Universidade Federal do Recôncavo da Bahia
Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Sala de Aula Invertida usando o Google Sala de Aula: uma aplicação no ensino de divisibilidade dos números naturais.

Luciana Sedraz Silva

Cruz das Almas BA
2020

Luciana Sedraz Silva

Sala de Aula Invertida usando o Google Sala de Aula: uma aplicação no ensino de divisibilidade dos números naturais.

Dissertação de Mestrado apresentado ao Colegiado do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacionalpela Universidade Federal do Recôncavo da Bahiacomo parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau em Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Anderson Reis da Cruz

Cruz das Almas - BA
Dezembro, 2020

Luciana Sedraz Silva

Sala de Aula Invertida usando o Google Sala de Aula: uma aplicação no ensino de divisibilidade dos números naturais.

Dissertação de Mestrado defendida e aprovada em 11 de dezembro de 2020, pela banca examinadora constituída pelos professores:

Prof. Dr. Anderson Reis da Cruz
Universidade Federal do Recôncavo da Bahia - UFRB
Orientador

Prof. Dr[a]. Maria Amélia de Pinho Barbosa Hohlenwerger
Universidade Federal do Recôncavo da Bahia - UFRB
Examinador Interno

Prof. Dr. Eduardo Cambruzzi
Instituto Federal da Bahia - IFBA
Examinador Externo

Dedico este trabalho ao meu filho Ézio Lucas Sedraz, a minha mãe Terezinha Sedraz e aos meus famíliares e colegas do PROFMAT.

Agradecimentos

À Deus por me permitir chegar até aqui. Por me encorajar, me capacitar e ser meu alicerce durante todo o curso.

A meu filho Ézio Lucas Sedraz, pela compreensão dos dias que tive que ficar longe dele.

Aos meus pais, meus irmãos e irmãs, que no decorrer de todo o curso, me incentivaram a continuar e me deram todo o apoio necessário.

Aos meus colegas de jornada, PROFMAT 2018, em especial à minha amiga Ivana Rocha, por estar junto comigo nos momentos bons e ruins que o curso nos proporcionou. Sem vocês seria muito mais difícil.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Anderson Reis da Cruz, por compartilhar seus conhecimentos e orientar meus estudos neste trabalho. Obrigada pela dedicação e apoio.

E finalmente, ao corpo docente da UFRB, em especial aos que participam do programa do PROFMAT (Amélia, Andrade, Danilo, Genilson, Juliana, Luiz e Katia) e à SBM pelo programa PROFMAT.

A menos que modifiquemos a nossa maneira de pensar,
não seremos capazes de resolver os problemas causados
pela forma como nos acostumamos a ver o mundo.
Albert Einstein.

Resumo

A Metodologia Sala de Aula Invertida, sugere ao estudante que adquira boa parte do conhecimento com mais autonomia através do ambiente virtual e em ambiente presencial realize discussões, exercícios dinâmicos, resolução de problemas entre outras ações. Neste contexto, foi realizada uma pesquisa com estudantes de uma turma do primeiro ano do Ensino Médio, do Colégio Estadual João Cardoso dos Santos, no município de Valença na Bahia, empregando essa proposta metodológica tendo como suporte a utilização da ferramenta Google Sala de Aula, no estudo de Divisibilidade dos Números Naturais. Essa dissertação visa apresentar a análise da experiência promovida na turma citada. A pesquisa foi desenvolvida segundo uma abordagem qualitativa. Os resultados sinalizaram que a metodologia colaborativa associada ao uso da ferramenta Google Sala de Aula contribuiu para interação e protagonismo dos estudantes no processo de construção do conhecimento.

Palavras-chave: Divisibilidade, Números Naturais, Sala de Aula Invertida, Metodologia Colaborativa, Google Sala de Aula.

Abstract

The collaborative methodology Flipped Classroom - FLN, suggests to the student to acquire a good part of the knowledge with more autonomy through the virtual environment and in the face-to-face environment, conduct discussions, dynamic exercises, problem solving among other actions. In this context, a research was carried out with students from a class in the first year of high school, from the State School João Cardoso dos Santos, in the municipality of Valença in Bahia, using this methodological proposal supported by the use of the Google Classroom tool in the study of the Divisibility of Natural Numbers. This dissertation aims to present the analysis of the experience promoted in the mentioned class. The research was developed according to a qualitative approach. The results signaled that the collaborative methodology associated with the use of the Google Classroom tool contributed to students' interaction and protagonism in the knowledge construction process.

Keywords: Divisibility, Natural Numbers, Inverted Classroom, Collaborative Methodology, Google Classroom.

Lista de figuras

Lista de tabelas

Sumário

1 INTRODUÇÃO

As várias pesquisas acerca do desempenho e da relevância das Tecnologias na Matemática já ocorrem há mais de 40 anos, desde o período do LOGO [1], na década de 1970, até o período atual das tecnologias digitais.

Segundo Brousseau (2010), o incremento da tecnologia de rede transformou a forma como os estudantes interagem uns com os outros e com os docentes, ocasionando a eles a possibilidade de relacionarem-se com outros estudantes situados geograficamente distantes. Os espaços computacionais acomodam as atuações quando se tem que solucionar uma tarefa ou uma resolução matemática, de forma que as maneiras experimentais desses meios de comunicação social podem ser investigadas, em que se permita alcançar a preparação de hipóteses, bem como a sua constatação, por exemplo, deduzir propriedades, chegar a generalizações e demonstrar teoremas.

Uma das fundamentais inquietações das pesquisas na utilização da tecnologia de rede, na área educacional, é refletir e criar formatos para agregar as Tecnologias Digitais ao método pedagógico de docentes que, no cotidiano educacional, percebem a necessidade de transformar e modernizar o seu desempenho em sala de aula. São muitos os métodos que impulsionam o processo de ensino-aprendizagem a partir da conexão das tecnologias, porém cabe ao professor, como mediador e educador, articular meios de ensino caracterizados pela variedade de atividades criativas e estimuladoras da criatividade dos estudantes (TOSCHI, 2005).

Entre as variedades de metodologias, há a Sala de Aula Invertida ou Flipped Classroom[2], que tem como proposta o redirecionamento da atenção na sala de aula, buscando compreender o processo necessário para a prática dessa metodologia.

De acordo Munhoz (2015), a particularidade desse artifício é “inverter” o circuito simbólico de obtenção de conteúdos e aplicações, de modo que os estudantes apresentem contato prematuro com o conhecimento necessário antes da aula presencial, em um determinado espaço virtual de aprendizagem e, no caso presencial, estudantes e docentes compartilham de maneira intensificada para elucidar, manejar e aplicar o conhecimento que foi edificado no espaço online.

Vários pesquisadores e autores já debatem sobre o aproveitamento da metodologia. Borba (2010), Bruno, Pesce e Bertomeu (2012), Carneiro e Passos (2014) e Fernandes (2019), propõem em suas pesquisas como aplicar a Sala de Aula Invertida, em turmas da Educação Básica e

[1] Linguagem criada no final da década de 60 cuja proposta, era de estimular a programação voltada para o ambiente educacional. Muitas pesquisas foram desenvolvidas para investigar as possibilidades de uso da linguagem Logo para ensinar e aprender Matemática, em particular Geometria

[2] A expressão Flipped Classroom, foi lançada por volta de 2008, por dois professores norte-americanos, Jonathan Bergmann e Aaron Sams, que decidiram gravar vídeos com conteúdos das aulas de química e disponibilizaram online para os estudantes faltantes. (SILVA, 2017)

Superior, e quais as consequências adquiridas. Segundo esses autores, a aplicação da metodologia Sala de Aula Invertida são convincentes, assim como várias outras metodologias renovadoras, porém têm embolsado julgamentos que necessitam de observações.

Alguns autores marcam dificuldades na metodologia, assegurando que o padrão é muito condicionado da tecnologia, o que poderá acarretar um espaço de aprendizagem desigual, tanto no que diz respeito ao acesso à tecnologia quanto ao impulso para os estudos autônomos. Além disso, é necessário considerar a problemática dos estudantes não se organizarem antes da aula e, dessa maneira, não terem embasamento de seguir o que ocorre na sala de aula presencial ou dificultarem as interações prováveis. Assim pode-se abraçar como proposta a utilização da aprendizagem colaborativa para sustentar essa preparação (VALENTE, 2014).

Segundo Munhoz (2015), a prática colaborativa seria capaz de reduzir incorreções e cooperar com a metodologia Sala de Aula Invertida, pois ela propõe ao estudante ser ator protagonista no processo de aprendizagem e proporciona a eles amplas bases de desenvolvimento de aptidões sociais e cognitivas. As ações entre os estudantes ativos do método colaborativo abraçam um protótipo no qual prevalecem o diálogo, a organização e o auxílio, que são os subsídios de um modelo denominado *Modelo de Colaboração 3C*, que se fundamenta no conceito de que para colaborar, um estudante tem que exercer três atividades principais: comunicar, coordenar e cooperar.

Para Valente (2014), os elementos essenciais da prática da metodologia Sala de Aula Invertida são a elaboração de material para o estudante trabalhar online e o planejamento das atividades propostas, a serem realizadas na sala de aula presencial. Dessa maneira, o estudante terá acesso aos conteúdos antes de frequentar a aula presencial, e portanto, a sala de aula passa a ser um lugar de aprender ativamente, realizando atividades e projetos com apoio do docente e colaboração dos colegas.

Com isso, surgem os motivadores desta pesquisa: Como instigar o desvelo e a curiosidade do estudante se ele não é posto em contato com o que precisa ser aprendido? O estudante pode edificar um conhecimento expressivo a partir da ocasião em que ele obtém o assunto ensinado com a sua realidade?

Diante deste argumento, o objetivo da pesquisa apresentada nesta dissertação é investigar a aplicação no ensino da divisibilidade dos números naturais com a contribuição da metodologia Sala de Aula Invertida, utilizando a ferramenta Google Sala de Aula em turmas do primeiro ano do Ensino Médio do colégio Estadual João Cardoso dos Santos. Este tema foi escolhido devido ao baixo rendimento dos estudantes das escolas públicas nas avaliações processuais, além das avaliações externas, a exemplo da Prova SABE[3], e aos vários fatores vivenciados diariamente por professores e estudantes, que tornam a disciplina de Matemática como uma

[3] Sistema de Avaliação Baiano de Educação (SABE) que tem como objetivo o fortalecimento do processo avaliativo nas unidades escolares, identificando indicadores pedagógicos que ajudem a atuação da secretaria de educação (SEC) e das unidades escolares nos processos de aprendizagens dos estudantes.

disciplina problemática, no que tange ao processo de ensino e aprendizagem.

Como ferramenta para dá suporte a metodologia sala de aula invertida, essa pesquisa utilizou o Google Sala de Aula, como ambiente virtual de aprendizagem. Segundo Munhoz (2015), o Google Sala de Aula foi lançado em 2014, desde então, seu uso como ferramenta pedagógico vem aumentando consideravelmente a cada ano. Além disso, ainda em 2014, a plataforma foi liberada em esfera mundial e passou a ser vastamente empregada pela sociedade acadêmica. Também conhecida como Google Classroom, o Google Sala de Aula é uma ferramenta educacional inserida no Google, empregada para a utilização na educação, ao lado dos instrumentos como email (GMAIL), armazenamento de arquivos (DRIVE) e editores de textos (DOCS), planilhas e apresentações.

Sendo assim, esta dissertação visa apresentar o fruto de experimentação da metodologia Sala de Aula Invertida com uso da ferramenta Google Sala de Aula no estudo da Divisibilidade dos Números Naturais, com estudantes de uma turma do primeiro ano do Ensino Médio da Rede Pública Estadual da Bahia. Cabe ressaltar que o colégio é localizado num bairro de Conjunto Habitacional Urbis na cidade de Valença, e, tem recebido estudantes de outros bairros mais carentes da cidade. Essa unidade de ensino tem enfrentado, atualmente, alguns problemas tais como dificuldades de aprendizagem, falta de interesse, aumento de evasão, além de problemas devido à distorção idade-série.

Portanto, essa pesquisa foi desenvolvida com o intuito de observar se introduzindo uma nova metodologia de ensino nas turmas de primeiro ano, poderá colaborar na aprendizagem e em um melhor rendimento dos estudantes na disciplina de Matemática, assim como no estudo de divisibilidade dos números naturais.

Daí, a pesquisa partir da seguinte questão: **Como a metodologia Sala de Aula Invertida pode potencializar a aplicabilidade do ensino de divisibilidade dos números naturais com turmas do primeiro ano do ensino médio?**

Para responder a essa questão da pesquisa é relevante desdobrar em outras questões:

a) De que maneira os meios de colaboração podem contribuir para que os estudantes na Sala de Aula Invertida, criem ambientes de construção e reflexão dos conteúdos de divisibilidade dos números naturais?

b) Como os elementos de colaboração podem motivar os estudantes a participar efetivamente na fase anterior ao encontro presencial? (Motivar os estudantes para os estudos prévios e, consequentemente, enriquecer as aulas presenciais?)

Para obter o objetivo de desenvolver à metodologia na Sala de Aula Invertida, esta pesquisa apresenta os seguintes objetivos específicos:

- utilizar a metodologia Sala de Aula Invertida para o ensino de Matemática;

- aplicar elementos de colaboração no processo de ensino-aprendizagem na divisão dos números naturais;
- analisar como os elementos de colaboração contribuem para que os estudantes na Sala de Aula Invertida criem ambientes de construção e reflexão dos conceitos matemáticos trabalhados.

Para consolidação, a pesquisa foi preparada três fases. Na primeira, buscou-se o objeto matemático para a fundamentação da pesquisa sobre **Divisibilidade dos Números Naturais**. A fase II versada das ideias teórico-metodológicos, dando enfoque a difusão das tecnologias digitais na Matemática, assim como apresentando a Metodologia colaborativa Sala de Aula Invertida juntamente com a ferramenta Google Sala de Aula. E, na fase III foi apresentada a pesquisa empírica, realizadas as análises dos dados obtidos durante a implementação da metodologia, objetivando avaliar o processo e transformá-lo em um produto educacional.

Dessa forma, a apresentação da pesquisa nessa dissertação está organizada em introdução e mais 4 capítulos. Na introdução, com o objetivo de situar o leitor sobre o tema e a estruturação da pesquisa. O capítulo seguinte, foi reservado a elementos teóricos matemáticos, destacando os elementos básicos, como os números naturais, divisibilidade até a investigação da divisibilidade no ensino da Matemática. No capítulo 3 são apresentadas ideias teórico-metodológicas sobre a tecnologia digital na Matemática, e a introdução da metodologia colaborativa Sala de aula invertida com a ferramenta Google Sala de Aula. O capítulo 4 refere-se à apresentação do processo proposto, onde está descrito a sua estrutura e apresenta suas três fases, a preparação do experimento, a pesquisa empírica e as aplicações. E, na sequência, a análise dos dados produzidos a partir dessa implementação. Por fim, no capítulo 5 é destinado as considerações finais desta pesquisa.

2 Divisibilidade dos Números Naturais

Neste capítulo será abordado o objeto matemático da pesquisa enfocando suas perspectivas em livros e artigos relacionados, seguido de exemplos sobre as analogias pretendidas à divisibilidade do conjunto dos números naturais.

2.1 Noções preliminares dos Números Naturais

Segundo Ifrah e Números (1998), é complexo estabelecer ao certo o momento da história em que o ser humano começou, enquanto ser social, a dimensionar os objetos encontrados na natureza. Entretanto, a redução do convívio nômade e sua evolução para a vida coletiva social aumentou a necessidade relacionada à prática de contar. Ou seja, potencializou a contagem associada a divisão das terras para o cultivo das áreas, para a criação dos rebanhos, as trocas comerciais, além de relacionar com a demarcação e o desenvolvimento de organizações sociais coletivas, como as civilizações que se fixaram às margens de grandes rios, como o Tigre, Nilo, Eufrates e Egito.

> Tudo começou com este artifício conhecido como correspondência um a um, que confere, mesmo aos espíritos mais desprovidos, a possibilidade de comparar com facilidade duas coleções de seres ou de objetos, da mesma natureza ou não, sem ter de recorrer à contagem abstrata (IFRAH; NÚMEROS, 1998, p. 25)

Assim sendo, aos poucos desenvolveu-se o uso das representações numéricas. Todavia, vale ressaltar que a noção de número natural não é uma generalização espontânea, produto de um pensamento momentâneo, mas está estreitamente unida a tentativas cotidianas da vida social, como afirma Caraça (2000, p. 4) .

> os homens não adquiriram primeiro os números para depois contarem; pelo contrário, os números naturais foram-se formando lentamente pela prática diária de contagens. A imagem do homem, criando duma maneira completa a ideia de número, para depois a aplicar à prática da contagem, é cômoda mas falsa.

Contudo, os números naturais surgem da necessidade de realizar contagens dos homens, ainda que muito trivial, tanto para dominar a quantidade dos seus objetos, quanto para efetuar pequenas operações comerciais. Daí, o aparecimento da ideia dos números estarem relacionados a princípios biunívocos de contagens, que ocorreu por meio do uso de correspondência biunívoca definida por Toledo e Toledo (1997, p. 20) como "a correspondência entre os elementos de dois conjuntos, de modo que a cada elemento de um deles corresponda um e apenas um do outro e que, ao término do pareamento, não sobre elemento em nenhum dos conjuntos”.

Consequentemente, as asas de uma ave podem simbolizar o número dois, um trevo, três, as patas de uma ovelha, quatro, os dedos da mão de um homem, cinco, e assim sucessivamente, fazendo uma correspondência biunívoca entre ambos e construindo o sistema numérico para contagem dos elementos de uma coleção.

2.1.1 Ensino dos Números Naturais

As crianças aprendem o uso dos números naturais previamente ao seu acesso à escola, já que convivem com números nas diferentes situações do cotidiano como, por exemplo, as idades delas ou familiares, os números impressos nos jogos educativos, o uso do calendário, os preços das mercadorias no comércio, a hora no relógio, entre outros.

Portanto, o ensino dos Números Naturais torna-se importante ao passo que conduz o estudante a perceber o número como:
i) Aspecto cardinal: permite chamar quantidade mentalmente;
ii) Aspecto ordinal: permite reservar uma posição em uma fila;
iii) Aspecto aletório: permite a criação de um código, como por exemplo, a placa de um carro.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), o ensino dos Números Naturais:

> tem como característica geral o trabalho com atividades que aproximem o aluno das operações, dos números das medidas, das formas e espaço e da organização de informações, pelo estabelecimento de vínculos com os conhecimentos com que ele chega à escola (BRASIL, 1997, p. 70).

No momento em que o estudante passa pela Educação Básica ele armazena intuitivamente que os números naturais são $\{0, 1, 2, 3, 4, 5...\}$, sem a precisão de qualquer rigidez na definição desses números. Mas, na verdade a definição dos números naturais não é algo trivial.

Assim, nesse capítulo introduzimos alguns elementos relevantes para construção do conjunto dos naturais, destacando suas propriedades e valendo-se da notável síntese feita pelo matemático italiano Giuseppe Peano no limiar do século XX, apresentamos também um pouco da teoria da divisibilidade dos números naturais.

Os teoremas e as proposições que são apresentados neste capítulo são necessários para um melhor entendimento sobre o conjunto dos números naturais e suas propriedades. Para maior aprofundamento, recomendamos a leitura de Hefez (2011), Zazkis Rina e Campbell (1996), Domingues (2009) e Boyer e Merzbach (2019)

2.2 Conjunto dos Números Naturais

N é um conjunto cujos elementos são chamados *números naturais*. O princípio da caracterização de N habita na palavra *sucessor*. Intuitivamente, quando n, n' N, dizer que n' é o *sucessor* de *n* significa que *n'* vem logo depois de *n*, não havendo outros números naturais entre *n* e *n'*.

O objetivo aqui será iniciar um estudo dos números naturais do ponto de vista axiomático, isto é,admitiremos como premissa a existência de um conjunto de infinitos elementos, ao qual denotaremos por N, sobre o qual iremos enunciar alguns (poucos) fatos, tomados como verdade. A partir daí todas as outras propriedades podem ser derivadas e demonstradas, como implicações lógicas. O ponto de partida será a exposição e apreciação do significado dos Axiomas de Peano.

2.2.1 Axioma de Peano

Deve-se ao matemático italiano Giuseppe Peano (1858 - 1932) a fecunda ideia de desenvolver toda a teoria dos números naturais a partir de quatro fatos básicos, abaixo enunciados:
I) Todo número natural possui um sucessor, que ainda é um número natural;
II) Números naturais diferentes possuem sucessores diferentes;
III) Existe um único número natural, 1, que não é sucessor de nenhum outro;
IV) Se um conjunto de números naturais contém o 1 e contém também o sucessor de cada um de seus elementos, então esse conjunto contém todos os números naturais.

Se pensarmos em uma função **sucessora** $s : N \longrightarrow N$, que associa a cada elemento do conjunto N um novo elemento do conjunto N, podemos reformular tais fatos da seguinte forma:
i) A função $s : N \longrightarrow N$ é injetiva. A imagem s(n) de cada número natural $n \quad N$ chama-se o sucessor de n;
ii) Existe um único número natural, 1, $\quad N$ tal que $1 = s(n), \quad n \quad N$;
iii) Se um conjunto $X \quad N$ é tal que $1 \quad X$ e $s(X) \quad X$ (isto é, $n \quad X = \quad s(n) \quad X$), então $X = N$.

Por sua vez, o sucessor de 1 chama-se "dois", o sucessor de 2 chama-se "três", etc. Nossa civilização avançou ao ponto em que temos um sistema de numeração, o qual nos permite representar, mediante o uso apropriado dos símbolos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9, todos os números naturais. Ademais, nossa linguagem também fornece nomes para os primeiros termos da sequência dos números naturais, já os números muito grandes não têm nomes específicos, ao contrário dos menores, como "dois mil e vinte".

O Axioma iii), conhecido como Princípio de Indução Matemática, requer especial atenção, pois se trata de uma valiosa ferramenta para demonstração de vários teoremas envolvendo números naturais.

