processo de ensino-aprendizagem com um destaque especial para as aulas de matemática, bem como propomos a utilização do jogo Bozó alinhado a uma sequência didática para alunos do Ensino Médio. O Bozó consiste em um jogo de dados muito popular no Mato Grosso do Sul, derivado do General e do *Yam*, a versão brasileira do *Yahtzee*. Algumas jogadas deste jogo são semelhantes às do pôquer, em relação a formar combinações específicas com os dados. Apresentamos tópicos da análise combinatória e da probabilidade que estão no currículo habitual de alunos do Ensino Médio e que julgamos essenciais para o total aproveitamento da atividade proposta. Também discorremos sobre a teoria dos jogos desenvolvida por John von Neumann e John Nash com o intuito de classificar o Bozó à luz destas ideias e fazemos uma investigação mais aprofundada sobre as possíveis escolhas que o jogador se depara durante uma partida e se realmente há estratégia neste jogo de dados. Após desenvolver e apresentar este arcabouço teórico, apresentamos a proposta de atividade envolvendo o jogo de Bozó para alunos de Ensino Médio. O uso de um jogo permite que os alunos desenvolvam habilidades sociais, memória afetiva com o conteúdo além de estimular diretamente o raciocínio probabilístico.

Palavras Chave: Educação matemática, Probabilidade, Análise Combinatória, Teoria dos Jogos, Ensino Médio.

Abstract

In this work, we introduce the theoretical foundations of the use of games in teaching practice. We approach the issue with an emphasis on math classes. Also, we propose the use of the Bozó game aligned with a didactic sequence for high school students. Bozó is a popular dice game in Mato Grosso do Sul, derived from General and Yam, the Brazilian version of Yahtzee. Some plays in this game are similar to poker combinations but with the dice instead of cards. To show how to use this game to develop habilities, we bring together probability notions coming from the regular curriculum of high school students. We consider it essential for the full use of the proposed activity. We also introduce classical game theory notions to classify the Bozó game in the light of these ideas and make a deeper inspection about the possible choices that the player faces during a match, identifying if there is a strategy in this game. Since the use of a game allows students to develop social skills, affective memory with the content, stimulating probabilistic reasoning, we simulate several configurations of the game to identify strategies revealing efficient criteria to be used for the gamer. Also, we introduce a proposal for a class activity involving the Bozó for high school students.

Key words: Mathematics education, Probability, Combinatorics, Game Theory, High School.

Lista de Figuras

Lista de Quadros

Sumário

1 Introdução

Este trabalho foi motivado por vivências próprias em sala de aula e também experiências de vida. Desde muito novo sempre me interessei por jogos (brincadeiras, jogos de tabuleiro ou videogame) e como eu sou o primo mais velho, fui o responsável por ajudar a cuidar das crianças e, consequentemente, ensinar os jogos e brincadeiras. Acredito que o meu interesse em jogos tenha vindo por terem um conjunto bem definido de regras e pelo desafio que trazem, características comuns também à Matemática.

Mesmo antes de concluir a licenciatura, durante os estágios, já gostava de incluir jogos nos meus planejamentos e atividades desenvolvidas nas escolas porque via o quanto isso era um facilitador e fortalecia o aprendizado. O jogo traz camadas de desafio, interação social, diversão e emoção que não são comuns no processo de ensino-aprendizagem tradicional. Como veremos, estes são elementos que trazem grande reforço para este processo.

Desde a criação da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), em 2017, a área de probabilidade e estatística ganhou mais destaque no currículo e, consequentemente, no processo de ensino-aprendizagem de matemática. Segundo a revista Nova Escola [1], *"jogos e sorteios podem servir como base para conhecer as noções de provável, improvável ou impossível, que mais tarde serão usadas como base para cálculos numéricos."*

Diante disso, propomos a utilização de um jogo muito popular no Centro-Oeste do Brasil conhecido como Bozó (também conhecido por suas variações como General ou Yahtzee) [4] durante o processo de ensino-aprendizagem de probabilidade e análise combinatória para alunos de Ensino Médio. O jogo consiste em jogar cinco dados comuns de seis faces na tentativa de obter combinações semelhantes às do jogo de pôquer (sequência, um par e um trio, quatro iguais, cinco iguais).

O jogador tem a possibilidade de escolher alguns ou todos os dados para serem relançados duas vezes e, neste momento é necessária uma importante tomada de decisão e cálculo de probabilidades: o jogador deve mensurar a chance de se obter uma combinação com sua pontuação para decidir quais dados serão rejogados a fim de se obter um melhor resultado.

O jogo pode ser utilizado tanto no início de uma sequência de aulas, para que se crie situações-problema e os alunos formem conjecturas que, mais tarde, serão formalizadas, ou no fim de uma sequência didática como forma de aplicação e verificação da aprendizagem dos alunos acerca deste assunto.

Há anos utilizo este jogo com meus alunos do Ensino Médio em sala de aula e observo respostas muito positivas por parte dos alunos e da comunidade escolar, porém são apenas observações empíricas. Um dos objetivos desta pesquisa é investigar quais são as bases teóricas desta prática, tanto do ponto de vista pedagógico quanto do ponto de vista da Teoria dos Jogos, da probabilidade e análise combinatória relacionadas com a dinâmica do jogo.

Além de exercitar o estudo da probabilidade na prática, o jogo permite que os alunos desenvolvam outras habilidades e competências acerca de sociabilidade, como *"honestidade, companheirismo, atitude de simpatia ao vencedor ou ao vencido, respeito às regras estabelecidas, disciplina consciente, acato às decisões do juiz..."* ALBUQUERQUE (1954) apud FIORENTINI e MIORIN (1990) [11]

Sempre devemos levar em conta que o mais importante não é somente o jogo em si, mas a discussão e situações-problema que ele levanta e que serão aproveitados no processo de ensino-aprendizagem.

Também é objetivo deste trabalho mostrar aspectos da teoria dos jogos desenvolvida por John von Neumann e John Nash que permitam discutir e classificar o jogo de Bozó à luz das ideias estruturadas por estes autores.

Um dos conceitos que iremos abordar é o de **jogo de soma zero**, no qual um jogador só pode ganhar se os demais perderem e a noção de informação completa ou incompleta do jogo: se os jogadores possuem ou não informação a respeito das jogadas dos demais. Também iremos trazer o conceito de **estratégia** em um jogo e fazer uma análise de algumas tomadas de decisão na execução do jogo.

A fim de estudar possíveis estratégias do Bozó, iremos simular algumas possíveis jogadas, mas não todas, já que o jogador pode relançar quantos dados desejar dos cinco dados disponíveis. Assim, iremos observar se há ou não uma vantagem do jogador conhecer e aplicar os conceitos de probabilidade na tentativa de obter mais pontos. É interessante que o professor conheça estes desenrolares do jogo para observar se os alunos estão executando as melhores jogadas e as melhores estratégias e também saiba conduzir, posteriormente, uma discussão a respeito delas com os alunos.

Reconhecer comportamentos e possibilidades dentro do jogo permite que o professor aja como guia aos seus alunos e aconselhe-os em relação às partidas. Estando de posse deste conhecimento, fica a critério do professor o quanto ele quer repassar para seus alunos, apesar de não ser o foco deste trabalho.

Acreditamos que este repertório teórico possa enriquecer o trabalho do professor, um dos público-alvo desta dissertação, já que a teoria dos jogos não é tão presente nos cursos de licenciatura em matemática ou em ciências exatas, sendo muito mais presente nos cursos de Economia e de Relações Internacionais. Isto ocorre, basicamente, porque em uma concorrência ou cooperação entre empresas, governos ou países, é preciso entender que suas ações vão afetar as decisões alheias e, consequentemente, o decorrer da disputa.

Assim, após feito o embasamento, iremos discorrer sobre os conceitos básicos de análise combinatória, probabilidade e apresentar o Bozó como proposta pedagógica na sala de aula: sugestões práticas de como aplicá-lo com os alunos, possíveis questionamentos e reflexões a serem feitos com a turma e nossa conclusão a respeito do uso dele no processo de ensino-aprendizagem.

2 Uso dos Jogos em Sala de Aula

Um dos desafios que enfrentamos diariamente na sala de aula é o de motivar nossos alunos a estudar matemática e tornar a aprendizagem mais significativa. Um meio para isto é tornar o aluno menos passivo na construção de seu conhecimento e, consequentemente, o de deixar a aula de matemática mais interativa e dinâmica. Existem momentos em que o professor precisa tomar a frente para expor definições, exemplos ou formalizar algum raciocínio, mas não podemos acreditar que só isso é suficiente para um aprendizado efetivo em matemática.

Segundo D'AMBROSIO (1989) [10] o sistema escolar e o professor podem acabar contribuindo para a falta de interesse dos alunos:

> Os professores em geral mostram a matemática como um corpo de conhecimentos acabado e polido. Ao aluno não é dado em nenhum momento a oportunidade ou gerada a necessidade de criar nada, nem mesmo uma solução mais interessante. O aluno assim, passa a acreditar que na aula de matemática o seu papel é passivo e desinteressante.

É importante também ressaltar que o uso de materiais lúdicos por si só não é solução para o problema da passividade e desinteresse do ensino de matemática. FIORENTINI e MIORIN (1990) [11] citam CARRAHER e SCHLIEMANN (1988) em seu artigo dizendo que "*não precisamos de objetos na sala de aula, mas de situações em que a resolução de um problema implique a utilização dos princípios lógico-matemáticos a serem ensinados*".

Portanto, para trazer algum benefício ao processo de ensino-aprendizagem o jogo (ou brincadeira, dinâmica, filme, mídia etc) não pode ser vazio ou fechado em si mesmo. Ele deve estar atrelado ao planejamento do professor com um objetivo, deve-se criar essa situação-problema.

Diante disso, concordamos com as sugestões que SILVA e KODAMA (2004) trazem de como deve ser feito o trabalho com jogos na sala de aula:

> Para um trabalho sistemático com jogos é necessário que os mesmos sejam escolhidos e trabalhados com o intuito de fazer o aluno ultrapassar a fase da mera tentativa e erro, ou de jogar pela diversão apenas. Por isso, é essencial a escolha de uma metodologia de trabalho que permita a exploração do potencial dos jogos no desenvolvimento de todas as habilidades (raciocínio lógico e intuitivo), o que pode ser feito por meio da metodologia de resolução de problemas. Neste método, cada hipótese/estratégia formulada, ou seja, cada jogada, desencadeia uma série de questionamentos como: essa é a única jogada possível? Se houver outra alternativa, qual escolher e porque escolher esta ou aquela? Terminado o problema ou a jogada, quais os erros e porque foram cometidos? Ainda é possível resolver o problema ou vencer o jogo, se forem mudados os dados[1] ou as regras?

Portanto, acreditamos ser necessário não só apresentar o Bozó aos alunos e permitir que eles joguem e vivenciem as situações-problema trazidas por ele, mas também trazer questionamentos à tona, de maneira explícita, durante ou após o momento de jogo, relacionando com tópicos da análise combinatória e da probabilidade.

Durante muitos anos persistiu a ideia de que se o professor utiliza jogos, vídeos e outras mídias, ele não está dando uma "aula de verdade", a saber, uma aula puramente expositiva em que o professor, sem auxílio de qualquer material didático e detendo todo o conhecimento, seria capaz de descrever as definições, exemplos e exercícios para seus alunos usando somente giz e lousa.

Assim como existem profissionais que possuem uma aversão ao uso

[1] No sentido de "informação"

de jogos e outras mídias durante as aulas de matemática, existem os que "já ouviram falar que é bom usar esse tipo de coisa de vez em quando" para fazer uma "aula diferente", mas que não possuem o conhecimento teórico e podem ter como destino o uso vazio destes recursos, desconexo dos princípios lógico-matemáticos.

Independente da forma como esses recursos didáticos são aplicados, o aluno irá constuir uma forte memória da aula ou aulas em que eles foram aplicados "*porque a emoção acompanha eventos novos e julgados importantes para o indivíduo, direcionando a atenção para eles, de forma que melhora a consolidação do evento na memória.*" SOUSA e SALGADO (2015) [21]

Esse fato ajuda a compor o imaginário de que "usar jogos e outras mídias traz benefícios" pois os professores e profissionais da educação recebem este reforço positivo dos alunos, permitindo aos alunos uma memória muito forte destas aulas, comentando e relembrando com divertimento os momentos que se passaram nelas. Mas aí devemos fazer alguns questionamentos: houve aprendizado significativo do conteúdo em questão? Os alunos desenvolveram as competências e habilidades ligadas aos conceitos que o professor tinha em mente? Estas memórias da "aula diferente" estão atreladas ou reforçam o conhecimento matemático? Portanto, devemos entender o fenômeno que SOUSA e SALGADO (2015) explicam como uma ferramenta a nosso favor, e não uma solução definitiva e pronta, ao arquitetar uma atividade didática utilizando jogos ou múltiplas mídias em geral.

Outros avanços da neurociência mostram que o que antes era só uma conjectura (de que jogos, brincadeiras e materiais lúdicos trazem benefícios ao processo de ensino-aprendizagem) passou a ter causa material. Como FREITAS (2018) lista em seu artigo [12], o jogo está ligado a um maior volume do cérebro e também uma maior plasticidade, melhor acuidade visual e memória.

Relembrando a fala de ALBUQUERQUE (1954) [11], que trouxemos na introdução, não só o conhecimento matemático é trabalhado durante o jogo: a criança ou adolescente vivencia uma experiência social e exercita outras habilidades em paralelo. GRANDO (2000) [13] discorre bem sobre este aspecto em sua tese de doutorado:

> É por isso que observamos que, muitas vezes, durante as atividades com jogos, as crianças (adversários) se ajudam durante as jogadas, esclarecendo regras e, até mesmo, apontando melhores jogadas (estratégias). A competição fica minimizada. O objetivo torna-se a socialização do conhecimento do jogo.
> Além disso, nesse processo de socialização no jogo, a criança ouve o colega e discute, identificando diferentes perspectivas e se justificando. Ao se justificar, argumenta e reflete sobre os seus próprios procedimentos em um processo de abstração reflexiva.

Portanto, é importante que façamos uma reflexão sobre o papel do professor durante a aplicação de um jogo em sala de aula. É necessário que ele ensine as regras, coloque limites para a atividade e faça intervenções quando necessário, mas não de forma demasiada, senão estaremos tolhendo a chance dos alunos serem protagonistas da proposta didática, assim como a discussão e competição naturais dos jogos e atividades lúdicas. SILVA e KODAMA (2004) trazem um outro ponto importante sobre a participação do professor:

> Um cuidado metodológico que o professor deve considerar antes de levar os jogos para a sala de aula, é o de estudar previamente cada jogo, o que só é possível jogando. Através da exploração e análise de suas próprias jogadas da reflexão sobre seus erros e acertos é que o professor terá condições de colocar questões que irão auxiliar seus alunos e ter noção das dificuldades que irão encontrar. [20]

Por isso, deixamos como sugestão que o professor interessado em aplicar a atividade proposta por este trabalho tente jogar algumas partidas de Bozó antes de levar à sala de aula. Muitas regras ficam difíceis de serem entendidas somente através da leitura, mas que são mais facilmente assimiladas na prática.

Outro aspecto trazido por SILVA e KODAMA (2004) é a intervenção do professor na atividade. É importante que o professor esteja atento aos grupos, mas não faça demasiadas interrupções, correndo o risco de que se perca o aspecto lúdico da atividade. Como diz GRANDO (2000), "*deve lembrar ainda que o professor não se isole do processo, mas que seja elemento integrante, ora como observador, juiz e organizador, ora como questionador, enriquecendo o jogo, mas evitando interferir 'muito' no seu desenrolar.*" [13]

Também é indicado que o professor incentive todos a participarem do jogo, mas não necessariamente obrigue os alunos a jogarem. Recomendamos que caso existam alunos que, deliberadamente, não queiram participar como jogadores, o professor os deixe como observadores em diferentes grupos para que vivenciem as situações trazidas pelo jogo; seria improdutivo deixar estes alunos desocupados. Também é possível que estes alunos exerçam a função de juiz do jogo, conferindo se os jogadores estão seguindo corretamente as regras.

GRANDO (2000) [13] também faz uma observação importante que relaciona o uso dos jogos com a construção de conhecimento:

> As posturas, atitudes e emoções demonstradas pelas crianças, enquanto se joga, são as mesmas desejadas na aquisição do conhecimento escolar. Espera-se um aluno participativo, envolvido na atividade de ensino, concentrado, atento, que elabore hipóteses sobre o que interage, que estabeleça soluções alternativas e variadas, que se organize segundo algumas normas e regras e, finalmente, que saiba comunicar o que pensa, as estratégias de solução de seus problemas.

Queremos desconstruir outro motivo de aversão ao uso de jogos nas aulas do Ensino Básico pelos profissionais da Educação: a impressão de indisciplina que o jogo passa. É verdade que as crianças e adolescentes podem se exaltar durante o jogo, ficam mais agitados e emocionados, mas não significa que não esteja havendo o aprendizado; como podemos ver na argumentação de GRANDO (2000) [13] no parágrafo anterior, elas estarão desenvolvendo e exercitando raciocínios inerentes ao pensamento lógico e científico.

