

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JATAÍ - UFJ  
UNIDADE ACADÊMICA ESPECIAL DE CIÊNCIAS EXATAS E  
TECNOLÓGICAS  
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL -  
PROFMAT

ELINÉIA PEREIRA VAILANT

**Modelagem de circuitos elétricos  
e resolução via sistemas lineares**

Jataí/GO

2021



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS  
UNIDADE ACADÊMICA ESPECIAL DE CIÊNCIAS EXATAS

## TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO (TECA) PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES

### E DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a [Lei 9.610/98](#), o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou download, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

O conteúdo das Teses e Dissertações disponibilizado na BDTD/UFG é de responsabilidade exclusiva do autor. Ao encaminhar o produto final, o autor(a) e o(a) orientador(a) firmam o compromisso de que o trabalho não contém nenhuma violação de quaisquer direitos autorais ou outro direito de terceiros.

#### 1. Identificação do material bibliográfico

Dissertação      Tese

#### 2. Nome completo do autor

ELINEIA PEREIRA VAILANT

#### 3. Título do trabalho

MODELAGEM DE CIRCUITOS ELÉTRICOS E RESOLUÇÃO VIA SISTEMAS LINEARES

#### 4. Informações de acesso ao documento (este campo deve ser preenchido pelo orientador)

Concorda com a liberação total do documento  SIM      NÃO<sup>1</sup>

**[1]** Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. Após esse período, a possível disponibilização ocorrerá apenas mediante:

**a)** consulta ao(à) autor(a) e ao(à) orientador(a);

**b)** novo Termo de Ciência e de Autorização (TECA) assinado e inserido no arquivo da tese ou dissertação.

O documento não será disponibilizado durante o período de embargo.

Casos de embargo:

- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

**Obs. Este termo deverá ser assinado no SEI pelo orientador e pelo autor.**



Documento assinado eletronicamente por **Fernando Ricardo Moreira, Orientador**, em 19/07/2021, às 12:03, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).

Documento assinado eletronicamente por **ELINEIA PEREIRA VAILANT, Discente**, em 19/07/2021, às 13:36, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site [https://sei.ufg.br/sei/controlador\\_externo.php?acao=documento\\_conferir&id\\_orgao\\_acesso\\_externo=0](https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0), informando o código verificador **2217331** e o código CRC **F89B50A8**.

Referência: Processo nº 23070.026465/2021-03

SEI nº 2217331

ELINÉIA PEREIRA VAILANT

## **Modelagem de circuitos elétricos e resolução via sistemas lineares**

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), da Unidade Acadêmica Especial de Ciências Exatas e Tecnológicas, da Universidade Federal de Jataí (UFJ), como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Matemática do Ensino Básico.

Orientador: Dr. Fernando Ricardo Moreira

Jataí/GO

2021

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do  
Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Vailant, Elinéia Pereira  
Modelagem de circuitos elétricos e resolução via sistemas lineares  
[manuscrito] / Elinéia Pereira Vailant. - 2021.  
72 f.: il.

Orientador: Prof. Dr. Fernando Ricardo Moreira.  
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Unidade  
Acadêmica Especial de Ciências Exatas e Tecnológicas, Jataí,  
PROFMAT- Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede  
Nacional - Sociedade Brasileira de Matemática (RJ), Jataí, 2021.

Bibliografia.

Inclui lista de figuras.

1. Modelagem. 2. Interdisciplinaridade. 3. Circuito elétrico. I.  
Moreira, Fernando Ricardo, orient. II. Título.

CDU 51



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS

COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO - REGIONAL JATAÍ

**ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO**

Ata nº **17** da sessão de Defesa de Dissertação de ELINEIA PEREIRA VAILANT, que confere o título de Mestra em **Matemática**, na área de concentração em **Matemática do Ensino Básico**.

No dia dezessete de junho de 2021, a partir das **10h00 horas**, realizou-se a sessão pública de Defesa de Dissertação integralmente por meio de tecnologias de comunicação à distância, intitulada “MODELAGEM DE CIRCUITOS ELÉTRICOS E RESOLUÇÃO VIA SISTEMAS LINEARES”. Os trabalhos foram instalados pelo Orientador, Professor Doutor Fernando Ricardo Moreira (UAE de Ciências Exatas / UFJ) com a participação dos demais membros da Banca Examinadora: Professor Doutor Alysson Tobias Ribeiro da Cunha (IME / UFG), membro titular externo; Professor Doutor Wender José de Souza (UAE de Ciências Exatas / UFJ), membro titular interno. Durante a arguição os membros da banca **não fizeram** sugestão de alteração do título do trabalho. A Banca Examinadora reuniu-se em sessão secreta a fim de concluir o julgamento da Dissertação, sendo a candidata **aprovada** pelos seus membros. Proclamados os resultados pelo Professor Doutor Fernando Ricardo Moreira, Presidente da Banca Examinadora, foram encerrados os trabalhos e, para constar, lavrou-se a presente ata que é assinada pelos Membros da Banca Examinadora, no dia dezessete de junho de 2021.

## TÍTULO SUGERIDO PELA BANCA

Não houve alteração no título.



Documento assinado eletronicamente por **Fernando Ricardo Moreira, Coordenador**, em 21/06/2021, às 16:04, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Wender José De Souza, Professor do Magistério Superior**, em 21/06/2021, às 16:28, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Alysson Tobias Ribeiro Da Cunha, Professor do Magistério Superior**, em 21/06/2021, às 16:40, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site [https://sei.ufg.br/sei/controlador\\_externo.php?acao=documento\\_conferir&id\\_orgao\\_acesso\\_externo=0](https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0), informando o código verificador **2133223** e o código CRC **3B74981F**.

**Referência:** Processo nº 23070.026465/2021-03

SEI nº 2133223

*Dedico este trabalho a minha família, pois, sempre estiveram ao meu lado me dando forças para conquistar meus sonhos.*

# Agradecimentos

*Agradeço a Deus, por todas as bênçãos e dádivas que colocou e tem colocado em meu caminho, pela graça de poder concluir este trabalho, finalizando mais uma importante etapa em minha vida.*

*Agradeço a minha família, por tê-los sempre ao meu lado, me incentivando, dando suporte e dizendo para confiar em meu potencial.*

*Agradeço o meu orientador, Prof. Dr<sup>o</sup>. Fernando Ricardo Moreira, por toda compreensão, cooperação, disponibilidade e ensinamento nesse período tão conturbado e corrido que se torna essa fase do curso. Agradeço por se dedicar ao trabalho a que se propôs, sempre procurando me deixar segura. Obrigada por ser esse profissional de excelência e levar com tanto comprometimento seu trabalho.*

*Agradeço também a todas as pessoas que de alguma forma contribuíram nesse momento tão importante da minha vida, o meu muito obrigada!*

*Tudo é considerado impossível, até acontecer.*

Nelson Mandela

# Resumo

A Matemática, mesmo com as diversificadas formas de interação tecnológica, ou com as diversas metodologias de ensino, ainda é vista por muitos estudantes como uma disciplina de difícil compreensão. Sabemos que a Matemática sofre grande rejeição pelos estudantes, evidenciada principalmente no ensino médio, pois acreditam que seus conteúdos não são de fácil entendimento e, conseqüentemente, foge da realidade destes estudantes. Há tempos estão sendo desenvolvidas pesquisas, trabalhos e metodologias apontando diversas formas de ensino e aprendizagem da Matemática. Neste sentido, pensou-se em trazer neste trabalho uma proposta de ensino que utiliza como metodologia a Modelagem Matemática, de modo a destacar uma das diversificadas possibilidades de aprendizado dos conhecimentos de Matemática e Física, com ênfase em circuitos elétricos de corrente contínua, sistematizados em equações lineares, cujos métodos numéricos de solução aplicados foram: Regra de Cramer e Eliminação de Gauss. Em parceria com essa metodologia, de modo a ressaltar a aprendizagem fragmentada por conta da separação das áreas de ensino, destacamos a importância do uso da interdisciplinaridade, isto é, a importância de se trabalhar em conjunto de modo a diminuir a fronteira entre diversas outras áreas de conhecimento. O trabalho está distribuído em reflexões e análises trazidas por autores sobre a definição da Modelagem Matemática e da Interdisciplinaridade. Ambos assuntos são apresentados separadamente de modo que possamos compreender a significância e aplicabilidade de cada um. Para uma melhor compreensão de como a Modelagem Matemática será inserida, é exposto os principais conceitos sobre a Eletricidade, parte importante para a definição de circuitos elétricos. Portanto, neste trabalho trazemos a Modelagem Matemática como instrumento de apoio para a análise de circuitos elétricos, visto em Eletrodinâmica, estudado com maiores detalhes na disciplina de Física na 3ª série do ensino médio e com prováveis aplicações ao nível superior.

**Palavras-chave:** Modelagem. Interdisciplinaridade. Circuito elétrico.

# Abstract

Mathematics, even with the diverse forms of technological interaction, or with the diverse teaching methodologies, is still seen by many students as a discipline that is difficult to understand. We know that Mathematics suffers great rejection by students, evidenced mainly in high school, as they believe that its contents are not easy to understand and, consequently, it escapes the reality of these students. Researches, works and methodologies have been developed for some time, pointing out different ways of teaching and learning Mathematics. In this sense, it was thought to bring in this work a teaching proposal that uses as a methodology the Mathematical Modeling, in order to highlight one of the diverse possibilities of learning the knowledge of Mathematics and Physics, with emphasis on direct current electrical circuits, systematized in linear equations, whose numerical solution methods applied were: Cramer's Rule and Gaussian Elimination. In partnership with this methodology, in order to emphasize fragmented learning due to the separation of teaching areas, we highlight the importance of using interdisciplinarity, that is, the importance of working together in order to reduce the boundary between several other areas of knowledge. The work is distributed in reflections and analyzes brought by authors on the definition of Mathematical Modeling and Interdisciplinarity. Both subjects are presented separately so that we can understand the significance and applicability of each. For a better understanding of how Mathematical Modeling will be inserted, the main concepts about Electricity are exposed, an important part for the definition of electrical circuits. Therefore, in this work we bring Mathematical Modeling as a support tool for the analysis of electrical circuits, seen in Electrodynamics, studied in greater detail in the discipline of Physics in the 3rd grade of high school and with probable applications at higher level.

**Keywords:** Modeling. Interdisciplinarity. Electric circuit.

# Lista de ilustrações

Figura 1 – Aristide C. Barreto. . . . .	22
Figura 2 – Ubiratan D’Ambrosio. . . . .	22
Figura 3 – Rodney Carlos Bassanezi. . . . .	23
Figura 4 – Estrutura da matéria. . . . .	30
Figura 5 – Corrente elétrica no condutor. . . . .	32
Figura 6 – Movimentação dos elétrons - real e convencional. . . . .	33
Figura 7 – Tipos de corrente. . . . .	34
Figura 8 – Representação esquemática do resistor. . . . .	36
Figura 9 – Circuito elétrico simples. . . . .	36
Figura 10 – Nós e malhas em um circuito elétrico. . . . .	39
Figura 11 – Lei de Kirchhoff para corrente. . . . .	40
Figura 12 – Lei de Kirchhoff para tensão. . . . .	40
Figura 13 – Associação em série. . . . .	42
Figura 14 – Associação em paralelo. . . . .	43
Figura 15 – Associação mista. . . . .	43
Figura 16 – Amperímetro. . . . .	44
Figura 17 – Voltímetro. . . . .	45
Figura 18 – Multímetro. . . . .	45
Figura 19 – Símbolos comuns para indicar um nó de referência. . . . .	56
Figura 20 – Circuito elétrico. . . . .	57
Figura 21 – Fonte de corrente. . . . .	57
Figura 22 – Circuito elétrico. . . . .	57
Figura 23 – Forma esquematizada do circuito de quatro malhas. . . . .	59
Figura 24 – Circuito de duas malhas. . . . .	61
Figura 25 – Forma esquematizada do circuito de duas malhas. . . . .	62
Figura 26 – Circuito de duas malhas com a intensidade da corrente elétrica em cada ramo . . . . .	64
Figura 27 – Circuito elétrico com três malhas. . . . .	65
Figura 28 – Forma esquematizada do circuito elétrico de três malhas. . . . .	66
Figura 29 – Circuito de três malhas com a intensidade da corrente elétrica em cada ramo . . . . .	69

# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>14</b>
<b>1.1</b>	<b>Objetivos</b>	<b>16</b>
1.1.1	Objetivo Geral	17
1.1.2	Objetivo Específico	17
<b>1.2</b>	<b>Estrutura do trabalho</b>	<b>17</b>
<b>2</b>	<b>REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b>	<b>19</b>
<b>2.1</b>	<b>Interdisciplinaridade</b>	<b>19</b>
<b>2.2</b>	<b>Modelagem Matemática</b>	<b>21</b>
<b>2.3</b>	<b>Elementos de circuito elétrico</b>	<b>29</b>
2.3.1	Corrente elétrica	31
2.3.2	Tensão elétrica	34
2.3.3	Resistência elétrica e resistor	35
<b>2.4</b>	<b>Circuito elétrico</b>	<b>36</b>
<b>2.5</b>	<b>Leis físicas associadas a circuitos elétricos</b>	<b>37</b>
2.5.1	Leis de Ohm	37
2.5.2	Leis de Kirchhoff	38
<b>2.6</b>	<b>Associações de resistores</b>	<b>41</b>
<b>2.7</b>	<b>Instrumentos de medição</b>	<b>43</b>
<b>2.8</b>	<b>Sistemas lineares</b>	<b>45</b>
2.8.1	Resolução de Sistemas lineares - Regra de Crammer	49
2.8.2	Resolução de Sistemas lineares - Método de Eliminação de Gauss	51
<b>3</b>	<b>MODELAGEM MATEMÁTICA DE CIRCUITOS ELÉTRICOS</b>	<b>55</b>
<b>3.1</b>	<b>Modelagem matemática genérica para um circuito elétrico</b>	<b>56</b>
<b>3.2</b>	<b>Aplicações</b>	<b>60</b>
3.2.1	Aplicação 1	61
3.2.2	Aplicação 2	65
<b>4</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>	<b>70</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>71</b>

# 1 INTRODUÇÃO

Atualmente, com a evolução do alcance da internet, aumentou-se consideravelmente a proporção de pessoas que utilizam o mundo virtual, principalmente aplicativos e sites de entretenimento e de compartilhamento de notícias e de imagens, tanto a nível pessoal quanto profissional. Consequentemente, tornou-se intensa também a preocupação quanto as formas de ensino e aprendizagem de modo que acompanhe o contexto atual.

Direcionando nossa análise para o ensino e aprendizagem de conteúdos da Matemática, mesmo com as diversificadas formas de interação tecnológica, ou com as diversas metodologias de ensino, a Matemática ainda é vista por muitos estudantes como uma disciplina de difícil compreensão.

A matemática sofre grande rejeição pelos estudantes, e é evidenciada principalmente no ensino médio, pois acreditam que seus conteúdos não são de fácil entendimento e que estão distantes de suas realidades. Neste caso, pensar em formas de se trabalhar determinados conteúdos matemáticos combinados a outras disciplinas parece promissor e enriquecedor.

Ao analisar conteúdos estudados na disciplina de Matemática, verificamos que a maioria deles comumente aparecem em várias situações problemas, relacionadas a diversas áreas das Ciências da Natureza e suas Tecnologias.

Para [Valiente \(2015\)](#)

[...] a Matemática tem o poder de ir além de seu caráter instrumental, caracterizando-se como ciência com características próprias de investigação através de linguagem própria e com papel essencial junto às demais Ciências da Natureza. Sob o olhar de ciência, sua dimensão histórica, sua íntima relação com a sociedade, a cultura de diferentes épocas ampliam e aprofundam o espaço de conhecimentos não só nesta disciplina, mas mostrando sua importância nas inter-relações com outras áreas de conhecimento ([VALIENTE, 2015, p.1](#)).

Acredita-se que mostrar a aplicabilidade de métodos matemáticos em outras áreas de conhecimento, faz com que os conceitos se tornem mais perceptíveis para o aprendizado do aluno.

No novo documento da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que está em período final de reformulação com inclusão da etapa do Ensino Médio, documento este de caráter normativo utilizado como referência para toda a Educação Básica Brasileira, presume que

No Ensino Médio, na área de Matemática e suas Tecnologias, os estudantes devem consolidar os conhecimentos desenvolvidos na etapa anterior e

agregar novos, ampliando o leque de recursos para resolver problemas mais complexos, que exijam maior reflexão e abstração. Também devem construir uma visão mais integrada da Matemática, da Matemática com outras áreas do conhecimento e da aplicação da Matemática à realidade (BRASIL, 2017, p.471).

Em geral, o ingresso dos alunos em Instituições de Ensino Superior (IES) se dá através de vestibulares e/ou através de seu desempenho no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) o qual exige dos estudantes um conhecimento de diversas áreas, dado que suas questões são construídas de forma contextualizada a outras áreas de aprendizagem. Com isso, se torna mais evidente ainda a necessidade de interligar a aprendizagem a outras áreas de conhecimento.

O Decreto Nº 9.432 de 29 de junho de 2018, que regulamenta a Política Nacional de Avaliação e Exames da Educação Básica, com relação ao ENEM, traz os seguintes objetivos:

Art. 7º O Enem tem como objetivo aferir o domínio das competências e das habilidades esperadas ao final da educação básica.

Parágrafo único. O Enem poderá ser utilizado como mecanismo de acesso à educação superior e aos programas governamentais de financiamento ou apoio ao estudante do ensino superior (BRASIL, 2018).

Assim, a revisão de métodos matemáticos e sua aplicação na resolução de situações problemas de outras disciplinas, mostraria ao aluno a relevância do método estudado e a importância de entender bem os conceitos matemáticos para posterior aplicação em situações que eles vivenciarão em exames e/ou em seus cursos superiores, principalmente para quem for cursar algo em ciências exatas.

Contudo, pensando principalmente nos alunos que em sala de aula cobram aplicações aos professores do método matemático estudado, teve-se como ideia para este projeto, trabalhar, de forma interdisciplinar, conceitos de Sistemas Lineares aplicados ao cálculo da intensidade de corrente elétrica e/ou a diferença de potencial elétrico em Circuitos Elétricos. Para isso, serão utilizados a primeira lei de Ohm e as leis de Kirchhoff, que são exemplos de modelos matemáticos de sistemas algébricos lineares pelo qual o comportamento do circuito elétrico é analisado.

Conforme o Currículo Referência da Rede Estadual de Educação de Goiás (2006), o conteúdo de Circuitos Elétricos visto em Eletrodinâmica, é estudado com maior detalhamento na disciplina de Física, no 2º bimestre da 3ª série do ensino médio. Já o conteúdo de Matrizes e Sistemas Lineares é estudado e visto no 1º bimestre da 2ª série do ensino médio. Portanto, também com a intenção de retomar e revisar conteúdos já estudados, pensou-se no desenvolvimento deste trabalho.

Além desta aplicação/modelagem mencionada neste texto, que é nosso objeto de estudo, podemos observar outras aplicações de Sistemas Lineares e seus métodos de resoluções em outras áreas de estudo.

Os conceitos de Sistemas Lineares e Matrizes podem também ser vistos e abordados em problemas práticos da Engenharia Civil e da Economia. Na Engenharia Civil é abordado no desenvolvimento de projetos de estruturas metálicas em que o sistema de equações lineares é necessário para determinar a força exigida entre as vigas. Já na Economia é abordado nos modelos fechado e aberto de Leontief, “os quais descrevem uma inter-relação entre preços, produção e demanda num sistema econômico” (CRUVINEL et al., 2013). Contudo, as matrizes podem ser abordadas de forma explícita ou implícita, sendo geralmente em forma de tabelas ou, sem ser percebidas, como no caso das imagens digitais (CABRERA, 2018).

A fim de identificarmos a relevância de nosso trabalho, realizamos uma breve pesquisa na *internet*, na página do próprio PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional <sup>1</sup> e verificamos haver registrados: 55 dissertações com o tema Sistemas Lineares, 121 dissertações com o tema Modelagem Matemática e 5 dissertações com o tema circuitos elétricos em seus títulos.

Das dissertações de Sistemas Lineares, havia um registro na Universidade Federal de Goiás (UFG) e dois registros na Universidade Federal de Jataí (UFJ). Das dissertações relacionadas a Modelagem Matemática, dentre as 121 mencionadas, cinco estavam registradas na UFG e uma na UFJ. Quanto as dissertações com circuitos elétricos, não houve registros no estado de Goiás. Verificamos também que não há registro no banco de dissertações do PROFMAT de nenhuma dissertação que utiliza a Modelagem Matemática como estratégia no ensino de circuitos elétricos e também não há nenhum registro que associa o conteúdo de sistemas lineares a circuitos elétricos. Assim, fica caracterizado o ineditismo do conteúdo desta dissertação quando tratamos apenas do banco de dissertações deste programa. Com isso, podemos concluir também que este trabalho é de suma importância para o início de vários outros estudos nessa área.