2.2.1.1 Princípio da Indução Matemática

Para darmos continuação ao axioma de Peano citado acima, utilizaremos a técnica para provar as propriedades características dos números naturais e também para definir funções em N, o **Princípio da Indução Matemática**.

Intuitivamente, ele nos diz que todo número natural n pode ser obtido a partir de 1 tomando o seu sucessor, $s(1)$, o sucessor deste, $s(s(1))$, e assim sucessivamente.

Essencialmente, ele significa que: se uma propriedade P é válida para o número 1 e, se supondo P válida para o número n, daí resultar que P é válida também para seu sucessor $s(n)$, então P é válida para todos os números naturais.

Como um primeiro exemplo de demonstração utilizando o Princípio de Indução, provemos que, n N, tem-se $s(n) = n$.
A afirmação é verdadeira para $n = 1$, pois, pelo axioma ii), tem-se $1 = s(n)$, n N; logo, em particular, $1 = s(1)$.
Supondo-a verdadeira para um certo n N, vale que $n = s(n)$. Como a função s é injetiva, resulta que $s(n) = s(s(n))$, ou seja, a afirmação é verdadeira para $s(n)$.
Desse modo, provou-se que n $N, s(n) = n$.

O Princípio de Indução serve também para definir funções $f : N \longrightarrow Y$, que possuem como domínio todo o conjunto dos números naturais.

Em geral, para se definir uma função $f : X \longrightarrow Y$, exige-se que seja dada uma regra bem definida, a qual mostre como se deve associar a cada elemento x X um único elemento $y = f(x)$ Y. Porém, no caso em que o domínio da função é o conjunto N, a fim de definir uma função $f : N \longrightarrow Y$, não é necessário dizer, de uma só vez, qual é a regra que nos dá o valor $f(n)$ para todo n N.

Basta que se tenha conhecimento dos seguintes dados:
1) o valor $f(1)$;
2) uma regra que permita calcular $f(s(n))$ quando se conhece $f(n)$.

Esses dois dados permitem que se conheça $f(n)$ para todo número natural n (diz-se então que a função f foi definida por recorrência). Com efeito, se chamarmos de X o conjunto dos números naturais n para os quais se pode determinar $f(n)$, o dado 1) acima diz que 1 X, e o dado 2) assegura que n $X =$ $s(n)$ X. Logo, pelo axioma de indução, tem-se que $X = N$.

2.2.2 Adição e Multiplicação

Através do conhecimento dos axiomas de Peano e algumas de suas consequências, daremos introdução as operações entre os elementos de N, começando pela adição e multiplicação. As operações básicas de números naturais são ditas operações binárias(iremos denotar uma operação binária pelo símbolo " "), uma vez que associam a cada dois elementos (a, b) NxN, o elemento a b N. As operações de adição e multiplicação são exemplos de funções que podem ser definidas por recorrência.

A adição associa a cada par de números (m, n) sua soma, $m + n$, e a multiplicação faz corresponder ao par (m, n) seu produto, $m.n$ (ou simplesmente mn). Essas duas operações

fundamentais são caracterizadas pelas seguintes igualdades, que lhes servem de definição:
i) $m + 1 = s(n)$;
ii) $m + s(n) = s(m + n)$, isto é, $m + (n + 1) = (m + n) + 1$;
iii) $m.1 = m$;
iv) $m.(n + 1) = m.n + m$.

Ou seja, somar 1 a m significa tomar o sucessor de m. E, se já conhecemos a soma $m + n$, conheceremos também $m + (n + 1)$, que é o sucessor de $m + n$. Quanto à multiplicação: multiplicar por 1 não altera o número, já que o 1 é chamado de elemento neutro da multiplicação. E, se conhecermos o produto $m.n$, conheceremos também $m.(n + 1) = m.n + m$.

É relevante destacar que a demonstração da existência e unicidade das operações $+$ e $.$ para todos os números naturais, com as propriedades de i) a iv) acima, é feita por indução, usando como hipótese de indução as próprias definições de i) a iv)[4]. O Axioma de Indução, como já mencionado, é usado para demonstrar uma infinidade de propriedades referentes aos números naturais. Entre elas, destacam-se as seguintes, válidas para quaisquer $m, n, p \quad N$:

- Associatividade:
  $(m + n) + p = m + (n + p)$
  $(m.n).p = m.(n.p)$

- Comutatividade:
  $m + n = m + n$
  $m.n = n.m$

- Distributividade:
  $m.(n + p) = m.n + m.p$

- Lei do Corte:
  $n + m = p + m = \quad n = p$
  $n.m = p.m = \quad n = p$

Como exemplo, demonstraremos a Lei do Corte para a adição. Para isso, usaremos indução sobre m. Ela vale para $m = 1$, pois $n + 1 = p + 1$ significa $s(n) = s(p)$, logo $n = p$ pela injetividade da função s. Admitindo-a válida para m, suponhamos que $n + m + 1 = p + m + 1$. Então, novamente pela injetividade de s, tem-se $n + m = p + m$, donde, pela hipótese de indução, resulta $n = p$.

[4] Consultar cap. 1 da obra de Hefez (2011)

2.2.3 Relação de ordem em N

Desde o ensino fundamental I, os professores ensinam que existe uma relação de ordem própria aos números naturais, quando afirmam que 0 é menor que 1, que 9 é menor que 10 e assim sucessivamente. Os conhecimentos dessa relação são muito relevantes, pois nos permitem fazer comparações que são fundamentais para compreensão dos números deste conjunto.

Em Domingues (2009, p. 18), fica estabelecida a relação de ordem, como sendo:

Proposição 2.1. *Sejam* $a, b \quad N$*, diz-se que* $a \leq b$ *se existir um* $u \quad N$ *tal que* $a + u = b$*.*

O número u chama-se diferença entre b e a e é indicado por $u = b - a$. Nas condições dadas acima, em que $a \leq b$, a relação de ordem nos naturais conduz a uma nova operação, a subtração, quando em $u = b - a$, b é o minuendo, a é o subtraendo e u a diferença.

Definição 2.1. *Seja* A *um conjunto não vazio, tal que* $A \quad N$ *e* a, b, c *são elementos quaisquer de* A*. Dizemos que* R *é uma relação de ordem em* A *quando satisfaz as seguintes condições:*
i) $a = a$ *(Reflexão).*
ii) Se $a \leq b$ *e* $b \leq a$*, então* $a = b$*. (Antissimétrica).*
iii) Se $a \leq b$ *e* $b \leq c$*, então* $a \leq c$*. (Transitiva).*
iv) $a \leq b = \quad a + c \leq b + c$*.*
v) $a \leq b = \quad a.c \leq b.c$*.*

Com isso, A, diferente de vazio e munido de uma relação R, é chamado de conjunto ordenado.

2.3 Divisibilidade

Para responder a questão geradora dessa pesquisa sobre o conteúdo de divisibilidade dos números naturais, nos estudantes do primeiro ano do Ensino Médio e melhor compreender os problemas relacionados à divisão, apresentamos um breve histórico sobre o desenvolvmento desse conceito.

Para elaboração dessa seção, foram utilizados principalmente os trabalhos de Boyer e Merzbach (2019), Bicudo et al. (2009) e de Resende et al. (2007).

A divisibilidade na Antiguidade foi muito relevante na pecuária, na agricultura, e principamente nos estudos relacionados às estações climáticas e os ciclos lunares que contribuíram no desenvolvmento de diversos calendários.

Os estudos matemáticos da sua origem até o século XIX foram compostos basicamente de números, magnitudes e figuras. Na Grécia clássica, os principais estudos foram desenvolvidos por Euclides, Arquimedes, Apolônio, Ptolomeu e Diofanto. As suas obras serviram de parâmetro para a matemática desenvolvida nos séculos XVI, XVII e XVIII (BOYER; MERZBACH, 2019).

As investigações dos múltiplos, dos divisores e da decomposição em fatores primos dos números naturais têm formado um tópico relevante da Aritmética. Sobressai da Antiguidade, a obra "Elementos" de Euclides, grupo de treze volumes, que idealizou de atitude axiomática o saber matemático de seu tempo. As obras VII, VIII e IX, em particular, reúnem os tratados de Aritmética, e proporcionam uma definição da Teoria dos Números, ou seja, das propriedades dos números inteiros e das razões entre os mesmos.

Na tradução de Bicudo et al. (2009, p. 269-270), o livro VII de Euclides exibe 23 definições. Apresento algumas dessas definições abaixo:

Definição 2.2. *Unidade é aquilo segundo o qual cada uma das coisas existentes é dito uma.*

Definição 2.3. *Número é a quantidade composta de unidades.*

Definição 2.4. *Parte (Divisor) – um número é parte de um número, o menor, do maior, quanto meça exatamente o maior.*

Percebe-se a partir da terceira definição que Euclides correlaciona número com a noção de medida de um segmento.

Definição 2.5. *Partes (não divisor) – e partes, quando não meça exatamente.*

Definição 2.6. *Múltiplo – E o maior é múltiplo do menor, quando seja medido exatamente pelo menor.*

Nas definições seguintes, Euclides define os números primos e compostos.

Definição 2.7. *Um número primo é o medido por uma unidade só.*

Definição 2.8. *Números primos entre si são os medidos por uma unidade só como medida comum.*

Definição 2.9. *Número composto é o medido por algum número.*

Definição 2.10. *Números compostos entre si são os medidos por algum número com medida comum.*

Nas demais definições, Euclides finaliza a classificação dos números definindo número, plano, sólido, quadrado, cubo e perfeito, e forma algumas relações entre esses números.

As definições de divisor, múltiplo e das diferentes classes de números foram atingidas por meio de grandezas. Os gregos não idealizavam os números como são arquitetados na Matemática atual. Consideravam razões $(A : B)$ entre grandezas ou proporções, mas conceitualmente não podiam formar o produto A x B, noções que nunca definiram. Normalmente, entendiam o *produto* de duas grandezas como uma área ou um volume.

Essas conjecturas contidas nos livros de Euclides, organizam teoremas conexos ao Teorema Fundamental da Aritmética, mas este teorema não podia ser idealizado pelos gregos, já que estes não chegavam a arquitetar o produto de números reais e nunca chegaram a dar conta de que em matemática se pode bolar uma "existência" totalmente autônoma da "construção". Estes dois aspectos são imperiosos para conceber o Teorema Fundamental da Aritmética.

Outro relevante referencial foi Pitágoras e os pitagóricos. Segundo Eves (2004), os principais passos no sentido do desenvolvimento da teoria dos números foram dados por Pitágoras e seus seguidores.

Para os pitagóricos *Tudo é número*, pois a extensão era composta de unidades indivisíveis independentes por um intervalo. Os números naturais quando aplicados aos objetos geométricos promoviam que todas as medidas pudessem ser reveladas na forma de razão de inteiros, isto é, pudessem ser mensuradas, tendo por alicerce uma parte fixada como unitário (EVES, 2004).

De acordo com Boyer e Merzbach (2019), as contribuições pitagóricas são:

$i)$ **Números perfeitos:** números naturais cuja soma dos divisores próprios[5] do número (excluindo ele mesmo) é igual ao próprio número.

- o número 6, seus divisores próprios são 1, 2 e 3, cuja soma é igual à 6.
- o número 28, cujos divisores próprios são 1, 2, 4, 7 e 14, e a soma dos seus divisores próprios é 28.

Exemplos:

- *o número 6, seus divisores próprios são 1, 2 e 3, cuja soma é igual à 6.*
- *o número 28, cujos divisores próprios são 1, 2, 4, 7 e 14, e a soma dos seus divisores próprios é 28.*

$ii)$ ***Números "amigáveis": dois números a e b são amigáveis se a é a soma dos divisores próprios de b e b é a soma dos divisores próprios de a.***

Exemplo:

- 284 *e* 220, *pois os divisores próprios de* 220 *são* $1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55$ *e* 110. *Efetuando a soma destes números obtemos o resultado* 284. *Assim como, os divisores*

[5] Os divisores próprios de um número natural X são todos os números naturais que dividem X exceto o próprio X.

> *próprios de* 284 *são* $1, 2, 4, 71$ *e* 142*, efetuando a soma destes números obtemos o resultado* 220.

Outro ponto relevante citado por Eves (2004) é que os pitagóricos associavam a geometria e a aritmética através dos números figurados, isto é, anunciavam os números por meio de pontos em determinadas conformações geométricas. Através desse recurso podem-se despontar muitos teoremas importantes como: a soma de um número qualquer de inteiros ímpares consecutivos, começando com o 1, é um quadrado perfeito.

A expansão da teoria da divisibilidade a outros conjuntos tem sua menção histórica em Stevin, que em uma publicação de 1634, amplia o algoritmo de Euclides ao cálculo do máximo divisor comum de dois polinômios. No século XVII, Fermat avaliava a aritmética como uma propriedade e suas tarefas originaram a direção da Teoria dos Números até Gauss. Destaca em sua obra sobre Teoria dos Números a teoria da divisibilidade, os números primos, o tratamento dos números perfeitos (EVES, 2004).

Ainda segundo Eves (2004), Euler em 1770, ampliou o conceito de divisor além do conjunto dos números inteiros e dos polinômios, descobrindo com a dificuldade de que não é possível manter todas as propriedades nesse alcance, em particular, a da existência do máximo divisor comum e a unicidade da decomposição em fatores primos. Até o século XIX, a teoria da divisibilidade se desenvolve no conjunto dos números inteiros.

Um dos corolários do teorema de Euclides sobre, a essência de infinitos números primos, foi pronunciado por Dirichlet. No século XIX, autores como Kummer, Dedekind e Kronecker divulgam a Teoria dos Números, singularmente a teoria da divisibilidade, através da concepção da estrurura de ideal. A Teoria dos Números ocupa, a partir do século XX, uma disposição destacada a respeito da Aritmética, da Álgebra e da Geometria (EVES, 2004).

A escolha do estudo da divisibilidade dos números naturais surge como adequada uma vez que, este é o alicerce para o desenvolvmento dos conceitos de divisibilidade, máximo divisor comum, mínimo múltiplo comum, números primos, números compostos no conjunto dos números inteiros, além de dá suporte nas resoluções de outros conteúdos como equação quadrática, equação exponencial, funções trigonométricas, geometria, entre outros.

2.4 Fundamentos da divisibilidade dos números naturais

Considerando o conjunto dos números naturais N, é possível estudar um relevante conceito: a divisibilidade.

Definição 2.11. *Sejam* a *e* b N $a = 0$*, dizemos que* a *divide* b*, se, e somente se existe um natural* c N*, tal que* $b = a.c$*, e indica-se* $a \mid b$*. (Lê-se:* a *divide* b*).*
Neste caso, dizemos que a *é divisor de* b *e que* b *é múltiplo de* a*.*

Por outro lado, quando o número a não divide b negamos a afirmação escrevendo $a \quad | b$. (Lê-se: a não divide b).

Exemplos:

$$1|4; 2|10; 8|16; 10|20$$

$$2 \quad |3; 3 \quad |5; 7 \quad |10; 5 \quad |12$$

Para a relação $a \mid b$ em N, vale ressaltar a existência de algumas propriedades relevantes.

2.4.1 Propriedades da Divisibilidade

Nem sempre é possível a divisibilidade nos números naturais. Reconhecer de forma mais imediata quando ela ocorre é muito importante no processo de aprendizagem. Assim, daremos enfoque a algumas propriedades que caracterizam a divisibilidade nos naturais. Com isso, $a, b, c \quad N$, valem as propriedades seguintes:

$D_1 : a \mid a, \quad a \quad N$, *pois* $a = a.1$ *(reflexiva).*

$D_2 : a \mid b$ e $b \mid a =$ a = b$(anti - simétrica)$.

$D_3 : a \mid b$ e $b \mid c =$ a | c *(Transitiva)*

A validade das propriedades (D_1) e (D_2) é trivial.

Demonstração: D_3 :

Tome $b = a.r$ e $c = b.s$, então $c = a.(r.s)$, com $r, s \quad N$.

Exemplo: Tem-se que 7 é divisor de 14, e 14 é divisor de 112. Logo, 7 é divisor de 112.

Hefez (2011, p. 32) ainda propõe as seguintes propriedades adicionais:

Proposição 2.2. *Sejam a, b e c números naturais, com $a = 0$, e x e y também números naturais tais que $a \mid b$ e $a \mid c$, então a divide $(x.b + y.c)$, e se $x.b \geq y.c$, então a divide $(x.b - y.c)$.*

Demonstração:
Se $a \mid b$ e $a \mid c$, então existem f e $g \quad N$ tais que
$b = f.a$ e $c = g.a$
$x.b + y.c = x.(f.a) + y.(g.a) = (x.f + y.g).a.$
Como x, y, f e $g \quad N$, $x.f + y.g \quad N$. Assim, $a \mid (x.b + y.c)$. E caso $x.b \geq y.c$, temos
$x.b - y.c = x.(a.f) - y.(a.g) = a.(x.f - y.g).$
Como $x.b \geq y.c$ e x, y, f e $g \quad N$, $x.y - y.g \quad N$. Assim, $a \mid (x.b - y.c)$ provando a proposição dada.

Proposição 2.3. *Se $c \mid a$, e $c \mid b$, e $a \leq b$, então $c \mid (b - a)$.*

Demonstração:
Sejam $r, s, u \quad N$, $r \leq s$, *e sejam* $a = c.r$ *e* $b = c.s$. *Fazendo* $b = a + u$, *então* $c.s = c.r + u$ *e daí* $u = c.s - c.r = c.(s - r)$. *Logo,* $c \mid u$ *e como* $u = b - a$, *a propriedade está provada.*

Proposição 2.4. *Se* $a \mid b$ *e* $c \mid d$, *então* $(a.c) \mid (b.d)$.

Demonstração:
Se a *divide* b, *então existe um número natural* k, *tal que* $b = a.k$. *Da mesma forma, se* c *divide* d, *então existe um número natural* q, *tal que* $d = c.q$. *Segue então que* $b.d = (a.k).(c.q) = (a.c).(k.q)$, *ou seja,* $(a.c)$ *é um fator de* $(b.d)$, *concluindo assim a demonstração.*

Proposição 2.5. *Sejam* a, b *e* c *números naturais, com* $b \geq c$ *e* $a = 0$, *tais que* $a \mid (b \pm c)$, *então* a *divide* b *se, e somente se,* a *divide* c.

Demonstração:
Supondo-se que $a \mid (b + c)$, *então existe* $f \quad N$ *tal que* $b + c = f.a = \quad c = f.a - b$. *Agora, se* a *é divisor de* b *significa que existe algum* $g \quad N$, *tal que* $b = g.a$. *Substituindo essa última igualdade na primeira, segue que:*

$$b + c = f.a = \quad c = f.a - (g.a)$$

$$= \quad c = a.(f - g)$$

e assim se chega a conclusão de que a *também é divisor de* c.

Agora iremos mostrar que $a \mid c = \quad a \mid b$.

Usando o mesmo procedimento, temos que se $a \mid (b + c)$ *então, existe um* $f \quad N$ *tal que* $b + c = a.f$, *e de* $a \mid c$ *temos que existe um* $h \quad N$ *tal que* $c = a.h$, *assim substituindo* c *em* $b + c = a.f$ *temos:*
$b + a.h = a.f$
Como $b \quad N$ *temos então que* $a.f > a.h$, *logo* $f > h$, *assim.*
$b = a.f - a.h = a.(f - h)$. *Logo,* $a \mid b$, *concluindo a demonstração.*

Proposição 2.6. *Sejam* a *e* b *números naturais, ambos diferentes de zero. Segue-se que, se* $a \mid b$, *então* $a \leq b$.

Demonstração: Temos que se $a \mid b$ *então, existe um* $c \quad N$ *tal que* $b = a.c$. *Temos também que* $a \leq a.c$, *com a igualdade existindo apenas para o caso de* $c = 1$. *Mas, como* $b = a.c$, *então* $a \leq b$.

2.4.1.0.1 Múltiplos e Divisores:

Multiplicando o número 5 por qualque número natural obtém-se os múltiplos de 5. Assim, os múltiplos de 5 são: 0, 5, 10, 15, 20, ... Todos estes números formam o conjunto dos múltiplos naturais de 5, que pode ser representado do seguinte modo:

$$M(5) = \{0, 5, 10, 15, 20, ...\}.$$

Generalizando, dado um número natural a, o conjunto dos múltiplos de a é o conjunto

$$M(a) = \{0, a, 2a, 3a, 4a, 5a, 6a, 7a, ...\}.$$

Deste modo, dado dois números naturais a e b, dizemos que b é um múltiplo de a se existir um número natural n tal que $b = a.n$. De modo equivalente, b é múltiplo de a quando o resto da divisão de b por a for igual a zero.

Assim, se m e n são dois números naturais, o produto $p = m.n$ é um múltiplo tanto de m quanto de n. Neste caso, também dizemos que m e n são fatores de p. Por exemplo, na multiplicação $18 = 3x6$ podemos dizer que:

- *18 é um múltiplo de 3.*
- *18 é um múltiplo de 6.*
- *3 é um fator de 18.*
- *6 é um fator de 18.*

Neste contexto, a palavra fator é um sinônimo da palavra divisor. Ou seja, na multiplicação $18 = 3x6$ também podemos dizer que:

- *18 é divisível por 3.*
- *18 é divisível por 6.*
- *3 é um divisor de 18.*
- *6 é um divisor de 18.*

Evidentemente, dado um número natural a, se d é um divisor de a, então $1 \leq d \leq a$. Assim, todo número natural possui uma quantidade finita de divisores, enquanto possui uma quantidade infinita de múltiplos.

Observações: O número 1 é divisor de qualquer outro natural; todo número é divisor de si próprio.

2.4.2 Algoritmo de Euclides

No conjunto dos números naturais, a divisão, é uma operação efetuada entre dois números (dividendo e divisor), que resulta dois resultados chamados de quociente e resto, respectivamente.

A divisão de um número D (dividendo) por um número d (divisor) tem como resultado os números naturais q (quociente) e r (resto) caracterizada pela seguinte expressão:

$$D = d.q + r$$

tendo como condição $0 \leq r < d$ (o resto é maior ou igual a zero e menor que o divisor).

