UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS
CÂMPUS PROF. DR. SÉRGIO JACINTHO LEONOR
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

AMANDA VIEIRA DA SILVA

PROPOSTAS DE ATIVIDADES DE CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS DE EXPRESSÕES ALGÉBRICAS PARA INTER – RELAÇÕES DE CONCEITOS NO ENSINO MÉDIO

ARRAIAS - TO
2021

AMANDA VIEIRA DA SILVA

PROPOSTAS DE ATIVIDADES DE CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS DE EXPRESSÕES ALGÉBRICAS PARA INTER – RELAÇÕES DE CONCEITOS NO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede - PROFMAT, da Universidade Federal do Tocantins - UFT, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Keidna Cristiane Oliveira Souza

ARRAIAS - TO
2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Tocantins

S586p Silva, Amanda Vieira da.
Propostas de atividades de construções geométricas de expressões algébricas para inter-relações de conceitos no ensino médio.. / Amanda Vieira da Silva. – Arraias, TO, 2021.
126 f.

Dissertação (Mestrado Profissional) - Universidade Federal do Tocantins – Câmpus Universitário de Arraias - Curso de Pós-Graduação (Mestrado) Profissional em Matemática, 2021.
Orientadora : Keidna Cristiane Oliveira Souza

1. Construções geométricas. 2. Inter-relações na Matemática. 3. História da Matemática. 4. .. I. Título

CDD 510

Elaborado pelo sistema de geração automatica de ficha catalográfica da UFT com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

AMANDA VIEIRA DA SILVA

PROPOSTAS DE ATIVIDADES DE CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS DE EXPRESSÕES ALGÉBRICAS PARA INTER – RELAÇÕES DE CONCEITOS NO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede - PROFMAT, da Universidade Federal do Tocantins - UFT, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática e aprovada em sua forma final pela Orientadora e pela Banca Examinadora.

Data de Aprovação: 20/ 08/ 2021.

Banca Examinadora:

KSouza

Profa. Dra. Keidna Cristiane Oliveira Souza - UFT/PROFMAT - Arraias
Orientadora

P/ KSouza

Prof. Dr. Rodrigo Carvalho Dias - IFTO - Palmas
Examinador

P/ KSouza

Profa. Dra. Alcione Marques Fernandes - UFT/PROFMAT - Arraias
Examinadora

P/ KSouza

Prof. Dr. Eudes Antônio da Costa - UFT/PROFMAT - Arraias
Examinador

Agradeço acima de tudo a Deus;
e também ao meu querido esposo Weudds Junio
pela paciência e companheirismo.
A vocês, dedico este trabalho.

AGRADECIMENTOS

A Deus, pelas infinitas misericórdias para comigo, permitindo-me chegar ao final dessa etapa em minha vida profissional, desfrutando de alegria e saúde. "Não tenho palavras para agradecer Tua bondade. Tudo o que tenho, tudo o que sou, o que vier a ser, vêm de ti Senhor".

Ao meu esposo Weudds Junio de Souza, pelo amor e carinho, estímulo e apoio dedicados a mim. Foram muitos os momentos difíceis que juntos conseguímos superar. Louvado seja Deus por você existir.

Aos meus familiares, principalmente, à minha querida mãe e amiga, Sandra Maria, um dos meus grandes alicerces, que me apoia e se alegra com meu êxito. Obrigada por suas orações.

À minha orientadora, Profa. Dra. Keidna Cristiane Oliveira Souza, que, com paciência e dedicação, me instruiu e me auxiliou na conclusão deste trabalho.

À amiga e irmã em Cristo, Prof.ª Enilda Rodrigues de Almeida Bueno, que prontamente dividiu comigo as suas experiências. Obrigada pelo gesto e apoio dispensado.

A todos os Professores pela troca e acréscimo de conhecimentos em cada momento do meu Curso.

Aos amigos e colegas Indiara Vizzoto, Jabson da Cunha, Rafael Pimenta, Vilmar Costa, Daniel Barbosa, Drielle Passos, Rodrigo Mota, Céliton Ferreira, Lúcio Flávio, Valton Gomes, Ramiz Martins, Isabel Cristina, Valéria Cristina, José Gomes Neto e Thiago Ruiz, pelas interações, pelos momentos de apoio e solidariedade. A vocês minha gratidão e consideração.

A UFT – Universidade Federal do Tocantins.

A todas as pessoas que direta ou indiretamente me auxiliaram na realização desse Mestrado.

É necessário dizer que não é a quantidade de informações, nem a sofisticação em Matemática que podem dar sozinhas um conhecimento pertinente, mas sim a capacidade de colocar o conhecimento no contexto.

Edgar Morin

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo central sistematizar propostas de atividades utilizando construções geométricas como instrumento na ampliação da compreensão de estudantes do Ensino Médio acerca das dimensões conceituais da Matemática. Propõe-se, assim, apresentar uma perspectiva do desenvolvimento histórico da Geometria e da Álgebra que possibilitaram as construções geométricas, exemplificando como determinadas civilizações de diferentes épocas resolviam seus problemas matemáticos, ora abordando-os de forma algébrica, ora de forma geométrica, ou inter-relacionando conhecimentos, a fim de incentivar a utilização de variados métodos de abordagem de um conteúdo ou problema. A motivação para apoiar tópicos da História da Matemática em sala de aula é justificada ao considerar, entre outros, o ponto de vista de que a história constitui uma fonte de métodos pedagogicamente relevantes e intrigantes para a abordagem de certos tópicos da Matemática escolar. Um desses métodos faz uso das construções geométricas na resolução de problemas e na mensuração de grandezas que, ao invés de serem calculadas ou medidas, são construídas. Como as construções geométricas estão cada vez mais ausentes dos currículos escolares, este trabalho pretende resgatar o assunto e mostrar a riqueza desse instrumento no aprendizado da Matemática na Educação Básica. Por esse motivo, revisamos certos conhecimentos elementares sobre construções com régua e compasso que, juntamente com alguns resultados da Geometria Euclidiana Plana, são necessários para a compreensão geométrica de expressões algébricas. Corrobora à metodologia histórica sugerida para o embasamento das propostas elaboradas a Metodologia de Resolução de Problemas, ao apresentarmos atividades que indicam o uso das construções geométricas na interpretação de expressões algébricas, advindas de sistemas com duas equações. Nesse contexto, para o desenvolvimento desta pesquisa, de abordagem metodológica de caráter qualitativa, foi necessário pesquisas bibliográficas em materiais como livros e artigos científicos, e uma pesquisa exploratória, para ter-se uma visão geral acerca de determinados fatos. Os resultados dessa pesquisa indicam que relacionar conhecimentos da Geometria com os da Álgebra é fundamental para uma melhor compreensão das duas áreas. Além disso, os resultados também apontam que as estratégias sugeridas aqui podem desafiar os estudantes e os auxiliarem no desenvolvimento da capacidade de manipular conceitos e propriedades.

Palavras-Chave: Construções geométricas; Inter-relações na Matemática; História da Matemática;

ABSTRACT

The main objective of the present work is to systematize proposals for activities, in an interdisciplinary interarea way, using geometric constructions as an instrument to expand the understanding of high school students about the conceptual dimensions of Mathematics. It is proposed, therefore, to present a perspective of the historical development of Geometry and Algebra that made geometric constructions possible, exemplifying how certain civilizations from different times solved their mathematical problems, sometimes approaching them algebraically, sometimes in a geometric way, or inter -relating knowledge, in order to encourage the use of different methods of approaching a content or problem. The motivation to support topics in the History of Mathematics in the classroom is justified by considering, among others, the view that history constitutes a source of pedagogically relevant and intriguing methods for approaching certain topics in school Mathematics. One of these methods makes use of geometric constructions to solve problems and measure quantities that, instead of being calculated or measured, are constructed. As geometric constructions are increasingly absent from school curricula, this work intends to rescue the subject and show the richness of this instrument in the learning of Mathematics in Basic Education. For this reason, we review certain elementary knowledge about ruler and compass constructions that, together with some results of Flat Euclidean Geometry, are necessary for the geometric understanding of algebraic expressions. The Problem Solving Methodology corroborates the historical methodology suggested to support the proposals elaborated, by presenting activities that indicate the use of geometric constructions in the interpretation of algebraic expressions, arising from systems with two equations. In this context, for the development of this research, with a qualitative methodological approach, bibliographical research was necessary in materials such as books and scientific articles, and an exploratory research, in order to have an overview of certain facts. The results of this research indicate that relating Geometry knowledge with Algebra knowledge is essential for a better understanding of the two areas. Furthermore, the results also show that the strategies suggested here can challenge students and help them develop their ability to manipulate concepts and properties.

Keywords: Geometric constructions; Interrelationships in Mathematics; History of Mathematics;

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CEE	Conselho Estadual de Educação
MEC	Ministério da Educação
MRP	Metodologia de Resolução de Problemas
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PROFMAT	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
SBM	Sociedade Brasileira de Matemática
SEDUC – TO	Secretaria da Educação, Juventude e Esportes do Tocantins

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O que é mais importante no estudo de Matemática, a Álgebra ou a Geometria? O que é fundamental na formação do estudante, o pensamento algébrico ou o pensamento geométrico? Essas são questões debatidas por Miguel, Fiorentini e Miorim (1992) em um artigo que visa entender a especificidade de cada campo e os cuidados pedagógicos que devemos ter no desenvolvimento deles. Miguel, Fiorentini e Miorim (1992) mostram que o ensino da Matemática Elementar no Brasil foi, historicamente, marcado pela existência de uma atitude oscilatória que expressava-se ora no realce da Álgebra em detrimento da Geometria, ora na defesa do ponto de visto oposto.

O estudo da Álgebra, de acordo com Miguel, Fiorentini e Miorim (1992), é introduzido no ensino secundário brasileiro apenas no início do século XIX, juntando-se às tradicionais cadeiras de Aritmética, Geometria e Trigonometria e formando, em 1931, com a Reforma Francisco Campos, um conjunto de componentes curriculares cujos conteúdos foram nomeados como "Matemática". São, portanto, quase dois séculos de experiências, estudos e propostas que, segundo Roque e Pitombeira (2012, p. 10), já foram "reorganizadas inúmeras vezes".

Visando suprir as lacunas deixadas na formação Matemática pela escola tradicional, na década de 1950, por conta da competição desencadeada pela Guerra Fria, bem como a preocupação com a ciência e a tecnologia, emerge um movimento chamado "Matemática Moderna". Bonjorno *et. al.* (2014) enfatizam que a filosofia desse grupo articulou-se em torno de três noções básicas: a unidade matemática, o método axiomático e as estruturas. Em outras palavras, os principais intuitos desse movimento eram: a unificação dos três campos fundamentais da Matemática, introdução de elementos como Teoria de Conjuntos, Estruturas Algébricas, Relações e Funções; ênfase nos aspectos estruturais e lógicos da Matemática em lugar do caráter pragmático, mecanizado, não justificado e cheio de regras, presente até aquele momento na Matemática escolar; reflexão sobre o espírito da Matemática contemporânea que, em consequência do processo de algebrização, tornou-se mais precisa e fundamentada logicamente.

Miguel, Fiorentini e Miorim (1992) citam alguns enfoques recomendados pelo movimento da Matemática Moderna (chamado, pelos autores, de movimento modernista) para o ensino dos conteúdos matemáticos:

> [$\cdots$] os conteúdos geométricos deixam de ser vistos como potencialmente ricos que pelo seu valor cultural, quer pela sua capacidade intrínseca de possibilitar a percepção, organização e sistematização da experiência espacial dos estudantes. [$\cdots$] Analogamente, o ensino da Aritmética e da Álgebra perde, inicialmente, aquele caráter eminentemente pragmático

> e é substituído por uma acentuada preocupação com os aspectos lógico-estruturais desses conteúdos. (MIGUEL; FIORENTINI; MIORIM, 1992, p. 48)

Essas propostas, no entanto, acabaram por alterar o equilíbrio enciclopédico entre a Aritmética, a Álgebra e a Geometria, existente, até então, no currículo escolar:

> [···] a Álgebra viria a desempenhar um lugar de destaque não apenas em sua concepção tradicional, mas, sobretudo, em sua concepção moderna. Isto porque, os grandes avanços da Matemática, nos dois últimos séculos, deram-se graças ao processo de algebrização da Matemática Clássica, tornando-se mais rigorosa, precisa e abstrata e, portanto, assim pensava-se, mais aplicável. [···] A Geometria, no entanto, acaba por ser relegada a um segundo plano – decorrente, em grande parte, do descrédito no papel que se acreditava estar ela desempenhando até então no ensino e da incompreensão do novo papel e do novo enfoque que deveria passar a desempenhar – e, gradativamente, passa a configurar-se um quadro no qual a Geometria não ocupa um lugar significativo no currículo escolar. (MIGUEL; FIORENTINI; MIORIM, 1992, p. 48)

A Matemática escolar, portanto, não apresentou transformações expressivas, já que o formalismo matemático continuava sendo reforçado. O movimento modernista não conseguiu dar conta da crise em que encontrava-se o ensino da Matemática.