Em relação às políticas públicas de grande alcance, desde 2000, quando foram lançados os PCNEMs (Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio), já citada a importância de materiais lúdicos nas aulas de matemática do Ensino Médio, contudo, foi na edição com orientações complementares, lançada em 2006 e conhecida como PCN+, em que discorre-se mais sobre o uso e os benefícios dos jogos e atividades lúdicas no ensino:

> Os jogos e brincadeiras são elementos muito valiosos no processo de apropriação do conhecimento. Permitem o desenvolvimento de competências no âmbito da comunicação, das relações interpessoais, da liderança e do trabalho em equipe, utilizando a relação entre cooperação e competição em um contexto formativo. O jogo oferece o estímulo e o ambiente propícios que favorecem o desenvolvimento espontâneo e criativo dos alunos e permite ao professor ampliar seu conhecimento de técnicas ativas de ensino, desenvolver capacidades pessoais e profissionais para estimular nos alunos a capacidade de comunicação e expressão, mostrando-lhes uma nova maneira, lúdica e prazerosa e participativa, de relacionar-se com o conteúdo escolar, levando a uma maior apropriação dos conhecimentos envolvidos. [7]

Em 2017 uma nova organização curricular foi lançada no Brasil, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que, com força de lei, institui, como o próprio nome diz, as habilidades e competências mínimas das diferentes áreas do conhecimento nas instituições de Ensino Básico. Tal documento já estava previsto na Lei de Diretrizes e Bases de 1996 e no Plano Nacional de Educação de 2014; a versão da Base para o Ensino Médio se concretizou em 2018.

Atualmente, a BNCC é "*referência nacional para a formulação dos currículos dos sistemas e das redes escolares dos Estados, do Distrito Federal e dos Municípios e das propostas pedagógicas das instituições escolares*". [8] Portanto, é indispensável que procuremos como a Base trata a teoria e a prática que iremos apresentar neste trabalho.

De maneira geral, a Base, diferentemente do PCN+, não dá instruções específicas da ação do professor em sala de aula, mas diretrizes gerais sobre as habilidades e competências que devem ser desenvolvidas no processo de ensino-aprendizagem tendo em vista cada área do conhecimento. A questão de **como** trabalhar estas habilidades e competências fica a critério de cada escola e de cada professor.

Na BNCC do Ensino Médio, cada habilidade é identificada por um código alfanumérico, cuja composição é ilustrada na Figura 1:

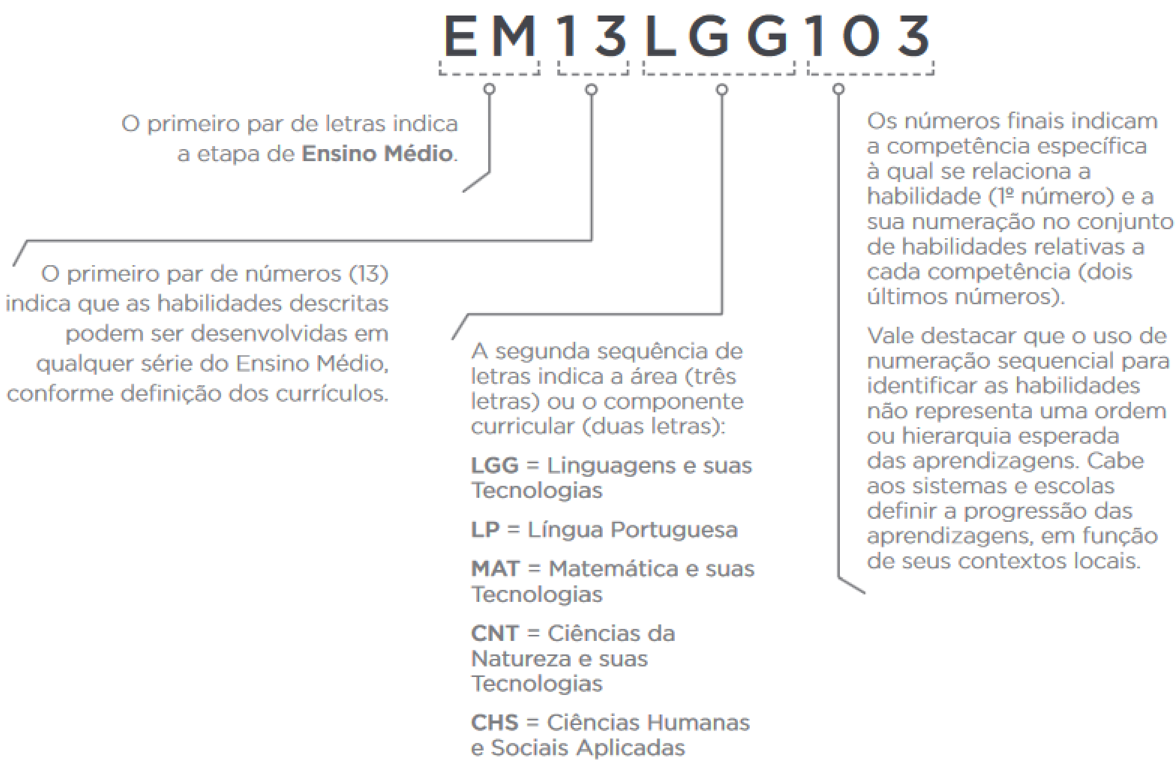


Figura 1: Exemplo de código de habilidade da BNCC.

Fonte: BNCC, 2021.

A habilidade EM13MAT203 (p. 526) contida na Competência 2 [8] é a que melhor descreve o uso de jogos nas aulas de matemática, apesar de ser bem abrangente:

> Planejar e executar ações envolvendo a criação e a utilização de aplicativos, jogos (digitais ou não), planilhas para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros compostos, dentre outros, para aplicar conceitos matemáticos e tomar decisões.

Nestes termos, observamos que o jogo de Bozó se encaixa como um jogo não-digital em que os alunos irão aplicar conceitos matemáticos de maneira informal e mentalmente durante ou, após o jogo, de forma mais sistematizada nas reflexões que o professor propuser. Além disso, a tomada de decisões é exercitada a todo momento durante o jogo quando o jogador precisa escolher quais e quantos dados irá rejogar e qual combinação ele irá tentar obter.

Com relação ao conteúdo de probabilidade em si, destacamos duas habilidades (p. 529) dentro da Competência 3 [8]:

> (EM13MAT311) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade de eventos aleatórios, identificando e descrevendo o espaço amostral e realizando contagem das possibilidades.

> (EM13MAT312) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos.

Novamente observamos uma confluência entre a Base e nossa proposta pedagógica: as situações vivenciadas no jogo levantam problemas exatamente acerca do cálculo de probabilidades, inclusive de experimentos aleatórios sucessivos quando se trata do lançamento de mais de um dado comum.

Sendo assim, no próximo capítulo, iremos descrever com mais precisão como o jogo funciona e suas regras para que estas afirmações fiquem mais claras.

3 Descrição do jogo Bozó

A base para a descrição do jogo foi obtida no do site Ludopedia [2], mas alguns nomes foram alterados para ficarem mais familiares; estes serão sinalizados com um asterísco. Além disso, outras informações foram adicionadas para que a descrição ficasse mais clara e o jogo ficasse mais próximo da versão jogada no Mato Grosso do Sul.

3.1 Regras do jogo

Bozó é um jogo clássico de dados jogado com cinco dados de seis faces, no qual participam duas ou mais pessoas, sendo recomendado até seis jogadores. O objetivo é realizar a maior pontuação possível. Nesse caso, quem tiver a maior pontuação ganha o jogo.

Cada jogador terá três chances de jogar os dados - detalhe: utiliza-se um copo, geralmente de couro de vaca, para poder chacoalhar os dados de forma a obter resultados aleatórios. Há a opção de, antes de revelar os dados, pedir "em baixo", valendo os valores da face voltada para a mesa. A Figura 2 mostra os componentes usados para jogar Bozó.

Figura 2: Kit de dados e copo para jogar Bozó.

Fonte: Ludopedia, 2021

No bozó, para pontuar, você pode escolher qualquer um entre:

(i) ÁS;

(ii) DUQUE;

(iii) TERNO;

(iv) QUARTA;

(v) QUINA;

(vi) SENA;

(vii) FU;

(viii) SEGUIDA;

(ix) QUADRA;

(x) GENERAL,

que são todos os jogos possíveis. A pontuação que o jogador fará depende da combinação dos dados, a saber:

ÁS – com a soma das faces 1 dos dados, poderá obter de 1 até 5 pontos;
DUQUE – com a soma das faces 2 dos dados, poderá obter de 2 até 10 pontos;
TERNO – com a soma das faces 3 dos dados, poderá obter de 3 até 15 pontos;
QUARTA [2] – com a soma das faces 4 dos dados, poderá obter de 4 até 20 pontos;
QUINA – com a soma das faces 5 dos dados, poderá obter de 5 até 25 pontos;
SENA – com a soma das faces 6 dos dados, poderá obter de 6 até 30 pontos;
FU – com duas faces iguais, mais outras três faces iguais, obterá 10 pontos;

[2] nas regras originais do Bozó a jogada que soma os valores dos dados com face 4 se chama "Quadra", mas preferimos deixar o nome "Quadra" para a jogada referente aos 4 dados iguais, devido à semelhança com o Pôquer e outros jogos.

SEGUIDA – cinco faces em seqüência de 1 a 5 ou de 2 a 6, obterá 20 pontos;
QUADRA [2] – com quatro faces iguais, mais uma diferente, obterá 30 pontos;
GENERAL – com as cinco faces iguais, obterá 40 pontos.

Denominamos as jogadas Fu, Seguida, Quadra e General de **jogadas especiais**; note que possuem semelhança com as combinações de cartas do pôquer, que é um jogo mais conhecido. As demais jogadas, que pontuam com a soma dos dados iguais, serão denominadas como **jogadas não especiais** ou **jogadas numéricas**. Não existe uma ordem para marcar pontos no Bozó: em sua rodada, o jogador escolhe qualquer uma entre as dez jogadas possíveis para pontuar de acordo com os resultados que obteve nos dados.

Quando o jogo se inicia, o primeiro jogador coloca os cinco dados dentro do copo e chacoalha até misturar bem e depois os lança na mesa, removendo o copo com cuidado para não desvirar os dados, lembrando que, na hora de misturar os dados no copo, a boca do mesmo deve permanecer fechada para que ninguém possa ver os dados e também para não cair para fora.

Feito, então, o primeiro lançamento com todos os cinco dados, no segundo lançamento, conforme o resultado obtido, o jogador pode voltar a arremessar de um a cinco dados, mantendo os demais sobre a mesa, ou aceitar o resultado, dando a jogada por encerrada. O terceiro lançamento ocorre da mesma forma: ele pode arremessar de um a cinco dados (mesmo os que ele mantivera sobre a mesa entre o primeiro e o segundo lançamentos) ou aceitar o resultado. Todo esse processo conta como uma (1) jogada do jogador.

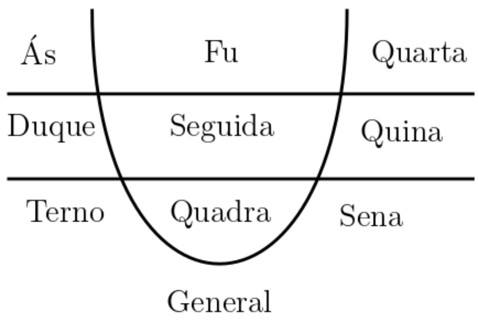
De posse dos resultados dos cinco dados (os dados mantidos e os dados relançados), o jogador escolhe em que casa pontuar.

Ao fazer uma jogada especial logo na primeira "batida" de copo, sem usar os relançamentos, o jogador ganha 5 pontos adicionais, sendo a jogada chamada “de boca”; por exemplo, a “Seguida de boca” vale 25 pontos em vez de 20.

Em uma das variações do jogo, quando um jogador obtém um General “de boca” ele ganha automaticamente a partida. Não recomendamos utilizar esta regra para a atividade em sala de aula pois ela diminui o fator estratégico do jogo.

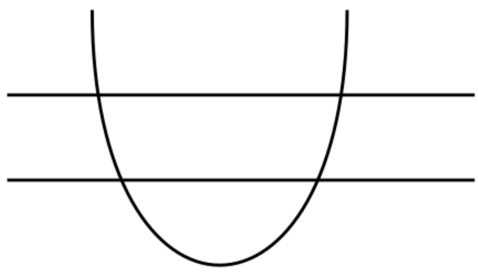
Os pontos são marcados em uma folha separada e cada jogador terá seu espaço de marcação de pontos em branco, conforme as Figuras 3 e 4.

Figura 3: Placar de pontos do Bozó com os nomes das jogadas.



Fonte: Compilação do autor.

Figura 4: Placar de pontos do Bozó vazio utilizado no jogo.



Fonte: Compilação do autor.

Cada lugar específico de pontuação é denominado **casa**. Seguindo a mesma nomenclatura das jogadas, uma **casa especial** refere-se ao Fu, Seguida, Quadra ou General; uma **casa numérica** refere-se às jogadas do Ás, Duque, Terno, Quarta, Quina e Sena.

Uma regra importante do Bozó é que, **após uma jogada ser marcada em uma casa, o jogador não pode mais marcar pontos naquela casa**. Por exemplo, se ele fizer uma Quadra em uma determinada jogada, uma outra Quadra obtida em uma jogada futura não valerá mais pontos; em outras palavras, os dados poderão ser aproveitados para pontuar em casas numéricas, mas não irão garantir os 30 pontos da Quadra.

Além disso, uma das possíveis jogadas também é anular uma casa, isto é, ocupar a casa com zero pontos. Neste caso, indicamos com um "X" a casa que foi anulada; esta possibilidade está sempre aberta, mas geralmente só é utilizada quando a combinação final obtida nos dados não pode pontuar em nenhuma casa vazia.

Quando todos os jogadores completam, cada um, suas dez jogadas todas as suas casas estarão ocupadas com alguma pontuação ou com o X, e, neste momento, somam-se todos os pontos de cada jogador. Quem tiver a maior soma de pontos é o vencedor. No caso de empate, o jogador que tiver anulado menos casas é o vencedor. Se ainda assim houver empate, os jogadores com maior pontuação dividem a vitória.

3.2 Contexto do jogo

Acredita-se que o Bozó seja derivado do General, versão brasileira do jogo conhecido como *Yahtzee* em inglês, francês, italiano e holandês; nos anos 1970, o General foi comercializado pela companhia de jogos *Grow* com o nome de *Yam* [4], cuja caixa é mostrada na Figura 5.

Figura 5: Caixa do jogo Yam.

Fonte: Ludopedia, 2021.

O Bozó está presente no dia-a-dia dos sul-matogrossenses, tanto para a população indígena como não-indígena. Também é possível encontrá-lo em eventos esportivos promovidos pela prefeitura de Campo Grande-MS como os “Jogos dos Servidores Públicos”, “Jogos Municipais dos Idosos” e também em ações sociais [3].

Há algumas diferenças entre o Bozó e o General (*Yahtzee*), sendo uma delas as possíveis jogadas; a saber, no General a combinação de trinca (três dados iguais) também é reconhecida como uma jogada especial, as duas possíveis sequências de dados (de 1 a 5 e de 2 a 6) são consideradas como jogadas diferentes e com diferentes pontuações; no General também é possível marcar a chamada “jogada aleatória” representada pelo X: simplesmente soma-se todas as faces dos dados, sem que necessariamente formem uma combinação. Por exemplo: o resultado $\{1,4,4,5,6\}$ vale $1+4+4+5+6 = 20$ pontos. Esta jogada “X” do General é diferente da jogada de anular uma casa no Bozó. O equivalente a anular uma casa no General é marcar 0 pontos na tabela, mostrada na Figura 6.

As possíveis pontuações do General são:

1 – com a soma das faces 1 dos dados, poderá obter de 1 até 5 pontos;

2 – com a soma das faces 2 dos dados, poderá obter de 2 até 10 pontos;

3 – com a soma das faces 3 dos dados, poderá obter de 3 até 15 pontos;

4 – com a soma das faces 4 dos dados, poderá obter de 4 até 20 pontos;

5 – com a soma das faces 5 dos dados, poderá obter de 5 até 25 pontos;

6 – com a soma das faces 6 dos dados, poderá obter de 6 até 30 pontos;

Trinca (T): três dados marcando o mesmo número. Vale a soma dos 5 dados. Exemplo: 4-4-4-5-6 vale 23 pontos;

Quadra (Q): quatro dados marcando o mesmo número. Vale a soma dos 5 dados. Exemplo: 1-5-5-5-5 vale 21 pontos;

Full-house (F): uma trinca e um par (exemplo: 2-2-2-6-6). Vale 25 pontos para qualquer combinação;

Seqüência alta (S+): 2-3-4-5-6. Vale 30 pontos;

Seqüência baixa (S-): 1-2-3-4-5. Vale 40 pontos;

General (G) ou Yam: cinco dados marcando o mesmo número (por exemplo: 4-4-4-4-4). Vale 50 pontos;

Jogada aleatória (X): qualquer combinação. Vale a soma dos 5 dados. Por exemplo: 1-4-4-5-6 vale 20 pontos.

Figura 6: Tabela de pontos do General para 3 jogadores.

	Jogador 1	Jogador 2	Jogador3
1			
2			
3			
4			
5			
6			
T			
Q			
F			
S+			
S-			
G			
X			
Total			

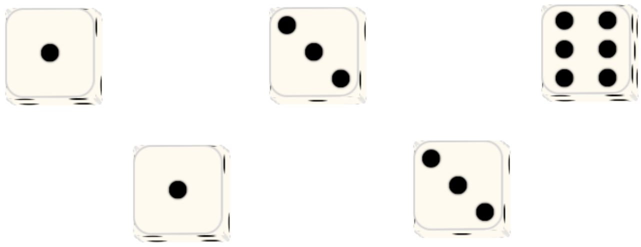
Fonte: Wikipedia, 2021.

