Universidade Federal do Recôncavo da Bahia
Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas
Programa de Mestrado em Matemática em Rede Nacional
Dissertação de Mestrado

A Fatoração *LU* de uma Matriz

ANDRÉ RICARDO DE OLIVEIRA ROSA

Cruz das Almas-Bahia
Março de 2021

A Fatoração *LU* de uma Matriz

ANDRÉ RICARDO DE OLIVEIRA ROSA

Orientador : Prof. Dr. Danilo de Jesus Ferreira

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Recôncavo da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Cruz das Almas-Bahia

Março de 2021

FICHA CATALOGRÁFICA

R788f

Rosa, André Ricardo de Oliveira.
A Fatoração LU de uma matriz: fatoração lu / André Ricardo de Oliveira Rosa._ Cruz das Almas, Bahia, 2021.
33f.

Orientador: Danilo de Jesus Ferreira.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas, Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT.

1.Matemática – Matrizes. 2.Matemática – Problemas, exercícios, etc. I.Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas. II.Título.

CDD: 512

Ficha elaborada pela Biblioteca Universitária de Cruz das Almas - UFRB.
Responsável pela Elaboração - Antonio Marcos Sarmento das Chagas (Bibliotecário - CRB5 / 1615).
(os *dados para catalogação foram enviados pelo usuário via formulário eletrônico*).

A FATORAÇÃO *LU* DE UMA MATRIZ

ANDRÉ RICARDO DE OLIVEIRA ROSA

ORIENTADOR : PROF. DR. DANILO DE JESUS FERREIRA

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Recôncavo da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

BANCA EXAMINADORA:

Danilo de Jesus Ferreira

Prof. Dr. Danilo de Jesus Ferreira (Orientador)
UFRB

Julianna Pinele Santos Porto

Profa. Dra. Julianna Pinele Santos Porto
UFRB

Mariane Pigossi

Profa. Dra. Mariane Pigossi
UFES

Cruz das Almas-Bahia

Março de 2021

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus, pois Ele que me fortaleceu durante esse processo.

Aos meus colegas, por serem sempre incentivadores e ajudadores.

A Josimar Rocha (in memoriam) por ter me motivado.

A Roque Sérgio , meu amigo que, foi tão presente e importante nessa contrução.

Aos professores do PROFMAT, eles foram fundamentais e sempre disponíveis e dispostos a ajudar.

Em especial ao meu Orientador e Professor Dr. Danilo de Jesus Ferreira que esteve sempre disposto para me ajudar com paciência conhecimento e dedicação, tanto nas disciplinas do curso como no trabalho, sem ele esse trabalho não teria sido possível. Você merece meu eterno agradecimento!

Resumo

Este trabalho tem como foco principal, a fatoração LU. Mas para termos um bom entendimento nesse tema, vamos abordar também os conceitos de matrizes, operações elementares e escalonamento. Com esses pré-requisitos, veremos que a fatoração LU é uma aplicação de uma série de operações elementares à matriz identidade I_n. Veremos também algumas aplicações dos conceitos acima, como por exemplo, fatoração LU sem transposição de linhas, a resolução de sistemas lineares pela fatoração LU, matriz de permutação e o procedimento para o cálculo da inversa de uma matriz.

Palavras-chave: Operações Elementares. Escalonamento. Fatoração LU.

Abstract

This work has as main focus, the *LU* factorization. But in order to have a good understanding of this topic, we will also address the concept of matrices, elementary operations and scheduling. With these prerequisites, we will see that the *LU* factorization is an application of one of the elementary operations to the identity matrix I_n. We will see some applications of the concepts above, such as, *LU* factorization without transposition of lines, the resolution of linear systems by *LU* factorization, permutation matrix and the procedure of calculating the inverse of the matrix.

Keywords: Elementary Operations. Scheduling. *LU* Factorization.

Sumário

Indrodução

Leciono matemática há 15 anos no ensino fundamental e médio, e venho observando as dificuldades dos alunos na resolução de sistema lineares. Os livros didáticos atuais trazem desde o ensino fundamental os métodos de adição e substituição que facilitam na resolução dos sistemas lineares 2×2, mas os deixam limitados. Já nos livros didáticos do ensino médio, para os sistemas 3×3 predominam a regra de Cramer e Laplace, que além de trabalhoso também os limitam.

Uma certa vez estive pensando como esses alunos resolveriam um sistema com número maior de equações de maneira mais prática? Daí resolvi pesquisar e encontrei a Fatoração LU, um método que transforma uma matriz A em um produto LU, sendo L uma matriz triangular inferior e U uma matriz escalonada. Esse procedimento facilita a resolução de sistemas uma vez que nos leva a resolução de sistemas equivalentes bem mais simples.

Este trabalho foi dividido em quatro capítulos. No Capítulo 1 temos os pré-requisitos que foi falado sobre alguns tipos de matrizes, operações elementares e sistema lineares. No Capítulo 2, abordamos o processo de eliminação gaussiana e exibimos um método para a inversão de uma matriz. Por fim, no Capítulo 3 estudamos o tema principal, a fatoração LU de uma matriz.

Neste trabalho buscaremos o método para resolução de sistemas de equações lineares $AX = B$, veremos a resolução de sistemas lineares pelo método fatoração LU. Este método é um recurso para resolução de problemas em várias áreas como na matemática, economia, engenharia e computação por exemplo. Com a necessidade de resolução de sistemas lineares foram criadas ao longo dos anos diferentes métodos para obtermos resultados mais precisos. Para a obtenção desta fatoração, serão apresentados alguns resultados sobre matrizes triangulares e matrizes elementares considerados incomuns nos livros didáticos básicos adotados no Brasil.

Capítulo 1

Pré-requisitos

O estudo da Fatoração LU de uma matriz tem como base os conceitos de matriz, operações elementares e sistemas lineares. Por esse motivo, nesse capítulo serão apresentados os principais conceitos e resultados necessários para o desenvolvimento desta teoria.

1.1 Matrizes

Dados m e n em $\mathbb{N}$, definimos uma *matriz real de ordem* $m \times n$, como uma tabela formada por elementos de $\mathbb{R}$ distribuídos em m linhas e n colunas. Estes elementos de $\mathbb{R}$ são as entradas da matriz e o conjunto das matrizes reais $m \times n$ será denotada por $M(m \times n)$.
A localização dos elementos de uma matriz é dada por a_{ij}, onde i representa *i-ésima* linha e j a *j-ésima* coluna: Uma típica matriz real $m \times n$ será denotada então pelo quadro

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Também podemos representar A por $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, ou simplesmente por $A = [a_{ij}]$ quando a ordem da matriz for conhecida. Quando o número de linhas m coincide com os números de colunas n, isto é, quando $m = n$, dizemos que a matriz é *quadrada* e que possui ordem n.

Exemplo. As matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}, \ C = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 4 & -5 \end{bmatrix}$$

são de ordem 4×3, 3×3 e 1×5, respectivamente.