> Muito pelo contrário, essa crise tomaria outras características uma vez que, por um lado, debilitou-se a concepção do valor cultural e instrumental dos conteúdos, isto é, a Matemática perdeu seu caráter preponderantemente informativo e pragmático e, por outro, a prática pedagógica modernista não conseguiu realizar o seu projeto formativo segundo o qual a subordinação dos conteúdos às estruturas deveria dotar o aluno de uma capacidade de aplicar essas formas estruturais de pensamento inteligente aos mais variados domínios, dentro e fora da Matemática. (MIGUEL; FIORENTINI; MIORIM, 1992, p. 49)

Com o processo de industrialização crescente no Brasil, na década de 1960, o quadro educacional deveria mudar, pois havia uma necessidade de mão de obra qualificada para trabalhar nas indústrias. Bonjorno *et. al.* (2014) dizem que surgiu aí a tendência tecnicista de educação, fundamentada especialmente nos trabalhos de Skinner[1]. Nesse caso, a ênfase se deu no conhecimento de recursos tecnológicos. Não houve uma preocupação em justificar como o indivíduo aprende, mas sim em fornecer tecnologias instrucionais que fossem capazes de explicar como o aluno estuda, acrescentam Bonjorno *et. al.* (2014). Nessa perspectiva, chamada também behaviorismo, o ensino é um processo de condicionamento pelo reforço às respostas que se quer obter (estímulo-resposta).

[1] Burrhus Frederic Skinner (1904 -1990), de acordo com Silva (2016), foi um dos principais impulsionadores do behaviorismo com seus trabalhos em psicologia experimental, que deram origem ao *método de ensino skinneriano* — procedimentos e técnicas necessários ao controle do processo de ensino e aprendizagem, através do estabelecimento de objetivos instrucionais, ordenação sequencial da instrução e reforço gradual das respostas correspondentes aos objetivos

Contudo, salientam Bonjorno *et. al.* (2014, p. 27), “tanto a Matemática Moderna quanto o tecnicismo fracassaram e, no fim, da década de 1970, outra forte e importante tendência começou a surgir: a Educação Matemática”.

A Educação Matemática, explicam Bonjorno *et. al.* (2014), foi consolidada como nova área de estudos e pesquisas visando uma transformação efetiva no quadro que até então apresentava-se, com a preocupação de inovar o ensino da Matemática e corrigir distorções e excessos cometidos ao longo da trajetória do movimento da Matemática Moderna.

Como comentado, uma das distorções evidenciadas por Miguel, Fiorentini e Miorim (1992) durante o movimento modernista foi a descaracterização da Geometria. Ao tentar superar essa situação, a Educação Matemática propõe a reestruturação da Geometria. Que fique claro, porém, que:

> Este “retorno” à Geometria não consiste nem na retomada pura e simples da Geometria euclidiana, na sua abordagem clássica, nem na reafirmação do papel que ela desempenha no currículo escolar dos períodos anteriores; mantêm-se, sobretudo, conceitos e propriedades fundamentais próprios da Geometria euclidiana numa abordagem inicial que privilegia os aspectos intuitivos e experimentais encaminhando-se, gradativamente, para deduções locais daquelas proposições mais fundamentais. Além disso, a Geometria tende a desempenhar, cada vez com mais frequência, um papel subsidiário na construção de conceitos e na visualização de propriedades aritméticas e algébricas. [$\cdots$] essa proposta faz apelos a recursos geométricos no desenvolvimento de tópicos algébricos, tais como as propriedades das operações, as operações com expressões algébricas, os casos de fatoração e a resolução de equações do 2º grau. (MIGUEL; FIORENTINI; MIORIM, 1992, p. 50)

Dessa forma, a Geometria passa a dar sustentação à metodologia do ensino da Álgebra. Miguel, Fiorentini e Miorim (1992) falam que, a partir desse momento, admite-se que o pensamento geométrico pode ser um estágio impossível de ser omitido no desenvolvimento normal da atividade racional do homem e observa-se que, apesar da percepção da importância do ensino da Geometria, deve haver uma preocupação idêntica com relação ao ensino dos outros campos da Matemática, em particular da Álgebra.

No momento atual, a Educação Matemática tem referências para o fortalecimento de ações que assegurem as aprendizagens essenciais definidas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC). De acordo com Brasil (2018), a BNCC é o documento do Ministério da Educação (MEC) que orienta a elaboração dos currículos de todas as etapas da Educação Básica e as propostas pedagógicas das redes de ensino e instituições escolares públicas e particulares. A BNCC da área de Matemática e suas Tecnologias do Ensino Médio também corrobora com a ideia de que os conhecimentos devem ser colocados em jogo de modo mais inter-relacionados possibilitando que os estudantes construam uma visão mais integrada da Matemática.

Brasil (2018) destaca ainda que, para o desenvolvimento do pensamento matemático, é necessário um conjunto de pares de ideias fundamentais que produzem articulações entre os vários campos da Matemática – Aritmética, Álgebra, Geometria, Probabilidade e Estatística, Grandezas e Medidas. Entre os pares de ideias fundamentais citados em Brasil (2018, p. 521), adotam-se as “relações e inter-relações”, que trazem a ideia de que uma disciplina de uma área pode tratar de um tema com contexto e interdisciplinaridade, com articulações entre diferentes áreas do conhecimento ou articulações no interior da própria área do conhecimento. Na BNCC vemos como exemplo de inter-relações a comunicação entre a Álgebra e a Geometria, favorecendo uma percepção de unidade da Matemática, que serve também, além da diversidade de suas práticas, "para mostrar que o desenvolvimento da disciplina é fruto da experiência humana ao longo da história"(BRASIL, 2018, p. 522)

A partir dessa compreensão, das possibilidades previstas para o "letramento matemático"[2] dos estudantes da Educação Básica e da articulação e integração dos campos da Matemática, surgiu o interesse por essa pesquisa, que tem como objetivo sistematizar propostas de atividades utilizando construções geométricas como instrumento na ampliação da compreensão de estudantes do Ensino Médio acerca das dimensões conceituais da Matemática.

Assim sendo, os objetivos específicos deste trabalho são: conhecer o desenvolvimento histórico da Geometria e da Álgebra que possibilitaram as construções geométricas; revisar o conhecimento base sobre construções com régua e compasso, necessário para a compreensão geométrica de expressões algébricas; apresentar propostas de atividades envolvendo as construções geométricas na interpretação de expressões algébricas, advindas de sistemas com duas equações, como recurso didático de interação entre áreas do conhecimento da Matemática e de amadurecimento conceitual.

Com relação a metodologia de ensino escolhida para o desenvolvimento das propostas de atividades, utilizamos a História da Matemática como uma fonte de métodos para a abordagem pedagógica de certos tópicos da Matemática e como um meio de viabilizar o conhecimento sobre a história desse método ou conteúdo. Salientamos, porém,

[2] De acordo com Brasil (2018, p. 522), entende-se por letramento matemático

> competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas. O letramento deve também assegurar que todos os estudantes reconheçam que os conhecimentos matemáticos são fundamentais para compreender e atuar no mundo e para que também percebam o caráter de jogo intelectual da Matemática, como aspecto que favorece o desenvolvimento do raciocínio lógico e crítico, estimula a investigação e que pode também ser prazeroso.

que este não é um trabalho com enfoque na História da Matemática — de acordo com Eves (2011, p. 19), "a história da Matemática é tão vasta que uma introdução à matéria é possível apenas em nível de graduação"—, nem na História da Educação Matemática, mas como essas duas regiões de inquérito relacionam-se com a Educação Matemática. Isso quer dizer que nos concentraremos nas potencialidades pedagógicas positivas da História da Matemática na Educação Matemática.

À essa metodologia de ensino mencionada corrobora a Metodologia de Resolução de Problemas (MRP) ao propormos problemas que exigem reflexão, questionamentos e estruturação de estratégias de solução, construindo condições para o desenvolvimento do modo de pensar matemático e promovendo nos alunos o domínio de procedimentos, assim como a utilização dos conhecimentos disponíveis, para resposta a situações variáveis e diferentes.

O interesse por essa pesquisa surgiu durante a realização do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), mais especificamente, ao realizar a disciplina de Geometria I, quando me deparei com uma ferramenta, até então desconhecida por mim, que me trouxe diferentes oportunidades de integrar conceitos, teorias, métodos e ferramentas de diferentes campos da Matemática. A disciplina foi orientada segundo o livro didático de Geometria da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), Coleção PROFMAT, que me proporcionou uma visão da Geometria Euclidiana Plana com base em construções geométricas.

As construções geométricas, de acordo com Wagner (2000), permitem compreender e construir modelos para interpretação e/ou resolução de questões da Matemática. Historicamente, as construções geométricas foram utilizadas, de acordo com Eves (2011), principalmente pelos gregos antigos que, carecendo de qualquer notação algébrica adequada, já que a Álgebra só desenvolvera-se mais tarde, idearam processos geométricos engenhosos para efetuar operações algébricas. Estava envolvida aí uma composição de áreas, a Álgebra e a Geometria, com a intenção de entender e resolver problemas do cotidiano, utilizando todas as ferramentas que possibilitassem esse processo, sem engessar, separar ou discriminar os conhecimentos e, sim, uma mistura dos mesmos.

Diante dessa perspectiva, sendo eu professora de Matemática atuante na Educação Básica, por conta das possibilidades e benefícios no ensino e aprendizagem e pelo fato de muitas escolas nem chegarem a abordar as construções geométricas, seja em uma disciplina de Desenho Geométrico em sua grade curricular ou mesmo dentro dos conteúdos desenvolvidos na Matemática, como exposto por Zuin (2001), vi a necessidade de enfatizar o uso das construções geométricas no estudo da Matemática.

Wagner (2000, p. 18) reforça essa ideia ao afirmar que:

> As construções geométricas devem, em nossa opinião, acompanhar qual-

> quer curso de Geometria na escola secundária. Os problemas são motivadores, às vezes intrigantes e frequentemente conduzem à descoberta de novas propriedades. São educativos no sentido em que cada um é necessária uma análise da situação onde se faz o planejamento da construção, seguindo-se a execução dessa construção, a posterior conclusão sobre o número de soluções distintas e também sobre a compatibilidade dos dados.

Com base nisso, delineou-se a questão de investigação deste trabalho de pesquisa: "como as construções geométricas podem, como recurso didático, contribuir na inter-relação e letramento de conceitos matemáticos a fim de assegurar sentido e qualidade na aprendizagem de alunos do Ensino Médio?"

Como hipótese, entendemos que as construções geométricas podem contribuir com práticas investigativas e com a inter-relação de saberes de sub-áreas da Matemática; ser útil como recurso de acesso ao mundo da linguagem e das ferramentas matemáticas; e promover interpretações e resolução de problemas matemáticos.

Portanto, o objeto de estudo deste trabalho são as construções geométricas, como um instrumento auxiliar na integração de conhecimentos matemáticos, na atribuição de sentidos, consolidação e aprofundamento de conceitos e conteúdos estudados na Educação Básica, além de ser uma forma de resgatar e evidenciar essa ferramenta Matemática que, de acordo com Wagner (2000, prefácio), "está cada vez mais ausente dos currículos escolares".

A abordagem metodológica escolhida para o desenvolvimento dos objetivos dessa pesquisa foi de caráter qualitativa, já que é dessa forma que Gil (2002, p. 133) caracteriza a "sequência de atividades, que envolve a redução dos dados, a categorização desses dados, sua interpretação e a redação do relatório".

Sobre o ponto de vista de seus objetivos, esta pesquisa é dita exploratória, por ter como "objetivo proporcionar maior familiaridade com o problema, com vistas a torná-lo mais explícito ou a constituir hipóteses" (GIL, 2002, p. 41).

Considerando os procedimentos técnicos utilizados, a pesquisa realizada classifica-se em bibliográfica, já que foi "desenvolvida com base em material já elaborado, constituído principalmente de livros e artigos científicos" (GIL, 2002, p. 44).