Neste trabalho, o jogo Bozó foi escolhido ao invés do General por alguns motivos: a) por se tratar de uma versão mais simplificada em relação ao General usual e, já que os alunos entendem mais rápido, torna-se mais lúdico e divertido; b) pelo formato do marcador de pontos ser mais interessante e; c) porque tenho família em Campo Grande - MS e costumava jogar Bozó quando a visitava e, assim, fazer parte da minha história.

3.3 Exemplos de jogadas

Para melhor compreensão de como o jogo funciona, vamos simular algumas jogadas entre jogadores fictícios, João e Maria. João começa o jogo, lançando os 5 dados simultaneamente e obtendo os resultados mostrados na Figura 7:

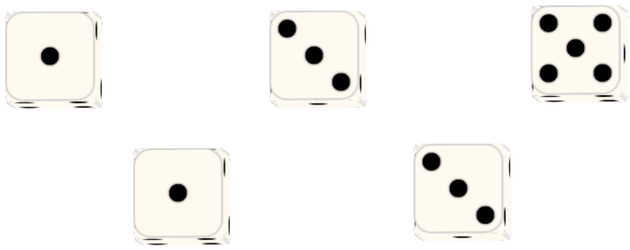
Figura 7: Jogada inicial de João - 1ª rodada.



Fonte: Compilação do autor.

João decide manter os dados com faces 1 e 3 e relança o dado com face 6, obtendo o resultado mostrado na Figura 8.

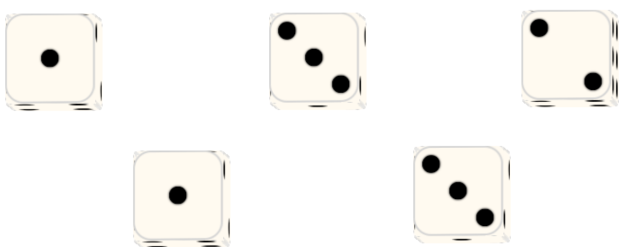
Figura 8: 1º relançamento de João - 1ª rodada.



Fonte: Compilação do autor.

João então mantém os dados 1 e 3 e relança o dado com face 5, obtendo o resultado mostrado na Figura 9.

Figura 9: 2º relançamento de João - 1ª rodada.



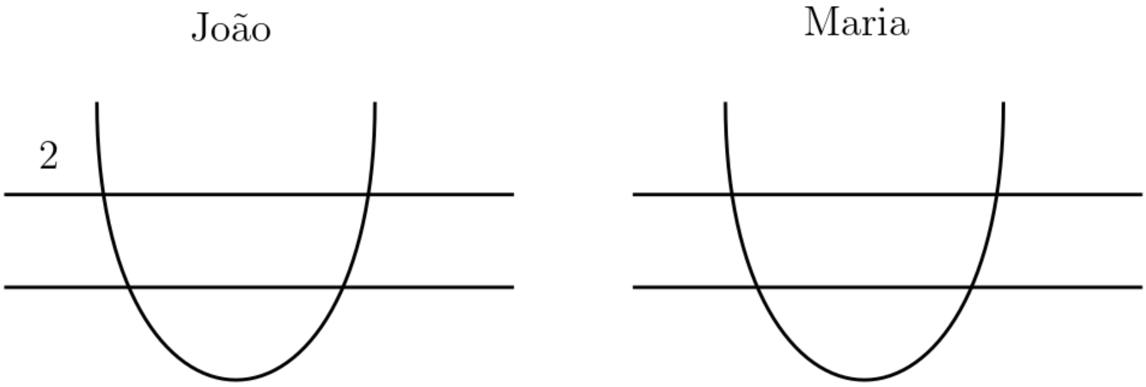
Fonte: Compilação do autor.

Neste momento João não pode mais rejogar nenhum dado e deve escolher alguma casa para marcar pontos ou anular. Com os valores obtidos nos dados, João tem as seguintes opções:

- 2 pontos na casa do Ás;
- 2 pontos na casa do Duque;
- 6 pontos na casa do Terno;
- Anular qualquer outra casa que não seja uma destas.

João então decide marcar 2 pontos na casa do Ás e a marcação de pontos da partida fica conforme a Figura 10.

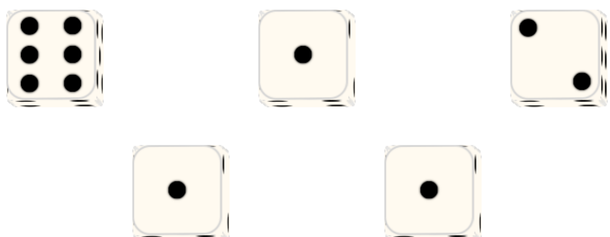
Figura 10: Placar após a 1ª rodada de João.



Fonte: Compilação do autor.

Após os pontos de João serem marcados é a vez da próxima jogadora, no caso, Maria. Ela lança os 5 dados e obtém o resultado mostrado na Figura 11.

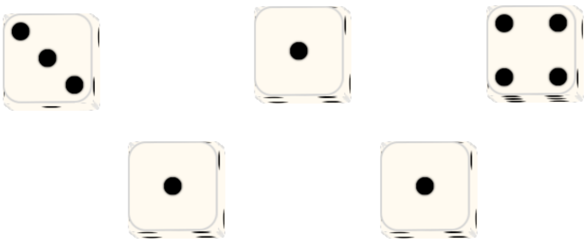
Figura 11: Jogada inicial de Maria - 1ª rodada.



Fonte: Compilação do autor.

Ela decide manter os dados com face 1, relança os dados com face 6 e 2 e obtém o resultado mostrado na Figura 12.

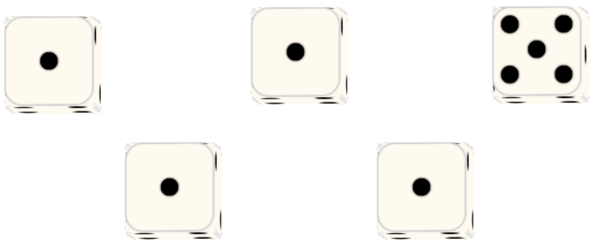
Figura 12: 1º relançamento de Maria - 1ª rodada.



Fonte: Compilação do autor.

Ela decide novamente manter os dados com face 1, relança os dados com faces 3 e 4 e obtém o resultado mostrado na Figura 13.

Figura 13: 2º relançamento de Maria - 1ª rodada.



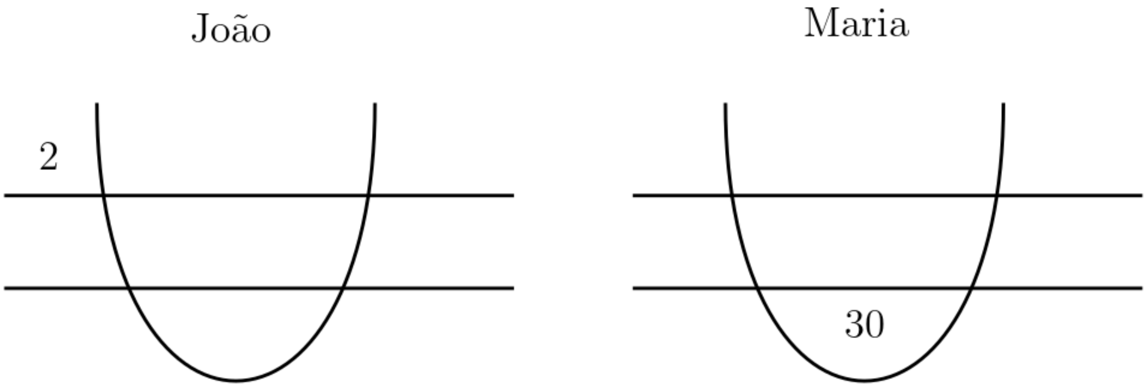
Fonte: Compilação do autor.

Neste momento Maria não pode mais relançar nenhum dado e deve escolher alguma casa para marcar pontos ou anular. Com os valores obtidos nos dados, Maria pode marcar:

- 4 pontos na casa do Ás;
- 5 pontos na casa da Quina;
- 30 pontos na casa da Quadra;
- Anular qualquer outra casa que não seja uma destas.

Maria decide marcar 30 pontos na casa da quadra e o placar fica como ilustrado na Figura 14.

Figura 14: Placar após a 1ª rodada de Maria.

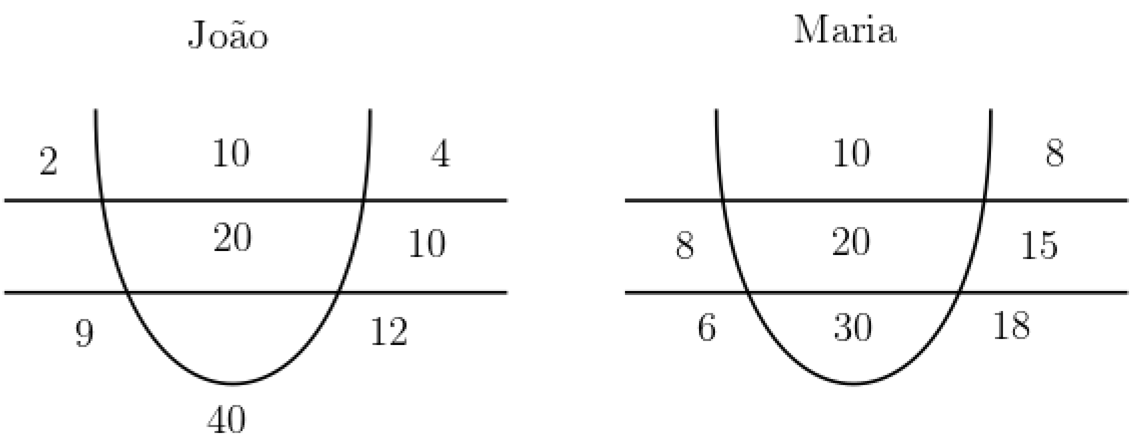


Fonte: Compilação do autor.

Em seguida, seria novamente a vez de João jogar e assim, sucessivamente, até que todos os jogadores tenham jogado dez vezes e, como consequência, marcado pontos ou anulado todas as dez casas de pontuação.

Vamos mostrar um exemplo de quando um jogador é obrigado a **anular uma casa de pontuação**. Suponhamos que o jogo tenha se desenrolado até agora conforme a Figura 15.

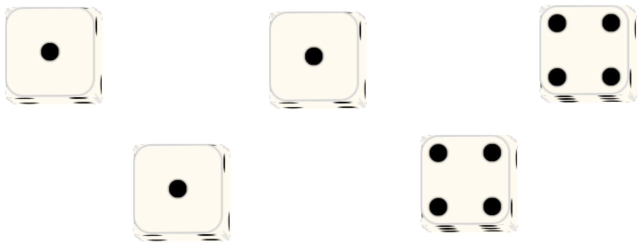
Figura 15: Placar após oito rodadas de cada jogador.



Fonte: Compilação do autor.

João é o próximo a jogar; observe que ele só pode marcar pontos na casa do Duque ou da Quadra. Ele joga os cinco dados e obtém o resultado mostrado na Figura 16.

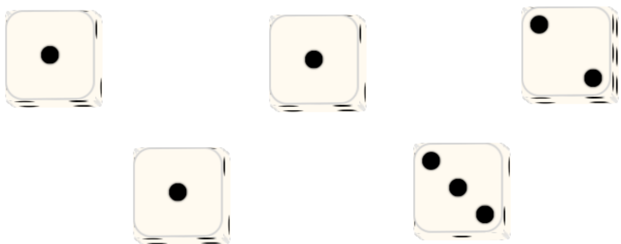
Figura 16: Jogada inicial de João - 9ª rodada.



Fonte: Compilação do autor.

Esta é a configuração de um Fu, mas ele já marcou um Fu anteriormente e não pode marcar de novo. Da mesma forma, ele não pode mais aproveitar os dados para pontuar na casa do Ás ou da Quarta, pois já estão ocupadas. Então, ele relança os dados com face 4 e obtém o resultado mostrado na Figura 17.

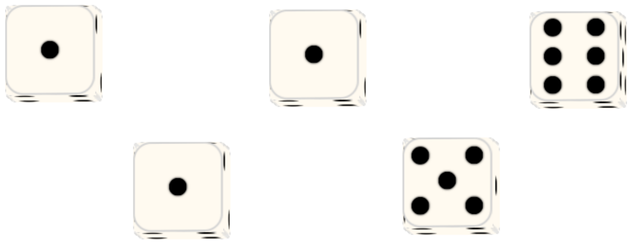
Figura 17: 1º relançamento de João - 9ª rodada.



Fonte: Compilação do autor.

Então ele decide relançar os dados com face 2 e 3 para tentar pontuar na Quadra e obtém o resultado mostrado na Figura 18.

Figura 18: 2º relançamento de João - 9ª rodada.



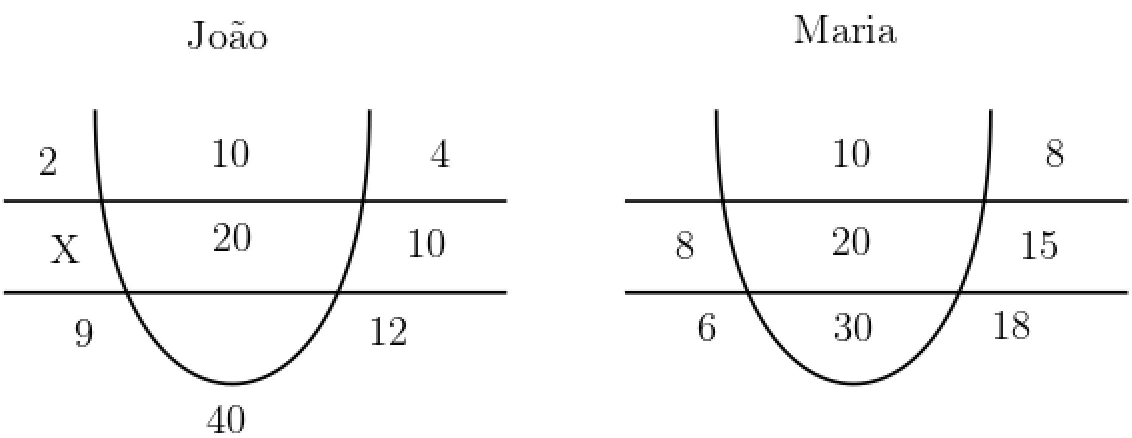
Fonte: Compilação do autor.

Com essa configuração de dados, João pode marcar:

- 3 pontos na casa do Ás;
- 5 pontos na casa da Quina;
- 6 pontos na casa da Sena;
- Anular qualquer outra casa que não seja uma destas.

Como ele não pode escolher nenhuma das três primeiras opções porque suas casas já estão ocupadas, ele é obrigado a anular uma casa que tem disponível. Ele decide anular a casa do Duque, pois pode conseguir mais pontos com a Quadra futuramente e o placar fica conforme mostrado na Figura 19.

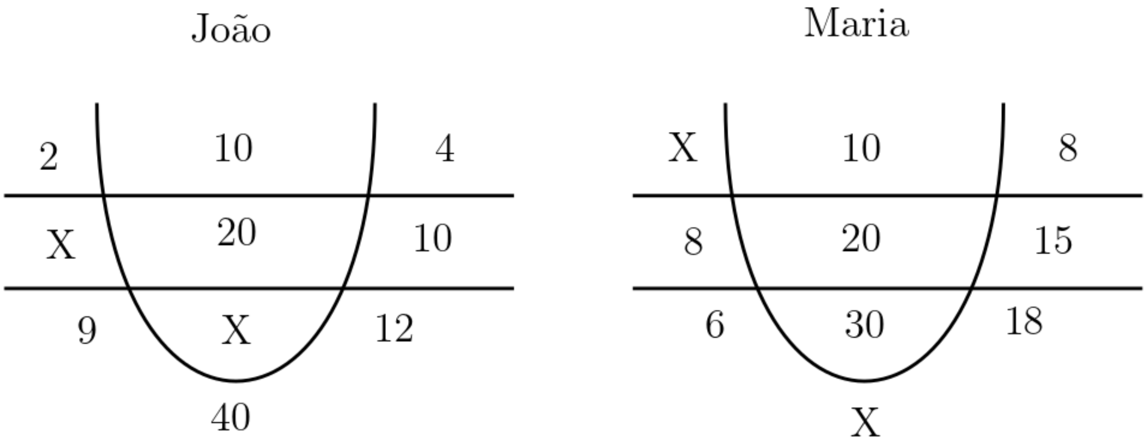
Figura 19: Placar após a 9ª rodada de João.



Fonte: Compilação do autor.

Um exemplo de placar final numa partida de Bozó é ilustrado na Figura 20.

Figura 20: Exemplo de placar final.



Fonte: Compilação do autor.

Neste exemplo, João teria terminado o jogo com 107 pontos, Maria com 115 pontos e Maria seria a vencedora.

4 Teoria dos Jogos

Para situar melhor o jogo de Bozó e estudar suas características, iremos discorrer e utilizar a *teoria dos jogos* tendo como base as ideias desenvolvidas por John Nash (1928-2015) e John Von Neumann (1903-1957). Em uma perspectiva histórica, primeiramente houve uma preocupação em responder questões mais primitivas dos jogos como: qual a probabilidade de que ocorra determinada jogada? Qual é a maneira mais justa de dividir o prêmio de um jogo que não pôde ser finalizado?