Dada uma matriz quadrada de ordem n

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

os elementos a_{ii}, com $i = 1, \cdots n$, formam a *diagonal principal* de A. Quando todos os elementos da diagonal principal forem iguais a 1 e os demais iguais a zero, obtemos a *matriz identidade* de ordem n, denotada por I_n:

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Um importante tipo de matriz é a *matriz triangular superior*. Ela é definida como uma matriz quadrada na qual todos seus elementos abaixo da diagonal principal são nulos. Assim ela pode ser representada por

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Do mesmo modo, uma *matriz triangular inferior* é uma matriz quadrada em que todos seus elementos acima da diagonal principal são iguais a zero:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Dada uma matriz $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, definimos a *transposta* de A, e a denotamos por A^T, como sendo a matriz $A^T = [a_{ji}]_{n \times m}$, para todo $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$.

Exemplo. Dada a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 7 & -2 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

a sua transposta será a matriz

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 7 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dados dois vetores $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)$, definimos o *produto interno* de x por y como sendo o número real

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

De posse deste conceito, definiremos abaixo o produto de duas matrizes.

Sejam $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ e $B = [b_{ij}]_{n \times p}$ duas matrizes. O produto de A por B, denotado por AB, é definido como a matriz $C = [c_{ij}]_{m \times p}$ tal que

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + \cdots + a_{in} b_{nj}$$

para todo $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq p$.
Observe que na definição acima, o número de colunas de A é igual ao número de linhas de B. Assim, se A e B forem duas matrizes, digamos, 3×4 e 4×2, respectivamente, então o produto estará bem definido e será uma matriz de ordem 3×2. Neste exemplo, note que não seria possível efetuar o produto BA.

Uma outra importante classe de matrizes são as *matrizes inversíveis*. Dizemos que uma matriz quadrada A de ordem n é *inversível* , quando existe uma matriz quadrada B de ordem n satisfazendo as relações

$$AB = BA = I_n.$$

Neste caso diremos que B é a *inversa* de A (e que A é a inversa de B) e a denotamos simplesmente por A^{-1}.

Exemplo. Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ e considerando $B = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ é fácil verificar que $AB = BA = I_2$, mostrando assim que A é inversível com inversa B.

O teorema a seguir nos fornece algumas propriedades das matrizes inversas. A sua demonstração pode ser encontrada em [2].

Teorema 1.1. *Sejam A e B duas matrizes inversíveis. Então são válidas as seguintes propriedades:*

(1) $(A^{-1})^{-1} = A$;

(2) *AB é inversível e* $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

1.2 Operações Elementares

Dada uma matriz $A \in M(m \times n)$, denotaremos por L_i a *i-ésima* linha de A para cada $i = 1, \ldots, m$. Definimos as *operações elementares* nas linhas da matriz A da seguinte forma:

(1) Permutar as linhas L_i e L_j, indicado por $L_i \leftrightarrow L_j$.

(2) Somar a uma linha L_i um múltiplo αL_j da linha L_j com $i \neq j$, indicado por $L_i \to L_i + \alpha L_j$.

(3) Multiplicar uma linha L_i por um número real não-nulo α, indicada por $L_i \to \alpha L_i$

O exemplo a seguir ilustra os três tipos de operações elementares definidas acima.

Exemplo. Considerando a matriz

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

e utilizando as operações $L_1 \leftrightarrow L_3, L_2 \to \frac{1}{2}L_2$ e $L_2 \to L_2 - L_1$ obtemos, respectivamente, as matrizes,

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} L_1 \leftrightarrow L_3 \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} L_2 \to \frac{1}{2}L_2 \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & \frac{1}{2} & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \to L_2 - L_1 \\ \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Dada uma matriz A e uma operação elementar e, denotaremos por $e(A)$ a matriz obtida de A através da operação e. Uma importante propriedade dos três tipos de operações acima é que, cada uma delas é reversível e a *operação inversa* é do mesmo tipo.

Teorema 1.2. *Para toda operação elementar e existe uma única operação elementar e', do mesmo tipo que e, tal que*

$$e(e'(A)) = e'(e(A)) = A$$

para toda matriz $A \in M(m \times n)$.

Demonstração. Seja $A \in M(m \times n)$ uma matriz e e uma operação elementar. Se e for do tipo $L_i \leftrightarrow L_j$, tome $e' = e$. Se e for do tipo $L_i \to L_i + \alpha L_j$ tome e' como sendo a operação $L_i \to L_i - \alpha L_j$. E por fim, se e for do tipo $L_i \to \alpha L_i$ com $\alpha \neq 0$, tome e' como sendo $L_i \to \frac{1}{\alpha} L_i$. Então, qualquer um dos três casos temos que

$$e(e'(A)) = e'(e(A)) = A$$

e a operação e' é claramente única. □

Uma *matriz elementar de ordem m* é uma matriz quadrada E de ordem m obtida da matriz identidade I_m por meio de uma operação elementar e, isto é,

$$E = e\,(I_m)\,.$$

Exemplo. A matriz identidade é uma matriz elementar e as matrizes

$$e(I_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \ \text{ onde } \ e : L_1 \leftrightarrow L_2$$

e

$$e(I_3) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ \text{ onde } \ e : L_1 \to L_1 + L_2$$

são matrizes elementares de ordem 2 e 3, respectivamente.

Teorema 1.3. *Seja $A \in M(m \times n)$ uma matriz e e uma operação elementar sobre A. Então*

$$e(A) = EA$$

onde $E = e\,(I_m)$ é uma matriz elementar.

Demonstração. Sem perda de generalidade, suporemos que a operação elementar e é do tipo $L_i \to L_i + \alpha L_j$ (os outros dois casos são análogos). Então a i-ésima linha com $i < j$ da matriz $e(A)$ é o vetor

$$\left(a_{i1} + \alpha a_{j1}, a_{i2} + \alpha a_{j2}, \ldots, a_{in} + \alpha a_{jn}\right) \tag{1.1}$$

as demais são iguais às de A. Analogamente, a i -ésima linha de E é o vetor

$$(0, \ldots, 0, 1, \ldots, \alpha, 0 \ldots, 0) \tag{1.2}$$

onde o 1 encontra-se na entrada i e α na entrada j, e as demais linhas são iguais às de I_m. Assim, ao se efetuar o produto EA obtemos uma matriz cujas linhas são iguais às de A com exceção da i-ésima, a única que foi modificada. Agora pela definição de produto de matrizes, o ij-ésimo elemento de EA é dado pelo produto interno da i-ésima linha de E pela j-ésima coluna de A, e portanto segue de (1.2) que ele é igual a

$$\begin{aligned} 0 \cdot a_{ij} + \cdots + 0 \cdot a_{i-1j} + 1 \cdot a_{ij} + 0 \cdot a_{j-ij} + \cdots + 0 \cdot a_{j-1j} + \alpha a_{jj} + 0 \cdot a_{j+ij} + \cdots + 0 \cdot a_{mj} \\ = a_{ij} + \alpha \cdot a_{jj}. \end{aligned}$$

Logo, o ij-ésimo elemento de EA é o j-ésimo elemento da i-ésima linha de $e(A)$ conforme (1.1) e portanto, a i-ésima linha de EA é igual a i-ésima de $e(A)$. Isto mostra que $e(A) = EA$ finalizando a demonstração. □

Corolário 1.1. *Toda matriz elementar é inversível e sua inversa também é uma matriz elementar.*

Demonstração. Com efeito, sejam $E = e(I_m)$ uma matriz elementar e e', a operação elementar inversa de e garantido pelo Teorema 1.2 .Então, se $E' = e'(I_m)$ segue do Teorema 1.3 que

$$I_m = e'(e(I_m)) = e'(E) = e'(I_m)E = E'E$$

e

$$I_m = e(e'(I_m)) = e(E') = e(I_m)E' = EE'.$$

Portanto E é inversível e sua inversa é E'. □

O corolário acima nos ensina como inverter uma matriz elementar: se $E = e(I_m)$ for uma matriz elementar, então sua inversa será a matriz $E^{-1} = e'(I_m)$, onde e' é a operação elementar inversa de e.

