UNIVERSIDADE FEDERAL DO RECÔNCAVO DA BAHIA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
(PROFMAT)

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COMO ESTRATÉGIA PARA A APRENDIZAGEM DE FUNÇÃO EXPONENCIAL

ANGELA MARIA SCHRAMM DE AZEVEDO

CRUZ DAS ALMAS - BAHIA
15 DE ABRIL DE 2021

ANGELA MARIA SCHRAMM DE AZEVEDO

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COMO ESTRATÉGIA PARA A APRENDIZAGEM DE FUNÇÃO EXPONENCIAL

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional — PROFMAT, do Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas da Universidade Federal do Recôncavo da Bahia — UFRB, como requisito parcial para obtenção do grau de *Mestre* em Matemática.

CRUZ DAS ALMAS - BAHIA

15 DE ABRIL DE 2021

FICHA CATALOGRÁFICA

A994r Azevedo, Angela Maria Schramm de.

Resolução de problemas como estratégia para a aprendizagem de função exponencial / Angela Maria Schramm de Azevedo._ Cruz das Almas, Bahia, 2021.

83f.

Orientador: Anderson Reis da Cruz.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas, Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT.

1.Matemática – Estudo e ensino. 2.Matemática – Função exponencial. 3.Problemas, exercícios, etc – Análise. I.Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas. II.Título.

CDD: 510.7

Ficha elaborada pela Biblioteca Central de Cruz das Almas - UFRB.
Responsável pela Elaboração - Antonio Marcos Sarmento das Chagas (Bibliotecário - CRB5 / 1615).
(os *dados para catalogação foram enviados pela usuária via formulário eletrônico*).

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COMO ESTRATÉGIA PARA A APRENDIZAGEM DE FUNÇÃO EXPONENCIAL

ÂNGELA MARIA SCHRAMM DE AZEVEDO

Dissertação de Mestrado apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas da Universidade Federal do Recôncavo da Bahia e Sociedade Brasileira de Matemática como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática, recomendada para aprovação em 15/04/2021.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Anderson Reis da Cruz

UFRB

Profª. Drª. Andrêssa Lima de Souza

UFRB

Prof. Dr. Antônio Teófilo Ataíde do Nascimento

UNEB

“Não há ciência que fale das harmonias da natureza com mais clareza do que a Matemática".

Paulo Carus

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, por minha vida e por me ajudar a ultrapassar todos os obstáculos ao longo do curso.

Aos meus pais, Grimaldo e Etelmira (In memoria,) que me deram a vida e que onde estiverem sempre torcem por mim.

As minhas filhas Adrielle e Andrezza e também ao meu esposo Uilson que me incentivaram nos momentos difíceis e compreenderam a minha ausência durante todo o período de dedicação a este curso.

Ao competente quadro docente do programa PROFMAT por todo o auxílio e orientação ao longo de todo o período de duração deste curso.

A minha amiga querida Daniela Rúbia dos Santos, minha conselheira fiel, que me deu forças para concluir esse trabalho.

A minha amiga Tânia Pinto de Souza pelo apoio incondicional que me deu, em meu momento de grandes dificuldades ao longo da elaboração deste trabalho.

A minha amiga Maria Conceição C. A. de Oliveira por todo apoio e motivação.

Aos meus amigos do curso, com quem convivi ao longo do curso que acompanharam de perto todas as minhas angústias e sempre me apoiaram. Aprendemos a trabalhar em grupo, a respeitar o próximo e, principalmente, que é muito mais fácil multiplicar quando sabemos dividir.

Muitíssimo obrigado!!!

E que eu possa sempre contar com o privilégio da amizade de vocês.

Agradeço ao Professor Dr. Antônio Teófilo Ataíde do Nasciemnto e a Professora Drª Andrêssa Lima de Souza por fazerem parte da banca.

Agradeço ao professor Anderson Reis da Cruz, a oportunidade de tê-lo como orientador. Tenho muito orgulho de citá-lo como um dos responsáveis pela minha formação profissional. Agradeço pela confiança, pela amizade, conselhos e paciência. O senhor é um exemplo de simplicidade, compreensão e competência.

A SBM e IMPA pelo brilhante projeto oferecido.

RESUMO

O presente trabalho aborda a resolução de problemas nas aulas de Matemática e em particular o conteúdo programático função exponencial. Há muito tempo, essa metodologia é vista como um possível caminho para se ter uma aprendizagem significativa. Faremos uma apresentação sobre a operação potenciação nas suas mais diversas particularidades e a caracterização da função exponencial, sugerindo a metodologia de resolução de problemas como estratégia de aprendizagem significativa para o estudo dessa última.

Palavras-chave: Resolução de Problemas; Potenciação; Função Exponencial.

ABSTRACT

This research address the problems resolution into Mathematic classes, particu- larly exponencial function program content. For a long time, this methodology is seen as a way to get a meaningful learning. We will present the exponetial operations in all its peculiaritys and the description of the exponencial function, suggesting the problems resolution methodology as a strategy of meaningful learning to the study of this last one.

Keywords: Problems Resolutions; Exponencial; Exponencial Functions.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Conta a lenda que um rei solicitou aos seus súditos que lhe inventassem um novo jogo, a fim de diminuir o seu tédio. O melhor jogo teria direito a realizar qualquer desejo. Um dos seus súditos inventou, então, o jogo de xadrez. O Rei ficou maravilhado com o jogo e viu-se obrigado a cumprir a sua promessa. Chamou, então, o inventor do jogo e disse que ele poderia pedir o que desejasse. O astuto inventor pediu então que as 64 casas do tabuleiro do jogo de xadrez fossem preenchidas com moedas de ouro, seguindo a seguinte condição: na primeira casa seria colocada uma moeda e em cada casa seguinte seria colocado o dobro de moedas que havia na casa anterior. O Rei considerou o pedido fácil de ser atendido e ordenou que providenciassem o pagamento. Tal foi sua surpresa quando os tesoureiros do reino lhe apresentaram a suposta conta, pois apenas na última casa o total de moedas era de 2^{63}, o que corresponde a aproximadamente $9,2233.10^{18}$. Não se pode esquecer ainda que o valor entregue ao inventor seria a soma de todas as moedas contidas em todas as casas. O rei estava falido! A lenda nos apresenta uma descrição de uma função exponencial, precisamente da função $f(x) = 2^x$.

Assim, considerando a aplicabilidade da Função Exponencial ao cotidiano e a necessidade de uma melhor compreensão deste tema pelos estudantes, o presente texto apresenta uma abordagem da Função Exponencial na aprendizagem significativa para o estudante do Ensino Médio.

Na prática pedagógica, percebe-se que o estudo da Função Exponencial não é bem compreendida pelos alunos por causa da dificuldade que os mesmo apresentam na compreensão das propriedades das potências. Uma das formas de superarmos essa dificuldade é fazendo o uso de variadas metodologias adequadas a realidade e vivência do estudante . Como exemplo, podemos citar o uso de situações problemas, jogos, GeoGebra, projetos...

Segundo Dante (2011), trabalhar com resolução de problemas é importante porque motiva os alunos a pensarem por si mesmos, a levantarem hipóteses e a tentarem resolvê-los. Acredita-se que a resolução de problemas matemáticos estimula o aluno a sair da passividade na aula, levando-o a participar ativamente das atividades propostas, possibilitando o desenvolvimento de sua autonomia e de sua capacidade de resolução.

O uso da resolução de problemas é uma importante ferramenta para o processo de ensino aprendizagem da Matemática, pois desperta no aluno a capacidade de desenvolver o pensamento matemático, estimulando sua compreensão e não a memorização sem significado.

A aplicação da Função Exponencial está presente no cotidiano da sociedade, porém não é explicitamente percebida. É dever da escola explicitar tal fato, mostrando que este estudo faz parte da vida. Em 2020, o mundo se deparou com uma crise de saúde provocada pelo Corona Vírus onde o número crescente de casos (COVID-19, agora chamado de SARS-CoV-2) teve início na cidade de Wuhan na China, em dezembro de 2019, primeiramente ocorrendo entre frequentadores e comerciantes de um mercado atacadista de frutos do mar e animais selvagens vivos e mortos.

Relatos afirmam que os indivíduos infectados inicialmente haviam tido contato direto com vísceras e fluidos desses animais.

Posteriormente, em poucos meses de evolução e expansão da doença, ela se expandiu para um grande número de países, até que em março de 2020 a Organização Mundial de Saúde (OMS) decretou o surto da doença como uma pandemia. A partir de então, tornou-se comum, por exemplo, falar-se bastante em crescimento exponencial da curva que mostra o número de contaminados pelo Covid-19 no Brasil e no mundo. Por isso, é importante que os alunos conheçam e associem as diversas aplicações das Funções Exponenciais, tais como: juros compostos, crescimentos populacionais, decaimento radioativo, crescimento populacional de bactérias, desvalorização de bens, escala Richter, etc.

Nesse sentido, seria interessante que os alunos percebessem a Matemática como um sistema de códigos e regras que a tornam uma linguagem de comunicação de ideias e que permite modelar a realidade e interpretá-la.

Dessa forma, o principal intuito desse trabalho é propor estratégias para resolver problemas matemáticos sobre Função Exponencial apresentando ferramentas de aprendizagem que induzam o estudante a perceber que o uso das potências, suas propriedades bem como o estudo da função em epígrafe, servem como facilitadores para a resolução de problemas e consequentemente para o desenvolvimento do raciocínio analítico e criativo.

O desenvolvimento desse trabalho está dividido em três capítulos. O primeiro deles aborda o termo a aplicação do termo potência com expoente real, onde mostraremos o estudo das potências com expoente natural, inteiro, racional e potência de expoente irracional, provando suas propriedades. Já no segundo capítulo, definiremos a função exponencial com domínio real bem como a sua caracterização apoiando-se nas propriedades definidas e demonstradas no capítulo anterior. Finalmente, o terceiro capítulo nos oferece uma proposta de utilização de métodos facilitadores para a realização de uma aprendizagem mais dinâmica, criativa e significativa no estudo de Função Exponencial.

Motivados por esse tema e após as diversas leituras e a própria vida, observaremos que as aplicações aqui registradas podem ser trabalhadas sem dificuldades na educação básica.

CAPÍTULO 1

POTÊNCIA DE NÚMEROS REAIS

Nesse capítulo, serão apresentadas algumas ideias a respeito das potências de base positiva e suas propriedades, que serão úteis no estudo da Função Exponencial. Dividiremos o estudo em Potências com expoente natural, inteiro, racional e potência de expoente irracional, provando suas propriedades segundo Iezzi & Murakami (2005), Lima (2004) e Morgado & Carvalho (2015)

1.1 Potência com expoente natural

As potências são úteis para representar números muitos grandes, como a distância da Terra ao sol, ou números muitos pequenos como a massa de átomo.

A distância da Terra ao sol, por exemplo, é de aproximadamente, 150.000.000.000 m e pode ser representada por: $1,5.10^{11}$m.

Nesse tipo de notação, utilizamos uma potência de base 10.

Definição 1. *Sejam a um número real positivo e n um número natural.*

Definimos:

$i)$ $a^0 = 1$

$ii)$ $a^n = a \cdot a^{n-1}$ para todo $n \geq 0$

Observe que, da Definição 1 temos que:

$$\begin{aligned} a^1 &= a^0 \cdot a = 1 \cdot a = a \\ a^2 &= a^1 \cdot a = a \cdot a \\ a^3 &= a^2 \cdot a = (a \cdot a) \cdot a = a \cdot a \cdot a \\ a^n &= a \cdot a^{n-1} = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \text{ fatores } a} \end{aligned}$$

Em outras palavras, para $n \geq 2$ temos que a^n é um produto de n fatores iguais a a.

Note que se $a = 1$, temos que $1^n = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Chamaremos o número a^n de potência de a com expoente n, ou potência de base a e expoente n.

Temos as seguintes propriedades para potência de expoentes naturais:

Lema 1. *Considere os números reais não nulos a e b, e os números naturais, m e n, são válidos os seguintes assertivas:*

$I)\ a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

$II)\ \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n},\ m \geq n$

$III)\ (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

$IV)\ (a^m)^n = a^{m \cdot n}$

$V)\ \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

Demonstração. $I)$ Usemos indução sobre n.

Consideremos m fixo.Observe que a propriedade é verdadeira para $n = 0$, pois, $x = \{n \in \mathbb{N}; a^m \cdot a^n = a^{m+n}, m \in \mathbb{N}\}$

$$a^{m+0} = a^m = a^m \cdot 1 = a^m \cdot a^0$$

Suponhamos que a propriedade seja verdadeira para n e mostremos que é verdadeira para $n+1$, isto é, $a^m \cdot a^{n+1} = a^{m+n+1}$, isto é, $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

Na definição $a^{n+1} = a \cdot a^n$. Pela comutativa em $\mathbb{R}$, $a^{n+1} = a^n \cdot a$.

De fato,

$$a^m \cdot a^{n+1} = a^m \cdot (a^n \cdot a) = (a^m \cdot a^n) \cdot a = a^{m+n} \cdot a = a^{m+n+1} = a^{m+(n+1)}$$

O que mostra que a propriedade é verdadeira para $n+1$. ■

Demonstração. $II)$ Fixemos n. Vamos usar indução sobre $m \geq n$. Observe que para $m = n$ temos:

$\frac{a^m}{a^n} = 1 = a^0 = a^{m-n}$

Suponha por hipótese de indução que $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

Vamos provar que $\frac{a^{m+1}}{a^n} = a^{(m+1)-n}$.

Observe que, $\frac{a^{m+1}}{a^n} = \frac{a^m \cdot a}{a^n} = \frac{a^m}{a^n} \cdot a = a^{m-n} \cdot a = a^{(m-n)+1} = a^{(m+1)-n}$.

Portanto $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, para todo $m \geq n$. Como n é arbitrário $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ para todo $m, n \in \mathbb{N}$ com $m \geq n$.

■

Demonstração. III) Usaremos indução sobre n. Note que a propriedade é verdadeira para $n = 0$, pois:

$$(a.b)^0 = 1 = 1 \cdot 1 = a^0 \cdot b^0$$

Suponhamos que a propriedade seja válida para n, isto é, $(a.b)^n = a^n \cdot b^n$, e mostremos que é verdadeira para $n+1$, ou seja, que $(a.b)^{n+1} = a^{n+1} \cdot b^{n+1}$.

Assim,

$$(a.b)^{n+1} = (a \cdot b)^n \cdot (a \cdot b) = (a^n \cdot b^n) \cdot (a \cdot b) = (a^n \cdot a) \cdot (b^n \cdot b) = a^{n+1} \cdot b^{n+1}$$

Como queríamos demonstrar. ∎

Demonstração. IV) Faremos indução sobre n.

Consideremos m fixo. Observe que a propriedade é verdadeira para $n = 0$, pois:

$(a^m)^0 = 1 = a^0 = a^{m \cdot 0}$

Suponhamos que a propriedade seja verdadeira para n, isto é, $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$, mostremos que é verdadeira para $n+1$, ou seja, $(a^m)^{n+1} = a^{m \cdot (n+1)}$.

Temos:

$$(a^m)^{n+1} = (a^m)^n \cdot a^m = a^{mn} \cdot a^m = a^{mn+m} = (a^m)^{n+1}$$

∎

Demonstração. V) Mostraremos por indução sobre n. A propriedade é verdadeira para $n = 0$, pois:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1 = \frac{1}{1} = \frac{a^0}{b^0}$$

Suponhamos que a propriedade seja verdadeira para n. Ou seja,

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Mostraremos agora que é verdadeira para $n+1$,

isto é, $\left(\frac{a}{b}\right)^{n+1} = \frac{a^{n+1}}{b^{n+1}}$

Note que,

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{n+1} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \cdot \frac{a}{b} = \frac{a^n}{b^n} \cdot \frac{a}{b} = \frac{(a^n \cdot a)}{(b^n \cdot b)} = \frac{a^{n+1}}{b^{n+1}}$$

Como queríamos demonstrar. ■

Vemos acima que para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$ tem-se:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Segue- se daí que para $m_0, m_1, m_2, \cdots, m_k \in \mathbb{N}$ quaisquer vale

$$a^{m_0}.a^{m_1}.a^{m_2}\cdots a^{m_k} = \underbrace{a^{m_0+m_1+m_2+\cdots+m_k}}_{k \text{ fatores}}$$

Segue da definição que $a^{n+1} = a \cdot a^n$. Logo se $0 < a < 1$ então $a^{n+1} < a^n$ e se $a > 1$ então $a^{n+1} > a^n$. Portanto, a sucessão cujo n- ésimo termo é a^n é crescente quando $a > 1$ e decrescente se $0 < a < 1$. Para $a = 1$ esta sucessão é constante com todos seus termos iguais a 1.

Consequentemente, se $a > 1$ a sucessão formada pelas potências a^n , $n \in \mathbb{N}$, é ilimitada superiormente, isto é não existe um $c \in \mathbb{R}$ tal que $c \geq a^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Noutras palavras, dado $c \in \mathbb{R}$, pode-se sempre achar $n \in \mathbb{N}$ tal que $a^n > c$.

Para provar isto, usaremos a desigualdade de Bernoulli, demonstrada a seguir.

Lema 2. *(Desigualdade de Bernoulli),* $(1+x)^n \geq 1 + nx$ *sempre que* $x > -1$ *e* n *é um número inteiro não negativo (ÁVILA, 1995).*

Demonstração. Vamos provar por indução em n. O resultado é óbvio para $n = 1$. Suponhamos que a desigualdade seja válida para n. Então multiplicamos os dois membros da desigualdade

$(1+x)^n \geq 1 + nx$ por $1 + x \geq 0$ e encontramos:

$$(1+x)^{n+1} = (1+nx) \cdot (1+x) = 1 + nx + x + nx^2 = 1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x$$

Escrevamos $a = 1 + d$, então pela desigualdade de Bernoulli: $a^n > 1 + nd$.

Logo, se tomarmos $n > (c-1)/d$ teremos, $1 + nd > c$ e, com maior razão, $a^n > c$.

O fato de que a sucessão $a^0, a^1, a^2, \cdots, a^n \cdots$ é ilimitada superiormente quando $a > 1$ é um caso particular da noção de limite infinito.

Diz-se que uma sucessão (x_n) de números reais tem limite “mais infinito” (ou simplesmente “infinito”), e escreve-se $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, quando para qualquer $A > 0$, fixado arbitrariamente, for possível obter um índice $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que todos os termos x_n com $n > n_0$ são maiores do que A.

Ou seja, se $n > n_0$ então $x_n > A$.