## 1.1 OBJETIVOS

Nesta seção apresentamos os principais objetivos que se pretende atingir com a elaboração deste trabalho. Acredita-se que com a sua definição clara, ajudará muito na compreensão do andamento descritivo do trabalho dissertativo.

---

<sup>1</sup> Material disponível em: <[www.profmatt-sbm.org.br/dissertacoes](http://www.profmatt-sbm.org.br/dissertacoes)>. Acesso em: 20 abr. 2021

### 1.1.1 Objetivo Geral

Propor de modo interdisciplinar a modelagem matemática de circuitos elétricos de corrente contínua em Sistemas Lineares, com o uso de métodos numéricos para determinar a solução do sistema linear, e conseqüentemente analisar o comportamento e a intensidade da corrente elétrica no circuito elétrico, conteúdos estudados no Ensino Médio nas disciplinas de Física e Matemática.

### 1.1.2 Objetivo Específico

- Discutir sobre a importância do estudo interdisciplinar;
- Relacionar a Modelagem Matemática ao ensino e aprendizagem;
- Revisar os conceitos sobre sistemas lineares e matrizes;
- Contribuir no entendimento das leis de Ohm e de Kirchhoff;
- Analisar circuitos elétricos de corrente contínua através de Sistemas Lineares;
- Contribuir no processo de interpretação da associação de sistemas lineares na forma matricial;
- Propor a interdisciplinaridade entre Matemática e a Física;
- Destacar a funcionalidade e aplicação do método matemático estudado;
- Mostrar a aplicação de métodos numéricos na solução de sistemas lineares.

## 1.2 ESTRUTURA DO TRABALHO

Inicialmente neste trabalho, no Capítulo 2, encontra-se a Revisão Bibliográfica. Neste capítulo, a princípio, trazemos algumas considerações de alguns autores a cerca da Interdisciplinaridade e a Modelagem Matemática.

Em seguida, no mesmo capítulo trazemos a fundamentação teórica sobre os principais conceitos em Eletricidade necessários para se definir Circuitos Elétricos. Apresentamos também as principais leis físicas, as leis de Ohm e as leis de Kirchhoff, geralmente utilizadas para determinar a intensidade da corrente elétrica e responsável por contribuir na análise do comportamento do circuito elétrico. Sendo estas leis representações de modelos matemáticos algébricos lineares.

Trazemos também neste capítulo as principais definições sobre Sistemas de Equações Lineares e dois métodos numéricos de resoluções: a Regra de Cramer e o Método de Gauss, porém, sem a preocupação de fazer um estudo completo destes assuntos, uma vez que o

objetivo é fundamentar e integrar o leitor dos conceitos que foram utilizados. Esta parte do trabalho auxiliará na compreensão dos métodos matemáticos utilizados durante a análise do comportamento do circuito elétrico. Diante disso, realizamos uma pesquisa sucinta, contemplando apenas algumas definições, teoremas e métodos de resolução de Sistemas Lineares.

No Capítulo 3, apresentamos uma aplicação genérica da modelagem matemática em sistema de equações lineares de um circuito elétrico com 4 malhas, e realizamos nas secções seguintes duas aplicações numéricas: uma em um circuito elétrico de duas malhas e a outra em um circuito elétrico de três malhas. Em ambos os circuitos realizamos a modelagem matemática em sistemas lineares para analisar o sentido da corrente elétrica e sua intensidade.

Por último, no Capítulo 4, porém não menos importante, apresentamos as considerações finais com relação ao desenvolvimento deste trabalho.

## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Neste capítulo trazemos discussões e análises de alguns autores sobre os conceitos do uso da interdisciplinaridade e da modelagem matemática no ensino e aprendizagem, embasamento teórico importante para podermos inter-relacionar Matemática e Física no ensino e aprendizagem de Sistema Lineares e Matrizes por meio de circuitos elétricos. Ambas discussões foram apresentadas separadamente de modo que possamos compreender a significância e aplicabilidade de cada uma. Em seguida, para uma melhor compreensão de como a modelagem matemática será aplicada, será abordado alguns conceitos sobre a eletricidade, desde o surgimento da energia elétrica até a definição de circuitos elétricos, conteúdo este abordado em Eletrodinâmica, ramo de estudo da Física.

Porém, não há a intenção de se fazer um estudo completo desses assuntos, uma vez que o objetivo é fundamentar e integrar o leitor dos conceitos a serem utilizados.

### 2.1 INTERDISCIPLINARIDADE

Antes de iniciar uma discussão sobre os principais conceitos de interdisciplinaridade e sua importância no âmbito escolar, acredita-se que também seja de fundamental importância definir o conceito de disciplina, estratégia organizacional ainda utilizada atualmente.

Segundo Fortes (2009, p. 3), a disciplina é vista como um conjunto de estratégias organizacionais, uma forma organizada e delimitada de apresentar o conhecimento ao aluno, a qual tem-se como suporte “um conjunto de procedimentos didáticos e metodológicos” para a prática do ensino e “avaliação da aprendizagem”. Acredita-se que a disciplina é uma forma estruturada e fragmentada de organizar e apresentar o conhecimento.

Porém, como existem autores que apoiam a forma fragmentada de ensino, existem também autores que consideram esse método de ensino dificultador para a aprendizagem do aluno, e destacam a importância de se trabalhar em conjunto com outras disciplinas. Com isso, alguns autores veem a interdisciplinaridade como forma de modificar essa aprendizagem fragmentada.

Para Fortes (2009, p. 4), a partir do momento em que se utiliza a interdisciplinaridade como apoio para o ensino e aprendizagem, isso não significa que se deixará de estudar de forma parcelada, mas passará a torna-las comunicativas entre si, de modo que se torne “necessária a atualização quando se refere às práticas do processo de ensino-aprendizagem”.

A interdisciplinaridade no âmbito escolar, não implica a criação de uma nova disciplina ou saberes, mas ajuda a mostrar perspectivas diferentes, por meio da junção de

várias disciplinas, direcionadas para a solução de um problema ou compreensão de um determinado fenômeno (BONATTO et al., 2012).

Acredita-se que o ensino estruturado delimita os conteúdos, sendo que na realidade as interações de conhecimentos ocorrem o tempo todo. Para Bonatto et al. (2012, p. 2)

[...] a interdisciplinaridade é um elo entre o entendimento das disciplinas nas suas mais variadas áreas. Sendo importante, pois, abrangem temáticas e conteúdos permitindo dessa forma recursos inovadores e dinâmicos, onde as aprendizagens são ampliadas (BONATTO et al., 2012, p.2).

Alguns autores veem a interdisciplinaridade como uma alternativa de ensino e aprendizagem, de modo que possa superar a forma fragmentada dos saberes.

Segundo Thiesen (2008, p. 4)

[...] a interdisciplinaridade será sempre uma reação alternativa à abordagem disciplinar normalizadora (seja no ensino ou na pesquisa) dos diversos objetos de estudo. Independente da definição que cada autor assuma, a interdisciplinaridade está sempre situada no campo onde se pensa a possibilidade de superar a fragmentação das ciências e dos conhecimentos produzidos por elas e onde simultaneamente se exprime a resistência sobre um saber parcelado (THIESEN, 2008, p.4).

Trabalhar de forma interdisciplinar em sala de aula compreende trabalhar com um tema com abordagens em diferentes disciplinas, de modo a “entender as partes de ligação entre as diferentes áreas de conhecimento”. “É a busca constante de investigação, na tentativa de superação do saber” (FORTES, 2009, p. 7). Isto é, tem-se a intenção de mostrar ao aluno uma perspectiva diferente de um mesmo tema ou objeto de estudo.

Porém, é um grande desafio trabalhar de forma conjunta com outras disciplinas, pois, para que essa interação aconteça, não é suficiente ter-se conhecimento apenas em sua área de formação, é preciso estabelecer conexão com outras áreas da ciência.

Segundo Thiesen (2008, p.8)

[...] o professor precisa tornar-se um profissional com visão integrada da realidade, compreender que um entendimento mais profundo de sua área de formação não é suficiente para dar conta de todo o processo de ensino. Ele precisa apropriar-se também das múltiplas relações conceituais que sua área de formação estabelece com as outras ciências (THIESEN, 2008, p. 8).

Portanto, na tentativa de fugir da aprendizagem de forma parcelada, deve se adotar métodos que proporcionem o desenvolvimento de habilidades e o pensar matemático, que auxiliem na apropriação do conhecimento. O importante não é a quantidade de conteúdos trabalhados, mas sim a qualidade do processo adotado (BRASIL, 2006).

Tendo visto a importância de se adotar métodos que proporcione uma aprendizagem significativa e inter-relacionadas a outras áreas de conhecimento, pensou-se em abordar neste trabalho como forma de metodologia de ensino a Modelagem Matemática. Deste modo, no tópico a seguir, discutimos e analisamos os conceitos e definições da Modelagem Matemática, por meio de diálogos e considerações trazidos por alguns autores.

## 2.2 MODELAGEM MATEMÁTICA

Com o objetivo de disseminar a Modelagem Matemática, o Centro de Referência de Modelagem Matemática no Ensino (CREMM), grupo criado pela Universidade Regional de Blumenau -FURB, montou uma página na internet a qual apresenta um texto intitulado “*Percursores Brasileiros*”. Neste texto destaca que mesmo na impossibilidade de pontuar todos os possíveis professores/pesquisadores brasileiros que cooperaram para a disseminação e estruturação da modelagem matemática discutida atualmente, acredita-se que três singulares pessoas foram de fundamental importância para o impulsionamento da modelagem matemática no Brasil, sendo eles: Aristides Camargo Barreto, Ubiratan D’Ambrosio e Rodney Carlos Bassanezi.

- Aristides C. Barreto começou a trabalhar com modelagem na metade do ano de 1970, seguiu suas pesquisas em modelar matematicamente, músicas e trabalhou com modelagem em suas aulas na graduação da PUC do Rio de Janeiro-RJ;
- Ubiratan D’Ambrosio conhecido mundialmente pela comunidade acadêmica como o representante brasileiro na comunidade internacional de Educação Matemática e por seus estudos na área da Etnomatemática, em meados de 1970 e 1980, impulsionou cursos e projetos direcionados para matemática aplicada, biomatemática e modelagem matemática; e
- Rodney Carlos Bassanezi um dos maiores disseminadores da modelagem matemática, o qual utilizava os métodos da modelagem em suas práticas de sala de aula, conseqüentemente, conquistou diversos adeptos por todo o Brasil.

O professor e pesquisador Aristide C. Barreto (Figura 1) retratou a modelagem por meio da resolução de uma situação problema, adotando passos/métodos/estratégias de modo que o estudante fosse capaz de “matematizá-la (modelar)” e responde-la. Barreto teve o primeiro contato com a modelagem matemática quando cursava Engenharia na década de 1960, contudo somente na metade do ano de 1970 que teve a ideia de utilizar a modelagem em Educação Matemática como estratégia de ensino nas disciplinas em que lecionava na PUC-Rio, período este em que foi professor na Instituição. Em suas aulas, nas disciplinas que lecionava, sempre se preocupava em utilizar-se de modelos matemáticos

Figura 1 – Aristide C. Barreto.



**FONTE:** Disponível em: <<http://www.furb.br/cremm/portugues/cremm.php?secao=Precursos>>. Acesso em: 09 jul. 2020

como estratégia de ensino e, por conta disso, em conjunto com seus alunos conseguiu desenvolver diversos modelos em áreas específicas como Biologia, Ecologia, ente outras (BIEMBENGUT, 2009, p. 10).

Por meio dessas experiências Barreto verificou que a modelagem no ensino fazia com que os estudantes se tornassem mais motivados e interessados, sendo uma forma de demonstrar aplicações do conteúdo estudado, além disso, abordava também outros pontos positivos, como a criatividade e o pensamento crítico. A partir de 1989 Barreto passou a produzir trabalhos direcionados a textos literários em prosa e verso, com ênfase em letras de música, ou seja, trabalhos direcionados a modelos matemáticos dinâmicos integrados a música.<sup>1</sup>

Figura 2 – Ubiratan D'Ambrosio.



**FONTE:** Disponível em: <<http://www.furb.br/cremm/portugues/cremm.php?secao=Precursos>>. Acesso em: 09 jul. 2020

Quanto a D'Ambrosio (Figura 2), em 1972 retornava ao Brasil para atuar na UNICAMP (Universidade de Campinas (SP)). Devido ao período em que passou como

<sup>1</sup> Material disponível em: <<http://www.furb.br/cremm/portugues/cremm.php?secao=Precursos>>. Acesso em: 09 jul. 2020

pesquisador, na década de 1960, “na *Brown University*, em *Providence, Rhode Island*; na *University of Rhode Island*, em *Kingston - Rhode Island* e na *State University of New York*, em *Búfalo - New York*”, e com o apoio da UNESCO (Organização das Nações Unidas para a Educação, Ciência e Cultura) e da OEA (Organização dos Estados Americanos) teve a oportunidade de implementar no Brasil o método de ensino de educação matemática por meio de módulos, semelhante ao proposto por alguns países da Europa e dos Estados Unidos.

A proposta consistia em apresentar e preparar módulos de aprendizagem de matemática por temas, ou seja, elegia-se um tema matemático, e em seguida era organizado a produção de materiais de apoio didático com aplicações desse tema nas mais diversas áreas de conhecimento. Com isso, D’Ambrosio trouxe duas propostas para execução no Brasil: a produção de materiais didáticos sobre vários temas matemáticos no formato de módulos e a criação do primeiro Mestrado em Ensino de Ciência e Matemática na UNICAMP, que posteriormente deu origem a diversos trabalhos em Modelagem e Etnomatemática.<sup>2</sup>

Figura 3 – Rodney Carlos Bassanezi.



**FONTE:** Disponível em: <<http://www.furb.br/cremm/portugues/cremm.php?secao=Precursores>>.

Acesso em: 09 jul. 2020

Motivado por Barreto e D’Ambrosio, Rodney Carlos Bassanezi (Figura 3) teve como proposta, e a aplicava nos diversos cursos que ministrou, que o estudante a partir da realidade em que vivia, formulasse problemas de interesse para serem investigados e, somente depois durante o período de modelagem, que o conteúdo matemático seria inserido (BIEMBENGUT, 2009). Bassanezi influenciado por suas diversas orientações e pelos diversos cursos organizados por ele, teve sua pesquisa direcionada em “(re)orientar o método, as estratégias, os instrumentos e a própria pesquisa, passando a atuar mais na Matemática Aplicada” e, atualmente, é considerado como um grande disseminador da modelagem matemática havendo adeptos por toda parte.

Portanto, de forma resumida, por meio do levantamento de obras publicadas acredita-se que na metade do ano de 1970 e início dos anos 80 iniciaram movimentos pela modelagem matemática, conquistando adeptos por toda parte, sendo estes autores

<sup>2</sup> Material disponível em: <<http://www.furb.br/cremm/portugues/cremm.php?secao=Precursores>>. Acesso em: 09 jul. 2020

os percursores e fundamentais na consolidação da modelagem na Educação Matemática brasileira (BIEMBENGUT, 2009).

Diante disso, sabe-se que atualmente existem vários adeptos e pesquisadores que também estão contribuindo para a Modelagem Matemática no ensino brasileiro. Como exemplo, destacamos atualmente um grupo intitulado Grupo de Trabalho de Modelagem Matemática (GT-10), da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM), fundado em 2001. Esse grupo é considerado o décimo grupo formado com o intuito de articular e colaborar nas pesquisas brasileiras que são voltadas para esta área.

O GT-10 tem como objetivo estimular o debate relacionado a Modelagem Matemática na perspectiva da Educação Matemática e trazer informações e conteúdos para colaborar com pesquisadores brasileiros que realizam investigações nessa área. Os encontros são realizados a cada 3 anos durante a realização dos Seminários Internacionais de Pesquisas em Educação Matemática (SIPEM), nas Conferências Nacionais sobre Modelagem na Educação Matemática (CNMEM) e em participações em eventos, como no Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM), bem como outras ações.

O GT-10 possui 4 grandes grupos de estudo: o GEMM (Grupo de Estudos em Modelagem Matemática no Ensino), GRUPEMMAT (Grupo de Pesquisa sobre Modelagem Matemática e Educação Matemática), GPIMEM (Grupo de Pesquisa em Informática, outras Mídias e Educação Matemática) e NUPEMM (Núcleo de Pesquisa em Modelagem Matemática).

Assim, com base nas formas como a modelagem é aplicada e vista por alguns autores acreditamos ser também de fundamental importância discutirmos sobre as formas como a modelagem matemática foi e está sendo definida e estudada atualmente por alguns autores.

A fim de iniciarmos este assunto, iremos a princípio destacar algumas definições trazidas por Bassanezi em seu livro “*Ensino-aprendizagem com Modelagem matemática*”, publicado em 2002. Na introdução do capítulo 1, trouxe sua opinião quanto ao uso da Matemática Aplicada no ensino, pois a assemelha com uma matéria em que permite usar aplicações de modelagem matemática. Ele defende o uso da Matemática Aplicada no ensino, e salienta que ao contrário do que muitos acreditam, alegando que a Matemática Aplicada seja uma matéria inferior, onde seus problemas não necessitem da abordagem de técnicas sofisticadas, presumi que novos “instrumentos matemáticos” devam ser “interrelacionados a outras áreas de conhecimento humano”, pois assim se desenvolveria “um novo modelo de educação menos alienado e mais comprometido com as realidades dos indivíduos e sociedade” evitando a forma fracionaria de pensar (BASSANEZI, 2002, p.15).

Assim como a Matemática Aplicada é sugerida por alguns como uma disciplina em que visualizamos situações problemas de modo a demonstrar aplicações do conhecimento

matemático adquirido a outros domínios, pensar na Modelagem Matemática é também uma forma de utilizarmos métodos matemáticos para demonstrar a realidade e por meio disso adquirirmos determinados conhecimentos.

Bassanezi (2002, p. 16) assemelha os conhecimentos básicos de cálculo, geometria e estruturas algébricas com “jogos”, comparando-os como instrumentos que deveriam ser aplicáveis ao uso do cotidiano ou que fossem responsáveis por desenvolver habilidades intelectuais, pois, assim como os jogos a aprendizagem deveria ser divertida e útil.

Seguindo esse pensamento, acredita-se que a matemática não deveria “ser considerada importante” apenas por “alguma definição arbitrária ou porque mais tarde” o que aprendeu será utilizado em algum lugar, mas que sua importância fosse destacada por ser “tão agradável quanto interessante” (BASSANEZI, 2002, p.16).

Quando vemos a Matemática como um conhecimento em que é necessário, pois faz parte de nosso cotidiano, do convívio em sociedade, estaremos próximos a “romper o determinismo e a imutabilidade tão presente na matemática escolar”. Logo, a educação matemática não implicará somente nos ensinamentos de conteúdos em que eles utilizarão na semana seguinte, mas nos conteúdos matemáticos necessários que os tragam para uma compreensão de sua própria realidade (CALDEIRA, 2009, p. 35).

Para Madruga e Lima (2019) as diversas pesquisas que abordaram a Modelagem Matemática, demonstraram a eficácia da mesma no ensino e aprendizagem, e comprovaram que a Modelagem Matemática é uma área duradoura na Educação Matemática, principalmente no que se refere à Matemática Aplicada. Porém, alguns professores alegam receio e insegurança de utilizar a modelagem na Educação Básica, pois seus ensinamentos estão fixados no cumprimento do currículo impossibilitando tal prática.

Mesmo após diversas pesquisas apontarem outros caminhos de ensino e questionarem as práticas tradicionais nas escolas, muitos professores sentem dificuldade em abandonar a forma tradicional de ensino ou aderir novas metodologias. Acredita-se que o papel do professor é de estimular o desenvolvimento de aprendizagem do estudante e para isso deve estar aberto a outras sugestões a fim de uma aprendizagem significativa (MADRUGA; LIMA, 2019). Porém, há a necessidade de aderirem metodologias adequadas, pois, ao invés de ajudar a aprendizagem podem dificultar.