> Os jogos de tabuleiros, dados, cartas, ou em geral, os jogos de salão, divertem a humanidade desde a formação das primeiras civilizações, por colocarem as pessoas em situações nas quais vencer ou perder dependem das escolhas feitas no início das partidas, sendo assim, o jogo se tornou uma ferramenta para o desenvolvimento das pessoas, mas só despertou interesse após muito tempo, com o surgimento da teoria da probabilidade.
> Os estudos sobre a teoria da probabilidade tiveram inicio com o filósofo, matemático e físico francês Blase Pascal, juntamente com o matemático francês Fermat, através desses estudos desenvolveram a teoria da probabilidade em jogos de azar utilizando regras matemáticas. ALMEIDA (2006) [6]

Aproveitamos para ressaltar que o contexto histórico do surgimento da análise combinatória e da probabilidade é algo que também pode ser trazido durante as aulas de matemática, ajuando a motivar os alunos a estudarem estes assuntos e a tirar a percepção de que a matemática é um conjunto de regras pronto e arbitrário.

Como diz D'AMBROSIO (1989) [10] em seu artigo:

> (...) os alunos acham que a matemática é um corpo de conceitos verdadeiros e estáticos, do qual não se duvida ou questiona, nem mesmo nos preocupamos em compreender porque funciona. Em geral, acreditam também, que esses conceitos foram descobertos ou criados por gênios.

Mas afinal o que é um jogo? A definição de *jogo* que utilizaremos é de situação de competição ou cooperação entre dois ou mais agentes (denominados *jogadores*) que tomam decisões e fazem escolhas que influenciam as decisões e escolhas dos demais jogadores. *"Cada jogador tem um conjunto de **estratégias**. Quando cada jogador escolhe sua estratégia, temos então uma situação ou perfil no espaço de todas as situações (perfis) possíveis."* BORTOLOSSI et al (2004). [19]

Diante desta definição podemos ver que diversas situações podem ser caracterizadas como um jogo: impasses econômicos entre países ou empresas, um debate, um julgamento ou até mesmo uma atividade lúdica simulada com um conjunto de regras pré-estabelecidas, que é a situação que mais se aproxima da ideia coloquial de "jogo" e do próprio Bozó.

Dando prosseguimento ao histórico da teoria de jogos, ALMEIDA (2006) diz:

> O marco inicial da teoria dos jogos foi quando John Von Neumann (1903-1957), matemático húngaro-americano, provou o teorema minimax, segundo este teorema há sempre uma solução racional para um conflito bem definido entre dois indivíduos cujos interesses são completamente opostos, teorema deixado aberto pelo matemático francês Émile Borel (1871-1956). [6]

No mesmo período o economista alemão Oskar Morgenstern (1902-1977) investigava e publicava a respeito dos objetos de estudo da Economia, o individualismo e a interação social, chegando à conclusão de que o resultado de um jogo depende "*diretamente da interação entre os indivíduos e indiretamente do meio no qual os indivíduos interagem*" ALMEIDA (2006) [6]

> Por isso Morgenstern e Von Neumann juntaram os seus trabalhos e publicaram, em 1944, a obra: The Theory of Games and Economics Behavior (Teoria dos

> Jogos e Comportamento Econômico, 1944), que além de desenvolver uma teoria de jogos para mais participantes afirmam que o comportamento da Economia depende, fundamentalmente, da interação entre os agentes, já que ele afeta diretamente a elaboração de estratégias e tomadas de decisão dos produtores e dos consumidores. ALMEIDA (2006) [6]

Na teoria dos jogos, uma palavra-chave é utilizada para resumir a situação final de um jogo. COSTA (2004) [9] explica que "*no fim do jogo, cada jogador obtém um* payoff. *Podemos associar este número ao montante que foi ganho ou perdido, ou dizer, por exemplo, que o* payoff *é +1 para o ganhador, 0 se há um empate, e -1 para o perdedor.*"

A contribuição de John Nash se deu em 1950 com a publicação de quatro artigos importantes para a teoria dos jogos não-cooperativos e para a teoria de barganha. "*Em 1994, John Forbes Nash Jr. (Universidade de Princeton), John Harsanyi Universidade de Berkeley, California) e Reinhard Selten (Universidade de Bonn, Alemanha) receberam o prêmio Nobel por suas contribuições para a Teoria dos Jogos.*" BORTOLOSSI et al (2004) [19]

Aqui está um dos motivos pelo qual consideramos importante estar discorrendo sobre a Teoria dos Jogos para abordar, especificamente, o Bozó: os trabalhos de John Nash, por exemplo, generalizam e trazem características que são comuns a todos os jogos não-cooperativos, independente do seu conjunto de regras. Ao classificar o Bozó, estamos possibilitando que ele seja inserido em conjuntos mais gerais de jogos, com caraterísticas próprias e comuns a toda uma classe de jogos já estudados. Além disso, dá uma noção de ordem e ajuda a prever possíveis estratégias.

Continuando a apresentação de conceitos relevantes para nosso trabalho, COSTA (2004) esclarece o que é a *estratégia* que BORTOLOSSI *et al*

(2004) [19] citam:

> Uma estratégia é uma lista das escolhas ótimas para um jogador. Nesta lista já estão previstas todas as possíveis situações que o jogador poderá enfrentar. Assim, tendo uma estratégia, ele saberá o que fazer em qualquer estágio, não importando o que seu oponente faça nem os resultados dos eventos probabilísticos. [9]

No próximo capítulo iremos analisar de maneira mais aprofundada algumas escolhas com que um jogador no Bozó se depara. Como se trata de um jogo altamente condicional, já que as decisões começam a ser tomadas após o lançamento dos cinco dados, é necessário identificar quais delas são pertinentes de estudo. Para isso, vamos utilizar o conceito de **jogador racional**. SOUZA (2003) define este conceito em sua tese de mestrado que relaciona a teoria dos jogos com as ciências sociais:

> Quando um agente (o "jogador") se defronta com uma situação em que tenha que escolher entre dois ou mais caminhos para atingir determinado fim, (...) e tal agente social escolhe o meio que ele acredita ser o mais viável para realizar o seu intento, diz-se que este jogador se comportou racionalmente, mesmo que este agente tenha escolhido o caminho errado. Isto se tomarmos como base a teoria da escolha racional, que parte da premissa que todo agente com potencial de ação busque aumentar as suas chances de realizar o seu objetivo. Caso o jogador em questão se comporte de modo que contradiga as suas crenças (mesmo que sejam ilusórias), do ponto de vista da teoria da escolha racional este seria um comportamento irracional. [22]

A intenção do jogador de Bozó é fazer mais pontos que seus adversários com as combinações dos cinco dados, portanto, escolhas que se distanciam de obter mais pontos são jogadas irracionais. Além disso, dentro das jogadas racionais é possível estabeler uma ordem de prioridade. Como descreve SOUZA(2003) em sua tese:

> O conceito de racionalidade se refere ao potencial do jogador de ordenar suas alternativas hierarquizando suas preferências. O agente deve buscar informações suficientes para poder analisar a relevância das suas crenças. [22]

Antes de fazer as simulações no Capítulo 6 iremos estabelecer exatamente esta hierarquia entre as jogadas racionais, o que irá caracterizar uma estratégia.

Outro objetivo deste trabalho é classificar este jogo diante da Teoria de Jogos, pois, como dito anteriormente, classificar um jogo permite que sejam conhecidas e exploradas características que ele compartilha com outros jogos, independente de seu conjunto de regras e condição de vitória específicos. Não é objetivo deste trabalho, mas outros pesquisadores podem querer aplicar soluções gerais já obtidas pelos estudiosos da Teoria dos Jogos ao Bozó.

A saber, um jogo pode ser classificado com relação aos possíveis *payoffs*:

- Jogo de soma zero: aquele em que a soma dos *payoffs* dos jogadores é zero, ou seja, um jogador só pode ganhar se o outro perder, assim como no pôquer, xadrez, entre outros;
- Jogo de soma não zero: é aquele que não possui a propriedade supracitada, ou seja, jogo em que todos os jogadores podem sair perdendo ou podem sair ganhando COSTA (2004) [9].

Geralmente, quando pensamos em jogos, os primeiros exemplos que vem à mente são jogos de soma zero, com um perdedor e um ganhador. Jogos de soma não zero são menos comuns, por isso trazemos um exemplo famoso na Teoria dos Jogos: o **Dilema do Prisioneiro**.

> Dois prisioneiros são mantidos em escritórios separados e o promotor do caso oferece a cada um o seguinte: caso ele testemunhe contra o comparsa e este

> não testemunhar contra ele, sua pena será de 1 ano de prisão cabendo a seu colega cumprir 10 anos. Caso o comparsa também testemunhe contra ele sua pena será de 5 anos. Se, todavia, ambos se recusarem a testemunharum contra o outro, ambos passarão dois anos na cadeia. TONELLI (2018). [23]

Nota-se que não há como um dos prisioneiros "ganhar", apenas minimizar seu resultado negativo, sendo um jogo em que ambos perdem.

O modo como os jogadores interagem entre si e seus objetivos também define um outro tipo de classificação. Quando há comunicação entre os participantes, uma meta em comum, um *payoff* compartilhado, o jogo é denominado **cooperativo**. Os jogos **não cooperativos** ou **competitivos** *"são jogos onde os participantes não se comunicam, não cooperam entre si e não fazem acordo sobre possíveis estratégias a serem adotadas"* SANTOS (2016) [18].

O dilema do prisioneiro que apresentamos anteriormente é um exemplo de jogo não cooperativo; um exemplo de jogo cooperativo que tem ganhado destaque nas pesquisas em Educação é o jogo de *RPG (Role-Playing Game)*, em que cada jogador possui habilidades e itens próprios mas faz parte de uma equipe com objetivos em comum.

> Durante o jogo [de RPG] os personagens vivem aventuras que lembram os grandes épicos de nossa literatura e cinema: enfrentam monstros, salvam princesas, desafiam impérios galácticos... Ou não, pois também é possível interpretar vilões e anti-heróis. Existem RPGs de todos os tipos: de fantasia medieval ao terror, de viagens espaciais a cenários históricos.(SALES) [17]

Outra maneira de classificar um jogo é quanto às informações disponíveis aos jogadores; um **jogo de informação completa** é aquele em que os jogadores tem todas as informações dos demais jogadores, isto é, conhecem suas jogadas, suas tomadas de decisões e pontuação. Caso contrário, o jogo é denominado **jogo de informação incompleta**.

O xadrez é um exemplo de jogo de informação completa, pois a todo momento é possível observar as jogadas do adversário e a posição de suas peças no tabuleiro, enquanto o pôquer seria um exemplo de jogo de informação incompleta já que as cartas da mão do adversário são desconhecidas.

Um jogo também pode ser **simultâneo** ou **sequencial**. No jogo simultâneo as jogadas ou tomadas de decisão são feitas ao mesmo tempo, como, por exemplo, em um jogo de "par ou ímpar" ou "pedra-papel-tesoura". No jogo sequencial, "*os participantes seguem uma ordem preestabelecida em seus movimentos ou ações, onde as consequências de cada ação são cumulativas, o que implica diretamente nos ganhos finais de cada jogador.*" SANTOS (2016) [18]

Um **jogo de repetição** é caracterizado por um mesmo modelo de rodada que é repetido alterando apenas as estratégias e as fases do jogo; os próprios exemplos utilizados anteriormente de "par ou ímpar", "pedra-papel-tesoura" e também o jogo de pôquer são exemplos de jogos de repetição. O jogo de *RPG*, por exemplo, não se encaixa na definição de jogo de repetição, pois a cada momento os personagens encontram-se em situações diferentes, em outro ponto na trama.

Utilizamos as classificações trazidas por COSTA (2004) por se tratarem de classificações primordiais na teoria dos jogos. Não é possível analisar um jogo sem falar dos possíveis *payoffs* nem aplicar os resultados gerais encontrados por von Neumman e Nash sem saber se são jogos de soma zero ou soma não zero, que era o objetivo de seu trabalho.

O mesmo propósito pode ser encontrado na pesquisa de SANTOS

(2016) ao classificar jogos: poder aplicar os resultados gerais encontrados pelos grandes nomes da Teoria de Jogos. Acreditamos que são classificações válidas pois, como iremos mostrar, fica claro em quais delas o Bozó se encaixa ou não. Além disso, é importante que o professor ou pesquisador, públicos-alvo deste trabalho, conheçam estas classificações tão comuns em outras pesquisas com jogos.

Tendo em vista as caracterizações apresentadas e conhecidas as regras do jogo de Bozó, podemos notar que se trata de um jogo:

- **Soma zero**: pois um jogador só pode ganhar se os demais perderem; a única forma de mais de um jogador ganhar é caso haja empate dos pontos e não haja diferença no critério de desempate, o que é uma situação de exceção;
- **Não cooperativo ou Competitivo**: como dito no Capítulo 2, pode ser que haja uma cooperação no sentido social, em que os jogadores se ajudem relembrando as regras e possíveis jogadas, mas, analisando de maneira pragmática, as pontuações são individuais e o objetivo é obter mais pontos do que os adversários, criando, assim, uma competição;
- **De informação completa**: sempre que um jogador lança os dados os demais podem observar seus resultados e tomadas de decisão; também há o fato de que a pontuação é aberta para que todos possam ver;
- **Sequencial**: um jogador não joga os dados ao mesmo tempo que outro jogador, mas sim de maneira ordenada, cada um em sua vez, completando sua jogada antes do próximo começar sua rodada;
- **De repetição**: toda rodada é uma repetição da primeira, sendo esta composta pelo lançamento inicial dos cinco dados e possíveis dois relançamentos contendo qualquer subconjunto dos resultados dados.

5 Tópicos da Análise Combinatória e Probabilidade

Antes de começarmos a analisar as escolhas e possíveis jogadas no Bozó, serão de apresentados os conceitos, definições e notação acerca de tópicos da análise combinatória e de probabilidade que serão utilizados neste trabalho. Também espera-se que o professor que deseje utilizar o Bozó em suas aulas, em dado momento, leve em conta aulas que trabalhem estes conceitos em seu planejamento.

O primeiro e um dos principais conceitos da análise combinatória, base para várias técnicas de contagem, é o **Princípio Fundamental da Contagem**:

> O princípio fundamental da contagem diz que se há x modos de tomar uma decisão D_1 e, tomada a decisão D_1, há y modos de tomar a decisão D_2, então o número de modos de tomar sucessivamente as decisões D_1 e D_2 é $x \cdot y$. MORGADO e CARVALHO (2015) [14]

É um princípio muito importante que resolve vários problemas de contagem, porém existem classes de problemas na análise combinatória em que é interessante saber uma fórmula que resume sua resolução. Uma dessas classes de problemas é a de **permutações simples**: "*De quantos modos podemos ordenar em fila n objetos distintos?*" MORGADO e CARVALHO (2015) [14]

> A escolha do objeto que ocupará o primeiro lugar pode ser feita de n modos; a escolha do objeto que ocupará o segundo lugar pode ser feita de $n-1$ modos; a escolha do objeto que ocupará o terceiro lugar pode ser feita de $n-2$ modos, etc ...; a escolha do objeto que ocupará o último lugar pode ser feita de 1 modo. A resposta é $n(n-1)(n-2)...1 = n!$
>
> Portanto, o número de permutações simples de n objetos distintos é $P_n = n!$ (MORGADO e CARVALHO, 2015) [14]

Mas e se dentre os n objetos houver objetos repetidos? A permutação destes objetos repetidos não cria outros novos casos de contagem, portanto devem ser desconsideradas.

> De modo geral, o número de permutações de n objetos, dos quais α são iguais a A, β são iguais a B, γ são iguais a C etc, é $P_n^{\alpha,\beta,\gamma} = \frac{n!}{\alpha!\beta!\gamma!...}$ MORGADO e CARVALHO (2015) [14]

Este conceito de desconsiderar a ordem da permutação de elementos dentro do problema de contagem é necessário para que possamos desenvolver uma fórmula para os problemas de **combinação simples** que responda a pergunta: quantos subconjuntos de p elementos distintos podem ser formados a partir de um conjunto de n objetos distintos? Note que ao utilizar o termo subconjunto, estamos desconsiderando a ordem em que os elementos são escolhidos ou dispostos.

> Para resolver o problema das combinações simples basta notar que selecionar p entre os n objetos equivale a dividir os n objetos em um grupo de p objetos, que são selecionados, e um grupo de $n-p$ objetos, que são os não selecionados. (...) a resposta é
>
> $$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$ (MORGADO e CARVALHO, 2015) [14]

Como MORGADO e CARVALHO (2015) [14] observam, a notação $C_{n,p}$ ou C_n^p é mais comum em livros para o Ensino Médio no Brasil, a qual iremos preferir utilizar neste trabalho. Em textos mais avançados a notação mais usual é $\binom{n}{p}$.

O objetivo de estudar estas técnicas da análise combinatória é poder aplicá-las ao jogo Bozó, responder e propor aos alunos perguntas do tipo: de quantas maneiras pode-se obter uma Seguida "de boca"? E um Fu, Quadra ou General?