Os capítulos do desenvolvimento desse trabalho estão assim estruturados:

No Capítulo 2, apresentaremos uma das linhas de pesquisa em Educação Matemática, que expõe possíveis relações entre a História da Matemática e o ensino. Abordamos algumas discussões a respeito do uso da História da Matemática, apresentando argumentos colocados por pesquisadores a favor da tomada da História da Matemática como recurso didático que contribui para o processo de ensino e aprendizagem de Matemática, e também argumentos contra esse uso, a fim de mostrar que as informações históricas podem ser utilizadas para auxiliar o professor de Matemática no planejamento e na execução de suas explanações durante as aulas de Matemática, bem como para justificar os modos de produção Matemática no tempo e no espaço.

Após o Capítulo 2, cada capítulo seguinte pode ser visto como parte de um plano de ensino específico, onde inicialmente sugerimos o estudo da dimensão histórica da Matemática como um guia metodológico dos professores; em seguida um desenvolvimento base para a utilização das construções geométricas e, por fim, sugestões de atividades que poderão ser utilizadas pelo professor para ilustrar ou mesmo para aprofundar um conceito ou conteúdo a ser ensinado.

Especificamente, no Capítulo 3 evidenciamos momentos da História da Geometria e da Álgebra, da transição e relação entre essas histórias, mostrando, no desenvolvimento histórico da Matemática, as diferentes formalizações de um conceito/conteúdo e as diferentes maneiras de manipulá-lo.

No Capítulo 4, apresentamos as definições necessárias para o entendimento de construções geométricas elementares, além de algumas demonstrações de resultados que envolvem construções geométricas, com a finalidade de permitir a interpretação geométrica de expressões algébricas propostas no Capítulo 5.

À vista disso, esperamos que este trabalho sirva de referência para ampliar e auxiliar professores de Matemática da Educação Básica no desenvolvimento da sua profissão e os estimulem a integrar as construções geométricas no tratamento de alguns conteúdos de Geometria e até em outras áreas da Matemática, a exemplo da Álgebra.

2 PARADIGMAS DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

De modo geral, é natural reconhecer a Matemática como um importante instrumento de comunicação, interpretação ou leitura do mundo, que contribui para que as pessoas, ao manejar certos códigos e técnicas dessa área, usufruam de forma consciente do desenvolvimento científico e tecnológico emergente. Naturalmente, não seria essa a única utilidade desempenhada pela Matemática, ou seja, a inserção do indivíduo no meio tecnológico, como um dos sistemas de representação da realidade.

Na verdade, seja por suas aplicações, seja pelos desafios que pode gerar, o conhecimento matemático deve ser apresentado às pessoas de uma forma que o percebam como algo historicamente construído pelo ser humano, enquanto sujeito em sua constante busca pela transformação da qualidade de vida em sociedade, e se falarmos em termos de aprendizagem, reconstruída pelo educando, na medida em que é inerente a ele (BONJORNO *et. al.*, 2014).

É possível dizer, com base nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), que "a Matemática caracteriza-se como uma forma de compreender e atuar no mundo e o conhecimento gerado nessa área do saber como um fruto da construção humana na sua interação constante com o contexto natural, social e cultural" (BRASIL, 1998, p. 24). Logo, o conhecimento matemático não deve ser apresentado como um conjunto de regras e teoremas sem significado. A BNCC corrobora essa ideia ao afirmar que "um dos desafios para a aprendizagem da Matemática no Ensino Médio é exatamente proporcionar aos estudantes a visão de que ela não é um conjunto de regras e técnicas, mas faz parte de nossa cultura e de nossa história"(BRASIL, 2018, p. 522).

O ato-processo de ensinar e aprender é desafiador e complexo por essência. Essa natureza complexa está consolidada no mar de subjetividade das interações sociais, das capacidades dos discursos comunicacionais existentes entre os humanos (CABRAL, 2017). No que diz respeito especificamente ao ensino e aprendizagem da Matemática, a discussão, sem dúvida, torna-se mais desafiadora. Nessa articulação, Ponte (1992, p. 1) destaca:

> A Matemática é um assunto acerca do qual é difícil não ter concepções. É uma ciência muito antiga, que faz parte do conjunto das matérias escolares [da Educação Básica] desde há séculos, é ensinada com caráter obrigatório durante largos anos de escolaridade e tem sido chamada a um importante papel de seleção social. Possui, por tudo isso, uma imagem forte, suscitando medos e admirações. A Matemática é geralmente tida como uma disciplina extremamente difícil, que lida com objetos e teorias fortemente abstratas, mais ou menos incompreensíveis. Para alguns salienta-se o seu aspecto mecânico, inevitavelmente associado ao cálculo. É uma ciência usualmente vista como atraindo pessoas com o seu quê de especial. Em todos estes aspectos poderá existir uma parte

> de verdade, mas o fato é que em conjunto eles representam uma grosseira simplificação, cujos efeitos se projetam de forma intensa (e muito negativa) no processo de ensino-aprendizagem.

Portanto, a natureza complexa do ato-processo de ensinar e aprender Matemática na Educação Básica coloca todos nós professores dessa disciplina diante de um grande desafio. Além das dificuldades de natureza social da comunicação humana e das questões epistemológicas de natureza disciplinar — conteúdos —Cabral (2017) enfatiza que temos que, inevitavelmente, reconhecer a necessidade de investigar as contribuições dos modelos metodológicos alternativos que procuram minimizar as dificuldades de aprendizagem da Matemática largamente difundidas pelas pesquisas na área.

Assim sendo, no intuito de oferecer um encaminhamento que contribua com a prática pedagógica dos professores de Matemática da Educação Básica, abarcando aspectos necessários no processo de ensinar e aprender Matemática, citados por Cabral (2017), como perspectivas múltiplas, integração de conteúdos e abordagens metodológicas alternativas, esse trabalho apresenta sugestões de atividades que poderão ser utilizadas para introduzir, para ilustrar, ou mesmo para aprofundar um conceito a ser ensinado.

Nesse caminho para o "fazer" Matemática na sala de aula, consideramos a abordagem da História da Matemática no processo de ensino-aprendizagem, sendo ela, segundo Miguel e Miorim (2019), fonte de métodos de ensino que motiva e auxilia na compreensão e aprofundamento dessa disciplina e mostra caminhos que conduzem ao ensino da Matemática de modo que ela tenha significado para aqueles que estão aprendendo. Neste capítulo, apresentaremos alguns posicionamentos que nos motivaram a inclusão da História da Matemática no ensino dessa disciplina como recurso apoiador e norteador, de acordo com Batista e Luccas (2004); Bonjorno (2014); Cabral (2017); D'Ambrosio (2007); D'Ambrosio (2013); Fiorentini, Miorim e Miguel (1993); Forato, Guerra e Braga (2015); Gerdes (2012); Mendes (2002); Mendes e Chaquiam (2016); Miguel (1997); Miguel e Miorim (2019); Ponte (1992); Roque (2014); Roque (2012); Roque e Pitombeira (2012); Saito e Dias (2013); Santos e Viana (2011) e Vianna (1998). Além de ser articulada pelos documentos oficiais da educação, como os PCN (BRASIL, 1998) e a BNCC (BRASIL, 2018) que destacam a importância da História da Matemática na na educação e da inter-relação de conceitos promovidos em diferentes campos da Matemática, áreas do conhecimento e épocas.

2.1 A História da Matemática como recurso no ensino da Matemática

Tentativas crescentes de esclarecimento e divulgação da relação entre História, Educação e Matemática tornou-se objeto de inúmeras pesquisas acadêmicas, de acordo com Miguel e Miorim (2019). Desde a década de 1980, o interesse em torno das questões históricas relativas à Matemática, ao seu ensino e à sua aprendizagem foi retomado. A exemplo disso, Miguel e Miorim (2019, p. 9) destacam que "em 1983 ocorreu a criação do International Study Group on the Relations between the History and Pedagogy of Mathematics (HPM), grupo criado durante a realização do Workshop História da Educação Matemática, ocorrido na cidade de Toronto, Canadá, em 1983" e vinculado à *International Commission on Mathematical Instruction* (ICMI), importante Instituição de pesquisa ligada ao ensino da Matemática.

No Brasil, relatam Miguel e Miorim (2019), motivações, ações e pesquisas isoladas sobre esse movimento organizado em torno da História da Matemática podem ser reconhecidas, pelo menos, desde meados da década de 1980 e certamente foram intensificadas com a criação da Sociedade Brasileira de História da Matemática (SBHMat), em 1999. Estudos de temas ligados à História da Matemática em sala de aula têm gerado diversas publicações, como mostra o Dossiê História das Ciências e ensino de Ciências, publicado na Revista Brasileira de História da Ciência (FORATO; GUERRA; BRAGA, 2015). Saito e Dias (2013) afirmam que estes estudos têm buscado maneiras de tornar o ensino de Ciências e de Matemática no Brasil mais crítico e reflexivo e, assim, mostrar a relevância histórico social dos conceitos para os estudantes, incentivando-os não somente ao aprendizado necessário para sua formação, mas também a uma participação mais ativa na sociedade.

Essa ampliação da presença do discurso histórico em produções destinadas à Matemática escolar nos leva a investigar quais argumentos têm sido utilizados para justificar a inclusão desse discurso ao ensino e como ele relaciona-se ao processo de ensino-aprendizagem da Matemática.

Nos PCNs (BRASIL, 1998), a História da Matemática destaca-se como um dos recursos a serem usados em sala de aula, bem como na valorização da temática da Pluralidade Cultural, como confirma o trecho a seguir:

> A História da Matemática pode oferecer uma importante contribuição ao processo de ensino e aprendizagem dessa área do conhecimento. Ao revelar a Matemática como uma criação humana, ao mostrar necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, ao estabelecer comparações entre os conceitos e processos matemáticos do passado e do presente, o professor cria condições para que o aluno desenvolva atitudes e valores mais favoráveis diante desse conhecimento. Além disso, conceitos abordados em conexão com sua história constituem veículos de informação cultural, sociológica e antropológica de grande valor formativo. A História da Matemática é, nesse sentido, um instrumento de resgate da própria identidade cultural. (BRASIL, 1998, p. 42)

Essa historicização, portanto, é essencial tanto para a Matemática, quanto para a

Educação e a Valorização Cultural.

Para Fried (2014 *apud* ROQUE, 2014, p. 169), outro pesquisador que desenvolveu reflexões nesse campo,

> [···] deve-se enxergar a Matemática como uma atividade essencialmente humana, ou seja, a história como parte da natureza da Matemática. Acredita-se que, vista como expressão da cultura, a perspectiva dos alunos sobre a Matemática possa se transformar radicalmente, pois esta visão questiona a imagem predominante dos objetos matemáticos como entes eternos, platônicos, apreendidos do mesmo modo em qualquer tempo e lugar. Desta perspectiva, o tema cultural tem muito em comum com a Etnomatemática ou com as discussões sobre o multiculturalismo. A história da Matemática ajudaria os estudantes a adquirirem um sentido de diversidade, sendo o reconhecimento de diferentes contextos e necessidades um importante componente na elaboração do corpo de conhecimentos que chamamos Matemática.

Outro argumento tem sido remetido aos defensores da História na Educação Matemática, o de que o conhecimento histórico despertaria o interesse do aluno pelo conteúdo que lhe está sendo ensinado. No entanto, cabe ressaltar que, conforme explicam Miguel e Miorim (2019, p. 19), os textos históricos, por si mesmos, não teriam esse poder de motivar os estudantes, pois

> [...] se fosse esse o caso, o ensino da própria história seria automotivador. Isso, no entanto, não é confirmado pela maioria dos professores de História que se defrontam, em seu cotidiano, não apenas com o desinteresse de seus alunos por esse campo do saber, como também com a enorme dificuldade de fazer com que eles compreendam a sua importância, a sua natureza, os seus objetivos e os seus métodos.

Esse tema motivacional também é problematizado por Fried (2014 *apud* ROQUE, 2014, p. 168), que argumenta que:

> Em primeiro lugar, supõe-se, ainda que inconscientemente, que o conteúdo matemático não pode ser interessante por si mesmo, logo deve ser embelezado com estórias, anedotas ou imagens. A história é algo a ser acrescentado às aulas de Matemática a fim de tornar o ensino menos enfadonho. Em segundo lugar, negligencia-se a história como um corpo de conhecimentos a ser levado a sério e ensinado, sendo somente um "a mais" nas estratégias de ensino esperadas dos professores. O principal aqui é que a história possa despertar os estudantes, não importando se o que se conta é informativo, verdadeiro ou pertinente. Por estas razões, o tema motivacional acaba por não fazer justiça nem à Matemática nem à história – a Matemática é tida como um saber enfadonho por definição; e a especificidade da história é colocada de lado.