Toda sucessão crescente ilimitada (x_n) tem limite infinito pois uma vez obtido $x_{n_o} > A$, daí em diante, todo x_n com $n > n_0$ cumpre $x_n > x_{n_0} > A$.

Portanto, tem-se: $\lim a^n = +\infty$, quando $a > 1$.

$\blacksquare$

Observação 1. *Na definição da potência a^n, a base a pode ser um número real positivo, nulo ou negativo.*

Vejamos o que ocorre em cada um desses casos:

$i)$ $a = 0$ (então $0^n = 0$. Qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$)

$ii)$ $a > 0$ (então $a^n > 0$. Qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$)

Isto é, toda potência de base real positiva e expoente $n \in \mathbb{N}$ é um número real positivo.

$iii)$ $a < 0$ (então $a^{2n} > 0$. Qualquer que seja$n \in \mathbb{N}$) e $a^{2n+}1$. Qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$.

Isto é , toda potência de base negativa e expoente par é um número real positivo e toda potência de base negativa e expoente ímpar é um número real negativo.

Observação 2. *Não definimos 0^0 , devemos observar que não é conveniente definir 0^0 como sendo igual a 1; pois, se pensamos por um lado, que estamos estendendo para $a = 0$ a expressão $a^0 = 1$, $a \in \mathbb{R}^*_+$, por outro lado, não estamos estendendo a expressão $0^n = 0.0.0\cdots 0$, $n \in \mathbb{N}^*$ para $n = 0$. A inconveniência de definir 0^0 como sendo 1 pode ser vista com mais precisão no estudo de limites de funções no Cálculo diferencial onde se mostra que 0^0 "é uma indeterminação".*

1.2 Potência com expoente inteiro

Note que, para $n \in \mathbb{N}$ a potência a^n já foi definida na Seção 1.1, abordaremos agora as potências a^n, onde $n \in \mathbb{Z}$. Para tal é preciso definir a^{-n} onde $n \in \mathbb{N}$.

Faremos isso de modo que o ítem (i) do Lema 1 da Seção 1.1 seja preservada, isto é

$$a^{-n} \cdot a^n = a^{-n+n} = a^0 = 1$$

Como $a^0 = 1$ por definição, chegamos à conclusão que:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Isto nos leva a seguinte definição:

Definição 2. *Sejam $a \in \mathbb{R}_+^*$ e $n \in \mathbb{N}$. Definimos:*

1. $a^0 = 1$
2. $a^n = a \cdot a^{n-1}$
3. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Observação 3. 1) *Com a definição de potência de expoente inteiro negativo o item (ii) do Lema 1.*

$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ *para $a \neq 0$, passa a ter significado para $m < n$.*

2) *Não faz sentido a expressão $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, para $a = 0$.*

3) *Veremos posteriormente , para a teoria das funções exponenciais e logarítmicas definições de potências com base negativa não são convenientes, já que não podem ser estendidas de modo geral a expoentes fracionários.*

O Lema 1, visto anteriormente na Seção 1.1 é válido também para números inteiros.

Lema 3. *Sejam $a, b \in \mathbb{R}^*$, para quaisquer $m, n \in \mathbb{Z}$, são válidos os ítens a seguir:*

I) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

II) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

III) $(a.b)^n = a^n \cdot b^n$

IV) $(a^m)^n = a^{m.n}$

V) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

Demonstração. *I*) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

Analisemos os seguintes casos:

Caso 1) $m > 0$ e $n > 0$ (já provado no ítem (i) do Lema 1);

Caso 2) $m < 0$ e $n < 0$;

Temos que$-m > 0$ e $-n > 0$, assim, utilizando a definição e o item i do Lema 1, temos:

$$a^m \cdot a^n = \frac{1}{a^{-m}}$$

Caso 3) $m > 0$ e $n < 0$ (portanto $-n > 0$);

• Se $m > -n$, temos, pelo item (V) do Lema 1 que:

$$a^m.a^n = a^m.\frac{1}{a^{-n}} = a^{m-(-n)} = a^{m+n}$$

• Se $m = -n$,

$$a^m.a^n = a^{-n}.a^n = a^{-n+n} = a^0$$

• Se $m < -n$,

$$a^m.a^n = \frac{a^m}{a^{-n}} = \frac{1}{\frac{a^{-n}}{a^m}} = \frac{1}{a^{-n-m}} = \frac{1}{a^{-(n+m)}} = a^{m+n}$$

Caso 4) $m = 0$ ou $n = 0$;

$$a^0 \cdot a^m = 1 \cdot a^m = a^m = a^{m+0}$$

$II)$ $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

Temos que:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^m \cdot \frac{1}{1^n} = a^m \cdot a^{-n} = a^{m-n}$$

$III)$ $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

Analisemos os seguintes casos:

Caso1) Para $n > 0$ (Já provado no ítem (iii) do Lema 1)

Caso 2) Para $n < 0$, temos que $-n > 0$, aplicando o item (iii) do Lema 1 para $-n$ temos,

$$(a \cdot b)^n = \frac{1}{(a \cdot b)^{-n}} = \frac{1}{a^{-n}.b^{-n}} = \frac{1}{a^{-n}}.\frac{1}{b^{-n}} = a^n \cdot b^n$$

Caso 3) Para $n = 0$, temos que :

$$(a \cdot b)^0 = 1 = a^0 \cdot b^0$$

$IV)$ $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

Analisemos os seguintes casos:

Caso 1) $m > 0$ e $n > 0$ (provado no ítem (IV) do Lema 1);

Caso 2) $m < 0$ e $n < 0$;

Temos que,

$-m > 0$ e $-n > 0$.

Assim,

$$(a^m)^n = \left(\frac{1}{a^{-m}}\right)^n = \frac{1}{\left(\frac{1}{a^{-m}}\right)^{-n}} = \frac{1}{[(\frac{1}{a^{-m}})]^{-n}} = \frac{1}{(\frac{1}{a})^{m.n}} = \left(\frac{1}{\frac{1}{a}}\right)^{m.n} = a^{m.n}$$

Caso 3) $m > 0$ e $n < 0$

$$(a^m)^n = \frac{1}{(a^m)^{-n}} = \frac{1}{a^{-n \cdot m}} = a^{m \cdot n}$$

Caso 4) $m = 0$ ou $n = 0$

Então,

$$(a^0)^m = 1^m = a^{0 \cdot m}$$

Para $m = 0$ é análogo.

$V)$ $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

Como,

- $n > 0$, já provado
- $n = 0$; $\left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1 = \frac{a^0}{b^0}$
- $n < 0$; $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{b}{a}\right)^{-n} = \frac{b^{-n}}{a^{-n}} = \frac{b^{\frac{1}{n}}}{a^{\frac{1}{n}}} = \frac{a^n}{b^n}$

Como queríamos demonstrar ■

1.3 Potência com expoente racionais

Iremos verificar agora o que significa a potência a^n, quando $n = \frac{x}{y}$ é um número racional com $x \in \mathbb{Z}$ e $y \in \mathbb{N}$. Queremos que continue válida a propriedade $a^n.a^m = a^{n+m}$, para quaisquer $m, n \in \mathbb{Q}$. Isto leva a:

$$(a^n)^y = \underbrace{(a^n \cdot a^n \cdot a^n \cdots a^n)}_{y \text{ fatores } a^n} = a^{n+n+\cdots+n} = a^{n.y} = a^x$$

Assim, verifica-se que $a^n \in \mathbb{R}_+$ é um número cuja y-ésima potência é igual a a^x, esse número representa $\sqrt[y]{a^x}$. Isso nos motiva a seguinte definição:

Definição 3. *Sejam $a \in \mathbb{R}_+^*$, $x \in \mathbb{Z}$ e $y \in \mathbb{N}$. Todo racional pode ser escrito na forma $\frac{x}{y}$, com $x \in \mathbb{Z}$ e $y \in \mathbb{N}$, assim:*

$$a^{\frac{x}{y}} = \sqrt[y]{a^x}$$

Observe que, se $\frac{x}{y} = \frac{p}{q}$, então $a^{\frac{x}{y}} = a^{\frac{p}{q}}$

Observação 4. *Note que*

- *Se n for um número ímpar, pode-se definir $\sqrt[n]{a} = b$, em que a e b são números reais negativos tais que, $b^n = a$.*

  Veja:

  $\sqrt[3]{-27} = -3$ *pois,* $(-3)^3 = -27$

- *Se n for um número par e a, um número real negativo, não é possível definir $\sqrt[n]{a}$ em $\mathbb{R}$, pois nesse caso não há um número real b tal que $b^n = a$.*

  Veja:

  $\sqrt[3]{-9}$ *não está definida nos números reais, pois não existe um $b \in \mathbb{R}$ tal que $b^2 = -9$.*

Para provar que as propriedades fundamentais das potências já validadas anteriormente, com as potências de expoentes natural e inteiro, também valem para as potências com expoente racional como demonstrado pelo Lema 4 abaixo:

Lema 4. *Sejam $a, b \in \mathbb{R}_+$ e $x, y \in \mathbb{N}$, com $x, y > 1$*

(i) $\sqrt[y]{a} \cdot \sqrt[y]{b} = \sqrt[y]{a \cdot b}$

(ii) $\frac{\sqrt[y]{a}}{\sqrt[y]{b}} = \sqrt[y]{\frac{a}{b}}$, *se* $b \neq 0$

(iii) $\sqrt[y]{\sqrt[x]{a}} = \sqrt[x.y]{a}$

Demonstração. (i) $\sqrt[y]{a} \cdot \sqrt[y]{b} = \sqrt[y]{a \cdot b}$

Tomemos:

$\sqrt[y]{a} = \alpha \Rightarrow \alpha^y = a$ (I)

$\sqrt[y]{b} = \beta \Rightarrow \beta^y = b$ (II)

Assim, multiplicando membro a membro (I) por (II), obtemos:

$$a \cdot b = \alpha^y \cdot \beta^y = (\alpha \cdot \beta)^y \Rightarrow \alpha \cdot \beta = \sqrt[y]{a \cdot b}$$

Por outro lado, sabe-se que:

$$\alpha \cdot \beta = \sqrt[y]{a} \cdot \sqrt[y]{b}$$

Portanto, podemos concluir que:

$$\sqrt[y]{a} \cdot \sqrt[y]{b} = \sqrt[y]{a \cdot b}$$

(ii) $\frac{\sqrt[y]{a}}{\sqrt[y]{b}} = \sqrt[y]{\frac{a}{b}}$, se $b \neq 0$

Sejam $a, b \in \mathbb{R}_+$ e $b \neq 0$.

Tomemos:

$\sqrt[y]{a} = \alpha \Rightarrow \alpha^y = a \ (III)$

$\sqrt[y]{b} = \beta \Rightarrow \beta^y = b \ (IV)$

Assim, dividindo membro a membro (III) por (IV), obtemos:

$$\frac{a}{b} = \frac{\alpha^y}{\beta^y} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^y$$

Implica que

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = \sqrt[y]{\frac{a}{b}}$$

Por outro lado, sabe-se que:

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = \frac{\sqrt[y]{a}}{\sqrt[y]{b}}$$

Portanto, podemos concluir que:

$$\frac{\sqrt[y]{a}}{\sqrt[y]{b}} = \sqrt[y]{\frac{a}{b}}$$

(iii) $\sqrt[y]{\sqrt[x]{a}} = \sqrt[x.y]{a}$

Tomemos,

$$\sqrt[y]{\sqrt[x]{a}} = \alpha \Rightarrow \alpha^y = \sqrt[x]{a} \Rightarrow (a^y)^x = a \Rightarrow \alpha^{y.x} = a \Rightarrow \alpha = \sqrt[x.y]{a}$$

Portanto,

$$\sqrt[y]{\sqrt[x]{a}} = \sqrt[x.y]{a}$$

Como queríamos demonstrar ■

Corolário 1. $\sqrt[y]{a^k} = (\sqrt[y]{a})^k$

As propriedades operacionais da potenciação com expoente racional, são verificadas no Lema 5 que se segue:

Lema 5. *Sejam* $n = \frac{x}{y}$ *e* $m = \frac{r}{s}$, *com* $x, r \in \mathbb{Z}$ *e* $y, s \in \mathbb{Z}^*$.

$I)$ $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

$II)$ $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

$III)$ $(a.b)^n = a^n \cdot b^n$

$IV)\ (a^m)^n = a^{m.n}$

$V)\ \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

Demonstração. $I)\ a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

Note que,

$$a^n.a^m = a^{\frac{x}{y}} \cdot a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{s.x}{s.y}} \cdot a^{\frac{s.x}{s.y}} = (\sqrt[y.s]{a^{x.s}}) \cdot (\sqrt[y.s]{a^{y.r}})$$

Pelo item (i) do Lema 4, segue que:

$$\left(\sqrt[y.s]{a^{x.s}}\right) \cdot \left(\sqrt[y.s]{a^{y.r}}\right) = \sqrt[y.s]{a^{x.s+y.r}} = a^{\frac{x.s+y.r}{y.s}} = a^{\frac{x}{y}+\frac{r}{s}} = a^{n+m}$$

Portanto,

$$a^n.a^m = a^{n+m}$$

$II)\ \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

Note que,

$$\frac{a^n}{a^m} = \frac{a^{\frac{x}{y}}}{a^{\frac{r}{s}}} = \frac{a^{\frac{x.s}{y.s}}}{a^{\frac{r.y}{s.y}}} = \frac{\sqrt[y.s]{a^{x.s}}}{\sqrt[y.s]{a^{y.r}}}$$

Aplicando o item (ii) do Lema 4, segue-se que

$$\frac{\sqrt[y.s]{a^{x.s}}}{\sqrt[y.s]{a^{y.r}}} = \sqrt[y.s]{\frac{a^{x.s}}{a^{y.r}}}$$

Portanto, como $x.s, y.r \in \mathbb{Z}$, podemos utilizar o item (ii) do Lema 4 e assim, teremos

$$\sqrt[y.s]{\frac{a^{x.s}}{a^{y.r}}} = \sqrt[y.s]{a^{x.s-y.r}} = a^{\frac{x.s-y.r}{y.s}} = a^{\frac{(x.s)}{(y.s)}-\frac{(y.r)}{(y.s)}} = a^{\left(\frac{x}{y}\right)-\left(\frac{r}{s}\right)} = a^{n-m}$$

Logo,

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$III)\ (a.b)^n = a^n \cdot b^n$

Note que,

$$(a.b)^n = (a.b)^{\frac{x}{y}} = \sqrt[y]{(a.b)^x}$$

Como $n \in \mathbb{Z}$, podemos utilizar o item (iii) do Lema 4 para potências de expoentes inteiros, e assim teremos:

$$\sqrt[y]{(a.b)^x} = \sqrt[y]{a^x.b^x}$$

Aplicando o item (i) do Lema 4, segue-se que

$$\sqrt[y]{a^x.b^x} = \sqrt[y]{a^x}.\sqrt[y]{b^x} = a^{\frac{x}{y}}.b^{\frac{x}{y}} = a^n.b^n$$

Portanto,

$$(a.b)^n = a^n.b^n$$

$IV)\ (a^n)^m = a^{n.m}$

Note que,

$$(a^n)^m = \left(a^{\frac{x}{y}}\right)^{\frac{r}{s}} = \sqrt[s]{\left(a^{\frac{x}{y}}\right)^r} = \sqrt[s]{\left(\sqrt[y]{a^x}\right)^r} = \left(\sqrt[y.s]{a^x}\right)^r = \left(\sqrt[y.s]{(a^x)^r}\right) = \sqrt[y.s]{a^{x.r}} = a^{\frac{xr}{ys}} = a^{m \cdot n}$$

$V)\ \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

Note que, teremos

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{x}{y}} = \sqrt[y]{\left(\frac{a}{b}\right)^x}$$

Como $n \in \mathbb{Z}$, podemos utilizar o item (v) do Lema 4 para potências de expoentes inteiros, e assim teremos

$$\sqrt[y]{\left(\frac{a}{b}\right)^x} = \sqrt[y]{\frac{a^x}{b^x}}$$

Aplicando o item (ii) do Lema 4, segue-se que

$$\sqrt[y]{\frac{a^x}{b^x}} = \frac{\sqrt[y]{a^x}}{\sqrt[y]{b^x}} = \frac{a^{\frac{x}{y}}}{b^{\frac{x}{y}}} = \frac{a^n}{b^n}$$

Portanto,

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$\blacksquare$

Segundo Lima (2014), as potências a^r, com expoente racional, embora não contenham todos os números reais positivos, estão espalhadas por toda parte de $\mathbb{R}_+$, desde que seja $a \neq 1$.

O Lema 6 a seguir torna válida essa afirmação.

Lema 6. *Fixando o número real positivo $a \neq 1$, para todo intervalo de $I \subset \mathbb{R}_+$, existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $a^r \in I$.*

Demonstração. Dados $0 < \alpha < \beta$, devemos achar um $r \in \mathbb{Q}$ tal que a^r pertença ao intervalo $[\alpha, \beta]$, isto é, $\alpha \leq a^r \leq \beta$. Por simplicidade, , suporemos a e α maiores do que 1. Os demais casos poderão ser tratados de maneira análoga. Como as potências de expoente natural de números maiores do que 1 crescem acima de qualquer cota pre - fixada, podemos obter números naturais M e n tais que

$(I)\alpha < \beta < a^M$

$(II) 1 < a < \left(1 + \frac{\beta - \alpha}{a^M}\right)^n$

Da relação (II), obtemos que:

$1 < a^{\frac{1}{n}} < 1 + \frac{\beta - \alpha}{a^M}$ e $0 < a^M.(a^{\frac{1}{n}} - 1) < \beta - \alpha$

Assim, sempre que tenhamos m, com $\frac{m}{n} \leq M$, temos:

$$0 < a^{\frac{m}{n}}(a^{\frac{1}{n}} - 1) < \beta - \alpha$$

que é equivalente a

$$0 < a^{\frac{m+1}{n}} - a^{\frac{m}{n}} < \beta - \alpha$$

Logo, as potências

$$a^0 = 1, a^{\frac{1}{n}}, a^{\frac{2}{n}}, \cdots, a^M$$

são extremos de intervalos consecutivos, todos de comprimentos menor do que o comprimento $\beta - \alpha$ do intervalo $[\alpha, \beta]$.

Como $[\alpha, \beta] \subset [1, a^M]$, pelo menos um desses extremos, digamos $a^{\frac{m}{n}}$, está contido no intervalo $[\alpha, \beta]$.

■

Esta propriedade do conjunto $\{a^q : q \in \mathbb{Q}\}$ será fundamental para a definição de potência de expoente irracional.