Além disso, também é interessante explorar as probabilidades dentro do Bozó: qual a probabilidade de se obter uma Seguida "de boca"? E um Fu, Quadra ou General "de boca"? Após a primeira batida de copo, qual a probabilidade de se obter determinada jogada? Qual escolha de dados para relançar trará o melhor benefício? Ao longo deste trabalho tentaremos explorar estas perguntas, mas antes iremos apresentar as definições, conceitos e notações de probabilidade que serão utilizadas.

Como dizem MORGADO e CARVALHO (2015), "*experiências que repetidas sob as mesmas condições produzem geralmente resultados diferentes são chamadas de aleatórias.*"

Denominaremos **espaço amostral** de um experimento aleatório "*o conjunto de todos os possíveis resultados de um experimento aleatório*" PAIVA (2002) [15]. E o **evento** de um espaço amostral "*é qualquer subconjunto de um espaço amostral*" PAIVA (2002) [15].

> Um espaço amostral $E = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$ de um experimento aleatório é **equiprovável.** se, e somente se, as frequências[3] dos elementos tendem a um mesmo valor quando o número de vezes que o experimento é realizado tende ao infinito. PAIVA (2002) [15]

A definição de probabilidade que utilizaremos se baseia em um espaço amostral equiprovável.

> Seja E um espaço amostral[4] finito e não-vazio; seja A um evento desse espaço. Chama-se "**probabilidade** de A", e indica-se por $P(A)$, o número $\frac{n(A)}{n(E)}$, onde $n(A)$ e $n(E)$ indicam os números de elementos de A e E, respectivamente. Isto é:
>
> $$P(A) = \frac{n(A)}{n(E)}.$$
>
> PAIVA (2002) [15]

[3]observadas.
[4]equiprovável

Chama-se **evento complementar de** A, denotado por $\overline{A}$, o evento com as seguintes condições:

$$A \cup \overline{A} = E,$$
$$A \cap \overline{A} = \emptyset.$$

A propriedade relacionada ao evento complementar $\overline{A}$ é de que sua probabilidade pode ser calculada através da probabilidade do próprio evento A:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

Outra definição muito importante para o estudo do Bozó é o da **probabilidade condicional**. A probabilidade de ocorrer um evento A dado que já aconteceu um evento B é denotado por $P(A|B)$, lê-se "probabilidade de A dado B" e calcula-se da seguinte maneira:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

O cálculo da probabilidade condicional também pode ser interpretado como **uma mudança de espaço amostral** em decorrência do acontecimento de um evento. O evento $A \cap B$ representa a ocorrência simultânea dos eventos A e B.

Todos os conceitos apresentados neste capítulo constam no currículo comum de Matemática do Ensino Médio. O próximo e último conceito que iremos abordar é o de **esperança** ou **valor esperado** de uma variável aleatória, o qual não consta tradicionalmente no currículo do Ensino Médio. Consideramos válido mostrá-lo para o leitor desta dissertação e utilizá-lo como ferramenta no estudo das simulações que faremos no capítulo seguinte. Caso deseje, o professor pode ensinar este conceito também a seus alunos no decorrer ou conclusão da atividade que iremos propor.

Se X é uma variável aleatória assumindo valores em $I \subseteq \mathbb{R}$ com função de probabilidade $p(x)$, $x : x \in I \subseteq \mathbb{R}$ então a esperança, ou valor esperado, de X, representada por $E[X]$, é definida por

$$E[X] = \sum_{\{x : x \in I\}} x p(x)$$

"*Colocando em palavras, o valor esperado de X é uma média ponderada dos possíveis valores que X pode receber, com cada valor sendo ponderado pela probabilidade de que X seja igual a esse valor.*" ROSS (2010) [16]

As definições de variável aleatória e de função de probabilidade se encontram nos Apêndices A e B.

Tendo estas definições e técnicas em mãos, podemos calcular algumas possibilidades e probabilidades dentro do jogo.

5.1 Possibilidades do Fu

Nesta seção, iremos calcular de quantas formas pode-se obter um Fu "de boca" no Bozó. Lembre-se de que são jogados cinco dados honestos de seis faces e que o Fu é composto por uma dupla e um trio de dados, mas com resultado diferente da dupla. Primeiro, a dupla pode ser formada por qualquer um dos valores de 1 a 6; segundo, iremos escolher 2 dos 5 dados para serem os dados da dupla; depois há 5 possibilidades de números para formar a trinca e iremos escolher 3 dos 3 dados restantes para serem os da trinca. Assim, para formar um Fu há:

$$6 \cdot C_{5,2} \cdot 5 \cdot C_{3,3} = 6 \cdot 10 \cdot 5 \cdot 1 = 300 \text{ possibilidades}$$

5.2 Possibilidades da Seguida

Para calcular as possibilidades de se obter uma Seguida iremos separar em dois casos: i) a Seguida formada pelas faces dos dados de 1 a 5 e ii) a formada pelas faces dos dados de 2 a 6. Em ambos os casos, o número de possibilidades é igual à permutação de 5 itens, pois os cinco dados, de 1 a 5 ou de 2 a 6, podem sair em qualquer ordem.

$$5! + 5! = 120 + 120 = 240\,\text{possibilidades}$$

5.3 Possibilidades da Quadra

No cálculo de possibilidades da Quadra (quatro faces dos dados iguais mais um dado com face diferente) iremos utilizar o seguinte raciocínio: primeiro há 6 possibilidades de resultado que irá formar a quadra; em seguida iremos escolher 4 dos 5 dados para serem os dados da quadra; por último, restam 5 possibilidades de números distintos do resultado da quadra para serem o último dado.

$$6 \cdot C_{5,4} \cdot 5 = 6 \cdot 5 \cdot 5 = 150\,\text{possibilidades}$$

5.4 Possibilidades do General

O General (5 dados iguais), por ser tão restritivo, é o mais simples de se calcular: há 6 possibilidades de número para formar o general; em seguida só há 1 maneira de se escolher 5 dos 5 dados para formar o General. Portanto, para o General há apenas:

$$6 \cdot C_{5,5} = 6 \cdot 1 = 6\,\text{possibilidades}$$

5.5 Probabilidades das jogadas

Iremos calcular qual a probabilidade de se obter um Fu, Seguida, Quadra ou General "de boca", isto é, somente com uma jogada dos cinco dados. Já obtivemos o total de possibilidades de se obter cada uma destas jogadas (casos favoráveis), portanto falta apenas obter o número de elementos do espaço amostral para calcular as probabilidades.

Como são jogados 5 dados honestos de 6 faces, o número de elementos do espaço amostral é:

$$n(E) = 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 7.776$$

Desta forma:

$$\begin{aligned} P(\text{Fu}) &= \frac{300}{7.776} = \frac{25}{648} \approx 3,86\% \\ P(\text{Seguida}) &= \frac{240}{7.776} = \frac{5}{162} \approx 3,09\% \\ P(\text{Quadra}) &= \frac{150}{7.776} = \frac{25}{1.296} \approx 1,93\% \\ P(\text{General}) &= \frac{6}{7.776} = \frac{1}{1.296} \approx 0,08\% \end{aligned}$$

Assim, temos uma boa ideia do que pode ocorrer no primeiro lançamento de dados, mas estas probabilidades ainda não envolvem uma tomada de decisão dos jogadores: todos precisam lançar os 5 dados em sua rodada, mas cada um escolhe quais dados relançar. Como existem muitos possíveis resultados no primeiro lançamento dos dados e também muitas possibilidades decorrentes do primeiro e segundo relançamento dos dados, no próximo capítulo iremos restringir nosso estudo a alguns casos específicos. Deste modo o processo aleatório implícito no jogo poderá ser exposto.

6 Simulações de jogadas

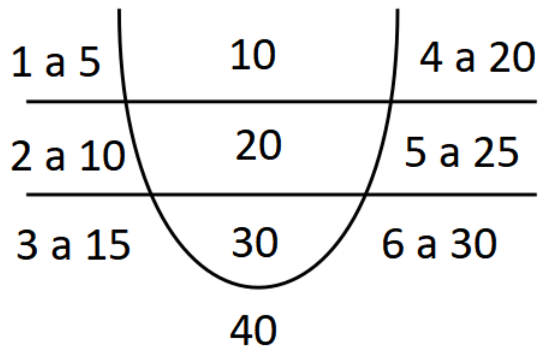
Antes de continuar vamos relembrar o nome das jogadas e suas respectivas pontuações por meio do Quadro 1.

Quadro 1: Possíveis jogadas e suas pontuações no Bozó.

Jogada	**Descrição**	**Pontuação**
Ás	Soma das faces 1 dos dados	1 a 5
Duque	Soma das faces 2 dos dados	2 a 10
Terno	Soma das faces 3 dos dados	3 a 15
Quarta	Soma das faces 4 dos dados	4 a 20
Quina	Soma das faces 5 dos dados	5 a 25
Sena	Soma das faces 6 dos dados	6 a 30
Fu	Uma dupla e um trio	10
Seguida	Sequência 1 ao 5 ou do 2 ao 6	20
Quadra	Quatro dados iguais	30
General	Cinco dados iguais	40

A Figura 21 mostra o marcador de pontos com as possíveis pontuações em seus respectivos locais:

Figura 21: Marcador de pontos com as possíveis pontuações.



Fonte: Compilação do autor

Aproveitamos para lembrar que, em sua rodada, o jogador faz até três lances: o lançamento dos cinco dados e mais dois relançamentos escolhendo quais dados relançar, caso deseje. Depois, ele precisa usar a configuração de dados que obteve para marcar pontos em uma das dez casas, como a Figura 21, e esta casa fica “fechada”, isto é, **não é mais possível marcar pontos nela** nas rodadas subsequentes. Ou seja, se ele pontuar na casa da Sena em alguma jogada, não poderá mais pontuar nela novamente. Isso traz um limitante de dez jogadas para cada jogador até o fim do jogo.

A análise que faremos irá contemplar as possíveis escolhas do primeiro relançamento, que é quando o jogador de fato é confrontado com uma decisão. Vamos calcular o valor esperado de cada decisão e observar se existem melhores escolhas ou não dentro do jogo de Bozó, isto é, **jogadas que provavelmente irão trazer mais pontos que outras**. Também faremos uma análise qualitativa das escolhas do jogador, se ela oferece maior variedade de jogadas por exemplo.

Por se tratar de um jogo com muitos condicionantes e por simplicidade, o estudo que faremos neste capítulo não irá contemplar a dimensão de uma partida inteira, isto é, não iremos analisar todas as dez jogadas de um jogador até o final da partida. Pelos mesmos motivos, também não iremos analisar o segundo relançamento do jogador. Entretanto, para classificar as jogadas como racionais ou irracionais, iremos utilizar uma visão do jogo completo, isto é, iremos pensar no placar completo e como um jogador pode terminar com mais pontos do que outro.

Em cada caso iremos supor que o primeiro lançamento foi feito e certa configuração dos cinco dados foi obtida e que o placar de pontos está vazio, isto é, qualquer casa pode ser utilizada para marcar pontos. As duas configurações que utilizaremos em nosso estudo nas simulações são:

- Simulação 1: seguida quase completa com os dados $\{1, 2, 3, 4, 6\}$;
- Simulação 2: um trio e dois valores distintos nos outros dois dados {1,

1, 1, 3, 5}.

Estas duas simulações contemplam duas situações interessantes do Bozó: na Simulação 1 iremos cobrir os casos em que o jogador tenta conseguir **faces dos dados diferentes e em sequência**, para conseguir completar a jogada especial da Seguida. Na Simulação 2 iremos explorar casos em que o jogador tenta conseguir **faces dos dados iguais**, seja para completar um Fu, uma Quadra ou um General.

6.1 Jogadas racionais no Bozó e escolha da estratégia

Considerando a definição de **jogador racional** trazida no Capítulo 4 vamos explicar o que será considerada uma **jogada racional** para nosso estudo. Observando a Figura 21 e tomando como base minha experiência empírica como jogador de Bozó, as partidas terminam quase sempre com os jogadores tendo completados as quatro jogadas especiais, o que se torna uma base de comparação; o que costuma diferenciar um placar do outro e garantir a vitória de um jogador é garantir uma pontuação alta nas casas numéricas.

Pode-se observar também que, com poucas exceções, marcar pontos em uma jogada especial sempre oferece uma vantagem maior do que utilizar os mesmos dados para marcar pontos em uma casa numérica. Tome como exemplo a configuração $\{6, 6, 6, 6, 5\}$; com ela, um jogador pode marcar:

- 5 pontos na casa da Quina;
- 24 pontos na casa da Sena;
- 30 pontos na casa da Quadra;
- Anular qualquer outra casa.

Isto é, a jogada especial (neste caso a Quadra) supera em pontos a melhor jogada numérica (24 pontos na casa da Sena). Esta comparação fica ainda mais evidente em uma combinação de Seguida, em que não há dados iguais para somar: tome a configuração $\{2, 3, 4, 5, 6\}$, por exemplo; com ela, um jogador pode marcar:

- 2 pontos na casa do Duque;
- 3 pontos na casa do Terno;
- 4 pontos na casa da Quarta;
- 5 pontos na casa da Quina;
- 6 pontos na casa da Sena;
- 20 pontos na casa da Seguida;
- Anular qualquer outra casa.

Note que mesmo a configuração formada pela maior face dos dados $\{6, 6, 6, 6, 6\}$ oferece mais pontos como um General (40 pontos) do que como uma jogada numérica (30 pontos na casa da Sena).

As exceções que mencionamos ocorrem no caso do Fu, a jogada especial que vale 10 pontos formada por uma dupla e um trio. Uma configuração de dados que ilustra a exceção é $\{3, 3, 4, 4, 4\}$; com ela um jogador pode marcar:

- 6 pontos na casa do Terno;
- 12 pontos na casa da Quarta;
- 10 pontos na casa do Fu;
- Anular qualquer outra casa.

Em resumo, a jogada numérica é mais vantajosa do que o Fu caso o jogador obtenha: a) um trio de dados com faces 4, 5 ou 6 ou b) uma dupla de dados com face 6. Iremos levar essas exceções em conta ao simular as escolhas de um jogador racional no decorrer do capítulo.

Até agora já definimos que, entre escolher formar uma jogada especial e uma jogada numérica, é sempre melhor escolher a jogada especial, com algumas exceções (jogada 6.1). No entanto, o que ocorre quando comparamos duas jogadas numéricas? Qual é a escolha racional em cada caso? Considere a configuração $\{1, 1, 1, 4, 5\}$, por exemplo; com ela um jogador pode marcar:

- 3 pontos na casa do Ás;
- 4 pontos na casa da Quarta;
- 5 pontos na casa da Quina;
- Anular qualquer outra casa.

Neste caso vamos considerar como uma **jogada coerente marcar 3 pontos na casa do Ás**. À primeira vista pode parecer incoerente por oferecer menos pontos do que as outras opções, mas, pensando na partida inteira, 3 pontos na casa do Ás representam 60% da pontuação máxima desta casa, que vai de 1 a 5 pontos; ao marcar 4 pontos na casa da Quarta ou 5 pontos na casa da Quina estaremos fechando a casa com apenas 20% da pontuação máxima que a casa pode oferecer, 4 a 20 pontos e 5 a 25 pontos, respectivamente.

Escolhemos uma configuração com um trio de dados com face 1 para explicar o raciocínio que vamos utilizar, mas ele também pode ser aplicado caso sejam obtidos um trio de dados com faces 2, 3, 4, 5 ou 6; inclusive, nestes casos, a pontuação obtida somando-se as faces dos dados obtidos no trio é sempre maior ou igual às demais possíveis pontuações como podemos ver tomando-se como exemplo a configuração {2, 2, 2, 5, 6} que oferece as seguintes possibilidades:

- 6 pontos na casa do Duque;
- 5 pontos na casa da Quina;
- 6 pontos na casa da Sena;
- Anular qualquer outra casa.

Portanto, ao comparar jogadas numéricas, iremos **priorizar marcações de pontos que possuem pelo menos um trio de dados iguais**, mesmo que ofereça menos pontos do que marcações em outras casas (jogada 6.2).

Outro tipo de configuração que precisamos considerar é quando são obtidas duas duplas, como na configuração $\{3, 3, 5, 5, 6\}$; com ela um jogador pode marcar:

- 6 pontos na casa do Terno;
- 10 pontos na casa da Quina;
- 6 pontos na casa da Sena;
- Anular qualquer outra casa;

As duas primeiras opções representam 40% da pontuação máxima destas casas, que vão de 3 a 15 e de 5 a 20, respectivamente. Neste caso, vamos dar preferência por marcar 10 pontos na casa do Quina, mesmo sabendo que estamos abandonando a possibilidade de obter 15, 20 ou 25 pontos em uma jogada futura. Este abandono é oportuno, pois a probabilidade de se obter 15, 20 ou 25 pontos não é tão alta e para obter 20 ou 25 pontos o jogador teria que fazer uma Quadra ou um General que, como já vimos, compensam mais como jogada especial. Desta forma, também estamos maximizando o ganho de pontos da jogada em si. Note que a outra opção, marcar 6 pontos na casa da Sena, é uma jogada irracional por fechar a casa com apenas 20%

da pontuação máxima.

Portanto, se a configuração de dados não apresentar uma jogada especial nem um trio de dados com faces iguais, iremos pontuar marcando pontos com uma dupla de dados (jogada 6.3). Se houver duas duplas de dados na configuração, iremos escolher a dupla de dados com maior valor numérico (jogada 6.4).

Quando obtivermos uma configuração de dados sem nenhuma dupla iremos escolher pontuar com o menor dado; não queremos fechar uma casa de números mais altos com apenas $\frac{1}{5}$ de seu valor máximo (jogada 6.5).