Madruga e Lima (2019, p. 253-254) aponta que durante o período de escolarização a escola, ambiente formal de ensino, é causadora do declínio criativo dos estudantes e os responsáveis por esse declínio são as metodologias inadequadas e a disposição “curricular por meio de disciplinas que fragmentam o conhecimento e dificultam a compreensão dos problemas cotidianos”. Neste caso, os princípios de modelagem surgem como uma possibilidade de ensino “buscando a formação de sujeitos capazes e sensíveis na identificação e na solução das questões atuais” (MADRUGA; LIMA, 2019, p. 253-254).

No entanto, na tentativa de compreender como a modelagem matemática pode ser inserida no ensino e aprendizagem, pensamos, a princípio, em diferenciar Modelagem e Modelos Matemáticos. Para isso, apresentamos algumas definições trazidas por Bassanezi (2002, p. 19).

Quando se procura refletir sobre uma porção da realidade, na tentativa de explicar, de entender, ou de agir sobre ela – o processo usual é selecionar, no sistema, argumentos ou parâmetros considerados essenciais e formalizá-los através de um sistema artificial: o modelo (BASSANEZI, 2002, p. 19).

Para Bassanezi (2002, p. 20) Modelo Matemático é definido como “um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam de alguma forma o objeto estudado”. O modelo matemático é importante, pois, proporciona uma linguagem precisa de modo que expressa com clareza as ideias, “além de proporcionar um arsenal enorme de resultados (teoremas) que propiciam o uso de métodos computacionais para calcular suas soluções numéricas”.

Já no que se refere a Modelagem, acredita ser “um processo dinâmico utilizado para a obtenção e validação de modelos matemáticos”. Acredita ser uma forma de problematizar matematicamente situações da realidade e obter soluções que “devem ser interpretadas na linguagem usual” (BASSANEZI, 2002, p. 24).

Deste modo, Bassanezi (2002, p. 24) vê a modelagem eficiente “a partir do momento que nos conscientizamos que estamos sempre trabalhando com aproximações da realidade, ou seja, que estamos elaborando sobre representações de um sistema ou parte dele”.

Na visão de Barbosa (2004, p. 3), a “Modelagem está associada à problematização e investigação”. Para ele a problematização está relacionada ao “ato de criar perguntas e/ou problemas”, enquanto que a investigação está associado “à busca, seleção, organização e manipulação de informações e reflexões sobre elas”. Ambas estão associadas no processo de envolvimento dos alunos durante a realização da atividade proposta.

Segundo Bassanezi (2002, p.17) a “modelagem matemática, em seus vários aspectos, é um processo que alia teoria e prática, motiva seu usuário na procura do entendimento da realidade que o cerca e na busca de meios para agir sobre ela e transformá-la”. Se observarmos, antes mesmo de estudarmos as técnicas e métodos matemáticos adotados para resolver determinado problema, estes mesmos métodos originaram de conceitos/ideias de situações empíricas. Deste modo, Bassanezi (2002) acredita que quando tais ideias são trabalhadas afastadas da situação de origem, maiores são as chances de tais ideias se tornarem um emaranhado de conceitos complexos quanto tão pouco significativos no campo da matemática.

O objetivo não é fugir da linguagem formal de escrita, mas procurar uma linguagem matemática adequada que facilite a compreensão e fundamente o pensamento, de modo

que se torne “um instrumento intelectual capaz de sintetizar ideias concebidas em situações empíricas [...]” (BASSANEZI, 2002, p.18).

Na visão de Caldeira (2009, p. 33-34) a modelagem matemática não deve ser tratada “apenas como um método de ensino e aprendizagem, no sentido de atribuir significado ao currículo oficial”, mas acredita que a modelagem deva ser discutida como uma “concepção de educação matemática”, no sentido de “criar uma nova forma de educar matematicamente”. Acredita ser uma forma de deslocar o que é considerado definido e imutável para uma característica racional e lógica que dê conta das suposições do pensamento metódico e da complexidade (CALDEIRA, 2009, p.33-34).

Para Caldeira (2009) utilizar a modelagem matemática como método de ensino-aprendizagem, provavelmente aos olhos do estudante é como se o conhecimento matemático já estivesse pronto, com suas próprias regras e convenções, deste modo, um dos melhores métodos a ser adotado pelo professor é a transmissão dessas regras e convenções de modo a mostrar a existência de uma outra matemática e não somente aquela apresentada nos currículos.

Com isso, a Modelagem Matemática pode ser um forte instrumento que ajudará estudantes e professores a perceberem que determinados conhecimentos matemáticos “não são verdades absolutas, nem verdades relativas que podem estar a serviço de uma determinada maneira de vê-la, podendo existir outras e a aprendizagem ocorrerá quando o estudante conseguir comparar tais maneiras” (CALDEIRA, 2009, p. 51).

Assim, Madruga e Lima (2019, p.255) propõe que os princípios de modelagem matemática sejam embasados nos métodos e estratégias utilizados por profissionais de diversas áreas de atuação, a fim de “promover a aprendizagem dos estudantes de qualquer disciplina com vistas ao desenvolvimento de modelos, sejam eles matemáticos ou não, instigando a criatividade e a pesquisa em sala de aula.”

Barbosa (2004, p. 4-5) traz três formas de ilustrar a flexibilidade da Modelagem no contexto escolar, que preferiu se referir como casos. No primeiro caso o professor é responsável por trazer um problema, com dados qualitativos e quantitativos, sendo os alunos responsáveis pela investigação, inseridos na própria sala de aula. No segundo caso, os alunos se deparam com um problema para investigar, porém precisam se retirar da sala para a coleta de dados e, neste caso, o professor é responsável apenas por formular o problema inicial. No terceiro e último caso, são “projetos desenvolvidos a partir de temas não-matemáticos, que podem ser escolhidos pelo professor ou pelos alunos”. Neste caso, “a formulação do problema, a coleta de dados e a resolução são tarefas dos alunos”.

Portanto, a fim de romper com a forma estruturada, na qual dá-se ênfase nos algoritmos, na memorização, pensou-se em utilizar neste trabalho a Modelagem Matemática de forma interdisciplinar, semelhante ao caso 1 mencionado por Barbosa (2004).

A Matemática a maioria das vezes é apresentada como um conhecimento abstrato em que boa parte vem de situações exemplificadas apenas na mente humana. O uso da modelagem consiste na intenção de mostrar a Matemática como um instrumento importante e que necessita do apoio de outras áreas, que podem-se fazer de suporte para o ensino e aprendizagem da Matemática (BURAK; KLUBER, 2016).

O uso da modelagem matemática foi uma das estratégias encontrada como ferramenta/alternativa para o ensino e aprendizagem do conteúdo de modo que seja possível explorar o mesmo apoiado na interdisciplinaridade entre as disciplinas de Matemática e Física.

A Matemática, devido a sua facilidade de síntese e de generalização passou a se tornar um instrumento indispensável para a compreensão de comportamentos no mundo. Porém, isso não significa que todo fenômeno pode ser matematizado ou convertido num formato computacional, mas que em muitas outras áreas a Matemática tem servido de base para modelar (BASSANEZI, 2002).

Nosso intuito não é mostrar que todo conteúdo pode ser convertido em modelos matemáticos, ou que deva adotar somente o ensino e aprendizagem por meio da modelagem matemática, mas, melhorar o interesse, revisar conteúdos e potencializar o ensino e aprendizagem, que conseqüentemente neste caso se aplica ao ensino e aprendizagem de sistema lineares e matrizes, e por conseqüência visualizando a modelagem do que foi aprendido em outra disciplina.

Mas, assim como foi discutido acima, a modelagem a ser abordada neste trabalho é aquela na qual está direcionada para uma situação problema específica, de modo que a utilize como um instrumento importante de ensino e aprendizagem, propondo modelos matemáticos, sem desconsiderar as outras áreas.

Segundo Müller (2000) a modelagem é essencial e é um processo que está presente o tempo todo em nossas vidas, e permite expressar o conhecimento.

A modelagem está presente na vida do homem, desde as épocas mais remotas. A criação de modelos para conhecer e explicar a realidade é própria do ser humano e seu emprego perpassa diferentes áreas. Pode ser uma representação ou reprodução de algo (escultura, modelo econômico, físico, matemático) ou ainda, um padrão a ser alcançado (manequim, modelo vivo, ato nobre). O modelo é a expressão do conhecimento que lhe é próprio. Não precisa ser verdadeiro, mas plausível em sua verificação (MÜLLER, 2000, p. 137)

Deste modo, a modelagem a ser abordada é aquela em que de acordo com Müller (2000, p. 137) “[...] é um processo que leva a um modelo, permitindo avaliar, fazer previsões, enfim, dar respostas a determinadas perguntas”.

Portanto, tem-se como intenção usar a modelagem matemática como um processo

dinâmico para modelar matematicamente situações problemas de modo que seja possível interpretar suas soluções e mostrar a modelagem matemática na mesma.

Assim como na Física procura compreender modelos de fenômenos naturais combinados com as ferramentas matemáticas para produzir sistemas que atendem a necessidades práticas, demonstraremos a importância de se compreender corretamente essas ferramentas matemáticas para com isso termos um bom uso delas.

## 2.3 ELEMENTOS DE CIRCUITO ELÉTRICO

Nesta parte da dissertação foram destacados e discutidos os principais conceitos sobre eletricidade, parte importante para a definição de circuitos elétricos. Discutimos sobre as grandezas fundamentais da eletricidade: corrente, tensão e resistência. Embora o número de elementos citados pareça pequeno, são grandezas que estão sempre presentes em qualquer circuito elétrico.

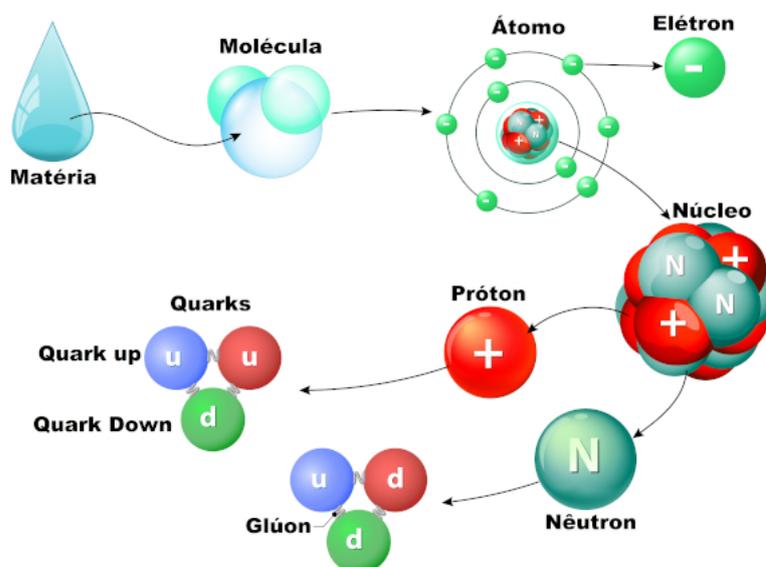
Neste início será pressuposto que se tenha um bom entendimento sobre os princípios da Eletrostática, ramo da Física que estuda as cargas elétricas em situação estática, ou seja, que se tenha um bom conhecimento sobre a teoria da matéria, condutores e isolantes, campo elétrico e potencial elétrico, para assim compreendermos os principais conceitos teóricos estudados em Eletrodinâmica, ramo da Física que estuda as cargas elétricas, íons e/ou elétrons, e seus efeitos em movimento. Essas definições são essenciais, pois, auxiliarão na compreensão de energia, tensão, corrente e resistência elétrica, componentes vitais para o entendimento de circuitos elétricos.

A Eletrodinâmica, assim como foi mencionado anteriormente, é uma parte da Física responsável por estudar o comportamento dinâmico das cargas elétricas, para isso é preciso entender o significado de elétrons livres. É por meio da Eletrodinâmica que conseguimos compreender alguns fenômenos comuns, como, por exemplo: o porquê da TV ser ligada após a conectarmos à tomada, o porquê do surgimento dos raios e também como é possível recebermos energia elétrica em nossas casas, etc.. Porém, antes de discutir sobre estes assuntos é importante primeiramente definir o significado de elétrons livres.

Diante disso, de modo a compreender a origem dos elétrons livres, iniciamos nossos estudos a partir das pequenas partículas que compõe a matéria, os átomos, que possuem o núcleo muito denso, denominado núcleo atômico, composto por partículas ainda menores, os prótons e os nêutrons; e circundando o núcleo tem-se uma nuvem eletrônica, formada por pequenas partículas denominadas elétrons (VILLATE, 2015). A Figura 4 ilustra a situação descrita anteriormente.

Através de testes e análises, verificaram que existe uma força de atração entre os elétrons e os prótons, porém, com os nêutrons essa força não ocorre, e com isso concluíram

Figura 4 – Estrutura da matéria.



**FONTE:** Disponível em: <<https://static.manualdaquimica.com/2020/07/estrutura-materia.jpg>>. Acesso em: 17, fev. 2021

que existem dois tipos diferentes de cargas, as dos prótons e as dos elétrons (VILLATE, 2015).

Mais adiante observaram que um átomo com iguais números de prótons e elétrons não produzia força elétrica sobre outras partículas com cargas, sendo considerado como um átomo neutro. Com isso, concluíram que os prótons e os elétrons possuíam cargas opostas, por convenção, os prótons têm carga positiva e os elétrons têm carga negativa (VALIENTE, 2015).

No Sistema Internacional de Unidades (SI) a unidade de medida utilizada para medir a carga elétrica é o coulomb<sup>3</sup> ( $C$ ) e a intensidade da mesma, denominada como carga elementar ( $e$ ) equivale a

$$e = 1.602 \times 10^{-19}C.$$

Deste modo, o próton possui a carga elementar igual a  $+e$  e o elétron igual a  $-e$ .

Essa força de atração entre os prótons e os elétrons é essencial para manter os elétrons em órbita em torno do núcleo. Quanto mais próximo do núcleo estiver o elétron, maior é a força de atração. Os elétrons que se encontram nas órbitas mais distantes do núcleo, quase não sentem essa força nuclear e possuem mais facilidade em se deslocar para outras órbitas de outros átomos, neste caso recebem o nome de elétrons livres. Já esse processo em que o átomo ganha ou perde elétrons recebe o nome de ionização (YOUNG; FREEDMAN, 2009; SILVA, 2015).

<sup>3</sup> Unidade de medida de carga elétrica no SI é o coulomb ( $C$ ), em homenagem ao físico francês Charles-Augustin de Coulomb (1736-1806).

Os elétrons livres estão ligados diretamente com a condução do material. Alguns materiais possuem maior ou parcial facilidade de migração da carga elétrica de uma região para outra, enquanto outros materiais impedem essa movimentação. Neste caso, os materiais que possuem um número significativo de elétrons em seu interior em movimento são considerados condutores e, no caso contrário, aqueles materiais que não existe ou quase não existe movimentação de elétrons livres são denominados isolantes. Como exemplo de materiais condutores, temos: o ouro, a prata, o cobre, o alumínio, o ferro, o mercúrio, etc.; e como exemplo de materiais isolantes temos: a madeira, o vidro, a borracha, etc. (SILVA, 2015; VILLATE, 2015);

Contudo, diante do pouco entendimento de elétrons livres, já se pode ter uma pequena ideia de como ocorrem os raios. Os raios surgem quando o campo elétrico formado entre a nuvem e à terra (ou entre nuvens) supera o limite de capacidade dielétrica do ar atmosférico, isto é, limite superior da intensidade de campo elétrico capaz de suportar sem se tornar um condutor. Normalmente as descargas atmosféricas inciam com cargas elétricas negativas, liberadas pelas nuvens em direção ao solo (descarga inicial), se ramificando a partir da base da nuvem. Em seguida, quando estas descargas se aproximam do solo é produzido uma descarga bem mais intensa, denominada descarga de retorno, sendo formado devido ao intenso campo elétrico gerado durante o trajeto da descarga elétrica inicial. Devido o encontro das duas descargas, ficam estabelecidos caminhos ionizados no ar, e por esses caminhos, cargas elétricas negativas saem das nuvens em direção ao solo, podendo esse processo ocorrer várias vezes em um curto intervalo de tempo, enquanto o ambiente estiver em condições ideais para que isso se repita (BISCUOLA; BOAS; DOCA, 2016).

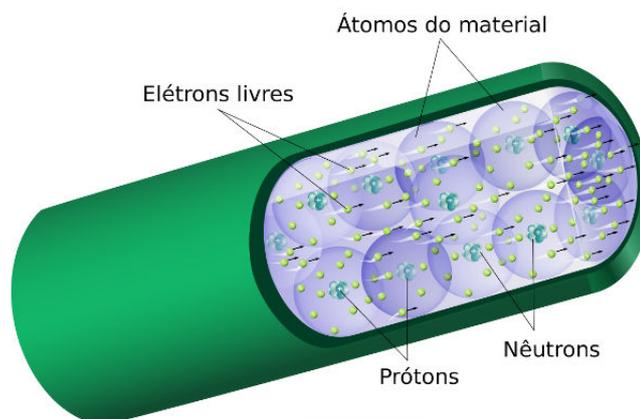
Portanto, a partir da especificação dada de elétrons livres e após estabelecermos as características de materiais condutores e isolantes, podemos definir então corrente elétrica.

### 2.3.1 Corrente elétrica

A corrente elétrica é definida como o fluxo de cargas elétricas (elétrons livres) dentro de um material condutor movimentando de uma região para outra (VILLATE, 2015). Pode ser caracterizado também como a movimentação de partículas carregadas. Contudo, nem todas as partículas carregadas se movendo é significado de presença de corrente (HALLIDAY; RESNICK; WALKER, 2016). Para que seja considerado como corrente elétrica é preciso haver um direcionamento nesse fluxo de cargas (Figura 5).

Em algumas situações os elétrons podem se mover livremente no interior do material condutor de forma caótica, isto é, em todas as direções, análogo à movimentação das moléculas de um gás, mas como não existe nenhum fluxo efetivo de cargas em nenhuma direção fixa, então não há presença de corrente (YOUNG; FREEDMAN, 2009). Assim, a presença da corrente elétrica é identificada a partir do momento que houver um fluxo

Figura 5 – Corrente elétrica no condutor.



**FONTE:** Disponível em:

<https://s2.static.brasilecola.uol.com.br/img/2018/12/corrente-eletrica-no-fio.jpg>. Acesso em: 17, fev. 2021

líquido de cargas através da superfície em uma direção fixa (HALLIDAY; RESNICK; WALKER, 2016).

É bom ressaltar também a existência de outros tipos de corrente elétrica, pois além da corrente eletrônica, aquelas constituídas apenas por elétrons, existe também as de natureza iônica e mista. A de natureza iônica, é formada pela movimentação simultânea dos íons positivos e negativos, em sentidos opostos, comumente encontradas em soluções eletrolíticas. Já a de natureza mista, é formada pela movimentação ordenada e simultânea dos elétrons e íons, comumente encontrada em gases ionizados (GUIMARÃES, 2016).

Segundo Nilsson e Riedel (2009)

Embora a corrente seja composta de elétrons discretos em movimento, não precisamos considera-los individualmente, por causa de sua enorme quantidade. Mas exatamente, podemos imaginar elétrons e suas cargas correspondentes como uma única entidade fluindo suavemente. Assim,  $I$  é tratada como uma grandeza contínua (NILSSON; RIEDEL, 2009, p. 7).

A corrente elétrica é normalmente representada vetorialmente por  $I$ , contudo ela não é considerada como uma grandeza vetorial, mesmo após darmos sentido ao fluxo da corrente.

Mesmo sabendo que a corrente fluirá ao longo de um fio condutor, tanto em fios retilíneos quanto em fios curvos, um único vetor não pode descrever a mesma grandeza ao longo de uma trajetória curva; logo, a corrente não pode ser descrita como um vetor. “A direção da corrente será definida em palavras (como na frase a corrente flui no sentido horário em torno do circuito) ou será escolhida como positiva a corrente que flui em deter-

minado sentido e negativa aquela que flui no sentido contrário” (YOUNG; FREEDMAN, 2009, p. 137).

Contudo, Villate (2015) caracteriza a corrente elétrica da seguinte forma: a intensidade equivale ao valor absoluto da corrente elétrica, a direção refere-se à direção ordenada de migração das cargas elétricas livres e o sentido é o mesmo em que ocorre a transferência de energia. Essa transferência de energia de um ponto a outro ocorre devido à diferença de potencial. “A corrente em qualquer condutor ou semicondutor de qualquer tipo segue sempre o sentido do campo elétrico<sup>4</sup>, isto é, movimentação das cargas do ponto com maior potencial para o ponto com menor potencial” (VILLATE, 2015, p. 29).