1.4 Potência com expoente irracional

Para compreender o cálculo de potência de expoente irracional serão apresentados nesta seção algumas definições e alguns teoremas sobre limite de sequência que servirão como suporte para tal compreensão.

Definição 4. *Diz-se que o número real a é limite da sequência (x_n) de números reais quando para cada número real $\varepsilon > 0$, dado arbitrariamente, for possível obter um inteiro $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - a| < \varepsilon$, sempre que $n > n_0$. E escreve-se $a = \lim x_n$, ou $a = \lim_n (x_n)$, ou $a = \lim_{n\to\infty}(x_n)$.*

Intuitivamente, dizer que o número real a é limite da sequência (x_n) significa afirmar que, para valores muito grandes de n, os termos (x_n) tornam-se e se mantem tão próximos de a quanto se deseje. Com um pouco mais de precisão: estipulando-se um “erro” por meio de um número real $\varepsilon > 0$, existe um índice n_0 tal que todos os termos (x_n) da sequência que tem índice n maior do que n_0, são valores aproximados de a com erro inferior a ε. O índice n_0, evidentemente, deve depender de ε, sendo de se esperar que, para valores cada vez menores de ε, necessite-se tomar n_0 cada vez maior.

Temos o seguinte resultado sobre sucessão com potência de expoentes racionais. A prova pode ser vista na Seção 1.3.

Teorema 1. *Seja dado $a \in \mathbb{R}_+^*$ e (r_n) uma sucessão de números racionais tais que,* $\lim r_n = 0$ *e* $0 < r_n < 1$.

Então:

$$\lim_{n\to\infty} a^{r_n} = 1$$

Demonstração. $y_n = a^{r_n}$

$\ln y_n = r_n \ln a$

$\lim \ln(y_n) = 0 \Rightarrow \lim y_n = 1$

∎

Relembremos a noção de conjuntos limitados:

Definição 5. *Um conjunto não vazio, $X \subset \mathbb{R}$ é limitado superiormente se existir um número real M tal que:*

$$X \subset (-\infty, M]$$

Nesse caso, dizemos que M é uma cota superior para X. Analogamente, um conjunto não vazio $X \subset \mathbb{R}$ é limitado inferiormente se existir um número real m tal que:

$$X \subset [m, \infty)$$

e, sendo esse o caso, dizemos que m é uma cota inferior para x. Por fim, um conjunto não vazio $X \subset \mathbb{R}$ é limitado se x for simultaneamente limitado superior e inferiormente.

Definição 6. *Seja $X \subset \mathbb{R}$, um número $b \in \mathbb{R}$ chama-se o supremo do conjunto X quando é a menor das cotas superiores de X, mais explicitamente, b é o supremo de X quando cumpre as duas condições:*

$[S_1]$: Para todo $x \in X$, tem-se $x \leq b$;

$[S_2]$: Se $c \in \mathbb{R}$ é tal que $x \leq c$ para todo $x \leq X$ então $b \leq c$.

Observação 5. *A condição $[S_2]$ admite a seguinte reformulação:*

$[S_2^{`}]$: Se $c < b$ então existe $x \in X$ com $c < x$.

Com efeito, $[S_2]$ diz que nenhum número real menor do que b pode ser cota superior de X, daí. devemos ter $x \in X$ tal que $c < x$.

Às vezes se exprime $[S_2]$ assim: para todo $\varepsilon > 0$ existe $x < X$ tal que $b - \varepsilon < x$.

Teorema 2. *Toda sequência monótona e limitada é convergente.*

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência monótona e limitada. Sem perda de generalidade, suponhamos que tal sequência seja não decrescente, isto é, $x_n \leq x_{n+1}$, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$. Como (x_n) é limitada, em particular, é limitada superiormente. Seja $A \in \mathbb{R}$ uma cota superior para (x_n), isto é, $x_n \leq A$, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$.

Defina o conjunto de todos os termos da sequência por $X = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Claramente, $X \neq \phi$ pois, por exemplo, $x_0 \in X$.

Então, X é limitado superiormente por A. Logo, existe uma menor cota superior, à qual denotaremos por L, ou seja, existe $L = supX$.

Afirmamos que $\lim_{n \to \infty} x_n = L$.

De fato, tome $\varepsilon > 0$. Como L é cota superior para X segue que $x_n \leq L$, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$.

Além disso, como $L - \varepsilon < L = supX$, segue que $L - \varepsilon$ não é cota superior para X. Portanto, segue que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $L - \varepsilon < x_{n_0}$.

E, como (x_n) é não decresente, temos que

$$L-\varepsilon < x_{n_0} \leq x_n < L \quad \text{para todo} \quad n \geq n_0$$

Ou seja,

$$L-\varepsilon < x_n < L < L+\varepsilon \quad \text{para todo} \quad n \geq n_0$$

isto é,

$$|x_n - L| < \varepsilon \quad \text{para todo} \quad n \geq n_0$$

Portanto,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = L$$

.

■

Teorema 3. *Sejam dados $a \in \mathbb{R}_+, a \neq 1$ e seja dado $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Seja (r_n) uma sucessão monótona de racionais convergindo para x. Então a sucessão (a^{r_n}) é convergente. Se $(r_n^{'})$ é outra sucessão monótona de racionais convergindo para x, então $(a^{r_n - r_n^{'}})$ converge para zero, ou seja, $\lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n} = \lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n^{'}}$*

Demonstração. Suponha (r_n) crescente e $a > 1$. Então $r_0 < r_1 < r_2 < ... < x < r$, sendo $r \in \mathbb{Q}$.

Sendo fixado $r > x$, das propriedades das potências com expoente racional, teremos $a^{r_1} < a^{r_2} < a^{r_3} < ... < a^{r_n}$.

Como a^{r_n} é uma sucessão monótona (crescente) e limitada. Pelo Teorema 2, a^{r_n} converge.

Verificaremos agora a validade da seguinte afirmação:

Se (r_n) e $(r_n^{'})$ são sucessões de números racionais positivos e convergem ambas para o mesmo limite $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}, x > 0$, então as sucessões (a^{r_n}) e $(a^{r_n^{'}})$ convergentes, poderão ser representados pelo mesmo limite.

Escrevemos então,

$$\frac{a^{r_n}}{a^{r_n^{'}}} = a^{r_n - r_n^{'}}$$

Por hipótese, a sucessão de números racionais $(r_n - r_n^{'})$ converge para zero.

Logo, pelo Teorema 1 temos que

$$\lim_{n\to\infty} a^{r_n - r_n'} = 1$$

Como as sucessões (a^{r_n}) e $(a^{r_n'})$ são convergentes (convergindo para limites não nulos), resulta que

$$\lim_{n\to\infty} a^{r_n} = \lim_{n\to\infty} a^{r_n - r_n'}$$

.

Definição 7. *Sejam $a \in \mathbb{R}_+^*$, $a \neq 1$ e $x \in \mathbb{R}_+^*$, provado no Teorema 3, para qualquer* $\lim r_n = x$.

Teorema 4. *Dada a potência a^x, onde x é um número irracional, é possível determinar números racionais r_n e s_n tais que $r_n < x < s_n$ impliquem que $a^{r_n} < a^x < a^{s_n}$, caso $a > 1$ ou r_n por excesso ou s_n por falta caso $a < 1$.*

Demonstração. Não podem existir dois números reais diferente, como por exemplo: $A < B$, para assumir o valor a^x, com as propriedades citadas no Teorema 4 .

Se existissem tais A e B teremos

$a^{r_n} < a^x < a^{s_n}$, com $r_n, s_n \in \mathbb{Q} \Rightarrow a^{r_n} < A < B < a^{s_n}$

e então o o intervalo $[A,B]$ não conteria nenhuma potência de a com expoente racional, contrariando o Lema 6.

Portanto, quando x é irracional, a^x é o único número real cujas aproximações por falta são as potências a^{r_n}, com r_n racional menor do que x e cujas aproximações por excesso são as potências a^{s_n}, com s racional maior do que x.

Assim, chegamos a seguinte Definição 7 para potência com expoente real. ■

No próximo capítulo, retornaremos ao conceito de potência com expoente irracional a partir da abordagem da Função Exponencial.

CAPÍTULO 2

FUNÇÃO EXPONENCIAL

Neste capítulo será definida e caracterizada a Função Exponencial com domínio real utilizando as propriedades definidas e demonstradas no capítulo 1, utilizaremos como referência Lima (2014).

2.1 A Função Exponencial

A Função Exponencial pode ser associada a um modelo matemático de várias situações, como no caso da reprodução das células por mitose. No entanto, para determinar o tipo de função a ser utilizada para modelar a situação é necessário conhecer as propriedades características das funções.

Definição 8. *Seja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ *uma função monótona e injetiva, isto é, crescente ou decrescente. A afirmação a seguir é equivalente:*

$f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ *para todo* $x, y \in \mathbb{R}$*, então diremos que* f *é uma Função Exponencial.*

A partir da propriedade citada na Definição 8, podemos observar as seguintes proposições:

Proposição 1. *Se* f *é uma função exponencial e existe um* $x \in \mathbb{R}$ *tal que* $f(x) = 0$ *então* $f(z) = 0$*, para todo* $z \in \mathbb{R}$*.*

Demonstração.

$$f(z) = f(z+x-x) = f(z-x).f(x) = 0$$

Logo, f deve ser identicamente nula. ■

Proposição 2. *Se* f *é uma Função Exponencial tal que* $f(x) \neq 0$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$ *então* $f(z) > 0$*, para todo* $z \in \mathbb{R}$*.*

Demonstração.

$$f(z) = f\left(\frac{z}{2} + \frac{z}{2}\right) = f\left(\frac{z}{2}\right).f\left(\frac{z}{2}\right) = \left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2 > 0$$

Assim, pela da Definição 8, tanto faz dizer que o contra- domínio de f é $\mathbb{R}$ como dizer que é $\mathbb{R}_+$. ■

Observação 6. *Segue da definição que se f é uma função exponencial então $f(0) = 1$.*

Demonstração. De fato, $f(0) = f(0+0) = f(0) \cdot f(0)$. Ou seja, $f(0) = f(0)^2$. Logo, $f(0) = 1$ ■

Observação 7. (i) *Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma Função Exponencial para todo $n \in \mathbb{N}$ tem-se:*

1) $f(n) = f(1)^n, n \in \mathbb{N}$

2) $f\left(\frac{m}{n}\right) = f(1)^{\frac{m}{n}}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$

3) $f(x) = f(1)^x$ *qualquer que seja o* $x \in \mathbb{R}$.

Demonstração. 1) $f(n) = f(1+1+1+\cdots+1) = f(1) \cdot f(1) \cdot f(1) \cdots f(1) = f(1)^n$

Portanto, $f(n) = f(1)^n$.

2) $f(1)^m = f(m) = f\left(n \cdot \frac{m}{n}\right) = f\left(\frac{m}{n} + \ldots \frac{m}{n}\right) = f\left(\frac{m}{n}\right).f\left(\frac{m}{n}\right)\ldots f\left(\frac{m}{n}\right) = f\left(\frac{m}{n}\right)^n$.

Logo, $f\left(\frac{m}{n}\right) = f(1)^{\frac{m}{n}}$.

3) Como $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ implica que $f(r) = f(1)^r$ para todo $r \in \mathbb{Q}$ e para todo $x, y \in \mathbb{Q}$.

Seja (r_n) uma sucessão monótona, digamos crescente de racionais que converge a $x \in \mathbb{R}|\mathbb{Q}$. Assim, $f(r_n)$ é uma sequência monótona crescente e limitada ($r_n < x$ para todo $n \in \mathbb{N}$ então $f(r_n) < f(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$). Portanto $(f(r_n))$ é convergente.

Escrevemos $\lim f(r_n) = \beta$. Segue que $\beta \leq f(x)$. Suponhamos que $\beta < x$. Pelo ítem (iii) do Lema 1, existe um M tal que $f(1)^M \in (\beta, f(x))$, ou seja, $f(r_n) \leq \beta \leq f(M) < f(x)$. Portanto $r_n < M < x$. O que contradiz $\lim r_n = x$. Logo devemos ter $f(x) = \beta = \lim f(r_n)$.

Observe ainda que se $x = \lim r_n$ for igual a $\lim P_n$ então, $\lim f(r_n) = \lim f(P_n)$. De fato, vimos que

$f(r_n) = f(r)^{r_n}$ e $f(P_n) = f(r)^{P_n}$, logo como $\lim r_n - P_n = 0$, segue que $\lim f(r_n) = \lim f(P_n)$.

Assim,

$$f(x) = \lim f(r_n) = \lim f(1)^{r_n} = f(1)^x$$

.

Concluímos então que se f é uma Função Exponencial, então $f(x) = f(1)^x$.

Reciprocamente definindo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $f(x) = a^x$ temos que f é uma função monótona que satisfaz $f(x+y) = a^{x+y} = a^x.a^y = f(x).f(y)$ e se $f(x) = f(y) \Rightarrow a^x = a^y \Rightarrow a^{x-y} = 1 \Rightarrow x = y$.

Portanto, para toda Função Exponencial, existe um $a \in \mathbb{R}_+^*$ tal que $f(x) = a^x$,para todo $x \in \mathbb{R}$ e toda função da forma $f(x) = a^x$ é uma Função Exponencial.

■

2.1.1 Crescimento exponencial

As funções exponenciais são caracterizadas pelo fato de que ao longo do tempo seus valores dobram no caso de exponenciais crescentes, ou diminuem para a metade no caso de exponenciais decrescente, no intervalo de tempo constante independente do valor da função num determinado instante. Funções exponenciais decrescentes ocorrem frequentemente na natureza, talvez o exemplo mais conhecido seja a variação da intensidade de radioatividade de um material radioativo. Estes materiais são caracterizados pela sua meia vida o que nada mais é do que o intervalo de tempo em que diminui para a metade a intensidade radioativa daquele material. Funções exponenciais crescentes, são muitos raras na natureza e quando ocorrem duram um tempo limitado, em geral curto, pois na natureza os recursos disponíveis são sempre limitados. Como as funções exponenciais crescentes tem um crescimento muito acentuado o valor da função rapidamente excede o limite imposto pelos recursos disponíveis. Vejamos as proposições e o Lema 7 abaixo:

Para analisarmos o crescimento da função iremos validar as proposições e o Lema 7 abaixo:

Proposição 3. *Seja* (x_n) *uma sequência de números reais. Então* $\lim x_n = 0$ *se, e somente se,* $\lim |x_n| = 0$.

Demonstração. Se $\lim x_n = 0$, então para cada $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que

$$|x_n| < \varepsilon, \text{ para todo } n > n_0$$

.

Logo,

$$||x_n| - 0| = ||x_n|| = |x_n| < \varepsilon,$$

para todo $n > n_0$, provando que $\lim |x_n| = 0$.

Reciprocamente, se $\lim |x_n| = 0$, então dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ talque $||x_n|| < \varepsilon$,para todo $n > 0$. Então

$$|x_n| = ||x_n|| < \varepsilon, \text{ para } n > n_0$$

Portanto,

$$\lim x_n = 0$$

■

Proposição 4. *Uma função $f : D \to \mathbb{R}$ é contínua se dado $x_0 \in \mathbb{R}$ é possível tornar a diferença $|a^x - a^{x_0}|$ tão pequena quanto se deseje, desde que x seja tomado suficientemente próximo de x_0. Temos que*

$$\lim_{n \to x_0} (a^n) = a^{x_0}$$

Demonstração. Suponhamos $a > 1$ e $h > 0$. Dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$, queremos mostrar que, tomando h pequeno teremos $a^h < 1 + \varepsilon$. Ora, pela desigualdade Bernoulli, (demonstrado na Seção 1.4) $(1+\varepsilon)^n > 1 + n\varepsilon$. Portanto, se tomarmos $n \in \mathbb{N}$, tal que $n > \frac{(a-1)}{\varepsilon}$, teremos $n\varepsilon > a - 1$. Logo, $a < 1 + n\varepsilon$ e daí (por Bernoulli) $a < (1+\varepsilon)^n$ e finalmente $a^{\frac{1}{n}} < 1 + \varepsilon$. Em suma: dado um $\varepsilon > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a^{\frac{1}{n}} < 1 + \varepsilon$. Mais precisamente: $1 < a^{\frac{1}{n}} < 1 + \varepsilon$. Se tomarmos h tal que $0 < h < \frac{1}{n}$, teremos $1 < a^h < a^{\frac{1}{n}} < 1 + \varepsilon$. Assim faremos a^h tão próximo de 1 quanto desejemos. Escrevemos $\lim_{h \to 0} a^h = 1$ (1 é o limite de a^h quando h tende a 0).

Agora, fixado $x_0 \in \mathbb{R}$, pomos $h = x - x_0$ e temos $a^x - a^{x_0} = a^{x_0 + h} - a^{x_0} = a^{x_0}(a^h - 1)$. Quando x se aproxima de x_0 , h tende a 0, a^h tende a 1 e $a^h - 1$ tende a 0. Como a^{x_0} é fixo (não depende de h), temos $\lim_{x \to x_0}(a^x - a^{x_0}) = 0$, ou seja $\lim_{x \to x_0}(a^x) = a^{x_0}$, o que caracteriza a continuidade da Função Exponencial.

■

Proposição 5. *A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, definida por $f(x) = a^x$, com $a \in \mathbb{R}$ e $a \neq 1$, é ilimitada superiormente.*

Demonstração. Com efeito, todo intervalo em $\mathbb{R}_+$ contém valores $f(r) = a^r$ segundo o Lema 6 da seção anterior.

Mais precisamente: se $a > 1$, então a^x cresce sem limites quando $x > 0$ é muito grande.

E se $0 < a < 1$ então a^x torna-se arbitrariamente grande quando $x < 0$ tem valor absoluto grande.

■

Lema 7. *A função exponencial $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+, f(x) = a^x, a \neq 1$, é bijetiva.*

Demonstração. A injetividade de f decorre de sua monotonicidade. Se $a > 1$, então

$$x_1 > x_2 \text{ implica } a^{x_1} > a^{x_2}$$

Portanto, $x_1 \neq x_2$ implica que $a^{x_1} \neq a^{x_2}$. Analogamente chegamos a essa conclusão se $0 < a < 1$.

Provaremos agora que f é sobrejetiva, ou seja, que para todo número real $y > 0$ existe um $x \in \mathbb{R}$ tal que $a^x = y$.

O Lema 6 garante que para cada $n \in \mathbb{N}$, existe uma potência a^{r_n}, com $r_n \in \mathbb{Q}$, que pertence ao intervalo $\left(y - \frac{1}{n}, y + \frac{1}{n}\right)$.