Ao contrário disso, tenhamos em mente a "motivação" referenciada na pesquisa com a história do holandês – naturalizado moçambicano – Paulus Gerdes. No trabalho proposto por Gerdes (2012), e citado por Miguel e Miorim (2019), a motivação propiciada pela História é "gerada por meio de discussões relacionadas a aspectos políticos, sociais e culturais, associadas ao questionamento da história de uma Matemática única, de características eurocentrista, e da valorização de histórias sociais e culturais da Matemática". (MIGUEL; MIORIM, 2019, p. 22)

Apesar de Gerdes não ter envolvimento direto na discussão referente às potencialidades pedagógicas da História da Matemática, ele traz um importante ponto de vista da História da Matemática, de acordo com Miguel e Miorim (2019), ao negá-la como um simples ponto de partida ou algo pronto e acabado que possa constituir objeto de uso e abuso por parte dos educadores e ao propor três estratégias na abordagem da Matemática:

- A estratégia cultural, desenvolvida através da divulgação da história cultural da Matemática, que tem como objetivo "encorajar a compreensão de que [cada] povo tem sido capaz e será capaz de desenvolver a matemática [...] [e que] a Matemática do povo pode enriquecer a compreensão da Matemática, do seu ensino e da sua história". (GERDES, 2012, p. 140, 142)
- A estratégia social, que visa desmistificar preconceitos sobre os talentos matemáticos das camadas sociais discriminadas e exploradas, tal como mulheres, tendo em vista a "compreensão de que filhos de todas as classes sociais e de ambos os sexos, são capazes de dominar, desenvolver e utilizar a matemática". (GERDES, 2012, p. 146)
- A estratégia individual-coletiva, que promove discussão coletiva de aspectos relacionados à Matemática – tais como erros e formação de conceitos – promove a compreensão "não-tautológica do conhecimento matemático" (GERDES, 2012, p. 149)

Essas estratégias nos remetem às considerações propostas pela BNCC para a área de Matemática e suas Tecnologias, que vê como um dos desafios da aprendizagem da Matemática no Ensino Médio

> [...] mostrar que o desenvolvimento da disciplina é fruto da experiência humana ao longo da história. Assim, ela não é um edifício perfeito que surgiu pronto da mente de poucos seres privilegiados, a fim de ser estudada para puro deleite intelectual. O desenvolvimento gradual desse campo do saber, por seres humanos inseridos em culturas e sociedades específicas, confere a ela valores estéticos e culturais, e fornece uma linguagem com a qual pessoas de diferentes realidades podem se comunicar, com precisão e concisão, em várias áreas do conhecimento. (BRASIL, 2018, p. 522)

Considera-se importante então que professores e estudantes entendam que a evolução da Matemática parte de um processo sócio-cultural e que a Matemática escolar é resultado da ação humana de entender e explicar o mundo e suas experiências nele. O estudo e consideração de aspectos da História da Matemática, de acordo com Roque (2014) é essencial para essa compreensão.

Outro argumento defendido por pesquisadores que trabalham a proposta da História da Matemática como recurso no ensino da Matemática, e exposto por Miguel e Miorim (2019), parte do ponto de vista de que a História constitui uma fonte de métodos adequados para a abordagem pedagógica de certas unidades ou tópicos da Matemática escolar.

Para D'Ambrosio (2007, p. 402), o estudo da História da Matemática apresenta-se ao professor "como uma oportunidade para entender tanto problemas que possam motivar a construção de novos conceitos matemáticos quanto a sequência de esquemas desenvolvidos pelos indivíduos ao procurar uma solução significativa para um problema".

Esse ponto de vista também é defendido por Fried (2014 *apud* ROQUE, 2014), que propõe incluir no ensino argumentos sobre supostos tratamentos históricos de tópicos da Matemática. Essas abordagens, para Fried, tratariam dos assuntos do currículo de Matemática, evidenciando que a Matemática do passado apresenta conceitos modernos que podem ser traduzidos em nossa linguagem e, dessa forma, "teriam um poder pedagógico por si mesmas ou por oferecer um contraste com abordagens modernas" (FRIED, 2014 *apud* ROQUE, 2014, p. 168).

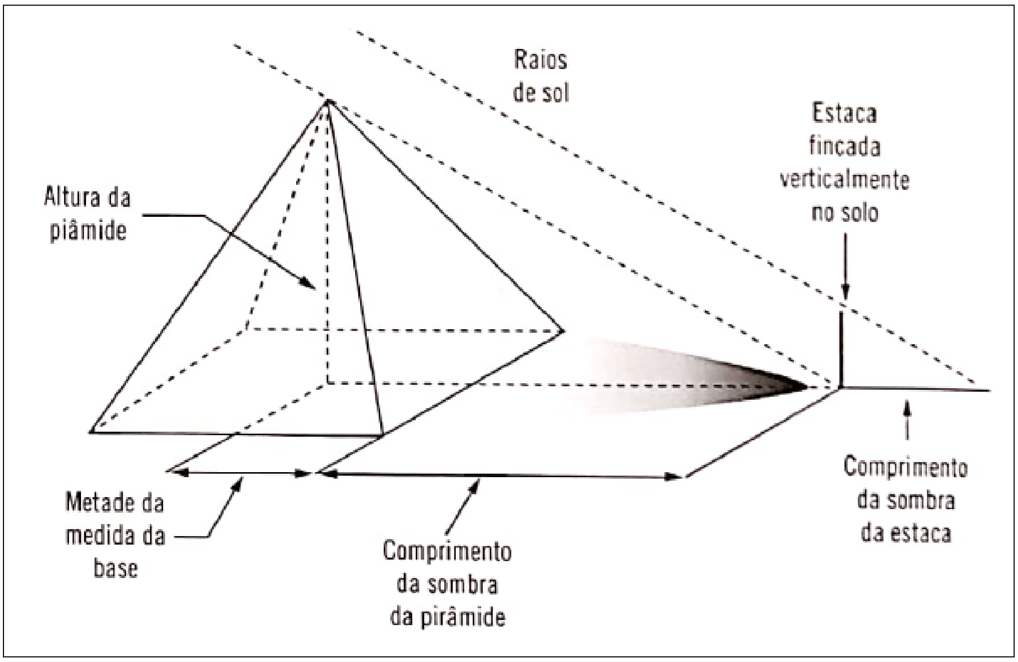
De acordo com Fossa (1998 *apud* MENDES, 2002), existe uma perspectiva construtivista do uso da História da Matemática: uso de modo ponderativo, no qual ela poderá se constituir a fonte das atividades propostas em sala de aula, integrado a um processo ativo de construção do conhecimento. Nessa linha, aparece o uso episódico, indicado para o ensino de determinado conceito, na medida em que outras atividades poderão ser acrescentadas ao ensino desse mesmo conceito, que permitiria ao aluno percorrer os caminhos da História da Matemática durante todo o desenvolvimento do conteúdo, principalmente com atividades inspiradas pela História da Matemática.

Nesse contexto, um bom exemplo seria a abordagem do teorema de Tales, um tratamento como feito no estudo de Santos e Vianna (2011), com alunos de 9º ano do Ensino Fundamental.

Em sua proposta, as pesquisadoras primeiro trabalharam uma atividade que envolvia cálculo de proporções entre as medidas de segmentos determinados por retas paralelas cortadas por duas transversais (não ligada à História da Matemática), visando preparar o aluno para a compreensão do enunciado do teorema de Tales e sua demonstração. Em seguida, os alunos fizeram alguns exercícios de aplicação (os que constam nos livros didáticos).

Num segundo momento, foi relatado como Tales tinha medido a altura da pirâmide de Quéops, no Egito, utilizando tão somente a medida do comprimento de uma estaca e as medidas de comprimento das sombras da estaca e da altura da pirâmide (metade da medida da base + comprimento da sombra da pirâmide). Com base nisso, perguntou-se aos alunos como conseguiriam medir a altura de um poste que estava no pátio da escola. Grande parte deles responderam que poderia fazer como Tales, usando as projeções das sombras. Os alunos ficaram muito motivados com essa atividade: a aplicação do teorema de Tales. Na Figura 1, temos a representação esquemática da experiência que Tales teria feito para medir a altura da pirâmide de Quéops em sua viagem ao Egito.

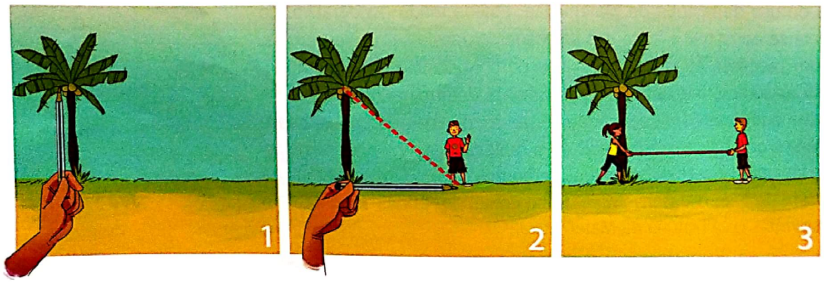
Figura 1 – Experiência de Tales.



Fonte: Bonjorno *et. al.* (2014, p. 18)

Trabalhou-se ainda em uma atividade que contemplava o mesmo conteúdo, porém sem projeção de sombra, que pode ser feito em dias nublados. Foi sugerido que ela fosse realizada em duplas, para que um ajudasse o outro nas medições. Primeiro, foi escolhido o objeto para estimar a altura, por exemplo, de uma árvore. Um aluno pega uma caneta, toma uma distância, estica o braço, fecha um olho, mira a extremidade da caneta na ponta superior da árvore e deixa a ponta esticada, gira a caneta e o outro aluno vai para o local indicado pela ponta da caneta. Dessa forma, efetua-se a medida da distância entre o tronco da árvore e o local onde está o outro aluno, como ilustrado na Figura 2:

Figura 2 – Aplicação do Teorema de Tales.



Fonte: Santos e Vianna (2011, p. 7)

De fato, após a realização de atividades como essa, é possível compreender a magnitude e a importância de se trabalhar como recurso à História da Matemática.

Até em outras situações, nos diversos tópicos trabalhados na Educação Básica, como citado por Bonjorno *et. al.* (2014), é possível recorrer, por exemplo, aos estudos feitos pelos chineses, bem como pelos hindus, sobre o ábaco e as frações decimais, o símbolo para o zero, os quadrados mágicos, a multiplicação hindu, Bhaskara, além de analisar a História das medidas de comprimento de como as civilizações dedicaram-se à comparação de grandezas. Em seu livro, Miguel e Miorim (2019, p. 45) citam diversos exemplos que comprovam essa "diversidade de formas de abordagem e de características que se atribui à natureza da história a que se recorre".

Sem pretensão de esgotar todos os argumentos reforçadores, já que são numerosas as pesquisas que enfocam sobre a incorporação da História no ensino da Matemática, mencionamos abaixo mais alguns textos de revisões bibliográficas que nos orientam sobre a questão do "Por que História no ensino da Matemática?" e o papel da História nos objetivos educacionais.

O pesquisador Zúñiga (1990 *apud* BATISTA; LUCCAS, 2004, p. 102) enfatiza que

> [...] a história da Matemática é fonte de riqueza metodológica e epistemológica, pois a natureza Matemática e também da sua história possuem um vasto campo de experimentações, por meio dos quais é possível fazer grandes e importantes reflexões e inclusive conduzir a ideias renovadoras.

Zúñiga (1990 *apud* BATISTA; LUCCAS, 2004, p. 103) comenta que a História da Ciência e, em particular, da Matemática, já é em si mesma uma fonte de satisfação intelectual e que

> [...] na prática Matemática, a história é um fator essencial para compreensão de seus conceitos e métodos, de suas perspectivas, seus limites e suas possibilidades; um instrumento valioso para a determinação de estratégias coletivas de evolução consciente e adequada a nossas condições e recursos.

Ainda em Batista e Luccas (2004), vemos também como exemplo os estudos de Michael R. Matthews no campo das Ciências – notadamente na Física. Matthews (1995 *apud* BATISTA; LUCCAS, 2004) comenta que o ensino das Ciências desenvolveu-se totalmente separado da História e da Filosofia, e que nesta última década tem ocorrido uma reaproximação entre tais áreas. Muitos são os fatores positivos, segundo Matthews (1995 *apud* BATISTA; LUCCAS, 2004, p. 107), ocasionados por tal reaproximação:

> [...] podem humanizar as ciências e aproximá-las dos interesses pessoais, éticos, culturais e políticos da comunidade; podem tornar as aulas de ciências mais desafiadoras e reflexivas, permitindo, deste modo, o desenvolvimento do pensamento crítico; podem contribuir para um entendimento mais integral da matéria científica, isto é, podem contribuir para a superação do "mar de falta de significação" que se diz ter inundado as salas de aula de ciências, onde fórmulas e equações são recitadas sem que muitos cheguem a saber o que significam; podem melhorar a formação do professor auxiliando o desenvolvimento de uma epistemologia da ciência mais rica e mais autêntica, ou seja, de uma maior compreensão da estrutura das ciências bem como do espaço que ocupam no sistema intelectual das coisas.

