Universidade Federal do Piauí
Centro de Ciências da Natureza
Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT

Aplicações de Astronomia no Ensino de Matemática na Educação Básica

Acenilso Lima de Araújo

Teresina - 2013

Acenilso Lima de Araújo

Dissertação de Mestrado:

Aplicações de Astronomia no Ensino de Matemática na Educação Básica

Dissertação submetida à Coordenação Acadêmica Institucional do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional na Universidade Federal do Piauí, oferecido em associação com a Sociedade Brasileira de Matemática, como requisito parcial para obtenção do grau de mestre em Matemática. Orientador:

Prof. Dr. Roger Peres de Moura.

Teresina - 2013

FICHA CATALOGRÁFICA

Universidade Federal do Piauí

Biblioteca Comunitária Jornalista Carlos Castello Branco

Serviço de Processamento Técnico

A663a Araújo, Acenilson Lima de.

Aplicações de astronomia no ensino de matemática na educação básica./Acenilson Lima de Araújo.-2013

73f.

Dissertação(Mestrado)-Universidade Federal do Piauí,

Centro de Ciências da Natureza, Mestrado em Matemática, 2013

"Orientador: Prof. Dr. Roger Peres de Moura"

1. Astronomia. 2.Matemática.I. 3.Geometria. 4.Educação Básica.I. Título CDD 516

Dedicatória. Dedico este trabalho a minha família pela compreensão e incentivo; em especial a minha mãe Audiralice, meus filhos Acenilso Segundo e João Fernando, meus irmãos Ailton e Júnior, a minha esposa Aline e a meu pai Antônio Francisco Alves de Araújo (in memoriam).

Agradecimentos

Agradeço inicialmente a Deus, centro de minha convergência espiritual e de busca pelo equilíbrio e pela paz interior; por me proporcionar e me capacitar para este momento de realização acadêmica e profissional.

Agradeço aos meus familiares pelo apoio e incentivo, e principalmente pela compreensão nos momentos que estive ausente nesta busca incessante pela realização pessoal.

Agradeço aos professores companheiros, inspiradores e responsáveis; por auxiliar-me nesta formação tão desafiadora a todos.

Agradeço aos colegas do PROFMAT pela parceria e companheirismo durante todo o curso. Mais que tudo, vivenciar pessoas é fundamental.

Agradeço a meu orientador Prof. Dr. Roger Peres, pela atenção e ajuda. Aos colegas Willbert e Hélder pelo apoio final.

Agradeço a CAPES pelo apoio financeiro.

"*Os problemas significativos que enfrentamos não podem ser resolvidos no mesmo nível de pensamento em que estávamos quando os criamos.*".

Albert Einstein.

Resumo

O presente trabalho tem o propósito de usar conhecimentos e conceitos básicos de Astronomia como elemento motivador e de contextualização no ensino de Matemática na Educação Básica, em especial numa abordagem para alunos do Ensino Médio. O caráter utilitário da proposta deste volume encontra-se na forma como as aplicações são apresentadas, utilizando o cotidiano do aluno na introdução a algum conteúdo de geometria plana ou trigonometria proposto pelo professor. Buscou-se fundamentação metodológica nos Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN's e nos Parâmetros Curriculares Nacionais Para o Ensino Médio - PCNEM, no que tange a apresentação das aplicações na forma de situações problemas visando introduzir o conteúdo, para só após formalizar os conceitos e teoremas de maneira mais sistematizada. Procurou-se assim atender a um dos objetivos do Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT, que é o de elaboração de uma proposta de atividade educacional, cumprindo um dos requisitos do programa e ao mesmo tempo desenvolvendo uma atividade não convencional na aplicação de conteúdos matemáticos. Destarte as aplicações enfatizam a integração da teoria com a prática durante todo o desenvolvimento da proposta por considerar-se que tal procedimento tende a facilitar o processo de ensino e aprendizagem, fazendo o estudante perceber o conhecimento científico mais próximo de seu dia-a-dia.

Palavras-chave: Astronomia, matemática, educação básica.

Abstract

This paper aims to use knowledge and basics of Astronomy as motivator and contextualization learning of Mathematics in Primary Education, in particular an approach for high school students. The character of the proposed utility of this volume lies in how applications are presented, using the daily student in the introduction to some content plane geometry or trigonometry proposed by the teacher. We sought to methodological foundation in the National Curriculum - PCN's and National Curriculum For Secondary - PCNEM, regarding the submission of applications in the form of problem situations in order to introduce the content to only after formalizing the concepts and theorems in a more systematized. Thus sought to meet one of the goals of the Professional Masters in Mathematics - PROFMAT, which is drafting a proposal for educational activity, fulfilling one of the requirements of the program and at the same time developing an activity in unconventional application of mathematical content. Thus applications emphasize the integration of theory and practice throughout the development of the proposal on the grounds that such a procedure tends to facilitate the process of teaching and learning, making students realize the scientific knowledge closer to their day-to-day.

Keywords: Astronomy, mathematics, basic education.

Sumário

Introdução

Durante todo o período em que estive ligado a educação, em especial como professor das disciplinas de Matemática e Física de escolas da rede pública e particular, muito me intrigava o fato de que progressivamente os alunos aumentavam seu desinteresse e a dificuldade em compreender os conteúdos matemáticos abordados a cada série. Embora não tenha trabalhado dados estatísticos para se constatar tal afirmativa, era notória a validade de tal conjectura que se manifestava especialmente na importância dada à matéria e no rendimento dos alunos que decrescia a cada série.

É fácil notar isto, analisando a aceitação da disciplina de Matemática nas séries iniciais do Ensino Fundamental comparada aos anos finais do Ensino Fundamental e ao Ensino Médio. Essa problemática seria ocasionada pela abstração e sistematização do conhecimento que a disciplina exige? Problemas relativos a um currículo defasado e desestimulante? Má formação dos professores da área, em especial aqueles que trabalham na fase final da Educação Básica? Ou outro problema relacionado à gestão e/ou valorização profissional?

Não é propósito deste trabalho analisar tais questionamentos como causa do insucesso e dos problemas que passam hoje o ensino de Matemática no Brasil. Mas buscou-se neste volume sugerir o tema Aplicações de Astronomia no Ensino de Matemática como elemento motivador e de contextualização na Educação Básica, em especial numa abordagem para alunos do Ensino Médio.

Reside aqui a motivação e relevância deste estudo, em apresentar de forma distinta da abordagem tradicional e comumente vista nos livros didáticos (aplicações da Astronomia na geometria plana relacionados à proporcionalidade de segmentos, as relações métricas e trigonométricas em triângulos, além do estudo de arcos e ângulos de uma circunferência), uma lista de situações problemas, próximos do cotidiano do aluno, que podem ser trabalhados para introduzir temas de geometria.

Convém ressaltar que esta proposta faz convergir de forma construtiva e integradora vários domínios do conhecimento científico e educacional, a saber: a Astronomia, a Física, a Geografia, a História, além do conjunto de reflexões filosóficas que podem estar associados. Nesta acepção transdisciplinar procura-se desenvolver no aluno competências exigidas no mundo contemporâneo como a capacidade de interpretar informações cada vez mais globais, porém num mercado mais próximo da especificidade e da capacidade técnica.

Desse modo pretende-se contribuir com esta dissertação para o cotidiano escolar, disponibilizando subsídios teóricos e práticos que sirvam de instrumento para uma abordagem mais contextualizada no processo de ensino e aprendizagem. Proporcionando a educadores matemáticos incomodados com a crise educacional que se vivencia no país, uma opção na apresentação de conteúdos de geometria usando a Astronomia como elemento de motivação; E aos alunos um novo olhar sobre essa matéria. Tentando reduzir um dos grandes problemas educacionais que se é questionado dia-a-dia, qual seja o da proficuidade, como muito se costuma ouvir nas salas de aula "pra que serve isso?".

Para tanto se organizou o trabalho em três capítulos com propósitos bem definido e sequenciado de maneira tal que a leitura se tornasse mais agradável. Com uma apresentação lógica das ideias, iniciando com o enquadramento histórico buscando um olhar sobre as aplicações da Matemática na Astronomia antiga, seguindo para algumas considerações sobre geometria euclidiana, até chegar às aplicações encontradas em um capítulo particular. E finalmente, concluindo o trabalho com as considerações finais.

O Capítulo destinado ao enquadramento histórico organizou-se em três seções: A origem da astronomia e as primeiras observações, A Astronomia na Grécia antiga e a Astronomia na renascença com o intuito de apresentar os Filósofos e Matemáticos que desenvolveram trabalhos associados à Astronomia e suas relações com a Matemática. Numa abordagem cronológica os filósofos são apresentados um a um, destacando suas principais contribuições no campo de estudo aqui versado, desde os primeiros observadores nômades na antiguidade, passando pelo momento áureo da Grécia antiga onde se destaca Aristarco de Samos, Eratóstenes de Cirênia e Claudius Ptolomeu que foram abordados nas aplicações; até Galileu na Renascença.

O capítulo seguinte apresenta como foco principal a fundamentação teórica a cerca dos temas abordados nas aplicações do terceiro capítulo. Nele procurou-se destacar o

Teorema de Tales e como aplicação dele as demonstrações do teorema da bissetriz interna e da bissetriz externa; também fora abordado a semelhança de triângulos com seus casos particulares e as relações métricas do triângulo retângulo como aplicação. Ainda neste capítulo são explorados as relações métricas e trigonométricas em triângulos retângulos e triângulos quaisquer, bem como as relações entre arcos e ângulos na circunferência.

No terceiro capítulo está a parte principal e a motivação maior deste trabalho, aonde inicialmente nesse capítulo se preocupou em discutir a fundamentação metodológica do uso do método da resolução de problemas como instrumento de aprendizagem em Matemática, destacando o uso da História da Matemática e das situações problemas para introduzir temas e conteúdos de geometria euclidiana. Usando como base os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's). Em seguida propõe-se uma sequência de exercícios baseados em observações e problemas antigos resolvidos por Aristarco e Ptolomeu, fazendo-se uma nova roupagem destas resoluções através de observações e comentários.

É na forma de exibir as situações problemas que está o centro de convergência da proposta desta dissertação. A formalização dos conceitos se dá após apropriação do modo de solucionar os exercícios através de um conhecimento anterior adquirido e da ação mediadora do educador. Não se trata de uma mera lista de questões sobre geometria e astronomia, mas de uma estratégia motivadora e integradora do processo de ensino e aprendizagem que busca a inovação através de práticas educacionais e pedagógicas.

Capítulo 1

Enquadramento Histórico: Matemática na Astronomia Antiga

1.1 A Origem e as primeiras observações.

Segundo a Enciclopédia virtual Wikipédia: *"Astronomia é uma ciência natural que estuda corpos celestes e fenômenos que se originam fora da atmosfera da Terra"*[1]..Assim sendo este campo científico está relacionado a outras ciências de maneira muito íntima, como a física, a química e a matemática. Certamente na antiguidade não havia essa compartimentação do conhecimento em ciências, mas um campo único de atuação que integravam áreas voltadas à tecnologia e as que se preocupavam com o comportamento humano.

As observações e as especulações sobre a natureza do Universo são de épocas bem remotas. A Astronomia é talvez a atividade científica mais antiga do homem, podendo ser confundida com a própria história humana. Nasceu há milhares de anos, numa época que nos deixou poucos testemunhos. Os fundadores inconscientes desta ciência eram humildes pastores, agricultores e caçadores nômades, pois estes sentiam a necessidade de compreender os fenômenos celestes, intimamente ligados à vida cotidiana (orientação na terra e no mar, as estações do ano, os dias e as noites, etc.).

Não são muitas as anotações até hoje encontradas pelos povos antigos, mas sabe-se que existem registros de observações e estudos ligados às suas atividades diárias de aproximadamente 5000 anos atrás.

> *...Os registros astronômicos mais antigos datam de aproximadamente 3000 a.C. e se devem aos chineses, babilônios, assírios e egípcios. Naquela época, os astros eram estudados com objetivos práticos, como medir a passagem do tempo (fazer calendários) para prever a melhor a melhor época para o plantio e a colheita, ou com objetivos mais relacionados à astrologia, como fazer previsões para o futuro, já que, não tendo qualquer conhecimento das leis da natureza (física), acreditavam que os deuses do céu tinham o poder da colheita, da chuva e mesmo da vida.*[2]

Mesmo com registros de anotações somente desta época, sabe-se que a atividade intelectual a cerca do assunto remonta de períodos bem mais distantes, pois se sabe que por volta do ano 6000 a.C. se deu o surgimento da agricultura e a consequente transição entre a civilização nômade e sedentária. Fatos que se deram com o conhecimento de fenômenos naturais associados à Astronomia.

A Astronomia começou a ser estudada através de observações do movimento dos corpos celestes. Em seguida os astrônomos foram capazes de descobrir as distâncias entre alguns astros, precisar a forma e o tipo de movimento dos planetas e mais recentemente já se sabe sobre a característica e composição de alguns dos corpos celestes que compõem o sistema solar, além de informações que se possui de outras galáxias e estrelas fora de nosso sistema de referência.

Foi com os gregos que a Astronomia se desenvolveu como um ramo da Matemática, dessa forma ela passa a se desenvolver em bases racionais, momento em que houve uma grande alteração na forma de encarrar e interpretar os fenômenos naturais. O uso do conhecimento herdado dos babilônios juntamente com o esforço e curiosidade dos gregos proporcionou à Astronomia um momento de grande desenvolvimento e descoberta onde se pode destacar: (i) a previsão de um eclipse por Tales de Mileto na década de 580 a.C.; (ii) a conclusão por Aristóteles de que a Terra era aproximadamente esférica (usando o argumento de que a forma de sua sombra era circular durante um eclipse lunar); (iii) a medição do diâmetro a Terra por Eratóstenes em 230 a.C.; (iv) os cálculos sobre as distâncias entre Terra-Sol-Lua realizados por Aristarco de Samos, usando a posição destes astros durante um eclipse da Lua; (v) a proposição do modelo geocêntrico de Ptolomeu (o último astrônomo grego) baseado em conceitos matemáticos, quando escreveu o grande tratado da Astronomia; etc.

Como se ver foi na cultura helênica que se registrou a grande parte dos acervos históricos da Astronomia. De fato é inquestionável a contribuição que a civilização grega deixou para ciência, não apenas as ciências naturais (a Matemática, a Astronomia, a Física, etc.), mas também no campo humano e filosófico. A cultura grega é, ainda hoje, referência de modelo racional de observação dos fatos e da consequente sistematização do conhecimento.

É obvio que o conhecimento não surgiu com os gregos. Muitas influências de outros povos, como os romanos na política, os babilônicos na Matemática e os egípcios na Geometria e Medicina, influenciaram em sua cultura e serviram de bases pra estudos mais elaborados. No entanto, praticamente não se tem registros de estudos com fundamentos matemáticos que expliquem fatos da Astronomia. Assim como é difícil encontrar estudos de outras áreas das ciências. Mas a Matemática usada pelos filósofos gregos já era praticada por outros povos como subscreve [7], pág 30.

> *Os babilônios antigos conheciam outras importantes relações geométricas. Como os egípcios, sabiam que a altura de um triângulo isósceles bissecta a base. Daí dado o comprimento de uma corda num círculo de raio conhecido, sabiam achar a apótema. Diferentemente dos egípcios, conheciam o fato que o ângulo inscrito num semicírculo é reto, proposição conhecida como teorema de Tales, apesar de Tales ter vivido bem mais de um milênio depois dos babilônios terem começado a usá-la. Esta denominação errônea de um teorema bem conhecido da geometria é sintomático da dificuldade em avaliar a influência da matemática pré-helênica sobre culturas posteriores.*

Por esse motivo as culturas pré-helênicas têm sido estigmatizadas. Escritos relacionados à Matemática aplicada à vida diária e as utilidades locais trazem conhecimentos que mais tarde são apresentados de forma generalizada (proposições, teoremas, etc.) por outros povos. Portanto, não se pode dizer que não existia o conhecimento matemático com referências a Astronomia se já haviam registros anteriores que davam conta desse conhecimento no cotidiano dos povos antigos. Outra dificuldade em localizar dados sobre a atividade intelectual dos povos pré-helênicas foi o incêndio da biblioteca de Alexandria no ano de 48 a.C., que destruiu grande parte do acervo da mais importante biblioteca do mundo antigo, e em consequência pagou parte do registro da cultura humana até aquele momento.

1.2 Astrônomos da Grécia Antiga.

Como se viu acima, é na Grécia Antiga que se dá a grande mudança na sistematização do conhecimento científico, por isso ficou conhecida como berço da civilização moderna. "A importância cultural dos gregos clássicos aparece marcantemente no desenvolvimento que deram à Matemática e à Astronomia", destaca [13], pontuando que os conhecimentos herdados dos mesopotâmios e egípcios foram apenas noções rudimentares de Matemática e Astronomia com bases utilitárias.

Os estudos sobre Astronomia estão intimamente ligados ao desenvolvimento da geometria e principalmente da trigonometria, que justificavam determinadas ocorrências tais como estimar grandes alturas e distâncias e previam fenômenos como eclipses usando semelhança de triângulos e relações métricas no triângulo retângulo. Assim assinalou, Boyer, [7], pág 116:

> *... Com os gregos pela primeira vez encontramos um estudo sistemático de relações entre ângulos (ou arcos) num círculo e os comprimentos das cordas que os submetem. As propriedades das cordas como medidas de ângulos centrais ou inscritas em círculos eram conhecidas dos gregos do tempo de Hipócrates, e é provável que Eudoxo tenha usado razões e medidas de ângulos para determinar o tamanho da Terra e as distâncias relativas do Sol e da Lua. Nas obras de Euclides não há trigonometria no sentido estrito da palavra, mas há teoremas equivalentes a leis ou fórmulas trigonométricas específicas. (...). Cada vez mais os astrônomos da idade Alexandrina - notadamente Eratóstenes de Cirene (por volta de 276 - 194 A.C.) e Aristarco de Samos (por volta de 310 - 230 A.C.) tratavam problemas que indicavam a necessidade de relações mais sistematizadas entre ângulos e cordas.*

Tales de Mileto (624 - 546 a.C.), tradicionalmente iniciou os conceitos históricos da Astronomia e Cosmologia grega. Ele introduziu na Grécia os fundamentos da Geometria e da Astronomia, trazidos do Egito. Foi o primeiro filósofo ocidental que se tem notícias, sendo considerado o precursor do pensamento filosófico científico. Acreditava que a Terra era um disco plano em uma vasta extensão de água de onde a Terra teria evoluído através de processos exclusivamente naturais. Aliás, considerava a água como formadora de todas as outras coisas.

Entre suas mais úteis contribuições na Matemática estão algumas descobertas geométricas conforme se constatou em pesquisa do site Wikipédia a enciclopédia livre:

> *(i) A demonstração de que os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais; (ii) A demonstração do teorema que diz que se dois triângulos tem dois ângulos e um lado respectivamente iguais, então eles são iguais; (iii) A demonstração de que todo diâmetro divide o círculo em duas partes iguais; (iv) A demonstração de que ao unir-se qualquer ponto de uma circunferência aos extremos de um diâmetro AB obtém-se um triângulo retângulo em C. Provavelmente, para demonstrar este teorema, Tales usou também o fato de que a soma dos ângulos de um triângulo é igual a dois ângulos retos. Ele chamou a atenção de seus conterrâneos para o fato de que se duas retas se cortam, então os ângulos opostos pelo vértice são iguais*[19]

Associado a Tales está a previsão de um eclipse que possivelmente teria ocorrido em 28 de maio do ano de 585 a.C.; embora este fato esteja mais próximo de um mito que realidade, reside nele sua grande descoberta dentro da Astronomia.