Logo,

$$|a^{r_n} - y| < \frac{1}{n}$$

e assim vale,

$$\lim_{n\to\infty} a^{r_n} = y$$

Passando a uma subsequência, se necessário podemos assumir que:

$$a^{r_1} < a^{r_2} < \cdots < a^{r_n} < \cdots < y$$

Como a Função Exponencial é ilimitada superiormente, podemos assegurar que existe um $s \in \mathbb{Q}$ tal que $y < a^s$. Usando a monotonicidade de f, verificamos que

$$r_1 < r_2 < \cdots r_n < \cdots < s$$

Portanto, (r_n) é uma sequência monótona e limitada superiormente por s. Logo é convergente, digamos $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = x$

Como f é contínua, obtemos

$$a^x = \lim_{n\to\infty} a^{r_n} = y$$

Assim f é sobrejetiva.

O caso $0 < a < 1$ é provado de maneira análoga.

Portanto, f é bijetiva.

■

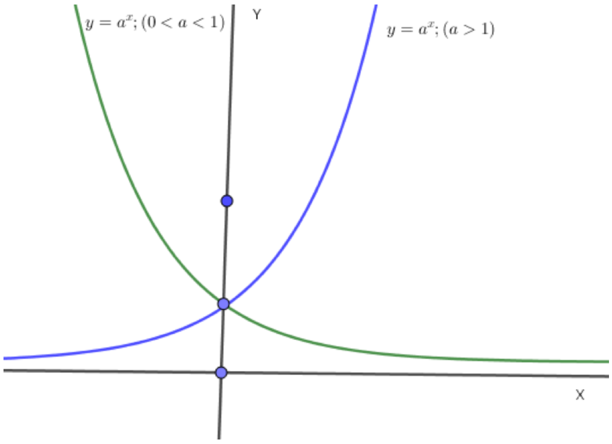


Figura 1 – Gráfico de $f(x) = a^x$

Fonte: Autora

Observação 8. *O gráfico (Figura 1) de $f(x) = a^x$ nos casos $a > 1$ e $0 < a < 1$.*

Quando $a > 1$, nota-se que, quando x varia da esquerda para a direita, a curva exponencial $y = a^x$ apresenta um crescimento bastante lento enquanto x é negativo. A medida que x cresce, o crescimento de y se torna cada vez mais acelerado. Isto se reflete na inclinação da tangente ao gráfico; para valores positivos muito grandes de x, a tangente é quase vertical.

Observação 9. *Com relação ao gráfico da função $f(x) = a^x$, podemos dizer:*

(i) A curva está toda acima do eixo dos x pois $y = a^x > 0$ para todo x pertencente a $\mathbb{R}$.

(ii) Corta o eixo y no ponto de ordenada 1.

(iii) Se $a > 1$ é de uma função crescente e se $0 < a < 1$ é uma função decrescente.

Exemplo 1. *Se compararmos o gráfico de $y = 2^x$ com o de $y = x^{10}$ (Figura 2), veremos que, para $0 < x < 1,077$ temos $x^{10} < 2^x$. Para $1,077 < x < 58,77$ tem-se $x^{10} > 2^x$ e, para todo $x > 58,77$ tem-se sempre $2^x > x^{10}$.*

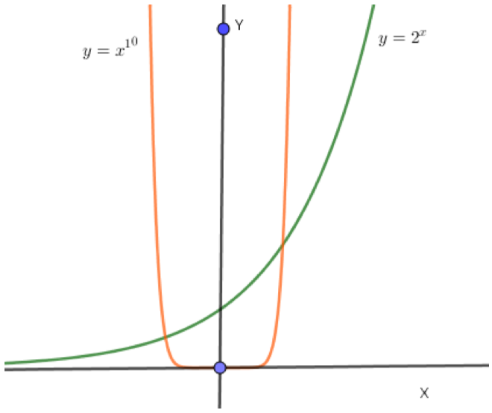


Figura 2 – Gráfico das funções $y = 2^x$ e $y = x^{10}$

Fonte: Autora

Podemos observar que 2^x cresce mais rápido que x^{10}. De fato, o crescimento de uma Função Exponencial é mais rápido que qualquer polinômio.

Portanto, quando se fala em crescimento exponencial, fala-se em um crescimento muito mais rápido do que o de qualquer outra função polinomial.

Diante do exposto acima, iremos definir a função crescente e decrescente.

Definição 9. *Uma função $f : A \to B$ é dita crescente se, $f(x) > f(y)$ sempre que $x > y$.*

A Função Exponencial é crescente quando se tem a base $a > 1$. Isto decorre do Lema 7 que diz $a^x < a^y$ quando $a > 1$ e $x < y$.

Vejamos:

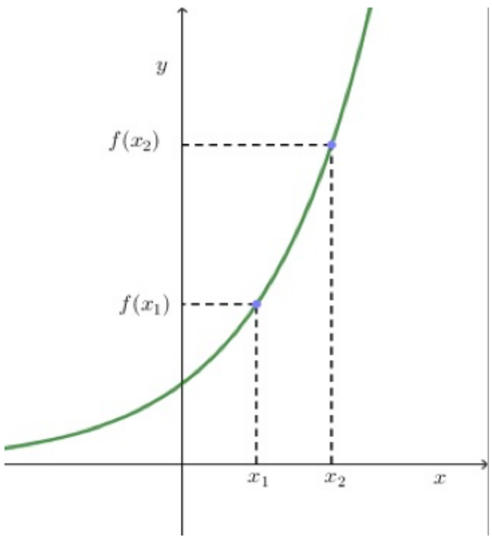


Figura 3 – Gráfico de $f(x) = a^x$

Fonte: Autora .

Além disso, para bases maiores que um, vemos que os valores de $y = f(x)$ se aproximam de zero quando x tende a $-\infty$. Já quando x tende a $+\infty$, vemos que os valores de $y = f(x)$ tendem a $+\infty$.

Definição 10. *Uma função $f : A \to B$ é dita decrescente se, $f(x) < f(y)$ sempre que $x > y$.*

No gráfico da Figura 4 de uma Função Exponencial com base $0 < a < 1$, se nota que, em contraposição ao gráfico da Figura 3, a medida que o valor de x aumenta o valor de y diminui.

Isto indica que a Função Exponencial é decrescente. Mais uma vez isto é consequência do Lema 7,

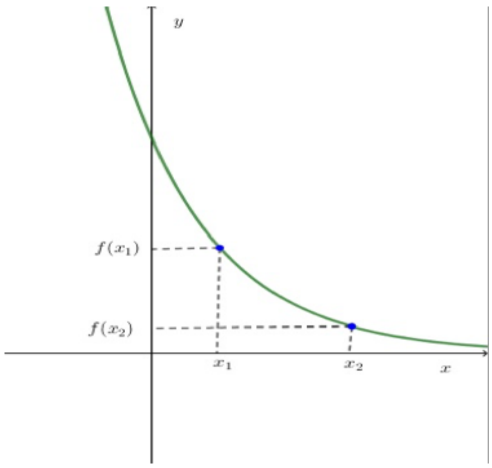


Figura 4 – Gráfico de $f(x) = a^{-x}$

Fonte: Autora

Neste caso, de bases entre 0 e 1, vemos que os valores de y igual a $f(x)$ se aproximam de 0, quando x tende a $+\infty$. Já quando x tende a $-\infty$ vemos que os valores de $y = f(x)$ tendem a $+\infty$.

2.2 Caracterização da Função Exponencial

Geralmente, quando ocorre uma situação-problema pode-se recorrer a um modelo matemático, como as funções, por exemplo, para solucioná-la. Para saber escolher corretamente o tipo de função que melhor representa uma situação-problema é necessário conhecer as propriedades características de cada tipo de função. A Função Exponencial não foge essa regra, pois é possível utilizar algumas propriedades para verificar se um problema é ou não modelado através de uma função exponencial. O Teorema 5 a seguir nos dará essa caracterização e resume o que apresentamos na seção anterior.

Teorema 5. *(Caracterização da Função Exponencial)*

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ uma função monótona e injetiva. São equivalente:

(1) $f(n.x) = f(x)^n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ e todo $x \in \mathbb{R}$;

(2) $f(x) = a^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, em que $a = f(1)$;

(3) $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ quaisquer que sejam $x, y \in \mathbb{R}$.

Demonstração. $(1) \Rightarrow (2)$

Primeiramente mostraremos que $f(r.x) = f(x)^r$ para todo racional $r = \frac{m}{n}$.

De fato,

$$f(rx)^n = f(nrx) = f(mx) = f(x)^m \quad \text{implica que} \quad f(rx) = f(x)^{\frac{m}{n}} = f(x)^r$$

Agora, tomando $a = f(x)$, temos que $f(r) = f(r.1) = f(1)^r = a^r$, para todo $r \in \mathbb{Q}$.

Sem perda de generalidade, suponhamos agora que f seja crescente.

Logo, $1 = f(0) < f(1) = a$. Suponhamos, por contradição, que existe um número real x tal que $f(x) \neq a^x$, digamos $f(x) < a^x$ ($f(x) > a^x$ é análogo).

Então, pelo Lema 5, temos que existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $f(x) < a^r < a^x$.

Como f é crescente, devemos ter $x < r$. Por outro lado, como $a^r < a^x$ e $a > 1$, devemos ter $r < x$, o que é uma contradição, provando que $(1) \Rightarrow (2)$ quando f é crescente. A prova é análoga se f for decrescente.

$(2) \Rightarrow (3)$

Seja $f(x) = a^x$, $x \in \mathbb{R}$ e $a = f(1)$. Sendo $y \in \mathbb{R}$, obtemos

$$f(x+y) = a^{x+y} = a^x.a^y = f(x).f(y)$$

$(3) \Rightarrow (1)$

Seja $f(x+y) = f(x).f(y)$, $x, y \in \mathbb{R}$. Para $n \in \mathbb{N}$, vale

$$f(nx) = f(\underbrace{x+x+x+\cdots+x}_{n \text{ fatores}}) = \underbrace{f(x).f(x).f(x)\cdots f(x)}_{n \text{ fatores}} = f(x)^n$$

Provaremos agora o caso $f(-nx) = f(x)^{-n}$. Para isto, analisemos o caso $f(-x)$.

Então,

$$f(-x).f(x) = f(-x+x) = f(0) = 1 \Rightarrow f(-x) = \frac{1}{f(x)}$$

.

Logo,

$$f(-nx) = f(\underbrace{-x-x-x-\cdots-x}_{n \text{ fatores}}) = \underbrace{f(-x)\cdot f(-x)\cdot f(-x)\cdots f(-x)}_{n \text{ fatores}} \tag{1}$$

Da expressão (1), segue-se que

$$= \underbrace{\frac{1}{f(x)}\cdot\frac{1}{f(x)}\cdot\frac{1}{f(x)}\cdots\frac{1}{f(x)}}_{n \text{ fatores}} = \frac{1}{f(x)^n} = f(x)^{-n}$$

Portanto,

$$f(-nx) = f(x)^{-n}$$

■

Diversas situações-problemas tais como juros compostos em função do tempo e desintegração radioativa são representadas por uma Função Exponencial, no entanto, ela aparece, na maioria das vezes, através da forma chamada "tipo exponencial". Definiremos, a seguir, esse tipo de função, bem como analisaremos também a sua caracterização, igual ao que foi feito na Função Exponencial.

Definição 11. *Uma função $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é chamada de tipo exponencial quando se tem $g(x) = b\cdot a^x$ para todo $x\in\mathbb{R}$, onde a e b são constantes positivas. Se $a>1$, g é crescente e se $0<a<1$, g é decrescente.*

Observação 10. *A função g goza das mesmas propriedades da Função Exponencial f, entre elas, a monotonicidade, a injetividade e o fato de ser crescente quando $a>1$ e decrescente quando $0<a<1$.*

Observação 11. *Se a função $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é de tipo exponencial então, para quaisquer $x,h\in\mathbb{R}$, os quocientes $\frac{b\cdot a^{x+h}-b\cdot a^x}{b\cdot a^x} = a^h-1$ e $\frac{b\cdot a^{x+h}-b\cdot a^x}{b\cdot a^x} = a^h$ dependem apenas de h mas não de x.*

Teorema 6. *(Caracterização das funções tipo exponencial)*

Uma função $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ é tipo exponencial se, e somente se, for monótona e injetiva, tal que, para $x,h\in\mathbb{R}$ quaisquer, $\frac{g(x+h)}{g(x)}$ depende apenas de h, mas não de x.

Demonstração. Seja $g(x) = b \cdot a^x$, para todo $a, b \in \mathbb{R}_+$.

Como,

$$\frac{g(x+h)}{g(x)} = \frac{b. \cdot a^{x+h}}{b.a^x} = \frac{b.a^x(a^h)}{b.a^x} = a^h$$

Logo, $\frac{g(x+h)}{g(x)}$ depende apenas de h e não de x.

Reciprocamente suponha Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ tal que monótona e injetiva $fracg(x+h)g(x) = \varphi(h) =$, ou seja, os quocientes independentes. Considere $f(x) = \frac{g(x)}{b}$, onde $b = g(0)$, temos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ monótona e injetiva, com independente de x e, agora com $f(0) = 1$. Então, pondo $x = 0$ na relação $\varphi(h) = \frac{f(x+h)}{f(x)}$ obtemos $\varphi(h) = f(h)$ para todo $h \in \mathbb{R}$. Vemos assim que a função monótona injetiva cumpre $f(x+h)$ é igual a $f(x).f(h)$, ou seja, $f(x+y) = f(x).f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

Pelo Teorema 5, item 2 temos que $f(x) = a^x$, com $a = f(1)$.

Logo $g(x) = b \cdot f(x) = b \cdot a^x$.

Como queríamos demonstrar.

■

2.3 A função inversa da Função Exponencial

Definição 12. *Seja $f : X \to Y$ uma função. dizemos que uma função $g : Y \to X$ é a inversa de f quando tivermos que*

(1) $g(f(x)) = x$

(2) $f(g(y)) = y$

para quaisquer $x \in X$ e $y \in Y$.

Evidentemente g é inversa de f se, e somente se, f é inversa de g.

Observação 12. *Sejam $f : X \to Y$ uma função e $f^{-1} : Y \to X$ sua inversa quando se tem $g(f(x)) = x$ e $f(g(y)) = y$ para quaisquer $x \in X$ e $y \in Y$. Evidentemente, g é inversa de f se, e somente se, f é inversa de g.*

Quando g é inversa de f, tem-se $g(y) = x$ se, e somente se, $f(x) = y$.

[1] *f é injetiva pois $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \Rightarrow x_1 = x_2$.*

[2] *f é sobrejetiva pois, dado $y \in \mathbb{Y}$, seja $x = g(y)$. Então $f(x) = f(g(y)) = y$.*

[3] *Concluímos que se a função f possui inversa então f é injetiva e sobrejetiva, ou seja, f é uma bijeção entre X e Y.*

[4] *A inversa de f é única pois se g e h forem inversas de f teremos: dado $y \in Y$ qualquer, seja $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Então, $g(y) = g(f(x)) = x = h(f(x)) = h(y)$.*

Portanto, $g(y) = h(y)$ para todo $y \in Y$.

[5] *Por causa da observação* [4], *podemos representar a inversa de f por f^{-1} sem risco de interpretações errôneas.*

Proposição 6. *Se $f : X \to Y$ é uma bijeção entre X e Y, então f possui inversa $f^{-1} : Y \to X$.*

Demonstração. Definimos $f^{-1}(y)$ como sendo o único $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Deste modo, por definição, temos que

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x \text{ e } f(f^{-1}(y)) = f(x) = y$$

.

■

Como, verificamos que para todo número real positivo $a \neq 1$, a função exponencial $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ dada por $f(x) = a^x$ é uma bijeção entre $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}_+$, crescente se $a > 1$ e decrescente se $0 < a < 1$.

Desta forma, pela proposição $f(x) = a^x$ possui uma inversa.

Definição 13. *Definimos, para cada $a \neq 1$, a função logarítmica $log_a : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ como sendo a função inversa da função exponencial $f(x) = a^x$, que associa a cada $x \in \mathbb{R}_+$ o número real $log_a^{(x)}$, chamado de o logaritmo de x na base a.*

Dessa forma, por definição de função inversa, tem-se que

(1) $a^{log_a^{(x)}} = x$.

(2) $log_a^{(a^x)} = x$.

Logo, log_a^x é o expoente ao qual se deve elevar a base a para obter o número x. Isto significa que

$$y = log_a^x \text{ implica que } \quad a^y = x.$$

Proposição 7. *Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}_+$ vale a igualdade*

$$log_a^{(x.y)} = log_a^{(x)} + log_a^{(y)}$$

Demonstração. De fato, tomando $u = log_a^x$ e $v = log_a^y$ temos que $a^u = x$ e $a^v = y$.

Logo

$$x.y = a^u \cdot a^v = a^{u+v}$$

e portanto,

$$log_a^{(x.y)} = log_a^{(x)} + log_a^{(y)}$$

Para x e y positivos quaisquer.

As proposições 8 e 9 serão demonstradas de acordo com Iezzi & Murakami (2005),

Proposição 8. *Se* $0 < a \neq 1$, $x > 0$ *e* $y > 0$ *então,* $log_a^{(\frac{x}{y})} = log_a^{(x)} - log_a^{(y)}$

Demonstração. Fazendo $log_a^{(x)} = u$ e $log_a^{(y)} = v$ e $log_a^{(\frac{x}{y})} = z$, mostremos que $z = u - v$.

De fato:

1) $log_a^{(x)} = u$ implica que $a^u = x$.

2) $log_a^{(y)} = v$ e implica que $a^v = y$.

3) $log_a^{(\frac{x}{y})} = z$ implica que $a^z = \frac{x}{y}$.

Fazendo $a^z = \frac{a^u}{a^v}$, temos que $a^z = a^{u-y}$. Portanto $z = x - y$

Como queríamos demonstrar. ■

Observação 13. $a)$ *Fazendo* $x = 1$, *escrevemos:* $log_a^{(\frac{1}{y})} = log_a^{(1)} - log_a^{(y)}$

$b)$ *Se* $x > 0$ *e* $y > 0$ *então* $\frac{x}{y} > 0$ *e vale a identidade:*

$$log_a^{(\frac{x}{y})} = log_a^{(x)} - log_a^{(y)} \quad com \quad 0 < a \neq 1$$

mas, se soubermos apenas que $\frac{x}{y} > 0$ *então teremos:*

$$log_a^{(\frac{x}{y})} = log_a^{|x|} - log_a^{|y|} \quad com \quad 0 < a \neq 1$$

.