Analogamente, o estudioso Miguel (1997) traz em seu trabalho de pesquisa de doutorado pontos de vistas que explicitam e fundamentam formas de manifestação da relação entre História e Matemática. Através da análise dos diferentes papéis pedagógicos atribuídos à História por matemáticos, historiadores da Matemática e educadores matemáticos, Miguel (1997) sintetiza que as principais possibilidades de uso da História como um recurso pedagógico adicional são: guia metodológico, instrumento de conscientização epistemológica, fonte de motivação, instrumento da explicação das razões para a aceitação de certos fatos, fonte de objetivos para o ensino, instrumento na formalização de conceitos e instrumento de resgate da identidade cultural.

Embora esses argumentos evidenciem as potencialidades de um ensino da Matemática que incorpore em sua prática a História da Matemática como recurso didático, Mendes e Chaquiam (2016, p. 78) apontam que "é comum ouvir de alunos e professores que a História da Matemática pouco contribui para a compreensão da própria Matemática e, de um modo geral, é um desperdício de tempo e esforço". Muitos pesquisadores também criticam a participação da História no ensino-aprendizagem da Matemática e apresentam dificuldades no estabelecimento dessa prática, denominadas por Miguel (1997) de "argumentos questionadores".

Os PCNs também observam que, apesar de

> [...] apresentada em várias propostas como um dos aspectos importantes da aprendizagem Matemática, por propiciar compreensão mais ampla da trajetória dos conceitos e métodos da ciência, a história da Matemática também tem se transformado em assunto específico, um item a mais a ser incorporado ao rol dos conteúdos, que muitas vezes não passa da

> apresentação de fatos ou biografias de matemáticos famosos. (BRASIL, 1998, p. 23)

Em Vianna (1998, p. 4) encontramos uma lista de objeções levantadas por diversos autores contra a utilização da História da Matemática como recurso didático, sintetizadas a seguir:

> 1 - O passado da Matemática não é significativo para a compreensão da Matemática atual. Com isso quer se dizer que nenhum estudante compreenderá melhor, por exemplo, o Cálculo Diferencial e Integral se estudar os métodos utilizados por Newton para resolver seus problemas.
>
> 2 - Não há literatura disponível para uso dos professores de Primeiro e Segundo graus. Em Português, temos poucos textos de história da Matemática. Mesmo em outros idiomas, a situação é difícil: embora haja uma grande quantidade de textos de história da Matemática, ainda assim é difícil encontrar textos que abordem uma história da Matemática escolar.
>
> 3 - Os poucos textos existentes destacam os resultados, mas nada revelam sobre a forma como se chegou a esses resultados. Essa observação recoloca a antiga questão da diferença entre o método de descoberta e o método de exposição. Essa diferença não é exclusiva para a Matemática, ela manifesta-se em todos os campos da atividade humana; ninguém poderá revelar toda a teia de relações em que estava imerso no momento da descoberta da solução de um problema. Esse é um dos problemas cruciais para o historiador, trata-se da seleção dos fatos históricos, seleção que está carregada de subjetividade, mesmo quando o historiador fica restrito exclusivamente a documentos.
>
> 4 - O caminho histórico é mais árduo para os estudantes que o caminho lógico. Seria uma verdadeira "tortura" para os alunos. O caminho histórico levaria a erros que foram, de fato, cometidos pelos matemáticos, implicaria em retrocessos e retomadas com novos métodos, e isso serviria para desestimular aos poucos alunos que se atrevessem a percorrer essa trilha do conhecimento matemático.
>
> 5 - O tempo dispendido no estudo da história da Matemática deveria ser utilizado para aprender mais Matemática. Essa objeção, de certa forma, sintetiza as demais: se é difícil encontrar livros textos, se os poucos textos disponíveis nada revelam sobre como se descobre coisas novas em Matemática, se o caminho percorrido cronologicamente pelo conhecimento matemático é cheio de avanços e recuos, e se, acima de tudo, todo o esforço dispendido não resulta numa melhor compreensão da Matemática atual, então para que perder tempo estudando a história da Matemática?

Acrescente-se a essa lista que "diferentes pesquisas apontam os conteúdos cobrados nos vestibulares como um importante obstáculo para a introdução da História das Ciências na Escola Básica" (FORATO; GUERRA; BRAGA, 2015, p. 137). Além disso, Miguel (1997) pondera sobre os usos da História da Matemática no ensino, pois acredita que pesquisadores têm sido muito ingênuos ao acreditar que a História pode resolver as dificuldades inerentes do processo de ensino e de aprendizagem da Matemática.

Vale observar que, em momento algum desconsideramos a importância de outras correntes como referencial ou declara-se a inserção da História como recurso pedagógico adicional, em particular ao ensino-aprendizagem da Matemática, solução dos problemas educacionais, tampouco negligencia-se os paradigmas e a necessidade de evolução desse fenômeno educativo.

Todavia, vale observar o ponto de vista de Miguel e Miorim (2019, p. 125), que entendem que

> [...] entre as posições extremadas que tentam nos convencer de que a história tudo pode ou a história nada pode, parece-nos mais adequado assumir uma posição intermediária que acredita que a história – desde que devidamente constituída com fins explicitamente pedagógicos e organicamente articulada com as demais variáveis que intervêm no processo de ensino-aprendizagem escolar da Matemática – pode e deve se constituir ponto de referência tanto para a problematização pedagógica quanto para a transformação qualitativa da cultura escolar e da educação escolar e, mais particularmente, da cultura Matemática que circula e da educação Matemática que se promove e se realiza no interior da instituição escolar.

Nesse mesmo sentido, Mendes e Chaquiam (2016, p. 78) apontam estudos que afirmam que

> [...] a história da Matemática, combinada com outros recursos didáticos e metodológicos, pode contribuir para a melhoria do ensino e da aprendizagem da Matemática e emerge como uma possibilidade de buscar uma nova forma de ver e entender a Matemática, tornando-a mais contextualizada, mais integrada às outras disciplinas, mais agradável, mais criativa, mais humanizada.

Mendes e Chaquiam (2016) em sua obra preocupam-se em discutir o uso da História no ensino, apresentando ampla argumentação com aporte em diversos autores consagrados enfatizando o contexto da História da Matemática e descrevem a estruturação de um modelo que traduz seu olhar como pesquisador sobre a possibilidade da História da Matemática ser utilizada com ênfase didática para o ensino de Matemática. O texto produzido por eles subsidia discussões a respeito das interfaces entre História e Matemática, a exemplo das seguintes questões orientadoras:

- Por que História no ensino da Matemática?

> [...] para contribuir para a ampliação da compreensão dos estudantes acerca das dimensões conceituais da Matemática, bem como das contribuições didáticas para o trabalho do professor e para fortalecer suas competências formativas para o exercício de ensino [...] para esclarecer os aspectos formativos, informativos e utilitários da Matemática, principalmente no sentido de conduzir os estudantes ao acervo cultural da Matemática, com a finalidade de desenvolver seu interesse pelo assunto e estimular a preservação dessa memória intelectual humana [...] para dar significado ao conhecimento matemático ensinado e aprendido por

> estudantes da Educação Básica e Superior. (MENDES; CHAQUIAM, 2016, p. 17)

Segue-se, portanto, que, em primeiro lugar, o uso da História da Matemática em sala de aula favorece a formação do professor com a constituição, como aponta Schubring (1997, p. 58 *apud* MENDES; CHAQUIAM, 2016, p. 83), "de um meta-saber capaz de contribuir para uma melhor orientação dos processos pedagógicos". Ainda de acordo com Schubring (1997, p. 58 *apud* MENDES; CHAQUIAM, 2016, p. 83), a História da Matemática "pode servir como base para a compreensão do desenvolvimento da Matemática não como uma concepção continuísta e cumulativa, mas com fases alternadas de continuidade, rupturas e diversidade". Para compreender melhor esses argumentos que pretendem justificar o uso de informações históricas nas aulas de Matemática, é preciso ter clareza sobre qual História trata-se.

- Qual História no ensino da Matemática?

> Nem todas as informações históricas podem conter um potencial que contribua de maneira suficiente para se ensinar Matemática. [...] a história da Matemática que consideramos adequada para ser inserida no desenvolvimento conceitual dos estudantes refere-se diretamente ao desenvolvimento epistemológico das ideias, conceitos e relações matemáticas ensinadas e aprendidas na Educação Básica e no Ensino Superior. Trata-se, mais concretamente, das histórias relacionadas aos aspectos matemáticos em seu processo de criação, reinvenção e organização lógica, estabelecido no tempo e no espaço com a finalidade de sistematizar soluções de problemas de ordem sociocultural, científica e tecnológica, em todos os tempos e lugares. (MENDES; CHAQUIAM, 2016, p. 18)

Ainda esclarecendo sobre qual deve ser a História adequada ou não para ser usada no ensino da Matemática, Mendes e Chaquiam (2016, p. 19) apontam que

> [...] as histórias que tratam exclusivamente sobre a vida dos matemáticos ou apenas dos professores de Matemática, e que têm apelo fortemente biográfico, podem contribuir de forma apenas ilustrativa para o ensino e a aprendizagem de conceitos, propriedades e relações matemáticas, se forem exploradas apenas no âmbito dessas biografias. [...] Outras histórias das Matemáticas na sala de aula que se apresentam com características um pouco inadequadas para uso pedagógico são aquelas que se apresentam como sinônimos de narrativas históricas sobre nomes, datas e locais, sem configurar fundamentalmente o desenvolvimento dos conceitos, propriedades e relações matemáticas. (MENDES; CHAQUIAM, 2016, p. 19)

- Como colocar essas Histórias da Matemática na prática de sala de aula?

> Ensinar Matemática com apoio na história do desenvolvimento das ideias matemáticas não significa ensinar história da Matemática. Nesse sentido

> caberá ao professor de Matemática o exercício de transposição didática a ser operacionalizado em sala de aula. [...] Quando menciono o termo transposição didática me refiro à transposição de saberes, uma vez que a transposição didática pressupõe um trabalho de reorganização, mediação ou reestruturação dos saberes historicamente constituído em saberes tipicamente escolares, ou seja, em saberes ensináveis e aprendíveis que possam compor a cultura escolar com conhecimentos que transcendem os limites da escola. (MENDES; CHAQUIAM, 2016, p. 20)

É nesse sentido que

> [...] as matemáticas exploradas por meio de investigação histórica podem ser mobilizadas para a sala de aula, em um processo de transposição didática, para se constituir em aparato didático para viabilizar a aprendizagem de conceitos, propriedades e teorias matemáticas. As informações históricas, portanto, passam a ser tomadas como os saberes já estabelecidos socialmente, que podem ser tomados como matéria-prima a ser vetorizada com a finalidade de transformar o conhecimento a ser aprendido em algo mais aproximado do aprendiz. Trata-se, na verdade, de uma reinvenção Matemática que deveria ser melhor apropriada aos objetivos de trabalho do professor e do nível de aprofundamento que precisa ser dado ao aprendiz, ou seja, ao aluno. (MENDES; CHAQUIAM, 2016, p. 22)

Por fim, sobre a inserção das informações históricas como um agente provocador do exercício cognitivo no desenvolvimento da aprendizagem dos estudantes em sala de aula, entende-se que

> [...] o professor poderá extrair das informações históricas, aspectos epistemológicos que favoreçam a sua explicação de porquês matemáticos e que muitas vezes favorecem a ampliação e o enriquecimento da aprendizagem dos alunos, ocasionando até a manifestação de interesses para estudos futuros sobre os temas tratados pelo professor, a partir das informações históricas como problemas extraídos de fontes primárias ou modelos matemáticos criados ou reformulados em determinadas épocas, bem como diferentes formas de demonstrar um teorema ou justificar a existência de uma propriedade Matemática. (MENDES; CHAQUIAM, 2016, p. 25)

Em vista disso, Mendes e Chaquiam (2016) atentam-se em não fazer uma História pitoresca e anedotária, em evitar que a História da Matemática seja constituída apenas como ilustração, presa a fatos isolados, nomes célebres, notas históricas.

> Antes de tudo, devemos ter em mente que escrever história é gerar um passado, circunscrevê-lo, organizar material heterogêneo dos fatos para construir no presente uma razão. Neste sentido, deve-se observar com muita atenção qual o espaço que será "recomposto", tendo em vista o ocorrido e os perigos do imaginado, que as articulações em torno dos recortes cronológicos podem gerar distorções, além da preocupação com a linguagem no sentido de retratar o passado na modernidade de forma contextualizada e significativa. (MENDES; CHAQUIAM, 2016, p. 88)

Dessa forma, de acordo com Freudenthal (1981 *apud* D'Ambrosio, 2013, p. 9), "é possível fazer uma História da Matemática contextualizada, interessante e atrativa, evitando todas essas distorções".