Tales teve alguns discípulos que o seguiram como representantes da Escola jônica, que foram Anaximandro de Mileto (610 - 547 a.C.) e Anaxímines de Mileto (585 - 528 a.C.), que buscavam essencialmente nas causas naturais uma explicação para os eventos do mundo natural.

Anaximandro de Mileto principal sucessor de Tales acreditava que tudo no universo era constituído por uma substância fundamental: o ápeiron. Para ele a Terra era um grande cilindro que flutuava livremente.

> *São atribuídas a Anaximandro a confecção de um mapa do mundo habitado, a introdução do gnomon na Grécia, a medição de distância angular entre estrelas e uma rudimentar classificação das estrelas quanto ao brilho. (...). Foi o primeiro a explicar o mecanismo dos eclipses pela interposição da Lua entre a Terra e o Sol, e os eclipses da Lua pela entrada desta na sombra da Terra.*[13],pág 24.

Já Anaxímenes afirmava ser o ar a substância primordial. Todas as outras coisas poderiam se reduzir a este elemento incorpóreo e onipresente. "*Anaxímenes parece ter sido o primeiro a afirmar que a Lua brilha por refletir a luz do Sol, e acreditava ser a Terra da forma de um cilindro de pequena altura" (...).* [13], pág 25.

Pitágoras de Samos (572 - 497 a.C.) acreditava na esfericidade da Terra, da Lua e de outros corpos celestes. Reconheceu que a órbita da Lua era inclinada em relação ao equador da Terra e foi um dos primeiros a perceber que Vênus era um planeta. Achava que os planetas, o Sol, e a Lua eram transportados por esferas separadas da que carregava as estrelas. Foi o primeiro a chamar o céu de cosmos.

A escola pitagórica tem como essência o número que é o princípio fundamental que forma todas as coisas. Além de grandes místicos, os pitagóricos eram grandes matemáticos. Eles descobriram propriedades interessantes e curiosas sobre os números, inclusive o termo matemática no mundo grego é creditado a Pitágoras. Teve vários discípulos, dentre os quais merece destaque Filolaus de Crotona (Sec.V a.C.), conhecido como a primeira pessoa a propor que a Terra se move.

Na Grécia, o centro de difusão cultural do mundo antigo, os filósofos construíram sistemas astronômicos geocêntricos que caracterizavam-se por apresentar a Terra imutável no centro do universo; e os não geocêntricos, onde previam que a Terra apresentava algum tipo de movimento. Os modelos geocêntricos predominavam na época.

O primeiro a idealizar um sistema astronômico não geocêntrico foi Filolaus ($\approx$ 390 a.C.). Como pitagórico que era, não fugia à regra: era um fiel venerador dos números, especialmente o tetractys (década), acreditando ser esse número "o grande, todo-poderoso e gerador de tudo, a essência divina e terrestre", etc. Tal subterfúgio ("o 10 é soberano, perfeito"), provavelmente o tenha influenciado diretamente na idealização de seu sistema não geocêntrico.

Segundo ele havia um fogo no centro do universo em torno do qual giravam os sete planetas (entre eles o Sol e a Lua) e a Terra, somando um total de nove corpos, (sem contar com a esfera das estrelas fixas), gerando um problema, pois o número perfeito era 10. Para corrigir a imperfeição, admitiu-se a existência de uma "Contra-Terra" ou "Antiterra" colinear com nosso planeta em sua revolução diária em torno do fogo central.

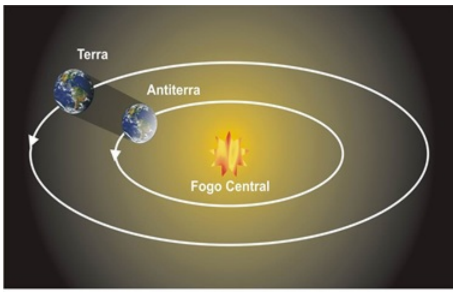


Figura 1.1: Modelo Pirocêntrico de Filolaus de Crotona

O período de translação solar em torno do fogo era de um ano, enquanto que as demais estrelas eram estacionárias (obs.: o Sol não era considerado estrela). A Terra (esférica) compunha-se de uma face habitada e outra não habitada - que permanecia sempre voltada pra o lado do fogo; por isso não se podia observar nem o fogo nem a Antiterra.

Este postulado foi amplamente aceito pelos astrônomos por aproximadamente dois mil anos. Como veremos mais à frente o próprio Copérnico o usou na idealização de seu modelo do universo.

Outro sistema astronômico famoso, praticamente da mesma época (um pouco antes) foi o de Eudoxo (séc. IV a.C.), o provável inventor do cálculo integral e pai da Astronomia Científica. Assim como Pitágoras, Eudoxo fora um dos notáveis discípulos de Platão.

Platão, seu professor, propôs a ele e a seus colegas, que interpretassem geometricamente os movimentos do Sol, da Lua, e demais planetas (na época em número de cinco), supondo suas órbitas como circulares uniformes, para não contradizer a "perfeição cósmica". Apesar dessa pesada restrição, Eudoxo conseguiu brilhantemente dar para cada um dos corpos celestes uma representação coerente, conhecida como "esferas homocêntricas".

Platão tinha uma visão distinta do Universo ao admitir que a Terra era esférica como próprio universo. Ele defendia a ideia de uma rotação diária da abóbada celeste em volta de uma Terra imóvel. Surgem assim os modelos geocêntricos, tomando uma composição de esferas planetárias concêntricas, sendo a Terra situada no centro, e com vários raios variáveis, cada um girando em torno de um eixo fixo em relação à superfície da esfera seguinte em ordem de grandeza crescente.

Aristóteles de Estagira (384-322 a.C.) combinou os esquemas geométricos e afirmava que o Universo é esférico e finito. Aperfeiçoou a teoria das esferas concêntricas de Eudoxus de Cnidus (408-355 a.C.), propondo em seu livro De Caelo, que "o Universo é finito e esférico, ou não terá centro e não pode se mover". Este modelo prevaleceu por quase dois mil anos. Como discípulo da escola de Platão que era, suas ideias tinha por inspiração seu mestre.

Aristóteles explicou que as fases da Lua dependem de quanto da parte da face da Lua iluminada pelo Sol está voltada para a Terra. Explicou, também, os eclipses: um eclipse do Sol ocorre quando a Lua passa entre a Terra e o Sol; um eclipse da Lua ocorre quando a Lua entra na sombra da Terra. Aristóteles argumentou a favor da esfericidade da Terra,

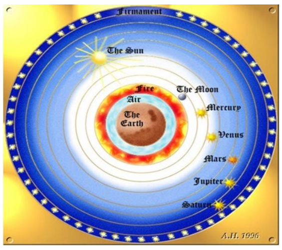


Figura 1.2: Imagem do sistema geocêntrico defendido por Aristóteles

já que a sombra da Terra na Lua durante um eclipse lunar sempre apresenta aspecto arredondado. Embora se encontre que Aristóteles tenha estimado a dimensão do globo terrestre, também se fala em Eudoxo como estimador do comprimento da circunferência terrestre em 60.000Km, e não Aristóteles. Pois é sua a afirmação de que o diâmetro do Sol era nove vezes o da Terra.

Antes do brilhante trabalho de Aristarco de Samos na astronomia destacamos Heraclides de Pontus (388-315 a.C.). Ele propôs que a Terra gira diariamente sobre seu próprio eixo, que Vênus e Mercúrio orbitam o Sol, e a existência de epiciclos.

Aristarco de Samos (310-230 a.C.) foi o primeiro a propor que a Terra se movia em volta do Sol, antecipando Copérnico em quase 2000 anos. Este matemático grego defendia a ideia de que a Terra apresentava movimento de rotação em torno de seu próprio eixo e movimento de translação em torno do Sol. Ele também defendia que os demais planetas realizavam movimento de translação segundo órbitas circulares ao redor do Sol. Suas ideias não encontravam apoio naquela época que vivia na "certeza científica"do geocentrismo difundida por ensinamentos da Física e da Cosmologia Aristotélica. Aristarco elaborou uma classificação para as estrelas baseadas na intensidade de seu brilho que estava associado a suas distâncias à Terra.

Entre outras coisas, desenvolveu um método para determinar as distâncias relativas do Sol e da Lua à Terra e mediu os tamanhos relativos da Terra, do Sol e da Lua. Como encontramos em [7], pág 116:

> *Aristarco, segundo Arquimedes e Plutarco, propôs um sistema heliocêntrico, antecipando a Copérnico por mais de um milênio e meio; mas o que quer que ele tenha escrito sobre esse assunto se perdeu. Em vez disso temos dele um tratado talvez escrito antes (cerca de 260 a.C.), sobre os tamanhos e distâncias do Sol e da Lua, que assume um universo geocêntrico.*

Foi nesse tratado que Aristarco chegou que a distância do Sol a Terra estava entre dezoito e vinte vezes a distância entre a Terra e a Lua. E que pelo fato da Lua e o Sol ter aproximadamente o mesmo tamanho aparente, isto é, apresentam mesmo tamanho angular quando vistos por um observador na Terra durante um eclipse solar, seus tamanhos seguem a mesma razão de suas distâncias à Terra.

No entanto, o ângulo de visualização da Lua e do Sol previsto por Aristarco, que foi de 2^o não teve consistência. Arquimedes posteriormente atribuiu um valor mais conveniente 0.5^o. Isso aumentou em praticamente vinte vezes a estimativa de razão entre os diâmetros do raio do Sol e da Lua, que passara a ser em torno de 400 vezes.

Mesmo assim as informações de Aristarco perduraram por muito tempo diante da forma engenhosa empregada por ele em seu tratado (combinação de geometria com observação), possibilitando inclusive o cálculo dos raios do Sol e da Lua em função do raio da Terra. Fato esse só questionado pelo erro de observação do ângulo visualizado. Sobre os créditos de Aristarco escreveu Boyer: "(...) *Além disso, o método usado por Aristarco era inatacável, o resultado sendo prejudicado apenas pelo erro de observação* (...)"[7], pág.117).

Com base nos estudos de Aristarco desenvolveram-se as aplicações dos problemas 2 e 3 do terceiro capítulo deste trabalho que apresentam o raciocínio usado pelo talentoso matemático grego além de formas atuais de se resolver tais problemas.

Eratóstenes de Cirênia (276-194 a.C.), bibliotecário e diretor da Biblioteca Alexandria de 240 a.C. a 194 a.C., foi o primeiro a medir o diâmetro da Terra, além de calcular com êxito a área superficial e o volume da Terra.

Figura 1.3: Erastóstenes e o cálculo do raio da terra

Tendo observado que ao meio-dia no Solstício de Verão, os raios solares iluminavam o fundo de um poço situado em Siena (concluindo que os raios solares incidiam perpendicularmente) e que à mesma hora em Alexandria, a sombra projetada por uma vara permitia-lhe (a partir do comprimento da sombra e da altura da vara) calcular a inclinação dos raios solares.

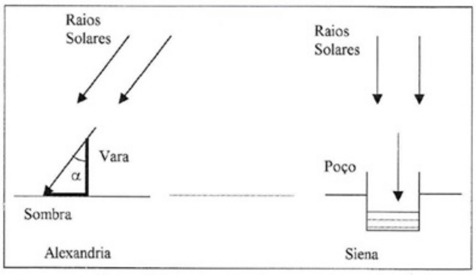


Figura 1.4: Esquema observado por Erastóstenes

Eratóstenes mediu um ângulo correspondente à quinquagésima parte da circunferência, ou seja, $7,2^o$. Observe a figura abaixo:

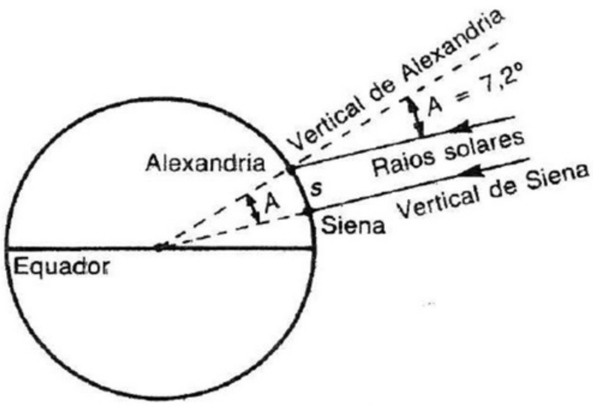


Figura 1.5: Esquema observado por Erastóstenes

Com base nas figuras acima e usando a relação entre arco e ângulo Eratóstenes chegou a seguinte relação:

$$\frac{s}{p} = \frac{7,2^o}{360^o},$$

sendo s a distância de Siena a Alexandria (estimada em 5000 estáddios) e p o perímetro da Terra.

Daí temos $p = \dfrac{5000 \times 360}{7,2} = 250000\,\text{estádios ou } 39375\,\text{Km}.$

Observação 1. *Admitia-se que um estádio equivalia a* $157,5\mathsf{m}$.

Dado que o perímetro da circunferência é $2\pi\mathsf{R}$,onde R é o raio da Terra (assumindo a Terra como esférica), chega-se à:

$$\mathsf{R} = \frac{39375}{2\pi} = 6270\mathsf{Km}.$$

Sabe-se hoje que o raio médio da Terra é de $6.371\mathsf{Km}$, portanto uma excelente aproximação quando considerados os instrumentos de observação disponíveis da época. O valor do raio terrestre encontrado por Eratóstenes também será utilizado no capítulo das aplicações deste trabalho, especificamente na *situação problema 3*.

Importante observar que apesar do uso da angulação de $7,2^o$, Eratóstenes ainda não dispunha de conhecimentos trigonométricos. Na verdade ele usou a razão $\frac{1}{50}$ do arco da circunferência pra encontrar o valor do raio terrestre.

Ou seja, o perímetro da Terra era 50 vezes a distância entre Siena e Alexandria que correspondia a 5000 estádios. Nessa linha também assinalou Boyer:

> *Durante cerca de dois séculos e meio, de Hipócrates a Eratóstenes, os matemáticos gregos estudaram as relações entre retas e círculos e as aplicaram a uma variedade de problemas na astronomia, mas disso não resultou uma trigonometria sistemática. Então presumivelmente durante a segunda metade do segundo século a.C. foi compilada a que foi presumivelmente a primeira tábua trigonométrica pelo astrônomo Hiparco de Nicéia (por volta de 180 - 125 a.C.), que assim ganhou o direito de ser chamado de "o pai da trigonometria.* [7], pág 118.

Hiparco de Nicéia (160 - 125 a.C.), considerado o pai da trigonometria e maior astrônomo da era pré-cristã, construiu um observatório na ilha de Rodes, onde fez observações durante o período de 160 a 127 a.C. Como resultado, ele compilou um catálogo com a posição no céu e a magnitude de 850 estrelas.

Hiparco defendia a idéia do geocentrismo de Aristóteles, onde a Terra estaria fixa no centro do Universo e todos os outros astros realizam movimentos uniformes ao seu redor. Hiparco deduziu corretamente a direção dos pólos celestes, e até mesmo a precessão, que é a variação da direção do eixo de rotação da Terra devido à influência gravitacional da Lua e do Sol, que leva 26000 anos para completar um ciclo.

Hiparco também deduziu o valor correto de $\frac{8}{3}$ para a razão entre o tamanho da sombra da Terra e o tamanho da Lua e também que a Lua estava a 59 vezes o raio da Terra de distância; o valor correto é 60. Ele determinou a duração do ano com uma margem de erro de 6 minutos.

Ptolomeu (85 d.C. - 165 d.C.) *(Claudius Ptolemaeus)* foi o último astrônomo importante da antiguidade. Não se sabe se ele era egípcio ou romano. Ele compilou uma série de treze volumes sobre astronomia, conhecida como o Almagesto no mundo árabe, que é a maior fonte de conhecimento sobre a astronomia na Grécia. Neste tratado ele reuniu trabalhos dele com outros autores principalmente de Apolônio e Hiparco, aperfeiçoando assim a versão do modelo geocêntrico.

Figura 1.6: Tratado de Almagesto compilado por Ptolomeu

Este sistema explicava o carácter errante dos planetas, para além de explicar as diferenças de velocidade entre os diferentes pontos da alegada órbita dos planetas em torno da Terra. Na obra Almagesto encontram-se também registos das construções e uso de instrumentos astronômicos, como por exemplo, o astrolábio.

Após Ptolomeu, a ciência astronômica e cosmológica grega praticamente deixa de existir. O pensamento religioso cristão estanca o conhecimento das ciências em geral. O conhecimento passa a ser o pregado pela leitura bíblica em sua interpretação literal.

E antes de se passar adiante se queria destacar a obra de Euclides de Alexandria, não sobre sua vida, pois desta pouco se sabe, mas da grande contribuição deixada da Matemática grega que fora sua obra intitulada Elementos de Euclides.

Não se sabe ao certo que axiomas e teoremas apresentados por Euclides são de fato de sua autoria. Alguns estudos já dão conta de que parte de sua obra foram interpoladas após Elementos; contudo não se pode negar a contribuição desta obra, uma prova disso fora a observação feita na obra “Tópicos de História da Matemática”de Tatiana Roque e João Bosco Pitombeira [18], ao dividir sua obra em capítulos e frisar que existiu uma matemática grega até Euclides e outra após Euclides, tão grande é a importância deste matemático.

Os trabalhos de Euclides não tratam especificamente sobre Astronomia, porém trouxeram uma contribuição muito grande na maneira lógica de se demonstrar teoremas da geometria e aritmética. Sua obra é composta de 13 livros dividida em três grandes partes que tratam de geometria plana (livros I a VI), aritmética (livros VII a IX) e geometria espacial (livros X a XIII).

1.3 Astrônomos da Renascença.

O Renascimento foi um importante movimento de ordem artística, cultural e científica que marcou a passagem da Idade Média para a Moderna. Embora tenha sido um marco histórico, apenas representou o afloramento de sensíveis transformações que não mais correspondiam ao conjunto de valores apregoados pelo pensamento medieval. Apresentou um novo conjunto de temas e interesses aos meios científicos e culturais de sua época. Ao contrário do que possa parecer, o renascimento não pode ser visto como uma radical ruptura com o mundo medieval.

É importante ter em mente que essas divisões históricas não são muros rígidos em torno de ideias. Na Europa do século XIII, ainda Idade Média, já havia uma forte insatisfação com a Física e a Astronomia de Aristóteles e de Ptolomeu. Nos séculos XIII e XIV muitos fatos científicos desconhecidos de Demócrito, Aristóteles e tantos outros filósofos naturais já haviam sido acumulados e pediam novos métodos de análise. E embora houvesse esse descontentamento com a forma de ver as ciências, têm-se outras motivações que embora não declaradas, foram de importância sem tamanho. Foi a burguesia ansiosa por poder, ora detido nas mãos da igreja, que financiou os filósofos nessa nova concepção de abordar o conhecimento científico, como forma de questionar alguns dogmas medievais.

Várias transformações ocorreram como a defesa do humanismo em contradição à ideia do teocentrismo, o experimentalismo e o racionalismo. Essas transformações facilitaram o caminho para a revolução científica, mas isso só ocorreria depois do movimento Renascentista ter chegado ao norte da Europa, com figuras como Copérnico, Francis Bacon e Descartes. Foram eles que levaram adiante os avanços iniciados pelos sábios da Idade Média, mas estes personagens já são muitas vezes descritos como pensadores pré-iluministas, ao invés de serem vistos como parte do renascimento tardio.

O texto que segue, tratando dos astrônomos renascentistas, teve como base pesquisa pública online na página web do Ministério das Ciências e Tecnologia, no endereço do Observatório Nacional, conforme segue nas referências bibliográficas em [16].