Proposição 9. *Se* $0 < a \neq 1$, $b > 0$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$, *então* $log_a^{b^\alpha} = \alpha.log_a^{(b)}$

Demonstração. Fazendo $log_a^{(b)} = x$ e $log_a^{b^\alpha} = y$, provemos que $y = \alpha.x$

De fato,

(i) $log_a^{(b)} = x$ implica que $a^x = b$.

(ii) $log_a^{b^\alpha} = y$ implica que $a^y = b^\alpha$

Então, $a^y = (a^x)^\alpha$. Logo, $a^y = a^{\alpha.x}$. Portanto, $y = \alpha \cdot x$. ■

Corolário 2. *Em qualquer base a* $(0 < a \neq 1)$, $b > 0$ *e* $n \in \mathbb{N}^*$, *então*

$$log_a^{\sqrt[n]{b}} = log_a^{b^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{n} \cdot log_a^b$$

Corolário 3. *Se* $b > 0$, *então* $b^n > 0$ *para todo* α *real e vale a identidade:*
$log_a^{b^\alpha} = \alpha \cdot log_a^b$. *Mas, se soubermos apenas que* $b^n > 0$, *então temos:*
$log_a^{b^\alpha} = \alpha \cdot log_a^{|b|}$.

CAPÍTULO 3

MÉTODO FACILITADOR PARA A REALIZAÇÃO DE UMA APRENDIZAGEM MAIS DINÂMICA, CRIATIVA E SIGNIFICATIVA: RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS.

Se o docente pretende ajudar os estudantes a serem mais autônomos, adaptáveis a novas situações e a pensarem de forma organizada, eficaz e criativa, ele deve propor atividades diversificadas e significativas, como a resolução de problemas.

A resolução de problemas é uma estratégia de ensino e aprendizagem que tem por objetivo desenvolver nos estudantes o domínio de técnicas e a capacidade de buscar conceitos, fatos, procedimentos validados e aceitos pela comunidade científica e utilizá-los para responder as questões e solucionar problemas.

Muitas pesquisas já foram realizadas sobre a Metodologia de Resolução de Problemas no ensino da Matemática a exemplo da obras: Didática da resolução de problemas de Matemática (Dante, L. R.); Aprender a resolver problemas e resolver problemas para aprender (Echeverría, M. P); Matemática para aprender a pensar: o papel das crenças na resolução de problemas (Vila, A.; Callejo, M. L.), dentre muitos outros. Porém no cotidiano dos professores da área ainda surgem muitas indagações a respeito do assunto.

Segundo os PCN de Matemática (BRASIL, 1998), a resolução de problemas possibilita aos alunos mobilizar conhecimentos e desenvolver a capacidade para gerenciar as informações que estão a seu alcance. Assim, os alunos terão oportunidade de ampliar seus conhecimentos acerca de conceitos e procedimentos matemáticos bem como ampliar a visão que têm dos problemas, da Matemática, do mundo em geral e desenvolver sua autoconfiança.

A atividade de resolver problemas está presente na vida das pessoas, exigindo soluções que muitas vezes requerem estratégias de enfrentamento. O aprendizado de estratégias auxilia o aluno a enfrentar novas situações em outras áreas do conhecimento.

Sendo assim, é de suma importância que os professores compreendam como trabalhar esta metodologia, a fim de desenvolver no aluno a capacidade de resolver situações desafiadoras, interagir entre os pares, desenvolver a comunicação, a criatividade e o senso crítico.

Dante (1998), afirma que embora tão valorizada, a resolução de problemas é um dos tópicos mais difíceis de serem trabalhados na sala de aula. É muito comum os alunos saberem efetuar os algoritmos e não conseguirem resolver um problema que envolva um ou mais desses algoritmos. Isso se deve à maneira com que os problemas matemáticos são trabalhados na sala de aula e apresentados nos livros didáticos, muitas vezes apenas como exercícios de fixação dos conteúdos trabalhados.

Um problema pode envolver muito mais do que a simples resolução das operações. Deve, sim, possibilitar ao aluno desenvolver estratégias, buscar vários caminhos para solucioná-lo à sua maneira, de acordo com sua realidade e raciocínio.

Para Dante (1998), um problema é qualquer situação que exija a maneira matemática de pensar e conhecimentos específicos para solucioná-la. O autor ressalta que um bom problema deve:

- ser desafiador para o aluno;
- ser real;
- ser interessante;
- ser o elemento de um problema realmente desconhecido;
- não consistir na aplicação evidente e direta de uma ou mais operações aritméticas;
- ter um nível adequado de dificuldade.

Um bom problema deve ser capaz de instigar o aluno a resolvê-lo. Deve ser interessante, criativo, desenvolver seu pensamento e desafiá-lo constantemente, pois ao contrário ele ficará desmotivado.

É importante estabelecer a diferença entre exercício e problema. No primeiro, o aluno não precisa decidir sobre o procedimento a ser utilizado para se chegar à solução.

Pozo (1998) exemplifica: “As tarefas em que precisa aplicar uma fórmula logo depois desta ter sido explicada em aula, ou após uma lição na qual ela aparece explicitamente... servem para consolidar e automatizar certas técnicas, habilidades e procedimentos necessários para posterior solução de problemas...”.

Dante (1998) também faz esta diferenciação onde exercício serve para exercitar, para praticar um determinado algoritmo ou processo e problema é a descrição de uma situação onde se procura algo desconhecido e não temos previamente nenhum algoritmo que garanta a solução.

Para este mesmo autor, a resolução de um problema exige certa dose de iniciativa e criatividade, aliada ao conhecimento de algumas estratégias.

Para Dante (1998) os objetivos da resolução de problemas são:

- Fazer o aluno pensar produtivamente;
- Desenvolver o raciocínio do aluno;
- Ensinar o aluno a enfrentar situações novas;
- Dar ao aluno a oportunidade de se envolver com as aplicações da Matemática;
- Tornar as aulas de Matemática mais interessantes e desafiadoras;
- Equipar o aluno com estratégias para resolver problemas;
- Dar uma boa base matemática às pessoas.

A partir da leitura e interpretação dos problemas, é possível o envolvimento do aluno na busca por estratégias de resolução, na persistência em encontrar uma solução, na ampliação e na ressignificação de conceitos e idéias que ele já conhece.

Por este motivo, vários autores evidenciaram a importância do uso desta metodologia nas aulas.

> [...] coloca como um dos objetivos da Educação Básica, desenvolver no aluno a capacidade de solucionar problemas (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011).

Segundo Onuchic & Allevato (2011), o problema não deve ser tratado como um caso isolado, mas como um passo para alcançar a natureza interna da Matemática, assim como seus usos e aplicações. Ele define como problema tudo aquilo que não se sabe fazer, mas que se está interessado em resolver.

Dante (1998) classifica os problemas em vários tipos:

- Exercícios de reconhecimento, onde o objetivo é fazer com que o aluno reconheça, identifique ou lembre um conceito;
- Exercícios de algoritmos: servem para treinar a habilidade em executar um algoritmo e reforçar conhecimentos anteriores;

- Problemas – padrão: a solução já está contida no enunciado, e a tarefa básica é transformar a linguagem usual em linguagem matemática, com o objetivo de recordar e fixar os fatos básicos através dos algoritmos das quatro operações;
- Problemas–processo ou heurísticos: sua solução envolve as operações que não estão contidas no enunciado, exigem do aluno um tempo para pensar e arquitetar um plano de ação;
- Problemas de aplicação: também chamados de situações-problema, são aqueles que retratam situações reais do dia-a-dia e que exigem o uso da Matemática para serem resolvidos;
- Problemas de quebra-cabeça: constituem a chamada Matemática recreativa, e sua solução depende quase sempre de um golpe de sorte ou da facilidade em perceber algum truque.

Para se desenvolver uma boa atividade, o que menos importa é saber se um problema é de aplicação ou de quebra-cabeça. O principal é analisar o potencial do problema no desenvolvimento de capacidades cognitivas, procedimento e atitudes e na construção de conceitos e aquisição de fatos da Matemática.

O melhor critério para organizar um repertório é selecionar, ou mesmo formular problemas que possibilitem aos alunos pensar sobre o próprio pensamento, que os coloquem diante de variadas situações.

Portanto, o professor deve ter em mente os objetivos que deseja alcançar para que possa fazer o uso adequado da resolução de problemas, seja para aplicar alguma técnica ou conceito desenvolvido, trabalhar com problemas abertos nos quais há mais de uma solução possível, suscitando o debate e a argumentação em defesa de cada resolução, trabalhar com problemas gerados a partir de situações de jogo ou da interpretação de dados estatísticos como ferramentas metodológicas para aplicação do conteúdo Função Exponencial.

A seleção do problema deverá ser decorrente dos objetivos a serem alcançados.

Segundo o esquema de Polya (1978), são quatro as principais etapas para a resolução de um problema:

1. **Compreender o problema;**

–O que se pede no problema?

– Quais são os dados e as condições do problema?

–É possível fazer uma figura, um esquema ou um diagrama?

– É possível estimar a resposta?

2. **Elaborar um plano;**

– Qual é o seu plano para resolver o problema?

–Que estratégia você tentará desenvolver?

–Você se lembra de um problema semelhante que pode ajudá-lo a resolver este?

–Tente organizar os dados em tabelas e gráficos.

–Tente resolver o problema por partes

3. Executar o plano;

–Execute o plano elaborado, verificando-o passo a passo.

– Efetue todos os cálculos indicado no plano.

– Execute todas as estratégias pensadas, obtendo várias maneiras de resolver o mesmo problema.

4. **Fazer o retrospecto ou verificação;**

–Examine se a solução obtida está correta.

– Existe outra maneira de resolver o problema?

– É possível usar o método empregado para resolver problemas semelhantes?

Diante de um problema, o levantamento de hipóteses, a testagem dessas hipóteses e a análise dos resultados obtidos são procedimentos que devem ser enfatizados com os alunos. Só assim é possível garantir o desenvolvimento da autonomia frente a situações com as quais eles terão de lidar dentro e fora da escola.

Quando se propõe aplicar a resolução de problemas no ensino da matemática refere-se a problemas não rotineiros e algorítmicos, onde o aluno muitas vezes pergunta “a conta é de mais ou de menos?"

Segundo Dante (1998), ensinar a resolver problema é uma tarefa mais difícil do que ensinar conceitos, habilidades e algoritmos matemáticos. O professor deve fazer perguntas para que os alunos possam compreender o problema. Os alunos devem ser encorajados a fazer perguntas ao professor e entre eles mesmos.

O professor deve administrar esse processo, proporcionando situações que permitam surgir uma variedade de procedimentos na sala de aula, socializando-os, comparando-os, deve ser dada ênfase ao processo de resolução e não à obtenção de respostas corretas.

Diante do exposto, nota-se a importância de que o professor conheça essa metodologia, pois sua proposta é de um trabalho centrado no aluno, onde ele possa desenvolver sua aprendizagem, construir seu conhecimento, onde o professor apenas mediará essa construção.

Sendo assim, para se obter sucesso na utilização da metodologia o professor deve conhecê-la e ter vontade de enfrentar novas situações, pois não é uma tarefa fácil. Exige grande esforço do professor e sua preparação é fundamental.

Assim é preciso reforçar que, um problema exige reflexão e tomada de decisões para ser resolvido. É uma situação nova ou diferente que requer a utilização de técnicas conhecidas.

Há três tipos fundamentais de problema: cotidiano, científico e escolar.

> *O problema cotidiano é uma situação do dia a dia que requer uma solução: o computador que deixa de funcionar, o gás que acaba ou o chuveiro que não aquece a água. O problema científico origina-se de um evento que a teoria não consegue explicar, necessitando de uma reformulação teórica. O problema escolar é o meio termo entre os dois tipos citados anteriormente (GUIMARÃES, 2009, p.103).*

Guimarães (2009) enfatiza que os problemas escolares podem ser classificados em:

• **Problemas qualitativos:** são aqueles cuja resolução se dá mediante raciocínio teórico, sem necessidade de cálculos numéricos ou manipulações. São problemas nos quais é necessário interpretar uma situação ou um fato.

• **Problemas quantitativos:** são aqueles cuja resolução é baseada principalmente em cálculos matemáticos, embora o resultado possa não ser em termos numéricos.

• **Pequenas pesquisas:** têm características dos dois tipos de problemas anteriores. Interpretação de um fenômeno e o uso de cálculos matemáticos.

O que as diferencia dos problemas escolares é a necessidade de coleta de dados, elaboração de estratégias, reflexão sobre os procedimentos e resultados. Essas atividades implicam a aplicação de conceitos e o desenvolvimento de habilidades.

Os problemas escolares podem ser abertos, fechados e semiabertos.

No problema fechado, o enunciado é feito de forma que a resolução exija modos preestabelecidos. Por outro lado, o problema aberto é demasiadamente amplo e dá margem a várias interpretações e formas de resolução. Ele é útil para desenvolver capacidades de interpretação e análise crítica de informações. Finalmente, no problema semi-aberto são dadas informações que restringem o problema dentro de um cenário específico, mas, ao mesmo tempo, permite-se que os estudantes incorporem ideias e estratégias com as quais seja possível definir e resolver a atividade.

O problema escolar para ser solucionado, busca conceitos, procedimentos e atitudes próprios da Ciência para responder às perguntas a respeito dos fenômenos da natureza e das aplicações dos conhecimentos científicos na tecnologia.

3.1 A importância dos recursos tecnológicos na resolução de problemas

Estamos diante de uma sociedade globalizada e dinâmica. As tecnologias da informação e comunicação estão presentes em diversos setores, atingindo de forma direta e indireta aqueles que atuam nessas áreas.

Ferramentas tecnológicas como o computador e a calculadora têm sido usadas com o objetivo de aumentar a eficácia do ensino e desenvolver no aluno o senso crítico, o pensamento improvável e dedutivo, a capacidade de observação, de pesquisa e estratégias de comunicação. O uso do Geogebra é um excelente exemplo de ferramenta que o aluno pode utilizar ao estudar Funções Exponenciais e assim, trabalhar com construções de calculadoras e quadros em planilhas do programa, e realizar análises do comportamento gráfico (crescimento e decrescimento) dessas funções através de seus esboços apresentados em sua janela geométrica.

Vale lembrar que a tecnologia aparece na Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018) na competência geral de número 5:

“Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.”

E na competência específica de Matemática, dentre outras áreas, que aponta

“utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive ferramentas digitais disponíveis, modelar e resolver problemas cotidianos, sociais, de outras áreas do conhecimento, validando estratégias e resultados.”

Já citamos acima, a importância do uso do computador, da calculadora e do GeoGebra como excelentes ferramentas metodológicas, porém, existem outras que podem auxiliar o aluno na resolução de problemas envolvendo o conteúdo Função Exponencial.

As ferramentas apresentadas abaixo, podem ser utilizadas como estratégias de ensino que usam recursos tecnológicos e podem tornar as aulas mais dinâmicas e interessantes além de promover uma aprendizagem significativa.

1. Google Forms: é um serviço gratuito para criar formulários online. Nele, o usuário pode produzir pesquisas de múltipla escolha, fazer questões discursivas, solicitar avaliações em escala numérica, entre outras opções. A ferramenta é ideal para quem precisa solicitar feedback sobre algo, organizar inscrições para eventos, convites ou pedir avaliações.

“As ferramentas do Google apresentam muitas possibilidades de trabalho, e fazendo bom uso delas o professor pode exercitar inúmeras habilidades e competências”, afirma Renata Capovilla, formadora de professores e capacitadora do Google For Education. Dentre as ferramentas, o Google Forms é uma das mais utilizadas por se adequar a diferentes usos e projetos. “Trata-se de uma ferramenta que permite produzir desde pequenas atividades, avaliações e testes de múltipla escolha, até trilhas de aprendizagem”, aponta a especialista. “O professor pode, inclusive, trabalhar com sala de aula invertida”.

Mas os benefícios do Google Forms não param por aí. Vão muito além.

- Coletar e-mails e nomes dos alunos, fazer pesquisa sobre o assunto trabalhado, abrir chamadas de atendimento com os alunos e até mesmo criar integrações automáticas com outras ferramentas web;
- Personalizar os formulários com as cores, usando também logotipos, fotos e etc;
- Crie diversos tipos de perguntas, como perguntas de múltipla escolha, caixas de checagem (em que mais de uma resposta pode ser escolhida), escalas, listas suspensas e muito mais.
- Usar vídeos e imagens para ilustrar e deixar mais claras as perguntas que estão sendo feitas para os alunos;
- Usar a navegação lógica para que determinadas perguntas não sejam mais feitas para aquele respondente em função de respostas anteriores. Por exemplo: se a pessoa respondeu que não tem um carro, a pergunta “a cor de seu carro” não será feita para ela;
- Aproveite diversos templates do Google Forms prontos para usar (mais detalhes adiante;
- O Google Forms funciona perfeitamente em desktops, em smartphones e em tablets, seja para responder ou para criar seus questionários;
- Além da coleta de informações em tempo real nos próprios formulários, é possível enviar os dados diretamente para o Google Sheets, permitindo, assim, fazer análises mais ágeis e criar gráficos para ilustra os resultados e conclusões da pesquisa;
- Monte os questionários de forma colaborativa, com ajuda de colegas e amigos que receberem sua autorização para isso;

• Conecte seu formulário com outras ferramentas web para automatizar tarefas repetitivas.

Tutorial Google Forms:

• Acesse sua conta no Google Forms;

• Clique em “Em branco” para criar um novo formulário do zero;

• Se preferir, escolha um dos templates de Google Forms prontos e edite como preferir (veja mais detalhe sobre essa funcionalidade a seguir);

• Para fazer a edição você poderá adicionar perguntas, imagens e vídeos, excluir itens, mudar a ordem, definir tipos de perguntas e muito mais, de forma fácil e intuitiva. Se tiver alguma dúvida, veja aqui: Como editar formulários do Google;

• Depois de editar seu formulário, ele pode ser compartilhado de diversas formas;

• Para enviar por e-mail, clique no canto superior direito em “Enviar”;

• Basta acrescentar os e-mails desejados no campo correspondente, assim como o assunto e a mensagem;

• Clique em “Enviar”;

• Pronto, logo os destinatários estarão recebendo e respondendo aos seus formulários.

2. Jogos: O uso de jogos nas aulas de Matemática pode ser um bom começo. Quando jogam, os alunos têm a oportunidade de formular e testar as suas hipóteses, porque se vêem constantemente diante de situações problemas. Os “conteúdos’ matemáticos são descobertos como ferramentas das quais podem dispor para solucioná-las.