Observação: Quando o divisor é zero, $d = 0$, não existe número r que satisfaça a situação $0 \leq r < d$. ou seja, segundo Toledo e Toledo (1997) e Domingues (2009), não definimos divisão quando o divisor é zero.

Exemplo: Suponha que se deseje dividir 45 por 7. Não será possível nos números naturais, mas podemos admitir um resto natural $r = 45 - 7.6 = 3$. De modo que a representação dessa operação na forma do algoritmo da divisão euclidiana fica $45 = 7.6 + 3$.

Exemplo: Representar a divisão do número 41 por 8, por exemplo, significa escrever $41 = 8.5 + 1$, ou seja, 41 dividido por 8 tem quociente 5 e resto 1.

2.4.3 Máximo Divisor Comum (MDC)

Dados dois números naturais a e b, não simultaneamente nulos, diremos que o número natural $d \quad N$ é um divisor comum de a e b se $d|a$ e $d|b$.

Por exemplo, os números $1, 2, 3$ e 6 são os divisores comuns de 12 e 18.

O máximo divisor comum de dois números a, $b \quad N$, ambos não simultaneamente nulos, é um $d \quad N$ tal que ele seja o maior divisor comum (mdc) entre esses números e, consequentemente temos que $d \mid a$ e $d \mid b$. Além do que qualquer divisor comum desses números também irá dividir d.

Com a finalidade de simplificar a notação, o máximo divisor comum entre a e b será representado por (a, b).

A definição de máximo divisor comum usado neste trabalho é também encontrada no livro de Hefez (2011).

Um número natural d será o máximo divisor comum (mdc) de a e b se possuir as seguintes propriedades:
i) d é um divisor comum de a e b;
ii) d é divisível por todo divisor comum de a e b.

Proposição 2.7. *Seja a N, temos que:*

$$(0, a) = a, (a, a) = a, (1, a) = 1$$

Nota-se, assim, que o máximo divisor comum de dois números naturais não simultaneamente nulos sempre existe e é maior do que zero.

Proposição 2.8. *Seja a N temos que $(a, a + 1) = 1$.*

Demonstração: Suponha que $(a, a + 1) = d$, com d N, logo pela definição de máximo divisor comum tem que $d \mid a$ e $d \mid (a + 1)$, mas pela Proposição 2.8 temos que se $d \mid a$ e $d \mid (a + 1)$, então $d \mid 1$, mas como d é um número natural temos que $d = 1$, completando assim a demonstração.

Proposição 2.9. *Seja a N ímpar, temos que (a, a + 2) = 1.*

Demonstração: Suponha que $(a, a + 2) = d$, com d N, logo, pela definição de mdc tem que $d \mid a$ e $d \mid (a + 2)$, daí pela Proposição 2.5, se $d \mid a$ e $d \mid (a + 2)$, então $d \mid 2$. Logo, temos que $d = 1$ ou $d = 2$, mas como a é ímpar, o último caso não pode acontecer, logo $d = 1$, completando assim a demonstração.

Proposição 2.10. *Sejam $a, b,$ N e $a = 0$, temos que $a \mid b$ $(a, b) = a$.*

Demonstração: Seja d N tal que $(a, b) = d$. Logo, pela definição de mdc, temos que $d \mid a$ e $d \mid b$ e, por consequência, $d \leq a$ e $d \leq b$. Como $a \mid b$, concluímos que $(a, b) = a$.
Para o caso $(a, b) = a =$ $a \mid b$, o resultado é óbvio, pois se $(a, b) = a$, temos pela própria definição que $a \mid a$ e $a \mid b$, concluindo assim a demonstração.

Lema 2.1. *(Lema de Euclides) Sejam a, b, n N com $a < n.a < b$. Se existe $(a, b - n.a)$, então (a, b) existe e $(a, b) = (a, b - n.a)$.*

Demonstração: Considere $(a, b\breve{\ }n\Delta a) = d$, com d N.Logo, pela definição de máximo divisor comum, $d|a$ e $d|b - n.a$. Como $d|a$, consequentemente $d|n.a$, se $d|b - n.a$, então $d|b$, concluímos assim que d é divisor comum de a e b. Por outro lado, considere que $(a, b) = c$ e por definição, $c|a$ e $c|b$, logo $c|b - n.a + n.a$, resultando que $c|b - n.a$,e $c|d$ o que nos leva a concluir que $c = d$, completando assim a demonstração.

Lema 2.2. *Sejam a, b, n N com $a < n.a < b + n.a$. Se existe (a, b), então $(a, b + n.a)$ existe e $(a, b) = (a, b + n.a)$.*

Demonstração: Seja $(a, b) = d$, logo temos que $d \mid a$ e $d \mid b$, e como consequência $d \mid (b + n.a)$. Logo, d é um divisor comum de a e $(b + n.a)$. Por outro lado, considere $(a, b + n.a) = c$, logo $c \mid a$ e $c \mid (b + n.a)$, pelo lema anterior $c \mid (b + n.a - n.a)$, ou seja, $c \mid b$ e como consequência $c \mid d$, concluindo assim a demonstração.

Verificando a existência do Máximo Divisor Comum, a partir do algoritmo de Euclides.

Sejam, $a, b \quad N$ e suponha, sem perda de generalidade, que $a \leq b$. Caso tenhamos $a = 1$, $a \mid b$ ou $a = b$, teremos então que $(a, b) = a$. Suponhamos agora que $1 < a < b$ e também que $a \quad |b$. Assim, pela Divisão Euclidiana temos $b = a.q_1 + r_1$, com $r_1 < a$. Logo, a partir deste fato, teremos duas possibilidades: $r_1 \mid a$ ou $r_1 \quad |a$. Analisemos cada uma delas:

i) $r_1 \mid a$, logo pelo Lema de Euclides temos que $(a, b) = (a, b - a.q_1) = (a, r_1) = r_1$. Terminando assim o algoritmo.

ii) $r_1 \quad |a$, neste caso teremos que novamente efetuar divisão euclidiana de a por r_1. Logo, $a = r_1.q_2 + r_2$, com $r_2 < r_1$.

Novamente temos duas possibilidades: $r_2 \mid r_1$ ou $r_2 \quad |r_1$. Logo, analisando, temos:
iii) $r_2 \mid r_1$, logo usando o Lema de Euclides temos: $(a, b) = (a, b - a.q_1) = (a, r_1) = (r_1, a - r_1.q_2) = (r_1, r_2) = r_2$. Terminando assim o algoritmo.
iv) $r_2 \quad |r_1$, teríamos que novamente efetuar a divisão, agora de r_1 por r_2, logo: $r_1 = r_2.q_3 + r_3$, com $r_3 < r_2$.

Nota-se que esse processo pode continuar infinitamente, encontrando assim uma sequência de números naturais $a > r_1 > r_2 > ...$, não possuindo menor elemento, o que não é possível, pois os números naturais possuem um menor elemento. Desse modo concluímos que para algum $n \quad N$, temos que $r_n \mid r_{n-1}$, o que resulta que $(a, b) = r_n$.

2.4.4 Mínimo Múltiplo Comum (MMC)

De acordo com Hefez (2011, p. 63), um número é um múltiplo comum de dois números naturais dados se ele é simultaneamente múltiplo de ambos os números.

Em qualquer caso, o número ab é sempre um múltiplo comum de a e b.

Diremos que um número m é um mínimo múltiplo comum (mmc) de a e b se possuir as seguintes propriedades:
i) m é um múltiplo comum de a e b, e
ii) se c é um múltiplo comum de a e b, então $m|c$.

Se c é um múltiplo comum de a e b, então, do item ii) da definição acima, temos que $m|c$, *e, portanto, $m < c$, o que nos diz que o mínimo múltiplo comum, se existe, é único e é o menor dos múltiplos comuns de a e b.*

O mínimo múltiplo comum de a e b, se existe, é denotado por $[a, b]$.

Proposição 2.11. *Dados dois números naturais a e b, temos que $[a, b]$ existe e $[a, b](a, b) = ab$.*

Demonstração: Ponhamos $m = \frac{ab}{(a,b)}$. Como

$$m = a\frac{b}{(a, b)} = b\frac{a}{(a, b)},$$

temos que $a|m$ e $b|m$.

Seja c um múltiplo comum de a e b; logo, $c = n.a = n\ .b$. Segue daí que

$$n\frac{a}{(a, b)} = n\ \frac{b}{(a, b)}.$$

2.4.5 Primos entre si (coprimos)

Definição 2.12. *Um conjunto de números é chamado de primos ente si ou coprimos quando o único divisor comum entre tais números é o número 1.*

Dizemos que dois números a e b são chamados coprimos quando satisfazem as seguintes propriedades.
i) $(a, b) = 1$, ou seja, 1 é o único divisor comum de a e b;
ii) $[a, b] = a.b$, ou seja, o menor múltiplo comum de a e b é o produto entre eles.

Proposição 2.12. *Sejam a e b dois números naturais, eles serão primos entre si se, e somente se, existirem x e y naturais tais que $x.a - y.b = 1$.*

Demonstração: Considere c N tal que $c|a$ e $c|b$, e suponha, sem perda de generalidade, que $a > b$, temos que $c \mid (xa - yb)$, com $xa \geq yb$, logo irá existir um k N tal que $xa - yb = kc$, mas como a e b são primos entre si, temos que $c = 1$, logo $xa - yb = k.1$, o que resulta que $xa - yb = k$. Como x, y e k N, temos que irão existir valores de x e y tais que $xa - yb = 1$.

Agora, por outro lado, considere que existam valores de x e y tais que $xa - yb = 1$. Para isso, considere também que $(a, b) = d$. Com isso, temos que $d \mid (xa - yb)$, mas $xa - yb = 1$, assim $d \mid 1$ e consequentemente $d = 1$, concluindo assim a demonstração.

2.4.6 Números Primos

Definição 2.13. *Um número natural n diferente de 0 e de 1 e que é divisível apenas por 1 e por si próprio é chamado **número primo**. Um número natural n diferente de 0 e de 1 que não é primo* *é chamado de* **número composto***. Ou seja, devem existir naturais n_1 e n_2 diferentes de n tal que $n_1.n_2 = n$.*

Proposição 2.13. *Sejam $a, b, p \quad N$, com p primo. Se $p \mid a.b$ então $p \mid a$ ou $p \mid b$.*

Observação: Se $p, p_1, p_2, ..., p_n$ são números primos e, $p \mid p_1.p_2.....p_n$ então, $p = p_i$ para algum $i = 1, 2, 3, ..., n$.

O menor número natural primo é o número 2, pois seus únicos divisores são 1 e 2. O conceito de número primo é fundamental na Teoria dos Números.

Proposição 2.14. *Qualquer número natural n maior do que 1 ou é primo ou é composto.*

2.4.6.1 Fatoração de números naturais

De acordo com Hefez (2011), fatorar um número n, denota escrevê-lo na forma de produto de fatores primos, o que trata um relevante teorema, conhecido como **Teorema Fundamental da Aritmética***, e é destacado por Euclides de Alexandria no livro Os Elementos.*

A forma fatorada de um número natural funciona da seguinte maneira: devemos escrever o número natural dado e dividí-lo pelo seu menor divisor natural primo; repetindo o procedimento no resultado obtido e assim sucessivamente até obter o número 1. Os divisores primos usados nas diversas etapas da divisão, constituem a forma fatorada do número dado.

2.4.7 Critérios da divisibilidade

Distinguir um número como primo ou composto auxilia muito quando se precisa efetuar a decomposição de um número natural qualquer em fatores primos. Porém, precisamos estar atentos se um número natural é divisível por outro. E para isso, ao longo da história, alguns matemáticos organizaram regras básicas facilitando para os estudantes a determinação se um número natural é ou não divisível por outro. Essas regras ficaram conhecidas como **Critérios da divisibilidade***.*

Teorema 2.1. *Divisibilidade por 2: Um número será divisível por 2 quando o algarismo das unidades for $0, 2, 4, 6$ ou 8.*

Demonstração: Dado um número

$$n = a_0 + a_1.10^1 + a_2.10^2 + ... + a_r.10^r,$$

observa-se que toda potência 10^r, $(r \geq 1)$, é um número par, pois:
$a = 10^r$
$a = 10.10^{r-1}$
$a = 2.5.10^{r-1}$
Assim, $2 \mid a = \quad 2 \mid 10^r \quad N$.

Então $n = a_0 + a_1.2q_1 + a_2.2q_2 + ... + a_r.2q_r$ *com* $q \quad N$. *Note que,* $2q$ *é divisível por* $q \quad N$. *Portanto,* n *será divisível por* 2, *se, e somente se,* a_0 *for divisível por* 2 *ou seja, se* $a_0 \quad 0, 2, 4, 6, 8$.

Um número que é divisível por 2 é denominado par, caso contrário, ímpar.

Teorema 2.2. *Divisibilidade por 3: Um número será divisível por* 3 *quando a soma dos valores absolutos de seus algarismos for divisível por* 3.

Demonstração: Observe que o resto da divisão de 10^k *por três é sempre 1, para todo* $k \geq 0$. *De fato,*
$10^0 = 1 = 3.0 + 1$
$10^1 = 10 = 3.3 + 1$
Suponhamos que, $10^k = 3.s + 1$, *para* $k \geq 0$.
Então, por indução temos:

$$10^{k+1} = 10^k.10 = (3s + 1).(3.3 + 1) =$$

$$(3.(9s) + 3s + 3.3 + 1) = 3(10s + 3) + 1$$

Assim, para todo $n = a_0 + a_1.10^1 + a_2.10^2 + ... + a_r.10^r$

$$n = a_0 + a_1.(3q_1 + 1) + a_2.(3q_2 + 1) + ... + a_r.(3q_r + 1)$$

$$= (a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_r) + 3.(a_1q_1 + a_2q_2 + ... + a_rq_r)$$

Em resumo

$$n = a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_r + 3q$$

Portanto, N *será divisível por* 3 *se* $a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_r$ *for divisível por* 3, *isto é, um número é divisível por* 3, *quando a soma dos valores absolutos de seus algarismos for divisível por* 3.

Exemplo: Note os valores abaixo:
a) $3 \mid 156$, *pois* $1 + 5 + 6 = 12$ *e* $3 \mid 12$.
b) $3 \mid 528$, *pois* $5 + 2 + 8 = 15$ *e* $3 \mid 15$.

Teorema 2.3. *Divisibilidade por 4: Um número será divisível por* 4, *quando o número formado pelos dois últimos algarismos for* 00 *ou um múltiplo de* 4.

Demonstração: Note que,

$$n = a_0 + 10a_1 + (100a_2 + ... + ... + 10^{n-1}a_{n-1} + 10^n.a_n)$$

será um múltiplo natural de 4, quando $a_1a_0 = a_0 + 10a_1$ for divisível por 4.

Exemplo: Observe as operações abaixo.
$4 \mid 5288$, *pois* 88 *é divisível por* 4.
$4 \mid 124$, *pois* 24 *é divisível por* 4.
$4 \mid 105548$, *pois* 48 *é divisível por* 4.

Teorema 2.4. *Divisibilidade por 5: Um número será divisível por 5, quando o algarismo das unidades for 0 ou 5.*

Demonstração: Dado o número

$$n = a_0 + a_1.10^1 + a_2.10^2 + ... + a_r.10^r,$$

observe que toda potência 10^r, $(r \geq 1)$, é um número divisível por 5, pois $5 \mid 10^r = 10.10^{r-1} = 2.5.10^{r-1}$.
Assim,

$$n = a_0 + a_1.(5.2) + a_2.(5.2.10^1) + a_3.(5.2.10^2)...a_r.(5.2.10^{r^{1})}$$

$$n = a_0 + 5.2.(a_1 + a_2.10^1 + a_3.10^2...a_r.10^{r^{1})}$$

Então, $n = a_0 + 5q$ com $(q \quad N)$.

Portanto, um número natural n será divisível por 5 se, e somente se, a_0 for divisível por 5, e isso só ocorre se $a_0 = 0$ ou $a_0 = 5$.

Teorema 2.5. *Divisibilidade por 6: Um número será divisível por 6, quando for divisível por 2 e por 3, simultaneamente.*

Demonstração: Suponha que um número natural n seja divisível por 6. Assim, existe um número natural t de modo que $n = 6t$. Observe que:

- $n = 6.t = 2.(3.t)$. *Se fizermos $x = 3t$, então $n = 2x$, com $x \quad \mathbf{N}$, e assim n é divisível por 2.*
- $n = 6.t = 3.(2.t)$. *Se fizermos $z = 2t$, então $n = 3z$, com $z \quad \mathbf{N}$, e assim n é divisível por 3.*

Pelo exposto, se n for divisível por 6, então n será divisível por 2 e por 3.

Teorema 2.6. *Divisibilidade por 7: Um número é divisível por 7, quando ao subtrair o dobro do último algarismo do número formado pelos demais algarismos resulta um número divisível por 7.*

Demonstração: Dado um número de 2 algarismos temos

i) $n = 10d + u$,

daí tomando o dobro do algarismo das unidades, temos $2u$. *Realizando a diferença entre* $2u$ *e* d, *temos* $2u - d$, *por hipótese, esse número é múltiplo de 7, ou seja,*$2u - d = 7k$, *para* k N, *então*

ii) $d = 2u - 7k$.

Usando a relação i) e ii), obtemos

$$n = 10(2u - 7k) + u = 20u - 70k + u = 21u - 70k = 7(3u - 10k),$$

que é uma diferença entre dois múltiplos de 7, *logo* n *é múltiplo de* 7.

Teorema 2.7. *Divisibilidade por 9: Um número é divisível por 9, quando a soma dos valores absolutos de seus algarismos for divisível por 9.*

O critério para a divisão por 9 é muito parecido com o do número 3.

Demonstração: Observe que o resto da divisão da potência 10^k *por 9 é sempre 1, para todo* $k \geq 0$. *De fato,*

i) $10^0 = 1 = 9.0 + 1$

ii) $10^1 = 10 = 9.1 + 1$

Suponhamos que $10^k = 9.s + 1$, *para* k, s N, $k \geq 0$.

Então, por indução temos:

$$10^{k+1} = 10^k.10^1 = (9s + 1).(9.1 + 1) =$$

$$9.9s + 9s + 9.1 + 1 =$$

$$9.10s + 9 + 1 =$$

$$9.(10s + 1) + 1$$

Como $n = a_0 + a_1.10^1 + a_2.10^2 + ... + a_r.10r$

$n = a_0 + a_1.(9q_1 + 1) + a_2.(9q_2 + 1) + ... + a_r.(9q_r + 1)$

$n = (a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_r) + 9.(a_1q_1 + a_2q_2 + ... + a_rq_r)$

Em resumo,

$$n = a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_r + 9q$$

De modo que n *será divisível por* 9 *se* $a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_r$ *for divisível por* 9.

Teorema 2.8. *Divisibilidade por 10: Um número é divisível por 10, se o algarismo das unidades for 0 (zero).*

Demonstração: Perceba que todo natural escrito na base dez fica assim:

$$n = a_0 + a_1.10^1 + a_2.10^2 + ... + a_r.10^r$$

ou seja, é a soma de várias parcelas de múltiplos de potências de dez. Então, n pode ser escrito também como $n = 10q + a_0$. Portanto, o critério para divisibilidade por dez só ocorre se $10 \mid a_0$, o que só é possível se $a_0 = 0$.

Teorema 2.9. *Divisibilidade por 11: Um número será divisível por 11 quando a diferença entre as somas dos algarismos de ordem ímpar e as somas dos algarismos de ordem par for divisível por 11.*

Demonstração: Analisemos o valor posicional dos algarismos:

- *na potência 10^0 sobra 1, pois $11|(10^0 - 1)$;*
- *na potência 10^1 falta 1, pois $11|(10^1 + 1)$;*
- *na potência 10^2 sobra 1, pois $11|(10^2 - 1)$;*
- *na potência 10^3 falta 1, pois $11|(10^3 + 1)$;*
- *na potência 10^4 sobra 1, pois $11|(10^4 - 1)$.*

Tomemos $n = a_0 + a_1.10^1 + a_2.10^2 + ... + a_r.10^r$. Cada potência de expoente par deixa sobra de uma unidade, que quando multiplicada por seus respectivos dígitos soma $s_1 = a_2n + a_2(n - 2) + ... + a_2 + a_0$. Cada potência de expoente ímpar falta uma unidade, que quando multiplicada por seus respectivos dígitos soma $s_2 = a_2(n - 1) + a_2(n - 3) + ... + a_3 + a_1$. Como s_1 e s_2 foram obtidos como resto na divisão n por 11 temos s_1 representa sobras enquanto s_2 representa falta, $11 \mid n$, se dividir $|s_1 - s_2|$ que chamaremos de

$$S_n = (1)^2n.a_{2n} + (1)^2n - 1.a_{2n-1} + ... + (1)^2.a_2 + (1)^1.a_1 + (1)^0.a_0$$

Portanto, seja $n = a_0 + a_1.10^1 + a_2.10^2 + ... + a_r.10^r$ um múltiplo natural de 11 quando a soma alternada dos dígitos dada por $S_n = a_0 - a_1 + a_2 + ... + (-1)^n a_n$ é um múltiplo de 11.

Com isso, percebe-se que, se os critérios de divisibilidade forem bem utilizados facilitarão a verificação da divisibilidade dos números naturais.

2.5 Investigação da divisibilidade no ensino da Matemática

Nas pesquisas sobre o entendimento do conceito de divisibilidade dos números naturais aparecem a essência de problemas na aprendizagem e a inevitabilidade de uma máxima investigação neste campo. A maior parte das pesquisas efetivadas com estes assuntos, tem sido feita, a princípio, com estudantes que cursam licenciatura em Matemática ou educadores em formação continuada.

De acordo Zazkis Rina e Campbell (1996) em sua pesquisa com docentes sobre divisibilidade, uma pequena parte dos professores foi capaz de debater de forma sólida e evidenciou uma concepção de divisibilidade como uma propriedade ou uma relação entre números naturais.