Exemplo. A matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

é inversível por ser uma matriz elementar. De fato, definindo $e_1 : L_1 \leftrightarrow L_2$ temos que $A = e_1(I_3)$. Pelo corolário acima, $A^{-1} = e_1'(I_3)$, onde $e_1' : L_2 \leftrightarrow L_1$ é a operação inversa de e_1, ou seja,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Corolário 1.2. *Para cada $j = 1, ..., m$, dados números reais $\alpha_{j+1}, \alpha_{j+2}, ..., \alpha_m$, a matriz de ordem m*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & \ddots & & & 0 \\ \vdots & & \mathbf{1} & & \vdots \\ 0 & \cdots & \alpha_{j+1} & & 0 \\ 0 & & \alpha_{j+2} & & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \cdots \\ 0 & & \alpha_m & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

onde o **1** *encontra-se na j-ésima linha e j-ésima coluna, é inversível e sua inversa é a matriz*

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & \ddots & & & 0 \\ \vdots & & \mathbf{1} & & \vdots \\ 0 & \cdots & -\alpha_{j+1} & & 0 \\ 0 & & -\alpha_{j+2} & & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \cdots \\ 0 & & -\alpha_m & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Demonstração. Com efeito, fixado $j = 1, \ldots, m$ e considerando as operações elementares

$$e_k : L_k \to L_k + \alpha_k L_j, \quad k = j+1, \cdots, m$$

segue que

$$\begin{aligned} A &= e_m(e_{m-1}(\cdots e_{j+2}(e_{j+1}(I_m))\cdots)) \\ &= e_m(I_m)e_{m-1}(I_m)\cdots e_{j+2}(I_m)e_{j+1}(I_m)I_m \end{aligned}$$

com o produto sendo comutativo. Analogamente,

$$e'_k : L_k \to L_k - \alpha_k L_j, \quad k = j+1, \cdots, m$$

são inversas das $e_{k,s}$ e, aplicadas a I_m produzem a matriz de ordem m

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & \ddots & & & 0 \\ \vdots & & 1 & & \vdots \\ 0 & \cdots & -\alpha_{j+1} & & 0 \\ 0 & & -\alpha_{j+2} & & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \cdots \\ 0 & & -\alpha_m & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

donde

$$\begin{aligned} B &= e'_m(e'_{m-1}(\cdots e'_{j+2}(e'_{j+1}(I_m))\cdots)) \\ &= e'_m(I_m)e'_{m-1}(I_m)\cdots e'_{j+2}(I_m)e'_{j+1}(I_m)I_m \end{aligned}$$

com o produto sendo comutativo. Além disso, aplicando as $e'_{k,s}$ em A obtemos

$$e'_{j+1}(e'_{j+2}(\cdots e'_{m-1}(e'_m(A))\cdots)) = I_m$$

donde

$$e'_{j+1}(I_m)e'_{j+2}(I_m)\cdots e'_{m-1}(I_m)e'_m(I_m)A = I_m$$

e consequentemente

$$BA = I_m.$$

Da mesma forma se verifica que $AB = I_m$ e portanto, A é inversível com $A^{-1} = B$. □

Exemplo. Considerando a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

segue do Corolário 1.2 que a inversa de A é a matriz

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

O Corolário 1.2 será utilizado na fatoração LU.

1.3 Sistemas Lineares

Um *sistema de equações lineares* com m equações e n incógnitas é uma lista do tipo

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = b_m \end{cases} \tag{1.3}$$

onde os elementos a_{1j} e b_1 $(1 \leq i \leq m)$ são números reais. O sistema (1.3) pode ser representado na forma matricial

$$AX = B$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \; e \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Uma solução do sistema (1.3) é uma n-upla $X = \{x_1, \cdots, x_n\}$ que satisfaz as equações de (1.3) e a coleção de todas as soluções é chamado de *conjunto solução* do sistema.

Um fato bastante interessante na solução de sistemas lineares é que, ao se efetuar qualquer sequência de operações elementares na *matriz aumentada* de (1.3)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

obtém-se uma nova matriz aumentada

$$\begin{bmatrix} a'_{11} & \cdots & a'_{1n} & b'_1 \\ a'_{21} & \cdots & a'_{2n} & b'_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a'_{m1} & \cdots & a'_{mn} & b'_m \end{bmatrix}$$

cujo sistema correspondente

$$\left\{\begin{array}{lllllll} a'_{11}x_1 & + & \cdots & + & a'_{1n}x_n & = b'_1 \\ a'_{21}x_1 & + & \cdots & + & a'_{2n}x_n & = b'_2 \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ a'_{m1}x_1 & + & \cdots & + & a'_{mn}x_n & = b'_m \end{array}\right.$$

possui o mesmo conjunto solução de (1.3). Em outras palavras, as operações elementares transformam um sistema linear em um *sistema equivalente*, isto é, em um sistema com um mesmo conjunto solução.

Esta observação será utilizada quando estudarmos o escalonamento de uma matriz, o que nos permitirá passar de uma matriz inicial para uma matriz ″extremamente″simples de modo a facilitar a resolução de um sistema linear.

Capítulo 2

Eliminação Gaussiana

Dados um espaço E, e vetores $v_1, \cdots, v_m \in E$, uma expressão da forma

$$\alpha_1 v_1 + \cdots \alpha_m v_m$$

onde $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ são escalares é dita *combinação linear* de $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$. Uma lista de vetores $v_1, \cdots, v_m \in E$ é dito linearmente independente (*L.I.*) se para toda combinação linear nula destes vetores

$$\alpha_1 v_1 + \cdots \alpha_m v_m = 0$$

tivermos $\alpha_1 = \cdots = \alpha_m = 0$. Caso contrário, diremos que a lista $v_1, \cdots, v_m$ é linearmente dependente (*L.D.*).

Teorema 2.1. *Sejam $v_1, \ldots, v_m$, vetores não-nulos de E. Se nenhum deles for combinação linear dos subsequentes, então o conjunto $X = \{v_1, \ldots, v_m\}$ é L.I.*

Demonstração. Supomos, por absurdo, que exista uma combinação linear nula

$$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_m v_m = 0, \tag{2.1}$$

com pelo menos uma das α_i não - nula. Se $\alpha_r v_r$ for a primeira parcela não-nula de $(*)$ então teremos

$$\alpha_r v_r + \ldots + \alpha_m v_m = 0$$

com $\alpha_r \neq 0$. Logo,

$$v_r = \frac{-\alpha_{r+1}}{\alpha_r} v_{r+1} - \ldots - \frac{\alpha_m}{\alpha_r} v_m$$

e daí v_r seria uma combinação linear dos vetores subsequentes $v_{r+1}, \ldots, v_m$, o que é um absurdo. Concluímos então que X é *L.I.* □

No teorema anterior temos uma lista de vetores não-nulos $v_1, \ldots, v_m$. Se cada um desses vetores possuir uma coordenada não-nula e as mesmas coordenadas nos vetores subsequentes forem nulas, então essa lista de vetores $\{v_1, \ldots, v_m\}$ será *L.I.*

Exemplo. O conjunto $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ é *L.I*, onde $v_1 = (0, 1, 2, 3, 4)$, $v_2 = (0, 0, 2, 2, 3)$, $v_3 = (0, 0, 0, 4, 2)$ e $v_4 = (0, 0, 0, 0, 7)$.