As descobertas são compartilhadas com os colegas e os erros são colocados em discussão com toda a classe. Os alunos aprendem a ouvir os seus colegas e aprendem a falar em sala de aula, a exteriorizar seu pensamento, argumentar em defesa de suas próprias ideias. Aprendem ainda que escola é lugar de troca de criação, de descobertas.

O ensino fazendo uso dos jogos matemática é fundamental para dar solução a problemas relacionados ao pouco aproveitamento escolar.

Os jogos trabalhados com critério pedagógico em sala de aula trazem diversos benefícios tais como: favorece a identificação de dificuldades; promove competição entre os alunos, que se empenham ao máximo para vencer; faz com que os alunos se tornem mais confiantes, críticos e capazes de trabalhar em equipe. Considerando essas vantagens, os educadores que utilizam os jogos em suas propostas pedagógicas têm ótimas chances de alcançar os objetivos que estão postos como necessários.

A relação entre jogos e resolução de problemas, conforme destaca Antunes (2006), evidencia vantagens no processo de criação e construção de conceitos por meio da discussão de temática entre os alunos e entre o professor e os alunos. Para ele, o jogo é um problema, porque, ao jogar, o indivíduo constrói conceitos, de forma lúdica, dinâmica, desafiadora e motivante.

Por sua vez, Aranão (1996) esclarece que o jogo é um importante recurso metodológico que pode ser utilizado em sala de aula, para desenvolver a capacidade de lidar com informações e criar significados culturais para os conceitos matemáticos. A utilização de jogos nas aulas auxilia os alunos a aprenderem a respeitar regras, a exercer diferentes papéis, a discutir e a chegar a acordos, a desenvolver habilidade de pensar de forma independente e na construção de conhecimento lógico matemático.

Ao jogar, o aluno resolve questões por meio de tentativa e erro; pode reduzir um problema em situações mais simples; representar problemas, através de desenhos, gráficos ou tabelas; fazer analogias de problemas semelhantes e desenvolver o pensamento dedutivo.

O jogo pode ser aproveitado como instrumento facilitador no processo de construção de conhecimentos, visto que facilita seu desenvolvimento cognitivo, tendo em vista que os jogos matemáticos e são carregados de ludicidade.

São muitas as potencialidades dos jogos no processo ensino-aprendizagem, cabendo ao professor selecionar de forma criteriosa os que são adequados a cada situação pedagógica. Para formar cidadãos mais humanos e competentes.

3. Ensino Híbrido: O modelo de ensino tradicional nas escolas é criticado há anos por diversos especialistas na área, por isso, novas formas de trabalhar o aprendizado em sala de aula têm sido utilizadas. Uma delas é o ensino híbrido.

O ensino híbrido é uma nova metodologia e tem como objetivo aliar métodos de aprendizado online e presencial. Atualmente, vivemos em uma época na qual as pessoas estão utilizando tecnologias e tendo contato com computadores, smartphones, tablets, entre outros, cada vez mais cedo.

Por isso, é fundamental que as instituições busquem utilizar essas ferramentas online com o objetivo de potencializar o ensino dos alunos. Esse é um processo contínuo de aprendizado em que é preciso trabalhar os métodos online e offline em conjunto. O ensino híbrido é responsável por captar o que existe de bom em cada ambiente para potencializar a experiência educativa.

Porém, é essencial estar ciente de que essa metodologia não se resume a apenas colocar computadores e novas tecnologias na frente dos alunos. É preciso aplicar algumas técnicas e manter os alunos sempre sob a supervisão de um profissional.

Uma das principais vantagens do ensino híbrido é permitir que os estudantes tenham essa liberdade de aprendizado e se afastem cada vez mais do ensino rotineiro e tradicional.

Criar um ambiente virtual especialmente para que o estudante desenvolva as atividades e pesquisas propostas é vantajoso para que a rotina de estudos tradicional, de tempo e de ritmo tenha mais controle. Quando estiverem em um ambiente de ensino presencial, como uma sala de aula, os alunos vão atender às propostas educacionais de seus professores.

Cada vez mais, os novos métodos de ensino têm proporcionado mais autonomia aos estudantes. E uma das grandes vantagens de um ambiente virtual composto por um ensino híbrido é dar a oportunidade de a pessoa tomar suas decisões sobre os componentes do estudo.

Uma das grandes críticas ao sistema de ensino tradicional é o fato de muitos estudantes não conseguirem acompanhar o ritmo das aulas. A grande influência do ensino híbrido na aprendizagem é justamente ter a capacidade de se ajustar à velocidade de cada um – recurso que as aulas tradicionais e presenciais muitas vezes não conseguem.

Essa metodologia influencia diretamente a potencialização do aprendizado dos alunos. Por terem maior flexibilidade em relação aos horários e às programações de estudo, eles podem absorver e adquirir ainda mais disciplina com suas tarefas.

4. Estudo de caso: Estudos de caso é um método de pesquisa amplo sobre um assunto específico, permitindo aprofundar o conhecimento sobre ele e, assim, oferecer subsídios para novas investigações sobre a mesma temática.

Também é considerado uma investigação empírica que compreende um método abrangente, com coleta e análise de dados.

Por outro lado, os objetivos de um estudo de caso podem variar conforme a área na qual são utilizados O Estudo de Caso, considerando dentro de suas características, é particularmente útil para responder perguntas do tipo “como” e “por que”, pois possibilita um estudo aprofundado do fenômeno.

Ao conhecer detalhes sobre os estudos de caso e suas aplicações, algumas vantagens já ficam claras:

• Usar o mesmo método em áreas diferentes: você pode aproveitar a estrutura de um caso para aplicar em outro;

• Poder usar um estudo de caso pronto para explorar contextos diferentes;

• Aperfeiçoar conhecimentos a partir de experiências de sucesso;

• Informações detalhadas baseadas em situações de vida real: pesquisas baseadas em vivências e fatos são mais atrativas e aplicáveis à própria realidade.

Os estudos de caso também podem ser combinados à aprendizagem baseada em problemas.

Como o nome sugere, essa abordagem parte, sempre, de um problema para despertar a criatividade e a capacidade de os alunos proporem soluções diversas.

5. Gamificação: (ou Gamification) pode ser definido como o uso de elementos ou técnicas de design de jogos em contexto diferentes dos ambientes de jogo. Na verdade, é definir e aplicar os aspectos "jogáveis" de uma situação ou problema, levando as pessoas a usarem as estratégias e técnicas na busca de um objetivo comum.

A Gamificação tenta tirar vantagem dos desejos naturais que todos temos e que são aflorados durante um jogo. É que na busca pela vitória e sucesso, o ser humano trabalha competição, conquista, completude, status, altruísmo e colaboração, sensações bastante exploradas pelos jogos.

O conceito de jogo precisa ficar bem definido para que a Gamificação possa ser aplicada com sucesso. Não é porque a Gamificação alia o lúdico ao cotidiano que pode ser aplicado sem rigor.

Listamos aqui, 5 vantagens que vão esclarecer melhor essa questão:

• O ensino fica mais interessante

A aplicação da Gamificação torna a exposição dos conteúdos mais atraentes e contextualizados, pois os alunos são desafiados a tomar decisões por conta própria ao invés de somente receberem a informação.

• O erro é visto como aprendizado

Mesmo tendo que manter uma rota, a Gamificação "acolhe" o erro. É que caso o jogador deixe de acertar, ele começa a perder pontos, mas possui segundas e terceiras chances. Este fator, num ambiente de aprendizagem, favorece a inovação, pois correr riscos e cometer erros fazem parte do processo de criação.

• Os participantes tem voz ativa

Na Gamificação, o processo de aprendizagem é construído de forma coletiva, Com isso, o aluno tem a oportunidade de contribuir com suas ideias e vivências, ajudando a melhorar o processo e deixando lições aprendidas para novos participantes. Ou seja, os jogos permitem mais facilidade na transmissão do conhecimento.

• Estimula a persistência

Quando jogamos, nos sentimos desafiados e isso estimula a vontade de continuar. Se você está ganhando, é estimulado a seguir em frente pelo nível de dificuldade que aumenta a cada etapa. Se está perdendo, tem a possibilidade de tentar mais uma vez e provar que consegue.

• Melhora o foco

Uma dificuldade que todos enfrentam nos dias de hoje é o desafio de lidar com muitas tarefas ao mesmo tempo. Quando se aplica a gamificação, o aluno se mantém focado nos desafios que vai encontrar, pois a cada fase do jogo, o nível de dificuldade aumenta.

6. Sala de aula invertida: O conceito de sala de aula invertida requer muita disciplina dos alunos. Ela consiste em estudar a teoria de uma disciplina em casa, no ambiente virtual. Em seguida, organiza-se discussões, dinâmicas de grupo e realizações de diversas atividades no ambiente físico da escola.

Considerando que o estudante já teve contato com a disciplina em casa, seu desempenho será potencializado.

Benefícios da sala de aula invertida

• Desenvolver habilidades

O modelo de sala de aula invertida é capaz de propor abordagens inovadoras, que tornam a aprendizagem muito mais envolvente, prática e significativa. Além disso, as características deste método alternativo também possibilitam maior tempo e espaço para desenvolver habilidades diversas: a autonomia, a capacidade na resolução de problemas, o senso crítico, a colaboração e a criatividade.

• Protagonismo do aluno

Sob o ponto de vista do aluno, uma das vantagens mais atrativas na sala de aula invertida é a de que ele se torna um agente muito mais ativo e responsável pelo próprio aprendizado. Ao estudar previamente o tema proposto, o aluno se organiza melhor, controla seu tempo e tem autonomia para seguir seu ritmo e escolher o formato que julga ter mais facilidade para assimilar o conteúdo proposto.

• Otimização de tempo

Outra vantagem de adotar esse modelo é a otimização do tempo. No método tradicional, ao expor um conteúdo novo o professor gasta boa parte do tempo tirando dúvidas e sofrendo interrupções que, muitas vezes, fazem com que a aula não renda tanto quanto poderia. Já no modelo de sala de aula invertida, como os alunos já tiveram um contato prévio com o conteúdo antes da aula, surgem menos dúvidas e há a possibilidade de se trabalhar o conteúdo com mais rapidez e profundidade.

A matemática permeia todas as áreas do conhecimento que serão utilizadas na vida prática.

O ensino da matemática nas escolas não deve se distanciar dos seus principais objetivos, entre os quais está a construção da cidadania, o preparo para o mundo do trabalho e o desenvolvimento cognitivo, conforme esclarece à Nova LDB nº 9394/96.

Quando as escolas promovem o ensino da matemática de forma mecânica, os alunos se condicionam a receber informações prontas e não desenvolvem capacidades de buscar resolver situações problemas. Nessa perspectiva, ensinar matemática é desenvolver o raciocínio lógico e independente, a criatividade e a capacidade de resolver problemas.

Em função disso, no intuito de promover uma aprendizagem significativa e alcançar resultados satisfatórios, educadores buscam cada vez mais instrumentos que sirvam de recursos pedagógicos auxiliares a ludicidade e a resolução de problemas para ensinar matemática é uma maneira inteligente de lograr êxito na ação educativa.

A matemática permeia todas as áreas do conhecimento que serão utilizadas na vida prática. O ensino da matemática nas escolas não deve se distanciar dos seus principais objetivos, entre os quais está a construção da cidadania, o preparo para o mundo do trabalho e o desenvolvimento cognitivo, conforme esclarece à Nova LDB nº 9394/96.

Quando as escolas promovem o ensino da matemática de forma mecânica, os alunos se condicionam a receber informações prontas e não desenvolvem capacidades de buscar resolver situações problemas.

Nessa perspectiva, ensinar matemática é desenvolver o raciocínio lógico e independente, a criatividade e a capacidade de resolver problemas. Em função disso, no intuito de promover uma aprendizagem significativa e alcançar resultados satisfatórios, educadores buscam cada vez mais instrumentos que sirvam de recursos pedagógicos auxiliares a ludicidade e a resolução de problemas para ensinar matemática é uma maneira inteligente de lograr êxito na ação educativa.

7. Geogebra: Segundo, Brandt & Montorfano (2007) o GeoGebra (aglutinação das palavras Geometria e Álgebra), foi criado por Markus Hohenwarter da Flórida Atlantic University nos Estados Unidos em 2001.

O software é gratuito e oferece um tratamento dinâmico para o ensino de diversos temas da matemática. Foi desenvolvido para o ensino e aprendizagem em níveis que vão do básico ao universitário.

O GeoGebra reúne recursos de geometria, álgebra, tabelas, gráficos, probabilidade, estatística e cálculos simbólicos em um único ambiente, permitindo realizar construções geométricas com a utilização de pontos, retas, segmentos de reta, polígonos etc., nele é possível inserir funções e alterar todos esses objetos dinamicamente mesmo após a finalização da construção. Equações e coordenadas também podem ser diretamente inseridas na sua forma explícita.

O GeoGebra é capaz de lidar com variáveis para números, pontos, vetores, derivações e integrações de funções, além de oferecer comandos para encontrar raízes e pontos extremos de uma função. Com isto, o programa reúne as ferramentas tradicionais de geometria com outras mais adequadas à álgebra e ao cálculo.

3.2 Como preparar o professor para trabalhar com resolução de problemas

Para trabalhar resolução de problemas em sala de aula o professor deve criar um ambiente matemático motivador e estimulante e ao propor um problema deve estimular a autoestima dos seus alunos e explicitar suas expectativas agindo como observador durante todo o processo de resolução.

Em primeiro lugar, esqueça os modelos de problemas com os quais você sempre se deparou (principalmente no ensino de Matemática).

A exposição de situações hipotéticas e maçantes não condiz mais com a realidade dos alunos atuais, mais conectados e "acelerados" do que nunca.

A grande inovação desse modelo está em formular questões que atraiam a atenção (pelo seu conteúdo relevante) e gerem interesse para pesquisa (com objetivo de encontrar as respostas).

Também vale destacar que o trabalho baseado em resolução de problemas traz uma atualização do papel do professor: ao invés de passar todo o conteúdo previsto e trazer os problemas como forma de avaliar se o conhecimento foi apreendido, o docente assume o papel de mediador, apresentado o problema e mediando os caminhos percorridos até que os alunos encontrem a resposta.

Tão importante quanto solucionar o problema é fomentar a discussão e fornecer ferramentas para que isso aconteça.

Ao se trabalhar com a metodologia de resolução de problemas, faz-se necessário um alinhamento com um plano de ensino que contemple todas as etapas desse processo. Afinal, para resolver as questões propostas, os alunos precisam ir além dos conhecimentos que já possuem – esses, são muito importantes na fase inicial da resolução de problemas. Mas, é através da formulação de hipóteses (possíveis soluções) e através da busca de novos conhecimentos (proporcionados e mediados pelo professor) que a eficácia do método se contempla.

Na prática cotidiana, o papel do professor ao aplicar a resolução do problema é:

• Trazer uma proposição, descrevendo o problema, que pode ser interdisciplinar;

• Estabelecer as metas a serem atingidas pelos alunos, ou seja, o que eles devem determinar ao final de cada problema (hipóteses, soluções, alternativas);

• Ser o mediador de debates e gerar discussões produtivas acerca das hipóteses levantadas;

• Fornecer subsídios para a busca dos novos conhecimentos (conteúdo específico, incentivo às pesquisas);

• Controlar o tempo necessário para as atividades (geralmente, não se encerram em um único dia, pois demandam pesquisas e aquisição de mais conhecimento);

• Fornecer feedback constante ao final da atividade (mostrando a importância de cada etapa em busca da resposta).

O caráter investigativo do método, a partir de estudos de caso, colocam o sujeito (aluno) no centro do processo de aprendizagem. Através de pesquisa, busca de conhecimento, formulação de hipóteses e trocas de experiências, garante-se a fixação e retenção dos conteúdos e competências por parte dos alunos. Além disso, a resolução de problemas também traz os seguintes benefícios:

• **Maior participação:** com situações próximas da realidade, os alunos tendem a participar de maneira mais ativa das questões, dando suas ideias e trocando informações sobre suas experiências.

• **Estímulo da criatividade:** como nesse modelo não há uma resposta certa previamente ensinada para um problema posto, os alunos precisam usar seu potencial criativo na busca por soluções.

• **Incentivo à pesquisa:** a busca pelo conhecimento na resolução de problemas é uma etapa de extrema importância, na qual o aluno se torna elemento ativo na construção do seu conhecimento. Além dos materiais didáticos dispostos em sala e mediados pelo professor, podem ser realizadas pesquisas em bibliotecas, ambientes virtuais e até em entrevistas com familiares e pessoas próximas.

• **Responsabilidade, trabalho em equipe e organização:** as atividades de resolução de problemas podem ser distribuídas em times dentro de uma sala, tendo como fechamento uma apresentação de resultados para a turma toda. Além da responsabilidade de mostrar seus resultados para os colegas, cada equipe também precisará se organizar para cumprir os prazos propostos pelo professor.

> *Existem diversas técnicas que os profissionais das instituições de ensino podem desenvolver com os alunos para que eles consigam incrementar sua organização e absorver melhor todos os ensinamentos. Uma das aplicações mais disseminadas desse tipo de ensino baseada em problemas é o professor propor um desafio ou pergunta desafiadora, e os alunos terão uma aula baseada em uma pesquisa em grupo para traduzir o desafio. Essa pergunta desafiadora ou desafio será fragmentado em pedaços menores no início da atividade. Com isso, os alunos vão listar todos os seus conhecimentos sobre o tema e expressar, por escrito, o problema que precisa ser solucionado. Por meio de pesquisas guiadas pelo professor, os estudantes vão tentando decifrar o desafio por tentativa e erro. Algumas ações necessárias para realizar esse teste envolvem entrevistas com profissionais e especialistas, leitura de pesquisas e textos sobre o assunto, coleta de materiais, entre outros. A solução encontrada deve ser apresentada com a pesquisa e todo o processo. (FURQUIM, 2021) Darcy Furquim (2019)*

Sobre a Resolução de Problemas nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (BRASIL, 1999). Os PCN se constituem como um referencial para a educação no âmbito do Ensino Fundamental em todo o país. A principal função dos PCN é a de garantir a igualdade de acesso aos saberes a todos os envolvidos no processo educacional, visando principalmente à universalização dos conhecimentos.

Em relação à caracterização da área da Matemática, os PCN (BRASIL, 1998, p.19), “são pautados por princípios decorrentes de estudos, pesquisas, práticas e debates desenvolvidos nos últimos anos".