A maior parte mostrou que a sua construção de divisibilidade não se amplia além das ações, ou seja, a tática empregada para responder as questões está consolidada em efetuar divisões.

O engessamento da divisibilidade como um artifício deve começar pela ponderação entre divisibilidade como uma propriedade e a divisão como uma metodologia. Essa ocorrência mostra que a divisibilidade é uma estrutura cognitiva muito complexa. Além disso, o engessamento exige uma abrangência da relação inversa entre as operações de multiplicação e divisão. Fazer uma conexão entre divisibilidade e a decomposição em fatores primos coopera de forma sólida com a concepção da divisibilidade como um esquema generalizado (ZAZKIS RINA E CAMPBELL, 1996).

Segundo Zazkis Rina e Campbell (1996) em seu trabalho ele comenta que os estudantes que consideraram o Algoritmo da Divisão [6] *não conseguiram êxito. Em contrapartida, os alunos que utilizaram o modelo em que o quociente era racional ($n = x.q$, sendo x um número racional) obtiveram sucesso.*

Para Brown Anne e Thomas (2002) a ausência de vinculação com a estrutura multiplicativa ajuda na dificuldade e na incompreensão da divisão de números inteiros. A expressão $n = x.q$ pode ser considerada no conjunto dos números inteiros, ou seja, q é um divisor de n e tal suposição pode ser também considerada no conjunto dos números racionais. Tal ocorrência provoca uma confusão.

Com isso, as buscas na aula podem auxiliar a sobrepujar determinadas dificuldades referente à compreensão das informações da aritmética elementar e, em particular, da divisibilidade. "Tais averiguações tornam-se referências essenciais na ajuda de amenizar as dificuldades que se aparecem na compreensão da aritmética básica e também ajuda no estilo como ensinam os alunos"(ZAZKIS RINA E CAMPBELL, 2006, p. 99).

Em relação à abrangência da divisibilidade no conjunto dos números naturais, Zazkis (2000, p. 213) considera as conexões que realizam os licenciandos entre os "conceitos de fator, divisor e múltiplo, e entre outros conceitos da Teoria Elementar do Número, tais como fatores primos, decomposição em fatores primos, mínimo múltiplo comum, máximo divisor comum, ou regra de divisibilidade".

Para Brown Anne e Thomas (2002), em sua pesquisa sobre o ensino de divisibilidade, ela destaca os problemas enfretados por muitos alunos em descobrir múltiplos comuns entre números decompostos em fatores primos, ressalta principalmente que os estudantes optam por obter o aspecto decimal dos números e, em seguida, adotam resoluções em relação à divisibilidade. Ou seja, os alunos idealizam a decomposição em fatores primos como um método, ou ainda, como um número caracterizado como um produto de fatores primos com a intenção de se efetuar as operações mostradas na representação, dessa forma volta o número para a forma decimal.

[6] Algoritmo da Divisão apresenta-se como processo prático de representação da divisão entre quaisquer dois números naturais, admitindo-se um resto também natural (ZAZKIS, 2000).

> *Há a necessidade de se trabalhar de forma flexível com a fatoração em fatores primos, sendo capaz de identificar múltiplos, divisores por meio de propriedades básicas como comutativa e associativa da multiplicação. Saliento também que é necessário dar mais ênfase à multiplicação, pois os estudantes utilizam predominantemente a divisão para discernir a divisibilidade (BROWN ANNE E THOMAS, 2002, p. 53).*

Segundo Pascual (2008), também em sua pesquisa sobre divisibilidade dos números naturais, quando os estudantes reconhecem como método os elementos "múltiplo", "divisor" e "ser divisível", eles podem formar as relações entre "b é multiplo de a", "a é divisor de b" e "b é divisível por a". Quando um número está escrito como produto de fatores primos, os estudantes discernem um fator, como divisor do número e também consideram esse mesmo número como múltiplo do fator. Quando os estudantes não sabem o método, as relações de divisibilidade aparecem como problemas para usar a propriedade "Se c/a e c/b, então c/(a+b)".

Dessa forma, torna-se muito relevante a função da multiplicação ao introduzir os conceitos de divisibilidade, ou seja, associar sentenças como a é divisível por b, a é um múltiplo de b, b é um divisor de a.

3 Difusão das Tecnologias Digitais

No ambiente escolar e dentro da sala de aula, atualmente estão muitas vezes o desprezo e o desânimo na obtenção do conhecimento educacional, o que leva a acreditar que essas dificuldades quase que inviabilizam a aprendizagem. O desprezo e o desânimo dos estudantes em relação aos tópicos matemáticos passados em sala de aula talvez emanem de uma provável sugestão metodológica desacertada. Nessa essência, destaca-se que muitos docentes de matemática ainda creem que todos os estudantes adquirem o conhecimento ao mesmo tempo e da mesma maneira.

O procedimento de conhecimento que acontece em sala de aula é orientado pelo docente, que na maioria das vezes, acredita que o estudante tenha disposição e encorajamento pelo que vai aprender. Um lapso, pois, para que o estudante se desponte presente e incentivado, é essencial que ele tenha familiaridade com o objeto, o que exige um período de compreensão, exploração, domínio e acima de tudo interesse em obtenção do conhecimento. Para tal, o educador pode incluir, no que o estudante necessita aprender em sala de aula, com o mundo fora do ambiente escolar.

Levando em consideração que o estudante não aprende somente no ambiente escolar e/ou sala de aula, e que existe o conhecimento informal fora dos muros da instituição, o docente pode vincular a sua programação de ensino, com uma metodologia colaborativa, atuando como um mediador entre o conhecimento e o discente, expondo o objeto por meio de uma análise, uma experiência inicial ou uma contextualização que dê significado para o que será aprendido e fazendo com que haja aprendizagem expressiva do estudante.

A edificação do conhecimento baseada nos saberes do sujeito em ambientes da escola, da comunidade, pode ser uma consequência do currículo e estar fundamentada na confiança do educador de como o estudante adquire o saber. Nessa expectativa, Vasconcellos (1998) destaca três elementos relevantes para a edificação do conhecimento: a mobilização, a construção e elaboração da síntese do conhecimento. No trabalho com sala de aula invertida, esses elementos são implantados quando o estudante é instigado pela curiosidade, então ele se movimenta para conhecer e para aprender.

Nessa situação, a preferência certa não é conduzir conhecimento, mas possibilitar momentos e ambientes agradáveis para construí-lo, e assim a sala de aula passar a ser um espaço propício para compartilhar e socializar saberes e promover tanto o intercâmbio entre educador e estudantes, como entre estudantes.

Muitos ainda creem que para atingir mudanças nas unidades de ensino é suficiente apenas o uso das tecnologias que, para aperfeiçoar, basta inserir a tecnologia no plano das aulas, esquecendo que a qualificação também acontece pelo método e pela concepção sobre o ensinar e aprender. Assim, os sistemas educacionais, através de suas políticas, e as unidades de ensino por meio do currículo e metodologia do docente, podem possibilitar a experiência de uma inovação na concepção de mundo que apoia a busca por novos caminhos que acolham as necessidades e anseios das novas gerações.

Nesse capítulo serão abordadas as concepções teóricas relacionadas à integração das tecnologias digitais na matemática. Serão expostos também, os referenciais teóricos relacionados à metodologia Sala de Aula Invertida, tais como suas características, história e relatos de sua aplicação, além das inúmeras opções de ferramentas do Google Sala de Aula. Para findar o capítulo, serão expostas as referências teóricas sobre a aprendizagem colaborativa e as características dos ambientes de aprendizagem colaborativos apoiados nas tecnologias digitais.

3.1 As tecnologias digitais na educação

Atualmente a educação básica tem alcançado âmbitos maiores, e nesse caso, os aparatos tecnológicos devem dar suporte a essa metodologia, que respeita o aluno enquanto autor de seu aprendizado (FREIRE, 2014).

A tecnologia é decorrência da inteligência humana na transformação do mundo (LÉVY, 1998). O simples fato de a tecnologia estar inserida na sociedade justifica a necessidade da sua presença na escola. Não apenas como um instrumento profissionalizante, mas sendo ela contextualizada ao propósito educacional, visando o desenvolvimento integral do aluno (LEITE, 2003).

Investigações sobre a admissão das Tecnologias Digitais (TD) e difusão no contexto da educação tiveram um avanço relevante nos últimos anos. De acordo com Borba (2010), existem inúmeras observações no campo da utilização de softwares em Educação Matemática há mais de 30 anos, porém, mesmo com essa grande quantidade de pesquisas sobre a temática, há um escasso uso da inclusão da tecnologia digital nas salas de aula de Matemática.

São várias as pesquisas e discussões sobre as vantagens e benefícios na aprendizagem educacional tendo como arcabouço a utilização das TD nas aulas de matemática. Segundo Mattar (2013), sua aplicabilidade no ensino da matemática pode cooperar para que os estudantes tenham maior encanto, prazer e motivação em aprender, pois eles abandonarão o elo inerte da afinidade, tendo assim que participar e interatuar nas atividades.

Os dois principais motivos para que sejam difundidas as tecnologias digitais na educação, são pedagógicos e sociais; pedagógicos porque está cientificamente evidenciado que os estudantes adquirem 10% a 15% mais quando se empregam recursos tecnológicos; e sociais devido à grande expansão e à acelerada comunicação proporcionada pela troca de informações (FAVA, 2014).

Os estudantes do século XXI requerem que se usem ferramentas do seu cotidiano, além dos materiais pedagógicos serem atraentes tanto quantos, os jogos e redes sociais. Eles possuem aprendizado paralelo, conhecimentos múltiplos, habilidades visuais espaciais, além de multitarefas e tempo de resposta diferenciado.

Buscando problematizar o termo Tecnologia na Educação (TE) para resultado de informação desta pesquisa, apresentamos o conceitos a seguir.

> Tecnologia Educacional é uma opção filosófica, centrada no desenvolvimento integral do homem, inserido na dinâmica da transformação social; concretiza-se pela aplicação de novas teorias, princípios, conceitos e técnicas num esforço permanente de renovação da educação (ABT, 1992, p. 17).

Segundo Fainholc (2009, p. 102), a Tecnologia Educacional é conceituada como

> organização integrada de pessoas, significados, conceitualizações, artefatos simples e/ou equipamentos eletrônicos complexos, pertinentemente adaptados, a ser utilizados para a elaboração, implementação e avaliação de programas, projetos e materiais educativos que tendem a promoção da aprendizagem contextualizada de um modo livre e criador.

Assim, tanto para ABT (1992) quanto para Fainholc (2009), a tecnologia quando inserida no âmbito da educação deverá sofrer um tratamento educacional que informará toda sua realidade, onde os fins da educação deverão ser os norteadores da tecnologia educacional, ou seja, a tecnologia deve ser adequada aos propósitos educacionais, dando suporte e melhoria na aprendizagem do estudante.

A Tecnologia na Educação começou a ser introduzida nas unidades escolares, a partir dos anos 70, onde objetivava duas visões bem distintas: a princípio era limitada ao uso de equipamentos, como máquina de escrever, mimeógrafo, retroprojetor, etc.; a outra visão era mais extensa e englobava metodologias, opiniões e finalidades de revolucionar. Dentro dessa segunda visão, havia inclusive promissões de que a Tecnologia na Educação deliberaria todas as dificuldades educacionais, suprindo inclusive os educadores (VIERA; ALMEIDA; ALONSO, 2003)

Na década de 80 as tecnologias educacionais começaram a ser investidas de forma mais relevante e contextualizada com finalidades educacionais, tendo a sociedade já conhecimento dos efeitos positivos de sua utilização nas empresas (FAVA, 2014). Educadores começaram a utilizar o computador como recurso alternativo em suas práticas pedagógicas, sem nenhum planejamento, e consequentemente não obtinham resultados agradáveis como vistos nas grandes empresas.

O desenvolvimento e aprendizagem com a utilização das tecnologias no meio educacional é vasto (VIERA; ALMEIDA; ALONSO, 2003). Todavia, para que se alcance o produto final esperado, deve existir uma disposição estratégica juntamente com uma metodologia colaborativa, com os atores (gestores escolares, docentes e estudantes) envolvidos. Necessita um cuidado relevante nos objetivos que se deseja alcançar com a utilização de recursos tecnológicos didáticos *propostos no planejamento anual, além de uma metodologia adequada para cada finalidade (FAVA, 2014).*

Através da utilização das tecnologias na área educacional, o mundo vivenciou uma série de vantagens principalmente com o acesso à informação atualizada, rapidez na comunicação e ambientes colaborativos de aprendizagem. Os recursos digitais cooperam para que os "atores" do método educacional troquem experiências, discutam sobre tópicos de méritos comuns e executem atividades colaborativas para resolverem problemas na edificação do conhecimento de forma mais interativa (VIERA; ALMEIDA; ALONSO, 2003).

Entretanto, a utilização das tecnologias digitais no âmbito escolar estabelece uma provocação para docentes e todo corpo gestor da unidade de ensino. Já que, incorporá-las nas práticas pedagógicas, deve ir além da formação acadêmica do docente. A conscientização do método deve expandir aos coordenadores, colaboradores e gestores, no sentido de ter uma abordagem integral e consciente das tecnologias digitais no processo de ensino e aprendizagem (VIERA; ALMEIDA; ALONSO, 2003).

Segundo Belloni (2003, p. 289), o uso simplesmente instrumental das TDs (apenas como ferramentas) corresponde a uma "concepção tecnicista e redutora do processo de aprendizagem, enquanto a reflexão pura sobre os conteúdos das mídias pode conduzir a um moralismo ineficaz"que afasta os estudantes da escola.

Segundo Belloni (2003), há quatro aspectos relevantes que devem ser ressaltados quanto à gestão e inclusão das tecnologias digitais na educação:

I. Disponibilização dos recursos tecnológicos digitais de forma que atendam as demandas da escola, assegurando o nível mais básico: o acesso às tecnologias;

II. Apropriação dos usuários, possibilitando o uso das ferramentas digitais, tendo inclusive aporte técnico quando necessário;

III. Integração pedagógica e gerencial das tecnologias, inserindo-as no processo de ensino e aprendizagem;

IV. Prover soluções inovadoras, trazendo resultados diferenciados para as atuações pedagógicas e na gestão do ensino.

Com isso, de acordo com Fainholc (2009), o pacto de beneficiar melhoria nos resultados acadêmico foi verdadeiro no sentido de seduzir aquisições expressivas para projetos de integração da tecnologia às escolas. Contudo, não há uma relação unidimensional entre a inclusão das tecnologias e aprendizagem. Leite (2003, p. 49), cita que ela precisa vir "acompanhada de práticas pedagógicas inovadoras, que criem cenários de aprendizagem".

3.2 Os desafios da tecnologia digital na docência

O progresso da tecnologia na educação, proposta no subtema anterior, apresenta um incremento difícil à melhoria da educação. Com a chegada da tendência tecnológica e digital torna-se praticamente inalcançável listar e abordar todas as tecnologias que são ou podem ser aplicadas à educação.

Com o aparecimento da Web 2.0 na metade dos anos 2000, as mídias digitais passaram a fazer parte do cotidiano das pessoas. Com a disponibilidade de conexões banda larga nas universidades, essa ferramenta passou a fazer parte dos métodos pedagógicos. Segundo Fainholc (2009, p. 79) "os objetivos da educação para as mídias dizem respeito à formação de um usuário ativo, crítico e criativo de todas as tecnologias de comunicação e informação".

De acordo com Silva (2012) estabelece uma coletânea desses equipamentos digitais dando foco a interdisciplinaridade das ciências na educação. Os recursos relevantes de acordo aos capítulos de sua obra são:

- *Blog, Podcast e Youtube: probabilidades de uso na ação de ensino-aprendizagem;*
- *Mapas conceituais: auxilia na aplicação de base ao docente, no armazenamento de informações e auxílio aos estudantes na captação e solução de problemas;*
- *Jogos digitais: com um método de simulação virtual, onde aborda a mediação e a zona de desenvolvimento proximal fundamentada;*
- *Hipertexto: focalizando a utilização do hiperlinks;*
- *Redes sociais: método de interação entre estudantes e professores, compartilhando e melhorando as práticas pedagógicas;*
- *Webquest: interfase interessante para atividades extraclasse.*

Com isso, o professor do século XXI precisa estar atento à conexão entre educação e comunicação; e não apenas por uma questão de modismo (SILVA, 2012). A interatividade e a cooperação dentro ou fora da sala de aula, seja ela abalizada em tecnologia ou não, como transformadora de uma educação de permuta de conhecimentos entre estudantes e educadores, intercedidas pelo mundo e seu entorno (MATTAR, 2013).

Apoiando esse pensamento, Silva (2012, p. 45) acrescenta que "a interatividade e a colaboração são alternativas para atender às demandas da nova geração de alunos". A utilização de ferramentas tecnológicas como softwares colaborativos, são potencializadores desse processo, estreitando espaços entre as modalidades de ensino presencial e a distância. Perante esse método inovador educacional, as tecnologias digitais surgem como enormes coligadas para suplantar os obstáculos atribuídos pelo receio do novo e das inseguranças. Intercedidos por tecnologias interativas, como espaços virtuais e instrumentos colaborativos onde estudantes trabalham em grupo, presencialmente ou a distância mediados pelos tutores ou professores, a sala de aula é modificada em um ambiente colaborativo, acessível e ininterrupto de aprendizagem. A medida que essas tecnologias submergem nas salas de aula, decompõem a dinâmica de tempo e espaço da escola e as relações entre estudantes, educadores e conteúdos (MORAN, 2015).

Atualmente a Web 3.0[7] e Web 4.0[8],com as inovações tecnologicas fundamentadas no armazenamento em nuvem, estão aumentando consideravelmente o acesso a espaços digitais, permitindo arquivar grandes quantidades de informações gratuitas (CARNEIRO; PASSOS, 2014).

Segundo uma pesquisa realizada em 2016, pelo Programa Nacional de Tecnologia Educacional, a porcentagem de docentes que aliaram tecnologias móveis na sala de aula para melhorar as práticas pedagógicas aumentou de 66% em 2014 para 85% em 2015. O avanço do acesso à internet pelos smartphones e tablets e o boom das redes sem fio - Wifi, cooperaram para esse avanço expressivo (BASNIAK; SOARES, 2016).

Um avanço na difusçao das TDs é o Projeto Tablet Educacional promovido pelo ProInfo, que foi auxiliado pelo Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE), que repassa verbas para investimento dos equipamentos aos Estados, que por sua vez são disseminados aos docentes de escolas públicas de ensino médio (BASNIAK; SOARES, 2016).

Ainda segundo Basniak e Soares (2016), nas pesquisas sobre a utilização de tecnologias na educação, alguns dados chamam atenção:

- A ampliação do uso de computadores e da internet tanto em laboratórios quanto em sala de aula para pesquisas e trabalhos em grupo (de 65% em 2014 para 73% em 2015);

- A internet é utilizada em 93% das escolas públicas, sendo 84% de redes sem fio;

- Apenas 22% permitem acesso à rede sem fio para os alunos;

- Os docentes estão utilizando mais a internet para se capacitarem sobre o uso pedagógico das tecnologias digitais: 54% deles com idade até 30 anos; 39% com idade acima de 30 anos.

Na pesquisa apareceu ainda, a relevância das redes de colaboração, onde 70% dos docentes entrevistados apontaram que aprendem a utilizar as tecnologias digitais por meio de grupos informais, tanto dentro quanto fora da escola.

3.2.1 Tecnologia digital na Matemática

Os ambientes escolares necessitam evoluir e seguir a evolução da sociedade, onde as novas tecnologias digitais estão cada vez mais atualizadas e mudando esplendidamente o convívio, o trabalho, a disposição e maneira de pensar das pessoas (PERRENOUD, 2000).

Não se pode mais recusar a relevância do ensino da Matemática na contemporaneidade

[7] Web inteligente. Terceira geração da internet, que personaliza para cada usuário, sites e aplicações inteligentes e publicidade baseada nas pesquisas e nos comportamentos.

[8] Funciona como um enorme sistema operacional dinâmico e inteligente, capaz de utilizar e interpretar as informações e os dados disponíveis para suportar a tomada de decisões.

e na vida do ser humano. Entretanto, o estudo de matemática permanentemente foi "o bicho de sete cabeças"para muitos estudantes durante sua vida acadêmica. E esse aspecto está conectado à deficiência na concepção por parte de alguns “professores” de matemática que agem no ensino da Matemática dando as respostas prontas, não possibilitando que o estudante seja ator da construção ativa de seus conhecimentos.

Em concordância com Valente (2014), ensinar Matemática no interior das nossas unidades escolares atualmente, é gerar o desenvolvimento disciplinado do raciocínio lógico-dedutivo, em oumelhor dizendo, o ensino tradicional de Matemática está ultrapassado e fora de uso. São inúmeros os problemas que decorrem da questão: "evasão escolar; pavor diante da disciplina; medo e aversão à escola, dentre outros. Em larga medida, o problema pode estar atrelado a uma metodologia amplamente adotada nas escolas para o ensino em geral e especificamente para o da Matemática"(VALENTE, 2014, p. 78).

> O matemático, ao inventar Matemática, pensa, raciocina, utiliza a imaginação e a intuição, para, através de arrisques prudentes, experiências de acerto e erro, uso de relações, dúvidas, estabelecer a desordem inicial do próprio pensamento. Desse modo, que a matemática é estruturada, mas na sala de aula é disseminada de maneira "pronta ou técnica como se o estudante significasse um indivíduo de informações inativos (VALENTE, 2014, p. 90).

Como uma sugestão alternativa de ensino da matemática pode cooperar para a aprendizagem do estudante, gerando o seu desenvolvimento ao mesmo tempo que o dá suporte para o mundo do trabalho, para a inserção digital e para o exercício da cidadania?

Algumas inquietações que aparecem nas aulas de matemática tradicional, como por exemplo: Onde vou usar isso na minha vida? Professora, qual a importância de saber a resolução desse exercício? Essas indagações podem ser trocadas por: Agora estou entendo essa conteúdo! Posso usar isso no meu dia-a-dia!