Nicolau Copérnico (1473 - 1543), começou seus estudos na Polônia, mas foi para a Itália estudar Leis canônicas, Medicina, Filosofia e Leis em geral. Estudou Astronomia na Itália onde exercia a função de assistente do astrônomo de Ferrara, e onde começou a estudar sobre as esferas celestes pra encontrar um modelo de posicionamento e movimentação dos planetas, pois o modelo proposto por Ptolomeu (geocentrismo) já não mais explicava a formação do sistema planetário

Figura 1.7: Sistema heliocêntrico de Copérnico

As características principais do sistema heliocêntrico proposto por Nicolau Copérnico foram: (i) O Sol é o centro do sistema Solar; (ii) A Terra e os planetas descrevem órbitas circulares em torno do Sol; (iii) O dia e a noite são resultados do movimento de rotação da Terra em torno de seu eixo; (iv) Mercúrio e Vênus estão mais próximos ao Sol do que a Terra; (v) Somente 3 movimentos da Terra são necessários: rotação diária em torno de seu eixo, revolução anual em torno do Sol e oscilação ou libração da Terra em torno do seu eixo, explicando a precessão dos equinócios.

Thomas Digges (1543-1595), escreveu um trabalho popular chamado A Perfit Description of the Caelestiall Orbes, publicado em 1576, que tinha como objetivo explicar o modelo heliocêntrico de Nicolau Copérnico.

Digges introduziu uma importante modificação no Sistema Universal de Copérnico. Ele reconheceu que a esfera das estrelas fixas que limitava o Universo não era logicamente necessária em um modelo onde a Terra tinha um movimento de rotação. Removeu assim, a borda mais externa do modelo e dispersou as estrelas fixas por todo o espaço não limitado. Seu modelo de Universo era heliocêntrico, infinito com as estrelas espalhadas por um espaço vasto e aberto.

Giordano Bruno (1548 - 1600), tomou conhecimento do livro de Thomas Digges e, prontamente adotou as ideias ali contidas. Este livro falava de um Universo sem contorno e voltou sua atenção para a conclusão lógica, previamente mostrada por Nicolau de Cusa (1401-1464), de que o Universo também não possui centro, ou seja, um Universo sem limite, indeterminado.

Esse brilhante teólogo, filósofo, escritor e frade dominicano deve ser considerado o principal representante da doutrina do Universo descentralizado, infinito e infinitamente povoado.

As afirmações de Giordano Bruno eram avançadas demais para a época em que ele vivia. Ao contrário de Digges, Giordano Bruno não imergiu os corpos celestes nos céus da teologia: ele nada nos fala sobre anjos e santos. Isso era demais para ser tolerado.

Em 1591, Giordano Bruno mudou-se para Veneza onde foi preso pela Inquisição e julgado. Devido às suas declarações Giordano Bruno foi enviado para Roma, para um segundo julgamento, onde permaneceu preso em uma cadeia eclesiástica e foi continuamente interrogado até o ano 1600. Após ter sido torturado, e bravamente ter se recusado a se retratar das ideias que propagava, Giordano Bruno foi queimado vivo em uma praça pública no ano 1600 em Roma, Itália.

Tycho Brahe (1546 - 1601), astrônomo dinamarquês, é conhecido principalmente pelas invenções de instrumentos de observação que ele próprio construía. Foi o maior de todos os astrônomos pré-telescópio e por meio de estudos sistemáticos com seus instrumentos, desfrutou de observações limitadas pela resolução do olho humano. Suas observações foram numerosas, quase mil estrelas catalogadas com exatidão, os planetas foram seguidos com precisão e os cometas com um pouco mais dificuldade.

Propôs seu próprio modelo planetário, o sistema tychonoico, onde o Sol e a Lua giravam ao redor da Terra, enquanto todos os outros planetas giravam ao redor do Sol. Na verdade, este modelo era uma modificação geocêntrica do modelo de Copérnico, sendo equivalente ao sistema de Copérnico, no sentido de que os movimentos relativos de todos os corpos celestes (exceto as estrelas) são os mesmos nos dois sistemas. A Cosmologia de Tycho Brahe forneceu as bases observacionais necessárias, que permitiram a Kepler estabelecer os verdadeiros movimentos dos planetas.

Johannes Kepler (1571 - 1630), era matemático e místico, interessado principalmente nas relações numéricas entre os objetos do Universo. Ele descreveu a sua busca pela ciência como um desejo de conhecer a mente de Deus. Ele foi um dos mais importantes cientistas do seu tempo e pode-se dizer que, sem os seus trabalhos, a física desenvolvida posteriormente por Newton talvez não existisse.

Figura 1.8: Modelo geométrico de Kepler

De posse dos resultados das observações feitas por Tycho Brahe, principalmente aquelas sobre os registros do movimento do planeta Marte, formulou as três leis fundamentais sobre o movimento planetário, conhecidas como as Leis de Kepler:

- Lei das Órbitas Elípticas: Os planetas se movem em órbitas elípticas com o Sol em um dos focos das elipses.

- Lei das Áreas: Uma linha traçada do Sol a um planeta percorrerá áreas iguais em tempos iguais. Esta lei determina que os planetas se movem com velocidades diferentes, dependendo da distância a que se encontram do Sol.

- Lei dos Tempos: Os quadrados dos períodos de revolução dos planetas são proporcionais aos cubos dos eixos máximos de suas órbitas. Esta última lei indica que existe uma relação entre a distância do planeta e o tempo que ele demora a completar uma revolução em torno do Sol. Assim, quanto mais distante o planeta estiver do Sol mais tempo levará para completar sua volta em torno desta estrela.

É muito interessante verificar o que estas leis modificam na Astronomia antiga.

A primeira lei de Kepler elimina o movimento circular que tinha sido aceito durante 2000 anos.

A segunda lei de Kepler substitui a ideia de que os planetas se movem com velocidades uniformes em torno de suas órbitas pela observação empírica de que os planetas se movem mais rapidamente quando estão mais próximos do Sol e mais lentamente quando estão mais afastados.

A terceira lei de Kepler é precursora da Lei da Gravitação que seria desenvolvida por Newton na parte final do século XVII.

Além disso, de modo bastante óbvio, as três leis de Kepler exigem que o Sol esteja no centro do Sistema Solar, em contradição com a ideia de Aristóteles. É importante ressaltar que sem as medições de Tycho Brahe, Kepler não teria encontrado suas leis planetárias, e a história da ciência do século XVI poderia ter sido muito diferente.

Galileu Galilei (1564 - 1642), introduziu o uso do telescópio na Astronomia em 1610 inovando os métodos de observação e de experimentação. Com o uso do telescópio observou grandes descobertas como a natureza montanhosa da superfície da Terra, os quatro grandes satélites de Júpiter, a descoberta de novas estrelas não visíveis a olho nu, as fases de Vênus. Além de justificar o movimento dos planetas em torno do Sol.

Foi Galileu quem argumentou que a Matemática, ao invés de ser uma perfeição, é a verdadeira linguagem da ciência.

Assim como muitos outros cientistas de sua época, Galileu há muito tempo declarava, particularmente, estar convencido de que o sistema heliocêntrico de Copérnico era correto. Para ele a tradicional avaliação do universo feita por Ptolomeu era uma concepção errada e que já havia sido remendada demais por outros cientistas à procura de uma solução para os seus inúmeros problemas. Ele expressa esta visão em uma carta para Kepler em 1597. O que ele agora observa refuta, além de qualquer dúvida científica, as teorias de Ptolomeu que eram conservadas como relíquias sagradas.

Logo depois da chegada de Galileu a Roma, o Santo Ofício decidiu ponderar sobre duas importantes proposições:

- Que o Sol é o centro do Universo e, consequentemente, não é alterado por qualquer movimento local.
- Que a Terra não está no centro do Universo nem é sem movimento, mas se move como um todo, e também tem movimento diurno.

Sentindo-se ultrajada a Igreja católica decidiu confrontá-lo diante de sua teoria contrária ao dogma da igreja que era o geocentrismo. Abaixo se ver uma sentença dada a Galileu em 1633 pela Santa Inquisição e logo em seguida sua abjuração negando a difusão da teoria do heliocentrismo.

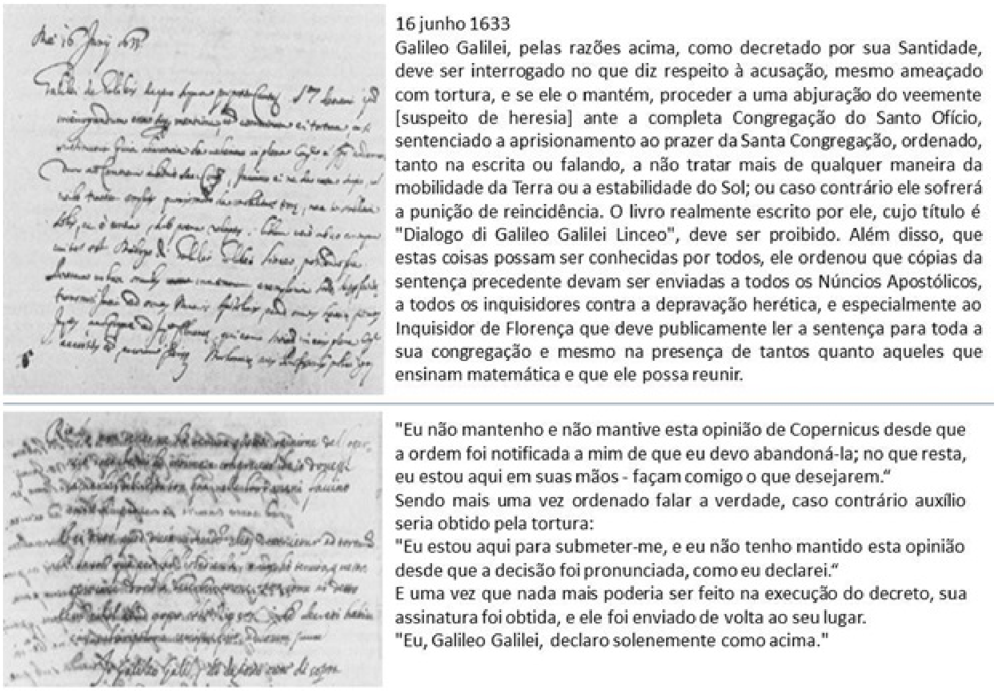


Figura 1.9: Sentença e abjuração de Galileu pela Santa Inquisição

O aristotelismo recebe um golpe mortal quando Galileu faz a descoberta das manchas solares. Este fato acaba com a doutrina aristotélica da imutabilidade dos céus.

Galileu não contribuiu significativamente para a teoria cosmológica, mas suas observações não só deram início à era da Astronomia telescópica, como exerceram profunda repercussão sobre o entendimento humano do Universo.

Neste trabalho, usamos conhecimentos de Astronomia de alguns filósofos da antiguidade para mostrar aplicações à Geometria ensinada no Ensino Básico como forma de estimular os alunos a pensar a Matemática aplicada aos diversos ramos das ciências. Propondo o Ensino da Matemática não apenas em bases utilitárias, mas também como elemento essencial ao encaminhamento à pesquisa científica, neste caso em Astronomia.

E como a pesquisa nos mostra que o conhecimento científico é mutável, é necessário sempre ir além, pois a busca da verdade transitória deve ser permanente. Como prova disso a Uma pesquisa publicada na revista Science em 2012 mostrou que a variação na forma do Sol é bem menor do que os cientistas supunham. Isso está ajudando os pesquisadores a entender melhor o comportamento do Sol e a sua dinâmica com os planetas.

Outras descobertas recentes sobre Astronomia foram à descoberta da quarta lua que orbita Plutão, a presença de água na Lua e evidências de que também exista em Marte, a descoberta de que uma das luas de Saturno exala vapor de água entre outras.

Também em dezembro de 2011, a Agência Espacial Americana confirmou a descoberta do primeiro planeta localizado na zona habitável de uma estrela parecida com o Sol. O planeta está sendo chamado de Kepler-22b e tem cerca de 2,5 vezes o tamanho do raio da Terra. Cientistas estão incertos quanto à composição do planeta, mas a descoberta foi um passo a mais na busca por um planeta gêmeo da Terra. Todas estas descobertas são frutos de pesquisas científicas, em especial nos aparelhos de observação celeste, que iniciaram ainda na antiguidade e se aperfeiçoam com os pesquisadores de hoje e com a contribuição dos que ainda emanarão.

Capítulo 2

Algumas considerações sobre Geometria Euclidiana

2.1 Teorema de Tales

2.1.1 Um breve histórico

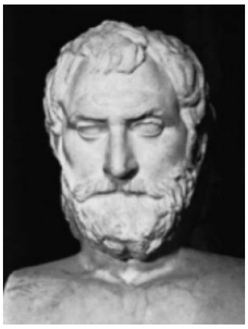


Figura 2.1: Tales de Mileto

Viajando muito pelos centros antigos de conhecimento, Tales de Mileto deve ter obtido informações sobre Astronomia e Matemática, aprendendo Geometria no Egito. Na Babilônia, sob o governo de Nabucodonosor, entrou em contato com as primeiras tabelas e instrumentos astronômicos, e diz-se que, em 585 a.C., conseguiu predizer o eclipse solar que ocorreria neste ano, assombrando seus contemporâneos, é nesta data que se apoiam para indicar aproximadamente o ano em que nasceu, pois na época deveria contar com quarenta anos mais ou menos. Calcula-se que tenha morrido com 78 anos de idade. Tales é considerado o primeiro filósofo e o primeiro dos sete sábios, discípulo dos egípcios e caldeus, e recebe o título comumente de "primeiro matemático"verdadeiro, tentando organizar a Geometria de forma dedutiva.

Acredita-se que, durante sua viagem à Babilônia, estudou o resultado que chegou até nós como "Teorema de Tales". A ele também se devem outros quatro teoremas fundamentais: "um circulo é bissectado por um diâmetro", "os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais", "os pares de ângulos opostos formados por duas retas que se cortam são iguais", e "se dois triângulos são tais que dois ângulos e um lado são iguais respectivamente a dois ângulos e um lado do outro, então, eles são congruentes".

Fundador da Escola jônica da Grécia Antiga parece provável que Tales conseguiu medir a altura de uma pirâmide do Egito observando o comprimento das sombras no momento em que a sombra de um bastão vertical era igual á sua altura.

2.1.2 Teorema de Tales

O enunciado do Teorema de Tales é o seguinte:

Se duas retas transversais são segmentadas por um feixe de retas paralelas, então a razão entre dois segmentos quaisquer de uma delas é igual à razão entre os respectivos segmentos correspondentes da outra.

Portanto vale a relação $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}}$. Pode-se também, tomar a proporção $\frac{\overline{AD}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}}$, entre outras que relacione segmentos correspondentes.

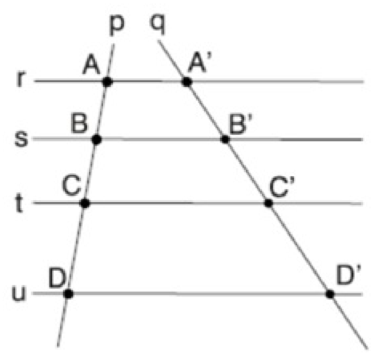


Figura 2.2: Transversais sobre paralelas

O Teorema de Tales pode ser demonstrado usando a ideia do teorema da base média do trapézio, que praticamente recai na "prova incompleta"dos pitagóricos que supõem todos os segmentos comensuráveis. Normalmente essas demonstrações que aparecem nos textos didáticos "escondem"o caso dos segmentos serem incomensuráveis.

Encontra-se na obra [11], pág.185-187, uma demonstração interessante usando a divisão dos segmentos e prevendo a possibilidade de segmentos incomensuráveis; porém a demonstração tradicional, que usa o feixe de paralelas, só fica completa com a incômoda passagem ao limite. Também nessa linha encontra-se a demonstração do teorema 6.16 na obra [5],pág.95-96.

Outra demonstração conhecida é feita pelo método das áreas. Ela não segue um caminho natural, mas é uma prova completa e convincente. A vantagem da demonstração que apresentamos aqui está no fato de que nela não importa se os segmentos AB' e AB são comensuráveis ou não.

Vale ressaltar que muitas demonstrações ficam mais acessíveis e elegantes quando se usa a ideia de área. Esta técnica, de origem chinesa, que estabelece o uso de áreas com sinais e a relação entre as áreas orientadas de dois triângulos com um lado comum, não é comumente vista nos livros didáticos adotados na Educação Básica. Como faz referências BORTOLOSSI, [6],pág.4-5:

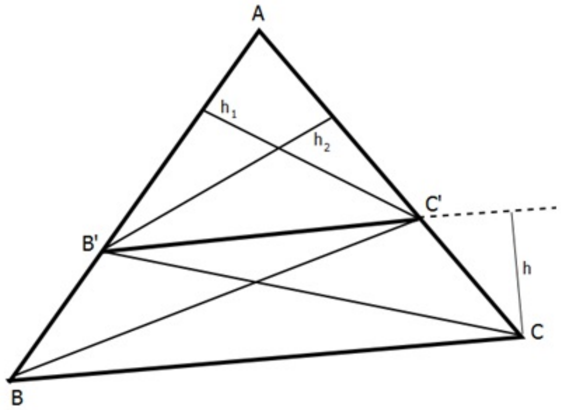
> *O método da área tradicional é muito antigo. A demonstração de Euclides para o Teorema de Pitágoras, por exemplo, faz o uso de áreas [25, livro I, proposição 47]. De maneira curiosa, o emprego de áreas para se resolver problemas em geometria não é um hábito ocidental. De fato, a ferramenta padrão que estamos acostumados a usar é semelhança ou congruência de triângulos. Contudo, em muitos casos, não é evidente quais triângulos considerar. Para que isto aconteça, construções não intuitivas de retas auxiliares são necessárias. (...).*

Destarte exibiremos aqui uma demonstração que foi baseada no artigo citado em [20], que por sua vez, foi inspirada em outra demonstração realizada no livro Medida e Forma em Geometria do professor Elon Lages Lima.

Demonstração do Teorema de Tales Considere inicialmente h_1 como a altura relativa à base AB' do triângulo $\Delta AB'C'$ e relativa à base AB do triângulo $\Delta ABC'$; e

h_2 a altura relativa à base AC do triângulo $\Delta AB'C$ e relativa à base AC' do triângulo $\Delta AB'C'$.

Se $B'C'$ é paralelo a BC, então os triângulos $\Delta B'C'B$ e $\Delta B'C'C$ tem mesma área porque possuem mesma base $B'C'$ e alturas relativas (h) a essa base também iguais.



Acrescentando a esses triângulos o triângulo $\Delta AB'C'$, concluímos que os triângulos $\Delta ABC'$ e $\Delta AB'C$ também possuem mesma área.

Se dois triângulos possuem mesma altura, então a razão entre suas áreas (S) é igual à razão entre suas bases, logo

$$\frac{\overline{AB'}}{\overline{AB}} = \frac{S(AB'C')}{S(ABC')} = \frac{S(AB'C')}{S(AB'C)} = \frac{\overline{AC'}}{\overline{AC}},$$

o que prova o teorema.

2.1.3 Aplicações do Teorema de Tales

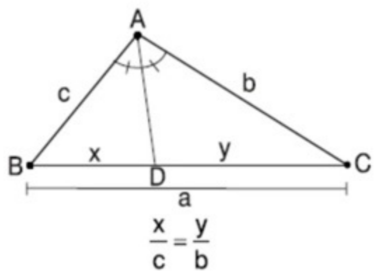
Como exercício da Relação de Tales descrita acima, far-se-á a demonstração de dois teoremas muito importantes e também muito úteis na resolução de problemas em geometria euclidiana plana que são o teorema da bissetriz interna e o teorema da bissetriz externa, que se seguem.