No tocante ao papel do professor no processo de ensino e aprendizagem, os PCN apontam que é de fundamental importância ao professor:

• Identificar as principais características dessa ciência, de seus métodos, de suas ramificações e aplicações;

• Conhecer a história de vida dos alunos, sua vivência de aprendizagens fundamentais, seus conhecimentos informais sobre um dado assunto, suas condições sociológicas, psicológicas e culturais;

• Ter clareza de suas próprias concepções sobre a Matemática, uma vez que a prática em sala de aula, as escolhas pedagógicas, a definição de objetivos e conteúdos de ensino e as formas de avaliação estão intimamente ligadas a essas concepções. (BRASIL, 1998, p.29).

Por meio do desenvolvimento destas ações, o professor propicia ao educando o desenvolvimento de uma inteligência essencialmente prática, que propicia ao mesmo reconhecer problemas, buscar e selecionar informações, tomar decisões e, consequentemente, desenvolver uma ampla capacidade para lidar com a atividade matemática.

Em face deste exposto, pode-se compreender que em relação ao ensino da Matemática, os PCN apontam a Resolução de Problemas como ponto de partida das atividades matemáticas e ainda discute novos caminhos para se fazer Matemática dentro de sala de aula.

“Além das conexões internas à própria Matemática, o conceito de função desempenha também papel importante para descrever e estudar através da leitura, interpretação e construção de gráficos, o comportamento de certos fenômenos tanto do cotidiano como de outras áreas do conhecimento como a Física, Geografia ou Economia. Cabe, portanto, ao ensino de Matemática garantir que o aluno adquira certas flexibilidades para lidar com o conceito de função e situações diversas e, nesse sentido, através de uma variedade de situações problema de Matemática e de outras áreas, o aluno pode ser incentivado a buscar a solução ajustando seus conhecimentos sobre funções para construir um modelo para interpretação e investigação em Matemática” (BRASIL, 1999, p.44).

É interessante propor aos estudantes várias estratégias de resolução de problemas, mostrando-lhes que não existe uma única estratégia, ideal e infalível. Cada problema exige estratégia específica.

O ensino da matemática por meio de resoluções de problemas, pode transformar as atividades matemáticas que, às vezes, são geradoras de sofrimento para muitos educandos em fonte de satisfação, motivação e interação social.

Quando o aluno pode “fazer matemática” e não apenas ver seu professor mostrando como se faz passa a se relacionar melhor com ela pois percebe-se a sua satisfação ao superar seus desafios.

Vale aqui ressaltar que o mundo vive um momento pandêmico e que todas as estratégias de aula devem ser pensadas e elaboradas com possibilidade de adaptação uma vez que, as atividades presenciais já não mais poderão ser compartilhadas como outrora pois desde de 13 de março de 2020 as aulas presenciais foram suspensas pelo decreto estadual nº Decreto nº 19549 de 18/03/2020 (BAHIA, 2020) que assegura alunos e professores a estarem afastados de suas respectivas Unidades Escolares e assim , devemos seguir os protocolos de segurança para evitar o contágio pelo corona vírus evitando assim contrair a Covid-19 além disso, com a possibilidade do uso do Ensino Híbrido para substituir as aulas presenciais, pensar em situações problemas adaptáveis a essa nova realidade se faz necessário.

CAPÍTULO 4

APLICAÇÕES DA FUNÇÃO EXPONENCIAL

A seguir, é sugerida atividades para se trabalhar função exponencial, que pode ser realizada individualmente, em pares ou grupos, e que exemplifica a utilização dos passos propostos anteriormente.

Cabe ao docente adapta-lá a sua realidade considerando o desenvolvimento dos discentes, os conteúdos conceituais procedimentos e atitudes com os quais pretende trabalhar e ainda com a disponibilidade de recursos materiais com que pode contar.

Na proposta de aplicação das Funções Exponenciais abaixo, espera-se que os alunos ao final da atividade sejam capazes de:

– Identificar, reconhecer e aplicar algumas propriedades da potenciação no conjunto dos números reais;

– Compreender o conceito de função exponencial;

–Esboçar, reconhecer e interpretar o gráfico de uma função exponencial;

–Relacionar a função exponencial à Matemática financeira, as ciências da natureza;

–Identificar por suas leis e graficamente como crescente ou decrescente;

–Reconhecer o sentido de crescimento quando as bases forem inversas;

–Identificar a imagem, domínio e contradomínio pela representação gráfica;

–Reconhecer graficamente ou pela lei de formação para quais valores de x o gráfico intercepta o eixo das ordenadas;

–Compreender o comportamento da curva exponencial quanto à variação da base da potência;

Propõe-se que a atividade seja realizada em 200 minutos distribuídos em dois encontros de 100 minutos cada. A mesma pretende que o discente de forma ativa possa atingir os objetivos descritos acima, e a partir das conjecturas e argumentações surgidas durante a aplicação da sequência didática, os estudante sanem suas possíveis dúvidas, aprenda de forma prática e teórica com a atividade proposta e assim tornem-se aptos à resolver problemas correlacionados e do seu cotidiano.

4.1 Resolvido passo a passo

(UPE) Os biólogos observaram que, em condições ideais, o número de bactérias $Q(t)$ em uma cultura cresce exponencialmente com o tempo t, de acordo com a lei $Q(t) = Q_0 \cdot\ e^{k.t}$, sendo $k > 0$ uma constante que depende da natureza das bactérias; o número irracional e vale aproximadamente $2,718$ e Q_0 é a quantidade de inicial de bactérias. Se uma cultura tem inicialmente 6000 bactérias e, 20 minutos depois, aumentou para 12000, quantas bactérias estarão presentes depois de 1 hora ?

$A)$ 18000

$B)$ 21000

$C)$ 30000

$D)$ 36000

$E)$ 48000

I. **Lendo e compreendendo**

$a)$ O que é dado no problema?

Informa-se o número inicial de bactérias em uma cultura e a lei que relaciona o número de bactéria $Q(t)$ em função de tempo. Também é dito que após 20 minutos a cultura de bactérias aumenta de 6000 para 12000.

$b)$ O que se pede ?

A quantidade de bactérias que estarão presentes na cultura após uma hora.

II. **Planejando a solução**

Diante das informações do enunciado, podemos concluir que em 20 minutos a população de bactérias passa a ser de 12000, ou seja , $12000 = 6000 \cdot\ 2,718^{20k}$. A partir dessa equação encontraremos uma igualdade que servirá de base para a solução do problema.

III. **Executando o que foi planejado**

$Q(20) = 6000 \cdot\ 2,718^{20k} \Rightarrow 12000 = 6000 \cdot\ 2,718^{20k} \Rightarrow 2 = 2,718^{20k}$

$Q(60) = 6000 \cdot\ 2,718^{60k}$

Lembrando que: $x^{60} = x^{20} \cdot\ x^{20} \cdot\ x^{20}$ (das propriedades da potenciação apresentada no Lema 1, (i) do capítulo II), fazemos:

$Q(60) = 6000 \cdot\ 2,718^{20k} \cdot 2,718^{20k} \cdot 2,718^{20k}$

Como $2 = 2,718^{20k}$, então:

$Q(60) = 6000 \cdot\ 2 \cdot\ 2 \cdot\ 2 = 48000$

Ou seja , a população de bactérias após 60 minutos será de 48000.

IV. **Emitindo a resposta.**

A resposta é a alternativa E.

V. **Ampliando o problema**

$a)$ Os biólogos, no intuito de qualificar a eficácia de certo produto a ser utilizado pela indústria de limpeza de ambientes hospitalares, analisam a cultura de bactérias até ultrapassar a quantidade de 1 milhão; após atingir esse objetivo, eles aplicam o produto na cultura e passam a analisar o decaimento da população de bactérias, o qual ocorre de forma linear com uma redução de 25000 bactérias a cada 30 segundos. Sendo assim, em quanto tempo o produto terá eliminado a população de bactérias existentes antes do início da utilização do produto?

Fique atento

Considere que os biólogos só realizam a análise da cultura de bactérias a cada 20 minutos e que, após a introdução do produto na cultura, em razão das adversidades do meio, as bactérias não conseguem se reproduzir e a população não aumenta.

Resolvido passo a passo

De acordo com os dados do problema

$Q(t) = Q_0 \cdot e^{k.t} \Rightarrow Q(20) = 6000 \cdot e^{20k}$

Como $e^{20k} = 2 \Rightarrow Q(20) = 6000 \cdot 2$

Para $t = 20n$ temos que $Q(20n) = 6000 \cdot e^{20nt}$.

Lembrando que: $e^{20nt} = (e^{20k})^n$ (das propriedades da potenciação apresentada no Lema 1, (IV) do capítulo II), fazemos:

$\Rightarrow Q(20n) = 6000.(e^{20k})^n \Rightarrow Q(20n) = 6000.2^n$

$6000.2^n \geq 1000000 \Rightarrow 2^n \geq 166,66$, como n tem que ser inteiro, logo $n = 8 \Rightarrow 2^8 = 256$ (uma vez que $2^7 \leq 166,66 \leq 2^8$).

Assim, $Q(20.8) = Q(160) = 6000.2^8 = 6000.256 = 1536000$.

A população da cultura de bactérias atinge 1536000 em 160 minutos.

Após observar a quantidade, aplica-se a função linear (conhecimento prévio):

$f(t) = at + b$, onde $b = 1536000$ e $a = -50000$, pois se, em 30 segundos, reduz 25000, em 60 segundos, ou seja, 1 minuto, reduzirá 50000.

Logo: $f(t) = -50000t + 1536000 \Rightarrow f(t) = 0$ para $t = 30,72$ ou aproximadamente 31 minutos.

$b)$ Discussão em equipe.

Troque ideias com seus colegas sobre como os avanços tecnológicos tem contribuído para o desenvolvimento de novos medicamentos.

$c)$ Pesquisa.

Pesquise sobre os estudos laboratoriais realizados e as exigências da Agencia Nacional de Saúde Suplementar (ANS) para legalizar a comercialização dos medicamentos.

4.2 Atividades propostas pela autora

4.2.1 Sugestão 1

(Adaptação da autora) Em uma cidade de 150.000 habitantes, foi detectado um morador infectado por coronavírus. Esta pessoa infectada pode infectar apenas três pessoas sem nenhum tipo de proteção ou contenção dos riscos. Em seguida, cada uma das três pessoas infectadas pode infectar outras três, e assim por diante. A função que determinará quantas pessoas estarão infectadas a cada interação será dada por: $f(x) = 3^x$

Considerando que x é o número de interações entre pessoas e y o novo número de infectados. Sendo assim, seja o primeiro infectado considerado como a interação zero, pois ele não teve contato com ninguém até este momento $(x = 0)$. Supondo que ele teve contato com três pessoas, o que equivale a uma interação completa do contágio, $(x = 1)$, teremos então 3 infectados. Se cada um desses três infectados tiveram contato com mais três pessoas cada um, completando a segunda interação $(x = 2)$, então teremos 9 infectados. Vamos usar este exemplo numa tabela(Figura 1):

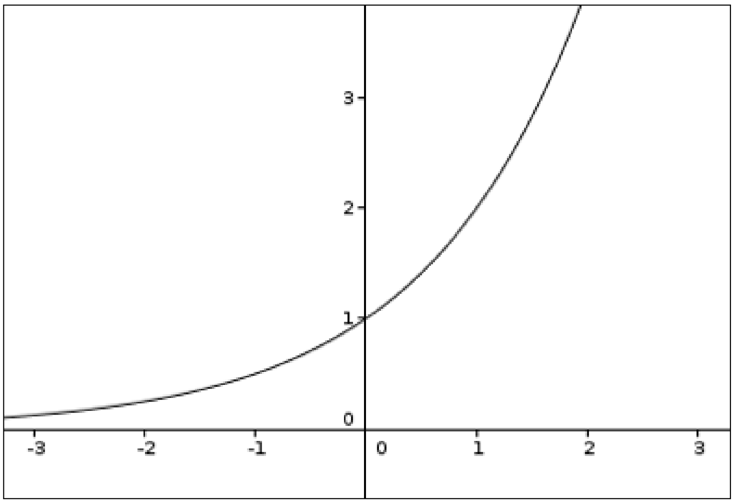
Tabela 1 – Quadro da relação interações e nº de infectados

x (Interações)	$y = f(x)$ (nº de infectados)
0	1
1	3
2	9
3	27
4	81
[...]	[...]
10	59049

Fonte: Autora.

Podemos também plotar o gráfico (Figura 5) deste cenário:

Figura 5 – Gráfico



Fonte: Dante (2011)

a) Baseado neste exemplo, qual a função que determina se este morador infectasse duas pessoas e essas duas, mais duas cada uma e assim por diante?

b) De acordo com a função encontrada acima, complete o quadro abaixo (Tabela 2) .

c) Baseado no quadro abaixo (Tabela 2), construa o gráfico dessa função e determine se ela é crescente ou decrescente.

Tabela 2 – Quadro da relação interações e nº de infectados

x (Interações)	$y = f(x)$ (nº de infectados)
0	1
1	
	4
3	
	16
[...]	[...]
10	

Fonte: Autora.

Resultados da proposta

1) **Lendo e compreendendo o problema.**

• O que está sendo pedido no problema?

A quantidade de infectados a cada interação.

• O que o problema nos fornece?

Que no início tinha um infectado e que a cada interação dobra o número de infectados.

2) **Planejando como solucionar o problema.**

O problema será resolvido construindo uma tabela, relacionando a coluna das interações (x) com a coluna do número de infectados (y).

3) **Colocando em prática o que foi planejado.**

Tabela 3 – Quadro da relação interações e nº de infectados

x (Interações)	$y = f(x)$ (nº de infectados)
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32

Fonte: Autora.

4) **Analisando a resposta.**

O número de infectados aumenta muito rápido em relação ao número de interações.

Como o número de infectados dobra a cada interação a tabela pode ser escrita na forma de potência de 2, conforme segue (Tabela 4).

Tabela 4 – Quadro da relação interações e nº de infectados

x (Interações)	$y = f(x)$ (nº de infectados)
0	2^0
1	2^1
2	2^2
3	2^3
4	2^4
5	2^5

Fonte: Autora.

Percebe-se que o valor que está na coluna das interações é o expoente da potência de 2. Ou seja, se for 0 interação o expoente vai ser 0; se for 1 infectado o expoente vai ser 1 e assim por diante.

E se quiser saber a quantidade de infectados com 10 interações?

Não precisamos continuar a tabela, basta calcular 210, já que sabemos que basta elevar 2 ao número de interações que queremos.

Após essas análises é possível saber a quantidade de infectados após x interações?

Como o número de interações é o expoente da potência de base 2, o número de infectados será 2^x.

Assim com a orientação do professor conclui-se que o número de infectados é dado em função do número de interações, na forma $f(x) = 2^x$, a qual é chamada Função Exponencial na base 2. Neste momento é conveniente generalizar a definição de $f(x) = a^x$ e sua caracterização.

Objetivos:

• Fazer conexão das noções sobre potências e suas propriedades fundamentais consideradas importantes para a compreensão da função exponencial;

• Utilizar a linguagem matemática para expressar a situação-problema apresentada;

• Construir tabelas;

• Construir gráficos e fazer a sua interpretação.

Conteúdos abordados:

• Potências de números naturais;

• Introdução da função exponencial;

• Expressões numérica e algébrica.

Possíveis estratégias para resolução do problema:

É esperado que os alunos:

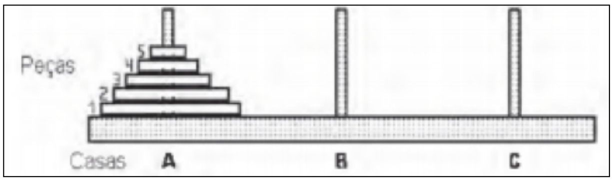
• Construam uma tabela para perceber o padrão de regularidade;

• Percebam a regularidade da multiplicação pelo fator 2, a cada hora;

• Concluam que x interações após o início do contágio, a quantidade de infectados será 2^x, e assim expressem a função $f(x) = 2^x$.

4.2.2 Sugestão 2

Figura 6 – Torre de Hanói



Fonte: Dante (2011)

(adaptada pela autora) Usando a torre de Hanói((Figura 6) e baseando-se nas regras do jogo, podemos montar uma tabela entre o número de peças (X) e o número mínimo de movimentos (Y):

Tabela 5 – Quadro da relação nº de peças e nº de movimentos

Número se Peças	Número mínimo de movimentos
1	1
2	3
3	7
4	15

Fonte: Autora.

A relação entre (X) e (Y)é:

$a)Y = 2^x - 1$

$b)Y = 2^{x-1}$

$c)Y = 2^x$

$d)Y = 2x - 1$

$e)Y = 2x - 4$

1. Objetivos:

• Construir um gráfico relacionando o número de peças com o número mínimo de jogadas para tirar todas as peças de uma torre para outra.

• Descobrir uma fórmula geral para o número mínimo de jogadas para qualquer quantidade de discos.

• Generalizar a fórmula para o número mínimo de jogadas

2. Compreendendo o problema (regras do jogo)

• Só pode movimentar uma peça por vez;

• Uma peça maior não pode ficar sobre uma menor;

• As peça deve estar sempre numa das três hastes, ou em movimento.

3. Elaboração do plano:

Qual é o seu plano para resolver o problema?

• Determinar uma estratégia para movimentar as peça de uma torre para outra com o menor número de jogadas de acordo com as regras.

Que estratégia você tentará desenvolver?

• Determinar o número mínimo de jogadas para movimentar as peças de uma torre para outra

Organizar os dados em tabelas.

• Números de disco e quantidade mínima de movimentos

Resolver o problema por partes

• Apenas um disco pode ser movimentado por vez;

• Um disco maior nunca pode ser posto sobre um disco menor;

• Não é permitido movimentar uma peça que esteja em baixo de outra;

• Um disco deve esta sempre em um dos três pinos ou em movimento.

4. Fazer o retrospecto:

Então passamos a ver o andamento do jogo de acordo com as regras apresentadas. De inicio vamos pedir para que os alunos enumerem de $1,2$ e 3 as hastes da Torre de Hanói e pediremos para que eles transfiram um disco da haste 1 para a haste 3, depois com dois discos e assim por diante.

Pergunta- se aos alunos se eles perceberam quantos movimentos eles fizeram para transferir os discos de uma haste para outra. Peço então, para que eles repitam o processo registrando em uma tabela para facilitar o entendimento do jogo.

Ao termino dessa etapa deseja-se que eles percebam que houve uma variação da quantidade de movimentos.

A partir daí será feito um questionamento: será que existe uma quantidade mínima de movimento para transferir os discos de uma haste para outra?