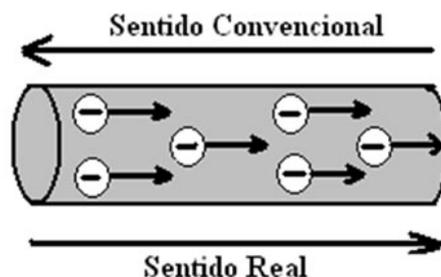
A intensidade absoluta da corrente elétrica em um material condutor é determinada através da análise do fluxo total de cargas elétricas  $Q$  que flui em uma seção durante um intervalo de tempo  $t$ . Expressando em linhas matemáticas, temos a seguinte situação (Equação 2.1):

$$I = \frac{dQ}{dt}. \quad (2.1)$$

A unidade de medida da corrente elétrica, em SI, é dada em ampère [A]. Neste caso, *um ampère equivale um coulomb por segundo* ( $1A = 1C/s$ ) (VILLATE, 2015; YOUNG; FREEDMAN, 2009).

O sentido da corrente é dividido em dois, assim como é demonstrado na Figura 6: o convencional e o real. No sentido convencional, a fins de cálculos, convencionam que o sentido da corrente é o mesmo que se a movimentação fosse por meio do fluxo de cargas livres positivas, enquanto no sentido real a movimentação ocorre pelas cargas negativas livres (SILVA, 2015). Embora o sentido da corrente convencional não seja o mesmo que o sentido da corrente real, o sinal das cargas que se movem não interferem na análise dos circuitos elétricos, isto é, o sinal indica apenas a direção da movimentação da corrente (YOUNG; FREEDMAN, 2009).

Figura 6 – Movimentação dos elétrons - real e convencional.



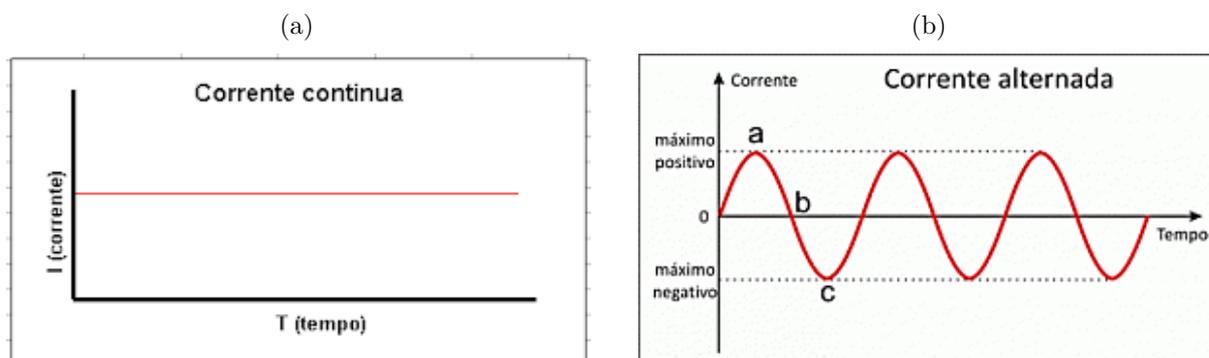
FONTE: Disponível em:

<[https://profdavijose.files.wordpress.com/2011/11/deslocamento\\_eletrons.jpg](https://profdavijose.files.wordpress.com/2011/11/deslocamento_eletrons.jpg)>. Acesso em: 11, jul. 2021

<sup>4</sup> O campo elétrico é definido como a região do espaço em que envolve/contorna o corpo eletrizado.

A partir da análise do circuito elétrico é possível ver que a corrente elétrica que percorre o condutor pode variar no tempo de diversas maneiras, podendo ser definidas como corrente contínua (Figura 7a) ou corrente alternada (Figura 7b):

Figura 7 – Tipos de corrente.



**FONTE:** Disponível em: Corrente contínua <[https://cdn.goconqr.com/uploads/node/image/61885975/desktop\\_aab4119f-3eb5-4896-a689-2656e5e23705.gif](https://cdn.goconqr.com/uploads/node/image/61885975/desktop_aab4119f-3eb5-4896-a689-2656e5e23705.gif)>; Corrente alternada <<https://eletricafacil.files.wordpress.com/2014/09/5f2a15afaa9d484a34af0c5ea9885359.gif>>. Acesso em: 29, jul. 2020

- A corrente alternada (DA ou CA), é vista como uma corrente que possui a forma senoidal, oscilação dos elétrons livres em movimentos de vai e vem em torno de posições fixas, que varia com o passar do tempo. Como exemplo de aplicação, temos a corrente fornecida em nossas residências, as quais utilizamos para ligar os eletrodomésticos (ALEXANDER; SADIKU, 2013).
- A corrente contínua (DC ou CC) é identificada como a corrente unidirecional que permanece constante ao longo do tempo e isso ocorre devido a diferença de potencial dos extremos terem a mesma polaridade, fazendo com que a corrente flua somente em um sentido. (GUSSOW, 1997). Como exemplo de correntes contínuas temos o circuito elétrico de uma lanterna, as pilhas químicas fontes geradoras de energia, as baterias, etc.

### 2.3.2 Tensão elétrica

A tensão elétrica é definida a partir de uma força eletromotriz externa, uma energia transferida ou trabalho realizado para deslocar uma carga unitária através de um condutor entre dois polos, um com ausência de cargas negativas, considerado como polo positivo, e o outro com excesso dessas cargas, considerado polo negativo. Essa força eletromotriz é definida como *tensão* ou *diferença de potencial (d.d.p.)* (ALEXANDER; SADIKU, 2013).

Com essa diferença de quantidade de cargas, verifica-se que a tensão  $V_{ab}$  entre dois pontos,  $a$  e  $b$  é a energia potencial (ou trabalho) responsável por colocar em movimento

cargas elétricas livres de  $a$  para  $b$ , de uma região de menor potencial para uma com maior potencial. Quanto maior for a diferença de elétrons entre os dois pontos, maior será a d.d.p. (ALEXANDER; SADIKU, 2013; SANTOS, 2011).

Em linhas matemáticas a expressão que representa essa situação é dada por

$$V_{ab} = \frac{dW}{dq} \quad (2.2)$$

onde  $W$  é a energia em joules ( $J$ ) e  $q$  é a energia da carga em coulomb ( $C$ ). A tensão  $V_{ab}$ , ou simplesmente  $V$ , é medida em volts ( $V$ ) (ALEXANDER; SADIKU, 2013). A partir da Equação 2.2, temos que

$$1\text{volt} = 1\text{joule/coulomb} = 1\text{newton} - \text{metro/coulomb}.$$

Assim como foi descrito na análise da corrente elétrica, a tensão pode ser dividida em outras duas: tensão contínua (tensão CC) ou tensão alternada (tensão CA). A tensão CC, assim como na corrente contínua, é caracterizada por ser um sinal constante ao longo do tempo, esse sinal é comumente produzido por baterias. Já a tensão CA possui a forma senoidal e o seu sinal varia ao longo do tempo, como exemplo tem-se a rede de distribuição elétrica (ALEXANDER; SADIKU, 2013).

### 2.3.3 Resistência elétrica e resistor

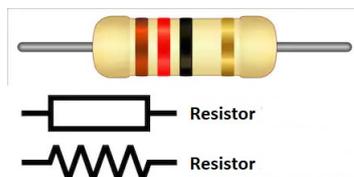
A resistência elétrica é vista como a capacidade do material de impedir ou limitar o fluxo dos elétrons livres que compõe a corrente elétrica. O componente eletrônico utilizado para modelar esse tipo de situação, que tem como função no condutor de introduzir uma resistência, é denominado como resistor (NILSSON; RIEDEL, 2009).

Como conceito, podemos entender resistência se imaginarmos os elétrons que compõem a corrente elétrica interagindo com a estrutura atômica do material no qual estão se movimentando, a qual, por sua vez, resiste a eles. No decurso dessas interações, uma parte da energia elétrica é convertida em energia térmica e dissipada sob a forma de calor. Esse efeito pode ser indesejável. Contudo, muitos dispositivos elétricos úteis aproveitam o aquecimento de resistências, tais como fogões, torradeira, ferros de passar e aquecedores de ambientes (NILSSON; RIEDEL, 2009, p. 18)

A fim de representar esquematicamente a aplicação dos resistores em linhas de circuito elétrico, os resistores são geralmente simbolizados como é mostrado na Figura 8.

A resistência, a fim de cálculos, será representada pela letra  $R$  e sua unidade de medida é dada em *ohms* ( $\Omega$ ). O “ohm é definido como a quantidade de resistência que limita a corrente num condutor a um ampère quando a tensão aplicada for de um volt” (GUSSOW, 1997, p.50). Essa relação, descoberta em 1826 pelo físico alemão Georg Simon Ohm (1787-1854), ficou conhecida como a primeira Lei de Ohm. Lei esta que discutiremos mais adiante na Subsecção 2.5.1.

Figura 8 – Representação esquemática do resistor.



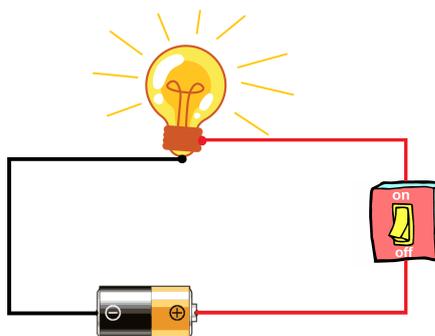
**FONTE:** Disponível em: <<http://www.pontodainformacao.com/CircuitosEletricos.html>>. Acesso em: 29, mar. 2021

## 2.4 CIRCUITO ELÉTRICO

Segundo Alexander e Sadiku (2013) um circuito elétrico é uma interconexão de dispositivos elétricos. Pode-se dizer que circuito elétrico é um conjunto de dispositivos interconectados através de materiais condutores com componentes elétricos/eletrônicos, com funções diversas, formando um caminho fechado. Tais caminhos fechados são denominadas circuitos elétricos e cada componente são caracterizados como elementos do circuito (KIENITZ, 2002).

O circuito elétrico por mais simples que seja é composto por uma fonte geradora, receptores e resistências (Figura 9), todos interligados através de um material condutor de modo a permitir a passagem da corrente elétrica.

Figura 9 – Circuito elétrico simples.



**FONTE:** Disponível em: <<https://images.app.goo.gl/K8TKGGPn7NJmK7616>>. Acesso em: 17, fev. 2021

O gerador é um dispositivo capaz de converter qualquer outro tipo de energia em energia elétrica. Como exemplo de geradores mais comuns, temos: as pilhas e as baterias, formados por energia química, isto é, transformam energia química em energia elétrica; e os geradores eólicos, formados por energia mecânica, ou seja, transformam a energia mecânica em energia elétrica (BONJORNO, 2016).

Os receptores são contrários aos geradores, são considerados como consumidores de energia, por esse motivo, são agrupados em duas categorias: os resistivos e os ativos.

Os receptores resistivos, considerados como resistores, são dispositivos capazes de transformar a energia elétrica exclusivamente em energia térmica. Este tipo de dispositivos são muito usados na fabricação de aquecedores, chuveiros, lâmpadas incandescentes, etc. (GUIMARÃES, 2016).

Os receptores ativos são dispositivos que convertem a energia elétrica em outra modalidade de energia, não somente em energia térmica. Como exemplo, temos os motores, que mesmo havendo uma pequena quantidade de energia dissipada em forma de calor, ele transforma a maior parte da energia elétrica em energia mecânica (GUIMARÃES, 2016).

Segundo Nilsson e Riedel (2009)

Um circuito elétrico é um modelo matemático que se comporta aproximadamente como um sistema elétrico real [...]. Os modelos, as técnicas matemáticas e a linguagem da teoria de circuitos elétricos formarão a estrutura intelectual para seus futuros empreendimentos na engenharia [...]. Observe que o termo circuito elétrico costuma ser utilizado para referir-se a um sistema elétrico propriamente dito, bem como o modelo que o representa (NILSSON; RIEDEL, 2009, p. 3).

## 2.5 LEIS FÍSICAS ASSOCIADAS A CIRCUITOS ELÉTRICOS

Para a análise de circuitos elétricos (Secção 2.4), desde circuitos mais simples à mais complexos, faz-se necessário definir as principais leis físicas que regem no comportamento do circuito. Dentre elas, as que serão mais relevantes para o estudo são: as leis de Ohm e as leis de Kirchhoff.

### 2.5.1 Leis de Ohm

Em meados de 1826 e 1827, por meio de pesquisas experimentais em seu laboratório com medições de corrente e tensões, o alemão Georg Simon Ohm (1787 – 1854) realizou grandes descobertas relacionadas a teoria da eletricidade. Inclusive, neste mesmo período, convencido de suas descobertas, publicou o livro *Die galvanische Kette, mathematisch bearbeitet* que apresenta seus principais trabalhos (GUIMARÃES, 2016).

Os trabalhos de Ohm, a princípio foram recebidos com frieza entre alguns pesquisadores. Somente mais tarde, em 1841, que seu trabalho começou a ser reconhecido. Contudo, dentre as suas descobertas, a que mais se destacou foi a relação fundamental, que em homenagem ao seu descobridor, recebeu seu nome: lei de Ohm (GUIMARÃES, 2016).

A lei de Ohm, surgiu durante observações de condutores elétricos, em especial os metais, em um experimento. Verificaram que ao variar a diferença de potencial ( $V_{ab}$ ) aplicada entre os terminais de um circuito elétrico, variava-se na mesma proporção a intensidade da corrente elétrica ( $I$ ). Esse fato ficou conhecido como *primeira lei de Ohm*,

que é definida pela seguinte expressão:

$$\frac{V_1}{I_1} = \frac{V_2}{I_2} = \dots = \frac{U_n}{I_n} = \textit{constante} \quad (2.3)$$

onde a resistência é constante, ou seja,  $R = \textit{constante}$  (GUIMARÃES, 2016).

Portanto, a primeira lei de Ohm afirma que a diferença de potencial (tensão elétrica ou queda de tensão), é dada pela relação de proporcionalidade entre a corrente elétrica e a resistência (ALEXANDER; SADIKU, 2013).

Um circuito simples formado por um gerador elétrico (como uma bateria) fornece elétrons livres que deslocam em um único sentido e que percorrem o circuito, passam pela resistência (como uma lâmpada) provocando uma queda de tensão. Por meio da primeira lei de Ohm, essa queda de tensão pode ser determinada pela seguinte expressão linear:

$$V = I \cdot R \quad (2.4)$$

em que  $V$  simboliza a tensão elétrica que é dada em *Volts*,  $R$  a resistência que é dada em *Ohm* e  $I$  corrente elétrica que é dado em *Ampère* (CRUVINEL et al., 2013).

Posteriormente, ao analisar as perdas de energia nos fios e cabos, assunto que ainda é muito discutido nos dias atuais, verificaram que a resistência elétrica é diretamente proporcional ao comprimento do fio/cabo e inversamente proporcional a área de sua secção transversal. Essa descoberta ficou conhecida como *segunda lei de Ohm* (GUIMARÃES, 2016).

A expressão matemática utilizada para modelar a segunda lei de Ohm, que determina a resistência elétrica ( $R$ ) de um fio homogêneo de comprimento ( $L$ ) e área de secção transversal ( $A$ ), é dada por

$$R = \rho \cdot \frac{L}{A} \quad (2.5)$$

em que  $\rho$  é a resistividade elétrica e seu valor varia de acordo com a composição do material de que o fio é constituído (GUIMARÃES, 2016).

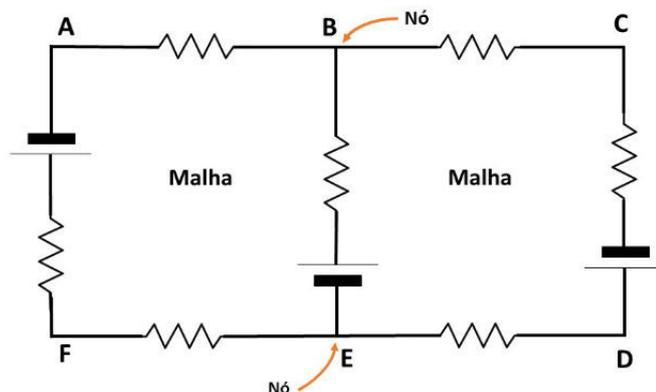
Com relação ao o que será considerado neste trabalho, a segunda lei de Ohm não entrará necessariamente em nossa base cálculos, pois, a princípio, o material condutor considerado no circuito possuirá perdas insignificantes e sendo assim o condutor é tido como ideal.

## 2.5.2 Leis de Kirchhoff

Para a resolução de circuitos elétricos (Secção 2.4), serão utilizados também duas leis descobertas pelo físico alemão Gustav Robert Kirchhoff <sup>5</sup> (1824-1887), conhecidas como *leis de Kirchhoff*.

<sup>5</sup> "Filho de um advogado em Königsberg, Prússia Oriental, com 18 anos Kirchhoff ingressou na Universidade de Königsberg e, mais tarde, tornou-se professor universitário em Berlim. Seu trabalho em

Figura 10 – Nós e malhas em um circuito elétrico.



**FONTE:** Disponível em: <<https://www.todamateria.com.br/leis-de-kirchhoff/>>. Acesso em: 17, fev. 2021

As Leis de Kirchhoff, foram sintetizadas em outras duas: a lei de Kirchhoff para corrente (LKC) ou também conhecida como lei dos nós e a lei de Kirchhoff para tensão (LKT) ou também conhecida como lei das malhas.

Os nós são identificados como a conexão de três ou mais ramos (Figura 10), isto é, ponto em que une as extremidades de três ou mais componentes elétricos. Já as malhas são identificadas como os caminhos fechados formado no circuito (Figura 10).

A lei de Kirchhoff para corrente (LKC), baseia-se na lei de conservação da carga, nos diz que a soma algébrica das intensidades das correntes que entram em um nó é igual à soma algébrica das intensidades das correntes que saem desse nó (Figura 11) (SANTOS; PRIMO, 2017). Isto é,

$$\sum_{n=1}^N I_n = 0 \quad (2.6)$$

onde  $N$  é o número de ramos conectados ao nó e  $I_n$  é a  $n$ -ésima corrente que entra (ou sai) do nó.

Na Figura 11 tem-se a representação de como ocorre a análise da lei de Kirchhoff para corrente. Neste circuito, tem-se apenas dois nós e cada nó possui três ramos pelo qual as correntes elétricas simbolizadas por  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$  passam com sentidos e direções arbitrárias.

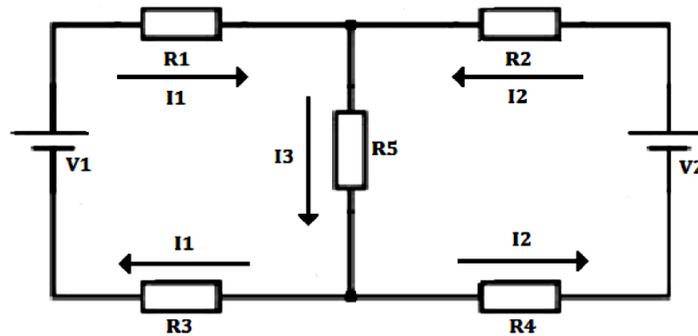
Logo, a LKC é aplicada em apenas um nó, de modo que a soma algébrica da intensidade das correntes que chegam no nó é igual à soma algébrica da intensidade das correntes que deixam o nó. Representando em linhas matemáticas a situação descrita, temos

$$I_1 + I_2 = I_3. \quad (2.7)$$

---

espectroscopia em colaboração com o químico alemão Robert Bunsen o levou à descoberta do cézio, em 1860, e do rubídio, em 1861. Credita-se também a Kirchhoff a lei da radiação, por isso Kirchhoff é famoso entre engenheiros, químicos e físicos" (ALEXANDER; SADIKU, 2013).

Figura 11 – Lei de Kirchhoff para corrente.



FONTE: (SANTOS; PRIMO, 2017)

Já a lei de Kirchhoff para tensão (LKT) se baseia no princípio de conservação de energia, nos diz que a soma algébrica das quedas de tensões em torno de um caminho fechado, conhecido como malha ou laço, é zero (Figura 12) (SANTOS; PRIMO, 2017). Isso quer dizer que ao percorrer uma malha em determinado sentido, a soma das tensões que têm o mesmo sentido do percurso fechado é igual à soma total das tensões que são fornecidas nesse percurso.