NOTAÇÃO: É importante notar que a partir de agora se passará a trabalhar com ângulos, e para representá-los serão usadas as seguintes notações:

- Note que se usou logo acima a notação ΔABC para representar o triângulo ABC.
- Neste triângulo ΔABC, a notação que será usada para representar o ângulo interno do vértice A, além da notação tradicional Â, será $\angle A$ ou $\angle BAC$, para o ângulo interno do vértice B será $\angle B$ ou $\angle ABC$, e assim para os demais ângulos.

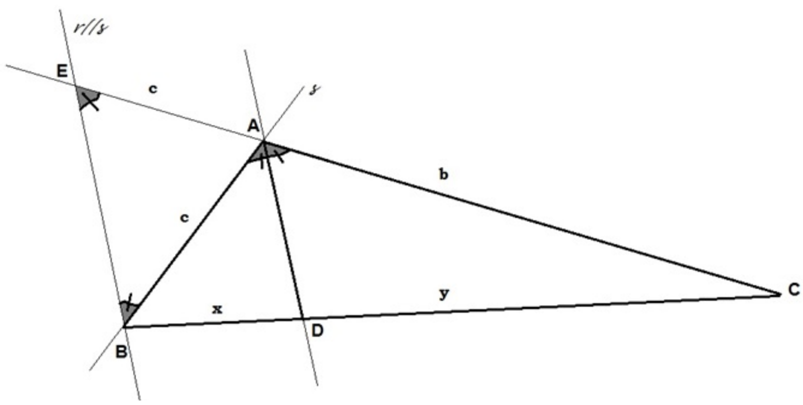
Teorema da Bissetriz Interna: *Uma bissetriz interna de um triângulo divide o lado oposto em segmentos (aditivos) proporcionais aos lados adjacentes.*

Demonstração. Sejam A,B e C vértices de um triângulo, de lados correspondentes a, b, c, e AD bissetriz do ângulo interno $\angle \mathsf{A}$, determinando no lado BC os segmentos x e y.



Partindo da hipótese AD é bissetriz do ângulo interno $\angle \mathsf{A}$, deve-se provar a tese $\frac{x}{c} = \frac{y}{b}$.

Para iniciar devem-se fazer algumas construções auxiliares. Começando com a construção da reta suporte s que contêm AD e da reta r paralela à reta s passando pelo vértice B. Seja E o ponto de intersecção de r com o prolongamento do lado AC. (Ver a figura abaixo)



Note que o ângulo $\angle \mathsf{BAD}$ é congruente ao ângulo $\angle \mathsf{ABE}$, por serem alternos internos em relação às retas paralelas cortadas pela transversal que contém o lado AB. Perceba ainda que o ângulo $\angle \mathsf{BEA}$ é correspondente ao ângulo $\angle \mathsf{CAD}$ em relação às paralelas cortadas pela transversal que contém o lado AC.

Daí conclui-se que o triângulo $\Delta \mathsf{BAE}$ é isóscele e que o lado EA também vale c.

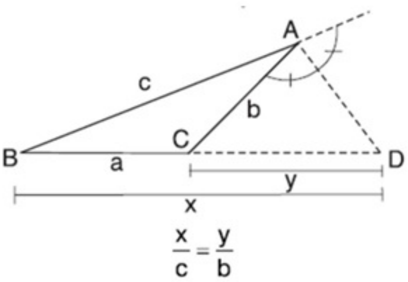
Agora usando o Teorema de Tales no triângulo maior ΔBCE temos a relação desejada:

$$\frac{x}{c} = \frac{y}{b}.$$

■

Teorema da Bissetriz Externa: *Se a bissetriz de um ângulo externo de um triângulo intercepta a reta suporte do lado oposto, então ela divide este lado oposto externamente em segmentos (subtrativos) proporcionais aos lados adjacentes.*

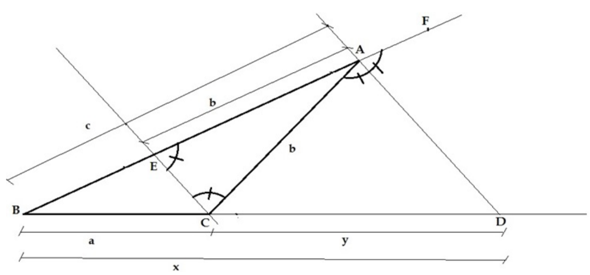
Demonstração. Para demonstração deste teorema, usa-se o mesmo raciocínio do anterior. Basta ter cuidado nas construções iniciais das retas auxiliares que são necessárias para a aplicação do Teorema de Tales.



Partindo da hipótese AD é bissetriz do ângulo externo no vértice A, deve-se provar a tese:

$$\frac{x}{c} = \frac{y}{b}.$$

Iniciamos com a construção da reta suporte r que contenha a bissetriz AD e da reta s paralela a reta r passando pelo vértice C do triângulo. A intersecção da reta s com o lado AB determina o ponto E. Tem-se ainda F, um ponto na reta suporte que contém o lado AB. Ver figura:



Note que os ângulos $\angle ACE$ e o $\angle CAD$ são alternos internos com referência as paralelas cortadas pela transversal AC, portanto são correspondentes. Segue ainda que o ângulo $\angle CEA$ é correspondente do ângulo $\angle DAF$ analisando as paralelas cortadas pela reta transversal que contém o lado AB.

Daí conclui-se que o triângulo ΔACE é isóscele com o lado EA de mesma medida de b.

Agora usando o Teorema de Tales no triângulo maior ΔABD, temos a relação desejada:

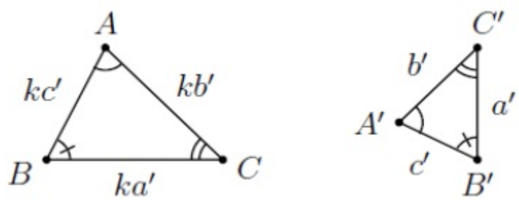
$$\frac{x}{c} = \frac{y}{b}.$$

■

2.2 Semelhança e Triângulos Retângulos

2.2.1 Semelhança de Triângulos

Segundo BARBOSA, [5], pág.109, diz-se que dois triângulos são *semelhantes* se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices de modo que ângulos correspondentes sejam iguais e lados correspondentes sejam proporcionais.



Com isso quer-se dizer que se ABC e $A'B'C'$ são dois triângulos semelhantes e com as correspondências angulares conforme mostra a figura acima, então valem as seguintes relações:

$$\angle ABC = \angle A'B'C';\ \angle BCA = \angle B'C'A';\ \angle CAB = \angle C'A'B'$$

e

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'} = k \text{ ou } \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = k \text{ ou ainda } a = ka';\ b = kb';\ c = kc'.$$

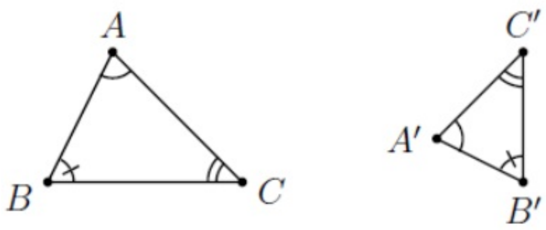
A razão entre os segmentos proporcionais, que representam os lados correspondentes, é chamada de *razão de proporcionalidade* entre os dois triângulos ou *razão de semelhança*.

Diz-se ainda que fisicamente, dois triângulos são semelhantes se pudermos dilatar e/ou girar e/ou refletir e/ou transladar um deles, obtendo o outro ao final de tais operações.

É importante observar que triângulos congruentes são necessariamente triângulos semelhantes, mas a recíproca nem sempre é verdadeira. De fato a recíproca só será verdadeira se a *razão de semelhança* for igual a um. Pois triângulos congruentes possuem lados correspondentes equivalentes, ou seja, de mesma medida. Logo a *razão de proporcionalidade* entre triângulos congruentes será um.

Podem-se destacar três casos ou critérios mais usuais de semelhança de triângulos. Onde demonstraremos a veracidade do primeiro caso ou critério e a demonstração dos demais seguirá como exercício da aplicação do Teorema de Tales. Outras situações que possam aparecer, terminam por recair em um dos três casos, a saber:

1º **Caso**: *Se dois triângulos possuem dois ângulos ordenadamente congruentes, então eles são semelhantes.* (Caso de semelhança AA)



Demonstração do 1º caso

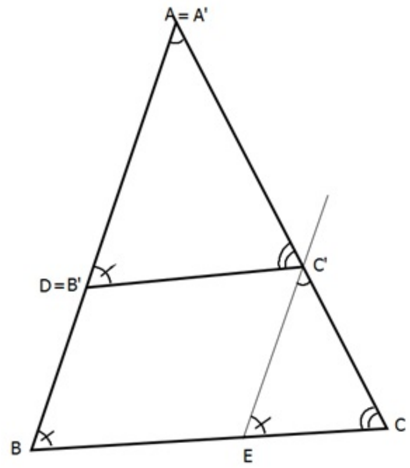
Partindo da hipótese $\angle \mathsf{A} \equiv \angle \mathsf{A}'$ e $\angle \mathsf{B} \equiv \angle \mathsf{B}'$, vamos provar a tese $\Delta \mathsf{ABC} \sim \Delta \mathsf{A'B'C'}$.

Suponhamos que os triângulos não são congruentes e que $\overline{\mathsf{AB}} > \overline{\mathsf{A'B'}}$.

Seja D um ponto de AB tal que produzindo uma rotação e uma translação no triângulo $\Delta \mathsf{A'B'C'}$, de tal forma que $\angle \mathsf{A} \equiv \angle \mathsf{A}'$ e $\overline{\mathsf{A'B'}}$ esteja sobre $\overline{\mathsf{AB}}$, com $\angle \mathsf{B}' \equiv \angle \mathsf{D}$; e $\overline{\mathsf{AC'}}$ esteja sobre $\overline{\mathsf{AC}}$. Tem-se a seguinte configuração: $\mathsf{B'C'}//\mathsf{BC}$, pois $\angle \mathsf{B} \equiv \angle \mathsf{B}'$ e $\angle \mathsf{C} \equiv \angle \mathsf{C}'$.

Pelo Teorema de Tales chega-se à razão de proporcionalidade **k**, que corresponde á razão

$$\text{(I)}\ \frac{\overline{\mathsf{AB}}}{\overline{\mathsf{AB'}}} = \frac{\overline{\mathsf{AC}}}{\overline{\mathsf{AC'}}} = \mathsf{k} \text{ ou } \frac{\overline{\mathsf{AB}}}{\overline{\mathsf{A'B'}}} = \frac{\overline{\mathsf{AC}}}{\overline{\mathsf{A'C'}}} = \mathsf{k}.$$



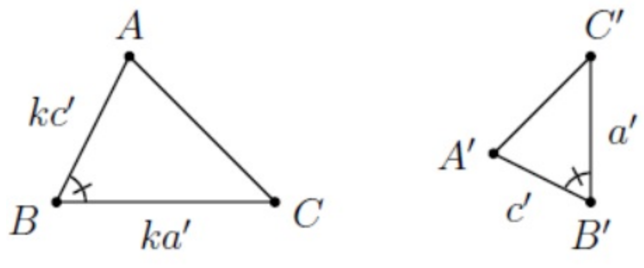
Traçando uma linha auxiliar paralela a $\overline{AB}$, passando pelo ponto C' têm-se que $\overline{B'C'} \equiv \overline{BE}$, pois BB'C'E é um paralelogramo.

Pelo Teorema de Tales vale a relação:

$$\text{(II)}\ \frac{\overline{BC}}{\overline{BE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AC'}} = k \text{ ou } \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}.$$

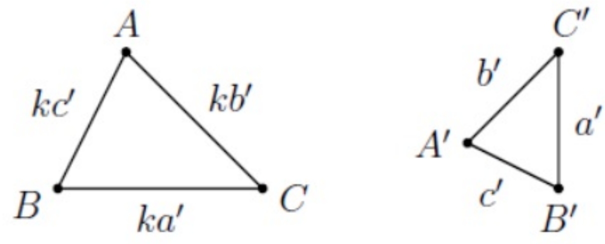
De (I) e (II) chegamos a seguinte relação: $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = k$, de onde podemos concluir que $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$, como se queria provar.

2^o **Caso**: *Se dois triângulos têm dois lados correspondentes proporcionais e os ângulos compreendidos entre eles congruentes, então eles são semelhantes.* (Caso de semelhança LAL).



Observação 2. *Considere dois lados de um triângulo como correspondentes quando forem opostos a ângulos congruentes.*

3^o**Caso**: *Se dois triângulos têm os lados homólogos proporcionais, então eles são semelhantes.* (Caso de semelhança LLL).



Observação 3. *Considere lados homólogos como lados correspondentes.*

A demonstração desses dois últimos casos é análoga à anterior, e fica como exercício para o leitor.

2.2.2 Relações métricas no triângulo retângulo

Não se abrirá uma nova seção pra tratar das relações métricas no triângulo retângulo, como se costuma ter nos livros didáticos. Certamente a importância do tema é que motiva os autores a abordá-lo, quase sempre, em um capítulo separado. Contudo sua exposição neste texto aparecerá como uma aplicação dos casos de semelhança de triângulos abordados anteriormente, como de fato ele é.

Para dar sequência, as relações métricas no triângulo retângulo aparecerão numa proposição onde se usará os casos de semelhança como corolário, da mesma forma que foi vista na disciplina de MA13 (Geometria), estudada durante o período de aula do PROFMAT, e tendo como referência [17], vide referências.

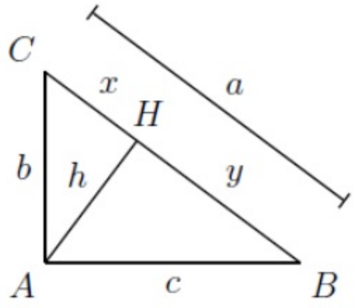
Proposição 1. *Seja* ABC *um triângulo retângulo em* A*, com catetos* $AB = c$*,* $AC = b$ *e hipotenusa* $BC = a$*. Sendo* H *o pé da altura relativa à hipotenusa,* $CH = x$*,* $BH = y$ *e* $AH = h$*, temos:*

1. $ah = bc$

2. $ax = b^2$ *e* $ay = c^2$

3. $a^{=}b^2 + c^2$

4. $xy = h^2$



Demonstração: observando a figura acima podemos notar que os ângulos $\angle ACB$ e $\angle ABC$ são complementares, assim como os ângulos $\angle ACB$ e $\angle CAH$. Aonde se chega que $\angle ABC \equiv \angle CAH$. Por outro lado também são complementares os ângulos $\angle ACB$ e $\angle BAH$, restando que $\angle ACB \equiv \angle BAH$. Daí se conclui as semelhanças entre os triângulos ΔABC, ΔAHC e ΔAHB. Agora é só aplicar as relações de proporcionalidade entre os triângulos semelhantes:

$\dfrac{\overline{BH}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$ e $\dfrac{\overline{AH}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$, ou ainda $\dfrac{y}{c} = \dfrac{c}{a}$ e $\dfrac{h}{c} = \dfrac{b}{a}$.

Logo se tem as relações (1) $ah = bc$ e (2) $ay = c^2$. A relação $ax = b^2$ é encontrada de maneira análoga.

Para provar a relação de (3), conhecida como Teorema de Pitágoras basta adicionar membro a membro as relações de (2). Ou seja.

$ax + ay = b^2 + c^2 \Rightarrow a(x + y) = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2$.

Caso multiplique membro a membro as relações do item (2) ter-se-á:

$ax \cdot ay = b^2 \cdot c^2 \Leftrightarrow x \cdot y = \dfrac{(bc)^2}{a^2}$. De (a) tem-se que $h = \dfrac{bc}{a} \Leftrightarrow x \cdot y = h^2$.

Esta última relação corresponde ao item (4) da proposição 1.

É importante saber que o procedimento usado para demonstrar a relação do item (3) não deixa de ser uma demonstração do Teorema de Pitágoras, no entanto são muitas as formas de provar essa relação matemática tão conhecida e utilizada nas aulas de geometria. E não se sabe ao certo se tal descoberta se deu realmente com Pitágoras, como cita [12], pág 103:

> *A tradição é unânime em atribuir a Pitágoras a descoberta independente do teorema sobre triângulos retângulos hoje universalmente conhecido pelo seu nome - que o quadrado sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma do quadrado dos catetos. Já vimos que esse teorema era conhecido dos babilônios dos tempos de Hamurabi, mais de um milênio antes, mas sua primeira demonstração geral pode ter sido dada por Pitágoras.(...).*

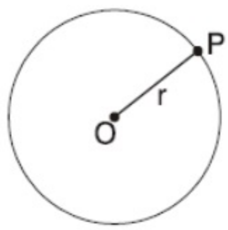
Várias são as contribuições deixadas pela escola pitagórica, muitas delas não se sabe ao certo se é de autoria do próprio Pitágoras, mas podemos destacar a descoberta dos números irracionais, o teorema do triângulo retângulo, além de um vasto trabalho na aritmética com o estudo das propriedades dos números.

2.3 Circunferências e posições relativas com as retas

Não se abordará por completo nesta seção os conceitos e características relacionadas a circunferência e círculo, mas apenas se exibirá alguns tópicos que serão úteis na sequência deste capítulo e principalmente nas aplicações apresentadas no capítulo seguinte.

2.3.1 Circunferências

Definição 1. *Circunferência é um conjunto dos pontos de um plano cuja distância a um ponto dado nesse plano é igual a uma distância (não nula) fixa. O ponto dado é o centro e a distância dada é o raio da circunferência.*



Dados: um plano α, um ponto O de α e uma distância r.

$$\lambda(O, r) = \{P \in \alpha | d(P, O) = r\},$$

onde $\lambda(O, r)$ representa a circunferência de centro O e raio r.

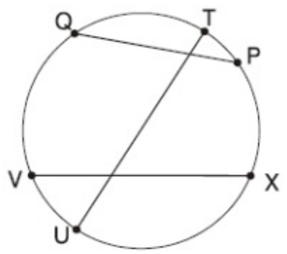
Elementos da circunferência

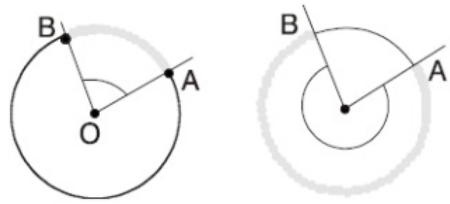
Corda é qualquer segmento com extremidades na circunferência.

Na figura abaixo, TU, PQ e VX são cordas.

Quando o centro da circunferência pertence à corda, ela é denominada diâmetro, e sua medida é igual ao dobro do raio da circunferência.

Arcos de circunferência é o conjunto dos pontos que estão entre dois pontos distintos da circunferência dada.



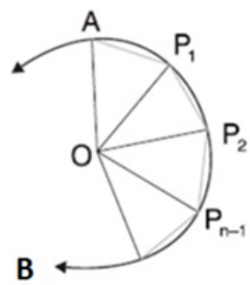


Observe que obtemos dois arcos com os pontos A e B. É necessário fornecer outro ponto do arco que se quer tomar ou ângulo ao qual está associado.

Importante notar que o ângulo central $\angle AOB$ é congruente ao arco de circunferência AB.

Se os pontos tomados na circunferência são as extremidades do diâmetro, o arco formado por eles é denominado de semicircunferência.

O comprimento de um arco genérico AB pode ser descrito em termos de um limite. Imaginemos o arco AB contendo vários pontos $A = P_0, P_1, P_2, P_3, ..., P_{n-1}, P_n = B$, formando n pequenos arcos e também n pequenos segmentos de reta de medidas respectivas iguais a: $AP_1, P_1P_2, ..., P_{n-1}B$.