Condensando os argumentos utilizados até agora temos a seguinte ordem de prioridade de jogadas e marcações de pontos:

1. Jogadas especiais (ver jogada 6.1);
2. Jogadas numéricas com pelo menos um trio (ver jogada 6.2);
3. Jogadas numéricas com pelo menos uma dupla (ver jogada 6.3);
4. Dentre duas duplas de números, escolher a dupla maior (ver jogada 6.4);
5. Se não houver dados com faces iguais, escolher pontuar com a **menor** face de dado (ver jogada 6.5).

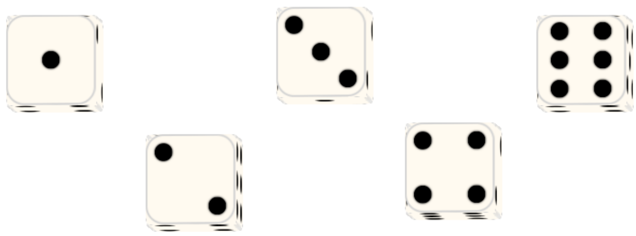
Lembramos o leitor que esta é apenas uma entre várias possíveis estratégias do jogo de Bozó, baseada nas comparações apresentadas de forma lógica e em experiências empíricas; outros estudos e simulações podem ser feitos com base em outras estratégias a fim de compará-las, mas não é o objetivo deste trabalho. Para que o trabalho em sala de aula com o Bozó seja efetivo, queremos apenas demonstrar que não é um jogo somente de sorte, mas também de estratégia.

E, finalmente, para obter o valor esperado de cada decisão nas simulações que faremos, teremos como base um placar de pontos vazio, ou seja, um placar em que todas as jogadas podem ser feitas. Porém, iremos fazer observações e conjecturas de cenários em que o placar não está vazio para confrontar as possíveis decisões.

6.6 Simulação 1 - Seguida quase completa

Para esta simulação vamos supor que um jogador, na primeira batida de copo, tenha obtido a configuração de dados $\{1, 2, 3, 4, 6\}$, mostrada na Figura 22:

Figura 22: Configuração inicial da simulação 1.



Fonte: Compilação do autor.

Por questões de notação, considere o evento aleatório A : obter a combinação $\{1, 2, 3, 4, 6\}$ no lançamento de 5 dados honestos de 6 faces.

De acordo com a ordem de prioridade que estabelecemos na página 61, o jogador irá usar seu relançamento para tentar obter uma jogada especial ou pelo menos um trio para pontuar nas casas numéricas. Vamos analisar o valor esperado de algumas decisões que o jogador poderia fazer em seu primeiro relançamento.

As três possíveis decisões que iremos estudar são: (1-a) relançar o dado com face 6, (1-b) relançar o dado com face 1, (1-c) relançar os dados com face 1 e 6. Em cada um dos casos iremos explicar o pensamento por trás destas escolhas.

Não consideramos interessante estudar outras decisões que não as três apresentadas, como, por exemplo, relançar dado com face 2, 3 ou 4, seja por serem irracionais (não tentam formar a Seguida, que é a jogada especial mais provável dada a configuração inicial) ou seja por serem similares à decisão (1-c) no quesito de relançar dois dados.

(1-a) Relançar o dado com face 6

Esta é uma decisão bem intuitiva: relançar o dado com face 6, o único dado que está fora da Seguida para tentar formá-la. Esta é, inclusive, a única jogada especial que esta decisão permite, já que não há possibilidade de se formar um Fu (um trio e uma dupla), uma Quadra (quatro dados iguais) nem um General (cinco dados iguais). A probabilidade de conseguir a Seguida é uma probabilidade condicional dada a configuração que foi obtida inicialmente; é a mesma de se obter o 5 no dado, ou seja:

$$P(Seguida|A) = \frac{1}{6}$$

Vamos mostrar as demais possibilidades, suas probabilidades e pontuação no Quadro 2.

Quadro 2: Resultados do relançamento do dado 6.

Resultado	**Probabilidade**	**Configuração**	**Casa**	**Pontuação**
1	$\frac{1}{6}$	$\{1, 1, 2, 3, 4\}$	Ás	2
2	$\frac{1}{6}$	$\{1, 2, 2, 3, 4\}$	Duque	4
3	$\frac{1}{6}$	$\{1, 2, 3, 3, 4\}$	Terno	6
4	$\frac{1}{6}$	$\{1, 2, 3, 4, 4\}$	Quarta	8
5	$\frac{1}{6}$	$\{1, 2, 3, 4, 5\}$	Seguida	20
6	$\frac{1}{6}$	$\{1, 2, 3, 4, 6\}$	Ás	1

Portanto, definindo X uma variável aleatória que representa as possíveis pontuações desta decisão, o valor esperado é:

$$\frac{1}{6}(2+4+6+8+20+1) = \frac{41}{6} \approx 6,8.$$

(1-b) Relançar o dado com face 1

Uma outra forma de tentar se obter uma Seguida é relançando o dado com face 1 na tentativa de obter um 5. Desta forma, seria formada uma Seguida "alta" (2, 3, 4, 5, 6) ao invés da Seguida "baixa" (1,2,3,4,5) formada na decisão (1-a); mas lembramos que a pontuação da Seguida "alta" e da Seguida "baixa" é a mesma no Bozó. Então não há mudança na pontuação nem na probabilidade desta jogada:

$$P(Seguida|A) = \frac{1}{6}$$

Vamos analisar as eventuais jogadas numéricas considerando as demais possibilidades, suas probabilidades e pontuação no Quadro 3.

Quadro 3: Resultados do relançamento do dado 1

Resultado	**Probabilidade**	**Configuração**	**Casa**	**Pontuação**
1	$\frac{1}{6}$	$\{1, 2, 3, 4, 6\}$	Ás	1
2	$\frac{1}{6}$	$\{2, 2, 3, 4, 6\}$	Duque	4
3	$\frac{1}{6}$	$\{2, 3, 3, 4, 6\}$	Terno	6
4	$\frac{1}{6}$	$\{2, 3, 4, 4, 6\}$	Quarta	8
5	$\frac{1}{6}$	$\{2, 3, 4, 5, 6\}$	Seguida	20
6	$\frac{1}{6}$	$\{2, 3, 4, 6, 6\}$	Sena	12

O que muda em relação à decisão (1-a) é que é possível conseguir 12 pontos na casa da Sena. Definindo X uma variável aleatória representando as possíveis pontuações desta decisão, temos que o valor esperado é:

$$\frac{1}{6} \cdot (1 + 4 + 6 + 8 + 20 + 12) = \frac{51}{6} = 8,5.$$

(1-c) Relançar os dados com face 1 e 6

Esta não é a decisão mais intuitiva à primeira vista, mas um jogador, ao fazê-la, poderia formar tanto uma Seguida "baixa" (de 1 a 5), obtendo os resultados 1 e 5 nos dados, quanto uma Seguida "alta" (de 2 a 6) obtendo os resultados 5 e 6 nos dados. Também é possível formar trios com esta jogada, que estão em posição bem alta na ordem de prioridade que definimos na página 61.

De forma instintiva, o jogador pode pensar que está aumentando suas possibilidades e, possivelmente, seus pontos ganhos. Vamos conferir matematicamente se isso ocorre. A probabilidade de se obter a Seguida "baixa" nesta situação é a seguinte:

$$P(Seguida\ baixa|A) = \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{36}.$$

A probabilidade de se obter a Seguida "alta" é a mesma, portanto, a probabilidade de se obter uma Seguida, em geral, é:

$$P(Seguida|A) = 2 \cdot \frac{2}{36} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}.$$

Observe que a probabilidade se obter uma Seguida relançando os dois dados é **menor** que nos casos (1-a) e (1-b). Iremos continuar analisando esta decisão e observar se ela oferece um valor esperado maior tendo em vista as jogadas numéricas também. Note que, mesmo relançando dois dados, com faces 1 e 6, ainda não é possível formar nenhuma outra jogada especial pois os outros três dados (2, 3 e 4) possuem faces diferentes.

Considerando estas e as demais possibilidades, suas probabilidades e pontuação em um quadro, obtemos o Quadro 4.

Quadro 4: Resultados do relançamento dos dados com faces 1 e 6.

Resultado	**Probabilidade**	**Configuração**	**Casa**	**Pontuação**
(1,1)	$\frac{1}{36}$	{1, 1, 2, 3, 4}	Ás	2
(1,2) ou (2,1)	$\frac{2}{36}$	{1, 2, 2, 3, 4 }	Duque	4
(1,3) ou (3,1)	$\frac{2}{36}$	{1, 2, 3, 3, 4}	Terno	6
(1,4) ou (4,1)	$\frac{2}{36}$	{1, 2, 3, 4, 4}	Quarta	8
(1,5) ou (5,1)	$\frac{2}{36}$	{1, 2, 3, 4,5}	Seguida	20
(1,6) ou (6,1)	$\frac{2}{36}$	{1, 2, 3, 4, 6}	Ás	1
(2,2)	$\frac{1}{36}$	{2, 2, 2, 3, 4}	Duque	6
(2,3) ou (3,2)	$\frac{2}{36}$	{2, 2, 3, 3, 4}	Terno	6
(2,4) ou (4,2)	$\frac{2}{36}$	{2, 2, 3, 4, 4 }	Quarta	8
(2,5) ou (5,2)	$\frac{2}{36}$	{2, 2, 3, 4,5}	Duque	4
(2,6) ou (6,2)	$\frac{2}{36}$	{2, 2, 3, 4, 6}	Duque	4
(3,3)	$\frac{1}{36}$	{2, 3, 3, 3, 4}	Terno	9
(3,4) ou (4,3)	$\frac{2}{36}$	{2, 3, 3, 4, 4 }	Quarta	8
(3,5) ou (5,3)	$\frac{2}{36}$	{2, 3, 3, 4, 5}	Terno	6
(3,6) ou (6,3)	$\frac{2}{36}$	{2, 3, 3, 4, 6}	Terno	6
(4,4)	$\frac{1}{36}$	{2, 3, 4, 4, 4}	Quarta	12
(4,5) ou (5,4)	$\frac{2}{36}$	{2, 3, 4, 4, 5}	Quarta	8
(4,6) ou (6,4)	$\frac{2}{36}$	{2, 3, 4, 4, 6}	Quarta	8
(5,5)	$\frac{1}{36}$	{2, 3, 4, 5, 5}	Quina	10
(5,6) ou (6,5)	$\frac{2}{36}$	{2, 3, 4, 5, 6}	Seguida	20
(6,6)	$\frac{1}{36}$	{2, 3, 4, 6, 6}	Sena	12

Portanto, definindo X uma variável aleatória que representa as possíveis pontuações desta decisão, o valor esperado dessa decisão é:

$$\frac{1}{36} \cdot 51 + \frac{2}{36} \cdot 117 = \frac{285}{36} \approx 7,9.$$

Agora vamos comparar as três decisões referentes à Simulação 1, as quais constam no Quadro 5.

Quadro 5: Valores esperados da Simulação .1

Decisão	**Descrição**	**Valor esperado**
(1-a)	Relançar o dado 6	6,8
(1-b)	Relançar o dado 1	8,5
(1-c)	Relançar os dados 1 e 6	7,9

Nesta simulação não há dúvidas: existe uma melhor decisão a ser tomada, sendo (1-b), por oferecer um maior valor esperado. Além disso, na decisão (1-b), a probabilidade de se formar uma Seguida é igual à da decisão (1-a) e maior do que a da decisão (1-c); e, assim, como na decisão (1-c) o jogador também pode conseguir 12 pontos em uma jogada numérica.

Note, porém, que as três decisões oferecem as mesmas possibilidades de casas a serem pontuadas: Ás, Duque, Terno, Quarta, Sena e Seguida. Portanto, a vantagem que a decisão (1-b) traz é de melhorar as probabilidades e seus respectivos valores associados.

6.7 Simulação 2 - Trio e dois dados diferentes

Nesta simulação vamos supor que, em sua primeira batida de copo, um jogador tenha lançado os cinco dados e obtido o resultado $\{1, 1, 1, 3, 5\}$, conforme mostra a Figura 23.

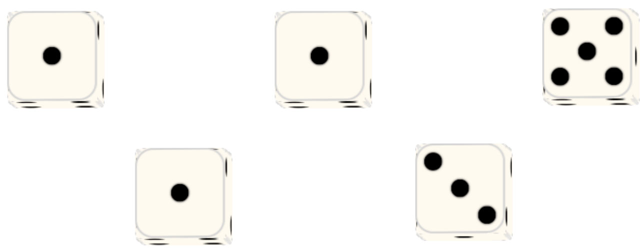


Figura 23: Configuração inicial da simulação 2

Por questões de notação, considere o evento B : obter a combinação $\{1, 1, 1, 3, 5\}$ no lançamento de 5 dados honestos de 6 faces.

Tendo em vista a lista de prioridades de um jogador racional definida na página 61, vemos que um trio já ocupa uma posição bem alta. Apesar disso, é racional tentar conseguir uma jogada especial. Vamos analisar as seguintes escolhas para o primeiro relançamento de dados: (2-a) relançar apenas o dado com face 3, (2-b) relançar apenas o dado com face 5, (2-c) relançar os dados com face 3 e 5. Em cada caso iremos explicar o pensamento por trás da escolha. Note que estas três giram em torno de se obter um Fu (uma dupla e um trio), uma Quadra (quatro dados iguais) ou um General (cinco dados iguais).

Não consideramos interessante estudar outras decisões que não as três apresentadas por serem irracionais: não tentar formar o Fu, Quadra ou General, que são as jogadas especiais mais indicadas dada a configuração inicial.

(2-a) Relançar o dado com face 3

Dentre as jogadas especiais, ao relançar o dado com face 3, o jogador poderia obter apenas a Quadra ou o Fu. Não é possível obter o General, pois o dado com face 5, que foi mantido, já é diferente dos dados com face 1; também não é possível formar a Seguida pois um trio de dados com face

1 foi mantido.

Para obter a Quadra, cuja pontuação é 30, é necessário que o dado relançado possua face igual a 1, portanto a probabilidade disso acontecer é:

$$P(Quadra|B) = \frac{1}{6}.$$

Para obter o Fu, cuja pontuação é 10, é necessário que a face resultante seja 5, ou seja, a probabilidade é:

$$P(Fu|B) = \frac{1}{6}.$$

Dispomos estas e as eventuais jogadas numéricas em no Quadro 6, assim como também suas probabilidades e pontuação.

Quadro 6: Resultados do relançamento do dado 3.

Resultado	**Probabilidade**	**Configuração**	**Casa**	**Pontuação**
1	$\frac{1}{6}$	{1, 1, 1, 1, 5}	Quadra	30
2	$\frac{1}{6}$	{1, 1, 1, 2, 5}	Ás	3
3	$\frac{1}{6}$	{1, 1, 1, 3, 5}	Ás	3
4	$\frac{1}{6}$	{1, 1, 1, 4, 5}	Ás	3
5	$\frac{1}{6}$	{1, 1, 1, 5, 5}	Fu	10
6	$\frac{1}{6}$	{1, 1, 1, 5, 6}	Ás	3

Assim, definindo uma variável aleatória X que representa as possíveis pontuações desta decisão, o valor esperado de X é:

$$\frac{1}{6} \cdot (30 + 3 + 3 + 3 + 10 + 3) = \frac{52}{6} \approx 8,7$$

(2-b) Relançar o dado com face 5

Esta decisão é análoga à decisão (2-a) pois possibilita as mesmas jogadas especiais (Fu ou Quadra) pelos mesmos motivos. Vamos analisar os possíveis resultados deste relançamento, suas probabilidades, as configurações e a pontuação obtida de cada uma, por meio do Quadro 7.

Quadro 7: Resultados do relançamento do dado com face 5.

Resultado	**Probabilidade**	**Configuração**	**Casa**	**Pontuação**
1	$\frac{1}{6}$	$\{1, 1, 1, 1, 3\}$	Quadra	30
2	$\frac{1}{6}$	$\{1, 1, 1, 2, 3\}$	Ás	3
3	$\frac{1}{6}$	$\{1, 1, 1, 3, 3\}$	Fu	10
4	$\frac{1}{6}$	$\{1, 1, 1, 3, 4\}$	Ás	3
5	$\frac{1}{6}$	$\{1, 1, 1, 3, 5\}$	Ás	3
6	$\frac{1}{6}$	$\{1, 1, 1, 3, 6\}$	Ás	3

Utilizando a ordem de prioridade que estabelecemos no começo deste capítulo, não há diferença na pontuação desta jogada. Ressaltamos que escolhendo-se outra estratégia, também baseada no princípio de racionalidade, poder-se-ia chegar em pontuações diferentes.

Portanto, o valor esperado da decisão (2-b) é o mesmo da (2-a), ou seja, $\frac{52}{6} \approx 8,7$.

(2-c) Relançar os dados com face 3 e 5

Esta é uma decisão interessante pois, diferentemente das decisões (2-a) e (2-b), é possível obter um General, além de uma Quadra ou Fu como jogadas especiais. Novamente, não é possível formar a Seguida por estarmos mantendo os dados com face 1.