Ao considerar esses pontos no planejamento, cooperar, de certa maneira, para uma mobilização do estudante para aprender. Tais incertezas provocam um olhar desigual e uma meditação por parte do educador que tem compromisso com o desenvolvimento do estudante e faz a opção de ensinar por meio de metodologias colaborativas.

Nessa perspectiva, destaco que a proposta desse estudo é problematizar o ensino e a aprendizagem da divisibilidade dos números naturais, por meio de metodologia colaborativa – Sala de Aula Invertida, com a inclusão da plataforma educacional Google Sala de Aula.

3.2.2 Plataformas digitais para educação

A ideia de plataforma extrapola a esfera digital incide de uma forma de organização que não é recente, mas se apresenta agora como modelo para todo tipo de empresa, ou seja, um modelo de negócio. Uma plataforma seria um ambiente que possibilita a interação entre dois ou mais grupos.

Plataformas de natureza digital como por exemplo as redes sociais Facebook e Instagram, vêm sendo utilizadas para a criação de grupos com fins de compartilhamento de materiais ou até mesmo debate para a realização de atividades (FUMIAN; RODRIGUES, 2013).

Percebe-se também um aumento na utilização de blogs, wiki, vlogs, podcasts, "nuvens" de armazenamento e plataformas de streamming como youtube e spotfy como meios de compartilhamento de conteúdos voltados para a educação. Apesar destas plataformas não tenham sido criadas para esta finalidade, vê-se no manuseio delas novas possibilidades de criação de conteúdo e conhecimento. Além disso, o aproveitamento dessas ferramentas quando inclusas na prática pedagógica pode aproximar docentes e estudantes, criando maiores possibilidades de aproximação entre os mesmos (GABARDO; QUEVEDO; ULBRICHT, 2019).

Segundo Rocha e Mello (2017), os instrumentos digitais aplicados para fins educacionais inspiram positivamente os estudantes na resolução de problemas devido à forma bem ilustrada que são desenvolvidos, o que torna os alunos intuitivos, dessa forma contribuindo para novos conceitos sobre o que está sendo aprendido, proporcionando um melhor desenvolvimento do raciocínio e pensamento teórico em decorrência dos vários meios articulados que empregam diferentes formatos multimidíaticos para o ensino.

As plataformas digitais de ensino apresentam um ambiente de acordo a cada necessidade institucional. Podemos citar alguns exemplos dessas plataformas para uso de tecnologias digitais, tais como o Moodle, Edmodo, Blackboard, Schoology, Google Sala de Aula, dentre outras. Nesse trabalho iremos utilizar a plataforma digital Google Sala de Aula, como ferramenta de apoio por ser uma plataforma gratuita, de fácil acesso tanto para os docentes quanto para os estudantes, além de inúmeras vantagens da sua utilização como descrita abaixo.

Conhecendo o Google Sala de Aula

Segundo Munhoz (2015), o Google Sala de Aula foi lançado em 2014 em uma versão beta e, desde então, seu uso como ferramenta pedagógico vem aumentando consideravelmente a cada ano. Além disso, ainda em 2014, a plataforma foi liberada em esfera mundial e passou a ser vastamente empregada pela sociedade acadêmica.

Também conhecida como Google Classroom, o Google Sala de Aula é uma ferramenta educacional inserida no Google for Education, empregada para a utilização na educação, ao lado dos instrumentos como email (GMAIL), armazenamento de arquivos (DRIVE) e editores de textos (DOCS), planilhas e apresentações.

O espaço do Google Sala de Aula tem dois ambientes para usuários: o professor, que é responsável pela ideia, preparo e gerenciamento das turmas virtuais; e os alunos, que acessam os recursos do ambiente virtual de aprendizagem (AVA) para utilizar os materiais de apoio e realizar as atividades propostas. Ambos os usuários - professor e alunos – carecem de identificação com *login e senha para acessar as salas virtuais. Como condição para utilização da plataforma, o docente deverá ter uma conta no Google para criação da sala virtual. Essas salas virtuais, designadas pelos docentes têm uma chave de acesso que deve ser repassada aos alunos ou ainda o docente pode criar a sala de aula virtual e convidar os estudantes participantes por e-mail, remetendo uma chave de acesso adequada ao endereço da sala. De posse do código ou endereço da sala, os estudantes entram no ambiente e têm acesso à sala criada pelo docente.*

Com a possibilidade de criar turmas, compartilhar documentos, sugerir atividades, propor vídeos e gerar discussões, de maneira fácil e intuitiva, o Google Sala de Aula, possibilita ao professor organizar suas aulas em assuntos, podendo compartilhar documentos, áudios, vídeos, links e uma infinidade de arquivos. Além disso, é admissível mencionar notas de avisos, exercícios e questionários que admitem a correção, nota e feedback. Sua página é análoga a uma rede social, onde na configuração lúdica o aluno obtém imagem de todo o conteúdo de forma ágil. Havendo a opção de entrada via smartphone através do site e do aplicativo disponível para Android e IOS (ARAÚJO et al., 2016).

Para facilitar o acesso à plataforma, todas as vezes que são inseridos tópicos e/ou conteúdo na turma em que o estudante está vinculado, ele receberá um alerta por e-mail, o que melhora o contato do docente com os alunos. Atividades, vídeos, questionários e até mesmo os conteúdos enviados pelos professores, são armazenados em nuvem (DRIVE) disponibilizado pelo Google.

O espaço Google Sala de Aula exibe quatro direções principais (Figura 1), são eles:

Figura 1 – Página principal do Google Sala de Aula - Mural.

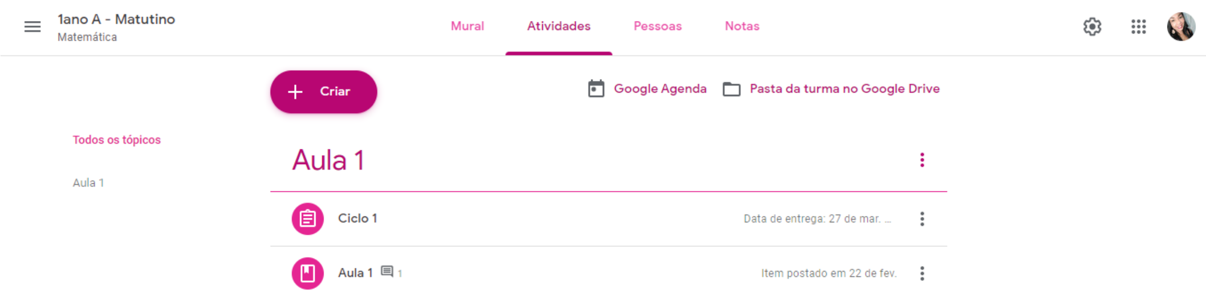
Fonte: Autora, 2020.

• Mural: onde são reservados os materiais propostos pelos docentes para os estudantes. Nesse ambiente, os materiais (vídeos explicativos, pesquisa, etc.) são organizados em ordem cronológica de postagem (das recente para as mais antigas). Dessa forma, os materiais podem

ser acessados, visualizados ou baixados, de acordo com a necessidade do estudante, a qualquer hora e em qualquer lugar.

• *Atividades: área reservada para as atividades propostos pelos docentes para os estudantes. Nessa aba (Figura 2), os materiais propostos (exercícios, questionários, sequência didática, vídeos, etc.) são postados podendo estabelecer data de entrega pelos estudantes, além de feedback.*

Figura 2 – Sala de aula do Google Sala de Aula - Atividades.



Fonte: Autora, 2020.

• *Pessoas: onde é admissível identificar quem são os estudantes da turma, bem como enviar mensagens personalizadas para cada aluno ou mensagens para a turma toda, além de convidar outros estudantes para participarem da turma (Figura 3). Nesta aba há um campo que permite o docente convidar outros colegas para trabalharem de forma colaborativa em uma mesma turma, permitindo a estes desenvolverem atividades interdisciplinares.*

Figura 3 – Sala de aula do Google Sala de Aula - Pessoas.

Fonte: Autora, 2020.

• *Notas: espaço disponível somente para o docente (Figura 4). Nessa aba, o docente poderá corrigir e atribuir uma nota para as atividades executadas pelos estudantes.*

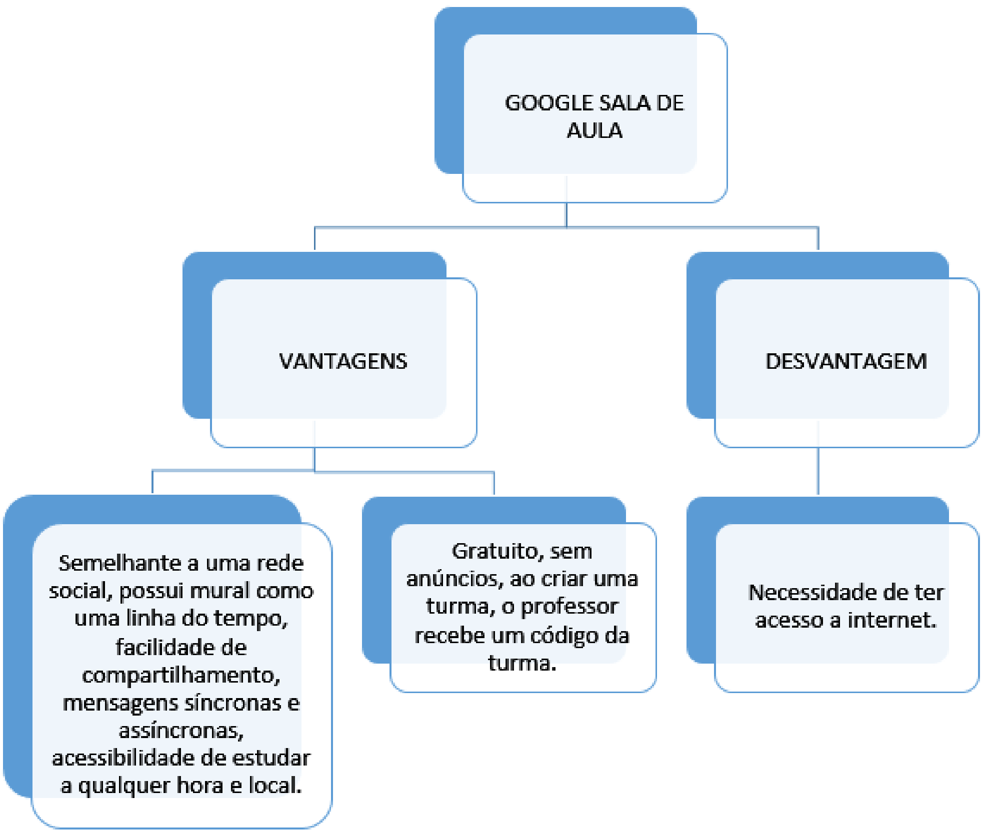
Além disso, docentes e estudantes podem utilizar campos específicos da plataforma (e-mail, barra de comentário, etc.) para se notificar e interagir pedagogicamente, de maneira a sanar as dúvidas em atividades de ensino.

Figura 4 – Sala de aula do Google Sala de Aula - Notas.

Fonte: Autora, 2020.

Com isso, observam-se algumas vantagens e "desvantagem"(Figura 5) sobre a utilização dessa ferramenta. Como vantagem: configuração fácil, não faz uso dos conteúdos e dados dos estudantes, não contém anúncios ou propagandas, permite ambientes de comentários, facilita a organização dos materiais, dispensa de papel; estabelecimento de prazos e horários; e como "desvantagem"da ferramenta: relevância de internet como elemento prioritário ao acesso da plataforma e dos materiais.

Figura 5 – Google Sala de Aula: Vantagens e desvantagem da utilização.



Fonte: Autora, 2020.

Neste caso, antes de decidir utilizar a ferramenta, deve-se averiguar se todos os estudantes têm de alguma forma, acesso a pontos de conexão de internet, para não se tornar uma metodologia excludente.

3.3 Sala de Aula Invertida utilizando o Google Sala de Aula

Nas escolas, sobretudo no ensino fundamental e médio, ainda se tem a relevância da tradição de um espaço físico para sala de aula, onde ocorre o desenvolvimento e a aprendizagem dos estudantes. Para esse paradigma tradicional, o ensino híbrido estar surgindo como uma novidade em relação à sala tradicional (MORAN, 2015). Porém, é necessário perceber que o ensino híbrido não tem a finalidade de suprir ou eliminar o ensino tradicional, mas o de agrupar em um ambiente o mais perfeito dos dois. No ensino tradicional estão presentes diversos métodos que ajustam o aprendizado do estudante, tais como o professor em sala de aula, colegas com mesmas práticas e espaços para se reunirem. Ao inserir esses métodos ao ensino híbrido, teremos o espaço físico com o ambiente virtual, que poderão harmonizar a construção do ser crítico, abarcando o estudante em diversas atividades com e sem tecnologias, cooperando para que todos nesse ambiente aprendam.

Um padrão de ensino híbrido[9] precisa propor parte do tempo a estudos on-line, seja por computadores, tablet ou celulares, por parte dos estudantes, além de uma busca por uma plataforma que auxilie na organização das disciplinas, por parte dos docentes. Com isso, torna-se necessário averiguar os fatores oferecidos pela plataforma com a gratuidade para instituições públicas e a grande variedade de ferramentas adaptáveis à escola. Nas próximas seções, serão abordados um breve histórico do Google Sala de Aula, assim como a metodologia Sala de Aula Invertida, como forma de ensino híbrido.

3.3.1 Metodologia Sala de Aula Invertida - SAI

Pensando no que foi exposto no início do capítulo sobre a relevância das tecnologias digitais no ambiente educacional, faz-se necessário analisar de que forma a inserção destas tecnologias pode acontecer de maneira eficiente no ambiente escolar.

Segundo Munhoz (2015) o professor deve identificar as inquietações constantes do mercado de trabalho como um dos principais fatores que deve motivar a mudança no método tradicional, como destacado no trecho a seguir:

> Há uma reclamação geral com relação ao perfil do profissional formado nos bancos escolares das universidades na atualidade. Eles não estão conectados com a realidade do mercado e necessitam, cada vez mais, de participar de programas de formação permanente e continuada que confiram ao profissional as competências e habilidades que deles o mercado deseja Munhoz (2015, p.24).

[9] De acordo com Moran (2015), o ensino híbrido destaca a interação do ser humano com as tecnologias.

De acordo com os PCN (BRASIL; MÉDIO, 2002), a educação na escola deverá ser conectada ao mundo do trabalho e à prática social. Porém, é possível observar que as aulas exclusivamente expositivas se inserem num modelo que não faz mais sentido nos dias atuais. Para Valente (2014), um dos desafios à educação é o repensar sobre novas propostas educativas que superem a instrução ditada pelo livro didático, centrada no dizer do professor e na passividade do aluno.

Neste cenário, surge uma nova metodologia de ensino, denominada metodologia colaborativa. Segundo Valente (2014) esta metodologia surge como alternativas pedagógicas que colocam o foco do processo de ensino e de aprendizagem no aprendiz, envolvendo-o na aprendizagem por descoberta, investigação ou resolução de problemas.

A discussão sobre metodologias colaborativa já existe há alguns ans. A aprendizagem, focada no alunos, surgiu a partir de uma série de pesquisas no campo educacional que identificou que uma pessoa aprende melhor quando ela interage com outras, interage com seu objeto de aprendizagem e quando ela usa a linguagem.

Cabe mencionar que, de acordo com Bacich, Neto e Trevisani (2015), toda ensino-aprendizagem é ativa e colaborativo, em um certo nível, pois exige do professor e do aluno diversos tipos de movimentações, tanto externas quanto internas, tais como motivação, seleção, interpretação, comparação, avaliação e aplicação. Além disso, segundo os mesmos autores, a relevância da aprendizagem por meio da transmissão, está cada vez mais evidente que a aprendizagem por questionamento e experimentação é mais relevante para uma compreensão mais ampla e profunda.

Na percepção de Moran (2015), um dos modelos mais interessantes de ensinar atualmente é o de concentrar no ambiente virtual o que é informação básica e deixar para a sala de aula as atividades mais criativas e supervisionadas, caracterizando o que chamamos de Aula Invertida.

A Sala de Aula Invertida – SAI, é uma das maneiras de conhecer o ensino híbrido, a teoria é analisada em casa, de forma online, por ambiente virtual de leituras e vídeos, enquanto o recinto da sala de aula é aproveitado para discussões, resoluções de atividades, entre outras propostas (BACICH; NETO; TREVISANI, 2015).

De acordo com Valente (2014), as normas principais para inverter a sala de aula, são:

I) os exercícios propostos em sala de aula precisam abranger uma coleção expressiva de questionamento, resolução de problemas e outras atividades de aprendizagem ativa, forçando o estudante a readquirir, aplicar e expandir o material estudado on-line;

II) os estudantes devem auferir feedback após a efetivação das atividades presenciais;

III) os estudantes devem ser impulsionados a participar das atividades on-line e das presenciais;

IV) todo o material a ser empregado deve ser altamente estruturados e bem esquematizados.

A Sala de Aula Invertida tem sido vivenciada em diferentes ambientes universitários americanos como, por exemplo, em Harvard University e Massachusetts Institute of Technology – MIT, em algumas disciplinas curriculares. Essas universidades têm modificado seus procedimentos de ensino, buscando amoldar para que possam empreender os progressos das tecnologias educacionais, bem como tornar mínimo o subterfúgio e a reprovação em disciplinas, como a matemática (VALENTE, 2014).

Dessa maneira, vários estudos sobre a Sala de Aula Invertida têm apontado que os estudantes estabelecem sua visão sobre o mundo ativando notícias precedentes e unificando os novos conhecimentos com os arcabouços cognitivos já existentes para que possam, então, raciocinar criticamente os conteúdos analisados (MORAN, 2015). Essas análises também indicam que os estudantes ampliam agilidades de pensamento crítico e têm uma mais perfeita abrangência conceitual sobre uma opinião quando empreendem uma autonomia inicial (BACICH; NETO; TREVISANI, 2015).

Um dos incentivadores da metodologia Sala de Aula Invertida, destaca que observações e relatos de praticantes desse procedimento efetivados mundialmente (há mais de 12 anos) admitiram sua potência educacional. Os frutos sinalizaram que aconteceu enriquecimento da aprendizagem dos estudantes nas avaliações, que ajudou a diminuir problemas e que serviu de motivação para discentes e docentes, além de outras proficuidades (BERGMANN JONATHAN E SAMS, 2016).

A demanda sobre um desempenho mais conectado na sala de aula tem nas metodologias colaborativas uma crescente discussão, já que tal proposta se repousa no evidente, ou seja, "as metodologias precisam acompanhar os objetivos pretendidos. Se queremos que os alunos sejam proativos, precisamos adotar metodologias em que os alunos se envolvam em atividades, em que tenham que tomar decisões e avaliar os resultados, com apoio de materiais relevantes"(MORAN, 2015, p. 17).

Com isso, a sala de aula invertida, pode ser uma metodologia na qual as informações poderão ser edificadas por meio da intervenção, cooperação, influência mútua, compromisso, necessidades, interesses e desejos, quebrando as barreiras entre educador e educando. Além de atribuir aos professores a missão de motivar a metodologia formativo e socializar portas alternativas, que impulsiona a interação estudante-professor, estudante-estudante.

Portanto, pode-se definir a sala de aula invertida como "aquela que enfatiza o uso das tecnologias para o aprimoramento do aprendizado, de modo que o professor possa utilizar melhor o seu tempo em sala de aula em atividades interativas com seus alunos ao invés de gastá-lo apenas apresentando conteúdo em aulas expositivas tradicionais" (BACICH; NETO; TREVISANI, 2015, p. 5).

Nesse sentido, o empenho vai se concentrar em aumentar e diferenciar o espaço de estudo, além de possibilitar que os estudantes tenham acessibilidade, inúmeras vezes, aos recursos e às aulas disponibilizadas por seus docentes. Com isso, de acordo com Bergmann Jonathan e Sams (2016), existem alguns motores motivacionais para a utilização da metodologia sala de aula invertida:

I) Auxilia os estudantes ocupados/faltosos: aqueles que faltam às aulas, que moram longe, que estão sobrecarregados;

II) Auxilia os que têm problema de aprendizado: poderão rever os vídeos inúmeras vezes com a explicação, o que muitas vezes não será possível em uma sala de aula presencial. O estudante que não conseguir sanar a dúvida com os vídeos, poderá recorrer ao professor na aula presencial;

III) Cresce significativamente a interação do docente com os estudantes: nas atividades em sala de aula presencial, o docente conhece a dificuldade pontual de cada estudante;

IV) Altera o gerenciamento da sala de aula, diminuindo problemas com estudantes que tem mais dificuldade no aprendizado;

V) Permite que os pais participem mais e estudem junto com seus filhos em casa;

VI) Leva ao programa reverso de aprendizagem para o domínio: os estudantes prosperam dentro do seu próprio ritmo.

Constatando os melhoramentos da sala de aula invertida para a prática docente, os professores sucedem a ter um relevante desempenho na linha construtivista, procurando apreciar a atuação dos seus estudantes e assim instigar habilidades e competências. Para que essa obtenção de competências sobrevenha, é indispensável que o docente alargue atividades nas quais os estudantes possam conviver com períodos desafiadores que os induzam à busca, à resolução de problemas e a atividades complexas, por conseguinte acontecerá aula mais conectada, ativa e afastada da prática tradicional (BERGMANN JONATHAN E SAMS, 2016).

O docente que aproveita de metodologias como a da sala de aula invertida não encurta o seu papel e seu desempenho, apenas o repasse de conteúdo. Ele incide a ser um intercessor, guia, facilitador, incentivador, aproveitando-se de múltiplos recursos para despertar e admitir que o educando possa ir edificando os seus conhecimentos de acordo com as suas particularidades, desenvolturas e questionamentos, além de ressaltar o valor da interação, em uma "afinidade de interaprendizagem, até chegar a causar um conhecimento que seja expressivo, conhecimento que se ajunte ao seu mundo intelectual e vivencial, e que o auxilie a envolver sua realidade humana e social, e mesmo a intervir nela" (BERGMANN JONATHAN E SAMS, 2016).