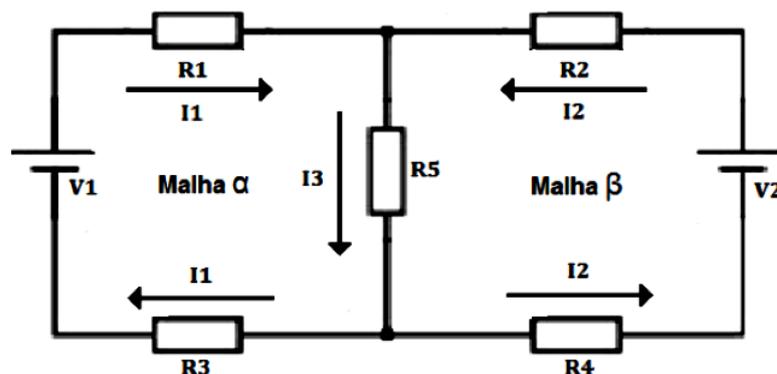
Expresso matematicamente, a LKT, ou lei das malhas, afirma que

$$\sum_{m=1}^M V_m = 0 \tag{2.8}$$

onde  $M$  é o número de tensões no laço (ou o número de ramos no laço) e  $V_m$  é a  $m$ -ésima tensão.

A LKT verificado na Figura 12 é analisada por meio de malhas, que estão representados por  $\alpha$  e  $\beta$ . Ao percorrer cada malha, num mesmo sentido, tem-se que a soma algébrica da diferença de potencial de cada elemento do circuito será nula. Durante a análise de cada ramo (componente do circuito) convencionou-se que a tensão é positiva na extremidade onde a corrente entra no componente.

Figura 12 – Lei de Kirchhoff para tensão.



FONTE: (SANTOS; PRIMO, 2017)

Em linhas matemáticas, temos as equações 2.9 e 2.10.

$$\text{Malha } \alpha : -V_1 + (R_1 \cdot I_1) + (R_5 \cdot I_3) + (R_3 \cdot I_1) = 0, \quad (2.9)$$

$$\text{Malha } \beta : -V_2 + (R_2 \cdot I_2) + (R_5 \cdot I_3) + (R_4 \cdot I_2) = 0. \quad (2.10)$$

Portanto, a LKC com a LKT, permite a obtenção de um sistema linear com tantas equações quantas forem as correntes a serem calculadas. No caso das Figuras 11 e 12 tem-se a formação de um sistema linear (2.11) que poderá ser resolvido por métodos algébricos. Ao final do cálculo, caso o resultado da intensidade da corrente obtido for negativo, significa que o sentido convencional da corrente é contrário ao sentido adotado em cada ramo.

$$\begin{cases} I_1 + I_2 = I_3 \\ -V_1 + (R_1 \cdot I_1) + (R_5 \cdot I_3) + (R_3 \cdot I_1) = 0 \\ -V_2 + (R_2 \cdot I_2) + (R_5 \cdot I_3) + (R_4 \cdot I_2) = 0 \end{cases} \quad (2.11)$$

## 2.6 ASSOCIAÇÕES DE RESISTORES

Os sistemas de iluminação como os residenciais ou de uma árvore de Natal normalmente são formados por  $N$  lâmpadas conectadas em série ou em paralelo [...]. A conexão em série é fácil de ser fabricada, porém raramente é usada na prática por pelo menos duas razões. Em primeiro lugar, ela é menos confiável; quando uma lâmpada falha, todas as demais ficam apagadas. Em segundo, sua manutenção é mais difícil; quando uma lâmpada apresenta defeito, é preciso testar todas elas para ver qual está com defeito (ALEXANDER; SADIKU, 2013, p.52).

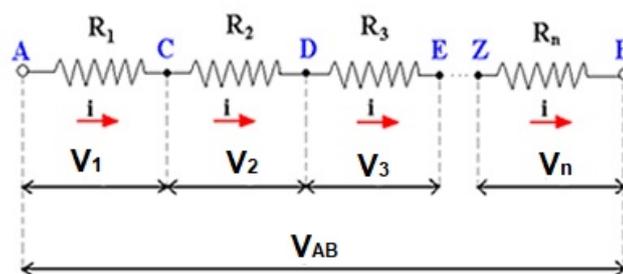
Assim como foi mencionado por Alexander e Sadiku (2013), a associação de resistores pode ser opcional ou não. Contudo, em alguns casos práticos, é comum precisar de uma resistência maior ou menor do que a já existente, isto é, apenas um resistor não é o suficiente para suportar a intensidade da corrente elétrica fornecida, sendo assim, torna-se necessário associar resistores, de modo a atingir o objetivo desejado (GUIMARÃES, 2016).

Os resistores podem ser associados em série, em paralelo ou realizar a combinação de ambas, caracterizado como associação mista. A associação de resistores, matematicamente falando, equivale a substituir todos os resistores relacionados por um único resistor que produza o mesmo efeito, isto é, que esteja submetido a mesma diferença de potencial e mesma intensidade de corrente elétrica da associação, denominada como resistência equivalente (BONJORNO, 2016).

### Associação em série

A associação em série (Figura 13) é caracterizada como a ligação de resistores, por um condutor elétrico, um em seguida do outro, de modo que eles sejam percorridos pela mesma corrente elétrica (BONJORNO, 2016).

Figura 13 – Associação em série.



**FONTE:** Disponível em:

<<https://mundoeducacao.uol.com.br/fisica/propriedades-associacao-resistores-serie.htm>>. Acesso em: 17, fev. 2021

Esse tipo de associação possui algumas características, como:

- A intensidade da corrente elétrica é a mesma em todos os resistores envolvidos na associação, pois eles estão interligados em sequência, um em seguida do outro;
- A diferença de potencial, isto é, a tensão na associação é igual à soma das tensões de cada resistor, pois, a diferença de potencial de cada resistor é proporcional a sua resistência. Logo, a situação descrita será expressa da seguinte maneira:

$$V_{total} = V_1 + V_2 + \dots + V_n \quad (2.12)$$

onde  $V_1, V_2, \dots, V_n$  são as tensões de cada resistor;

- A resistência equivalente ( $R_{eq.}$ ), em função dos valores da resistência na associação, é dada pela seguinte expressão:

$$R_{eq.} = R_1 + R_2 + \dots + R_n \quad (2.13)$$

com  $R_1, R_2, \dots, R_n$  representando a resistência de cada resistor (BONJORNO, 2016).

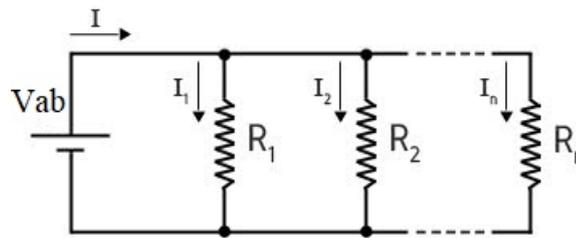
### Associação em paralelo

Na associação em paralelo dois ou mais resistores estão ligados por um ponto comum e são submetidos à mesma tensão. Esse tipo de associação é comumente observado em projetos elétricos, no caso em que se queira acender ou apagar uma lâmpada de um mesmo ambiente sem interferir no funcionamento das demais. Casos semelhantes a este, em que dois dispositivos ou mais estão submetidos a mesma diferença de potencial, estão em associação em paralelo (GUIMARÃES, 2016).

Assim como na associação em série a associação em paralelo (Figura 14) tem algumas características básicas (BONJORNO, 2016), como:

- A tensão elétrica ( $V$ ) é a mesma para todos os resistores ligados aos mesmos terminais.

Figura 14 – Associação em paralelo.



**FONTE:** Disponível em: <<https://images.app.goo.gl/JtrK4chbx4SxR3es7>>. Acesso em: 17, fev. 2021

- A intensidade da corrente elétrica na associação ( $I_{total}$ ) é igual ao somatório das intensidades de corrente elétrica em cada resistor  $I_1, I_2, \dots, I_n$ . Essa situação pode ser interpretada pela seguinte expressão matemática:

$$I_{total} = I_1 + I_2 + \dots + I_n. \quad (2.14)$$

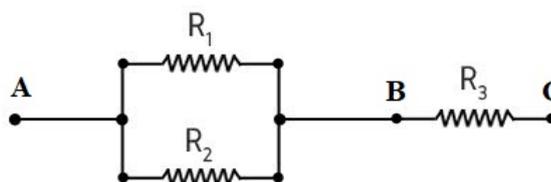
- No caso de  $n$  resistores associados em paralelo  $R_1, R_2, \dots, R_n$ , aplicando a 1ª lei de Ohm em cada resistor, lei esta discutida na Subsecção 2.5.1, a resistência equivalente é dada pela seguinte expressão:

$$\frac{1}{R_{eq.}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}. \quad (2.15)$$

### Associação mista

A associação mista (Figura 15) é a combinação das associações em série e em paralelo. Nesta associação também é possível substituir por um resistor, denominado como resistência equivalente ( $R_{eq.}$ ), que isoladamente equivale ao conjunto. A substituição acontece por partes, até reproduzir um único resistor equivalente à associação (GUIMARÃES, 2016).

Figura 15 – Associação mista.



**FONTE:** Disponível em: <<https://images.app.goo.gl/UQfmYELMHGZRddGZ9>>. Acesso em: 17, fev. 2021

## 2.7 INSTRUMENTOS DE MEDIÇÃO

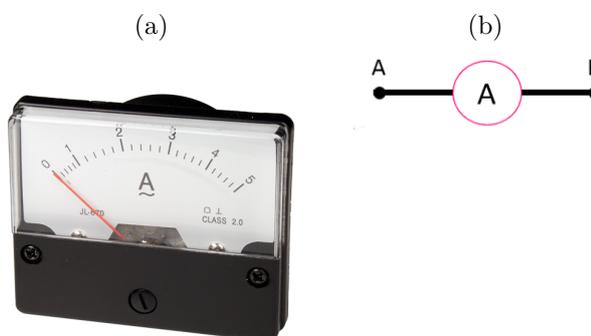
Através das informações teóricas especificadas anteriormente, já temos informações o suficiente para determinar por meio de cálculos matemáticos a intensidade da corrente

elétrica, a tensão elétrica e a resistência elétrica de determinados circuitos. No entanto, para facilitar na busca desses resultados, é comum utilizar instrumentos que medem essas grandezas, sem a necessidade de realizar cálculos matemáticos, ou até mesmo, serem utilizados para comparar os resultados obtidos matematicamente.

Dentre os principais instrumentos de medição temos:

- **Amperímetro:** instrumento (Figura 16a) de medição utilizado para medir a intensidade da corrente elétrica. Para identificar a intensidade da corrente elétrica em um trecho ou elemento qualquer (gerador, receptor ou resistor) do circuito, é necessário conectar os terminais do aparelho em série com o trecho considerado, de modo, que a corrente passe por ele. Porém, quando o amperímetro é incluído, ocorre uma pequena alteração na corrente elétrica do circuito, isso acontece porque assim como todo condutor o amperímetro possui uma pequena resistência elétrica interna. Diante disso, um bom amperímetro deve ter resistência interna baixa o suficiente quando comparada à resistência do circuito ou elemento medido, de modo que interfira o mínimo possível na medição. Durante a resolução de exercícios o amperímetro pode ser simbolizado assim como na Figura 16b (BISCUOLA; BOAS; DOCA, 2016).

Figura 16 – Amperímetro.

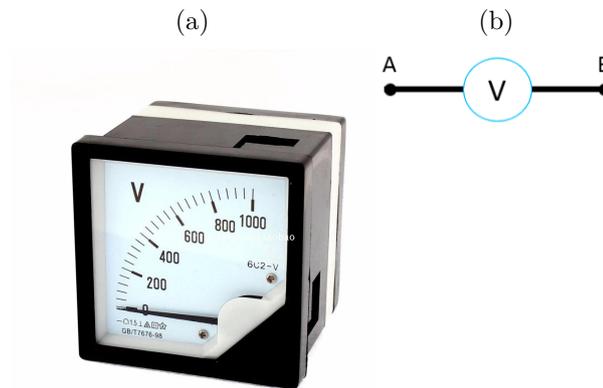


**FONTE:** Disponível em: <https://images.app.goo.gl/nbUohiYx3Qjv1Vqo9>.

Acesso em: 29, mar. 2021

- **Voltímetro:** instrumento (Figura 17a) utilizado para medir a intensidade da tensão elétrica, diferença de potencial elétrico (d.d.p.) em um elemento qualquer (gerador, receptor ou resistor) do circuito. Diferente do amperímetro, para medir a d.d.p. entre dois pontos do circuito, os terminais do voltímetro são conectados em paralelo. A inserção do voltímetro também acarreta uma pequena alteração no circuito, porém, desta vez na diferença de potencial entre os dois pontos em que os terminais são ligados. Assim, para ocorrer a menor alteração possível na d.d.p., do elemento medido, é ideal que o voltímetro tenha resistência interna elevada, muito maior que a resistência que está em paralelo com ele. Nos esquemas de circuitos elétricos o

Figura 17 – Voltímetro.



**FONTE:** Disponível em: <https://images.app.goo.gl/9VjaptECNH2EiiJq6>. Acesso em: 29, mar. 2021

voltímetro é simbolizado assim como apresenta a Figura 17b (BISCUOLA; BOAS; DOCA, 2016).

- **Multímetros:** instrumento de medição (Figura 18) que serve para medir corrente, tensão e resistência. Para isso, deve-se posicionar a chave seletora na posição da grandeza que se quer medir, bastando apenas conectar os terminais de forma adequado, de acordo com cada grandeza desejada (BISCUOLA; BOAS; DOCA, 2016).

Figura 18 – Multímetro.



**FONTE:** Disponível em: <https://images.app.goo.gl/m5aiFRUpjguxJa6j7>. Acesso em: 29, mar. 2021

## 2.8 SISTEMAS LINEARES

Assim como foi mencionado anteriormente no Capítulo 1, introdução deste trabalho, diversas situações problemas de engenharia podem ser resolvidos através da análise linear, a maioria são reduzidos em sistemas de equações lineares com métodos diversos de resolução. Deste modo, nesta parte do trabalho será visto de forma sistematizada alguns conceitos

referentes a Sistema de Equações Lineares e sua forma matricial, que serão de fundamental importância para o entendimento do trabalho.

As equações lineares são escritas da forma  $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$ , onde  $a_1, a_2, \dots, a_n$  são os coeficientes pertencentes ao conjunto dos reais,  $x_1, x_2, \dots, x_n$  são as incógnitas e  $b$  o termo independente pertencente aos reais. Em uma equação linear pode haver uma ou mais incógnitas e os expoentes das incógnitas são sempre de grau 1.

As soluções de uma equação linear são dadas por sequências ordenadas de números reais  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  tais que quando substituídos na equação  $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$ , e após efetuadas as operações indicadas, obtém-se uma sentença verdadeira, isso implica que a igualdade  $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \dots + a_n\alpha_n = b$  é verdadeira.

Portanto, um Sistema de Equações Lineares é definido como um conjunto de  $m$  equações lineares e  $n$  incógnitas. Abaixo segue a representação de um sistema linear  $m$  por  $n$ :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \dots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (2.16)$$

Diz-se que um vetor com  $n$  entradas do tipo  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  é solução do sistema linear (2.16), com  $n$  incógnitas, se satisfaz cada uma das  $m$  equações do sistema.

A fim de facilitar a resolução do sistema, o mesmo pode ser associado a matrizes cujos elementos são os coeficientes das equações que o forma.

A matriz (2.17) obtida somente com os coeficientes das incógnitas  $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$  é chamada de *matriz incompleta*

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

e a matriz (2.18) obtida a partir da matriz (2.17) acrescentado uma coluna formado pelos termos independentes de cada uma das equações do sistema,  $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ , é chamada de *matriz completa* ou *matriz aumentada*.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}. \quad (2.18)$$

Utilizando a matriz incompleta de um sistema linear e o processo de multiplicação entre matrizes, é possível representar o sistema na forma matricial (2.19):

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}. \quad (2.19)$$

Podemos simplificar a forma matricial (2.19) com a seguinte expressão:

$$A \cdot X = B, \quad (2.20)$$

onde  $A$  refere-se à matriz incompleta,  $X$  refere-se a segunda matriz (matriz coluna) que é formada pelas incógnitas do sistema ( $x_1, x_2, \dots, x_n$ ) e  $B$  equivale à última matriz (matriz coluna) que é formada pelos termos independentes ( $b_1, b_2, \dots, b_n$ ) de cada equação linear.

É importante ressaltar que antes de adotar um método matemático numérico para determinar a solução do sistema, devemos discutir sobre a existência ou não de solução, e caso houver, verificar se a solução é única. Para determinar se o sistema (2.16) é possível ou impossível, podemos utilizar o processo de escalonamento ou calcular o determinante da matriz obtida pelos coeficientes das incógnitas (matriz incompleta (2.17)).

No processo de escalonamento, buscamos escrever cada linha do sistema (2.16), isto é, cada equação com um número de incógnitas menor que a linha anterior, e se possível deixar a última equação com apenas uma incógnita. Semelhante ao sistema (2.21).

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1,n-1}x_{n-1} + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \dots + a_{2,n-1}^{(1)}x_{n-1} + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\ a_{33}^{(2)}x_3 + \dots + a_{3,n-1}^{(2)}x_{n-1} + a_{3n}^{(2)}x_n = b_3^{(2)} \\ \vdots \\ a_{n-1,n-1}^{(n-1)}x_{n-1} + a_{n-1,n}^{(n-1)}x_n = b_{n-1}^{(n-1)} \\ a_{n,n}^{(n-1)}x_n = b_n^{(n-1)} \end{array} \right. \quad (2.21)$$

Ao observarmos a última equação do sistema escalonado (2.21), identificamos algumas informações quanto a solução do mesmo. Neste caso, teremos as seguintes possibilidades:

1. Se a última linha do sistema for uma equação do 1º grau, isto é,  $ax = b$ , com  $a$  e  $b \in \mathbb{R}$ , podemos ter duas situações:
  - o coeficiente da incógnita ser diferente de zero ( $a \neq 0$ ), neste caso, podemos afirmar que o sistema é possível e determinado (SPD);

- o coeficiente da incógnita ser igual a zero ( $a = 0$ ), neste caso devemos verificar qual o valor do termo independente ( $b$ ): caso o termo seja igual a zero ( $b = 0$ ), teremos um sistema possível e indeterminado (SPI), pois, qualquer valor para incógnita ( $x$ ) irá satisfazer a equação; caso o termo independente seja diferente de zero ( $b \neq 0$ ), o sistema será impossível (SI), uma igualdade falsa, pois, nunca encontraremos um número que multiplicado por zero resulte em um número diferente de zero.
2. Se a última linha do sistema for uma igualdade verdadeira sem incógnitas ( $a = b$ ) o sistema será possível e indeterminado (SPI);
  3. Se a última linha do sistema for uma igualdade falsa sem incógnitas ( $a \neq b$ ), o sistema será impossível (SI)

Outra forma de determinar se o sistema é possível ou impossível seria através do determinante  $D$  da matriz incompleta (2.17):

- Se o determinante for diferente de zero  $D \neq 0$ , o sistema é possível e determinado (SPD);
- Se o determinante for igual a zero  $D = 0$ , o sistema poderá ser possível e indeterminado (SPI) ou impossível (SI).

O sistema linear pode ser classificado também quanto ao número de soluções, possível ou impossível. Os sistemas possíveis são divididos em duas categorias: os sistemas possíveis e determinados, quando admitem apenas uma única solução, ou os sistemas possíveis e indeterminados, quando admitem infinitas soluções. Já os sistemas impossíveis são aqueles que não admitem nenhuma solução.

Em resumo, representando esquematicamente a situação descrita acima, temos:

$$\text{Sistema linear} \left\{ \begin{array}{l} \bullet \text{ Possível} \left\{ \begin{array}{l} \bullet \text{ Determinado (SPD)} \\ \bullet \text{ Indeterminado (SPI)} \end{array} \right. \\ \bullet \text{ Impossível (SI)} \end{array} \right.$$

A solução de um conjunto de equações se tornam mais difíceis quando as equações não são lineares, mas, na maioria das aplicações são envolvidas apenas equações lineares e, geralmente, quando o sistema é de grande porte são utilizados métodos numéricos para obter o melhor resultado (FRANCO, 2006).

Os métodos numéricos adotados para solução de equações lineares são divididos em dois grupos: Métodos exatos ou diretos e os Métodos iterativos. A escolha para definir

qual método usar para determinar a solução do sistema do tipo  $A \cdot X = B$  vai depender de características e propriedades da matriz  $A$  (matriz incompleta 2.17) formada pelos coeficientes que acompanham as incógnitas.