Para obter o General é necessário que os dois dados possuam face 1, portanto, a probabilidade disso acontecer, condicionada ao evento B, é:

$$P(General|B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}.$$

Para obter uma Quadra é necessário que um dos dados tenha face 1 e o outro não; no cálculo da probabilidade, para levarmos em conta que isso pode acontecer com qualquer um dos dois dados, multiplicamos pelo fator $C_{2,1}$:

$$P(Quadra|B) = C_{2,1} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{10}{36}.$$

Para obter um Fu nesta escolha é necessário que os dois dados sejam iguais entre si, mas diferentes de 1:

$$P(Fu|B) = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{36}.$$

Note que a configuração $\{1,\ 1,\ 1,\ 6,\ 6\ \}$, um dos cinco possíveis casos de Fu, é uma situação de exceção. Com esta configuração, é mais interessante pontuar 12 na casa da Sena, como comentamos no começo deste capítulo.

Iremos dispor estas possibilidades e as demais configurações de dados com suas respectivas probabilidade e pontuação no Quadro 8.

Quadro 8: Resultados do relançamento dos dados com face 3 e 5.

Resultado	**Probabilidade**	**Configuração**	**Casa**	**Pontuação**
(1,1)	$\frac{1}{36}$	{1, 1, 1, 1, 1}	General	40
(1,2) ou (2,1)	$\frac{2}{36}$	{1, 1, 1, 1, 2 }	Quadra	30
(1,3) ou (3,1)	$\frac{2}{36}$	{1, 1, 1, 1, 3 }	Quadra	30
(1,4) ou (4,1)	$\frac{2}{36}$	{1, 1, 1, 1, 4 }	Quadra	30
(1,5) ou (5,1)	$\frac{2}{36}$	{1, 1, 1, 1, 5 }	Quadra	30
(1,6) ou (6,1)	$\frac{2}{36}$	{1, 1, 1, 1, 6 }	Quadra	30
(2,2)	$\frac{1}{36}$	{1, 1, 1, 2, 2}	Fu	10
(2,3) ou (3,2)	$\frac{2}{36}$	{1, 1, 1, 2, 3}	Ás	3
(2,4) ou (4,2)	$\frac{2}{36}$	{1, 1, 1, 2, 4}	Ás	3
(2,5) ou (5,2)	$\frac{2}{36}$	{1, 1, 1, 2, 5}	Ás	3
(2,6) ou (6,2)	$\frac{2}{36}$	{1, 1, 1, 2, 6}	Ás	3
(3,3)	$\frac{1}{36}$	{1, 1, 1, 3, 3}	Fu	10
(3,4) ou (4,3)	$\frac{2}{36}$	{1, 1, 1, 3, 4 }	Ás	3
(3,5) ou (5,3)	$\frac{2}{36}$	{1, 1, 1, 3, 5 }	Ás	3
(3,6) ou (6,3)	$\frac{2}{36}$	{1, 1, 1, 3, 6 }	Ás	3
(4,4)	$\frac{1}{36}$	{1, 1, 1, 4, 4}	Fu	10
(4,5) ou (5,4)	$\frac{2}{36}$	{1, 1, 1, 4, 5}	Ás	3
(4,6) ou (6,4)	$\frac{2}{36}$	{1, 1, 1, 4, 6}	Ás	3
(5,5)	$\frac{1}{36}$	{1, 1, 1, 5, 5}	Fu	10
(5,6) ou (6,5)	$\frac{2}{36}$	{1, 1, 1, 5, 6}	Ás	3
(6,6)	$\frac{1}{36}$	{1, 1, 1, 6, 6}	Sena	12

Assim, definindo uma variável aleatória X que representa as possíveis pontuações desta decisão, o valor esperado de X é:

$$\frac{1}{36} \cdot 92 + \frac{2}{36} \cdot 180 = \frac{452}{36} \approx 12,6$$

Por fim, o Quadro 9 apresenta as três decisões a fim de compará-las.

Quadro 9: Valores esperados da simulação 2.

Decisão	**Descrição**	**Valor esperado**
(2-a)	Relançar o dado 3	8,7
(2-b)	Relançar o dado 5	8,7
(2-c)	Relançar os dados 3 e 5	12,6

Assim, podemos concluir que a decisão (2-c) se destaca em relação às demais, conferindo ao jogador uma vantagem estratégica. Relançar os dados com face 3 e 5 ao mesmo tempo é melhor do que relançar apenas um deles pois possibilita que um General seja formado e, ao mesmo tempo, aumenta a chance de se obter uma Quadra (de $\frac{1}{6}$ para $\frac{10}{36}$) em consequência de uma redução muito pequena na chance de obtenção de um Fu (de $\frac{1}{6}$ para $\frac{5}{36}$).

6.8 Conclusão das simulações

Em ambas as simulações pudemos encontrar decisões igualmente racionais, ou seja, que respeitam a ordem de prioridade estabelecida, e que possuem maior valor esperado e/ou oferecem mais possibilidades de jogadas que as demais escolhas.

Também pudemos concluir que não existe um melhor número de dados a ser rejogado. Na Simulação 1, o melhor é relançar apenas um dado (o dado com face 1), enquanto que, na Simulação 2 o melhor é relançar dois dados (com face 3 e 5). Então não podemos estabelecer uma estratégia geral quanto o número de dados a ser relançado, dependendo da condição obtida no lançamento inicial dos cinco dados.

7 Proposta de intervenção didática

Como dito anteriormente, existem várias maneiras para trabalhar com o jogo Bozó em sala de aula e vários momentos, didaticamente notáveis, para trazê-lo nas aulas de matemática.

Uma primeira abordagem, seguindo uma linha pedagógica mais construtivista, é apresentá-lo antes de a turma ter contato formal com a análise combinatória e a probabilidade, de maneira a motivar estes estudo trazendo situações-problema que interessam os alunos. Caso o professor opte por trabalhar desta maneira, sugerimos que, após várias aulas de contato com estes conteúdos e a formalização destes tópicos, haja um segundo momento dos alunos com o jogo, de maneira a testar e exercitar seus conhecimentos adquiridos dentro do jogo e também com uma lista de exercícios.

Similarmente, é possível trazer o jogo após ter trabalhado os tópicos de análise combinatória em aulas e antes de introduzir a probabilidade à turma; desta maneira já é possível exercitar os cálculos de possibilidades de se fazer uma jogada especial (Fu, Seguida, Quadra e General) e estimular o estudo da probabilidade. Após a formalização do conteúdo de probabilidade também é interessante trazer o jogo novamente para que os alunos tenham a chance de validar os conhecimentos construídos, tanto no jogo como em uma lista de exercícios.

Seguindo uma maneira mais tradicional de trabalho, pode-se apresentar o Bozó após a turma ter concluído o estudo formal da análise combinatória e da probabilidade. Desta forma, o jogo serviria como aplicação para os cálculos destes assuntos da Matemática e os alunos estariam preparados para receber a lista de exercícios logo após jogar algumas partidas. Esta é a maneira como sempre trabalhei quando utilizei este jogo em sala de aula e é a maneira que recomendamos que o professor siga, pois podemos fazer perguntas mais interessantes a cerca do Bozó se os alunos já tem conhecimentos em probabilidade.

Vemos aqui que estas sugestões do uso do Bozó nas aulas de matemática se encaixam na situação descrita por GRANDO (2000)[13]:

> Neste aspecto, o jogo pode representar uma simulação matemática na medida em que se caracteriza por ser uma situação irreal, criada pelo professor ou pelo aluno, para significar um conceito matemático a ser compreendido pelo aluno. (...) pode-se dizer que o jogo, determinado por suas regras, poderia estabelecer um caminho natural que vai da imaginação à abstração de um conceito matemático.

Recomendamos que esta intervenção didática seja feita com alunos de 2ª ou 3ª séries do Ensino Médio, já que é nestas séries que eles, de costume, entram em contato e se aprofundam em análise combinatória e em probabilidade. Também é possível levar este trabalho a alunos do Fundamental II, com as devidas adequações.

O tempo estimado para aplicar a atividade completa com o jogo Bozó é de 6 aulas de 50 minutos, sendo divididas preferencialmente da seguinte forma:

- 2 aulas para os alunos conhecerem o Bozó e jogarem algumas partidas;
- 1 aula para roda de conversa e reflexão sobre situações do jogo;
- 1 aula para correção dos exercícios da lista;
- 2 aulas para conclusões, fechamento e um segundo momento com o jogo.

Aproveitamos para ressaltar a facilidade de levar o Bozó à sala de aula no que diz respeito ao custo do jogo. Por grupo, é preciso apenas um conjunto de cinco dados comuns de seis faces, um copo que não precisa ser necessariamente de couro, papel e caneta para jogar Bozó. No meu caso, eu mesmo comprei um conjunto de mini-dados que levo para estas aulas, mas o professor também pode requisitar para que sua escola os providencie, que os alunos levem de casa ou até confeccionar estes dados com os alunos.

Independente do momento didático em que o professor opte por levar o Bozó à sala de aula (antes ou depois da formalização dos conteúdos), sugerimos que ele divida a sala em grupos de 3 a 4 alunos e que explique todas as regras à turma, desde a mecânica de jogo à contagem de pontos. Deixe que os alunos comecem jogando 2 ou 3 partidas, dependendo do tempo disponível. Aplicando esta atividade nas minhas aulas nos anos passados, pude concluir que 3 ou 4 jogadores é o tamanho ideal para um grupo, pois mais jogadores ocasionam em uma espera muito grande entre jogadas de um mesmo jogador além de tornar a partida muito longa.

Depois, ainda em grupo, serão feitos alguns questionamentos aos alunos acerca de situações do jogo. Estas questões podem ser trazidas de maneira oral pelo professor, apenas para levantar reflexões e discussões, ou em forma de lista de exercícios, se for uma pergunta mais técnica e que dependa de cálculos. Note que, dependendo do momento didático em que o jogo é trazido, algumas perguntas ainda não são adequadas tendo em vista que ainda falta o conhecimento técnico para um cálculo de possibilidades ou de probabilidades aos alunos.

Aproveitamos para lembrar que os alunos precisam passar de um estágio onde jogam por mera tentativa e erro ou por diversão para um estágio em que estejam refletindo, pensando em um problema e exercitando seu raciocínio lógico-matemático. Pode ser que essa passagem de estágio aconteça naturalmente na própria dinâmica que o jogo oferece e em decorrência da interação entre os alunos, mas sem a intervenção do professor não podemos garantir que ela vá acontecer.

Portanto, enfatizamos novamente que o professor não somente entregue o jogo e tempo de aula aos alunos, mas que faça as devidas intervenções nos grupos de alunos, quando necessário e não em demasia, e, posteriormente ao momento de jogo, levante discussões e questões para a classe a cerca de situações que o Bozó traz, seja de maneira oral, como numa roda de conversa, ou em uma lista de exercícios.

Consideramos que a intervenção do professor é necessária, por exemplo, quando o grupo está jogando com regras erradas sem perceber. Observe se naturalmente um ou mais integrantes corrige(m) os demais, senão, faça a correção e sugira que o grupo jogue pelo menos mais uma partida com as regras certas.

Também é interessante que o professor interceda durante o jogo em grupos que estão "jogando somente por jogar", sem refletir quais são as melhores opções. Em minha experiência na aplicação do Bozó em sala de aula pude observar que na maioria dos grupos há alunos que fazem essa ponderação em voz alta com os demais colegas; neste caso recomendamos que o professor não intervenha para deixar o processo mais natural.

Como diz ABE (2009) em seu artigo, também sobre a utilização do Bozó em sala de aula:

> (...) seu papel [do professor] muda de comunicador do conhecimento para o de observador, organizador, consultor, mediador, e principalmente incentivador do processo de construção do saber pelo aluno, apenas intervir dando questionamentos, que os levem a mudança de hipóteses, a descoberta de novos caminhos, mas nunca dar a resposta certa. [5]

Algumas perguntas que sugerimos para fazer aos alunos são de aspecto teórico/investigativo e outras estão baseadas em cálculos utilizando as técnicas da análise combinatória ou da probabilidade. Podem ser propostas questões quanto aos resultados de possibilidades do Capítulo 5, iniciados na página 52, probabilidades e simulações também do mesmo capítulo.

Exemplos de questões que podem levantar discussões em **roda de conversa** são:

- Qual jogada você acha melhor tentar primeiro? Alguma jogada especial ou uma jogada numérica?
- Alguém do seu grupo se destacou na obtenção de pontos? Você acha que ele/ela possui alguma estratégia para garantir mais pontos?
- Você mudaria alguma coisa no(s) jogo(s) que você acabou de fazer? Alguma jogada específica ou mudança de postura?
- Com a configuração $\{1, 1, 4, 4, 5\}$ qual é a melhor escolha a ser feita? Pontuar 2 na casa do Ás, 8 na casa da Quarta ou 5 na casa da Quina? Por que você acha isso?

Para estas perguntas as respostas são baseadas em possíveis estratégias. A ideia é de trazê-las para propor uma reflexão a cerca do jogo, para que os alunos percebam que existem essas estratégias nele. As considerações que fizemos no início no Capítulo 6 dão o ferramental necessário para que o professor conduza a discussão e traga pontos dignos de nota para que os alunos abordem caso eles mesmos não o façam.

Não recomendamos que seja apresentada uma questão muito ampla de simulação aos estudantes, como por exemplo o valor esperado de uma escolha de relançamento, como fizemos no capítulo 6 pois foge dos objetivos habituais do Ensino Médio. Mas perguntas mais específicas sobre uma simulação são adequadas.

Exemplos de questões que podem ser apresentadas em uma **lista de exercícios** para cada grupo são as seguintes:

1. Ao tirar {1,1,4,4,5} nos dados no 1º lançamento, qual dado você iria rejogar para obter um Fu? Qual seria a probabilidade de você obter um Fu relançando apenas este dado?
2. Ao obter os dados {2, 2, 2, 5, 6} no 1º lançamento é mais fácil obter uma Quadra relançando apenas um dado (ou 5 ou 6) ou relançando os dois dados diferentes (5 e 6)?
3. Ao obter os dados {1, 2, 3, 4, 6 } no 1º lançamento é mais fácil obter uma Seguida relançando o dado 1 ou relançando os dados 1 e 6?
4. Ao obter {2,2,3,4,5} nos dados no 1º lançamento, é mais fácil obter um Fu ou uma Quadra quando relançamos os dados 3 e 4?
5. Calcule o número de maneiras de se obter um Fu, uma Seguida, uma Quadra e um General.
6. Qual a probabilidade de se obter um General em uma só batida de copo? E uma Quadra, uma Seguida e um Fu?
7. As pontuações do Fu, Seguida, Quadra e General são proporcionais às suas probabilidades? Por que você acha que isso acontece?

Note que para resolver estes exercícios é necessário que os alunos já tenham formalizado o conhecimento de análise combinatória, de probabilidade e conheçam suas técnicas de cálculo. A resolução destas questões se encontra no apêndice C.

A questão 1 é mais simples e demanda apenas o cálculo de uma probabilidade, já que o dado rejogado seria o 5 e é necessário tirar 1 ou 4 para obter o Fu. A questão 2 já demanda uma comparação entre duas probabilidades e, por isso, tem um grau de dificuldade maior do que a questão 1. A questão 3 é semelhante à questão 2, já que o aluno tem que comparar duas possíveis situações.

Na questão 4, diferente das questões 2 e 3, o aluno deve comparar o cálculo das probabilidades de jogadas distintas. As questões 5 e 6 necessitam do cálculo de possibilidades utilizando-se da análise combinatória, como fizemos no Capítulo 5. A questão 7 traz uma reflexão a cerca de como o jogo foi elaborado e que tipo de decisão o criador dele tomou, já que a pontuação não é proporcional à probabilidade das jogadas.

Após os alunos discutirem e apresentarem suas respostas, consideramos necesário que o professor revise e corrija-as com a turma, a fim de esclarecer para todos como a probabilidade e a análise combinatória estão inseridos no contexto do jogo e, de forma mais pragmática, como realizar estes cálculos.

Como forma de fechamento da atividade, sugerimos que os alunos façam mais algumas partidas, mantendo-se os mesmos grupos e colocando à prova as conclusões obtidas; neste momento, espera-se, que planejem melhor suas jogadas. Isto é necessário, tendo em vista que um dos nossos objetivos é o de que os alunos ultrapassem "*a fase da mera tentativa e erro, ou de jogar pela diversão apenas.*" SILVA e KODAMA (2004) [20]

8 Considerações finais

Acreditamos que nossa proposta de levar o Bozó às salas de aula tem muito a acrecentar para trabalho do professor e para o aprendizado dos alunos. Dizemos isto com base no desinteresse atual de muitos estudantes pelas aulas de matemática, várias fontes e autores que embasam e comprovam os benefícios do uso de jogos na educação, além de documentos oficiais que também incentivam o trabalho lúdico no processo de ensino-aprendizagem.

No Capítulo 2 trouxemos a visão de vários pesquisadores que favorecem o uso de jogos, explicando até mesmo o mecanismo pelo qual eles beneficiam o processo de ensino-aprendizagem, tornando os alunos mais ativos na construção de seu conhecimento e tornando-o mais significativo.

Como pôde-se observar ao longo da dissertação, o Bozó é "*capaz de gerar 'conflitos cognitivos' ao sujeito, despertando-o para a ação, para o envolvimento com a atividade, motivando-o ainda mais.*" GRANDO (2000) [13] Também vemos que ele é capaz de trazer situações-problema que desafiam o aluno e abrem questionamentos e o caminho para a sistematização dos conteúdos de análise combinatória e de probabilidade.