Com isso, "todo o processo requer um esforço coletivo de professor e alunos para sair de uma 'inércia formal' que nos acompanha desde a escola primária, sendo muitas vezes reproduzida na universidade" (LEMOS; PERL, 2015, p. 136).

Segundo Moran (2015), a metodologia sala de aula invertida pode ser considerada um dos padrões mais atraentes da contemporaneidade para misturar tecnologia com metodologia de ensino, pois aplica no virtual o que é conhecimento fundamental e, na sala de aula, métodos criativos e monitorados, uma concordata de aprendizagem por provocações, planos, dificuldades reais e alternativos.

Seguindo essa linha de pensamento de Moran (2015), o padrão de sala de aula invertida pode ser oferecido como estratégia didática para a compreensão dos conceitos matemáticos, a partir do uso dessa metodologia nas aulas de Matemática, com a finalidade de promover a aprendizagem matemática ao entendimento dos estudantes ao pesquisar e organizar esses conceitos de acordo aos conteúdos, investigando materiais que possam beneficiar estratégias pedagógicas de instrução e aprendizagem, como uma oportunidade de formação e superação das necessidades, dos problemas de aprendizagem, bem como das lacunas e desafios da educação.

Nesta pesquisa, a metodologia escolhida para aplicação e análise foi a sala de aula invertida, por conta desta, entre outras potencialidades:

1. Recomendar não só a modificação da sala de aula em um espaço criativo, mas também "levá-la" para além dos muros da escola.

2. Provocar os educadores a empregarem os elementos tecnológicos na sua rotina diária e na dos estudantes, estabelecendo habilidades necessárias à exploração e investigação em uma constante atualização.

3. Aproveitar o tempo da sala de aula em atividades e discussões, já que boa parte do conteúdo foi passado em outro momento e ambiente.

4. Oportunizar melhor inclusão entre os estudantes que não ficarão preocupados somente em granjear os conteúdos.

5. Procurar requerer mais autonomia e conhecimento ativo na constituição do conhecimento.

Desse modo, a metodologia sala de aula invertida oferece enquanto método de intervenção de um ambiente para uma aprendizagem mais adequado à criatividade, reflexão, interatividade e autonomia. Com a finalidade de proporcionar a aprendizagem dos estudantes envolvidos na pesquisa, delineamos o trajeto metodológico, que é apresentado no capítulo seguinte.

4 Pesquisa Empírica

Com a intenção de averiguar os prováveis benefícios enumerados por Bergmann Jonathan e Sams (2016), sobre Sala de Aula Invertida, buscou-se a pesquisa-ação como padrão metodológico para o estudo. Esta incide em um tipo de pesquisa social com embasamento empírico, que é idealizada e atingida em agregação com uma ação na qual o pesquisador e os participantes estão comprometidos de modo responsável ou participativo (THIOLLENT, 1988).

Assim, para a realização desta pesquisa, a princípio foram selecionadas três turmas do primeiro ano do Ensino Médio de uma escola pública da cidade de Valença – Bahia, onde atuo como professora de Matemática e Física. A pesquisa contou com a participação de 83 estudantes, sendo 34 do sexo feminino e 49 do sexo masculino, com faixa etária entre 15 e 18 anos de idade. Os estudantes participaram da pesquisa durante os meses de fevereiro e março de 2020. Os instrumentos de coleta de dados utilizados foram observação e as respostas dadas às atividades propostas.

Antecedendo a apresentação da proposta aos estudantes, foi criada uma turma no Google Sala de Aula, intitulada "1 ano A - Matutino", na qual foi gerado um código. Este, na aula inaugural, foi colocado no quadro branco para que os estudantes copiassem e, posteriormente, em casa ou até mesmo no colégio, utilizassem para acessar a turma virtual e realizar as atividades no Google Sala de Aula.

O estudo foi dividido em três partes:

i) aula inaugural, que teve como objetivo apresentar aos estudantes a proposta da experimentação da metodologia colaborativa Sala de Aula Invertida - SAI com o uso da ferramenta Google Sala de Aula no estudo da Divisibilidade dos Números Naturais e na qual os estudantes foram convidados e informados sobre os processos do desenvolvimento dessa metodologia colaborativa, o que incluiu o acompanhamento de uma vídeoaula.

ii) realização da sequência didática, desenvolvida em três semanas, tanto nas aulas online no Google Sala de Aula (com visualização de vídeos, pesquisa de imagens, criação de mapa mental e relatório) como nas aulas presenciais com aprofundamento do conteúdo e aulas dinâmicas sob orientação da professora mediadora e dos colegas;

iii) análise dos resultados da experimentação da metodologia colaborativa - SAI utilizando a ferramenta Google Sala de Aula, no ensino de Divisibilidade dos Números Naturais.

4.1 Aula inaugural

Tabela 1 – Aula inaugural

Data do encontro	Duração	Atividades desenvolvidas	Local em que foi realizada
14.02.2020	100 min	Aula Inaugural: • Apresentação do objetivo e da metodologia da pesquisa. • Oficina sobre a utilização do Google Sala de Aula. • Fornecimento do código de acesso da sala virtual. • Entrega do Termos de Consentimento Livre e Esclarecido: Pais e/ou responsáveis e o Termo de Assentimento Livre e Esclarecido: Estudantes.	Auditório.

Fonte: Autora, 2020.

Analisando a Tabela 1 acima, a aula inaugural teve o objetivo de encantar e motivar os estudantes a conhecerem mais profundamente o Google Sala de Aula como uma ferramenta de auxílio para autonomia da aplicação da metodologia colaborativa sala de aula invertida no processo de aquisição do conhecimento. Nessa aula, também foram disponibilizados os termos de consentimento livre e esclarecido: pais/responsáveis (Apêndice 1) - uma vez que a grande maioria dos participantes da pesquisa são menores; e o termo assentimento livre e esclarecido (Apêndice 2) - para que os estudantes tivessem total responsabilidade de participação da pesquisa. Vale ressaltar que todos os procedimentos presenciais seriam aplicados durante as aulas de matemática, no turno matutino.

Para introduzir a aula inaugural, foi questionado aos estudantes, o que poderia motivá-los a estudar matemática? Como eles gostariam de estudar os conteúdos de matemática?

Daí, com o questionamento 48% dos estudantes afirmaram que gostar da disciplina, e 52% que a matemática não entrava na cabeça deles. Com relação a segunda pergunta, a grande maioria (72%) afirmaram que precisava de algo diferente para aprender, citaram jogos, projetos, gincana entre outros.

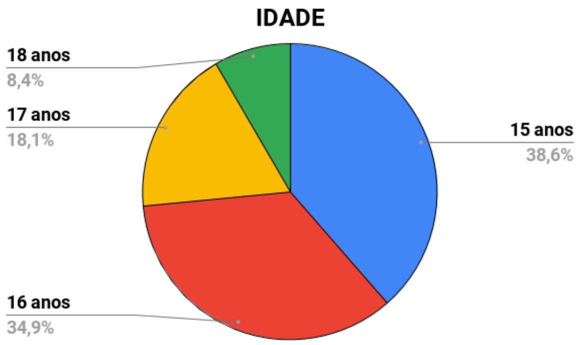
Tabela 2 – Aula presencial 1

Data do encontro	Duração	Atividades desenvolvidas	Local em que foi realizada
06.03.2020	80 min	Aula presencial: • Recolhimento dos termos. • Acesso ao Google sala de aula pelos estudantes. • Aplicação do questionário inicial. • Visualização dos vídeos Números naturais - Brasil Escola Vaz (2017), anexado no mural da sala virtual.	Laboratório de informática.

Fonte: Autora, 2020.

Na semana seguinte, foram recolhidos os termos e aplicado o questionário inicial (Apêndice 3), além de reforçar quais eram a proposta e o objetivo da pesquisa. Por meio da análise das respostas do mesmo, foi possível diagnosticar que os participantes da pesquisa tinham entre 15 e 18 anos (Figura 6).

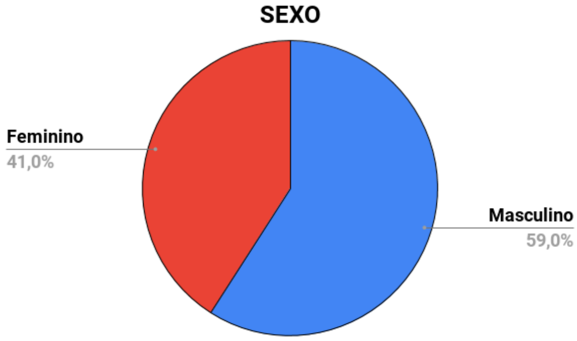
Figura 6 – Idade dos estudantes.



Fonte: Autora, 2020.

Constatou-se também que do total, 51% dos participantes eram do sexo masculino (Figura 7) e que 100% completaram o Ensino Fundamental na Rede Pública de Ensino. Essa última informação foi colhida durante a apresentação da pesquisa.

Figura 7 – Sexo dos estudantes.



Fonte: Autora, 2020.

Na primeira aula presencial, conduzi os estudantes para o laboratório de informática, e solicitei que eles acessassem o Google Sala de Aula, com o código de acesso já fornecido na aula inaugural e disponibilizado no quadro da sala de aula. O acesso foi livre para que eles pudessem se familiarizar com a plataforma. Mostrei, novamente, todas as ferramentas e suas funcionalidades e, como era simples o manuseio do ambiente virtual. Logo em seguida, solicitei que os estudantes respondessem o questionário inicial da pesquisa. Propus como atividade que eles assistissem aos vídeos disponibilizados no mural da sala virtual.

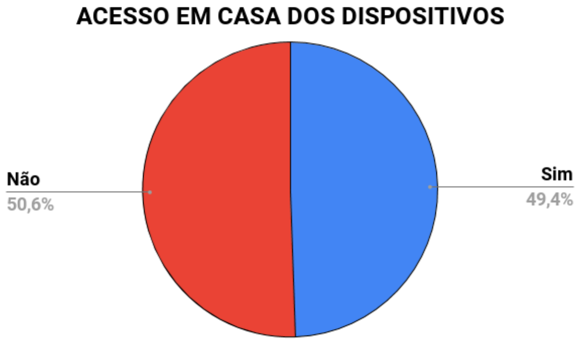
4.1.1 Resultados do questionário inicial

O questionário inicial, contendo 12 (doze) perguntas, sendo a grande maioria de múltiplas escolhas, teve como objetivo investigar a ferramenta educacional Google Sala de Aula com a contribuição da Metodologia Colaborativa Sala de Aula Invertida no apoio ao processo de ensino-aprendizagem do conteúdo de matemática, bem como conhecer as condições de acesso aos ambientes virtuais e a percepção deles sobre o uso das tecnologias no ambiente escolar. Os resultados foram obtidos através do formulário do Google e da ferramenta utilizada para captação online dos dados, o Google Drive.

A análise dos resultados teve como cuidado a exposição dos dados por meio de uma interpretação clara e baseada de forma teórica e prática. Essas análises procedem de pontos que abordavam sobre os meios de acesso, a disponibilidade de acesso a internet, a finalidade da utilização dos equipamentos, o tempo disponibilizado para acessar a internet, utilização do dispositivo móvel nas aulas de matemática e por fim, a opinião sobre utilizar os dispositivos móveis para aprender matemática.

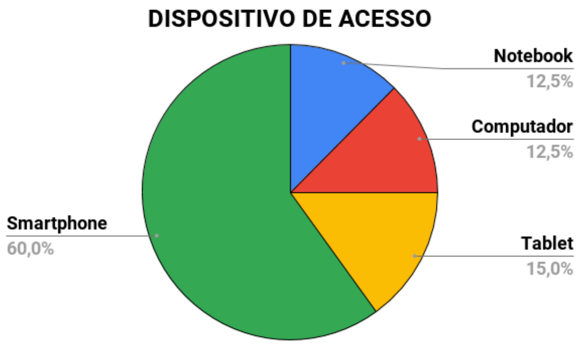
Na primeira aula presencial, o questionário inicial foi respondido pelos 83 estudantes das três turmas da primeira série matutina do Ensino Médio. Quando questionados sobre o acesso aos dispositivos (notebooks, computador, tablets ou smartphones) em suas casas, 41 dos 83 participantes responderam que acessam algum desses dispositivos em casa (Figura 8) e 42 de outros locais como lan house e escola. Além disso, 48 participantes utilizam os smartphones *em casa (Figura 9). Vale ressaltar que alguns participantes afirmaram utilizar dois ou mais dispositivos em casa.*

Figura 8 – Respostas dadas à pergunta 4 do Questionário Inicial.



Fonte: Autora, 2020.

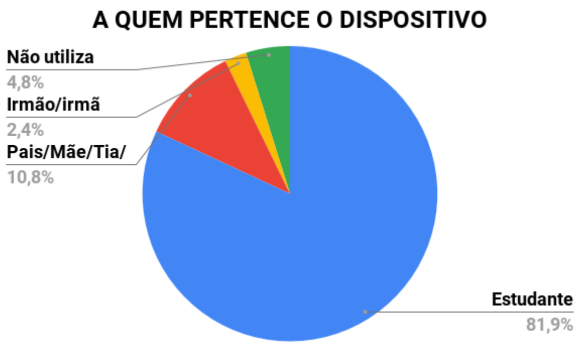
Figura 9 – Respostas dadas à segunda parte da pergunta 4 do Questionário Inicial.



Fonte: Autora, 2020.

Foi perguntado se o dispositivo pertence ao estudante ou alguém da família (Figura 10) e 68 dos participantes afirmaram que o dispositivo pertente a eles e apenas 11 estudantes utilizam aparelhos dos familiares.

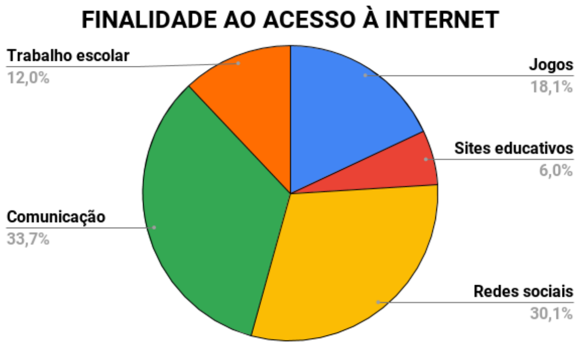
Figura 10 – Respostas dadas à pergunta 5 do Questionário Inicial.



Fonte: Autora, 2020.

Quando questionados sobre o acesso à internet de casa, 55 dos participantes afirmam ter acesso da própria residência e que a finalidade principal para o acesso são comunicação e redes sociais (Figura 11).

Figura 11 – Respostas dadas à pergunta 7 do Questionário Inicial.



Fonte: Autora, 2020.

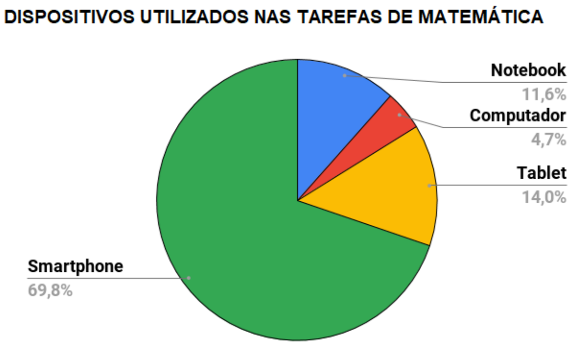
Inqueriu-se quanto do tempo livre (Figura 12) os participantes utilizam essas tecnologias em casa ou em outros locais. Dos 83 estudantes participantes, 12 responderam até 1 hora por dia, 25 até duas horas e 46 estudantes, 3 ou mais horas por dia.

Figura 12 – Respostas dadas à pergunta 8 do Questionário Inicial.

Fonte: Autora, 2020.

Quando perguntado se já utilizou dispositivos móveis (Tablet, Notebook, Smartphone, Chromebook) nas aulas de matemática, 100% afirmaram que não, porém 45,8% dos estudantes, já utilizou algum tipo de dispositivo para a realização das tarefas de matemática (Figura 13).

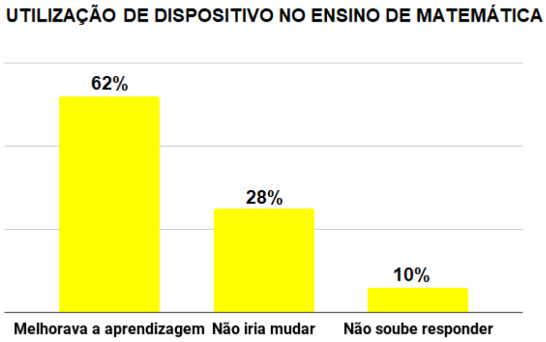
Figura 13 – Respostas dadas à pergunta 11 do Questionário Inicial.



Fonte: Autora, 2020.

Quando questionado sobre a utilização dos dispositivos móveis para aprender matemática (Figura 14), mais de 60% dos participantes afirmaram que a disciplina poderia melhor a aprendizagem; quase 30% dos estudantes disseram que não iria mudar em nada e 10% disseram que não saberia responder.

Figura 14 – Respostas dadas à pergunta 12 do Questionário Inicial.



Fonte: Autora, 2020.

Esta informação demonstra o que assegura Amorim et al. (2016), quando destaca que essa geração acarreta uma vasta desenvoltura para trabalhar com as tecnologias digitais, ampliando novas linguagens e pensamento cognitivo.

Diante da pesquisa realizada, a tecnologia no ambiente escolar é inevitável, não há lugar para acomodação da equipe escolar, principalmente do docente que é a parte essencial no processo de ensino. O fato de que boa parte da população jovem utiliza as tecnologias não significa que está havendo conexões entre conhecimentos e nem que está ocorrendo uma aprendizagem.

Do ponto de vista de Setton (2013), a utilização de recursos tecnológicos em sala de aula com fins educacionais ocasiona ao indivíduo uma autoria na sua produção, o que gera estímulo a produzir, escrever e ler. Assim, as TD possuem um potencial ilimitado de formação e reconstrução de experiências. O autor ainda evidencia que a articulação pedagógica das ferramentas usadas em sala de aula são questões específicas para os estudantes. Isso se deve ao fato que os docentes têm um olhar minucioso em relação às práticas de ensino utilizadas no processo de ensino/aprendizagem, assim, tendo uma compreensão ampla para um preparo eficiente das futuras gerações.

Com isso, os docentes e os responsáveis dos estudantes devem direcionar devidamente os discentes de forma ética e responsável quanto ao uso desses recursos em sala de aula. "Não basta ter habilidade para utilizar as tecnologias e acessar o gigantesco volume de informações disponíveis; é necessário desenvolver o senso crítico e a capacidade de selecionar bem as informações" (DANTAS; MACHADO, 2014, p. 55).

As tecnologias usadas em sala de aula devem tornar-se ferramentas que assegurem a aprendizagem dos estudantes com respeito ao conteúdo didático que o docente está ministrando. De acordo com Dantas e Machado (2014, p. 40), "é o professor quem deverá escolher as tecnologias que melhor se adéquam aos seus objetivos educativos e combiná-los de forma a obter os resultados pretendidos". Com isso, estará viabilizando a aprendizagem significativa, dinamizando as aulas de forma inovadora e eficiente.

Contudo, essa pequena pesquisa mostra que os estudantes possuem recursos tecnológicos para acompanhar e participar de métodos de ensino que têm como objetivo a inovação da tecnologia digital na escola. Para isso, necessita que o docentes e todo o corpo gestor da instituição se disponha e esteja aberto ao novo, reconhecendo que inserir ferramentas digitais para o aprendizado matemático, por exemplo, viabiliza um processo de ensino mais dinâmico, com movimento e interatividade.

4.2 Sequência Didática

De acordo com Pais (2016), uma sequência didática é também uma fase relevante para avalizar o contorno dos métodos práticos com a análise teórica. Daí, uma sequência didática é desenvolvida por um certo número de aulas planejadas e ponderadas antecipadamente com a intenção de ressaltar situações de aprendizagem, abarcando as considerações antecipadas na pesquisa didática. Essas aulas são também denominadas de sessões, intencionando o seu estilo específico para a pesquisa. Em outras palavras, não são aulas corriqueiras na definição da rotina de sala de aula, é necessário estar precatado ao máximo número admissível de subsídios que podem colaborar no esclarecimento do fenômeno investigado.

Com isso, nas semanas seguintes, foram propostas atividades diferenciadas (relatório, resolução de problemas, curta-metragem, elaboração de um mapa mental e por fim um jogo da divisibilidade). com a intenção de responder ao objetivo da pesquisa. Optou-se também em realizar a sequência didática em uma única turma do 1 ano A do Ensino Médio, do turno matutino, do Colégio Estadual João Cardoso dos Santos, com cerca de 40 estudantes.

O vídeo Números naturais. Matemática Básica, anexado no mural da sala virtual, aborda de uma forma criativa e dinâmica os números naturais, com história do surgimento dos números naturais, além de trabalhar a questão do infinito e do sistema de numeração, finalizando uma questão bem interessante do ENEM.

No segundo vídeo proposto Múltiplos e Divisores de um Número Natural - Vivendo a Matemática, não sendo diferente do primeiro vídeo proposto, a professora Ângela trabalha a questão dos múltiplos e divisores de forma clara e coerente, resolvendo questões com múltiplos e divisores dos números naturais.

Verificou-se ao longo da semana, de 07 a 12.03.2020, (Tabela 3) que a atividade proposta foi sendo cumprida no Google Sala de Aula. Do total de 40 estudantes, 29 realizaram suas atividades no prazo estabelecido e 8 entregaram o relatório escrito, no dia da aula presencial. Os textos dos relatórios produzidos pelos estudantes expuseram coerência e clareza do conteúdo abordadonos vídeos. Contudo, para o cumprimento dessa tarefa, alguns estudantes apontaram insegurança e grandes dificuldades ao experimentar a plataforma, notadamente em relação a *como anexar as respostas.*

Tabela 3 – Aula virtual 1

Data do encontro	Duração	Atividades desenvolvidas	Local em que foi realizada
07 a 12.03.2020	6 dias	Aula virtual: • Visualização do vídeo *Números Naturais. Matemática Básica* Viug (2019). • Visualização do vídeo *Múltiplos e Divisores de um Número Natural - Vivendo a Matemática* Correia (2016). Anexados no mural da sala virtual. • Atividade proposta: Relatório sobre os vídeos. • Postar os relatórios no tópico da atividade no ambiente virtual.	Ambiente virtual.