Nesse momento espera-se que os alunos comecem a movimentar as peças novamente, então com uma peça foi necessário uma jogada para transferir o disco de uma haste para outra. Com dois discos que precisavam de no mínimo três jogadas, com 3 discos precisavam de 7 jogadas. Usando a tabela os alunos perceberão que é uma potência de base 2.

Observando ainda a tabela que se tem um disco, precisa-se de uma única jogada e fazendo $2^1 = 2$. Tendo dois discos vão precisar de no mínimo 3 jogadas e $2^2 = 4$ e se tiverem três discos vão precisar de 7 jogas e $2^3 = 8$. É como se fosse uma potência de base 2 subtraindo 1.

Tabela 6 – Quadro da relação nº de peças e nº de movimentos

Número se Peças	quantidade mínima de movimentos
1	1
2	3
3	7
4	15
5	31
6	63
...	...

Fonte: Autora.

Usando a tabela verifica-se o número mínimo de movimentos através dos números somados. Veja: $2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 7 \Rightarrow 15 \Rightarrow 31 \Rightarrow 63, \ldots$

Conclui-se então que a relação entre (X) e (Y) é dado por $Y = 2^x - 1$.

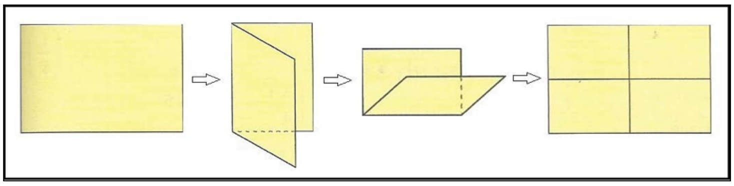
Logo, a alternativa é a letra *a*.

4.3 Uma sequência didática

Descrevendo o problema

A atividade será iniciada fazendo uma dobradura, como foi proposto por (DANTE, 2011): Dobre uma folha retangular pela metade, paralelamente à sua largura e, em seguida, abra-a e anote o número de retângulos que aparecem marcados; continue dobrando sucessivamente o retângulo encontrado, sempre pela metade e no mesmo sentido. E, a cada etapa, abra totalmente a folha e anote a quantidade de retângulos menores que aparecem marcados nela. O esquema da Figura 7 dá uma ideia do processo.

Figura 7 – Dobraduras na folha de papel A4.



Fonte: Dante (2011)

a) Complete o quadro abaixo (Tabela 7) com os resultados obtidos. Vamos chamar de número de dobraduras a quantidade de vezes que o papel foi dobrado a cada etapa.

Tabela 7 – Quadro da relação dobraduras e retângulos resultantes

Nº de dobraduras	Nº de retângulos resultantes
0	1
1	2
2	
3	
4	

Fonte: Autora

b) Se forem feitas 6 dobraduras, quantos retângulos ficarão marcados na folha?

c) Generalize, encontrando a expressão que dá o número de retângulos marcados na folha original. Quantas dobraduras ela fez?

Neste exercício o aluno reforça a ideia de potenciação. Percebe que a cada vez que ele dobra a folha, ao abri-la vê o dobro de retângulos em relação à abertura anterior. Ou seja, cada dobra corresponde a multiplicação por 2 do número de retângulos formados pelas marcas em uma dobra anterior. O professor pode estender o quadro 1 (Tabela 7) com uma coluna da representação da quantidade de retângulos na forma de potência como mostra o quadro 2 (Tabela 8).

Tabela 8 – Quadro da relação base, expoente e potência.

Nº de Dobraduras	Nº de Retângulos	Forma de Potência
0	1	2^0
1	2	2^1
2	4	2^4
3	8	2^3
4	16	2^4
...	...	...
10	1024	2^{10}

Fonte: Autora.

Na forma de potência temos que a base vale 2, pois este é o fator em questão uma vez que a cada mudança dobramos a folha mais uma vez. Exemplo: $2^3 = 2\ \ 2\ \ 2\ = 8$. Logo os expoentes seguem a ordem das dobraduras, pois ao dobrarmos a folha 3 vezes, representamos o expoente com o número 3.

É fundamental diagnosticar que toda a classe veja a potenciação como uma forma simplificada de escrever n produtos de um mesmo fator. Assim, ficará mais fácil para o aluno responder o item (b) sem ter que mostrar na prática que em 6 dobraduras serão obtidos 64 retângulos. Seguindo o mesmo raciocínio, espera-se que eles respondam o item (c), dizendo que o número de retângulos podem ser obtidos ao elevarmos a base 2 ao número de dobraduras. Geralmente os alunos conseguem ter uma ideia como essa para responder questões assim, porém, apresentam dificuldades em expressar seu raciocínio na linguagem matemática. Portanto, é muito importante que o professor oriente sua classe como expressar uma linha de raciocínio em termos matemáticos.

Pode dizer aos alunos que em casos como este, devem escolher uma letra para representar cada grandeza variável, ou seja, uma incógnita pra identificar o número de vezes que se dobrará o papel e outra incógnita para indicar o número de retângulos que serão formados pelas marcas dessas dobras. Possivelmente eles escreverão uma expressão do tipo $y = 2^x$.

Também com a análise do quadro construído, espera-se que fique mais fácil para o educando entender o porquê da potência de expoente 0 ter como resultado o valor 1, e a potência de expoente 1 ter a própria base como resultado.

$d)$ Vamos obter agora a área desses retângulos formados pelas dobraduras feitas acima, seguidamente cada uma de suas partes deverão ser nomeadas pelos números $1, 2, 3$, etc. representando a etapa a ser executada. A cada etapa realizada vá preenchendo as tabelas abaixo:

Tabela 9 – Quadro da relação quantidade de dobraduras e a área

Etapa	Nº de partes	Área

Fonte: Autora.

• Observe cuidadosamente o número de partes obtidas e escreva na ordem obtida o número de partes dispostas numa sequência:

____

• Qual a regra de formação dessa sequência?

____

• Represente com uma expressão como obter o segundo termo dessa sequência:

____

• Represente como obter o terceiro termo dessa sequência:

____

• Essa sequência é crescente ou decrescente?

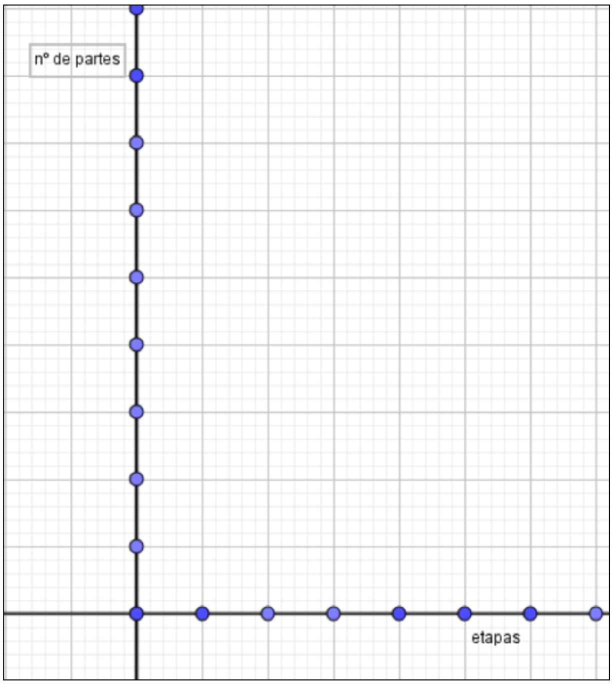
____

• Representando um termo dessa sequência por a_n, podemos dizer que para essa sequência, $a_n =$

____

$i)$ Marque no plano cartesiano representado abaixo os pontos da Tabela 7.

Figura 8 – Plano cartesiano 1



Fonte: Dante (2011)

• Observando o gráfico que você fez , reescreva a fórmula do a_n em termos de x e y, de acordo com os eixos usuais do plano cartesiano.

• Em qual posição ficou "x" na reescrita que fez?

• Em função desse posicionamento de "x", esse tipo de função é chamada de

---

$ii)$ Agora vamos observar os dados da Tabela 9

• O que você observa em relação aos valores das áreas?

• Qual a regra de formação da sequência das áreas?

• Represente com uma expressão como obter o segundo termo dessa sequência.

• Represente como obter o terceiro termo dessa sequência.

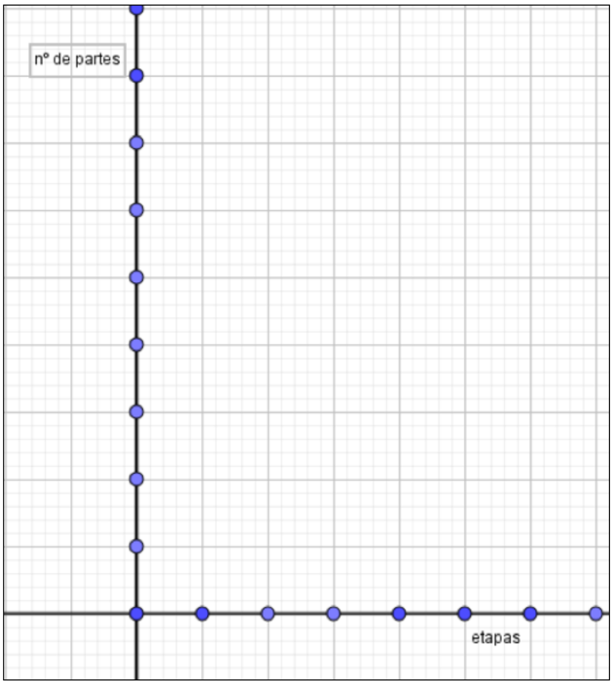
• Essa sequência é crescente ou decrescente?

• Representando um termo dessa sequência por an, podemos dizer que para essa sequência, temos:

---

iii) Marque no plano cartesiano representado abaixo os pontos da Tabela 9

Figura 9 – Plano cartesiano 2



Fonte: Dante (2011)

• Observando o gráfico que você fez , reescreva a fórmula do an em termos de x e y, de acordo com os eixos usuais do plano cartesiano.

• Esta também é uma função exponencial.

____

• O que as duas funções têm de semelhantes em suas representações?

____

• O que as duas funções têm de diferenças?

____

• Quanto ao tipo de crescimento podemos afirmar que a primeira função é ______________ enquanto que a segunda é ______________________________

Objetivos:

• Revisar o conceito de potenciação;

• Reconhecer e interpretar informações do problema e expressá-lo como potência;

• Determinar a lei que descreve o fenômeno;

• Entender a definição para o cálculo de potências com expoente 1 e 0;

• Entender o conceito de crescimento e decrescimento de uma função;

• Construir plano cartesiano.

4.4 A Função Exponencial e a Matemática Financeira

Essa atividade identifica conceitos da Função Exponencial à resolução de um problema relacionado à Matemática Financeira.

1. (Vunesp) Uma instituição bancária oferece um rendimento de 15% ao ano para depósitos feitos numa certa modalidade de aplicação financeira. Um cliente deste banco deposita 1000 reais nessa aplicação. Ao final de n anos, o capital que esse cliente terá em reais, relativo a esse depósito, é:

$a)1000+0,15n$

$b)1000.0,15n$

$c)1000.0,15^n$

$d)1000 + 0,15^n$

1º passo: A sala será dividida em grupos para solucionar o problema proposto. Além disso, irão fazer troca de informações e criar situações para chegar a uma solução.

A professora será a mediadora entre os grupos dos alunos, onde estes farão registros nos cadernos após a interpretação do problema e encontrar estratégias para resolver.

2º passo: Após a interpretação do problema, os alunos listarão :

• O plano para resolver o problema;

• As estratégias utilizadas;

• Buscar resolver o problemas por partes.

3º passo: Executar o plano elaborado

• Resolver a questão proposta passo a passo.

4º passo: Fazer o retrospecto

• Examinar a solução encontrada;

• Apresentar a solução encontrada.

Nesta etapa, verifica-se se todos os grupos usaram as mesmas estratégias para chegar a solução do problema e em seguida, abre-se uma discussão para demonstração de que pode existir diferentes maneiras para chegar a solução do problema proposto.

Objetivos da Atividade:

A atividade tem por objetivo fazer com que os alunos consigam:

• Reconhecer e interpretar informações relativas ao problema;

• Formalizar a lei que descreve um determinado fenômeno;

• Manipular equações inerentes ao problema;

• Identificar a estreita relação entre funções do tipo exponenciais e a Matemática Financeira.

Logo após a aplicação da sequência didática supracitada recomendamos que o docente formalize a introdução ao estudo da Função Exponencial fundamentando sua definição a partir das observações pontuadas pelos discentes, bem como a interpretação gráfica de seu crescimento e decréscimo para um estudo significante baseado nas conjecturas que naturalmente surgem na resolução de problemas. Desse modo, acreditamos que aprendizagens significativas só são efetivas quando o estudante é protagonista do conhecimento adquirido.

CAPÍTULO 5

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A verdadeira educação é aquela que instiga o desejo do indivíduo a explorar, observar, trabalhar, jogar resolver situações problemas e acreditar-se. Levando em conta essa perspectiva, a educação precisa organizar seus conhecimentos, partindo dos interesses dos alunos e, desse modo, levá-los a outros patamares de aprendizagem, que são primordiais à formação e ao exercício da cidadania. A aprendizagem do aluno é responsabilidade do Estado, da escola e da família. Esses, juntos, devem buscar, de acordo com suas atribuições, condições básicas para que os educandos possam construir conhecimentos de forma significativa. Nesse aspecto, merece especial destaque a resolução de problemas com ênfase no conteúdo Função Exponencial, pois têm papel importante no processo ensino-aprendizagem quando propostos com objetivos e critérios pedagógicos, ou seja, favorecem resultados exitosos.

Na atualidade, pesquisadores, estudiosos e profissionais da educação que buscam criar situações desafiadoras e significativas para a construção de conhecimentos concebem os resoluções de problemas como estratégia pedagógica favorável, inclusive para a construção de conceitos matemáticos.

Os educadores matemáticos, atualmente, se preocupam com a questão de resolução de problemas considerando a grande importância no ensino da Matemática isso se justifica em saber que cada vez que se tem uma pergunta, se tem um problema, pois para responder a qualquer pergunta se pratica o ato de pensar.

Os métodos de ensino da Matemática ganharam nas últimas décadas muita ênfase na resolução de problemas. Assim, recomenda-se atividades em pequenos grupos, com a utilização de material didático, sequências didáticas, bem como ambientes de sala de aula estimulantes para que os alunos possam construir o conceito matemático a partir de situações vivenciadas por eles.

Com base nesta constatação, foi elaborado um projeto que serviu de base para essa Dissertação, que teve como principal objetivo verificar se a resolução de problemas e uma metodologia eficiente para o estudo da função exponencial. Durante o início do presente trabalho, buscou-se, na revisão bibliográfica, entender o processo histórico de como surgiu a função exponencial que prosseguiu com o estudo das potências e da função exponencial.

A proposta inicial, foi elaborada pensando em sua aplicação dentro de uma Unidade Escolar de Ensino Médio da Rede Estadual porém, em consequência da pandemia provocada pelo corona vírus que gerou a suspensão das aulas em março de 2020, conforme Decreto Estadual, nº Decreto nº 19549 de 18/03/2020, não houve a possibilidade de aplicar as situações problemas e assim não foi possível gerar dados concretos sobre a eficácia e a eficiência da proposta aqui desenvolvida.

Acredita-se no entanto, que o trabalho com a resolução de problemas contribui no desenvolvimento das habilidades de raciocinar e organizar dados matemáticos.

REFERÊNCIAS

ANTUNES, C. *As inteligências múltiplas e seus estímulos*. São Paulo: Papirus, 2006. Citado na página 52.

ARANÃO, I. V. D. *A Matemática através de brincadeiras e jogos*. *[S.l.]*: campinas, SP: Papirus, 1996. Citado na página 53.

ÁVILA, G. *Introdução à análise matemática*. *[S.l.]*: Editora Blucher, 1995. Citado na página 16.

BAHIA, D. O. d. *Site Diário Oficial da Bahia: Decreto N.19529 de 16 de março de 2020. Regulamenta, no Estado da Bahia, as medidas temporárias para enfrentamento da emergência de saúde plúbica de importância internacinal decorrente do coronavírus.* 2020. Disponível em: <http://www.legislabahia.ba.gov.br/documentos/decreto-no-19529-de-16-de-marco-de-2020>. Acesso em: abril de 2020. Citado na página 61.

BRANDT, S. T. J.; MONTORFANO, C. O software geogebra como alternativa no ensino da geometria em um mini curso para professores. *Acedido em*, v. 30, p. 329, 2007. Citado na página 57.

BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática / Secretaria de Educação Fundamental.* Brasilia: MEC/SEF, 1998. Citado 3 vezes nas páginas 44, 60 e 61.

BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) - Ensino Médio. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Média e Tecnológica*. Brasília: MEC, 1999. Citado 2 vezes nas páginas 60 e 61.

BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular (BNCC)*. Brasília: MEC, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br>. Acesso em: julho de 2020. Citado na página 50.

DANTE, L. R. *Didática da Resolução de Problemas de Matemática*. São Paulo: Ática, 1998. Citado 4 vezes nas páginas 44, 45, 46 e 48.

DANTE, L. R. *Formulação e Resolução de Problemas de Matemática. Teoria e prática*. São Paulo: Ática, 2011. Citado 7 vezes nas páginas 10, 67, 70, 72, 73, 76 e 77.

FURQUIM, D. *Site Escolas disruptivas*. 2021. Citado na página 60.

GUIMARÃES, L. R. *Série professor em ação: atividades para aulas de ciências: ensino fundamental, 6º ao 9º ano*. *[S.l.]*: São Paulo: Nova Espiral, 2009. Citado na página 49.

IEZZI, G. M.; MURAKAMI, N. J. *Fundamentos de Matemática Elementar 8. Logaritmos. 6Âª edição.São Paulo*. *[S.l.]*: Ed. Atual, 2005. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 42.

LIMA, E. L. *Curso de análise; vol. 1*. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada – IMPA, 2004. Citado na página 13.

LIMA, E. L. *Números e Funções Reais*. 1Âª edição. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 30.

MORGADO, A. C. d. O.; CARVALHO, P. C. P. *Matemática Discreta.* Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática -SBM, 2015. Citado na página 13.

ONUCHIC, L. D. L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Pesquisa em resolução de problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. *Bolema-Mathematics Education Bulletin*, p. 73–98, 2011. Citado na página 46.

POLYA, G. A arte de resolver problemas. *Rio de Janeiro: interciência*, v. 2, p. 12, 1978. Citado na página 47.

POZO, J. I. Org. a solução de problemas. *Aprender a resolver, resolver para aprender. Porto Alegre: ArtMed*, 1998. Citado na página 45.