A ideia aqui é tomar um número n bastante grande para que cada segmento seja pequeno e as medidas dos arcos sejam aproximadamente iguais às medidas dos segmentos.

O comprimento de um arco AB de uma circunferência de raio r é o valor limite da soma dos comprimentos destas n cordas quando n cresce indefinidamente. Um arco completo de circunferência corresponde a um ângulo que mede $360^o = 2\pi$ radianos. Se o raio da circunferência for r, o perímetro da circunferência coincidirá com o comprimento do arco da mesma e é dado por:

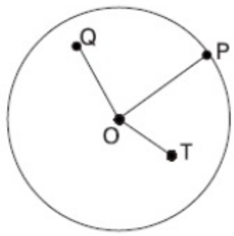
$$C = 2\pi r.$$

Para encontrar o perímetro de um arco α medido em graus, basta comparar com um arco de uma circunferência, ou seja,

$$C_\alpha = \frac{\alpha \cdot 2\pi r}{360}.$$

Círculo ou disco

Observe a circunferência logo abaixo:

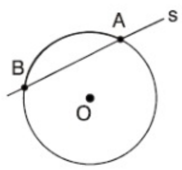


Os pontos Q e T não pertencem à circunferência, pois, $\overline{OQ} \neq r$ e $\overline{OT} \neq r$, e mais, $\overline{OT} < \overline{OQ} < r$.

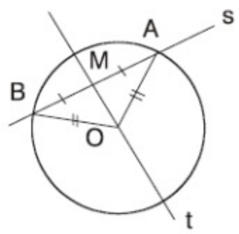
Os pontos com as características de Q e T são pontos interiores à circunferência. Chama-se de *disco* o conjunto dos pontos de um plano cuja distância a um ponto dado desse plano é menor ou igual a uma distância (não nula dada), ou ainda, a união da circunferência com o conjunto de seus pontos interiores. A circunferência é um subconjunto do disco.

2.3.2 Posições relativas de retas e circunferências

Definição 2. *Secante a circunferência é qualquer reta que intercepta a circunferência em dois pontos distintos. Veja figura logo abaixo:*

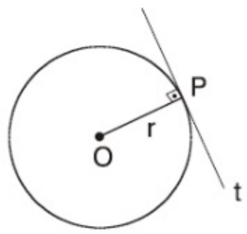


Proposição 2 (Propriedade da secante)**.** *Se* M *é ponto médio de* AB*, a reta suporte de* OM *é perpendicular à reta* s*.*



Demonstração. Os triângulos ΔOMB e ΔOMA são congruentes (caso LLL), então $\angle OMB \equiv \angle OMA$. Observe que esses ângulos são suplementares, logo são retos; então $s \perp t$, ou seja, s e t são perpendiculares. ∎

Definição 3. *Tangente a uma circunferência é qualquer reta que intercepta a circunferência num único ponto.*



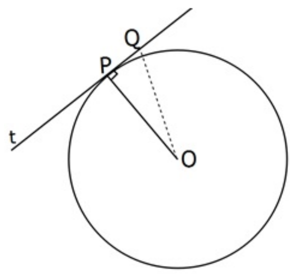
Propriedade da tangente: Toda reta perpendicular a um raio na sua extremidade da circunferência é tangente à circunferência.

Demonstração

Para demonstrar essa propriedade, basta tomar um ponto (Q) na reta, distinto de P, e verificar que OQ é hipotenusa do triângulo ΔOPQ, então $OQ > OP = r$. Finalmente, podemos afirmar que Q é exterior à circunferência e P é a única intersecção da reta com a circunferência.

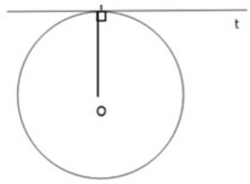
Vale ressaltar que a recíproca desta propriedade também é verdadeira, veja na proposição 3.

Proposição 3 (Propriedade do perpendicularismo)**.** *Toda reta tangente a uma circunferência é perpendicular ao raio da mesma.*



Demonstração

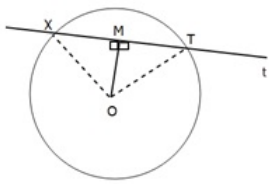
Partiremos da hipótese: t é tangente a λ em T.



Se t não fosse perpendicular a $\overline{OT}$, teríamos o que se segue.

Seja M pé da perpendicular à reta t por O. O ponto M seria distinto de T.

Tomando na semirreta oposta a $\overline{MT}$ um ponto X tal que $\overline{MX} \equiv \overline{MT}$, teríamos:



$\overline{OM}$ comum, $\overline{OM} \perp \overline{TX}$, $\overline{MX} \equiv \overline{MT} \Rightarrow$ (LAL) $\Delta OMX \equiv \Delta OMT \Rightarrow \overline{OX} \equiv \overline{OT} \Rightarrow \overline{OX} = r \Rightarrow X \in \lambda$.

Portanto, t interceptaria λ em dois pontos distintos, T e X, o que é absurdo, de acordo com hipótese.

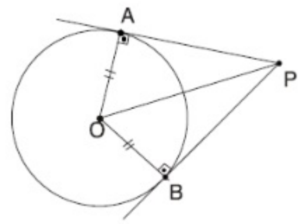
Logo, t é perpendicular a OT em T.

Observação 4. *Se* t *é tangente à circunferência* $\lambda(O, r)$*, então* $d_{O,t} = r$ *e reciprocamente.*

Propriedade dos Segmentos Tangentes

Os segmentos das tangentes traçadas de um ponto exterior a uma circunferência são congruentes.

Demonstração

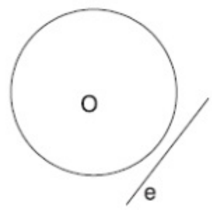


Dados uma circunferência δ e um ponto P exterior a circunferência, tracemos os segmentos $\overline{AP}$ e $\overline{AB}$ tangentes a δ.

Os triângulos ΔAOP e ΔBOP são congruentes (cateto e hipotenusa congruentes), então $\overline{AP} \equiv \overline{BP}$.

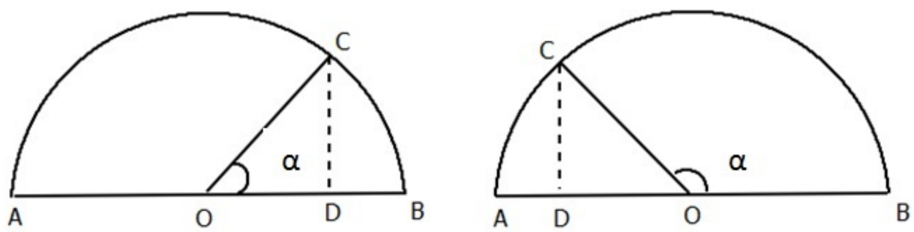
Uma das aplicações desta propriedade é o Teorema de Pitot que diz que um quadrilátero é circunscritível (os quatro lados são tangentes a uma circunferência) se, e somente se, a soma dos lados opostos for igual. Esse teorema é facilmente demonstrado usando a propriedade dos segmentos tangentes a uma circunferência.

Definição 4. *Uma reta é exterior a circunferência quando não intercepta a circunferência. Veja a figura abaixo.*



2.4 Funções trigonométricas e os triângulos

2.4.1 Função seno, cosseno e tangente.



Será iniciada esta seção definindo as funções seno, cosseno e tangente de um ângulo qualquer. Para isso considere um círculo de centro O e diâmetro AB, e para melhorar o entendimento das definições observemos apenas um dos semicírculos, conforme ilustra a figura acima. Chamando de α o ângulo $\angle COB$ e D o ponto baixado perpendicularmente de C sobre o diâmetro AB.

Define-se como seno do ângulo α o quociente $\frac{\overline{CD}}{\overline{OC}}$. O seno do ângulo α é representado por $sen\alpha$, ou $\sin\alpha$. Portanto de acordo com definição tem-se que: (observe que OC é o raio do círculo).

$$sen0^o = 0, \;\; sen90^o = 1 \;\text{ e }\; sen180^o = 0.$$

Define-se o cosseno do ângulo α como o quociente $\frac{\overline{OD}}{\overline{OC}}$ quando o ângulo α é agudo. Caso α seja obtuso, o cosseno é definido pelo quociente com valor negativo, ou seja, $-\frac{\overline{OD}}{\overline{OC}}$. Representando o cosseno do ângulo α por $\cos\alpha$. Daí pode-se dizer que:

$$\cos 0^o = 1, \;\; \cos 90^o = 0 \;\text{ e }\; \cos 180^o = -1.$$

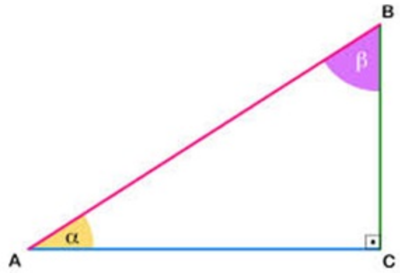
Chama-se tangente do ângulo α, representada por tg α ou tan α, a razão $\dfrac{sen\alpha}{cos\alpha}$, não sendo portanto definida pra $\alpha = 90^o$.

É importante notar que os valores do seno, cosseno e tangente são definidos independentemente do semicírculo utilizado, pois os triângulos que determinam os segmentos notáveis que aparecem na razão trigonométrica são triângulos semelhantes. Portanto seus lados correspondentes são proporcionais e em conseguinte a razão entre lados homólogos será constante variando o raio do semicírculo.

2.4.2 Trigonometria no triângulo retângulo

Em um triângulo retângulo ΔABC (veja figura logo abaixo), de ângulo reto em C, tem-se:

- $\overline{BC} = \overline{AB} \cdot senA$, ou $senA = \overline{BC}/\overline{AB}$;
- $\overline{AC} = \overline{AB} \cdot \cos A$, ou $\cos A = \overline{AC}/\overline{AB}$;
- $\overline{BC} = \overline{AC} \cdot \tan A$, ou $\tan A = \overline{BC}/\overline{AC}$.



Sendo BC o cateto oposto, AC o cateto adjacente ao ângulo $\hat{A}$, e AB a hipotenusa do triângulo.

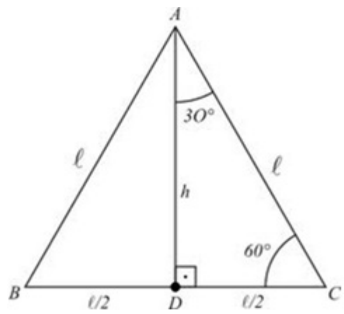
Note que as relações de seno e cosseno encontradas acima são apenas aplicações da definição destas funções, considerando a hipotenusa AB do triângulo como sendo o raio do círculo.

Como aplicação da definição das relações definidas acima se pode determinar o seno, cosseno e tangente dos ângulos notáveis 30°, 45° e 60°, considerando dois tipos de triângulos retângulos. Como será demonstrado a seguir.

Aplicações

1° *Caso*: Triângulo retângulo com ângulos agudos de 30° e 60°.

Considere inicialmente o triângulo equilátero ΔABC, de altura h relativa à base BC. Pelas características das cevianas notáveis de um triângulo, $h \equiv AD$, sendo AD a bissetriz do ângulo $\hat{A}$, como mostra a figura.



Para encontrar a relação entre h e l, basta usar o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo ΔADC.

$$l^2 = h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 \Rightarrow h^2 = l^2 - \frac{l^2}{4} \Rightarrow h^2 = 3\frac{l^2}{4} \Rightarrow h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$$

.

No triângulo retângulo ΔADC, valem as relações trigonométricas definidas acima.

Assim,

$sen30^o = \dfrac{l/2}{l} \Leftrightarrow sen30^o = \dfrac{1}{2}$,

$sen60^o = \dfrac{h}{l} \Leftrightarrow sen60^o = \dfrac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{l} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

$\cos 30^o = \dfrac{h}{l} \Leftrightarrow \cos 30^o = \dfrac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{l} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

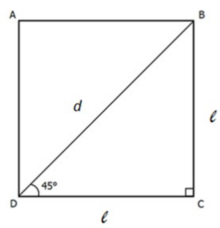
$\cos 60^o = \dfrac{l/2}{l} \Leftrightarrow \cos 60^o = \dfrac{1}{2}$.

$\tan 30^o = \dfrac{sen30^o}{\cos 30^o} = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

e $\tan 60^o = \dfrac{sen60^o}{\cos 60^o} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$.

2º *Caso*: Triângulo retângulo com ângulos agudos de 45º cada.

Considere agora um quadrado de lado l e diagonal d. Veja figura abaixo.



Usando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo ΔBCD tem-se que,

$$d^2 = l^2 + l^2 = 2l^2 \Rightarrow d = \frac{l\sqrt{2}}{2}$$

Agora usando as relações trigonométricas definidas nesta seção segue que,

$sen45^o = \dfrac{l}{d} = \dfrac{l}{l\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

$\cos 45^o = \dfrac{l}{d} = \dfrac{l}{l\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ e

$\tan 45^o = \dfrac{sen45^o}{\cos 45^o} = 1$

Estes são os ângulos notáveis do triângulo retângulo com suas respectivas razões trigonométricas.

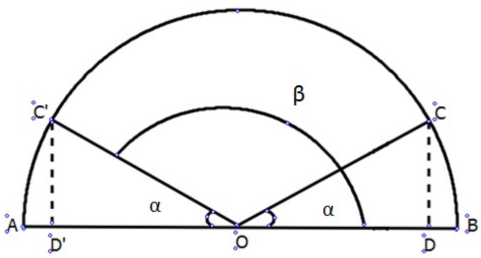
Observação 5. *Seja agora* β *um ângulo obtuso, isto é, um ângulo maior que* 90^o. *Para definir as razões trigonométricas de* β *é necessário considerar seu suplemento* $\alpha = 180^o - \beta$.

Define-se $\mathsf{sen}\beta = \mathsf{sen}\alpha$ *e* $\cos\beta = -\cos\alpha$

Proposição 4. *Seja* β *um ângulo obtuso e* α *seu suplemento, ou seja,* $\alpha = 180° - \beta$, *tem-se que* $\mathsf{sen}\beta = \mathsf{sen}\alpha$ *e* $\cos\beta = -\cos\alpha$.

Prova

Para β *igual a* 0^o, 90^o *ou* 180^o *a prova é imediata, basta fazer a substituição direta dos valores. Agora considere o semicírculo de diâmetro AB e centro O. Seja C e C' pontos do semicírculo com D e D' seus respectivos pés das perpendiculares baixadas sobre a reta que contém AB, tais que* $\angle \mathsf{COB} = \alpha$ *e* $\angle \mathsf{C'OB} = \alpha$. *Veja figura abaixo:*



Note que os triângulos $\Delta \mathsf{ODC}\, e\, \Delta \mathsf{OD'C'}$ *são congruentes, o que nos fornece*

$$\mathsf{CD} = \mathsf{C'D'}\; e\, \mathsf{DO} = \mathsf{D'O}.$$

Com base na definição das funções seno e cosseno de ângulos agudos e obtusos vistos na subseção 2.4.1 tem-se que:

$$\mathsf{sen}\beta = \frac{\mathsf{C'D'}}{\mathsf{C'O}} = \frac{\mathsf{CD}}{\mathsf{CO}} = \mathsf{sen}\alpha$$

$$\cos\beta = \frac{\mathsf{D'O}}{\mathsf{C'O}} = -\frac{\mathsf{DO}}{\mathsf{CO}} = -\cos\alpha$$

c.q.p

2.4.3 Lei dos cossenos

Na subseção 2.2.2 abordou-se as relações métricas no triângulo retângulo, que representam juntamente com as relações trigonométricas no triângulo retângulo vistas na subseção 2.4.2 as mais importantes ferramentas para resolução de problemas envolvendo triângulos em geometria euclidiana.

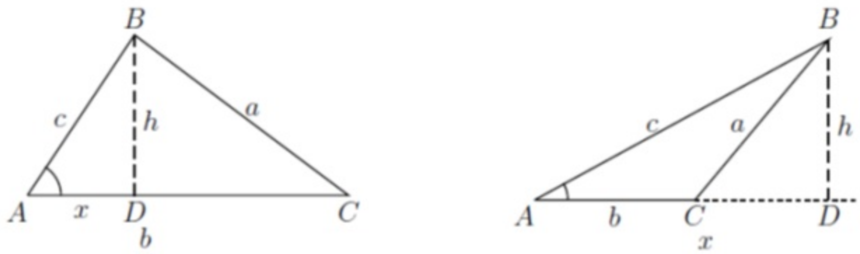
Usando os resultados das subseções citadas no parágrafo anterior mostraremos a lei dos cossenos que é muito útil em casos de triângulos quaisquer onde se quer relacionar a medida dos lados tendo o cosseno de um dos ângulos internos. (Usou-se como base o texto [17]).

Lei dos Cossenos: Em um triângulo ABC de lados a, b e c, têm-se:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.cosA.$$

Demonstração(1º Caso): Seja D a projeção do vértice B sobre a reta AC. Imaginando que o triângulo ΔABC não seja retângulo em C (porque se fosse se aplicaria o Teorema de Pitágoras) a figura pode ser uma das duas seguintes:

1º **caso** $\hat{A} < 90^o$ Seja D a projeção do vértice B sobre a reta AC. Imaginando que o triângulo ΔABC não seja retângulo em C (porque se fosse se aplicaria o Teorema de Pitágoras) a figura pode ser uma das duas seguintes:



Como de hábito, sejam $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{BC} = a$.

Como $\hat{A} < 90^o$, então D está na semirreta $\overline{AC}$. Seja $\overline{AD} = x$. Assim $\overline{DC} = |b - x|$.

No triângulo ΔBDC o teorema de Pitágoras fornece

$$a^2 = h^2 + |b - x|^2 = h^2 + b^2 + x^2 - 2bx.$$

No triângulo ΔBDA tem-se, pelo mesmo teorema, $h^2 = c^2 - x^2$. Substituindo fica-se com

$$a^2 = c^2 - x^2 + b^2 + x^2 - 2bx \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bx.$$

Entretanto, em qualquer uma das figuras tem-se $\dfrac{x}{c} = \cos\hat{A}$, ou seja, $x = c \cdot \cos\hat{A}$. Substituindo esse valor de x na última relação encontra-se

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\hat{A}.$$

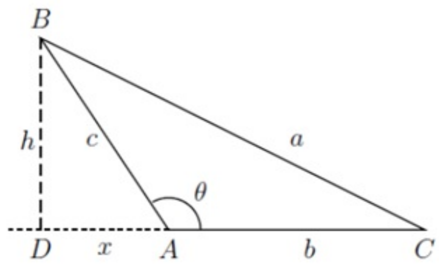
Esta é a relação que representa a Lei dos cossenos. São válidas também as relações:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\hat{B}$$

e

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\hat{C}.$$

2º **caso** $\hat{A} > 90^o$: Seja D a projeção do vértice B sobre a reta AC. Neste caso, D está na semirreta oposta à semirreta AC como na figura a seguir.



Como no caso anterior seja $\overline{AD} = x$ e seja $\theta = 180^o - \hat{A}$ o ângulo externo de vértice A do triângulo.

A aplicação do teorema de Pitágoras nos triângulos ΔBDC e ΔBDA fornecem as relações:

$$a^2 = h^2 + (b + x)^2 = h^2 + b^2 \cdot x^2 + 2bx$$

e

$$h^2 = c^2 - x^2.$$

A substituição de h^2 na primeira relação dá $a^2 = b^2 + c^2 + 2bx$.

Porém, neste caso, $\cos\theta = \dfrac{x}{c}$ e, consequentemente, $\cos\hat{A} = -\dfrac{x}{c}$, ou seja, $x = -c \cdot \cos\hat{A}$.