Uma aula de matemática utilizando um jogo, por se tratar de uma experiência nova, por si só já será facilmente consolidada na memória do aluno, como descrevem SOUSA e SALGADO (2015) [21], o que precisamos fazer é aliar este fenômeno aos conteúdos que estamos querendo ensinar.

Também no Capítulo 2 vemos que as orientações nacionais para o currículo de Matemática sempre favoreceu e continua incentivando o uso de jogos e outras atividades lúdicas durante as aulas do Ensino Básico, como mostrado na revisão dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), dos Parâmetros Curriculares Nacionais parao Ensino Médio (PCNEM) e da atual Base Nacional Comum Curricula (BNCC).

Para que o leitor conheça como são as regras do jogo, seu desenrolar e as situações-problema que ele traz descrevemo-las no Capítulo 3, incluindo exemplos de jogadas completas para demonstrar o funcionamento destas regras. Também consideramos pertinente mencionar o histórico do Bozó no Brasil, assim como outros jogos relacionados a ele e sua importância para o povo sul-mato-grossense.

Com um olhar atento às regras do Bozó vemos que as jogadas de um jogador não influenciam de maneira direta o jogo dos outros jogadores; como classificamos no Capítulo 4, o Bozó é um **jogo de repetição**; de maneira pragmática, não faz diferença se o jogador joga sozinho ou com adversários, suas possíveis jogadas são sempre as mesmas. Mas é aí que entra o aspecto social do jogo. Um jogador, ao perceber que está atrás de seus adversários na pontuação total ou que ele está na frente, ficará compelido à pensar melhor suas estratégias de jogo, havendo mais chances de aplicar um raciocínio probabilístico ou combinatório durante a partida, seja para tentar passar na frente dos adversários ou para tentar se manter na dianteira. Além disso, como diz GRANDO (2002), "*pelo jogo, durante sua ação, o adversário serve de referência para o jogador se conhecer, estabelecendo uma transição do interpessoal para o intrapessoal.*" [13]

Apresentamos conceitos e um breve histórico da Teoria dos Jogos no Capítulo 4 para situar o leitor de onde o Bozó se encontra frente a outros jogos e qual é sua classificação de acordo com estes fundamentos. Consideramos que isso foi proveitoso para atrelar o Bozó a outras pesquisas mais específicas dentro deste tema e também para desenvolver o conceito de estratégia, de jogador racional e do que é uma jogada racional no contexto deste jogo.

Neste trabalho, no Capítulo 5 pudemos também discorrer sobre os tópicos de análise combinatória e de probabilidade que julgamos pré-requisito para o total aproveitamento da atividade proposta e que devem fazer parte do planejamento do professor que deseja utilizar o Bozó como sugerimos.

Aproveitamos esses conceitos para poder determinar possibilidades e calcular probabilidades envolvidas nas jogadas do Bozó e até fazer simulações de possíveis jogadas que podem ocorrer, no Capítulo 6. Ao fazer tais simulações, pudemos comprovar que não é um jogo que trata apenas de sorte, mas também de estratégia, já que algumas escolhas trazem mais vantagens que outras em diferentes contextos.

E por fim, no Capítulo 7, agregamos o referencial teórico com as conclusões tiradas pelas simulações para criar uma proposta de uso do Bozó nas aulas de matemática que acreditamos que seja benéfica tanto para o professor quanto para os estudantes.

É possível que o professor ou os alunos se sintam receosos com relação às situações de competitividade que podem surgir durante as partidas de Bozó e até de outros jogos utilizados no processo de ensino-aprendizagem. A fala de SILVA e KODAMA (2004) traz tranquilidade e reflexões acerca deste aspecto:

> O jogo e a competição estão intimamente ligados, e o jogo social não pode existir ou não tem graça sem esta competitividade. É fato, absolutamente lógico, de que na ausência de um vencido, não pode haver um vencedor, assim na impossibilidade de eliminar o caráter competitivo do jogo, o melhor é procurar utilizá-lo no sentido de valorizar as relações, acentuando a colaboração entre os participantes do grupo. O professor não dando tanta importância somente ao ganhador e encarando a competição de forma natural, minimiza o caráter competitivo, embora isso não impeça que as crianças se empenhem ao máximo em ganhar o jogo, já que é esse o seu objetivo. Ao jogar, as emoções vão se equilibrando, transformando a derrota em algo provisório e a vitória em algo a ser partilhado. [20]

GRANDO (2000) também orienta como o professor pode influenciar o aluno a respeito da derrota:

> É na ação do jogo que o sujeito, mesmo que venha a ser derrotado, pode conhecer-se, estabelecer o limite de sua competência enquanto jogador e reavaliar o que precisa ser trabalhado, desenvolvendo suas potencialidades, para evitar uma próxima derrota. O "saber perder" envolve este tipo de avaliação. [13]

Esta avaliação a que GRANDO (2000) se refere é feita na nossa proposta através da roda de conversa e das questões propostas na lista de exercícios. É o momento oportuno para que o sujeito reflita sobre suas estratégias e tomadas de decisão nas partidas que jogou.

Em conclusão, ao longo da dissertação consegui encontrar bases em diversas áreas da ciência e da matemática para continuar utilizando o Bozó nas aulas de matemática, como eu já vinha fazendo nos últimos anos, mas de maneira intuitiva e informal. E espero influenciar outros professores de matemática a fazerem o mesmo. De toda forma, vemos que o Bozó é uma possibilidade para as aulas de análise combinatória e de probabilidade e que traz ludicidade, sociabilidade e aprendizado ativo e significativo para os alunos.

Referências

[1] *BNCC na Prática*. Nova Escola, 2018. https://nova-escola-producao.s3.amazonaws.com/eMrB4dsSrzgrxwAcffzAUu7Rq9bRW4UbEQ7jtG778jMZnDyxVbEwQXrnwksp/guiabncc-ne-matematica-1.pdf.

[2] *Bozó*. Ludopedia, acesso em 2020. https://www.ludopedia.com.br/jogo/bozo.

[3] *Campo Grande News*, acesso em 2021. https://www.campograndenews.com.br/buscar?q=boz%C3%B3.

[4] *General (jogo)*, acesso em 2021. https://pt.wikipedia.org/wiki/General_(jogo).

[5] ABE, Thatiana Sakate: *A matemática do jogo Bozó*. Anais do III Seminário Sul-Mato-Grossense de Pesquisa em Educação Matemática, 2009. https://periodicos.ufms.br/index.php/sesemat/article/view/3612.

[6] ALMEIDA, Alecsandra Neri de: *Teoria dos Jogos: As origens e os fundamentos da Teoria dos Jogos*. 2006. http://www.slinestorsantos.seed.pr.gov.br/redeescola/escolas/11/2590/17/arquivos/File/as_origens_e_os_fundamentos_da_teoria_dos_jogos.pdf.

[7] BRASIL: *Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+). Ciências da Natureza e Matemática e suas tecnologias*. MEC, 2006. http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf.

[8] BRASIL: *Base Nacional Comum Curricular - Ensino Médio*. Ministério da Educação, 2018.

[9] COSTA, Carlos Alberto Arriaga Taboleiros: *Introdução à teoria de jogos*, 2004. http://www1.eeg.uminho.pt/economia/caac/pagina%20pessoal/Disciplinas/Disciplinas%2004/jogos.pdf.

[10] D'AMBROSIO, Beatriz S.: *Como ensinar matemática hoje?* SBEM, 1989. https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/409999/mod_resource/content/1/DAmbr%C3%B3sio%20-%20Como%20Ensinar%20Matem%C3%A1tica%20Hoje.pdf.

[11] FIORENTINI, Dario e MIORIN, Maria Angela: *Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no Ensino da Matemática*. Boletim SBEM-SP, 1990. http://www.cascavel.pr.gov.br/arquivos/14062012_curso_47_e_51_-_matematica_-_emersom_rolkouski_-_texto_1.pdf.

[12] FREITAS, Sara de: *Are Games Effective Learning Tools? A Review of Educational Games*. Journal of Educational Technology & Society , Vol. 21, No. 2, 2018. https://www.jstor.org/stable/10.2307/26388380.

[13] GRANDO, Regina Celia: *O conhecimento matemático e o uso de jogos na sala de aula*. Tese de Doutoramento, Universidade de Campinas - Faculdade de Educação, 2000. http://repositorio.unicamp.br/jspui/bitstream/REPOSIP/251334/1/Grando_ReginaCelia_D.pdf.

[14] MORGADO, Augusto César e CARVALHO, Paulo Cezar Pinto: *Matemática Discreta*. SBM, Rio de janeiro, 2015.

[15] PAIVA, Manoel Rodrigues: *Matemática - Volume 2*. Editora Moderna, São Paulo, 1ª edição, 2002.

[16] ROSS, Sheldon: *Probabilidade : um curso moderno com aplicações*. Bookman, 8ª edição, 2010.

[17] SALES, Matheus: *RPG (Role-Playing Game)*, acesso em 2021. https://brasilescola.uol.com.br/curiosidades/rpg.htm.

[18] SANTOS, Jorian Pereira dos: *A Teoria da Probabilidade e a Teoria dos Jogos em uma abordagem para o Ensino Médio*. Tese de

Mestrado, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal-RN, 2016. https://repositorio.ufrn.br/bitstream/123456789/23210/1/JorianPereiraDosSantos_DISSERT.pdf.

[19] SARTINI, Brígida Alexandre, GARBUGIO, Gilmar, BORTOLOSSI, Humberto José, SANTOS, Polyane Alves e BARRETO, Larissa Santana: *Uma Introdução a Teoria dos Jogos*. II Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática, 2004. https://www.ime.usp.br/~rvicente/IntroTeoriaDosJogos.pdf.

[20] SILVA, Aparecida Francisco da e KODAMA, Helia Matiko Yano: *Jogos no Ensino da Matemática*. II Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática, 2004. http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/MATEMATICA/Artigo_Matiko.pdf.

[21] SOUSA, Aline Batista de e SALGADO, Tania Denise Miskinis: *Memória, aprendizagem, emoções e inteligência*. Revista Liberato: educação, ciência e tecnologia., 2015. https://www.lume.ufrgs.br/handle/10183/132515.

[22] SOUZA Ádamo Alberto de: *A teoria dos jogos e as ciências sociais*. Tese de Mestrado, Universidade Estadual Paulista, 2003. https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/88823/souza_aa_me_mar.pdf?sequence=1.

[23] TONELLI, Pedro Aladar: *Jogos com soma não zero*, 2018. https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/4320826/mod_resource/content/1/jogosomanonzero.pdf.

APÊNDICE

APÊNDICE A - Definição de variável aleatória

O seguinte trecho foi extraído de (ROSS, 2010) [16], páginas 151 e 152.

Frequentemente, quando realizamos um experimento, estamos interessados principalmente em alguma função do resultado e não no resultado em si. Por exemplo, ao jogarmos dados, estamos muitas vezes interessados na soma dos dois dados, e não em seus valores individuais. Isto é, podemos estar interessados em saber se a soma dos dados é igual 7, mas podemos não estar preocupados em saber se o resultado real foi (1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2) ou (6,l). Também, ao jogarmos uma moeda, podemos estar interessados no número de caras que vão aparecer, e não na sequência de caras e coroas que teremos como resultado. Essas grandezas de interesse, ou, mais formalmente, essas funções reais definidas no espaço amostral, são conhecidas como variáveis aleatórias.

Como o valor da variável aleatória é determinado pelo resultado do experimento, podemos atribuir probabilidades aos possíveis valores da variável aleatória.

Exemplo

Suponha que nosso experimento consista em jogar 3 moedas honestas, com H simbolizando cara e T simbolizando coroa. Se Y representar o número de caras que aparecerem, então Y é uma variável aleatória que pode ter um dos valores 0,1,2 e 3 com respectivas probabilidades

$$P[Y=0] = P\{(T,T,T)\} = \frac{1}{8}$$
$$P[Y=1] = P\{(T,T,H),(T,H,T),(H,T,T)\} = \frac{3}{8}$$
$$P[Y=2] = P\{(T,H,H),(H,T,H),(H,H,T)\} = \frac{3}{8}$$
$$P[Y=3] = P\{(H,H,H)\} = \frac{1}{8}$$

APÊNDICE B - Definição de função de probabilidade discreta

O seguinte trecho foi extraído de (ROSS, 2010) [16], páginas 157 e 158.

Uma variável aleatória que pode assumir no máximo um número contável de valores possíveis é chamada de variável discreta. Para uma variável discreta X, definimos a função discreta de probabilidade (ou simplesmente função de probabilidade) $p(x_i), i = 1, 2, ...$ de X como

$$p(x_i) = P[X = x_i]$$

em que $x_1, x_2, ...$ são os valores que X pode assumir.

A função discreta de probabilidade $p(a)$ é positiva para no máximo um número contável de valores de a. Isto é, se X deve assumir um dos valores $x_1, x_2, ...$, então

$$p(x_i) \geq 0 \qquad \text{para todo } i = 1, 2, ...$$
$$p(x) = 0 \qquad \text{para todos os demais valores de } x$$

Além disso, $\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = 1.$

APÊNDICE C - Resolução da lista de exercícios

C.1 Questão 1

Para obter um Fu é necessário relançar o dado com 5 e obter faces 1 ou 4. A probabilidade disso acontecer é:

$$\frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

C.2 Questão 2

Ao relançar apenas um dado, o dado com a face 5 por exemplo, a probabilidade de se obter uma Quadra é de $\frac{1}{6}$, que é a probabilidade correspondente a obter uma dado com a face 2.

Ao relançar dois dados, os dados com as faces 5 e 6, é necessário obter uma face 2 no primeiro dado e uma face qualquer, diferente de 2, no segundo dado. E também pode ser que a face 2 apareça no segundo dado e a face qualquer no primeiro dado. Portanto, a probabilidade de se obter uma Quadra com esta escolha é:

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot 2 = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}.$$

Ou de maneira alternativa, pode-se analisar os casos favoráveis na tabela que representa o espaço amostral do lançamento de dois dados de seis faces:

Quadro 10: Resultados do lançamento de 2 dados de 6 faces.

Dados	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Assim, contamos 10 casos favoráveis em um espaço amostral de 36 elementos e portanto a probabilidade também é:

$$\frac{10}{36} = \frac{5}{18}.$$

C.3 Questão 3

Ao relançar o dado com face 1 para se obter uma Seguida é necessário que seu resultado seja 5 e a probabilidade de isso ocorrer é $\frac{1}{6}$.

Ao relançar os dados com face 1 e 6 o espaço amostral passa a ter $6 \cdot 6 = 36$ elementos sendo que os casos favoráveis são $\{(1,5),(5,1),(5,6),(6,5)\}$. Assim, a probabilidade de se formar uma Seguida neste caso é de:

$$\frac{4}{36} = \frac{1}{9}.$$

Ou seja, com esta configuração inicial é mais fácil obter uma Seguida relançando apenas o dado 1.

C.4 Questão 4

No evento aleatório de relançar os dados com face 3 e 4 o espaço amostral possui $6 \cdot 6 = 36$ elementos. Para se obter um Fu (uma dupla e um trio) é necessário que um dos dados seja necessariamente um 5 e o outro dado pode ser 2 ou 5.

Portanto, os casos favoráveis são $\{(2,5),(5,2),(5,5)\}$ e a probabilidade do evento é

$$\frac{3}{36} = \frac{1}{12}.$$

Para se obter a Quadra relançando os dados com face 3 e 4 o único caso favorável é o resultado $(2,2)$, ficando com a configuração $\{2,2,2,2,5\}$ dos cinco dados. A probabilidade então é $\frac{1}{36}$.

E, portanto, é realmente mais fácil de se obter um Fu do que uma Quadra nesta situação.

C.5 Questão 5

Estas possibilidades foram calculadas no Capítulo 5, a partir da página 52.

C.6 Questão 6

Estas probabilidades foram calculadas no Capítulo 5, na página 54.

C.7 Questão 7

Somente é possível que a pontuação e a probabilidade sejam **inversamente proporcionais**, pois as jogadas especiais com maiores pontuações são as menos prováveis. Portanto, vamos verificar se o produto entre estas variáveis é constante:

Quadro 11: Verificação da proporcionalidade entre pontuação e probabilidade.

Jogada especial	Pontuação (x)	Probabilidade (y)	$x \cdot y$
Fu	10	$\frac{300}{7.776}$	$\frac{3.000}{7.776}$
Seguida	20	$\frac{240}{7.776}$	$\frac{4.800}{7.776}$
Quadra	30	$\frac{150}{7.776}$	$\frac{4.500}{7.776}$
General	40	$\frac{6}{7.776}$	$\frac{240}{7.776}$

Como o produto das variáveis não é constante, vemos que **não há proporcionalidade** entre a pontuação e a probabilidade da jogada.

Um dos motivos para que isso aconteça é o seguinte: se houvesse esta proporção entre a jogada do Fu e do General, por exemplo, mantendo-se a pontuação do Fu a pontuação p do General deveria ser a seguinte:

$$\begin{aligned} p \cdot \frac{6}{7.776} &= 10 \cdot \frac{300}{7.776} \Rightarrow \\ 6p &= 3000 \Rightarrow \\ p &= 500 \end{aligned}$$

Ou seja, ao fazer um General o jogador iria obter 500 pontos, o que a tornaria uma jogada incomparável com as demais, isto é, se um jogador fizesse um General, seria impossível que os outros ganhassem sem também fazer um General. Note que isso não ocorre com a pontuação original do jogo (que é não-proporcional): é possível que os outros jogadores ganhem de um jogador que fez um General sem que eles mesmos tenham feito um General.