Os métodos exatos ou também conhecido por alguns autores como métodos diretos, são os métodos em que após um número finito de operações em cada etapa, encontra-se a solução exata do sistema, isso se não fossem os erros de arredondamento. São exemplos de métodos exatos: a Regra de Cramer, o Método da Eliminação de Gauss (ou triangulação) e o Método de Jordan.

Já os métodos iterativos são aqueles nos quais a solução do sistema é determinado através de etapas, de modo que a cada etapa obtenha uma aproximação para a solução do sistema, sendo caracterizado como um processo infinito e convergente para a solução exata do sistema.

Assim, os métodos exatos em princípio, ou seja desprezando os erros de arredondamento, produzirão uma solução, se houver, em um número finito de operações aritméticas. Um método iterativo, por outro lado, iria requerer em princípio, um número infinito de operações aritméticas para produzir a solução exata. Assim, um método iterativo tem um erro de truncamento e o exato não tem. Por outro lado, em sistemas de grande porte os erros de arredondamento de um método exato podem tornar a solução sem significado, enquanto que nos métodos iterativos os erros de arredondamento não se acumulam. Veremos entretanto, que ambos são úteis, ambos têm vantagens e limitações (FRANCO, 2006, p.111).

Deste modo, para resolver o um sistema de equações lineares de grande porte é necessário utilizar um método matemático adequado de acordo com a situação problema.

Os métodos de resolução de sistemas lineares mais utilizados são: Gauss-Jordan; Matriz Inversa; Regra de Cramer, Substituição, Comparação e Soma. Contudo, os que aplicaremos em nosso estudo são os métodos de soluções dado pela Regra de Cramer e o Método de Gauss.

### 2.8.1 Resolução de Sistemas lineares - Regra de Crammer

Assim como foi mencionado anteriormente, existem outros métodos numéricos que podem ser utilizados para determinar a solução de um sistema de equações lineares. Contudo, descreveremos a seguir o Método de Cramer, também conhecido como Regra de Cramer, método numérico que será utilizado para a solução do sistema linear formado a partir da análise do circuito elétrico.

Gabriel Cramer <sup>6</sup>, foi um grande matemático suíço, nascido em Genebra, em 31 de julho de 1704, e faleceu em Bangnols, na França, em 4 janeiro de 1752. Adquiriu o

<sup>6</sup> Biografia de Gabriel Cramer disponível em: <[http://clubes.obmep.org.br/blog/b\\_gabriel-cramer/](http://clubes.obmep.org.br/blog/b_gabriel-cramer/)>

título de doutor pela Universidade de Genebra com uma tese sobre a teoria do som. Logo mais tarde se tornou professor de Matemática e de Filosofia na mesma Universidade. Suas principais contribuições se encontram a maioria na área da Matemática relacionados a Álgebra e a Geometria. Escreveu um livro que é um tratado sobre curvas intitulado *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques* publicado em 1750. É neste livro que se encontra o método numérico para resolver sistemas lineares de equações, que mais tarde ficou conhecido como Regra de Cramer.

A Regra de Cramer, é definido como um método de algoritmos diretos. Neste método, os valores das incógnitas do sistema de equações são determinados por meio da razão entre dois determinantes, isto é:

Seja um sistema linear  $A \cdot X = B$ , em que a quantidade de equações é igual ao número de incógnitas ( $n \times n$ ), considere  $D$  como o determinante da matriz  $A$ ,

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (2.22)$$

e  $D_{x_1}, D_{x_2}, D_{x_3}, \dots, D_{x_n}$  (2.8.1) os determinantes das matrizes obtidas de  $A$ , trocando as colunas dos coeficientes de  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  pela coluna dos termos independentes  $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$ , respectivamente.

$$D_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, D_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \dots, D_{x_n} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

## Discussão do Sistema

a) Caso  $D \neq 0$  então o sistema será possível e determinado (SPD) e a única solução é dada por:

$$x_1 = \frac{D_{x_1}}{D}, \quad x_2 = \frac{D_{x_2}}{D}, \quad x_3 = \frac{D_{x_3}}{D}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{D_{x_n}}{D}; \quad (2.23)$$

b) Caso  $D = 0$  e  $D_{x_1} = D_{x_2} = \dots = D_{x_n} = 0$  então o sistema terá infinitas soluções, ou seja, o sistema será SPI;

c) Caso  $D = 0$  e pelo menos algum dos determinantes  $D_{x_i} \neq 0$ , então o sistema não terá solução, ou seja, será SI.

Portanto, as Equações (2.23) são denominadas *Regra de Cramer* para resolução de sistemas de equações lineares.

Neste caso, para um sistema com  $n$  equações e  $n$  variáveis, será necessário resolver  $n + 1$  determinantes. Caso  $n$  seja um número grande esse método se torna inviável sem o auxílio computacional.

## 2.8.2 Resolução de Sistemas lineares - Método de Eliminação de Gauss

Além da Regra de Cramer, tem-se também o método numérico conhecido como Eliminação de Gauss ou simplesmente Método de Gauss.

Este método numérico recebeu este nome devido a Johann Carl Friedrich Gauss<sup>7</sup> que nasceu em 30 de abril de 1777 em Brunswick, na Alemanha, e faleceu em 1855 com 78 anos de idade. cursou matemática na Universidade de Göttingen durante três anos, iniciou em 1795 e encerrou em 1798, logo depois realizou seu doutorado na Universidade de Helmstadt. Gauss, foi uma das principais referências na Matemática, na Geometria, na Física e na Astronomia. Desde pequeno já apresentava fatos surpreendentes, pois, foi capaz de apreender a ler e a somar sozinho. Dentre suas principais criações, em 1833, com ajuda de seu colega Whihelm Weber, construiu o primeiro telégrafo elétrico, que era na época utilizado para estabelecer comunicação entre sua casa e o Observatório de Göttingen, local onde trabalhou como diretor durante 40 anos.

O Método de Gauss, equivale a transformar o sistema linear do tipo  $A \cdot X = B$ , em um sistema triangular superior equivalente (sistema triangular que possui a mesma solução). Para isso são realizadas uma sequência de operações elementares (aplicação repetida de operações matemáticas) de modo que a solução do sistema original não é alterada (FRANCO, 2006). Neste caso, para obter a solução de um sistema linear  $n \times n$  deverão ser realizadas  $(n - 1)$  passos.

Considerando um sistema linear  $A \cdot X = B$  as etapas a serem realizadas para utilizar o método de Gauss, são:

- **Primeira etapa:** Consiste em determinar a matriz completa ou aumentada do sistema linear original.
- **Segunda etapa:** Consiste na triangulação da matriz aumentada. Nesta etapa serão realizadas diversas operações elementares nas linhas da matriz aumentada até obter uma matriz triangular superior. Para obter a matriz triangular, serão realizadas uma sequência de substituições de cada linha pela diferença entre essa mesma linha e uma outra linha multiplicada por uma constante diferente de zero.
- **Terceira etapa:** Etapa em que se determina a solução de  $A \cdot X = B$  através de substituições regressivas nas equações anteriores, isto é, a solução é obtida por

<sup>7</sup> Biografia de Carl Friedrich Gauss disponível em: <[https://www.ebiografia.com/carl\\_friedrich\\_gauss/](https://www.ebiografia.com/carl_friedrich_gauss/)>

retrosubstituição, determinamos o valor de  $x_n$  na última equação; substituímos esse valor na penúltima equação e determinamos o valor de  $x_{n-1}$  e assim por diante. Esse processo ocorre devido à solução do último componente ( $x_n$ ) já estar determinado.

Seja o sistema linear  $A \cdot X = B$ . Sem perda de generalidade podemos supor que  $a_{11} \neq 0$ . Seguindo as etapas sugeridas, temos:

A princípio determinar a matriz aumentada. Após montar a matriz aumentada, deve-se zerar os elementos da primeira coluna abaixo da diagonal, isso significa que devemos eliminar a incógnita  $x_1$  da 2ª, 3ª, ...,  $n$ ª equações. Para isso serão realizadas sucessivas substituições do tipo:

- Substituir na segunda equação o resultado obtido pela diferença entre a segunda e a primeira equação multiplicada pela constante

$$\frac{a_{21}}{a_{11}},$$

- Substituir na terceira equação o resultado obtido pela diferença entre a terceira e a primeira equação multiplicada pela constante

$$\frac{a_{31}}{a_{11}},$$

isso sucessivamente, de modo que ao chegar a  $n$ ª equação realize o mesmo processo;

- Na  $n$ ª linha substitua a equação pelo resultado obtido da diferença entre a  $n$ ª equação e a primeira equação multiplicada pela constante

$$\frac{a_{n1}}{a_{11}}.$$

Após realizado o processo anterior, obtém-se a seguinte matriz (2.24):

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ & a_{22}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & a_{n2}^{(1)} & \dots & a_{nn}^{(1)} & b_n^{(1)} \end{array} \right] \quad (2.24)$$

onde

$$\begin{cases} a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - a_{1j} \frac{a_{i1}}{a_{11}}, \\ b_i^{(1)} = b_i - b_1 \frac{a_{i1}}{a_{11}}, \end{cases} \quad (2.25)$$

com  $i = 2, 3, \dots, n$  e  $j = 1, 2, \dots, n$ .

O próximo passo a ser realizado na matriz obtida com as operações realizadas no passo anterior é zerar os elementos da segunda coluna abaixo da diagonal; para isso

devemos eliminar a incógnita  $x_2$  das 3ª, 4ª, ...,  $n$ ª equações. Com isso, faremos o mesmo processo aplicado no primeiro passo, porém, dessa vez iniciaremos pela diferença entre a 3ª e 2ª equação multiplicada por

$$\frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}.$$

Nessa etapa do método todas as operações serão realizadas em função da segunda linha da matriz obtida no primeiro passo. Contudo, esse processo só será possível se  $a_{22}^{(1)} \neq 0$ . Mas, caso  $a_{22}^{(1)} = 0$  devemos reescrever a linha e realizar as operações com as demais linhas. Porém, nas próximas linhas caso o próximo coeficiente também seja zero, ou até mesmo mais coeficiente da equação também seja zero, podemos permutar as linhas de modo que melhor se adéque no formato triangular superior.

O mesmo deverá ser realizado para as demais linhas, inclusive com a  $n$ ª linha (equação), substituindo-a pelo resultado obtido pela diferença entre a  $n$ ª e 2ª equação multiplicada por

$$\frac{a_{n2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}.$$

Feito as operações acima mencionadas, obtemos a seguinte matriz (2.26):

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ & & a_{33}^{(2)} & \dots & a_{3n}^{(2)} & b_3^{(2)} \\ & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & a_{n3}^{(2)} & \dots & a_{nn}^{(2)} & b_n^{(2)} \end{array} \right] \quad (2.26)$$

onde

$$\begin{cases} a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - a_{2j}^{(1)} \frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}, \\ b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - b_2^{(1)} \frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}, \end{cases} \quad (2.27)$$

com  $i = 3, 4, \dots, n$  e  $j = 2, 3, \dots, n$ .

Realizando sucessivos passos semelhantes a esses dois anteriores, e sempre repetindo o processo como se não existissem as linhas anteriores que já foram operadas, chegaremos ao  $(n - 1)$ º passo. Neste passo deve-se zerar o elemento da  $(n - 1)$ ª coluna abaixo da diagonal, isso equivale a eliminar todas as incógnitas  $x_{n-1}$  da  $(n)$ ª linha (equação). Para isso, substituímos a  $(n)$ ª equação pelo resultado da diferença entre a  $(n)$ ª e a  $(n - 1)$ ª equação multiplicada por

$$\frac{a_{n,n-1}^{(n-2)}}{a_{n-1,n-1}^{(n-2)}}.$$

Após realizados os cálculos necessários na ( $n^a$ ) linha, obtemos a seguinte matriz (2.8.2):

$$\left[ \begin{array}{cccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} & b_1 \\ & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \dots & a_{2,n-1}^{(1)} & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ & & a_{33}^{(2)} & \dots & a_{3,n-1}^{(2)} & a_{3n}^{(2)} & b_3^{(2)} \\ & & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & & a_{n-1,n-1}^{(n-1)} & a_{n-1,n}^{(n-1)} & b_{n-1}^{(n-1)} \\ & & & & & a_{n,n}^{(n-1)} & b_n^{(n-1)} \end{array} \right].$$

Portanto, o sistema triangular obtido, equivalente ao sistema original será dado por (2.28)

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1,n-1}x_{n-1} + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \dots + a_{2,n-1}^{(1)}x_{n-1} + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\ a_{33}^{(2)}x_3 + \dots + a_{3,n-1}^{(2)}x_{n-1} + a_{3n}^{(2)}x_n = b_3^{(2)} \\ \vdots \\ a_{n-1,n-1}^{(n-1)}x_{n-1} + a_{n-1,n}^{(n-1)}x_n = b_{n-1}^{(n-1)} \\ a_{n,n}^{(n-1)}x_n = b_n^{(n-1)} \end{array} \right. \quad (2.28)$$

Conseqüentemente, a estratégia adotada para determinar a solução do sistema (2.28) será por meio da substituição regressiva das equações anteriores.

### Discussão do Sistema

- a) Se  $a_{n,n}^{(n-1)} = 0$  e  $b_n^{(n-1)} \neq 0$  o sistema não possui solução, ou seja, o sistema é impossível (SI);
- b) Se  $a_{n,n}^{(n-1)} = 0$  e  $b_n^{(n-1)} = 0$  o sistema possui infinitas soluções, ou seja, é possível e indeterminado (SPI);
- c) Se  $a_{n,n}^{(n-1)} \neq 0$  o sistema possui solução única, ou seja, é possível e determinado (SPD).

Caso  $a_{n,n}^{(n-1)} \neq 0$ , calcula-se  $x_n$ , a partir da última equação, da seguinte forma:

$$x_n = \frac{b_n^{(n-1)}}{a_{n,n}^{(n-1)}}.$$

Sabendo o valor de  $x_n$  calcula-se  $x_{n-1}$  substituindo  $x_n$  na penúltima equação e isolando o valor de  $x_{n-1}$ . Sabendo o valor de  $x_n$  e  $x_{n-1}$ , substitui esses valores na antepenúltima equação e calcula-se o valor de  $x_{n-2}$ . Realizando recursivamente essas contas com as demais equações é possível calcular os valores de  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

Portanto, assim como a Regra de Cramer o Método de Gauss se torna complexo e propício a erros a medida que aumenta a quantidade de equações que formam o sistema, sendo necessário nestes casos auxílio computacional.

### 3 MODELAGEM MATEMÁTICA DE CIRCUITOS ELÉTRICOS

Analisar o circuito elétrico a fim de determinar a corrente e/ou a tensão nos componentes que compõem o circuito, geralmente, envolvem a modelagem e solução de equações lineares simultâneas, principalmente quando estes possuem mais de uma malha e/ou quando as informações fornecidas pelo circuito não são o suficiente para determinar a intensidade e o sentido da corrente em cada ramo, ou determinar o valor da corrente elétrica que circula em cada componente.

Diante de situações como estas, que a matemática se insere, de modo a mostrar a funcionalidade de métodos e a modelagem de conteúdos que são geralmente estudados de forma sistemática ou apenas de forma dirigida aos teoremas e definições.

No caso de circuitos elétricos, a modelagem matemática da situação descrita acontece por meio de sistema de equações lineares, asseguradas pela lei de Ohm e pelas leis de Kirchhoff.

Acredita-se que os resultados obtidos durante os cálculos fariam mais sentido para o aluno a medida que pudessem interligá-los a situações aplicáveis e principalmente quando é possível compará-los de forma experimental e/ou através de simulações computacionais.

Diante disso, a fim de mostrar a modelagem do método matemático utilizado, assim como a sistematização do circuito elétrico em sistemas lineares, como forma de apoio para a análise e comparação dos resultados obtidos nas aplicações que serão demonstradas adiante, foi utilizado um simulador *online*, uma espécie de laboratório virtual em que foram simulados os circuitos que serão modelados matematicamente.

Escolhemos como ferramenta para a simulação e modelagem computacional o laboratório virtual disponibilizado pelo *site* PhET *Interactive Simulations for Science and Math* <sup>1</sup>, da Universidade de Colorado Boulder. Uma ferramenta gratuita, *online* e de fácil acesso, sem a necessidade de cadastro, que fornece uma simulação do circuito de forma dinâmica e animada. Através do PhET foram analisados e comparados os dados obtidos por meio da modelagem matemática do circuito.

Portanto, neste capítulo apresentamos nas seções a seguir duas propostas de atividade, visando à análise a ser feita para a modelagem do circuito elétrico em sistema linear equivalente, para determinar a corrente ou tensão, e demonstramos duas aplicações da modelagem matemática em circuitos elétricos de duas e três malhas. Como método de resolução foram utilizados a Regra de Cramer e o Método de Eliminação de Gauss.

---

<sup>1</sup> Disponível no *site*: <<https://phet.colorado.edu>>

Estes métodos foram escolhidos a princípio devido ao seu fácil entendimento e a sua fácil ampliação para situações de sistemas com maiores números de incógnitas e equações. Porém, dependendo o número de equações é necessário o uso de *softwares*.

### 3.1 MODELAGEM MATEMÁTICA GENÉRICA PARA UM CIRCUITO ELÉTRICO

Dado um circuito elétrico com mais de uma malha, o método a ser realizado para o cálculo da intensidade da corrente elétrica em seus ramos é através da análise nodal ou por malha. Estes métodos são geralmente utilizados nos casos em que há varias fontes de tensão ou quando não é possível determinar a resistência equivalente de uma associação de resistores ligados em série e em paralelo (associações mistas).

“A análise nodal fornece um procedimento genérico para análise de circuitos usando tensões nodais como variáveis de circuitos”. Nesse processo de análise estamos interessados nas tensões em cada nó, o número de equações que deverão ser resolvidas simultaneamente geralmente é menor, pois, a regra consiste em encontrar as tensões nos nós (ALEXANDER; SADIKU, 2013, p. 71).

Para determinar as tensões nodais em um circuito com  $n$  nós sem fontes de tensão é necessário realizar as seguintes etapas (ALEXANDER; SADIKU, 2013):

1. Selecionar um nó como referência, geralmente o terra (Figura 19) do circuito, e atribuir tensões  $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$  aos  $n - 1$  nós restantes.

Figura 19 – Símbolos comuns para indicar um nó de referência.



FONTE: (ALEXANDER; SADIKU, 2013)

2. Aplicar a LKC aos  $n - 1$  nós que não são de referência. Usar a lei de Ohm para expressar as correntes nos ramos, assim como é apresentado pela equação (3.1):

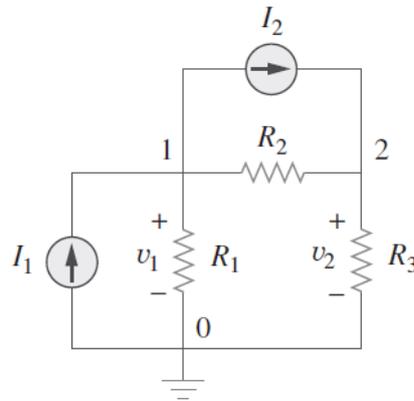
$$i = \frac{v_{maior} - v_{menor}}{R} \quad (3.1)$$

3. Resolver o sistema obtido para determinar as tensões nodais.

Como aplicação das etapas do método nodal, analisaremos o exemplo (Figura 20) trazido por Alexander e Sadiku (2013, p. 72) em seu livro.

O primeiro passo, observando a Figura 20, será selecionar um nó como nó referência. Sendo assim, escolhe arbitrariamente o nó chamado terra, pois, se supõe que ele

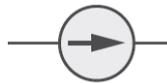
Figura 20 – Circuito elétrico.



FONTE: (ALEXANDER; SADIKU, 2013)

tenha um potencial nulo. Na Figura 20 o símbolo (Figura 21) representa uma fonte de corrente, elemento ativo que mantém uma corrente elétrica constante entre seus terminais independente da carga.

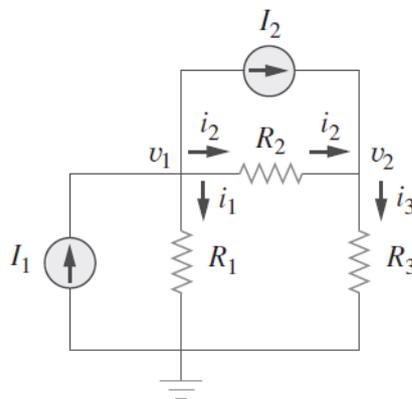
Figura 21 – Fonte de corrente.