Substituindo na relação anterior obtém-se $a^2 = b^2 + c^2 + 2b(-c \cdot \cos\hat{A})$, ou seja,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\hat{A}.$$

Note que a relação que encontramos no 2º caso é a mesma do caso anterior, portanto valem as relações já descritas em todos os tipos de triângulos. Dessa forma já se pode trabalhar com triângulos quaisquer, sem a preocupação de estar decompondo-o em triângulos retângulos, além de ser possível encontrar o cosseno de um ângulo interno de um triângulo em posse dos lados do mesmo.

2.4.4 Lei dos Senos

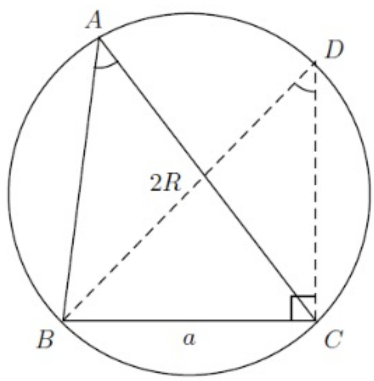
A Lei dos Senos, é mais uma relação válida para triângulos quaisquer, relacionando medida dos lados com seno dos ângulos internos, usando pra sua demonstração a circunferência que circunscreve o triângulo estudado.

Teorema 1 (Lei dos Senos). *Qualquer que seja o triângulo ABC de lados a,b e c , tem-se:*

$$\frac{a}{sen\hat{A}} = \frac{b}{sen\hat{B}} = \frac{c}{sen\hat{C}}.$$

Demonstração

A figura abaixo mostra o triângulo ΔABC, com lados a, b e c, inscrito em uma circunferência de raio R.



Como de hábito, o ângulo $B\hat{A}C$ do triângulo será representado simplesmente por $\hat{A}$. Traçamos o diâmetro $\overline{BD}$. Assim, o ângulo $B\hat{C}D$ é reto e os ângulos $B\hat{A}C$ e $B\hat{D}C$ são iguais, pois subtendem o mesmo arco BC.

O seno do ângulo $B\hat{D}C$ é igual a $\dfrac{\overline{BC}}{\overline{BD}} = \dfrac{a}{2R}$.

Então, $sen\hat{A} = \dfrac{a}{2R}$, ou seja, $\dfrac{a}{sen\hat{A}} = 2R$.

Esta relação mostra que a razão entre um lado do triângulo e o seno do ângulo oposto é igual ao diâmetro da circunferência circunscrita e, naturalmente, essa relação vale qualquer que seja o lado escolhido.

A Lei dos Senos no triângulo ABC é escrita assim:

$$\frac{a}{sen\hat{A}} = \frac{b}{sen\hat{B}} = \frac{c}{sen\hat{C}}.$$

Considerando R é o raio da circunferência circunscrita ao triângulo ΔABC, pode-se ainda escrever:

$$\frac{a}{sen\hat{A}} = \frac{b}{sen\hat{B}} = \frac{c}{sen\hat{C}} = 2R.$$

A Lei dos Senos fornece um caminho simples para determinar o raio da circunferência circunscrita a um triângulo.

Capítulo 3

Aplicações à Astronomia

3.1 Fundamentação metodológica

A Compreensão do Universo passa pela busca de se entender o espaço, identificar a existência de objetos e figuras e as relações entre essas formas no mundo real. Essa procura incessante em descobrir o cosmos faz da geometria um objeto de conhecimento particularmente relevante e motivador. A necessidade de compreensão das características intrínsecas dos objetos geométricos, determinantes de suas semelhanças e diferenças, podem proporcionar ao ensino da geometria um caráter dedutivo e investigador.

Desde os primórdios da história da humanidade pode-se observar que as coisas do céu despertavam a curiosidade e o fascínio do ser humano. A Astronomia, tema que une tanto esforço tecnológico e financeiro das grandes potências mundiais também passa por etapas essenciais e simples de conhecimento e observação que inclusive devem ser incentivadas na educação básica, aliás, deve ser elemento motivador e capaz de vivenciar tais conteúdos de forma integral, não só através da intelectualidade supervalorizada pela educação atual, mas através das sensações, intuições e subjetividade próprias da construção do saber.

Pode no mundo atual de tantas transformações, justificarem-se os estudos de métodos e conceitos discutidos na Grécia antiga ou no mundo contemporâneo, como se fará nas aplicações propostas logo adiante? Esse pode ser um questionamento acerca do tema usado como elemento interdisciplinar do conhecimento (Astronomia). Porém não se trata de estudar a forma como os filósofos da antiguidade faziam, mas avaliar a metodologia e a validade de tais estudos que afloram temas de geometria tão comuns em nossas salas de aula da Educação Básica. Assim sugere os Parâmetros Curriculares Nacionais de

Matemática no Ensino Fundamental:

> *A própria História da Matemática mostra que ela foi construída como resposta a perguntas provenientes de diferentes origens e contextos, motivadas por problemas de ordem prática (divisão de terras, cálculo de créditos), por problemas vinculados a outras ciências (Física, Astronomia), bem como por problemas relacionados a investigações internas à própria Matemática.*.[8], pág 40.

E segue afirmando que a resolução de problemas, como eixo organizador do processo de ensino e aprendizagem de Matemática, pode ser resumida nos seguintes princípios: [8], pág. 40-41.

- *A situação-problema é o ponto de partida da atividade matemática e não a definição. No processo de ensino e aprendizagem, conceitos, ideias e métodos matemáticos devem ser abordados mediante a exploração de problemas, ou seja, de situações em que os alunos precisem desenvolver algum tipo de estratégia para resolvê-las;*
- *O problema certamente não é um exercício em que o aluno aplica, de forma quase mecânica, uma fórmula ou um processo operatório. Só há problema se o aluno for levado a interpretar o enunciado da questão que lhe é posta e a estruturar a situação que lhe é apresentada;*
- *Aproximações sucessivas de um conceito são construídas para resolver um certo tipo de problema; num outro momento, o aluno utiliza o que aprendeu para resolver outros, o que exige transferências, retificações, rupturas, segundo um processo análogo ao que se pode observar na História da Matemática;*
- *Um conceito matemático se constrói articulado com outros conceitos, por meio de uma série de retificações e generalizações. Assim, pode-se afirmar que o aluno constrói um campo de conceitos que toma sentido num campo de problemas, e não um conceito isolado em resposta a um problema particular;*
- *A resolução de problemas não é uma atividade para ser desenvolvida em paralelo ou como aplicação da aprendizagem, mas uma orientação para a aprendizagem, pois proporciona o contexto em que se pode apreender conceitos, procedimentos e atitudes matemáticas.*

A resolução de problemas é um dos métodos muito utilizados por professores de matemática na educação básica. Muito frequentemente é a última etapa de estudo do tema abordado. Como esquematizado em [10], pág 81. "definição→ exemplos → exercícios", método de ensino baseado na verbalização e na ação do professor como ator principal do processo ensino-aprendizagem. No entanto, entende-se que essa não é a sequência mais adequada de apresentação de problemas aos alunos, pois se trata de uma metodologia que não trará motivação à aprendizagem dos alunos atualmente, visto que estes tem uma gama muito grande de atrativos dentro e fora da escola, que certamente lhes trarão maior interesse.

Uma nova concepção de ensino através da solução de problemas é o de apresentar situações-problemas para introduzir os conteúdos a serem abordados, partindo de conhecimentos já estudados e centrando a ação no aluno, este sim, o responsável maior pela aprendizagem. O professor será apenas um mediador e orientador da aprendizagem. Como ensina as Orientações Curriculares para o Ensino Médio.

> *Já na segunda concepção, tem-se o caminho inverso, ou seja, a aprendizagem de um novo conceito matemático dar-se-ia pela apresentação de uma situação problema ao aluno, ficando a formalização do conceito como a última etapa do processo de aprendizagem. Nesse caso, caberia ao aluno a construção do conhecimento matemático que permite resolver o problema, tendo o professor como um mediador e orientador do processo ensino-aprendizagem, responsável pela sistematização do novo conhecimento..* [10], p.81

Através da solução do problema gerado da situação-problema proposta pelo professor deve-se chegar e apresentar o conteúdo de forma mais sistematizada, o que não impediria de em seguida partir pra uma lista mais elaborada de questões e/ou aplicações intencionando uma fixação melhor da aprendizagem do tema em estudo, caso seja necessário. Dessa forma se partirá de conhecimentos prévios do aluno até a expansão para novos conhecimentos.

A situação-problema traria em linhas gerais os conteúdos anteriores necessários à solução do problema, os questionamentos mais amplos e sugestões de solução. Enquanto no problema propriamente dito apareceriam em perguntas de forma mais específicas e todos os dados que seriam usados.

As situações-problemas relacionadas à Astronomia que se mostrará neste trabalho terão o objetivo também, de trazer dados e procedimentos científicos (que parecem aos olhos dos estudantes muito distantes) ao cotidiano escolar de forma original e despertadora. Também de estratégias de solução, observações e comentários a cerca dos cálculos realizados na antiguidade, fazendo um paralelo com dados e possibilidades de solução com os conhecimentos que temos atualmente.

Seguimos estratégias para enfrentamento da Investigação e Compreensão em Matemática como sugerido pelas Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio de Ciências da Natureza, Matemática e Suas Tecnologias, citadas a seguir:

> *Identificar as relações envolvidas e elaborar possíveis estratégias para enfrentar uma dada situação-problema; por exemplo, para obter uma dada distância, saber optar por medi-la diretamente, utilizar uma planta em escala, usar semelhança de figuras, fazer uso de propriedades trigonométricas ou utilizar um sistema de eixos cartesianos e abordar o problema através da geometria analítica.*
>
> *Frente a uma situação ou problema, reconhecer a sua natureza e situar o objeto de estudo dentro dos diferentes campos da Matemática, ou seja, decidir-se pela utilização das formas algébrica, numérica, geométrica, combinatória ou estatística. Por exemplo, para calcular distâncias ou efetuar medições em sólidos, utilizar conceitos e procedimentos de geometria e medidas, enquanto para analisar a relação entre espaço e tempo no movimento de um objeto, optar pelo recurso algébrico das funções e suas representações gráficas.* [9], pág.115

Essas estratégias sugeridas são apenas linhas gerais pra atacar o problema; o que se quer aqui é mais que isso, não é um manual de resolução de problemas, também não é uma lista de aplicações. Mas sugestões de uma sequência de situações-problema, onde se aplicarão temas de geometria usando a Astronomia como elemento motivador e de compreensão de conhecimentos básicos como Teorema de Tales, Teorema de Pitágoras, Relações Trigonométricas no Triângulo Retângulo, Semelhança de Triângulos, entre outros.

E como se diz acima, podendo usar essas aplicações para inaugurar conteúdos e temas a serem estudados em Geometria, pois a Matemática se desenvolveu e continua a se desenvolver a partir de problemas. Não faz sentido seguirmos o caminho inverso do conhecimento matemático, qual seja o de compreender o conteúdo pra então aplicá-lo.

Outro fator importante é o uso da História da Matemática integrado aos conteúdos abordados, já que o uso dessa ferramenta (História da Matemática e as aplicações de Astronomia) pode tratar os conceitos matemáticos de forma mais "concreta"dando uma conotação prática do ensino. Entender que os temas que estudamos hoje, foram pesquisados e desenvolvidos desde a antiguidade e que continuarão sendo estudados como condições básicas para se desenvolver tecnologias mais elaboradas e descobertas mais úteis ao nosso modo de vida moderna.

Embora os conceitos estudados nas aplicações que seguem sejam referentes à Matriz Curricular do Ensino Fundamental, onde poderão ser estudados sem maiores problemas, inclusive podendo ser usados na introdução de algum dos conceitos e teoremas apresentados, sugere-se o uso desta sequência de exercícios no Ensino Médio, onde o aluno já possui mais maturidade pra analisar tais questões e maior capacidade e fundamentação teórica pra relacionar os conhecimentos diversos apresentados em um único problema.

Sendo assim, partir-se-á as aplicações da astronomia no ensino de matemática na educação básica, elemento principal do trabalho ora apresentado.

3.2 Aplicações

Necessário será, partir de uma situação problema mais simples em que não é necessário fazer referências à Astronomia, para em seguida começar a compreender como medir distâncias sem usar diretamente os instrumentos usuais como trena, réguas ou fitas métricas. Assim, se terá a noção prática de que é possível calcular grandezas de comprimento, sem efetivamente medi-las, e compreender as possibilidades de descobrir grandes distâncias até mesmo quando estejam fora de nosso alcance visual, como é o caso das distâncias entre os planetas do Sistema Solar entre outras grandezas astronômicas.

Situação Problema 1: Imagine que você queira saber a altura de uma torre e não disponha de instrumentos para medir distâncias, nem condições práticas para isso. Como encontrar essas medidas a partir de apenas um instrumento de medir ângulos e alguns cálculos geométricos no triângulo retângulo? Usando as relações trigonométricas básicas (em especial a relação tangente) pode-se chegar à solução de um problema desse tipo sem maiores esforços algébricos.

Figura 3.1: Igreja de Santo Antônio

PROBLEMA 1

Localizada na Praça Bona Primo em Campo Maior - PI, a Igreja de Santo Antônio, símbolo maior da religiosidade local, possui em sua entrada uma torre que representa um dos pontos mais altos do município. Querendo medir a altura dessa torre um observador situa-se na posição O, na outra extremidade da praça e mede a distância angular que a reta OT faz com a horizontal, sendo T o ponto mais alto da torre, adquirindo um ângulo de $29^o 40'$. Este observador desloca-se $31,80\mathfrak{m}$ no sentido da torre em linha reta e chega ao ponto O', onde faz novamente outra medição angular, obtendo agora $50^o 50'$, conforme mostra a fig.3.2 . Desta forma determine a altura da torre levando em consideração a base da igreja.

Ilustração do problema

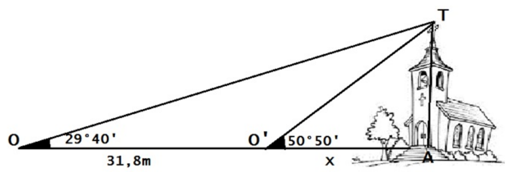


Figura 3.2: Ilustração

SOLUÇÃO.

Dados: $\mathsf{AO}' = \mathsf{X}$ e $\mathsf{AO} = 31,8 + \mathsf{X}$

Tangente de $29^o 40' = 0,5716$.

Tangente de $50^o 50' = 1,2274$.

Seja AT a altura da torre da igreja em relação à sua base localizada na horizontal AO, considerando os triângulos retângulos ATO e ATO', temos:

$\tan 29^o 40' = \dfrac{\mathsf{AT}}{\mathsf{AO}} \Leftrightarrow 0,5716 = \dfrac{h}{31,8 + \mathsf{X}} \Leftrightarrow h = 18,18 + 0,5716\mathsf{X}$. (i)

$\tan 50^o 50' = \dfrac{\mathsf{AT}}{\mathsf{AO}'} \Leftrightarrow 1,2274 = \dfrac{h}{\mathsf{X}} \Rightarrow h = 1,2274\mathsf{X}$. (ii)

De (i) e (ii) dá-se que:

$1,2274\mathsf{X} = 0,5716\mathsf{X} + 18,18 \Leftrightarrow 0,6558\mathsf{X} = 18,18 \Leftrightarrow \mathsf{X} = 27,72\mathfrak{m}$ e $h = 1,2274 \cdot 27,72 = 34,02\mathfrak{m}$.

COMENTÁRIOS

Esses dados foram obtidos através de medições com um teodolito e uma fita métrica e mostram a possibilidade de se determinar a distância entre um ponto em que o observador conhece e um ponto distante (inacessível), apenas com um instrumento de medição angular e a possibilidade de se deslocar no plano horizontal, o que nem sempre é possível.

Porém é fácil notar que situações práticas como descobrir a altura de uma árvore que se encontra na margem contrária de um rio em que está um observador, ou a própria largura desse rio, podem ser analisadas analogamente a esta situação problema.

A partir daí pode-se pensar em calcular distâncias muito maiores, como no espaço interplanetário, para isso basta se ter um bom instrumento de medida angular e um plano de referência.

É possível ainda encontrar a distância entre um ponto acessível e um ponto inacessível usando a lei dos senos, basta que seja possível fazer um deslocamento conhecido no plano, definindo os ângulos do triângulo formado pelos pontos conhecidos (ponto acessível e o ponto definido após o deslocamento) e o ponto inacessível. Usando sempre um instrumento de medição angular.

Se for usado o exemplo do problema 1, seria possível calcular a distância OT analisando o triângulo $\mathsf{OTO'}$, que tem um dos lados conhecido ($\mathsf{OO'} = 31,8\mathfrak{m}$) e os ângulos conhecidos. O ângulo do vértice O que é de $29^o40'$ e o ângulo do vértice $\mathsf{O'}$ é o suplemento do ângulo de $50^o50'$, que é $129^o10'$, portanto o ângulo do vértice T é $21^o10'$ pois a soma dos ângulos internos de um triângulo é constante e igual a 180^o. Assim, pela Lei dos Senos a seguinte relação:

$$\frac{\mathsf{OT}}{\mathfrak{sen}129^o10'} = \frac{\mathsf{OO'}}{\mathfrak{sen}21^o10'} \Leftrightarrow \frac{\mathsf{OT}}{0,78} = \frac{31,8}{0,36} \Rightarrow \mathsf{OT} = 68,9\mathfrak{m}.$$

Também é possível encontrar a distância entre dois pontos inacessíveis, nesse caso usando os conhecimentos da lei dos senos e da lei dos cossenos, além das propriedades angulares em um triângulo. Mas para isso precisa-se de outro exemplo e de uma solução mais elaborada.

Situação Problema 2: Nesta situação se devem realizar medidas de distâncias maiores, fazendo referências aos sistemas planetários. E inicialmente procura-se analisar a distância Terra-Lua e Terra-Sol.

Para isso utilizando a mesma técnica usada por Aristarco de Samos na Grécia Antiga, qual seja a de observar a Lua em quarto minguante ou quarto crescente no momento em que ela está metade iluminada e metade escura como mostra a fig 3.5 a seguir. Fazendo a observação ao nascer ao pôr do Sol Aristarco observou que a Lua apresenta-se praticamente na vertical. Em posse destas informações e do uso das relações métricas no triângulo retângulo e semelhança de triângulos é possível calcular a distância procurada. Também é conveniente fazer paralelos dessa técnica com formas mais recentes de calcular as referidas distâncias.

PROBLEMA 2.

Qual astro está mais próxima do planeta Terra, o Sol ou a Lua? Qual a razão entra essas distâncias?

SOLUÇÃO

Para se responder a primeira parte da pergunta, não é necessário fazer nenhum cálculo, seria suficiente, no entanto a observação e análise da iluminação das faces da Lua, como fez Aristarco de Samos, que além de antecipar Copérnico em quase dois milênios quando propôs que a Terra girava em torno Sol, desenvolveu um método pra determinar as distâncias relativas do Sol e da Lua à Terra.

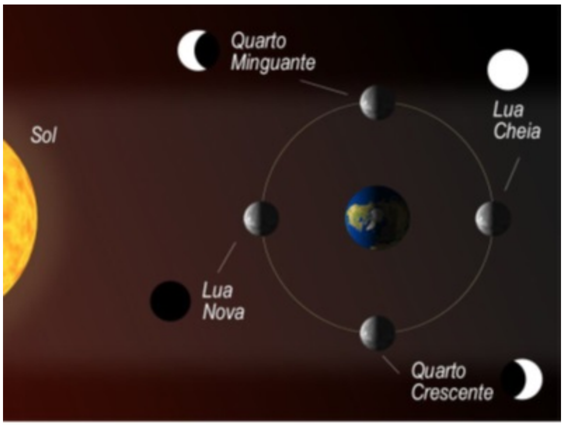


Figura 3.3: Fases da lua

Observando a figura 3.3 pode-se notar que o fato da Lua, em diferentes momentos, ter suas faces iluminadas ou não, ou ainda com iluminação total ou parcial da parte virada pra Terra, pressupõe que o Sol é mais distante da Terra. Caso contrário, não existiria a fase da Lua Nova, pois a face da Lua virada pra Terra sempre estaria iluminada.