Fonte: Autora, 2020.

Como a plataforma tem disponível uma ferramenta de feedbacks instantâneos na aba Atividades (Figura 2), as dificuldades foram sendo resolvidas por meio de mensagens simultâneas.

Ao final do tempo determinado para o cumprimento da tarefa da semana, a pesquisadora fez as correções e observações das atividades no Google Sala de Aula e estas foram devolvidas aos estudantes na mesma plataforma.

No dia 13.03.2020, foi realizada a atividade presencial 2 (Tabela 4). Observou-se por meio da discussão do conteúdo que os estudantes tinham um certo domínio do assunto que havia sido direcionado para casa. No início da aula, alguns estudantes tiraram dúvidas com relação ao aplicativo "Google Sala de Aula", porém poucos tinham baixado no celular. A grande maioria preferiu utilizar na plataforma do Google Sala de Aula. Findando a análise, constatou-se que os estudantes estavam muito motivados e, alguns sugeriram que outros professores deveriam utilizar essa forma de ensino com o Google Sala de Aula. Ainda em 13.03.2020, foi aplicada a sequência didática – parte 1 (Apêndice D).

Neste contexto, é relevante que as atividades propostas estejam ligadas ao cotidiano dos estudantes, com metodologias colaborativas que permitam que os mesmos andem com mais autonomia, que os estudantes estudem os conteúdos antes da aula presencial, além de realizarem tarefas com a orientação do educador ou colegas mais experientes (MORAN, 2015).

Durante a aplicação da sequência didática - parte 1, a sala foi organizada em grupos de quatro estudantes, o que facilitou muito a retirada de dúvidas e muitas vezes um ajudava o outro. Um ponto bem relevante, observado quando abordou-se o termo "ano bissexto", foi que

Tabela 4 – Aula presencial 2

Data do encontro	Duração	Atividades desenvolvidas	Local em que foi realizada
13.03.2020	100 min	Aula presencial: • Discussão sobre a importância dos Números Naturais no cotidiano dos estudantes e a relação de múltiplos e divisores dos números naturais. Comentários sobre os vídeos. • Momento Tira dúvidas. • Sequência didática - parte 1 (apêndice D).	Sala de aula.

Fonte: Autora, 2020.

muito dos estudantes não sabiam o que ele representava e nem como acontecia. Muitos apenas conheciam a existência do dia 29 de fevereiro.

Para Dante (2003), ensinar Matemática é perpetrar com que o estudante pense ativamente em uma estratégia. A tática preconizada por este autor é o trabalho com situações-problemas que sejam capazes de desafiar e instigar os estudantes a encarar situações novas e resolvê-las, ajustando ao educando a inclusão com aplicações da Matemática da vida cotidiana.

No decorrer da aplicação da sequência didática, foi observado domínio do conteúdo de múltiplos, porém a grande maioria dos estudantes apresentou dificuldade na parte de divisão, sempre querendo utilizar a calculadora do celular como ferramenta para auxiliar o processo. O que não foi permitido em nenhuma das partes do processo, para não distrair os alunos durante a aplicação da atividade.

Toledo e Toledo (1997) afirmam que os impasses expostos pelos estudantes em "fazer contas" abarcando os números naturais estão fortemente ligadas à prática do sistema de numeração decimal. Esse sistema não é tão trivial como demonstra e nem tão descomplicado de ser compreendido pelos estudantes.

A atividade **Mapa Mental** (Apêndice E), proposta durante a semana do dia 14 a 19.03.2020 (Tabela 5), teve como objetivo aperfeiçoar a memorização a partir de imagens de conceitos e ideias resumidas, organizadas pelos próprios estudantes sobre os conteúdos múltiplos e divisores dos números naturais.

Múltiplos estudos indicam as vantagens relacionadas a construção dos mapas mentais, podendo causar uma melhor fixação de ideias e relações, dado o choque visual do diagrama. Buzan (2005) diz que a detenção acrescenta ainda mais por meio do uso de imagens, linhas curvas, cores propositais e poucas palavras.

Tabela 5 – Aula virtual 2

Data do encontro	Duração	Atividades desenvolvidas	Local em que foi realizada
14 a 19.03.2020	6 dias	Aula virtual: • Visualização do vídeo *Como fazer um Mapa mental Passo a Passo | Seja Um Estudante Melhor* Barros (2017) anexado no mural da sala virtual. • Assistir ao vídeo "Critérios de divisibilidade por 2-3-4-5-6-7-8-9"(GENIAL, 2016), disponibilizado no mural da sala virtual. • Elaboração de um mapa mental sobre múltiplos e divisores dos números naturais e critérios de divisibilidade. .	Ambiente virtual.

Fonte: Autora, 2020.

A atividade proposta nessa semana (Tabela 6), tem a finalidade de demonstrar e avaliar o conhecimento adquirido dos conteúdos trabalhados desde o início da pesquisa.

Tabela 6 – Aula presencial 3

Data do encontro	Duração	Atividades desenvolvidas	Local em que foi realizada
20.03.2020	100 min	Aula presencial: • Apresentação dos mapas mentais. • Momento tira dúvidas. • Formação das equipes para produção de um jogo da divisibilidade. • Sequência didática - parte 2 (Apêndice F).	Sala de aula.

Fonte: Autora, 2020.

A sequência didática - parte 2 (Apêndice F), começa com os divisores naturais de alguns números propostos. Logo em seguida é trabalhado múltiplos e por fim os critérios de divisibilidade por 2, 3 e 5. Tendo a finalidade de colher informações do conhecimento adquirido pelos estudantes durante a pesquisa, essa atividade proposta deverá ser respondida individual.

Por motivo da pandemia do covid 19, as aulas foram suspensas, o que impossibilitou a realização das atividades virtuais e das atividades presenciais (Tabela 7) pelos estudantes.

Tabela 7 – Aula virtual 3

Data do encontro	Duração	Atividades desenvolvidas	Local em que foi realizada
21 a 26.03.2020	6 dias	Aula virtual: • Visualização do vídeo "Divisibilidade | Quer que desenhe | Descomplica“ (PIMENTA, 2019). • Visualização do vídeo "Nunca mais erre divisão!!!"(AMORIM, 2016). • Produção do jogo da divisibilidade. • Aplicação do questionário (apêndice G).	Ambiente virtual.
Data do encontro	Duração	Atividades desenvolvidas	Local em que foi realizada
27.03.2020	100 min	Aula presencial: • Momento tira dúvidas. • Apresentação dos jogos produzidos pelas equipes. • Comentários e considerações sobre os jogos. • Aplicação do questionário final.	Sala de aula.

Fonte: Autora, 2020.

Durante as duas semanas seguintes, foram realizadas algumas tentativas de contato com os estudantes, sem muito êxito, o que impossibilitou a aplicação das propostas seguintes.

A proposta de finalizar a pesquisa com um jogo criado pelos estudantes, se dá pela observação de que os jogos como recurso didático é destaque da ludicidade assim como na motivação do conhecimento, onde o estudante incluído de forma ativa, aumenta a segurança do conteúdo e sai da omissão que ocorre em aulas tradicionais, em que opta pela difusão do conteúdo. Mesmo o mais infantil dos jogos, como por exemplo, os jogos de memória, desenvolvem habilidades e competências que favorecem o processo de aprendizagem.

Os PCNs já apresentam os jogos como uma forma de propor problemas

> *Os jogos constituem uma forma interessante de propor problemas, pois permitem que estes sejam apresentados de modo atrativo e favorecem a criatividade na elaboração de estratégias de resolução e busca de soluções. Propiciam a simulação de situações-problema que exigem soluções vivas e imediatas, o que estimula o planejamento das ações (BRASIL, 1997, p. 46).*

No jogo, a resolução de problemas é entrelaçada pela própria precisão de sua execução, onde é necessário organizar e testar estratégias, levantar hipóteses e refletir sobre as batalhas do jogador e do seu oponente e, como artifício de aprendizagem, que pode advir com a interferência do professor, há também o comentário e análise das etapas do jogo. Esses conceitos são os mesmos da resolução de problema, ou seja, o jogo "representa uma situação problema determinada por regras, em que o indivíduo busca a todo o momento, elaborando estratégias, procedimentos e reestruturando-os, vencer o jogo, ou seja, resolver o problema" (GRANDO et al., 2000, p. 400).

Com isso, os jogos são analisados como uma maneira de possibilitar a preparação de estratégias e a idealização de ações, ponderando as suas consequências em relação ás próximas etapas do mesmo. Sendo assim, o seu emprego no ensino da Matemática pode levar os estudantes a ampliarem a habilidade de refletir em diversas possibilidades para a resolução de uma situação.

5 Considerações Finais

Partindo da assimilação que as inovações pedagógicas se conjecturam em novas atitudes tanto para docentes quanto para estudantes, o método proposto comprovou que o uso da metodologia colaborativa Sala de Aula Invertida no ensino de Divisibilidade, da forma que foi empregada, obteve êxito (BERGMANN JONATHAN E SAMS, 2016).

Constatou-se ainda que não há obrigação de aprimorados conhecimentos técnicos para a produção de uma videoaula, já que existe um arsenal de vídeos na plataforma do YouTube que podem ser utilizados, e que o resultado da experência reflete principalmente o modo como os professores empregam essa ferramenta. Ou seja, os benefícios da Sala de Aula Invertida aplicada nessa pesquisa, aqui expostos e observados, estão baseados muito mais em questões metodológicas que tecnológicas.

Na aula inaugural foi verificada a insegurança dos estudantes no método de edificação do conhecimento ao utilizarem o Google Sala de Aula. Contudo, por meio de feedbacks, com finalidade de motivar, instigar e sanar dúvidas sobre a proposta metodológica sugerida, os estudantes desenvolveram as atividades sugeridas de forma reflexiva, criativa e autônoma.

A utilização de aulas em vídeo, como recurso didático, sendo disponibilizadas com antecedência com intuito de apresentar os conteúdos antes da explicação do professor, foi avaliada como uma ferramenta atenuadora e incentivadora da aprendizagem, visto que o espaço presencial (sala de aula, laboratório de informática ou área verde do colégio) foi engrandecido com dúvidas, sugestões, conexão da Matemática com outras disciplinas e depoimentos de informações de pesquisas realizadas por conta própria, pelos estudantes (BACICH; NETO; TREVISANI, 2015).

O diagnóstico dos dados sinaliza que a proposta metodológica Sala de Aula Invertida com a utilização da ferramenta Google Sala de Aula poderá contribuir de forma positiva na construção e aprendizagem dos estudantes e principalmente motivá-los a construção desse conhecimento. Observa-se uma importante cooperação e colaboração na plataforma empregada por ambiente de visualização de vídeos, pesquisas, postagens, compartilhamentos de textos, imagens e sons com qualidade, autonomia e criatividade.

Além do mais, a sugestão poderá coopera para o processo de construção do conhecimento da Divisibilidade dos Números Naturais de forma crítica, ajustável e moldável uma vez que os estudantes investigam, dividem e expõem, nos ambientes utilizados, conteúdos de qualidade. Assim sendo, o Google Sala de Aula pode permitir o estudo de Matemática mais participativo e colaborativo, oportunizando um espaço equilibrado, de repartição, onde proporcionará ao docente e ao estudante um ambiente protegido, estruturado, de comunicação simultânea e assíncrona (MORAN, 2015).

As vantagens citadas se confrontam aos demais estudos, lembrando que a questão da construção do conhecimento precedente do conteúdo e consequentemente a máxima exploração do tempo presencial nos dirige às novas possibilidades que aumentam a participação e interação entre todos os elementos envolvidos.

Em contra partida, a desvantagem, no caso da provável falta de acesso à internet por muitos estudantes, é importante ser analisada em outras aplicações dessa metodologia, já que a ferramenta do Google Sala de Aula deixa a plataforma disponível para futuros acessos, esse problema poderá ser menor, já que o estudante poderá acessar de qualquer lugar e em qualquer momento.

Além de tudo, é necessário a distribuição de materiais didáticos de qualidade, motivando uma aprendizagem mais singularizada, cada estudante no seu tempo, apoiado em suas necessidades e anseios do conhecimento. Finalmente, a conexão cada vez maior entre sala de aula presencial e espaços virtuais é de total relevância para desdobrar a escola para o mundo e ocasionar o mundo para dentro da escola Bacich, Neto e Trevisani (2015). Assim, como perspectiva futuras, pretendemos realizar o desenvolvimento das atividades junto aos estudantes, não somente de turmas do primeiro ano do ensino médio, mais também com todas as turmas da instituição escolar, para que possa identificar obstáculos epistemológicos e didáticos no processo de ensino e aprendizagem de matemática, com a utilização da metodologia Sala de Aula Invertida tendo como suporte a ferramenta do Google Sala de Aula.

Referências

ABT, A. B. d. T. E. Associação brasileira de tecnologia educacional - abt. Rio de Janeiro, *1992.*

AMORIM, M. Nunca mais erre divisão. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=-CVQK0Ir8iU> Acesso: fev, 2020. Matemática com AMORim. *2016.*

AMORIM, M. C. M. d. S. et al. Aprendizagem e jogos: diálogo com alunos do ensino médio-técnico. Educação & Realidade, *SciELO Brasil, v. 41, n. 1, p. 91–115, 2016.*

ARAÚJO, H. M. C. et al. O uso das ferramentas do aplicativo"google sala de aula"no ensino de matemática. Universidade Federal de Goiás, 2016.

BACICH, L.; NETO, A. T.; TREVISANI, F. de M. Ensino híbrido: personalização e tecnologia na educação. *[S.l.]: Penso Editora, 2015.*

BARROS, A. Como fazer um MAPA MENTAL Passo a Passo | Seja Um Estudante Melhor. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=m1qW0wPJV1M> Acesso: fev, 2020. Seja uma pessoa melhor. *2017.*

BASNIAK, M. I.; SOARES, M. T. C. O proinfo e a disseminação da tecnologia educacional no brasil. Educação Unisinos, *v. 20, n. 2, p. 201–214, 2016.*

BELLONI, M. L. A televisão como ferramenta pedagógica na formação de professores. Educação e pesquisa, *SciELO Brasil, v. 29, n. 2, p. 287–301, 2003.*

BERGMANN JONATHAN E SAMS, A. Aprendizado invertido para instrução elementar. *[S.l.]: Sociedade Internacional de Tecnologia na Educação, 2016. v. 5.*

BICUDO, I. et al. Os elementos. *[S.l.]: Unesp, 2009.*

BORBA, M. d. C. Softwares e internet na sala de aula de matemática. X Encontro Nacional de Educação Matemática. Salvador–BA, *2010.*

BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. História da matemática. *[S.l.]: Editora Blucher, 2019.*

BRASIL, P.; MÉDIO, E. Orientaçoes educacionais complementares aos parâmetros curriculares nacionais: Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. MEC–SEMTEC, Brasília, *2002.*

BRASIL, P. C. N. matemática. Brasília: mEC/sEF, *p. 142, 1997.*

BROUSSEAU, G. Introdução ao estudo das situações didáticas: conteúdos e métodos de ensino. *[S.l.]: Ática, 2010.*

BROWN ANNE E THOMAS, K. e. T. G. Conceitos de divisibilidade: sucesso e entendimento. Aprendendo e ensinando teoria dos números: pesquisa em cognição e instrução, *p. 41–82, 2002.*

BRUNO, A. R.; PESCE, L.; BERTOMEU, J. V. C. Teorias da educacao e da comunicacao: fundamentos das praticas pedagogicas mediadas por tecnologias. Revista Teias, *v. 13, n. 30, p. 25, 2012.*

BUZAN, T. Mapas mentais e sua elaboração. [S.l.]: Editora Cultrix, 2005.

CARAÇA, B. d. J. Conceitos fundamentais da matemática. [S.l.]: Gradiva, 2000.

CARNEIRO, R. F.; PASSOS, C. L. B. A utilização das tecnologias da informação e comunicação nas aulas de matemática: limites e possibilidades. Revista Eletrônica de educação, v. 8, n. 2, p. 101–119, 2014.

CORREIA, A. P. Múltiplos e Divisores de um Número Natural - Vivendo a Matemática. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=MVxkuFoRSgc> Acesso: fev, 2020. Vivendo a matemática. 2016.

DANTAS, L. G.; MACHADO, M. J. Tecnologias e educação: Perspectivas para gestão, conhecimento e prática docente. [S.l.]: FTD Editora, 2014.

DANTE, L. R. Didatica da resolução de problemas de matematica, 1a. a 5a. series: para estudantes do curso de Magisterio e professores do 1o. grau. [S.l.]: Ática, 2003.

DOMINGUES, H. H. Fundamentos de aritmética. [S.l.]: Ed. da UFSC, 2009.

EVES, H. Introdução à história da matemática, tradução: Hygino h. Domingues, Campinas-SP: Editora da UNICAMP, 2004.

FAINHOLC, B. Diccionario práctico de tecnología educativa. [S.l.]: Buenos Aires, Argentina: Alfagrama, 2009.

FAVA, R. Educação 3.0: aplicando o pdca nas instituições de ensino. São Paulo: Saraiva, p. 256, 2014.

FERNANDES, D. V. O papel do tutor na ead em uma flipped classroom. Redin-Revista Educacional Interdisciplinar, v. 8, n. 1, 2019.

FREIRE, P. Educar com a mídia: novos diálogos sobre educação. [S.l.]: Editora Paz e Terra, 2014.

FUMIAN, A. M.; RODRIGUES, D. O facebook enquanto plataforma de ensino. Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia, v. 6, n. 2, p. 173–182, 2013.

GABARDO, P.; QUEVEDO, S. R. de; ULBRICHT, V. R. Estudo comparativo das plataformas de ensino-aprendizagem. Encontros Bibli: revista eletrônica de biblioteconomia e ciência da informação, n. 2. sem., p. 65–84, 2019.

GENIAL, M. Critérios de divisibilidade por 2-3-4-5-6-7-8-9. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=5FZ1xqTpndQ> Acesso em: fev, 2020. Matemática Genial. 2016.

GRANDO, R. C. et al. O conhecimento matemático e o uso de jogos na sala de aula. [sn], 2000.

HEFEZ, A. Elementos de Aritmética, 2ª. [S.l.]: Edição. Rio de Janeiro, SBM, 2011.

IFRAH, G.; NÚMEROS, O. A história de uma grande invenção. [S.l.]: São Paulo: Editora Globo, 1998.

LEITE, L. S. Pocho, claudia lopes; aguiar, márcia de medeiros; sampaio, marisa narcizo. Tecnologia Educacional: descubra suas possibilidades na sala de aula. Rio de Janeiro: Vozes, 2003.

LEMOS, A.; PERL, L. Comunicação e tecnologia uma experiência de "classe invertida". Comunicação & Educação, v. 20, n. 1, p. 127–139, 2015.

LÉVY, P. As tecnologias da inteligência: o futuro do pensamento na era da informática. rio de janeiro, ed. 34, 1993. Coleção Trans), 1998.

MATTAR, J. Web 2.0 e redes sociais na educação. São Paulo: Artesanato Educacional, p. 191, 2013.

MORAN, J. Educação híbrida: um conceito-chave para a educação, hoje. Ensino híbrido: personalização e tecnologia na educação. Porto Alegre: Penso, p. 27–45, 2015.

MUNHOZ, A. S. Vamos Inverter Sua Sala De Aula? [S.l.]: Clube de Autores (managed), 2015.

PAIS, L. C. Didática da Matemática: uma análise da influência francesa. [S.l.]: Autêntica, 2016.

PASCUAL, S. D. B. Análisis de la comprensión de divisibilidad en el conjunto de los números naturales. [S.l.]: Universidad de Alicante, 2008.

PERRENOUD, P. Dez novas competências para ensinar; trad. Patrícia Chittoni Ramos. Porto Alegre: Artmed, 2000.

PIMENTA, C. Divisibilidade. Quer que desenhe. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=iiLN64j7gWw> Acesso: fev, 2020. Descomplica. 2019.

RESENDE, M. R. et al. Re-significando a disciplina teoria dos números na formação do professor de matemática na licenciatura. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2007.

ROCHA, E. F. D.; MELLO, I. C. D. Recursos digitais no ensino de química: um estudo de caso sobre os livros didáticos brasileiros. Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas, n. Extra, p. 1649–1654, 2017.

SETTON, M. G. Mídia e educação. [S.l.]: Editora Contexto, 2013.

SILVA, E. L. d. Mídia-educação: Tecnologias digitais na prática do professor. Curitiba: Editora CRV, 2012.

SILVA, G. A. P. d. Flipped Classroom, aprendizagem colaborativa e Gamification: conceitos aplicados em um ambiente colaborativo para ensino de programação. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Pernambuco Acesso em: 23 de outubro de 2020. Disponível em: https://repositorio.ufpe.br/handle/123456789/29694, 2017.

THIOLLENT, M. Metodologia da pesquisa-ação. 108 p. [S.l.]: Editora Cortez, São Paulo, SP, Brasil, 1988.

TOLEDO, M.; TOLEDO, M. Didática de matemática: como dois e dois: a construção da matemática. [S.l.]: FTD, 1997.

TOSCHI, M. S. Tecnologia e educação: contribuições para o ensino. Série-Estudos-Periódico do Programa de Pós-Graduação em Educação da UCDB. Acesso em 23 de outubro de 2020. Disponível em: https://www.serie-estudos.ucdb.br/serie-estudos/article/view/443, 2005.

VALENTE, J. A. A comunicação e a educação baseada no uso das tecnologias digitais de informação e comunicação. UNIFESO-Humanas e Sociais, v. 1, n. 01, p. 141–166, 2014.