FONTE: (ALEXANDER; SADIKU, 2013)

Após escolhido o nó referência, atribui tensões aos nós que não são de referência. Na Figura 20 o nó 0 é de referência ( $v = 0$ ) e os nós 1 e 2 são atribuídos, respectivamente, as tensões  $v_1$  e  $v_2$ . Lembrando que as tensões nodais são definidas em relação ao nó de referência.

Figura 22 – Circuito elétrico.



FONTE: (ALEXANDER; SADIKU, 2013)

O segundo passo será aplicar a LKC a cada um dos nós que não são de referência do circuito. Na Figura 22 foram acrescentados ao circuito  $i_1$ ,  $i_2$  e  $i_3$  como as correntes

que passam pelos resistores  $R_1$ ,  $R_2$  e  $R_4$ , respectivamente. Aplicando a LKC ao nó 1 e 2, temos, respectivamente,

$$I_1 = I_2 + i_1 + i_2 \quad (3.2)$$

$$I_2 + i_2 = i_3. \quad (3.3)$$

Em seguida, aplicamos a lei de Ohm para expressar as correntes desconhecidas  $i_1$ ,  $i_2$  e  $i_3$  como tensões nodais:

$$\begin{aligned} i_1 &= \frac{v_1 - 0}{R_1} \\ i_2 &= \frac{v_1 - v_2}{R_2} \\ i_3 &= \frac{v_2 - 0}{R_3}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Substituindo os resultados de  $i_1$ ,  $i_2$  e  $i_3$  (3.4) nas Equações (3.2) e (3.3), obtemos respectivamente

$$I_1 = I_2 + \frac{v_1}{R_1} + \frac{v_1 - v_2}{R_2}, \quad (3.5)$$

$$I_2 + \frac{v_1 - v_2}{R_2} = \frac{v_2}{R_3}. \quad (3.6)$$

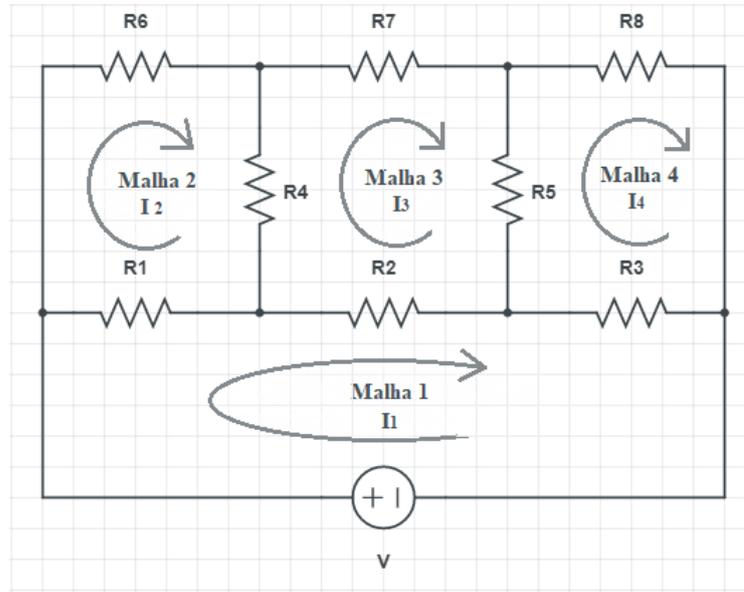
O terceiro passo no método nodal é determinar as tensões nodais. Neste caso, resolveremos as Equações (3.5) e (3.6), para isso pode ser utilizado qualquer método numérico.

Porém, esse método de análise nodal se torna mais complicado quando há uma fonte de tensão entre dois nós que não são referências, necessário neste caso uma análise específica:

- No caso em que a fonte de tensão está interligada entre dois nós, sendo um deles o nó de referência, então, atribuímos a tensão ao nó que não é de referência igual à fonte de tensão.
- No caso em que a fonte de tensão estiver conectada entre dois nós que não são de referência, aplicamos tanto a LKC como a LKT para determinar as tensões nodais.

Com relação à análise por malha, associa-se uma corrente para cada malha. Neste caso, em primeiro momento, identificamos as malhas do circuito e a cada malha atribui-se um sentido (horário ou anti-horário) para as correntes, assim como aparece na Figura 23. Por conveniência é preferível escolher o mesmo sentido de rotação para todas as correntes de cada malha, pois, facilitará na determinação dos termos da equação.

Figura 23 – Forma esquematizada do circuito de quatro malhas.



**FONTE:** Produzido no CircuitLab.

No caso do circuito apresentado na Figura 23, aplicaremos a análise por malha para identificarmos a intensidade das correntes em cada ramo.

Para os dispositivos que pertencem apenas a uma malha, a corrente é igual à corrente da própria malha. Já os dispositivos que se encontram entre duas malhas vizinhas, a corrente é igual à soma algébrica das correntes que passam nessas duas malhas.

Por esse método a LKC é garantida, basta apenas aplicar a regra das malhas para determinar as equações do sistema. Portanto, cada termo das equações do sistema é determinado a partir das diferenças de potencial entre cada seção do circuito em função das correntes de malha, assim como é observado na Figura 23 e é representado pelas equações (3.7), (3.8), (3.9) e (3.10):

$$\begin{aligned} \text{Malha 1 : } & -V + R_1(I_1 - I_2) + R_2(I_1 - I_3) + R_3(I_1 - I_4) = 0 \\ & (R_1 + R_2 + R_3)I_1 - R_1I_2 - R_2I_3 - R_3I_4 = V \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} \text{Malha 2 : } & R_1(I_2 - I_1) + R_6I_2 + R_4(I_2 - I_3) = 0 \\ & -R_1I_1 + (R_1 + R_6 + R_4)I_2 - R_4I_3 = 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} \text{Malha 3 : } & R_4(I_3 - I_2) + R_7I_3 + R_2(I_3 - I_1) + R_5(I_3 - I_4) = 0 \\ & -R_2I_1 - R_4I_2 + (R_4 + R_7 + R_2 + R_5)I_3 - R_5I_4 = 0 \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} \text{Malha 4 : } & R_5(I_4 - I_3) + R_8I_4 + R_3(I_4 - I_1) = 0 \\ & -R_3I_1 - R_5I_3 + (R_5 + R_8 + R_3)I_4 = 0. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Agrupando as equações (3.7), (3.8), (3.9) e (3.10), obtemos o sistema (3.11)

$$\begin{cases} (R_1 + R_2 + R_3)I_1 - R_1I_2 - R_2I_3 - R_3I_4 = V \\ -R_1I_1 + (R_1 + R_4 + R_6)I_2 - R_4I_3 = 0 \\ -R_2I_1 - R_4I_2 + (R_2 + R_4 + R_5 + R_7)I_3 - R_5I_4 = 0 \\ -R_3I_1 - R_5I_3 + (R_3 + R_5 + R_8)I_4 = 0 \end{cases} \quad (3.11)$$

No caso específico da Figura 23, como o circuito é composto por quatro malhas, obtemos 4 equações com 4 correntes de malhas.

Cada linha do sistema (3.11) corresponde a uma malha do circuito. Na soma algébrica dos termos, são consideradas negativas todas as fontes em que o sentido adotado para a corrente passe do eletrodo negativo para o positivo e consideradas positivas todas as fontes em que o sentido adotado para a corrente passe do eletrodo positivo para o negativo.

Agrupando os coeficientes, temos a forma matricial a seguir:

$$\begin{bmatrix} (R_1 + R_2 + R_3) & -R_1 & -R_2 & -R_3 \\ -R_1 & (R_1 + R_4 + R_6) & -R_4 & 0 \\ -R_2 & -R_4 & (R_2 + R_4 + R_5 + R_7) & -R_5 \\ -R_3 & 0 & -R_5 & (R_3 + R_5 + R_8) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Por fim, de forma resumida, podemos concluir que a forma matricial foi obtida calculando primeiro as tensões nos nós do circuito e aplicando a regra das malhas. Consequentemente, as correntes de malha  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$  e  $I_4$  são a solução simultânea das equações do sistema (3.11) que podem ser obtidas através de métodos numéricos. Quanto a tensão elétrica de cada elemento é determinado a partir da lei de Ohm.

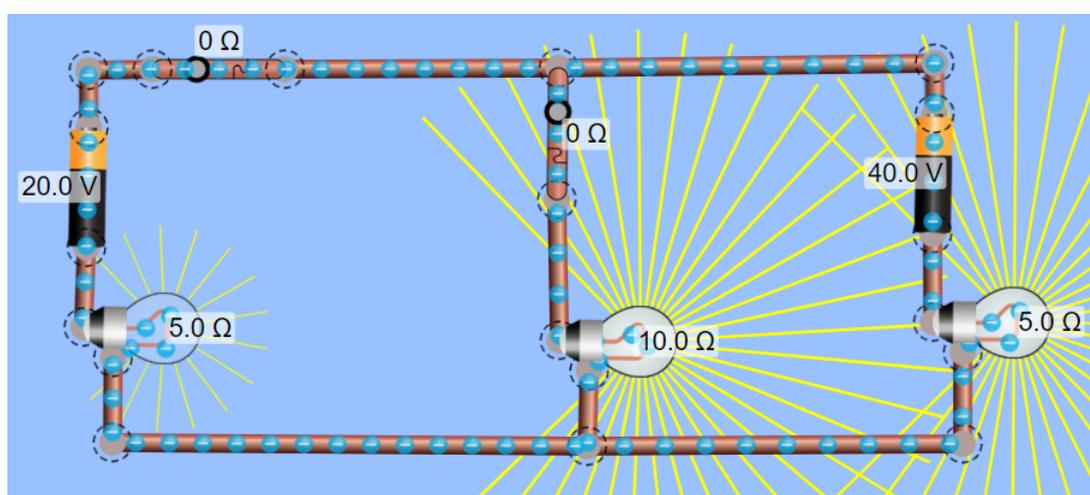
## 3.2 APLICAÇÕES

O uso da Álgebra Linear, em especial aplicações de sistemas lineares, não se restringe apenas nos estudos de circuitos elétricos. Muitos outros trabalhos já foram realizados destacando essa proximidade dos métodos adotados para situações problemas em que fosse possível simplificar em sistemas lineares e que suas soluções fossem obtidas por métodos numéricos. Contudo, nas subsecções a seguir sugerimos duas aplicações e em cada aplicação optamos em usar o método de análise do circuito por malha, pois, consideramos a forma de determinar as equações, assim como a intensidade das correntes, mais fáceis e pontuais do que o método nodal.

### 3.2.1 Aplicação 1

Como sugestão de primeira problematização para que ocorra a aplicação da modelagem matemática, pensou-se em utilizar um circuito elétrico que fosse de fácil entendimento e fornecesse uma situação prática da situação problema apresentada. A partir desse princípio, imagine uma situação em que se queira analisar matematicamente a intensidade da corrente elétrica que passaria pelo condutor de um circuito elétrico formado por três lâmpadas e duas fontes geradoras de energia, modelado de forma computacional, assim como é apresentado na Figura 24, mas, que facilmente poderia ser convertido para uma situação real.

Figura 24 – Circuito de duas malhas.



FONTE: PHET - *Interactive Simulations*

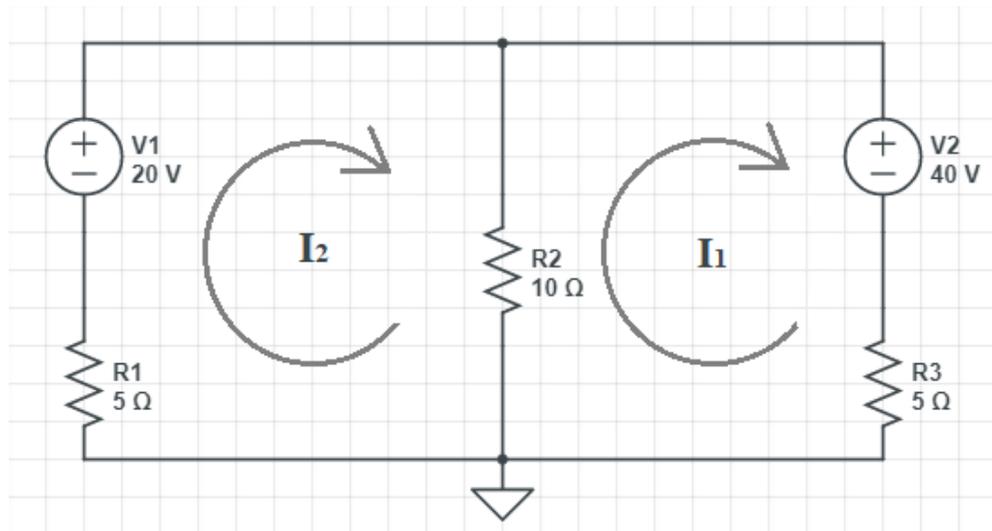
No circuito da Figura 24 vamos identificar a intensidade da corrente de cada malha através da análise por malha.

O circuito proposto (Figura 24) é composto por duas fontes geradoras de energia contínua (simbolizados pelas pilhas), lâmpadas simbolizando os receptores resistivos e interruptores para facilitar a análise simultânea do circuito com relação à variação da corrente em cada ramo e/ou para a análise da potência em cada lâmpada, podendo observar o que ocorre com as lâmpadas caso a intensidade da corrente seja aumentada ou diminuída.

Dado a situação problema acima, o primeiro passo a ser adotado é identificar os elementos e características do circuito. Após identificarmos os nós, ramos e malhas no circuito, atribuímos a cada um dos ramos um sentido arbitrário para a corrente  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$ . Em seguida escolhemos um sentido de percurso para cada uma das malhas, sentido este que nos auxiliará quanto ao sinal atribuído a cada queda de tensão, assim como é ilustrado na Figura 25.

No primeiro passo, obtemos as correntes de malha aplicando a LKT. Para a malha

Figura 25 – Forma esquematizada do circuito de duas malhas.



FONTE: Produzido no CicutLab.

1, temos

$$\begin{aligned} \text{Malha 1 : } -20 + 10(I_2 - I_1) + 5I_2 &= 0 \\ -10I_1 + 15I_2 &= 20, \end{aligned} \quad (3.12)$$

e para a malha 2,

$$\begin{aligned} \text{Malha 2 : } 40 + 5I_1 + 10(I_1 - I_2) &= 0 \\ 15I_1 - 10I_2 &= -40. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Com isso, a partir das Equações (3.12) e (3.13) obtemos um sistema com 2 equações e 2 incógnitas (3.14).

$$\begin{cases} -10I_1 + 15I_2 = 20 \\ 15I_1 - 10I_2 = -40 \end{cases} \quad (3.14)$$

Para determinar a solução do sistema, podemos utilizar tanto o método da substituição, pois o sistema é consideravelmente pequeno quando comparado a outros sistemas lineares formados por mais equações, ou podemos determinar a solução utilizando métodos numéricos. Neste caso, para este sistema linear será demonstrado formas de obter a solução por dois métodos numéricos: a partir da Regra de Cramer ou através do Método de Gauss, pois ambos os métodos são fáceis de serem determinados manualmente quando aplicados a sistemas de duas, três e quatro equações. Passando dessa quantidade de equações, será notório o aumento da dificuldade para o cálculo manual.

Para usar a Regra de Cramer, reescrevemos o sistema (3.14) na forma matricial (3.15)

$$\begin{bmatrix} -10 & 15 \\ 15 & -10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ -40 \end{bmatrix}. \quad (3.15)$$

Com isso, obtemos determinantes (3.16), (3.17) e (3.18):

$$D = \begin{vmatrix} -10 & 15 \\ 15 & -10 \end{vmatrix} = 100 - 225 = -125, \quad (3.16)$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 20 & 15 \\ -40 & -10 \end{vmatrix} = -200 + 600 = 400, \quad (3.17)$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} -10 & 20 \\ 15 & -40 \end{vmatrix} = 400 - 300 = 100. \quad (3.18)$$

Portanto,

$$I_1 = \frac{D_1}{D} = -\frac{400}{-125} = -3,2 \text{ A}, \quad (3.19)$$

$$I_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{100}{-125} = -0,8 \text{ A}. \quad (3.20)$$

Agora, caso queira determinar a solução do sistema através do Método de Eliminação de Gauss, por ser também considerado como um método direto para resolver sistemas de equações lineares. A partir do sistema linear (3.14) obtido com a análise das malhas do circuito elétrico proposto, podemos realizar os seguintes passos:

No primeiro momento, será determinado a matriz aumentada, obtida a partir dos coeficientes de cada incógnita acrescentado por uma coluna formada com os termos independentes, assim como aparece na matriz (3.21).

$$\left[ \begin{array}{cc|c} -10 & 15 & 20 \\ 15 & -10 & -40 \end{array} \right]. \quad (3.21)$$

O segundo momento consiste em realizar operações elementares sobre as linhas da matriz aumentada a fim de transformá-la em outra matriz equivalente que seja triangular superior. Então, serão realizadas as seguintes operações em cada linha:

$$a_{21}^{(2)} = a_{21} - a_{11} \cdot \frac{a_{21}}{a_{11}} = 15 - (-10) \cdot \frac{15}{-10} = 0;$$

$$a_{22}^{(2)} = a_{22} - a_{12} \cdot \frac{a_{21}}{a_{11}} = -10 - 15 \cdot \frac{15}{-10} = 12,5;$$

$$b_2^{(2)} = b_2 - b_1 \cdot \frac{a_{21}}{a_{11}} = -40 - 20 \cdot \frac{15}{-10} = -10.$$

Feito as operações entre as linhas da matriz, obtemos a matriz triangular superior (3.22).

$$\left[ \begin{array}{cc|c} -10 & 15 & 20 \\ 0 & 12,5 & -10 \end{array} \right] \quad (3.22)$$

e conseqüentemente obtemos o sistema (3.23):

$$\begin{cases} -10I_1 + 15I_2 = 20 \\ 12,5I_2 = -10 \end{cases} \quad (3.23)$$

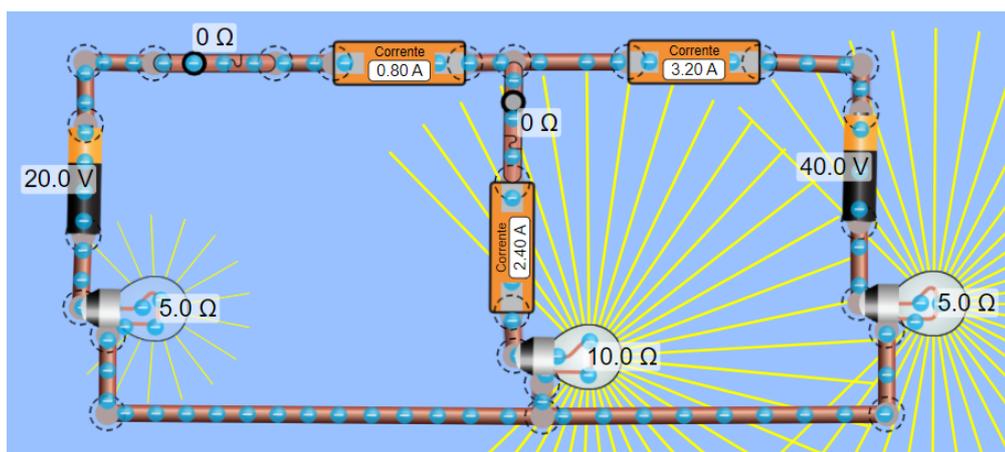
Através de substituições regressivas nas equações de cada linha do sistema (3.23), temos

$$I_2 = \frac{-10}{12,5} = -0,8A$$

$$I_1 = \frac{20 - 15 \cdot (-0,8)}{-10} = -3,2A.$$

Após realizar os cálculos, tanto pelo método de Cramer como pelo método de Gauss, obtemos o resultado da corrente  $I_1$  e  $I_2$  negativo, isso indica que o sentido arbitrário adotado para a movimentação dos elétrons livres da corrente é incorreto indicando que, neste caso, a corrente percorre o eletrodo no sentido anti-horário. Além disso, ao compararmos os resultados obtidos numericamente e os obtidos por medição (Figura 26), que neste caso, aplicados em nossa realidade, são instrumentos elétricos de medição capazes de determinar a intensidade da corrente elétrica, tensão, etc.; estão dando os mesmo resultados. Durante a simulação computacional, estes mesmos instrumentos são simulados, e conseqüentemente, deverão ser posicionados assim como se estivessem sendo manuseados de forma real. Portanto, a partir da análise numérica e de medição concluímos que a intensidade da corrente elétrica é a mesma em ambos os casos.