A observação acima pode então pode ser reescrita da seguinte maneira: se a primeira coordenada não-nula de cada vetor v_i possuir índice menor do que a primeira coordenada não-nula dos vetores subsequentes $v_{i+1}, \cdots, v_m$ $(i = 1, \cdots, m-1)$, então os vetores $v_1, \cdots, v_m$ serão *L.I.*

Se para cada $i = 1, \cdots, m$ escrevermos

$$v_1 = (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n})$$

$$v_2 = (a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n})$$

$$\vdots$$

$$v_m = (a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn})$$

podemos formar uma matriz

$$A = \left[a_{ij}\right] \in M(m \times n)$$

cujos m vetores-linha são $v_1, \ldots, v_m$. Diremos que a matriz A é *escalonada* quando o primeiro elemento não-nulo de cada uma de suas linhas está à esquerda do primeiro elemento não-nulo de cada uma de suas linhas subsequentes e, além disso, as linhas nulas (quando houver) estão abaixo das demais. Assim, as linhas não-nulas de uma matriz escalonada são linearmente independentes.

Exemplo. As matrizes

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

são escalonadas.

2.1 O Processo de Eliminação

Apresentaremos nesta seção o processo de *eliminação* ou (*escalonamento*) mediante o uso das operações elementares sobre as linhas de uma matriz. O processo é bastante simples e é efetuado da seguinte maneira: dada uma matriz A

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

(a) se tivermos $a_{11} \neq 0$, deixamos a primeira linha intacta e a cada linha L_i ($i \geq 2$) adicionamos a linha $-\frac{a_{i1}}{a_{11}} L_1$, isto é, efetuamos as operações

$$L_2 \to L_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} L_1$$

$$L_3 \to L_3 - \frac{a_{31}}{a_{11}} L_1$$

$$\vdots$$

$$L_m \to L_m - \frac{a_{m1}}{a_{11}} L_1$$

obtendo assim a matriz A'

$$A' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \ldots & a'_{2n} \\ 0 & a'_{32} & \ldots & a'_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a'_{m2} & \ldots & a'_{mn} \end{bmatrix}$$

cuja a primeira coluna é $(a_{11}, 0, \ldots, 0)$.

(b) caso tenhamos $a_{11} = 0$, uma troca de linhas fornece uma matriz com $a_{11} \neq 0$, desde que a primeira coluna não seja nula. Se, porém, a primeira coluna for nula, passa-se para a coluna mais próxima, à direita da primeira, onde haja algum elemento diferente de zero e opera-se como antes, de modo a obter uma matriz cuja primeira coluna não-nula começa com um elemento não-nulo, mas todos os demais são nulos. A partir daí não se mexe mais na primeira linha. Recomeça-se o processo, trabalhando com as linhas a partir da segunda, até obter uma matriz escalonada.

O exemplo a seguir ilustra esse processo.

Exemplo. Utilizando a matriz dos coeficientes do sistema (2.2), vamos aplicar uma cadeia de operações elementares até obter uma matriz escalonada. De fato,

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 1 \\ 5 & 7 & 1 & 3 \\ 7 & 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 1 \\ 5 & 7 & 1 & 3 \\ 7 & 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \underset{\substack{L_2 \to L_2 - 3L_1 \\ L_3 \to L_3 - 5L_1 \\ L_4 \to L_4 - 7L_1}}{} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & -4 & -8 & -20 \\ 0 & -8 & -24 & -32 \\ 0 & -20 & -32 & -44 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_3 \to L_3 - 2L_2 \\ L_4 \to L_4 - 5L_2 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & -4 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & -8 & 8 \\ 0 & 0 & 8 & 56 \end{bmatrix} L_4 \to L_4 + L_3 \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & -4 & -8 & -20 \\ 0 & 0 & -8 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 64 \end{bmatrix}$$

Concluímos dessa forma que as quatro linhas da última matriz são de fato, vetores *LI*.

Como foi observado na Seçao 1.3, o processo de escalonamento possui como importante applicação a resolução de sistemas lineares. Ele transforma o sistema inicial em um sistema equivalente cuja resolução é bem simples de se obter. Ilustraremos este fato através do seguinte

Exemplo. (Sistemas Lineares) Dado o sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 3y & + & 5z & + & 7w & = & 12 \\ 3x & + & 5y & + & 7z & + & w & = & 0 \\ 5x & + & 7y & + & z & + & 3w & = & 4 \\ 7x & + & y & + & 3z & + & 5w & = & 16 \end{array} \right. \tag{2.2}$$

ao se aplicar o processo de escalonamento na matriz aumentada deste sistema obtemos a seguinte cadeia

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 12 \\ 3 & 5 & 7 & 1 & 0 \\ 5 & 7 & 1 & 3 & 4 \\ 7 & 1 & 3 & 5 & 16 \end{bmatrix} \underset{\substack{L_2 \to L_2 - 3L_1 \\ L_3 \to L_3 - 5L_1 \\ L_4 \to L_4 - 7L_1}}{} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 12 \\ 0 & -4 & -8 & -20 & -36 \\ 0 & -8 & -24 & -32 & -56 \\ 0 & -20 & -32 & -44 & -68 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_3 \to L_3 - 2L_2 \\ L_4 \to L_4 - 5L_2 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 12 \\ 0 & -4 & -8 & -20 & -36 \\ 0 & 0 & -8 & 8 & 16 \\ 0 & 0 & 8 & 56 & 112 \end{bmatrix} L_4 \to L_4 + L_3 \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 12 \\ 0 & -4 & -8 & -20 & -36 \\ 0 & 0 & -8 & 8 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 64 & 128 \end{bmatrix}.$$

Assim, o sistema (2.2) é de fato equivalente ao sistema

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & 3y & + & 5z & + & 7w & = & 12 \\ & - & 4y & - & 8z & - & 20w & = & -36 \\ & & & - & 8z & + & 8w & = & 16 \\ & & & & & & 64w & = & 128 \end{array}\right.$$

cuja resolução se faz de baixo para cima, e nos fornece como (única) solução o vetor $(1, -1, 0, 2)$.

O processo de escalonamento também nos fornece uma outra importante aplicação. Ele nos permite calcular a inversa de uma matriz de forma bastante simples e elegante através de um método prático. Este método (apresentado na seção a seguir) fará uso do seguinte

Teorema 2.2. *Toda matriz inversível pode ser transformada na matriz identidade através de operações elementares.*

Demonstração. Seja A uma matriz inversível de ordem n e considere os n sistemas lineares

$$AX = E_1, \cdots, AX = E_n \tag{2.3}$$

onde

$$E_j = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1 \leq j \leq n)$$

é o j-ésimo vetor coluna da matriz identidade I_n. Escalonando as matrizes ampliadas

$$[A, E_1], \cdots, [A, E_n],$$

obtemos novas matrizes ampliadas

$$[A', E_1'], \cdots, [A', E_n'],$$

cujo n sistemas

$$A'X = E_1', \cdots, A'X = E_n' \tag{2.4}$$

são equivalentes aos de (2.1). Sendo A inversível.