Outras evidências a corroborarem com essa hipótese é a observação de Eclipses do Sol, impossíveis de ocorrer se a Lua fosse mais distante da Terra que o Sol; E o fato do triângulo formado por Terra-Lua-Sol (triângulo TLS), observado na fase de Lua em Quarto Minguante ou Quarto Crescente, durante o movimento de translação da Lua, ser retângulo no vértice L. O que indicaria que o ângulo L é o maior do triângulo e, portanto TS é o maior lado do mesmo. (veja a fig. 3.4)

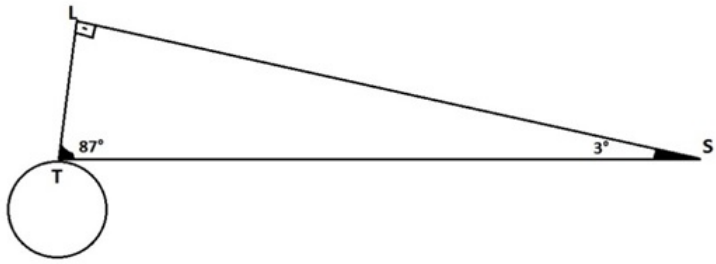


Figura 3.4: Ilustração do problema

E ainda poderíamos tentar imaginar uma situação em que o Sol estivesse mais próximo da Terra e discutir o que poderia ocorrer com a iluminação da Lua. Certamente isso daria um bom debate em sala de aula.

Para encontrarmos a relação entre as distâncias TS (Terra-Sol) e TL (Terra-Lua), usaremos a ideia de Aristarco, inclusive usando os dados que ele observou à época.

Usando a imagem da figura 3.5, e o triângulo formado pela Terra-Lua-Sol (fig.3.4), com ângulo reto no vértice ocupado pela Lua, Aristarco passou a observar o ângulo α, encontrando um valor aproximado de 87^o.

Usando a ideia de semelhança de triângulos, construiu um triângulo semelhante e passou a medir a razão $\dfrac{\mathsf{TS}}{\mathsf{TL}}$, obtendo o valor aproximado de 20, ou seja, $\mathsf{TS} = 20\mathsf{TL}$.

O valor encontrado por Aristarco não condiz com os dados verificados atualmente, pois se sabe hoje que TS é aproximadamente 400 vezes maior que TL, porém o processo geométrico envolvido é totalmente válido.

Se fôssemos tentar descobrir o valor de α nos dias atuais, seria mais conveniente calculá-lo que medi-lo diretamente, como fez o astrônomo na Grécia antiga. Para isso podemos observar o tempo de revolução da Lua (t equivale ao percurso de 360^o) e o tempo entre minguante e crescente (t' equivale ap percurso de $= 2\alpha$), e então é só fazer a proporção. O Ciclo lunar é de aproximadamente $29,5$ dias e $\mathsf{t}' = 14,25$ dias. Admitindo movimento circular uniforme para Lua, conclui-se que:

$$\frac{2\alpha}{14,25} = \frac{360^o}{29,5} \Leftrightarrow \alpha \cong 87^o$$

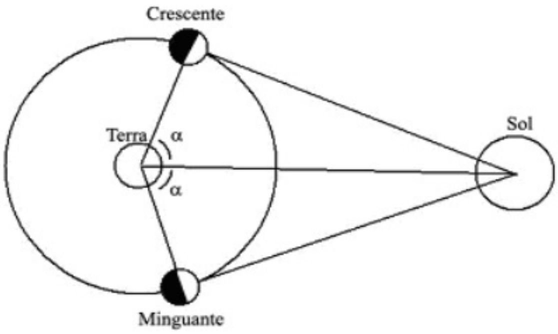


Figura 3.5:

Diante desse valor, usando a relação trigonométrica seno no triângulo retângulo TSL, pra calcular a relação entre as distâncias $\frac{\mathsf{TS}}{\mathsf{TL}}$, tem-se:

$$sen3^o = \frac{\mathsf{TL}}{\mathsf{TS}} \Leftrightarrow \frac{\mathsf{TS}}{\mathsf{TL}} = \frac{1}{sen3^o} = 19,1,$$

Esse seria o valor próximo ao valor estimado por Aristarco. Ou seja, aproximadamente igual a 20.

Observa-se aqui que os matemáticos da Grécia antiga, trabalhavam as relações entre os lados de um triângulo retângulo, sem usar as relações trigonométricas básicas (seno, cosseno e tangente), no entanto Aristarco de Samos ao encontrar a relação $\frac{\mathsf{TL}}{\mathsf{TS}}$ estava encontrando uma relação trigonométrica básica, que era o seno do ângulo do vértice S.

Possivelmente se construíam tabelas com essas relações como se fosse tabelas atuais de seno, cosseno ou tangente, para que se pudessem usar em outras situações, pois já se sabia da proporção de lados congruentes entre triângulos semelhantes.

Hoje existem tabelas trigonométricas, calculadoras científicas e aparelhos de medição angular com precisões microscópicas que muito auxiliam na obtenção de resultados mais próximos do real valor.

COMENTÁRIOS

Como pode um valor tão diferente pra relação $\frac{\mathsf{TL}}{\mathsf{TS}}$ perdurar por quase 1500 anos? Esta pode ser uma pergunta a surgir. Pois hoje é sabido que a distância do Sol a Terra é em torno de 400 vezes maior que a distância da Terra a Lua.

A resposta pode está na engenhosidade empregada por Aristarco que na época foi de tão grande admiração que era impossível desacreditar tais resultados. E até os dias atuais esse processo é considerado um dos grandes feitos matemáticos da história. Esse é o possível motivo à confiança dada a Aristarco.

O que certamente era confiável à época e que hoje não é mais cientificamente utilizado, são os instrumentos usados pelos matemáticos antigos, entre eles Aristarco, para a medição angular. Principalmente se tratando de grandes distâncias, como as observadas nessa situação problema.

Alguma das explicações para tal distorção entre os valores encontrados por Aristarco e os valores observados atualmente está no ângulo α encontrado, pois sabe-se hoje que tal ângulo é muito próximo de 90^o. Os instrumentos empregados na época não dariam precisão nas medidas realizadas, sem contar na dificuldade prática para se realizar tais observações. Era necessário fazê-las ao nascer ou ao pôr do sol, pois são nesses instantes que o sol aparecia na linha do horizonte e só assim se poderia obter o triângulo TLS com o Sol, praticamente na horizontal em relação a um observador na Terra.

Também trazia dificuldades e certamente imprecisão na medida, saber o momento certo de se fazer a observação do ângulo, pois o mesmo deveria acontecer no instante em que a Lua aparecesse com metade iluminada e a outra metade sem receber a luz do Sol. E certamente isso seria difícil de verificar até com os instrumentos que temos nos dias atuais.

Sabe-se hoje que $\alpha \cong 89,86^o$, logo $\mathsf{TS} \cong 409,3\mathsf{TL}$. De fato o valor é bem distante do real, mas o raciocínio empregado e seus cálculos ainda são motivos de entusiasmo. Motivo pela qual é dado tanto prestígio aos cálculos realizados por Aristarco.

Deve-se destacar também a terminologia usual, dada a quantidade de fases que a Lua tem. Fase, em grego, significa aparência. Assim, como a aparência da Lua muda a cada instante, não se pode dizer, cientificamente, que existem quatro fases. Em países de língua inglesa, por exemplo, definem-se oito fases. Tradicionalmente costuma-se dizer que existem as quatro fases: Nova, Quarto Crescente, Cheia e Quarto Minguante, sendo que cada uma delas começa quando a Lua está com a fase homônima. Notar que desde o instante da fase de Nova até a fase de Cheia, a Lua está Crescente. Igualmente, desde a Lua Cheia até o instante de Lua Nova, a Lua está Minguante.

Na falta de uso adequado da terminologia, deve-se salientar que “cada”fase dura cerca de uma semana, mas que o aspecto da Lua muda todo dia. E que o aspecto das luas Quarto Crescente e Quarto Minguante depende do hemisfério do observador (na verdade depende da latitude do observador).

Situação Problema 3: Imagine agora que se queira saber o valor das distâncias D_S, D_L, R_S e R_L (distância Terra-Sol, distância Terra-Lua, raios do Sol e da Lua, respectivamente), calculadas em função do raio da Terra (RT) e também estimar o valor real dessas medidas, levando-se em consideração ao valor do raio da Terra verificado por Eratóstenes na Grécia antiga. Faça-se isso baseado nas informações obtidas nas observações de Aristarco durante eclipses lunar e solar.

PROBLEMA 3: Usaremos a observação feita por Aristarco de Samos durante um eclipse da Lua, que ao medir o tempo gasto para que este satélite (a Lua) atravesse o cone de sombra da Terra, encontrou que o diâmetro do cone de sombra da Terra na altura da Lua, era $\frac{8}{3}$ do diâmetro da Lua. Usando o fato de que Sol e Lua têm mesmo tamanho angular segundo observação de um eclipse solar por Aristarco, calcule as distâncias D_S, D_L, R_S e R_L (distância Terra-Sol, distância Terra-Lua, raios do Sol e da Lua, respectivamente) em relação ao raio da Terra. Usando o resultado que Eratóstenes encontrou para o valor do raio da Terra ($R_T = 6.270\,Km$), estime o valor das distâncias indicadas.

SOLUÇÃO

Em princípio, compreenda a constatação feita por Aristarco, quando analisando um eclipse lunar comparou o tempo que a Lua mergulhava completamente no cone de sombra da Terra com o tempo de permanência da Lua nesse cone.

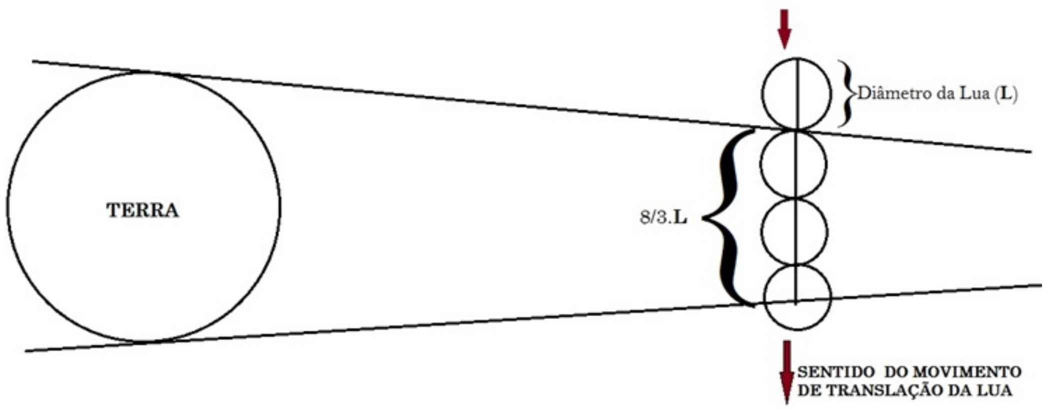


Figura 3.6:

Considerando que o movimento da Lua é praticamente constante durante a sua passagem no cone de sombra da Terra durante o Eclipse Lunar, e que o tempo para a Lua penetrar totalmente no cone de sombra é $\frac{3}{8}$ do tempo que a Lua leva para percorrer completamente o diâmetro do cone de sombra, pode-se concluir que esse diâmetro era $\frac{8}{3}$ do diâmetro da Lua. Esse foi o raciocínio empregado pelo ilustre matemático.

Outro resultado importante que se deve considerar refere-se à outra observação de Aristarco de Samos quando verificou que o Sol e a Lua são de mesmo tamanho angular, ou seja, o ângulo 2σ sob o qual o observador vê o Sol é o mesmo sob a qual ele vê a Lua, fato esse facilmente constatado observando-se um eclipse total do Sol.

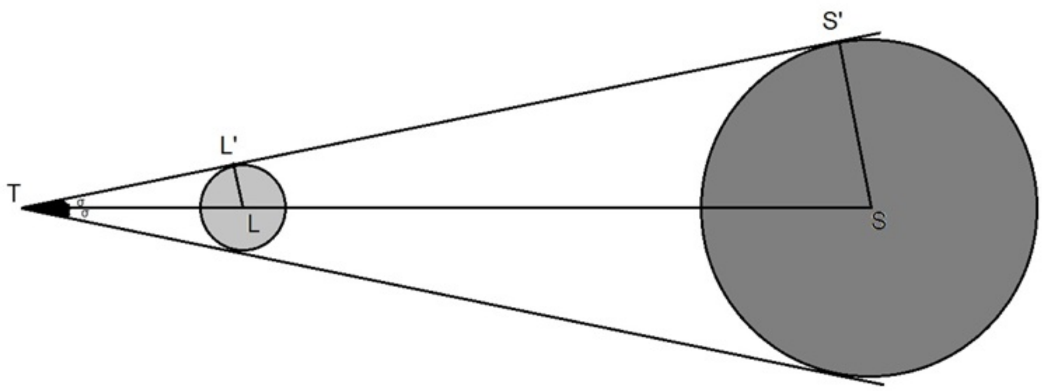


Figura 3.7:

Note que $\frac{SS'}{TS} = \frac{LL'}{TL} = sen\sigma$, isto é, $\frac{R_S}{D_S} = \frac{R_L}{D_L} = sen\sigma$.

Como Aristarco estimou o ângulo 2σ, como sendo 2^o. Segue que $\frac{R_S}{D_S} = \frac{R_L}{D_L} = sen\sigma = sen1^o = 0,017$.

Observação 6. *Sabe-se que a estimativa que Aristarco fez com o ângulo* 2σ *não foi correta, embora não influencie na razão* $\frac{R_S}{D_S} = \frac{R_L}{D_L}$*, pois independente de qual seja o ângulo* σ*, os triângulos* TLL' *e* TSS' *são semelhantes; o valor da razão* $\frac{R_S}{D_S}$ *depende do valor desse ângulo, sendo tanto menor a razão, quanto menor for o referido ângulo.*

Atualmente sabe-se que 2σ *vale* $0,5^o$*, o que vale dizer que* $\sigma = 0,25^o$*; e portanto* $\frac{R_S}{D_S} = \frac{R_L}{D_L} = sen0,25^o = 0,0044$.

Usando esses resultados pra encontrar as distâncias D_S, D_L, R_S e R_L (distância Terra-Sol, distância Terra-Lua, raios do Sol e da Lua, respectivamente), analisando a figura abaixo que mostra uma situação de um eclipse lunar, no instante em que os centros de Sol, Terra e Lua se alinham, e usando os resultados obtidos anteriormente, podemos encontrar a relação das distâncias procuradas.

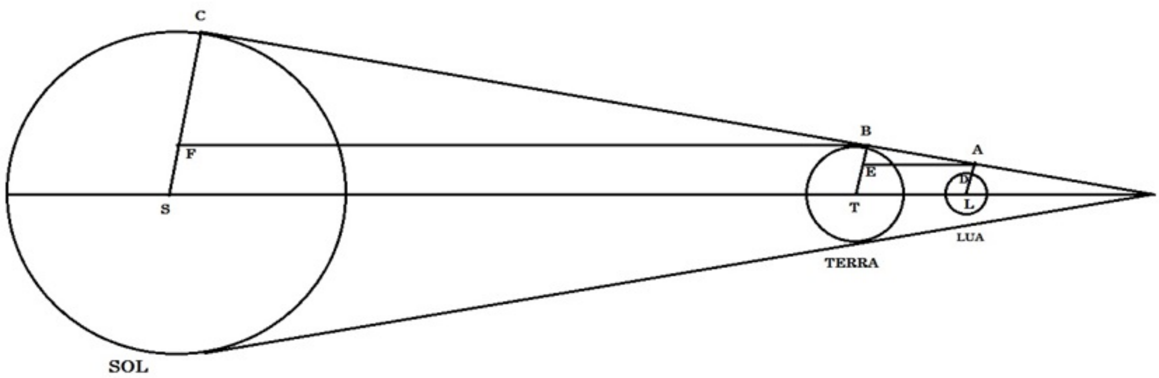


Figura 3.8:

Na figura, L, T e S são os centros da Lua, Terra e Sol, respectivamente, e D é um ponto da circunferência Lunar, assim como B está na superfície da Terra e C na superfície do Sol, de tal forma que o triângulo CFB é retângulo em C, e o triângulo BEA é retângulo em B.

Note que o triângulo CFB é semelhante ao triângulo BEA, pelo critério de semelhança AA, portanto, é válida a relação: $\frac{CF}{BF} = \frac{BE}{EA}$.

Observe ainda que:

1. $BE = BT - ET = RT - LA = RT - \frac{8}{3} \cdot RL$, usando a observação de Aristarco;

2. $DL = R_L; BT = R_T; SC = R_S; AE = TL = D_L$ e $BF = TS = D_S$;

3. $CF = CS - FS = R_S - BT = R_S - R_T$.

Da semelhança temos:

$$(\mathrm{I})\ \frac{CF}{BF} = \frac{BE}{AE} \Rightarrow \frac{R_S - R_T}{D_S} = \frac{R_T - \frac{8}{3}R_L}{D_L}$$

Segue que já obtemos as seguintes relações:

4.
$$\frac{R_S}{D_S} = \frac{R_L}{D_L} = sen\sigma = b$$

5.
$$\frac{R_S}{R_L} = \frac{D_S}{D_L} = a$$

Usando na equação (i) as relações *4* e *5* teremos

$$D_L = \frac{3(a+1)R_T}{11 \cdot a \cdot b}.$$

Daí temos ainda: $D_S = a \cdot D_L$, $R_L = b \cdot D_L$ e $R_S = b \cdot D_S$.

Segundo as relações que Aristarco descobriu e que usamos anteriormente ($a \approx 20$ e $b = sen 1^o = 0,017$), segue que: $D_L \approx 16,8R_T$, $D_S \approx 337R_T$, $R_L \approx 0,29R_T$ e $R_S \approx 5,7R_T$.

Usando o resultado que Erastóstenes encontrou para o valor do raio da Terra ($R_T = 6.270\,Km$), o valor das distâncias indicadas serão estimadas em: $D_L \approx 105.340\,Km$, $D_S \approx 2.113.000\,Km$, $R_L \approx 1.820\,Km$ e $R_S \approx 35,740\,Km$.

COMENTÁRIOS

Note que se calcularam as distâncias D_S, D_L, R_S e R_L (distância Terra-Sol, distância Terra-Lua, raios do Sol e da Lua, respectivamente) usando dois parâmetros (a e b) que foram determinados sem a devida precisão em suas medições, como se viu anteriormente.

Contudo o meio empregado por Aristarco para encontrar a relação dessas distâncias constitui-se de extrema felicidade e admiração, já que se for usado os parâmetros como eles são conhecidos em nossos dias, se terão aproximações inquestionáveis para os valores de D_S, D_L, R_S e R_L.

Como visto anteriormente, os valores mais precisos para os parâmetros a e b são $a \approx 400$; e $b \approx sen 0,25^o \approx 0,0044$. Recalculando as distâncias para os parâmetros a e b, e $R_T = 6.270\,Km$. São encontrados os seguintes valores das distâncias em questão:

$D_L \approx 62,1 \cdot RT \approx 389.360Km$, $D_S \approx 24.855,4 \cdot R_T \approx 155.843.360Km$,

$R_L \approx 0,27 \cdot R_T \approx 1700Km$, $R_S \approx 109,4 \cdot R_T \approx 685.940Km$.