Figura 26 – Circuito de duas malhas com a intensidade da corrente elétrica em cada ramo



FONTE: PHET - *Interactive Simulations*

Sendo assim, tanto o Método de Cramer quanto o Método de Gauss são facilmente aplicáveis e determinaram a intensidade de corrente elétrica  $I_1$  e  $I_2$  que equivale à intensidade de correntes que passam entre as lâmpadas 1 e 3. Quanto a lâmpada central, não é possível determinar sua intensidade apenas com os métodos utilizados. Neste caso, através

da lei de Kirchhoff para corrente, a intensidade da corrente elétrica que passa na lâmpada central é equivalente a realizar o seguinte cálculo:

$$3,2 = i_3 + 0,8 \quad (3.24)$$

$$i_3 = 2,4 \text{ A.} \quad (3.25)$$

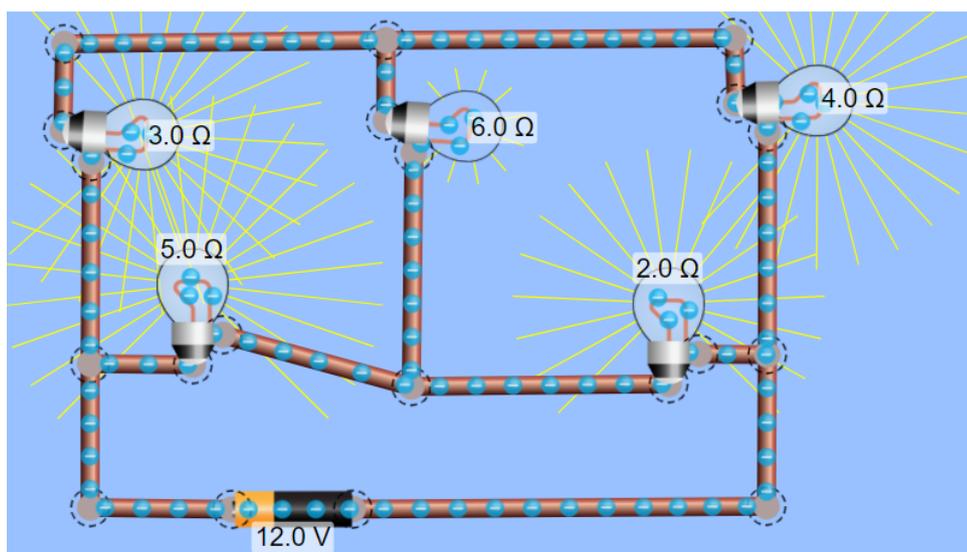
Ao compararmos os dois métodos utilizados, concluímos que ambos os métodos numéricos, Regra de Cramer ou Método de Gauss, são eficientes e possíveis de serem utilizados para determinar o resultado do sistema linear.

### 3.2.2 Aplicação 2

Nesta aplicação será adotado também a lei de Kirchhoff para tensões, através da análise por malha. A análise realizada para este circuito é semelhante ao do circuito anterior, porém, por se tratar de um circuito com mais malhas, conseqüentemente a quantidade de equações também provavelmente aumentará, dependendo apenas das situações em que não há corrente percorrendo o ramo (condutor).

Para demonstrarmos a modelagem em um circuito com três malhas, imaginemos a mesma situação problema apresentada na Aplicação. Neste caso, a situação problema é que através do circuito simulado, modele matematicamente as malhas a seguir e determine a intensidade de corrente elétrica que passam nos ramos da malha 1, malha 2 e malha 3.

Figura 27 – Circuito elétrico com três malhas.



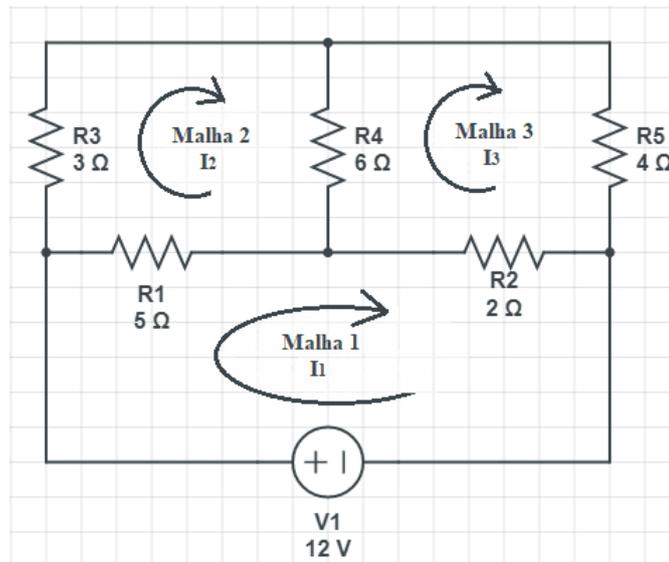
FONTE: PHET - *Interactive Simulations*

Deste modo, assim como será demonstrado mais adiante, sistemas lineares com até três linhas também é possível realizar os cálculos manualmente, para determinar sua solução. Contudo, o método de Gauss neste caso passa a se tornar mais propício a erros,

pois sua quantidade de operações elementares tende a aumentar com o aumento de equações do sistema.

Portanto, no circuito da Figura 27 será realizada a modelagem matemática e será aplicado também os dois métodos numéricos: Regra de Cramer e Método de Gauss.

Figura 28 – Forma esquematizada do circuito elétrico de três malhas.



**FONTE:** Produzido no CircuitLab.

Neste caso, aplicando a lei das malhas (LKT), assim como é mostrado na Figura 28, e desta vez considerando o sinal negativo para as quedas de tensão, obtemos as Equações (3.26), (3.27) e (3.28):

$$\begin{aligned} \text{Malha 1: } 12 - 5(I_1 - I_2) - 2(I_1 - I_3) &= 0 \\ -7I_1 + 5I_2 + 2I_3 &= -12, \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned} \text{Malha 2: } -3I_2 - 6(I_2 - I_3) - 5(I_2 - I_1) &= 0 \\ 5I_1 - 14I_2 + 6I_3 &= 0, \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned} \text{Malha 3: } -4I_3 - 2(I_3 - I_1) - 6(I_3 - I_2) &= 0 \\ 2I_1 + 6I_2 - 12I_3 &= 0. \end{aligned} \quad (3.28)$$

A partir das Equações (3.26), (3.27) e (3.28) obtemos um sistema de 3 equações e 3 incógnitas (3.29).

$$\begin{cases} -7I_1 + 5I_2 + 2I_3 = -12 \\ 5I_1 - 14I_2 + 6I_3 = 0 \\ 2I_1 + 6I_2 - 12I_3 = 0. \end{cases} \quad (3.29)$$

Adotando a forma matricial, temos que

$$\begin{bmatrix} -7 & 5 & 2 \\ 5 & -14 & 6 \\ 2 & 6 & -12 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.30)$$

Aplicando a Regra de Cramer, assim como foi realizado na Aplicação 1, temos

$$D = \begin{vmatrix} -7 & 5 & 2 \\ 5 & -14 & 6 \\ 2 & 6 & -12 \end{vmatrix} = -1176 + 60 + 60 - (-56 - 252 - 300) = -448, \quad (3.31)$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} -12 & 5 & 2 \\ 0 & -14 & 6 \\ 0 & 6 & -12 \end{vmatrix} = -2016 + 432 = -1584, \quad (3.32)$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} -7 & -12 & 2 \\ 5 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & -12 \end{vmatrix} = -144 - 720 = -864, \quad (3.33)$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} -7 & 5 & -12 \\ 5 & -14 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \end{vmatrix} = -360 - 336 = -696. \quad (3.34)$$

Neste caso a corrente de cada malha é dado pelo valor obtido em  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$ :

$$I_1 = \frac{D_1}{D} = -\frac{-1584}{-448} \cong 3,536 \text{ A}, \quad (3.35)$$

$$I_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-864}{-448} \cong 1,929 \text{ A}, \quad (3.36)$$

$$I_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{-696}{-448} \cong 1,554 \text{ A}. \quad (3.37)$$

Agora, caso fossemos obter o valor das correntes de cada malha pelo Método de Gauss, poderíamos realizar os seguintes cálculos:

A primeiro momento, a partir do sistema linear obtido no início da situação problema, determinamos a matriz aumentada, dada por (3.38).

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} -7 & 5 & 2 & -12 \\ 5 & -14 & 6 & 0 \\ 2 & 6 & -12 & 0 \end{array} \right]. \quad (3.38)$$

Após determinada a matriz aumentada o próximo passo é determinar o sistema triangular superior, para isso realizai-se as seguintes operações elementares descritas nas expressões a seguir:

$$a_{21}^{(2)} = a_{21} - a_{11} \cdot \frac{a_{21}}{a_{11}} = 5 - (-7) \cdot \frac{5}{-7} = 0$$

$$a_{22}^{(2)} = a_{22} - a_{12} \cdot \frac{a_{21}}{a_{11}} = -14 - 5 \cdot \frac{5}{-7} \cong -10,43$$

$$a_{23}^{(2)} = a_{23} - a_{13} \cdot \frac{a_{21}}{a_{11}} = 6 - 2 \cdot \frac{5}{-7} \cong 7,43$$

$$b_2^{(2)} = b_2 - b_1 \cdot \frac{a_{21}}{a_{11}} = 0 - (-12) \cdot \frac{5}{-7} \cong -8,57$$

$$a_{31}^{(2)} = a_{31} - a_{11} \cdot \frac{a_{31}}{a_{11}} = 2 - (-7) \cdot \frac{2}{-7} = 0$$

$$a_{32}^{(2)} = a_{32} - a_{12} \cdot \frac{a_{31}}{a_{11}} = 6 - 5 \cdot \frac{2}{-7} \cong 7,43$$

$$a_{33}^{(2)} = a_{33} - a_{13} \cdot \frac{a_{31}}{a_{11}} = -12 - 2 \cdot \frac{2}{-7} \cong -11,43$$

$$b_3^{(2)} = b_3 - b_1 \cdot \frac{a_{21}}{a_{11}} = 0 - (-12) \cdot \frac{2}{-7} \cong -3,43.$$

Agrupando os resultados obtidos, obtemos a matriz (3.39)

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} -7 & 5 & 2 & -12 \\ 0 & -10,43 & 7,43 & -8,57 \\ 0 & 7,43 & -11,43 & -3,43 \end{array} \right]. \quad (3.39)$$

Em seguida, nesta próxima etapa realizamos novamente as operações elementares, só que desta vez permanece fixa a primeira linha e operamos apenas com a segunda e terceiras linhas. Assim como é mostrado a seguir:

$$a_{32}^{(3)} = a_{32} - a_{22} \cdot \frac{a_{32}}{a_{22}} = 7,43 - (-10,43) \cdot \frac{7,43}{-10,43} = 0$$

$$a_{33}^{(3)} = a_{33} - a_{23} \cdot \frac{a_{32}}{a_{22}} = -11,43 - 7,43 \cdot \frac{7,43}{-10,43} \cong -6,14$$

$$b_3^{(3)} = b_3 - b_2 \cdot \frac{a_{32}}{a_{22}} = -3,43 - (-8,57) \cdot \frac{7,43}{-10,43} \cong -9,53.$$

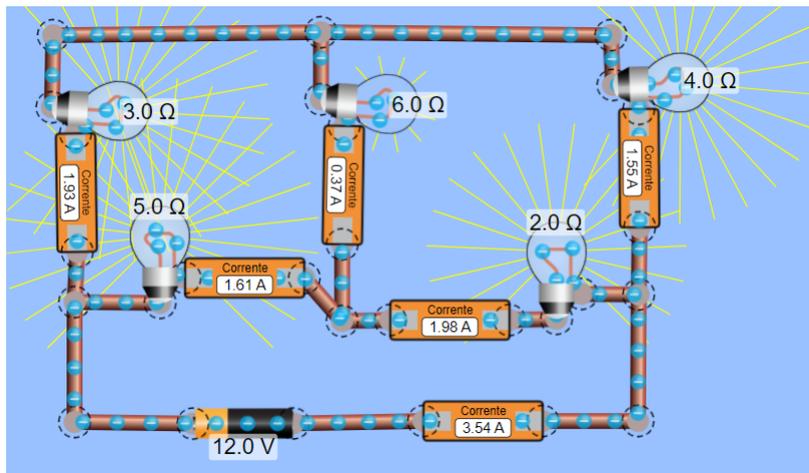
Finalizado as operações, reagrupamos os resultados e obtemos a matriz (3.40):

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} -7 & 5 & 2 & -12 \\ 0 & -10,43 & 7,43 & -8,57 \\ 0 & 0 & -6,14 & -9,53 \end{array} \right]. \quad (3.40)$$

Como todos os elementos abaixo da diagonal principal foram zeradas, reescrevemos a matriz em forma de sistema triangular superior (3.41):

$$\begin{cases} -7I_1 + 5I_2 + 2I_3 = -12 \\ -10,43I_2 + 7,43I_3 = -8,57 \\ -6,14I_3 = -9,53 \end{cases} \quad (3.41)$$

Figura 29 – Circuito de três malhas com a intensidade da corrente elétrica em cada ramo



FONTE: PHET - *Interactive Simulations*

Portanto, realizando a sucessivas substituições regressivas determinamos o valor da corrente de cada malha:

$$I_3 = \frac{-9,53}{-6,14} \cong 1,553 \text{ A}$$

$$I_2 = \frac{-8,57 - 7,43 \cdot 1,553}{-10,43} \cong 1,927 \text{ A}$$

$$I_1 = \frac{-12 - 2 \cdot 1,553 - 5 \cdot 1,927}{-7} \cong 3,534 \text{ A}$$

Neste caso, como o resultado obtido das correntes foram todos positivos, podemos concluir que o sentido arbitrário adotado para corrente está correto.

Ao compararmos os dados obtidos pelos cálculos numéricos e os obtidos na simulação através dos instrumentos de medição (Figura 29), verificamos que realmente o cálculo numérico nos forneceu o valor correto da intensidade da corrente elétrica de cada malha.

## 4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Se considerarmos que os estudantes, mesmo quando iniciam os estudos na escola, já trazem consigo um conhecimento matemático da sua realidade vivida, cabe ao professor(a), mesmo diante do que é sugerido pelo currículo, mostrar outras formas de enxergar a matemática com sua diversidade de regras e convenções, seja por meio de experiências passadas adquiridas durante os seus ensinamentos em suas práticas escolares ou por meio de metodologias e ferramentas diversificadas.

Mesmo sabendo que atualmente a Matemática proposta nas escolas é aquela sugerida pelos currículos, resta aos professores diferenciar seus ensinamentos nas práticas escolares nos métodos e ferramentas utilizadas, bem como elas deverão ser utilizadas.

Sabemos que muitos professores resistem a mudanças, provavelmente devido ao tipo de formação que tiveram, pautados em teorias, regras e técnicas, refletindo na forma de ver como a aprendizagem é construída, ou talvez devido a dificuldade em administrar o número de aulas adquiridas, tempo este que poderia ser dedicado para aprender a modelar situações problemas a outras áreas do conhecimento.

Sendo assim, procuramos trazer ao longo deste trabalho a modelagem matemática de circuitos elétricos utilizando sistemas lineares de modo que o leitor compreenda a importância de se estudar conteúdos matemáticos aplicados a outras áreas de conhecimento, principalmente na área da Ciência da Natureza e suas Tecnologias. Esperamos contribuir com a realização deste trabalho no processo de ensino e aprendizagem não somente da matemática, mas também em conteúdos trabalhados na Física.

Acreditamos que a modelagem matemática de circuitos elétricos em sistemas de equações lineares possa contribuir para a melhoria do aprendizado, bem como, despertar no leitor interesse em estabelecer conexões de conteúdos estudados com outras áreas de conhecimento.

Portanto, procuramos evidenciar com o desenvolvimento deste trabalho a utilidade de compreender sistemas lineares para a análise de circuitos elétricos, a fim de determinar correntes e tensões de um circuito. Procuramos contribuir para a aprendizagem, assim como estimular o leitor a realizar estudos envolvendo outros campos de aplicação que transcendem os exemplos de aplicações aqui apresentados.

# Referências

- ALEXANDER, C. K.; SADIKU, M. N. *Fundamentos de circuitos elétricos*. [S.l.]: AMGH Editora, 2013.
- BARBOSA, J. C. Modelagem matemática: O que é? por quê? como? *Por que*, p. 73–80, 2004.
- BASSANEZI, R. C. Ensino aprendizagem com modelagem matemática—editora contexto. *São Paulo*, 2002.
- BIEMBENGUT, M. S. 30 anos de modelagem matemática na educação brasileira: das propostas primeiras às propostas atuais. *Alexandria: revista de educação em ciência e tecnologia*, v. 2, n. 2, p. 07–32, 2009.
- BISCUOLA, G. J.; BOAS, N. V.; DOCA, R. H. *Física 3*. [S.l.]: São Paulo: Editora Saraiva, 2016.
- BONATTO, A.; BARROS, C. R.; GEMELI, R. A.; LOPES, T. B.; FRISON, M. D. Interdisciplinaridade no ambiente escolar. *Seminário de pesquisa em educação da região Sul*, v. 9, p. 1–12, 2012.
- BONJORNO, J. R. e. a. *Física: eletromagnetismo, física moderna*. [S.l.]: 3. ed., São Paulo: FTD, 2016.
- BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular-Educação é a base*. [S.l.]: Ministério da Educação Brasília, 2017.
- BRASIL. *Decreto Nº 9.432, de 29 de Junho de 2018, Regulamentação, Avaliação e Exames da Educação Básica*. 2018. Acessado em: 20 maio. 2021.
- BRASIL, M. Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias/secretaria de educação básica. *Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica*, 2006.
- BURAK, D.; KLUBER, T. E. Considerações sobre a modelagem matemática em uma perspectiva de educação matemática. *Revista Margens Interdisciplinar*, v. 7, n. 8, p. 33–50, 2016.
- CABRERA, L. M. *Uma introdução a matrizes, determinantes e sistemas lineares e suas aplicações*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2018.
- CALDEIRA, A. D. Modelagem matemática: um outro olhar. *Alexandria: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia*, v. 2, n. 2, p. 33–54, 2009.
- CRUVINEL, F. B. et al. Tópicos de álgebra linear e aplicações em problemas de economia e de engenharia. Universidade Federal de Goiás, 2013.
- FORTES, C. C. Interdisciplinaridade: origem, conceito e valor. *Revista acadêmica Senac on-line*. 6a ed. setembro-novembro, 2009.
- FRANCO, N. B. *Cálculo numérico*. [S.l.]: Pearson, 2006.

- GUIMARÃES, O. e. a. *Física*. [S.l.]: 2. ed., São Paulo: Ática, 2016.
- GUSSOW, M. *Eletricidade básica*. [S.l.]: São Paulo: Person Makron Books, 1997.
- HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. *Fundamentos de Física, volume 2*. [S.l.]: Editora LTC São Paulo, 2016.
- KIENITZ, K. H. *Análise de Circuitos*. [S.l.]: Editora Manole Ltda, 2002.
- MADRUGA, Z. E. de F.; LIMA, V. M. do R. Aprender com modelagem: relações entre modelagem (matemática) e processos criativos. *Alexandria: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia*, v. 12, n. 2, p. 241–266, 2019.
- MÜLLER, I. Tendências atuais de educação matemática. *Revista de ensino, educação e ciências humanas*, v. 1, n. 1, 2000.
- NILSSON, J. W.; RIEDEL, S. A. *Circuitos elétricos*. [S.l.]: São Paulo: Person Prentice Hall, 2009.
- SANTOS, K. V. d. *Fundamentos de eletricidade*. [S.l.]: Manaus: Centro de Educação Tecnológica do Amazonas, 2011. 130 p.
- SANTOS, W. V. D.; PRIMO, A. S. Aplicação da álgebra linear na engenharia elétrica: análise de circuitos elétricos em corrente contínua. *Caderno de Graduação-Ciências Exatas e Tecnológicas-UNIT-SERGIPE*, v. 4, n. 2, p. 25, 2017.
- SILVA, M. F. d. S. *Eletricidade*. [S.l.]: Universidade Federal de Santa Maria, Colégio Técnico Industrial de Santa Maria: Rede e-Tec Brasil, 2015. 116 p. p.
- THIESEN, J. d. S. A interdisciplinaridade como um movimento articulador no processo ensino-aprendizagem. *Revista brasileira de educação*, Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação, v. 13, n. 39, 2008.
- VALIENTE, E. d. S. P. *Aplicações de sistemas lineares e determinante na engenharia civil*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, 2015.
- VILLATE, J. E. *Eletricidade, magnetismo e circuitos*. [S.l.: s.n.], 2015.
- YOUNG, H. D.; FREEDMAN, R. A. *Física III: eletromagnetismo*. [S.l.]: São Paulo: Person Education do Brasil, 2009.