Cada sistema em (2.2) possui uma única solução. Agora note que cada E_i' $(i = 1, \cdots, n)$ é um múltiplo de algum E_j e, portanto, nenhum dos vetores linha da matriz escalonada A' é nulo. Assim, A' será uma matriz triangular superior

$$A' = \begin{bmatrix} a_{11}' & a_{12}' & \cdots & a_{1n}' \\ 0 & a_{22}' & \cdots & a_{2n}' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}' \end{bmatrix}$$

com todos os elementos da diagonal $a_{11}', a_{22}', \cdots, a_{nn}'$ não-nulos.

Isso nos permite, portanto, (aplicando operações elementares em A') obtemos uma matriz diagonal A''

$$A'' = \begin{bmatrix} a_{11}'' & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22}'' & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}'' \end{bmatrix}$$

Finalmente, aplicando as operações $L_i \to \frac{1}{a''_{ii}} L_i$ $(i = 1, \cdots, n)$ em A'', obtemos a matriz identidade I_n. Mostramos assim que a matriz inversível A foi transformada em I_n mediante uma série de operações elementares. □

Exemplo. Dada a matriz inversível

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

pelo Teorema 2.2 aplicaremos operações elementares em A, de modo a transforma-lá em uma matriz identidade I_n. De fato,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_2 \to L_2 - 2L_1 \\ L_3 \to L_3 - 4L_1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -7 & -10 \end{bmatrix} L_3 \to L_3 - 7L_2 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} L_1 \to L_1 + 2L_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_1 \to L_1 + \frac{1}{4}L_3 \\ L_2 \to L_2 + \frac{1}{2}L_3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_2 \to -L_2 \\ L_3 \to \frac{L_3}{4} \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

assim, encontamos I_3 a partir de A.

2.2 Inversão de uma Matriz

Dada uma matriz inversível de ordem n

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{2.5}$$

se

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

for inversa de A, então a partir da relação $AB = I_n$ vemos que cada vetor-coluna de B

$$B = \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix} (1 \leqslant j \leqslant n)$$

satisfaz o sistema $AX = E_j$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$, onde

$$E_j = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} (1 \leqslant j \leqslant n)$$

é o j-ésimo vetor-coluna de I_n. Assim, para determinar a inversa de A é necessário resolver n sistemas lineares de ordem $n \times n$, a saber,

$$AX = E_1, \cdots, AX = E_n.$$

Assim como as operações elementares, quando aplicadas à um sistema não altera seu conjunto solução e podemos utilizá-las nas matrizes ampliadas

$$[A, E_1], \cdots [A, E_m].$$

até transformarmos a matriz A na matriz identidade I_n (vide Teorema 2.2), obtendo dessa forma n matrizes aumentadas

$$[I_n, X_1], \cdots, [I_n, X_n]$$

nos quais os vetores $X_1, \cdots, X_n$ sejam as soluções dos sistemas $AX = E_j$, $(1 \leqslant j \leqslant n)$. Logo $X_1, \cdots, X_n$ são os vetores coluna da matrizes inversa de A. Como o processo que transforma A na matriz I_n depende apenas de A e não dos vetores E_j, esta discussão nos permite descrever um método prático para se calcular a inversa de uma matriz.

Dada uma matriz inversível A como em (2.5), consideremos a matriz ampliada de ordem $n \times 2n$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & \vdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & \vdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & \vdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \tag{2.6}$$

Através das operações elementares transformamos A na matriz identidade I_n, obtendo uma matriz da forma

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \vdots & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{n1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \vdots & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \vdots & x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix}$$

A matriz $X = [x_{ij}] \in M(m \times n)$ será então a inversa de A.

Exemplo. Vamos agora determinar a inversa de uma matriz A inversível.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Para determinar a inversa de uma matriz, determinaremos primeiro a matriz aumentada.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & \vdots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 2 & \vdots & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Agora aplicaremos as operações elementares nessa matriz aumentada até transformar a matriz A em uma matriz identidade I_4

$$\left[\begin{array}{cccccccc c}
1 & 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 & 0 & 0 & 0\\
2 & 3 & 2 & 1 & \vdots & 0 & 1 & 0 & 0\\
3 & 1 & 1 & 2 & \vdots & 0 & 0 & 1 & 0\\
1 & 2 & 1 & 3 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]
\xrightarrow[\substack{L_3\to L_3-3L_1\\ L_4\to L_4-L_1}]{L_2\to L_2-2L_1}
\left[\begin{array}{cccccccc c}
1 & 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & -1 & \vdots & -2 & 1 & 0 & 0\\
0 & -2 & -2 & -1 & \vdots & -3 & 0 & 1 & 0\\
0 & 1 & 0 & 2 & \vdots & -1 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]
\begin{array}{c} L_3 \to L_3 + 2L_2\\ L_4 \to L_4 - L_2\end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccccccc c}
1 & 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & -1 & \vdots & -2 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & -2 & -3 & \vdots & -7 & 2 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 3 & \vdots & 1 & -1 & 0 & 1
\end{array}\right]
\xrightarrow[\substack{L_2\to L_2+\frac{1}{3}L_4\\ L_3\to L_3+L_4}]{L_1\to L_1-\frac{1}{3}L_4}
\left[\begin{array}{cccccccc c}
1 & 1 & 1 & 0 & \vdots & 2/3 & 1/3 & 0 & -1/3\\
0 & 1 & 0 & 0 & \vdots & -5/3 & 2/3 & 0 & 1/3\\
0 & 0 & -2 & -3 & \vdots & -6 & 1 & 1 & 1\\
0 & 0 & 0 & 3 & \vdots & 1 & -1 & 0 & 1
\end{array}\right]
L_1 \to L_1 + 1/2L_3$$

$$\left[\begin{array}{cccccccc c}
1 & 1 & 0 & 0 & \vdots & -7/3 & 5/6 & 1/2 & 1/6\\
0 & 1 & 0 & 0 & \vdots & -5/3 & 2/3 & 0 & 1/3\\
0 & 0 & -2 & 0 & \vdots & -6 & 1 & 1 & 1\\
0 & 0 & 0 & 3 & \vdots & 1 & -1 & 0 & 1
\end{array}\right]
L_1 \to L_1 - L_2$$

$$\left[\begin{array}{cccccccc c}
1 & 0 & 0 & 0 & \vdots & -2/3 & 1/6 & 1/2 & -1/6\\
0 & 1 & 0 & 0 & \vdots & -5/3 & 2/3 & 0 & 1/3\\
0 & 0 & -2 & 0 & \vdots & -6 & 1 & 1 & 1\\
0 & 0 & 0 & 3 & \vdots & 1 & -1 & 0 & 1
\end{array}\right]
\begin{array}{c} L_3 \to -\frac{L_3}{2}\\ L_4 \to -\frac{L_4}{3}\end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccccccc c}
1 & 0 & 0 & 0 & \vdots & -2/3 & 1/6 & 1/2 & -1/6\\
0 & 1 & 0 & 0 & \vdots & -5/3 & 2/3 & 0 & 1/3\\
0 & 0 & 1 & 0 & \vdots & 3 & -1/2 & -1/2 & -1/2\\
0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & 1/3 & -1/3 & 0 & 1/3
\end{array}\right]$$