Portanto, os argumentos favoráveis apresentados nos estimulam ao desenvolvimento de novas ações na busca de preencher as lacunas existentes, esclarecer fatos históricos, dinamizar abordagens de ensino, ressaltar um corpo maior de uma ciência. Nesses diversos cenários, encontramos razões para fazer uso da História da Matemática para subsidiar a elaboração de atividades que envolvam História (ou, no caso deste trabalho, métodos matemáticos historicamente produzidos) e conteúdo da Matemática para uso em sala de aula.

Com o propósito de trazer alguma contribuição para a continuidade desse assunto, nosso objetivo no próximo capítulo é ressaltar as relações históricas que articulam a Álgebra e a Geometria, mostrando como a Geometria estabelece uma releitura para o que conhecemos hoje como Álgebra e como isso pode ser usado como estratégia de aproximação entre essas subáreas da Matemática, permitindo uma abordagem alternativa na interpretação de determinados problemas abordados em sala de aula e contribuindo para a ampliação da compreensão dos estudantes acerca das dimensões conceituais da Matemática, bem como as contribuições didáticas para o trabalho do professor.

3 AS MANIFESTAÇÕES DA MATEMÁTICA AO LONGO DA HISTÓRIA

Um dos princípios norteadores deste capítulo é aproximar estudantes de licenciatura e professores de Matemática da Educação Básica do desenvolvimento epistemológico dos temas matemáticos explorados nessa pesquisa. Para tal, procuraremos dar exemplos de alguns momentos na História da Matemática que relacionam a Álgebra e a Geometria por meio de construções geométricas.

Pretendemos oportunizar uma opção de abordagem dinâmica, provocativa, construtiva e formal acerca do ensino-aprendizagem das construções geométricas, a fim de subsidiar o exercício cognitivo do aluno acerca das relações entre a abordagem geométrica, mais utilizada na resolução de problemas no passado, e a algébrica, mais atual. Ainda assim, é necessário que cada professor realize uma reinvenção apropriada aos objetivos do seu trabalho e do nível de aprofundamento que precisa ser dado ao estudante.

Na narração da História que se segue, não nos prenderemos a "quem descobriu o que" ou "onde surgiu uma determinada prática, método, ferramenta, fórmula ou pensamento". Entendemos que

> [$\cdots$] esse tipo de informação, além de ter pouca relevância, oferece uma imagem deturpada da Matemática, como se ela fosse uma ciência de conceitos prontos, dados a priori, que os povos antigos ainda não tinham descoberto ou não tinham possibilidade de conhecer (ROQUE, 2012, p. 5).

Como afirma Roque (2012, p. 437), "não existe uma história da Matemática definitiva, à qual cada geração de historiadores vai adicionando sua singela contribuição. Há matemáticas diferentes, em tempos diferentes".

Dessa forma, percorreremos a História da Matemática exemplificando como determinadas civilizações de épocas diferentes resolviam seus problemas matemáticos, ora abordando-os de forma algébrica, ora de forma geométrica, ou inter-relacionando conhecimentos, a fim de motivar a utilização de variados métodos de abordagem de um conteúdo ou problema.

A pesquisa sobre a História da Matemática que fizemos baseia-se nos estudos de Eves (2011); Roque (2012); Roque e Pitombeira (2012); Fiorentini, Miorim e Miguel (1993); Garbi (2010); Andrade (2000); Mol (2013); Wagner (2015); Serrão e Brandemberg (2013) e Gomes (2017).

3.1 A Matemática na Babilônia

Inicialmente, gostaria de propor o seguinte questionamento: "a Matemática é um saber operacional, de tipo algébrico, e tem como um de seus principais objetivos a aplicação de fórmulas prontas a problemas?" (ROQUE, 2012, p. 6)

Sobre isso, Roque (2012, p. 6) argumenta que

> [$\cdots$] desde tempos muito antigos, povos como os babilônicos já saberiam resolver equações de segundo grau. Em seguida, cada época teria acrescentado uma pequena contribuição, até que, por volta do século XVI, a álgebra começaria a se desenvolver na Europa, tendo adquirido os contornos definitivos da disciplina que chamamos por este nome.

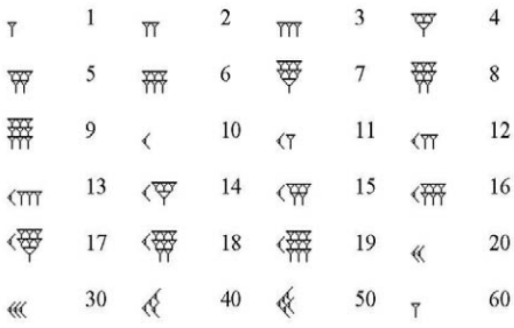
Roque e Pitombeira (2012) explicam que os povos babilônicos que habitaram a Mesopotâmia, durante o período Babilônio Antigo, promoviam a Matemática, apesar de fórmulas ou algoritmos algébricos modernos. Esses povos sabiam adicionar, subtrair, multiplicar, dividir e extrair raízes quadradas. Seu sistema numérico era o sexagesimal – uma notação posicional de base sessenta.

A título de informação, sabemos, por meio de Roque e Pitombeira (2012), que ainda hoje o sistema que usamos para representar as horas, minutos e segundos é um sistema posicional sexagesimal. Assim, 1h 4 min 23 s é igual a

$$1 \cdot (60 \cdot 60) + 4 \cdot 60 + 23 = 3.863s.$$

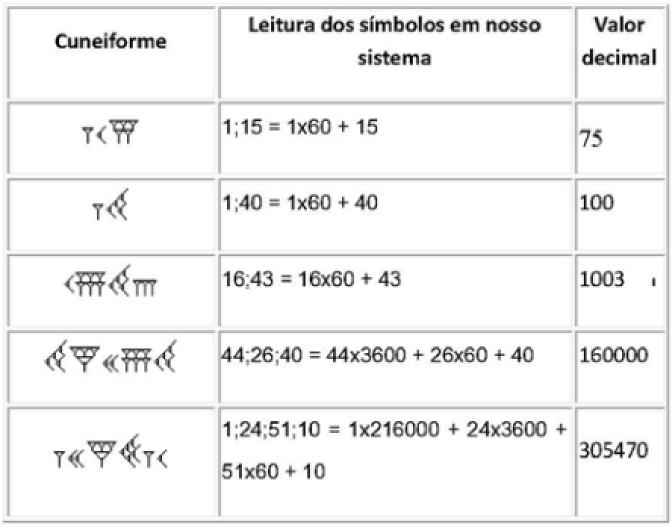
Nosso sistema numérico possui dez diferentes símbolos, como $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$. Para compor qualquer outro número, usamos a junção de dois ou mais símbolos dentre esses dez. Por isso, nosso sistema é chamado de sistema posicional de numeração de base dez. Já o sistema sexagesimal, possui sessenta símbolos diferentes para representação de números. A partir do sessenta, a composição dos números era feita com a junção de dois ou mais símbolos dentre os sessenta. Na Figura 3, é possível observar os símbolos usados pelos babilônios para representar os números e, na Figura 4, alguns exemplos de números escritos no sistema sexagesimal usado pelos babilônios.

Figura 3 – Símbolos numéricos do sistema sexagesimal usados pelos babilônios.



Fonte: Roque e Pitombeira (2012, p. 8)

Figura 4 – Números escritos no sistema sexagesimal usados pelos babilônios.



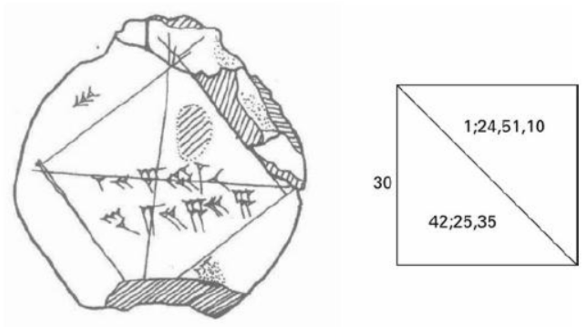
Cuneiforme	Leitura dos símbolos em nosso sistema	Valor decimal
	1;15 = 1x60 + 15	75
	1;40 = 1x60 + 40	100
	16;43 = 16x60 + 43	1003
	44;26;40 = 44x3600 + 26x60 + 40	160000
	1;24;51;10 = 1x216000 + 24x3600 + 51x60 + 10	305470

Fonte: Roque e Pitombeira (2012, p. 10)

"Além das operações de adição, subtração, multiplicação e divisão, os babilônicos sabiam também calcular potências e raízes quadradas, que eram registradas em tabletes" (ROQUE; PITOMBEIRA, 2012, p. 16) – que tem a mesma função de nossas tabuadas. O exemplo mais famoso de cálculo de raízes quadradas pelos babilônios encontra-se no tablete YBC 7289[1], ilustrado na Figura 5, datado da época de 2000 a 1600 a.C.

[1] Para mais informações sobre esse tablete, acessar https://pt.mathigon.org/timeline ou ainda https://pt.wikipedia.org/wiki/YBC_7289

Figura 5 – Tablete YBC 7289 - aproximações para raízes quadradas.

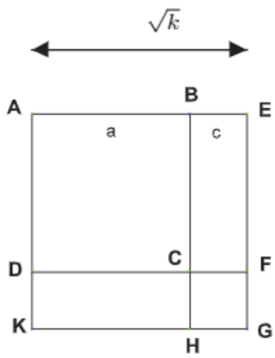


Fonte: Katz (2009, p. 18 *apud* Wille, 2016, p. 30)

Katz (1998), citado por Roque e Pitombeira (2012), apresenta uma proposta para explicar como os babilônios chegaram à raiz quadrada baseado no resultado geométrico a seguir e ilustrado na Figura 6.

> Se o segmento AE é cortado em um ponto B, o quadrado sobre AE é igual ao quadrado sobre AB mais o quadrado sobre BE mais duas vezes o retângulo formado por AB e BE. Se AB medir a e BE medir c, trata-se da versão geométrica da igualdade que escrevemos hoje em dia como $(a+c)^2 = a^2 + 2ac + c^2$. Calcular a raiz de k é achar o lado de um quadrado de área k. Logo, podemos tentar colocar no interior deste quadrado o maior quadrado possível cujo lado conhecemos e usar o resultado geométrico acima para encontrar o resto. Ou seja, se a é o lado do quadrado conhecido, obtemos que a raiz de k, $\sqrt{k}$, é igual a $a+c$. (KATZ, 1998, p. 28 *apud* ROQUE; PITOMBEIRA, 2012, p. 17)

Figura 6 – Cálculo da $\sqrt{k}$ pelos babilônios.



Fonte: Roque e Pitombeira (2012, p. 17)

A civilização babilônica, segundo Katz (1993 *apud* ANDRADE, 2000), também estudou e desenvolveu significativamente a teoria da resolução das equações quadráticas, à margem do uso de qualquer simbolismo ou conhecimento formal algébrico, não constituindo dificuldade para esse povo encontrar as soluções de qualquer equação do 2º grau completa com coeficientes positivos, que podem ser divididas em três tipos:

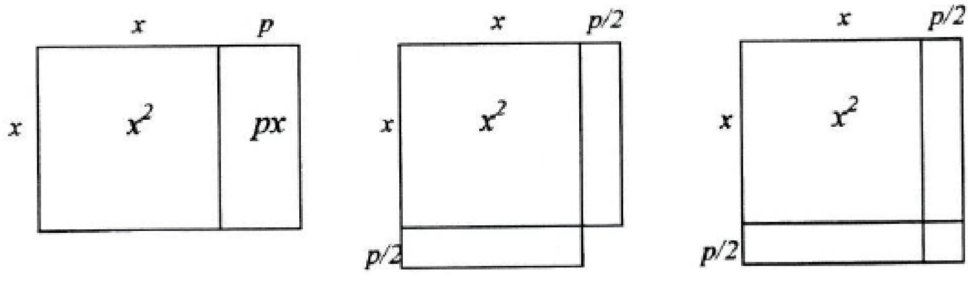
- $x^2 + px = q$;
- $x^2 = px + q$;
- $x^2 + q = px$.

Os documentos matemáticos provenientes da civilização Mesopotâmica não favorecem, em geral, indicações quanto ao modo como eram obtidas as soluções dos problemas propostos. Apesar disso, Katz (1993, *apud* ANDRADE, 2000) é de opinião que os algoritmos resolutivos das equações quadráticas devem ter sido obtidos através de raciocínios geométricos. Katz defende que a descoberta para os tipos de equações de 2º grau apresentadas acima poderá ter sido apoiada nas figuras como as que a seguir se apresentam.