VASCONCELLOS, C. d. S. Superação da lógica classificatória e excludente da avaliação: do "é proibido reprovar" ao é preciso garantir a aprendizagem. São Paulo: Libertad*, v. 75, 1998.*

VAZ, P. I. Números Naturais. Brasil Escola. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=kR2coFNP0$_g > Acesso : fev, 2020 Brasilescola.2017.$

VIERA, A.; ALMEIDA, M.; ALONSO, A. Gestão educacional e tecnologia: Formação de educadores. *São Paulo: Avercamp*, 2003.

VIUG, D. *Números Naturais. Matemática básica1. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=sea2YbnrO38> Acesso: fev, 2020. ProEnem - Enem 2020.* 2019.

ZAZKIS, R. Fatores, divisores e múltiplos: explorando a rede de conexões dos alunos. *Pesquisa em educação matemática colegiada*, v. 4, p. 210–238, 2000.

ZAZKIS RINA E CAMPBELL, S. Divisibilidade e estrutura multiplicativa dos números naturais: preservar a compreensão dos professores. *Revista de Pesquisa em Educação Matemática*, p. 540–563, 1996.

ZAZKIS RINA E CAMPBELL, S. R. *Teoria dos números no ensino de matemática: perspectivas e perspectivas*. [S.l.]: Psychology Press, 2006.

Apêndices

APÊNDICE A – Termo de Consentimento Livre e Esclarecido - Pais e/ou Responsáveis

O adolescente, sob sua responsabilidade está sendo convidada (o) pela professora Luciana Sedraz Silva, pesquisadora da Universidade Federal do Recôncavo da Bahia – UFRB, a participar de um estudo, intitulado Google Classroom versus Sala de Aula Invertida: uma aplicação no ensino de divisibilidade dos números naturais, que será aplicado nas aulas Matemática.

O estudo é importante para investigar a ferramenta educacionais Google Sala de Aula com a contribuição da Metodologia Colaborativa Sala de Aula Invertida no apoio ao processo de ensino-aprendizagem do conteúdo de matemática.

Com esta pesquisa busca-se inserir metodologias para o ensino da matemática que atendam às necessidades dos estudantes, que desde muito cedo estão inseridos no contexto tecnológico.

Caso Senhor(a) autorize a participação do adolescente nesta pesquisa, será necessário que o estudante participe acessando através da ferramenta Google Sala de Aula os conteúdos disponibilizados online, respondendo um questionário inicial, e participe de uma entrevista com o professor. O que acontecerá em aproximadamente 8 aulas de 50 minutos.

Os benefícios esperados com esta pesquisa é conduzir a uma melhora no aprendizado dos conteúdos de matemática, em que o participante da pesquisa através da metodologia proposta na aula tem a possibilidade de reflexão, participação ativa, ser protagonista de seu aprendizado.

A pesquisadora Profª Luciana Sedraz Silva, responsável por este estudo poderá ser localizada via email: luasedraz@hotmail.com, ou pessoalmente no colégio pela manhã e noite, para esclarecer eventuais dúvidas que o Senhor/ Senhora possa ter e fornecer-lhes as informações que queiram, antes, durante ou depois de encerrado o estudo.

A participação do adolescente neste estudo é voluntária, portanto, é possível desistir a qualquer momento e solicitar que lhe devolvam este Termo de Consentimento Livre e Esclarecido assinado.

As informações relacionadas ao estudo poderão ser divulgadas pela pesquisadora, como sendo a única responsável pela pesquisa, no entanto, será feito sob forma codificada, para que a identidade do participante seja preservada e mantida a confidencialidade.

O material obtido – questionários, entrevistas, imagens e vídeos, será utilizado unica-

mente para essa pesquisa e será destruído/descartado (questionários serão incinerados, e os áudios, vídeos e imagens excluídos).

As despesas necessárias para esta pesquisa tais como cópias impressas, imagens e vídeos, não são de sua responsabilidade. O Senhor/Senhora também não receberá qualquer valor em dinheiro pela participação do estudante.

Quando os resultados forem publicados, não aparecerão nome do estudante, e sim um código.

Autorizo ( ), Não autorizo ( ) o uso de imagem, áudio, vídeo entre outros do adolescente para fins de pesquisa, com seu uso restrito a observações para análise da aprendizagem, sendo excluídos através de incineração quando couber e/ou deletados.

Eu, ... li esse termo de consentimento e compreendi a natureza e objetivo do estudo do qual autorizo a participação.

A explicação que recebi menciona os riscos e benefícios. Eu entendi que o estudante é livre para interromper a participação a qualquer momento sem justificar sua decisão e sem qualquer prejuízo para mim e para o estudante.

Eu concordo voluntariamente em participar deste estudo.

Valença, ... de .... de 2020.

....

Assinatura do Pai ou Responsável Legal

....

Pesquisadora Responsável

APÊNDICE B – Termo de Assentimento Livre e Esclarecido

Título do Projeto:
Google Classroom versus Sala de Aula Invertida: uma aplicação no ensino de divisibilidade dos números naturais.

Pesquisadora Responsável: Profº Luciana Sedraz Silva.

Local da Pesquisa: Colégio Estadual João Cardoso dos Santos.

Endereço: Rua Conjunto Habitacional de Valença. Rua A. CEP: 45400-000 Valença-Bahia.

O que significa assentimento?

Assentimento significa CONCORDAR; assim se você menor de idade, deseja fazer parte desta pesquisa, precisa ler este Termo de Assentimento e assinar sua concordância em participar do estudo. Você terá seus direitos respeitados e receberá todas as informações sobre o estudo por mais simples que possam parecer.

Informação ao participante:

Você está sendo convidado (a) a participar de uma pesquisa, com o objetivo de discutir o uso de metodologia colaborativa sala de aula invertida nas aulas de matemática. Esta pesquisa é importante porque busca estudar os benefícios (ou não) do uso dessa metodologia como recursos pedagógicos. Os benefícios da pesquisa são: descrever os efeitos de uma metodologia inovadora para se trabalhar os conteúdos matemáticos e integrar as tecnologias digitais ao processo de ensino-aprendizagem visando à melhoria do ensino. O estudo será desenvolvido por meio de uma sequência de aulas preparadas sobre o conteúdo de divisibilidade dos números naturais, onde você participará de atividades que envolvem o uso da ferramenta Google Sala de Aula. Essas aulas serão registradas por meio de vídeos, atividades, jogos e situações problemas, disponibilizado na plataforma.

O que devo fazer se eu concordar voluntariamente em participar da pesquisa?

Caso você aceite participar, será necessário apenas realizar as atividades propostas em sala conforme as orientações, permitir o recolhimento das atividades desenvolvidas e utilizar o Google sala de aula. Caso não possua um dispositivo para acessar a plataforma, ou não queira utilizar o seu dispositivo móvel, você pode participar da pesquisa da mesma maneira, utilizando os equipamentos disponíveis no colégio (chromebook). A sua participação é voluntária. Caso *você opte por não participar não terá nenhum prejuízo.*

Contato para dúvidas:

Se você ou os responsáveis por você tiverem dúvidas com relação ao estudo ou aos riscos relacionados a ele, você deve procurar a pesquisadora Luciana Sedraz Silva por email: luasedraz@hotmail.com, ou no próprio colégio.

DECLARAÇÃO DE ASSENTIMENTO DO PARTICIPANTE

Eu li e discuti com a pesquisadora responsável pelo presente estudo os detalhes descritos nesse documento. Entendo que eu sou livre para aceitar ou recusar e que posso interromper a minha participação a qualquer momento sem dar uma razão. Eu concordo que os dados coletados para o estudo sejam usados para o propósito acima descrito.

Eu entendi a informação apresentada nesse TERMO DE ASSENTIMENTO. Eu tive a oportunidade para fazer perguntas e todas as minhas perguntas foram respondidas.

Eu receberei uma cópia assinada e datada deste documento.

Valença, ... de .... de 2020.

....

Assinatura do(a) Estudante

....

Profª Luciana Sedraz Silva

APÊNDICE C – Questionário Inicial

CARO ESTUDANTE:

O referido questionário tem como objetivo investigar a ferramenta educacional Google Sala de Aula com a contribuição da Metodologia Colaborativa Sala de Aula Invertida no apoio ao processo de ensino-aprendizagem do conteúdo de matemática.

Ao responder, afirma estar ciente que concorda em participar voluntariamente desta pesquisa, sendo que a sua privacidade será respeitada com os dados mantidos em sigilo, apesar de sua identificação estar sendo solicitada para arquivos da pesquisadora.

Nome: ....

1. Qual é a sua idade? ....

2. Sexo:

( ) Masculino

( )Feminino

( ) Prefiro não responder

3. Quantas pessoas moram em sua casa?

...

4. Você tem acesso a internet em sua casa a notebook, computador, tablet ou smartphone?

( ) Sim

( ) Não

Quais?

...

5. Esses dispositivos pertencem a você ou a alguém de sua família?

...

6. Em sua casa estes dispositivos têm acesso à internet?

( ) Sim

( ) Não

7. Qual a finalidade de uso destes equipamentos no seu dia a dia?

( ) Jogos

( ) Sites educativos

( ) Redes sociais (Facebook, Instagram, Snapchat ,etc)

( ) Vídeos (Youtube)

( ) Comunicação (Whatsapp, Messenger)

( ) Trabalhos escolares e pesquisas

( ) Outros. Quais? ....

8. Quanto do seu tempo livre você passa utilizando essas tecnologias em sua casa?

( ) Menos de 1 hora por dia

( ) 1 hora por dia

( ) 2 horas por dia

( ) 3 horas por dia

( ) Mais de 3 horas por dia

9. Você já utilizou dispositivos móveis (Tablet, Notebook, Smartphone, Chromebook) nas aulas de matemática?

( ) Sim

( ) Não

Se você respondeu sim, qual a finalidade do uso?

..

10. Você recebe ajuda de sua família quando está realizando suas tarefas de casa?

( ) Sim

( ) Não

( ) Às Vezes

11. Você já teve oportunidade de realizar as tarefas de matemática com algum dispositivo móvel (notebooks, computadores, tablets ou smartphones)?

( ) Sim

( ) Não

12. Qual a sua opinião sobre utilizar os dispositivos móveis para aprender matemática?

..

..

..

APÊNDICE D – Sequência didática - parte 1

Habilidade da BNCC

- *Resolver e elaborar problemas com números naturais, envolvendo as ideias de múltiplos, divisores e divisibilidade.*

Objetivo específico

- *Resolução de problemas abordando os conceitos de múltiplos e divisores de um número natural.*

Conceito-chave

- *Relação entre múltiplos e divisores.*

Recursos necessários

- *Lápis, borracha e caderno.*

Tempo sugerido

- *50 minutos*

Orientação

- *Distribuir o texto abaixo em sala de aula ou projetar no datashow.*

Orientações

- *Após a leitura do balão abaixo, deixe claro a importância dessas informações para o surgimento do ano bissexto. Comentar sobre o requisito para que um ano seja bissexto.*
- *Após essa reflexão, deixe bem claro que: Todo ano bissexto é sempre múltiplo do número 4.*
- *Se for múltiplo de 100, ele só será bissexto se ele for também múltiplo de 400.*

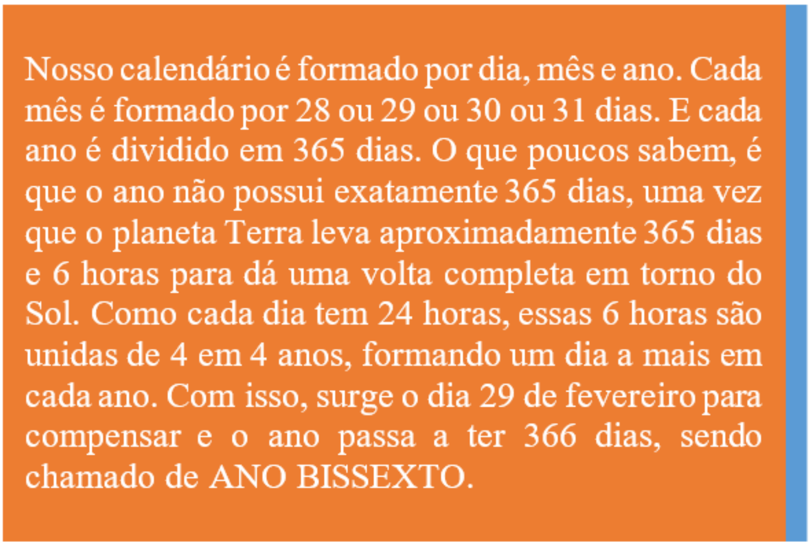


Figura 15 – Sequência Didática - parte 1

Fonte: Autora, 2020.

Alvo

Analisar a presença de padrões envolvendo múltiplos em situações cotidianas dos estudantes.

Discuta com a turma:

- *Você já tinha ouvido falar sobre anos bissextos?*
- *O que diferencia um ano bissexto dos outros "anos normais"?*

Atividade I:

Com base nas informações adquiridas sobre anos bissextos, responda:

1. É possível afirmar que o ano de 1896 foi um ano bissexto? E o que ano que você nasceu, foi ano bissexto?

2. Os Jogos Olímpicos são eventos esportivos que ocorre a cada 4 anos, tendo ocorrido em Barcelona, na Espanha, no ano 1992. Com base nisso, é possível afirmar que os Jogos Olímpicos de Barcelona ocorreram em um ano bissexto? Aqui no Brasil, os Jogos Olímpicos, sediados no Rio de Janeiro, ocorreram em 2016. Esse ano foi bissexto?

3. A Copa do Mundo de Futebol também acontece a cada 4 anos, tendo ocorrido a primeira vez no ano de 1930. Quantas Copas do Mundo ocorreram até o ano de 2000? E quantas ocorreram em ano bissexto?

Orientação

Imprima a atividade I, entregue para os estudantes e leia com eles as situações apresentadas na atividade.

A primeira situação (1) mostra uma pergunta direta em relação a duas datas específicas, como forma de verificação rápida se os anos em questão são bissextos ou não.

As outras duas situações fazem referências a eventos reais: Jogos Olímpicos (2) e Copa do Mundo de Futebol (3). Algumas problemáticas são lançadas a fim de verificar se esses eventos ocorreram em datas coincidentes com anos bissextos.

Propósito

Analisar datas presentes no cotidiano para verificar a existência de anos bissextos nas mesmas.

Discuta com a turma:

- *2020 é um ano de Jogos Olímpicos, que ocorrerão em Tóquio, no Japão. 2020 também é um ano bissexto. Se, por algum problema, os Jogos Olímpicos não acontecerem nesse ano bissexto, existe a possibilidade de que em algum outro ano esse evento ocorra em ano bissexto?*
- *É possível afirmar que ao ocorrer em um ano bissexto, a Copa do Mundo de Futebol sempre ocorrerá em anos bissextos? Por quê?*

APÊNDICE E – Mapa mental

Essa atividade tem por finalidade a construção de um mapa metal sobre "Múltiplos e divisores dos números naturais".

Para isso, você precisará dos seguintes materiais:

- *Uma folha de papel ofício ou do próprio caderno.*
- *Lápis, caneta e borracha.*
- *Lápis de cor ou canetas coloridas.*
- *Imagens relacionadas ao conteúdo (opcional).*

De posse dos materiais, vamos começar a montar nosso mapa mental.

Passo 1: Título

Comece seu mapa mental com a escolha do título. Lembre que seu mapa mental tem como objetivo uma organização dos conceitos estudados de múltiplos e divisores dos números naturais. Então, seja criativo!!!!

Exemplos: Múltiplos e divisores; Números naturais...

Passo 2: Principais ramificações e ramificações seguintes

Esse passo depois do título, é de suma importância. Você terá que pensar em algo que é consequência do título.

Exemplo: Múltiplos – multiplicação – soma; Divisores – divisão – subtração...

Passo 3: Símbolos

São elementos acrescentados, que possam lembrar o título ou suas ramificações.

Exemplo: Múltiplos – x (xis) ou . (ponto).

Segue abaixo um mapa mental sobre divisibilidade.

Figura 16 – Mapa mental - Divisibilidade.

Fonte: Autora, 2020.

APÊNDICE F – Sequência didática - parte 2

Questão 1: Encontre os divisores naturais dos números abaixo:

a) 16

b) 400

c) 75

Questão 2: Olhando para a multiplicação 13 x ? = 117, qual é o número que está escondido pela interrogação?

....

Questão 3: Com os números apresentados nos cartões abaixo, faça todas as multiplicações possíveis, mas sempre de dois em dois números, depois escreva seus resultados e em seguida responda as questões.

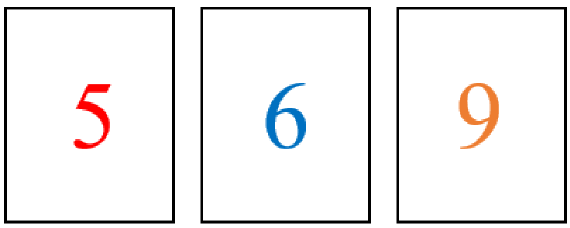


Figura 17 – Atividade 1

Fonte: Autora, 2020.

a) Quantos resultados diferentes são encontrados?

....

....

b) Os resultados encontrados são múltiplos de quais números?

....

....

....

....

c) Ao dividir os resultados encontrados por 5, 6 e 9 essas divisões são ou não são exatas? Quais são os resultados e os restos destas operações?

....

....

....

....

d) Ao dividir os resultados encontrados por 2, essas divisões são ou não são exatas? Quais os resultados e os restos destas operações?

....

....

....

....

Questão 4: Sabendo que:

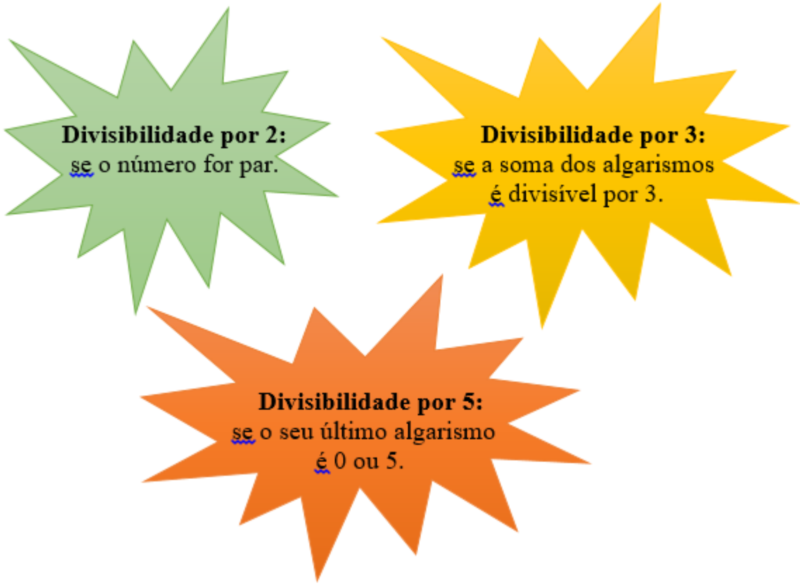


Figura 18 – Divisibilidade por 2, 3 e 5

Fonte: Autora, 2020.

Qual dos números abaixo é divisível por 2, 3 e 5 ao mesmo tempo?

a) 99480

b) 590

c) 235

d) 5200

APÊNDICE G – Forma de Acesso ao Conteúdo

Estudante: ....

Data: ....

Aula: ....

Responda nas linhas abaixo as perguntas:

1. Você conseguiu utilizar a ferramenta do Google Sala de Aula?

....

2. Como você acessou o conteúdo:

( ) laptop / notebook

( ) netbook

( ) tablet

( ) smartphone

( ) computador fixo

( ) não acessei o conteúdo

3. Você teve alguma dificuldade em acessar a plataforma Google Sala de Aula?

....

....

....

4. Você achou fácil acessar o conteúdo?

....

....

....

5. Você compreendeu o conteúdo que assistiu?

....

....

....

6. Ficou alguma dúvida sobre o conteúdo? Qual?

....

....

....

7. O que você achou de acessar o conteúdo dessa forma?

....

....

....

APÊNDICE H – Questionário Final

CARO ESTUDANTE:

O referido questionário tem como objetivo investigar como foi o acesso aos conteúdos disponibilizados na plataforma do Google Sala de Aula. Ao responder, afirma estar ciente que concorda em participar voluntariamente desta pesquisa, sendo que a sua privacidade será respeitada com os dados mantidos em sigilo, apesar de sua identificação estar sendo solicitada para arquivos dos pesquisadores.

1. Nome: ....

2. Você utilizou a plataforma Google Sala de Aula para acessar o conteúdo escolar proposto?

( ) Sim

( ) Não

( ) Ás vezes.

Qual foi o dispositivo móvel que você utilizou?

..

3. O estudo em matemática através dos conteúdos disponibilizados para serem acessados na plataforma facilitou o seu aprendizado?

( ) Sim

( ) Não

4. Qual foi o ponto positivo ao utilizar a plataforma do Google Sala de Aula?

..

5. Qual foi o ponto negativo ao utilizar a plataforma do Google Sala de Aula?

..

6. Em relação à divisibilidade, acessar os conteúdos online ajudou na realização das atividades em sala?

( ) Sim

( ) Não

7. Você considera importante utilizar a ferramenta do Google Sala de Aula em outros conteúdos?

...

8. Relate como você gostaria que fosse utilizada a plataforma do Google Sala de Aula na escola.

...

...

...

9. O que você achou de ter acesso ao conteúdo antes da professora explicá-lo em sala de aula?

...

...

...

10. Escreva se essa forma de acessar o conteúdo antes da aula foi interessante para você, e como ajudou na sua aprendizagem.

...

...

...

...

Universidade Federal do Recôncavo da Bahia - UFRB
Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas / Colegiado do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

---

Rua Rui Barbosa, 710, Centro, Campus Universitário de Cruz das Almas, Cruz das Almas - BA
CEP: 44380 -000
Telefone: (75) 3621-2350
<http://www.ufrb.edu.br/profmat/>