Assim, a inversa da matriz A será matriz

$$A^{-1} = \left[\begin{array}{ccccc}
-2/3 & 1/6 & 1/2 & -1/6 & \\
 & -5/3 & 2/3 & 0 & 1/3\\
3 & -1/2 & -1/2 & -1/2 & \\
1/3 & -1/3 & 0 & 1/3 &
\end{array}\right].$$

Capítulo 3

Fatoração *LU*

Vimos no Capítulo 1 que aplicar uma operação elementar e sobre as linhas de uma matriz A com m linhas é o mesmo que multiplicá-la à esquerda pela matriz elementar $e(I_m)$ que resulta de aplicar a mesma operação às linhas de I_m, ou seja,

$$e(A) = e(I_m)A.$$

Além disso, vimos também nesse capítulo que, para se reduzir uma matriz A com m linhas à sua forma escalonada através do método de eliminação Gaussiana, as únicas operações elementares (realmente) necessárias foram a transposição de duas linhas e a adição à uma linha a um múltiplo de outra linha.

Portanto, o método da eliminação gaussiana consiste em multiplicar a matriz A sucessivamente à esquerda por matrizes elementares do tipo (1) (transposição de duas linhas) ou do tipo (2) (adicionar à uma linha um múltiplo de outra linha).

Essa observação será crucial na construção da fatoração LU da matriz A, onde L será uma matriz triangular inferior e U uma matriz escalonada. Passemos então a construção.

Seja $A \in M(m \times n)$ uma matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

e suponha que no seu processo de escalonamento não seja efetuada nenhuma transposição de linhas. Logo, a entrada a_{11} será não-nula e para se anular todos os elementos da primeira coluna abaixo de a_{11} será necessário efetuar as seguintes operações em A:

$$e_i : L_i \to L_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}} L_i \quad (i = 2, 3, \dots, m).$$

Isso significa que a matriz A será multiplicada à esquerda sucessivamente pelas matrizes elementares

$$e_2(I_m) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}, \ \cdots, \ e_m(I_m) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{a_{m1}}{a_{11}} & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix},$$

e como

$$e_2(I_m)\cdots e_m(I_m) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{a_{31}}{a_{11}} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\frac{a_{m1}}{a_{11}} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = M_1 \tag{3.1}$$

Segue que nesta primeira etapa obteremos uma matriz $A^{(1)}$ satisfazendo

$$M_1A = A^{(1)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} \\ 0 & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & \cdots & a_{3n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{m2}^{(1)} & a_{m3}^{(1)} & \cdots & a_{mn}^{(1)} \end{bmatrix}$$

onde $a_{11}^{(1)} = a_{11}, a_{12}^{(1)} = a_{12}, \cdots, a_{1n}^{(1)} = a_{1n}$.

Agora observando que não haverá transposição de linhas, resulta que $a_{22}^{(1)} \neq 0$. Assim, para se anular os elementos da segunda coluna abaixo de $a_{22}^{(1)}$, efetuamos as seguintes operações em $A^{(1)}$:

$$e_i^{(1)} : L_i \to L_i - \frac{a_{ij}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} L_j, \quad (j = 3, 4, \ldots, m).$$

Repetindo o argumento anterior, vemos que isso equivale à multiplicar à esquerda a matriz $A^{(1)}$ pela matriz

$$M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & -\frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & -\frac{a_{42}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & -\frac{a_{m2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}. \tag{3.2}$$

Obtemos então a matriz $A^{(2)}$ satisfazendo

$$M_2M_1A = A^{(2)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & a_{13}^{(2)} & \cdots & a_{1n}^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & \cdots & a_{3n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{m3}^{(2)} & \cdots & a_{mn}^{(2)} \end{bmatrix}$$

onde $a_{11}^{(2)} = a_{11}^{(1)}, \ldots, a_{1n}^{(2)} = a_{1n}^{(1)}$ e $a_{22}^{(2)} = a_{22}^{(1)}, \ldots, a_{2n}^{(2)} = a_{2n}^{(1)}$.

Repetindo este processo (até escalonar a matriz A) é fácil ver que existirão matrizes quadradas de ordem m, $M_1, M_2, \ldots, M_{m-1}$ (análogas as matrizes (3.1) e (3.2)), e uma matriz $U = A^{(m-1)}$ tais que

$$M_{m-1}\cdots M_2M_1A = U \tag{3.3}$$

sendo U uma matriz escalonada.

Agora note que no Corolário 1.2 cada matriz M_j é inversível e cada inversa é colocada aplicando-se as respectivas operações inversas em cada caso. Mais precisamente temos que

$$M_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{a_{31}}{a_{11}} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{a_{m1}}{a_{11}} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}, M_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{a_{22}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{a_{42}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \frac{a_{m2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}, \ldots$$

e, portanto, segue de (3.3) que

$$A = M_1^{-1} M_2^{-1} \cdots M_{m-1}^{-1} U$$

e pondo

$$L = M_1^{-1} M_2^{-1} \cdots M_{m-1}^{-1} \tag{3.4}$$

obtemos a fatoração LU da matriz A,

$$A = LU.$$

A matriz L é uma matriz quadrada de ordem m e possui a seguinte expressão especial, obtida efetuando os produtos em (3.4):

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{a_{31}}{a_{11}} & \frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} & 1 & & 0 & 0 \\ \frac{a_{41}}{a_{11}} & \frac{a_{42}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} & \frac{a_{43}^{(2)}}{a_{33}^{(2)}} & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{a_{m-11}}{a_{11}} & \frac{a_{m-12}^{(1)}}{a_{22}} & \frac{a_{m-13}^{(2)}}{a_{33}} & \cdots & 1 & 0 \\ \frac{a_{m1}}{a_{11}} & \frac{a_{m2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} & \frac{a_{m3}^{(2)}}{a_{33}^{(2)}} & \cdots & \frac{a_{m\,m-1}^{(m-2)}}{a_{m-1\,m-1}^{(m-2)}} & 1 \end{bmatrix}$$

Portanto, L é uma matriz triangular inferior (a letra L provém da expressão *lower triangular*) e seus elementos diagonais são todos iguais a 1.

Concluímos então que mediante a hipótese de não haver transposição de linhas no processo de escalonamento, a matriz $A \in M(m \times n)$ se escreve como um produto

$$A = LU$$

onde $L \in M(m \times m)$ é uma matriz triangular inferior com elementos diagonais todos iguais a 1 e $U \in M(m \times n)$ é uma matriz escalonada. Quando A é uma matriz quadrada de ordem m, segue de (3.3) que U também será quadrada de ordem m, e além disso U será uma matriz triangular superior (a letra U provém da expressão *upper triangular*).