É importante notar que esses valores não correspondem aos que temos como referências dessas distâncias na atualidade, pois ainda existe o fator de correção equivalente ao Raio da Terra (R_T). O valor usado foi o encontrado por Eratóstenes em sua observação durante um solstício de verão em Alexandria por volta de 230 a.C. Porém já pode-se ter uma estimativa para as distâncias encontradas, tendo em vista que são valores bem próximos dos reais, embora tenham sido estimados a mais de 2000 anos.

Situação Problema 4: Procure agora, considerando as trajetórias dos planetas do Sistema Solar como circulares, estimar as distâncias planetárias, como fez Nicolau Copérnico, usando conhecimentos básicos de geometria euclidiana e as relações trigonométricas no triângulo retângulo. Compreendendo as diferenças em calcular essas distâncias para os planetas mais próximos ou mais distante do Sol que a Terra. Apresentando conceitos básicos da astronomia como planetas inferiores, planetas superiores, elongação, período sideral.

PROBLEMA 4:

(a) Determine a distância de Mercúrio e Vênus ao Sol, usando como parâmetro a distância da Terra ao Sol. (Use a fig.3.9 logo abaixo que indica a elongação de Vênus.)

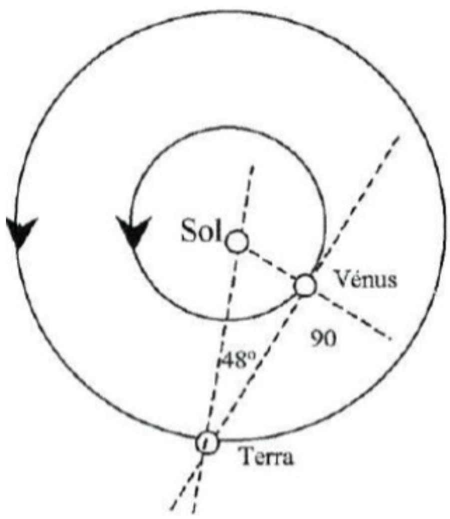


Figura 3.9:

(b) Determine a distância de Marte ao Sol, usando como parâmetro a distância da Terra ao Sol.

SOLUÇÃO

a) Consideremos a figura 3.9 que indica a posição do Sol, Terra e Vênus em quadratura, ou seja, o triângulo formado pelos astros STV é retângulo no vértice V.

Daí pode-se definir o ângulo do vértice T como sendo a elongação de Vênus que expressa o afastamento angular desse planeta em relação ao Sol. Note que o ângulo de elongação é sempre menor que 90^o.

Nicolau Copérnico (1473-1543) observando ao longo do tempo a posição dos planetas Terra e Vênus com relação ao Sol obteve que a elongação máxima de Vênus era de 48^o.

É fácil notar que a distância que se quer (distância de Vênus ao Sol) é encontrada usando a relação seno para o ângulo de elongação.

Portanto,
$sen 48^o = \frac{\mathsf{SV}}{\mathsf{ST}} \Leftrightarrow \mathsf{SV} = \mathsf{ST} \cdot sen 48^o = 0,74 \cdot \mathsf{ST}$, se adotarmos a distância entre a Terra e o Sol como sendo de 1U.A (Uma Unidade Astronômica), temos que $\mathsf{SV} = 0,74$ U.A.

Da mesma forma podemos determinar a distância entre Mercúrio e o Sol, pois assim como Vênus, Mercúrio é conhecido como planeta inferior, que são planetas cuja órbita é interior à trajetória da Terra.

Nicolau Copérnico encontrou para a elongação de Mercúrio um ângulo de 23^o, o que nos daria uma distância $\mathsf{SM} = \mathsf{ST} \cdot sen 23^o = 0,39 \cdot \mathsf{ST}$, adotando ST como 1 U.A, temos que $\mathsf{SM} = 0,39$ U.A.

b) Para encontrar as distâncias dos planetas superiores (planetas cuja órbita é exterior à órbita da Terra), Copérnico precisou de um pouco mais de esforço mental que o exemplo anterior, pois é necessário saber o período sideral do planeta.

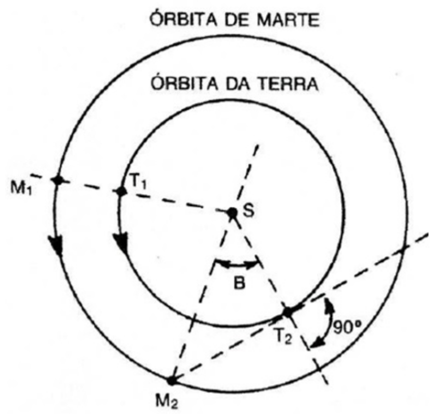


Figura 3.10:

Analisando a figura (fig 3.10), que mostra as posições do Sol, Terra e Marte em oposição e em quadratura, é possível determinar os arcos varridos pelos planetas em relação ao tempo que levam para percorrer tais ângulos. Considerando as órbitas como circulares ao redor do Sol.

Partindo da oposição de Marte, onde temos os três astros alinhados nas posições M_1T_1S, sabemos por observação que após 106 dias os planetas estão em posição de quadratura no triângulo M_2T_2S, retângulo em T_2.

Pode-se agora determinar o ângulo T_1ST_2, varrido pela Terra. Basta considerar que em 365 dias (período sideral da Terra) a Terra varrerá um ângulo de 360^o. Daí é só fazer a razão $(106/365).360^o \approx 105^o$.

Da mesma forma é encontrado o ângulo M_1SM_2, varrido por Marte. Só que agora considerando o período sideral de Marte que é de 687 dias, que é o tempo que este planeta dar uma volta completa ao redor do Sol. Novamente é só fazer a razão $(106/687).360^o \approx 56^o$.

Agora é só determinar o ângulo B no triângulo retângulo M_2T_2S, que vale $105^o - 56^o = 49^o$. E encontrar o valor de SM_2, que é a distância de Marte ao Sol, quando em quadratura com a Terra.

Daí segue, $\cos 49^o = \dfrac{ST_2}{SM_2} \Leftrightarrow SM_2 = \dfrac{ST_2}{\cos 49^o} \Leftrightarrow SM_2 = \dfrac{ST_2}{0,66} \Leftrightarrow SM_2 = 1,5 \cdot ST_2$.

COMENTÁRIOS

Importante observar no item a) que embora não se tenha dificuldade em calcular o valor das distâncias dos planetas inferiores ao Sol, haveria um problema se não fosse conhecido o ângulo que representa a elongação do planeta. Deve-se destacar aqui que a distância desse planeta ao Sol é constante considerando sua órbita como circular com o Sol no centro do círculo. No entanto, isso não é verdadeiro, porém esta é uma boa aproximação dada pelo procedimento desenvolvido por Nicolau Copérnico.

Com o mesmo raciocínio que Copérnico usou pra determinar que a distância de Marte ao Sol é 1,5 vezes maior que a distância da Terra ao Sol, ele também determinou as distâncias de Júpiter e Saturno ao Sol.

Note que essas distâncias só podem ser calculadas sabendo-se o período sideral do planeta, assim fica difícil imaginar que estudiosos da Grécia Antiga tenham conseguido fazer tais cálculos. Poderiam ter feito observações e estimativas dessas distâncias, no entanto não deviam ter essa precisão. Não fora encontrado registros dessas anotações na época, em nossa pesquisa.

Observa-se que nos esquemas representados, os planetas e suas órbitas em torno do Sol apresentam suas as órbitas como circulares, muito diferente do que se costuma ver em livros, principalmente nos livros didáticos da Educação Básica, já que nesse caso as órbitas aparecem como elipses bastante achatadas e com suas distâncias não representadas em escala. O que não representa o fato real: as órbitas dos planetas de fato, com exceção de Plutão, são quase que circulares. Daí os valores encontrados nos cálculos de Copérnico neste problema e de Aristarco de Samos, nos problemas anteriores, aparecerem bem estimados.

Considerações Finais

Trabalhar em educação no Brasil é uma tarefa desafiante e motivadora, dados os problemas que se enfrentam neste país. Porém a atividade de pesquisa que deve ser constante na rotina do educador, passa por um desestímulo geral por falta de incentivo financeiro e profissional em todas as esferas do poder público, em especial no setor municipal e estadual. Somam-se a isso a sobrecarga de atividade laboral a que se sujeitam os profissionais tornando as discussões políticas e pedagógicas cada vez mais vazias e sem retorno sócio educacional.

Contudo buscou-se ao longo deste trabalho se afastar deste marasmo intelectual e repensar formas não convencionais de lidar com a situação de desmotivação por parte dos educadores e de desinteresse do educandos com o designo de minimizar as mazelas pela qual se passa a realidade das escolas pátrias, em particular as vinculadas ao ensino público.

Foi neste viés que a proposta se desenvolveu numa perspectiva de melhorias na forma de abordar conhecimentos de geometria associando-os à astronomia como elemento motivador e de contextualização, utilizando conhecimentos e observações do cotidiano do aluno para abordar situações problemas perfeitamente possíveis de serem aplicados em sala de aula (em especial a alunos do ensino médio), de onde se extrairão definições, teoremas, etc. O fruto da atividade do aluno com estes problemas, mediados pela ação do professor, deve ser o conhecimento matemático de forma sistematizada.

A abordagem baseada em situações problemas amplamente comentadas, associada à história da matemática trará uma proximidade maior com os conteúdos, até então tratados como abstração e inutilidade pelos alunos. A explicação matemática de fenômenos poderá ser aproveitada para introduzir a astronomia na sala de aula, permitindo deste modo concretizar e consolidar os conceitos matemáticos associados a esses fenômenos.

A opção de estruturar o trabalho na base de uma associação direta entre conceitos matemáticos e fenômenos astronômicos, permitirá expandir a ideia (pouco generalizada mesmo em contexto escolar) que a Matemática também pode ser "experimental". Esta é apenas uma tentativa de cumprir alguns dos objetivos da educação básica, qual seja o de garantir o desenvolvimento da autonomia intelectual e garantir a continuidade dos estudos.

Pode se destacar nas aplicações propostas neste volume, contempladas em seu capítulo terceiro, a precisão das estimativas realizadas através de cálculos geométricos simples por Aristarco, Eratóstenes e Ptolomeu, que embora não dispusessem de aparelhos de observação modernos conseguiram prever medidas de tempos, ângulos e distâncias que são admiradas pelos matemáticos atuais e causam espanto até os dias atuais.

Também é objetivo da dissertação, além de ser usada como suporte por professores de matemática em sua prática diária, estimular a participação dos alunos no processo de formação do próprio conhecimento, pois fazer parte das indagações e estar em constante procura é um dos fundamentos da vida, quer seja da ciência, da filosofia, da religião ou de tudo isso junto.

Infelizmente tem-se neste país um vasto compendio de leis, resoluções, portarias, etc, que regulam a ação do cidadão sem a devida eficácia. Também é assim na educação brasileira; parâmetros, orientações, etc, que buscam padronizar a ação dos educadores. No entanto, assim como nas leis cíveis e penais, a ineficácia da ação educacional se reflete nos números a ela associados.

Assim buscou-se durante a pesquisa pensar em melhorias, pois muito há para ser feito. E a esperança de contribuir com essa melhoria foi e será a mola propulsora desse trabalho. A ampliação destas discussões com outros colegas insatisfeitos com a crise educacional pela qual passa o país é apenas uma parte do estudo que se tem em mente. Porém é preciso continuar (pensar, repensar, experimentar, errar, corrigir, acertar, atualizar), pois como já foi dito melhorar as práticas educacionais e pedagógicas é parte da ação do educador.

Referências Bibliográficas

[1] **Astronomia. Atmosfera Terrestre**. Disponível em <http://pt.wikipedia.org/wiki/Astronomia>. (último acesso em 18/Jul/2013).

[2] **Astronomia Antiga - Astronomia e Astrofísica**. Disponível em: <http://astro.if.ufrgs.br/ antiga/antiga.htm>. (último acesso em 28/Mar/2013).

[3] ÁVILA, G. **Aristarco e as dimensões astronômicas**. Revista do Professor de Matemática, SBM, São Paulo, nº 55, p. 1-10, 2004.

[4] ÁVILA, G. **A Geometria e as distancias astronômicas na Grécia antiga**. *In Explorando o Ensino da Matemática*, vol. II, paginas 39-46.

[5] BARBOSA, J. L; M.: **Geometria Euclidiana Plana**. Coleção do Professor de Matemática, Sociedade Brasileira de Matemática, 2005.

[6] BORTOLOSSI, H.J, **Usando o computador para demonstrar Teoremas em Geometria Plana**. Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática, 2012.

[7] BOYER, C.B. **História da Matemática; revista por C.Merzbach, tradução Elza F. Gomide**. 2ª ed, São Paulo - SP: Ed. Edgard Blucher LTDA, 2006.

[8] BRASIL.MEC. In: **Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1997. Disponível em <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf> (último acesso em 28/Jan/2013).

[9] BRASIL.MEC. In: **PCN + Ensino médio: orientações educacionais complementares**. Brasília: MEC/SEMT, 2002. Disponível em: ¡http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/Ciencias Natureza.pdf¿. (último acesso em 28/Jan/2013).

[10] BRASIL.MEC In: **Orientações Curriculares para o Ensino Médio (Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias)**, Volume 2. Brasília: MEC/SEB, 2006. [Citado em: : 7 de Set. de 2008.] em <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdfr>. ISBN 85-98171-43-3. (último acesso em 28/Jan/2013).

[11] DOLCE, O.;POMPEU,J.N., **Fundamentos de Matemática Elementar**, 8ª ed., São Paulo, Atual, 2005.

[12] EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Trad. Hygino H. Domingues. Campinas: Editora Unicamp, 2004.

[13] FARIA, R. P., **Fundamentos de Astronomia**, Campinas/SP: Ed. Papirus, 2007, 6ª ed.

[14] LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C., **Temas e Problemas**, Rio de Janeiro, SBM, 2010.

[15] MORAIS, C.A.L., **A Astronomia no Ensino da Matemática: Uma proposta para o Ensino Secundário**. Dissertação (Mestrado), Faculdade de Ciências da Universidade do Porto. Departamento de Matemática Aplicada, 2003.

[16] **Observatório Nacional**. In Física.net. Disponível em: http://www.fisica.net/giovane/astro/Modulo1/htm, (último acesso em 22 de julho de 2013).

[17] PROFMAT. **MA13 - Geometria**, Texto base da disciplina de Geometria no Mestrado Profissional em Rede Nacional. Sociedade Brasileira de Matemática, 2011.

[18] ROQUE, T; PITOMBEIRA, J.B., **Tópicos de história da Matemática**., Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática, 2012.

[19] **Tales de Mileto**. Disponível em: <http://pt.wikipedia.org/wiki/Tales_de_ Mileto>. (último acesso em 22/jul/2013).

[20] WAGNER, E., **Usando áreas**, Revista do Professor de Matemática, SBM, Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, nº 21, p.21-22, 1992.

Glosário

ALEXANDRIA: Uma das mais importantes cidades do mundo antigo, muito conhecida pelo Farol de Alexandria e pela Biblioteca de Alexandria. Atualmente compreende território egípcio.

CANÔNICO: conforme as regras, especialmente as da Igreja Católica.

CEVIANAS DE UM TRIÂNGULO: é um segmento de reta que liga um vértice do triângulo ao lado oposto correspondente ou ao do seu prolongamento. São exemplos de cevianas a mediana, a altura, a bissetriz.

CIRÊNIA: *Cirene* é uma antiga colônia grega na atual Líbia, a mais antiga e mais importante das cinco cidades gregas da região.

ELONGAÇÃO DE UM PLANETA: consiste na distância angular aparente de um planeta em relação ao Sol, isto é, o ângulo formado pelas direções Terra-Sol e Terra-planeta. Este valor é dado pelas diferenças de longitude celeste entre o Sol e o planeta.

EQUINÓCIO: definido como o instante em que o Sol, em sua órbita aparente (como vista da Terra), cruza o plano do equador celeste (a linha do equador terrestre projetada na esfera celeste). Mais precisamente é o ponto no qual a eclíptica cruza o equador celeste.

EPICICLO: pequeno círculo descrito por um astro em torno de um ponto imaginário que, por sua vez, descreve outro círculo.

ESTAGIRA: antiga cidade da Macedônia, situada hoje na Grécia fundada em 656 a.C. por colonos jônicos.

FASE HOMÔNIMA DA LUA: posições que compreendem a mesma classificação de uma fase lunar.

GEOCÊNTRICO: referente à *geocentrismo*, modelo cosmológico que se baseia na hipótese de que a Terra estaria parada no centro do Universo com os corpos celestes, inclusive o Sol, girando ao seu redor. Sua forma final foi divulgada por Claudius Ptolomeu em sua obra Almagesto.

GNOMON: O *gnômon* ou *gnómon* é a parte do relógio solar que possibilita a projeção da sombra.

HELIOCÊNTRICO: referente à *heliocentrismo*. Em astronomia, heliocentrismo é a teoria que o Sol está, em uma interpretação estrita, estacionário no centro do universo; ou em sentido lato, situado aproximadamente no centro do sistema solar, no caso do heliocentrismo renascentista. Historicamente, o heliocentrismo era oposto ao geocentrismo, que colocava a Terra no centro do universo.

LADOS HOMÓLOGOS: que se correspondem ordenadamente em figuras semelhantes.

MILETO: antiga cidade da Ásia Menor, no sul da Jônia, cuja região atualmente faz parte da Turquia, situada junto à foz do rio Meandro. Tanto a filosofia como a primeira escola filosófica, de acordo com a tradição, surgiram em Mileto. Os representantes da escola milésia são Tales, Anaximandro e Anaxímenes.

NICÉIA: nome de uma antiga cidade da Ásia Menor, atualmente Iznik, na Turquia, onde foram realizados dois importantes concílios ecumênicos.

PERÍODO SIDERAL: período que decorre numa revolução completa (360^o) em torno do Sol de um corpo celeste entre duas culminações estelares. Este período reflete o tempo real de translação de um corpo relativamente ao Sol.

PERÍODO SINÓDICO: é o tempo que leva um astro (objeto) a reaparecer no mesmo local em sucessivas conjunções com o Sol e é o período orbital aparente (a partir da Terra) do astro.

PLANETAS INFERIORES: são os planetas que possuem órbitas interiores à órbita da Terra, são eles Vênus e Mercúrio.

PLANETAS SUPERIORES: são os planetas que possuem órbitas exteriores à órbita da Terra, como Marte, Saturno e Urano.

SAMOS: ilha grega no leste do mar Egeu. Conhecida pela referência a naturalidade de dois filósofos gregos: Aristarco e Pitágoras.

SIENA: cidade italiana é universalmente conhecida pelo seu património artístico e pela notável unidade estilística do seu centro histórico.

SOLISTÍCIO DE VERÃO: é um fenômeno da Astronomia que marca o início do Verão. É o instante em que o hemisfério Sul está inclinado cerca de $23,5^o$ na direção do Sol. No solstício de Verão ocorre o dia mais longo do ano e consequentemente a noite mais curta do ano, em termos de iluminação por parte do Sol. O solstício de Verão pode acontecer no dia 21 ou 22 de Dezembro, dias em que a radiação solar incide de forma vertical sobre o Trópico de Capricórnio. Essa data é outra para o Hemisfério Norte (21 de junho).

TEODOLITO: instrumento óptico de medida utilizado na topografia, na geodesia e na agrimensura para realizar medidas de ângulos verticais e horizontais, usado em redes de triangulação.

TRIÂNGULOS CONGRUENTES: triângulos que coincidem quando sobrepostos.