Exemplo 3.1.1. *Equação do tipo:* $x^2 + px = q$.

Solução 3.1.1. *Argumentação para resolução.*

Figura 7 – Argumentação para resolução da equação do tipo $x^2 + px = q$.



Fonte: Andrade (2000, p. 16)

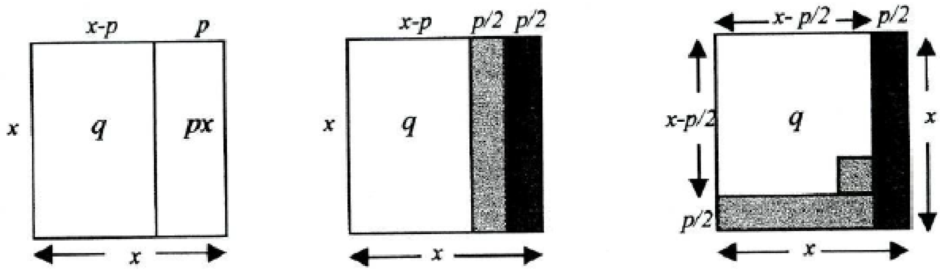
Note que, ao calcular a área da região ilustrada pela primeira e pela segunda imagem da Figura 7, obtemos, em cada uma, área total igual a $x^2 + px$. *Já a área total da terceira imagem da Figura 7 é dada por* $x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2$. *Como* $x^2 + px = q$, *vem que a área do quadrado de lado* $\left(x + \frac{p}{2}\right)$ *é* $q + \left(\frac{p}{2}\right)^2$*; daí conclui-se que*

$$x + \frac{p}{2} = \sqrt{q + \left(\frac{p}{2}\right)^2} \Longleftrightarrow x = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} - \frac{p}{2}.$$

Exemplo 3.1.2. *Equação do tipo:* $x^2 = px + q$.

Solução 3.1.2. *A Figura 8 ilustra uma argumentação para resolução da equação* $x^2 = px+q$*, equivalente a* $x^2 - px = q$*, porém os Babilônios não aceitavam coeficientes negativos, por esse motivo escreve-se* $x^2 = px+q$*).*

Figura 8 – Argumentação para resolução da equação do tipo $x^2 = px+q$.



Fonte: Andrade (2000, p. 17)

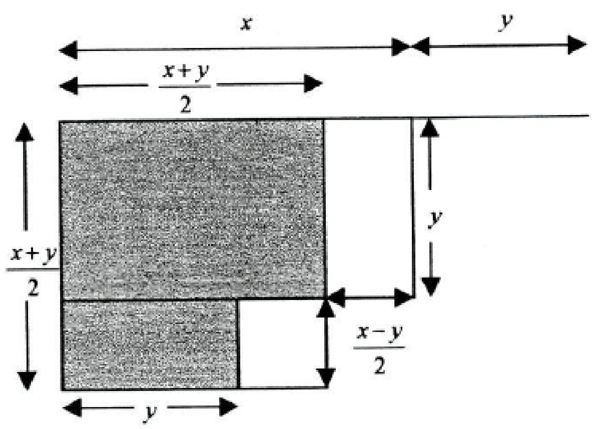
No final da sequência ilustrada pela Figura 8 conclui-se que a área do quadrado de lado $\left(x - \frac{p}{2}\right)$ *é igual a* $q + \left(\frac{p}{2}\right)^2$ *de onde tira-se que*

$$x - \frac{p}{2} = \sqrt{q + \left(\frac{p}{2}\right)^2} \Longleftrightarrow x = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} + \frac{p}{2}.$$

Exemplo 3.1.3. *Equação do tipo:* $x^2 + q = px$.

Solução 3.1.3. *A Figura 9 ilustra uma argumentação para resolução da equação supra-mencionada.*

Figura 9 – Argumentação para resolução da equação do tipo $x^2 + q = px$.



Fonte: Andrade (2000, p. 19)

A área da zona sombreada é igual à área do retângulo que tem lados x *e* y*; daí, a área é dada por* $x \cdot y = P$*. Além disso, considere* $S = x+y$*. Segue-se, então, que:*

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = \left(\frac{S}{2}\right)^2 = P + \left(\frac{x-y}{2}\right)^2.$$

Portanto,

$$\left(\frac{S}{2}\right)^2 = P + \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 \Longleftrightarrow \frac{x-y}{2} = \sqrt{\left(\frac{S}{2}\right)^2 - P}.$$

Dessa última igualdade, tiram-se os valores de x e de y:

$$\begin{cases} x = \dfrac{x+y}{2} + \dfrac{x-y}{2} = \dfrac{S}{2} + \sqrt{\left(\dfrac{S}{2}\right)^2 - P} \\[2ex] y = \dfrac{x+y}{2} - \dfrac{x-y}{2} = \dfrac{S}{2} - \sqrt{\left(\dfrac{S}{2}\right)^2 - P}. \end{cases}$$

É interessante verificar aqui que cálculos realizados atualmente com o auxílio de métodos da Álgebra tinham propostas diferentes de resolução em outras épocas e civilizações. Roque e Pitombeira (2012, p. 7) observam que “os babilônios e egípcios faziam Matemática, porém em um sentido diferente do nosso”. Não podemos usar a classificação atual dos campos da Matemática para enquadrar as práticas de Matemática de povos antigos, porém, como explica Roque e Pitombeira (2012), os babilônios tinham procedimentos sistemáticos para resolver problemas que hoje chamamos de geométricos ou procedimentos geométricos na resolução de problemas que hoje chamamos de algébricos.

É preciso considerar então que “não há somente uma Matemática, que evoluiu ao longo do tempo para aquela que conhecemos hoje. Várias práticas, ao longo da história, podem ser chamadas de maneira vaga com o que hoje concebemos como tal” (ROQUE; PITOMBEIRA, 2012, p. 7).

3.2 A Matemática na Grécia

As práticas matemáticas dos povos mesopotâmicos (babilônios) eram bem diferentes das práticas dos povos gregos, de acordo com Roque e Pitombeira (2012). “Não há, contudo, uma documentação confiável que possa estabelecer a transição entre a Matemática mesopotâmica e a Matemática grega” (ROQUE; PITOMBEIRA, 2012, p. 50). Com isso não queremos dizer que a Matemática findou-se em uma região e iniciou-se em outra região. Com toda certeza, não. A ideia, na verdade, é a mesma enfatizada pela História tradicional, citada por Roque e Pitombeira (2012), mostrar as características da Matemática babilônica, marcada por cálculos e algoritmos, em detrimento da Matemática teórica, praticada pelos gregos, fundada em argumentações consistentes e demonstrações.

O pensamento expresso na Matemática grega tem relação com o contexto da época. Os últimos séculos do segundo milênio a.C. testemunharam muitas mudanças econômicas e políticas. Em seu livro, Eves (2011) relata que algumas civilizações desapareceram, o poder do Egito e da Babilônia declinou, e outros povos, especialmente hebreus, os assírios, os fenícios e os gregos, passaram ao primeiro plano. A Idade do Ferro que se anunciava trazia consigo mudanças abrangentes no que se refere a guerra e a todas as atividades que exigiam instrumentos ou ferramentas. Inventou-se o alfabeto e introduziram-se as moedas. O comércio foi crescentemente incentivado e fizeram-se muitas descobertas geográficas. O mundo estava pronto para um novo tipo de civilização.

Segundo Eves (2011), o aparecimento dessa nova civilização se deu nas cidades comerciais espalhadas ao longo das costas da Ásia Menor e, mais tarde, na parte continental da Grécia, na Sicília e no litoral da Itália. A visão estática do Oriente antigo sobre as coisas tornou-se insustentável e, numa atmosfera de racionalismo crescente, o homem começou a indagar *como* e *por quê*.

> Pela primeira vez na Matemática, como em outros campos, o homem começou a formular questões fundamentais como "Por que os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais?" e "Por que o diâmetro de um círculo divide esse círculo ao meio?". Os processos empíricos do Oriente antigo, suficientes o bastante para responder questões na forma de como, não mais bastavam para as indagações mais científicas na forma de por quê. Algumas experiências com o método demonstrativo foram se consubstanciando e se impondo, e a feição passou ao primeiro plano. (EVES, 2011, p. 94)

Assim, nessa atmosfera de racionalismo, os gregos desempenharam um importantíssimo papel, pois foram eles os primeiros europeus que, em contato com o Oriente Médio, interessaram-se pelas técnicas e reconheceram formalmente a utilidade da Geometria. "Esta palavra, aliás, é de origem grega e significa medida da terra, porque naquele tempo era este um dos principais usos que dela se fazia" (GARBI, 2010, p. 14).

O início do estudo sistemático da Matemática na Grécia pode ser atribuído a Tales (624 a.C. – 546 a.C.), nascido na cidade de Mileto, na Iônia. Tales de Mileto uniu o estudo da Astronomia ao da Geometria e da Teoria dos Números. De acordo com Mol (2013), Tales visitou o Egito e a Babilônia e de lá trouxe para a Grécia o estudo da Geometria, que, de acordo com os escritos de Heródoto, mencionados por Roque (2012, p. 76), surgiu às margens do Rio Nilo, "devido a necessidade de medir a área das terras a serem redistribuídas, após as enchentes, entre os que haviam sofrido prejuízos".

Entretanto, ao invés de apenas transmitir o que aprendera, Tales de Mileto introduziu um conceito revolucionário: as verdades matemáticas precisam ser demonstradas.

Garbi (2010) coloca que foi a primeira vez que um homem havia pensado neste alicerce fundamental de toda a atividade científica. Merecidamente, ele foi considerado um dos Sete Sábios da Grécia.

A partir daí começaram as demonstrações dos teoremas. Garbi (2010) relata que Tales de Mileto deu o pontapé inicial provando que os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais, que qualquer diâmetro divide o círculo em duas partes iguais, que um ângulo inscrito em um semicírculo é sempre reto, que feixes de paralelas cortadas por transversais produzem segmentos proporcionais, etc.

Poucas décadas depois, outro grego com importante papel nesse amadurecimento da Matemática foi Pitágoras, reconhecido por demonstrar o teorema dos triângulos retângulos. Eves (2011) diz que os primeiros passos do desenvolvimento da Teoria dos Números também foram concedidos a Pitágoras e seus seguidores. Atribui-se a Pitágoras a definição números amigáveis, os números perfeitos, deficientes e abundantes.

Após Tales e Pitágoras, as descobertas geométricas, conforme relatado por Garbi (2010), avançaram rapidamente e os teoremas foram acumulando-se em grande quantidade. Outro estudioso grego notável por volta de 300 a.C., encarregado de sintetizar e sistematizar o conhecimento que se obtivera até então, "foi Euclides, autor dos Elementos, considerado o maior livro-texto de Matemática em todos os tempos" (GARBI, 2010, p. 17).

Os Elementos são compostos de treze livros ou capítulos. Não é certo que esses livros tenham resultado do trabalho exclusivo de Euclides. Roque (2012, p. 130) diz que possivelmente "a obra seria uma compilação de resultados já existentes produzidos por outros, o que torna o seu autor um mero editor".

Conforme descrito por Eves (2011), os primeiros quatro livros tratam de Geometria Plana elementar e estudam propriedades de figuras retilíneas e do círculo, abordando problemas cuja solução faz-se com régua e compasso. O livro V aborda a teoria de proporções e o livro VI aplica essa teoria ao estudo de Geometria. Os livros VII, VIII e IX versam sobre a teoria dos números. O livro X trata dos incomensuráveis e os livros XI, XII e XIII discorrem sobre Geometria sólida.

Como mencionamos, Tales revolucionou o pensamento matemático ao estabelecer que as verdades precisam ser demonstradas, com o que criou a Matemática dedutiva. Garbi (2010, p. 18) afirma que "Euclides manteve este conceito, mas fez nele uma ressalva: nem todas as verdades podem ser provadas; algumas delas, as mais elementares, devem ser admitidas sem demonstração".

Dessa forma, os Elementos de Euclides realizaram o prodigioso trabalho de organizar o conhecimento geométrico, de forma rigorosa e dedutiva, partindo de definições e de verdades aceitas sem provas.