A hipótese de não haver transposição de linhas no escalonamento nos garantiu que em cada etapa os elementos

$$a_{11}, a_{22}^{(1)}, a_{33}^{(2)}, \ldots, a_{m-1\,m-1}^{(m-2)}$$

eram todos não-nulos. Tais elementos são chamados de *pivôs*. Agora fica a pergunta: É possível saber quando haverá a necessidade de transpor duas linhas no processo de eliminação? A resposta é afirmativa e será respondida adiante. Antes disso faremos algumas observações e daremos alguns exemplos.

Observação 1. O processo de eliminação fornece diretamente os elementos das matrizes L e U.

De fato, dada a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

teremos

$$A^{(0)} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_2 \to L_2 - \frac{1}{3}L_1 \\ L_3 \to L_3 - \frac{4}{3}L_1 \end{matrix}$$

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 1/3 & -22/3 \end{bmatrix} L_3 \to L_3 - L_2$$

$$A^{(2)} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix}.$$

Obtemos assim os fatores

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ 4/3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad U = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix}$$

de modo que

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ 4/3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix}$$

Observação 2. Quando se dispõe da fatoração $A = LU$ onde $A \in M(m \times n)$, a solução do sistema $AX = B$ com $B \in M(m \times 1)$, se reduz a resolver o sistema $LY = B$ e, depois de obtida Y, o sistema $UX = Y$. O primeiro é resolvido de cima para baixo e o segundo de baixo para cima pois L é triangular inferior e U é escalonada.

Para ilustrar esta observação iremos resolver o sistema

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases}$$

utilizando a fatoração LU. De fato, a forma matricial do sistema acima é

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Agora escalonando a matriz dos coeficientes obtemos

$$A^{(0)} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_2 \to L_2 - \frac{1}{3}L_3 \\ L_3 \to L_3 - \frac{4}{3}L_1 \end{matrix}$$

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 1/3 & -22/3 \end{bmatrix} L_3 \to L_3 - L_2$$

$$A^{(2)} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix}$$

Após escalonar a matriz dos coeficientes, determinamos as matrizes L e U da fatoração

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ 4/3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad U = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix}.$$

Resolvendo então a equação $LY = b$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ 4/3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

obtemos $y_1 = 1, y_2 = 5/3$ e $y_3 = 0$ de modo $Y = \begin{bmatrix} 1 \\ 5/3 \\ 0 \end{bmatrix}$. Determinado o vetor Y, resolvemos a equação $UX = Y$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5/3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

obtendo os valores $x_3 = 0, x_2 = 5$ e $x_1 = -3$. Portanto, a solução do sistema inicial (3) será o vetor

$$X = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Este exemplo ilustra bem a simplificação que ocorre na resolução de um sistema linear mediante a fatoração LU de uma matriz. Cada um dos fatores L e U correspondem a sistemas de fácil resolução, e juntos, nos fornecem o conjunto solução do sistema inicial.

3.1 Escalonamento sem Transposições

Vimos na seção anterior que toda matriz possui uma fatoração LU caso não haja transposição de linhas no seu processo de escalonamento. Contudo, isso não ocorre em geral. Veremos nessa seção como fica a fatoração LU neste caso.

Dizemos que um matriz P é uma *matriz de permutação* se ela possuir a seguinte propriedade: a operação de multiplicação à esquerda por P consiste numa permutação das linhas de um matriz.

Exemplo. Sejam

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

duas matrizes. Então

$$PA = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix}$$

é obtida de A permutando-se as linhas L_1 e L_2 e, em seguida as linhas L_1 e L_3 na matriz resultante. Logo, P é uma matriz de permutação.

Agora seja $A \in M(m \times n)$ uma matriz e $e : L_1 \to L_j$ uma transposição. Então,

$$e(A) = e(I_m)A$$

é a matriz obtida de A permutando-se as linhas L_i e L_j. Mais geralmente, se $e_1, e_2, \ldots, e_k$ forem k transposições e se efetuarmos todas elas (nessa ordem) sobre A, obteremos a matriz

$$e_k(\cdots(e_1(A))\cdots) = e_k(I_m)\cdots e_1(I_m)A$$

obtida ao permutar as linhas de A respeitando a ordem em que as transposições foram efetuadas. Definindo então

$$P = e_k(I_m)\cdots e_1(I_m)$$

segue que P é de fato, uma matriz de permutação.

Este fato nos diz que efetuar transposições numa matriz consiste em multiplicá-la à esquerda por uma matriz de permutação. Assim, após escalonamos uma matriz $A \in M(m \times n)$, dispomos da relação de todas as transposições feitas, digamos $e_1, \ldots, e_k$. Supondo que tais tranposições foram feitas nesta ordem e efetuando-as (na mesma ordem) nas linhas da matriz identidade, obteremos uma matriz de permutação $P \in M(m \times n)$ dada por

$$P = e_k(I_m)\cdots e_1(I_m).$$

A matriz PA corresponde a efetuar sobre A, antecipadamente, todas as transposições de linhas que seriam necessárias durante o escalonamento. Portanto, a matriz PA pode ser escalonada usando apenas operações elementares do tipo 2

$$e : L_i \to L_i + \alpha L_j$$

e daí, a mesma admitirá uma fatoração LU

$$PA = LU.$$

Sendo P inversível e $P^{-1} = P^T$ resulta que

$$A = P^T LU$$

é a fatoração no caso geral.

O exemplo a seguir ilustra este caso

Exemplo. Considere uma matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Como $a_{11} = 0$, a matriz A não admite uma fatoração LU. Então aplicando as seguintes operações elementares $L_1 \leftrightarrow L_2$, $L_3 \to L_3 + L_1$ e $L_4 \to L_4 - L_1$ obtemos a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Analogamente, como $a_{32} = 0$ efetuamos $L_3 \leftrightarrow L_4$, $L_3 \to L_3 - L_2$ obtendo a matriz escalonada

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

A matriz de permutação associada às trocas de linhas $L_1 \leftrightarrow L_2$, $L_3 \leftrightarrow L_4$ será

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

e portanto, o escalonamento poderá ser feito (sem troca de linhas) na matriz PA fornecendo a fatoração LU desta matriz:

$$PA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = LU$$

Logo

$$A = P^{-1}LU = P^TLU = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

será a fatoração da matriz A inicial.

Agora fica a pergunta: sob quais condições uma matriz pode ser escalonada sem a necessidade de efetuar transposições durante o processo? A resposta será dada no teorema adiante.

Sejam $A = [a_{ij}] \in M(m \times n)$. Para todo $r \leq \min\{m, n\}$, a *submatriz principal de ordem r* da matriz A, é a matriz $A_r \in M(r \times r)$ formada pelos elementos a_{ij} com $1 \leq i \leq r$ e $1 \leq j \leq r$.

Teorema 3.1. *Seja $A \in (m \times n)$ uma matriz tal que todas as suas submatrizes principais sejam inversíveis. Então a matriz A pode ser escalonada sem transposições.*

Demonstração. Seja

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{32} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

e suponha (sem perda de generalidade) que $m \leq n$.. Como $A_1 = [a_{11}]$ é inversível, segue que $a_{11} \neq 0$. Utilizando a_{11} como pivô da primeira linha, e aplicando as operações em A

$$L_i \to L_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}} L_1 \quad (i = 2, 3, \ldots, m)$$

obtemos a matriz

$$M_1A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ 0 & b_{32} & b_{33} & \cdots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & b_{m2} & b_{m3} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}.$$

A submatriz de ordem 2 de M_1A é

$$B_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & b_{22} \end{bmatrix}$$

a qual é obtida da submatriz de ordem 2 de A

$$A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

mediante a operação $L_2 \to L_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} L_1$. Logo

$$B_2 = E_1 A_2$$

sendo $E_1 \in M(2 \times 2)$ uma matriz inversível. Assim, como A_2 é inversível segue que B_2 também o será e portanto $b_{22} \neq 0$. Podemos então utilizar b_{22} como pivô da segunda linha em E_1A, e aplicando em E_1A as operações

$$L_i \to L_i - \frac{b_{i2}}{b_{22}} L_2 \quad (i = 2, 3, \cdots, m)$$

obtemos a matriz

$$M_2 m_1 A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ 0 & 0 & c_{33} & \cdots & c_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & c_{m3} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix}.$$

O restante da demonstração é feito por indução. De fato, suponha que para $1 \leq k < m - 1$ tenhamos (após k etapas do escalonamento) a matriz

$$M_k \cdots M_2 M_1 A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2k} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & c_{33} & \cdots & c_{3k} & & c_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & d_{kk} & \cdots & d_{kn} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & d_{mk} & \cdots & d_{mn} \end{bmatrix}.$$

A submatriz de ordem k da matriz acima é a matriz triangular superior

$$B_k = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1k} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2k} \\ 0 & 0 & c_{33} & \cdots & c_{3k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & d_{kk} \end{bmatrix}.$$

Como vimos acima ela é obtida da submatriz de ordem k de A

$$A_k = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{bmatrix}$$

mediante uma série de operações da forma

$$L_i \to L_i - \alpha L_j \quad (j = 1, \ldots, k-1 \text{ e } i = 2, \ldots, k-1).$$

Logo, existem matrizes inversíveis $E_1, \ldots, E_k$ tais que

$$B_k = E_1 E_2 \cdots E_k A_k$$

e sendo A_k inversível, resulta que B_k é inversível. Logo, $d_{kk} \neq 0$ e desta forma podemos utilizá-la como pivô da k-ésima linha de

$$M_k \cdots M_2 M_1 A.$$

Isto nos permite anular todos os elementos d_{ik} com $i = k+1, \ldots, m$ e garantirá a existência de uma matriz M_{k+1}, tal que

$$M_{k+1} M_k \cdots M_1 A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1k} & a_{1\,k+1} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2k} & b_{2\,k+1} & \cdots & b_{2n} \\ 0 & 0 & c_{33} & \cdots & c_{3k} & b_{3\,k+1} & \cdots & c_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & & & & d_{kk} & d_{k\,k+1} & \cdots & d_{kn} \\ 0 & & & & 0 & e_{k+1\,k+1} & \cdots & d_{k+1\,n} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & & 0 & e_{m\,k+1} & \cdots & e_{mn} \end{bmatrix}$$

estabelecendo o resultado para a $(k+1)$-ésima etapa. Portanto, pelo Princípio da Indução concluímos que A pode ser escalonada sem transposições de linhas. □

Observação. Na demonstração acima onde supomos $m \leq n$, utilizamos apenas que as submatrizes principais de ordem até $m-1$ eram inversíveis. A hipótese de que a submatriz A_m é inversível pode ser descartada. Assim, quando $A \in M(n \times n)$ for uma matriz quadrada, para que ela admita um escalonamento sem transposições é suficiente que apenas as submatrizes principais $A_1, A_2, \cdots, A_{m-1}$ sejam inversíveis.

O exemplo a seguir ilustra esta observação.

Exemplo. Dada uma matriz 4×4

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 1 \\ 5 & 7 & 1 & 3 \\ 7 & 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

o Teorema 3.1 nos garante que matriz A é inversível, pois as submatrizes principais de ordem $1, 2$ e 3

$$\begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \\ 5 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

são inversíveis, com inversas

$$\begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -5/4 & 3/4 \\ 3/4 & -1/4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} -1/4 & 1/8 & 1/8 \\ -5/4 & 1 & -1/4 \\ 1 & -5/8 & 1/8 \end{bmatrix}$$

respectivamente.

3.2 Unicidade da Fatoração

Finalizamos este capítulo estabelecendo a unicidade da fatoração LU. Ela será dada através do seguinte

Teorema 3.2. *Seja $A \in M(m \times n)$ uma matriz e suponha que A admita duas decomposições da forma $A = L_1U_1$ e $A = L_2U_2$,onde $L_1, L_2 \in M(m \times m)$ são matrizes triangulares inferiores com elementos diagonais iguais a 1 e $U_1, U_2 \in M(m \times n)$ são matrizes escalonadas. Nestas condições tem-se que $L_1 = L_2$ e $U_1 = U_2$.*

Demonstração. Como $L_1U_1 = L_2U_2$ e L_1 possui inversa, segue que $U_1 = (L_1^{-1}L_2)U_2$. Além disso como L_1 é triangular inferior com elementos diagonais iguais a 1, o mesmo valerá para a inversa L_1^{-1}. Logo, a matriz $L = L_1^{-1}L_2$ será uma matriz triangular inferior com elementos diagonais iguais a 1. Mostraremos a seguir que $L_1^{-1}L_2 = I_m$ donde $L_1 = L_2$ e consequentemente $U_1 = U_2$ o que estabelece o resultado. Escrevamos então

$$U_1 = [u_{ij}]_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} \quad \text{e} \quad L = \left[l_{ij}\right]_{1 \le i,j \le m}$$

Como U_1 é uma matriz escalonada, segue que $u_{11} \neq 0$ e $u_{i1} = 0$ para $i = 2, 3, \ldots, m$. Logo, para todo $i = 2, 3, \ldots, m$, se multiplicarmos a i-ésima linha de L pela primeira coluna de U_1 veremos que $l_{i1} = 0$. Assim, a primeira coluna de L é o vetor $(1, 0, \ldots, 0)$. Analogamente, se multiplicarmos a i-ésima linha de L pela segunda coluna de U_1 veremos que $l_{i2} = 0$ para todo $i = 3, 4, \ldots, m$. Logo, a segunda coluna de L será o vetor $(0, 1, 0, \ldots, 0)$. Repetindo este argumento, concluímos que $L_1^{-1}L_2$ é de fato a matriz identidade I_m □

Referências Bibliográficas

[1] ANTON, H. B. - *Álgebra Linear Conteporânea*. Editora Bookman. Porto Alegre. 2006.

[2] BOLDRINI, J. L. - *Álgebra Linear*. 3ªed. Campinas - SP: Departamento de matemática da Universidade Estadual de Campinas, 2014.

[3] BUENO, H. P. - *Álgebra Linear-Um segundo Curso*. 1ªed. Minas Gerais: Universidade Federal de Minas Gerais, 2014.

[4] HEFEZ A. - *Introdução à Álgebra Linear*. 2ªed. Rio de Janeiro - RJ : Sociedade Brasileira de Matemática.

[5] LIMA, E. L. - *Álgebra Linear*. 1ªed. Rio de Janeiro - RJ: IMPA, 2014.

[6] RUGGIERO, M. A.; LOPES, V. L. - *Cálculo Numérico*. 2ªed. Unicamp