De acordo com Eves (2011, p. 179), é certo que "um dos grandes feitos dos matemáticos gregos antigos foi a criação da forma postulacional de raciocínio". A partir desse momento, para estabelecer uma afirmação, deve-se

> Mostrar que essa afirmação é uma consequência lógica necessária de algumas afirmações previamente estabelecidas. Estas, por sua vez, devem, ser estabelecidas a partir de outras também estabelecidas previamente e assim por diante. Como a cadeia não pode recuar indefinidamente, deve-se, ao início, aceitar um corpo finito de afirmações não demonstradas para evitar imperdoáveis círculos viciosos consistindo em provar uma afirmação A a partir de uma afirmação B e depois fazer o contrário. Essas afirmações assumidas inicialmente se denominam postulados ou axiomas do discurso e delas devem decorrer todas as demais afirmações do discurso. (EVES, 2011, p. 179)

Como os Elementos de Euclides sofreram mudanças e acréscimos por editores subsequentes, não se sabe com precisão quais axiomas e postulados – afirmações aceitas sem demonstração; raciocínio admitido sem discussão – podem ser creditados a Euclides. Porém, segundo Eves (2011, p. 179), há evidências de que os cinco axiomas e cinco postulados geométricos abaixo sejam creditados a Euclides:

> A1 – Coisas iguais a mesma coisa são iguais entre si.
> A2 – Adicionando-se iguais a iguais, as somas são iguais.
> A3 – Subtraindo-se iguais de iguais, as diferenças são iguais.
> A4 – Coisas que coincidem uma com a outra são iguais entre si.
> A5 – O todo é maior que a parte.
>
> P1 – É possível traçar uma linha reta de um ponto qualquer a outro ponto qualquer.
> P2 – É possível prolongar uma reta finita indefinidamente em linha reta.
> P3 – É possível descrever um círculo com qualquer centro e qualquer raio.
> P4 – Todos os ângulos retos são iguais entre si.
> P5 – Se uma reta intercepta duas retas formando ângulos interiores de um mesmo lado menores do que dois retos, prolongando-se essas duas retas indefinidamente elas se encontrarão no lado em que os dois ângulos são menores do que dois ângulos retos.

Eves (2011, p. 180) sintetiza que "os postulados P1 e P2 estabelecem a existência de uma reta determinada por dois pontos; o postulado P3 estabelece a existência de um círculo, dados seu centro e seu raio". Devido a isso, as construções propostas nessa obra são efetuadas por meio da régua (sem marcações) e do compasso, já que, apesar de serem instrumentos de construção, a régua e o compasso, metaforicamente, representam uma linha reta e um círculo, respectivamente. Roque (2012) explica que, nos Elementos, as construções realizáveis com régua e compasso são executadas por meio de retas e círculos.

Esta limitação a apenas dois instrumentos espelhava, para Garbi (2010, p. 186), "o conceito de elegância com que os gregos tratavam das questões geométricas e, também, a atração tipicamente helênica que eles nutriam pelos desafios intelectuais, independentemente de qualquer utilidade prática”.

Roque (2012), no entanto, expõe algumas outras hipóteses sobre as razões do uso exclusivo desses instrumentos nos Elementos de Euclides. Uma das explicações para o uso da régua e do compasso nessa obra pode ter sido de ordem pedagógica.

> As construções feitas desse modo são mais simples e não exigem nenhuma teoria adicional (como seria o caso das construções por meio de cônicas). Desse ponto de vista, a restrição não seria consequência de uma proibição, mas de uma otimização: deve-se usar a régua e o compasso sempre que possível para simplificar a solução dos problemas de construção. (ROQUE, 2012, p. 142)

Uma segunda explicação para o uso exclusivo da régua e do compasso, apresentada por Roque (2012), refere-se à necessidade da época de uma ordenação e de uma sistematização da Geometria com vistas a uma melhor arquitetura da Matemática.

> Na época de Euclides, o conjunto dos conhecimentos dos geômetras já estava bastante desenvolvido e era necessário ordená-lo. Essa ordem implicaria uma graduação da Matemática, do nível mais elementar em direção ao superior. E Euclides se teria proposto, nos Elementos, a expor a Matemática elementar da época, aquela que demanda somente o emprego da régua e do compasso. (ROQUE, 2012, p. 143)

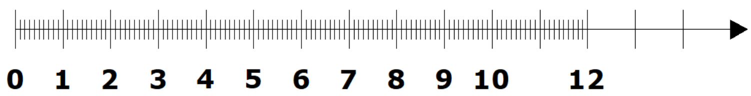
Todavia, Roque (2012, p. 133) observa que a restrição à régua e ao compasso não vale para toda a Geometria Grega, pois dizer isso significaria “afirmar que o conjunto das práticas gregas segue um padrão de rigor e que tal padrão foi estabelecido por Euclides”. Na verdade, matemáticos depois de Euclides, como Arquimedes, não seguem essa restrição à régua e ao compasso e emprega métodos de construção não euclidianos.

As construções geométricas surgiram muito antes da formulação dos Elementos e contribuíram grandemente para o avanço da Matemática. Os postulados de Euclides apenas colaboraram para colocar as construções com régua e compasso sobre um terreno firme, afirma Gomes (2017). “As construções com régua e compasso não permitem resolver todos os problemas propostos pelos matemáticos gregos antes e depois de Euclides” (ROQUE, 2012, p. 133), que furtaram-se, por isso, de outros métodos.

Roque (2012) sintetiza, então, que os Elementos de Euclides têm um caráter essencialmente geométrico, apesar de que alguns enunciados de seus livros poderem ser traduzidos hoje em regras algébricas, porém, na Matemática Grega, foram tratados com uma roupagem geométrica. “Por essa razão, os resultados desse livro são frequentemente denominados álgebra geométrica” (ROQUE, 2012, p. 164). Os gregos antigos utilizavam processos geométricos engenhosos para efetuar operações algébricas, já que careciam completamente de qualquer notação algébrica, pois a Álgebra simbólica, tal como a conhecemos, fora formulada há poucos séculos, de acordo com Garbi (2010).

Outra tradução geométrica encontrada na Matemática Grega imbuía a ideia de representação de um número por meio de um comprimento. Wagner (2015) relata que há pouco mais de 2000 anos a palavra número remetia aos “números naturais”. Não havia números negativos e as frações não eram consideradas números, eram apenas comparação, razão entre números. Logo, não havia a noção de número racional, o que dirá dos números irracionais ou reais. Entretanto, os gregos tiveram uma ideia engenhosa: a de representar uma grandeza qualquer por um segmento de reta. Hoje, o número pode ser associado a um ponto de uma reta numérica.

Figura 10 – reta numérica.



Fonte: Fonte autoral.

O número real x poderia ser visualizado, nessa reta, como mostra a Figura 11:

Figura 11 – Posicionamento do número real x na reta numérica.

Fonte: Fonte autoral.

Antigamente, a mesma ideia era vista como expressa a Figura 12:

Figura 12 – Representação do número x por meio de um comprimento.

Fonte: Fonte autoral.

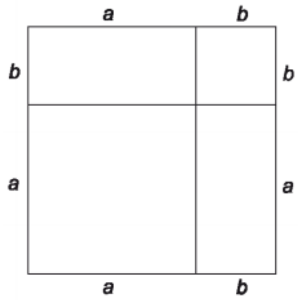
Exemplos de equivalentes geométricos de muitas identidades algébricas podem ser encontrados no Livro II dos Elementos de Geometria de Euclides. De acordo com Mol (2013), o Livro II é curto, contém apenas 13 proposições, que em realidade são identidades algébricas envolvidas numa terminologia geométrica. “Parece bastante certo que essas proposições tenham sido desenvolvidas pelos primeiros pitagóricos, através de métodos de decomposição” (EVES, 2011, p. 107). Podemos exemplificar o método considerando umas poucas proposições do Livro II, ilustradas por Eves (2011).

A Proposição 4 do Livro II estabelece geometricamente a identidade

$$a^2 + 2ab + b^2.$$

decompondo o quadrado de lado $a+b$ em dois quadrados e dois retângulos de áreas a^2, b^2, ab, ba como mostra a Figura 13. O enunciado de Euclides para essa proposição é: *Dividindo-se uma reta em duas partes, o quadrado sobre a reta toda é igual à soma dos quadrados sobre as partes juntamente com o dobro do retângulo contido pelas partes.*

Figura 13 – Ilustração da Proposição 4 do Livro II de Euclides.



Fonte: Eves (2011, p. 107)

O enunciado da Proposição 5 do Livro II é: *Dividindo-se uma reta em partes iguais e em partes desiguais, o retângulo contido pelas partes desiguais, junto com o quadrado sobre a reta entre os pontos de secção, é igual ao quadrado sobre a metade da reta dada.* Seja $\overline{AB}$ o segmento de reta dado e suponhamos que ele esteja dividido igualmente em P e desigualmente em Q. Então a proposição diz que:

$$(\overline{AQ})(\overline{QB}) + (\overline{PQ})^2 = (\overline{PB})^2$$

Fazendo-se $\overline{AQ} = 2a$ e $\overline{QB} = 2b$, obtém-se a identidade algébrica

$$4ab + (a-b)^2 = (a+b)^2$$

ou, fazendo-se $\overline{AB} = 2a$ e $\overline{PQ} = b$, a identidade

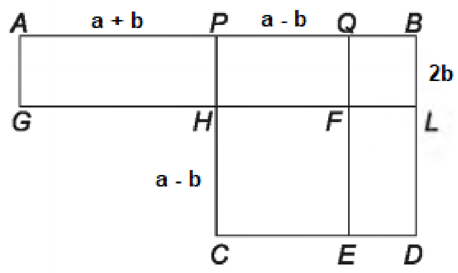
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

A decomposição dada nos Elementos para estabelecer esse teorema aparece na Figura 14. É mais complicada que aquela para a Proposição 4. Na Figura 14, $PCDB$ e $QFLB$ são quadriláteros construídos sobre $\overline{PB}$ e $\overline{QB}$ como lados. Considerando, por exemplo, $PCDB$, notação utilizada para referir-se à área da figura plana delimitada pelos pontos

P, C, D, B em Eves (2011), fonte desse exemplo, segue-se então que

$$\begin{aligned}(\overline{AQ})(\overline{QB})+(\overline{PQ})^2 &= AGFQ+HCEF \\ &= AGHP+PHFQ+HCEF \\ &= PHLB+PHFQ+HCEF \\ &= PHLB+FEDL+HCEF \\ &= PCDB \\ &= (\overline{PB})^2\end{aligned}$$

Figura 14 – Ilustração da Proposição 5 do Livro II de Euclides.



Fonte: Eves (2011, p. 109)

O enunciado da Proposição 6 do Livro II é: *Efetuando-se a bissecção de uma reta e prolongando-a até um ponto qualquer, o retângulo contido pela reta assim prolongada e a parte que lhe foi acrescida, junto com o quadrado sobre metade da reta dada, é igual ao quadrado sobre a reta formada da metade e da parte acrescida.* Neste caso (ver Figura 15), se o segmento $\overline{AB}$, de ponto médio P, é prolongado até Q, devemos mostrar que

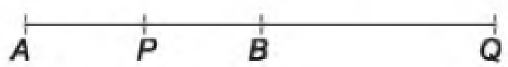
$$(\overline{AQ})(\overline{BQ})+(\overline{PB})^2 = (\overline{PQ})^2$$

Se fizermos $\overline{AQ} = 2a$ e $\overline{BQ} = 2b$, obteremos outra vez a identidade

$$4ab+(a-b)^2 = (a+b)^2$$

podendo-se usar uma decomposição semelhante à usada para a Proposição 5.

Figura 15 – Segmento de reta AB, com ponto médio P.

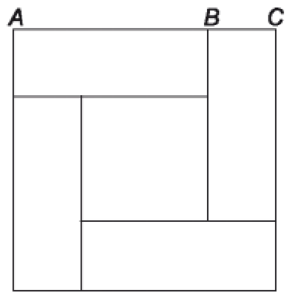


Fonte: Eves (2011, p. 109)

A Figura 16, com $\overline{AB} = a$ e $\overline{BC} = b$, sugere uma demonstração menos trabalhosa da identidade

$$4ab + (a-b)^2 = (a+b)^2$$

Figura 16 – Ilustração alternativa da Proposição 5 do Livro II de Euclides.



Fonte: Eves (2011, p. 109)

3.3 A transição da Matemática Grega e o desenvolvimento da Álgebra

Vimos até então que, apesar de povos antigos, a exemplo de civilizações antes de Cristo, não possuírem os conhecimentos que moldam os campos da Matemática da forma que os conhecemos hoje, além de ferramentas como "fórmulas prontas" que facilitam a resolução de um problema, esses povos praticavam Matemática. Não apenas isso, citamos alguns procedimentos empregados pelos povos antigos que poderiam ser resolvidos facilmente hoje por algoritmos algébricos.

Apesar do lugar de evidência ocupado pela Geometria na Matemática Euclidiana e em outras "Matemáticas", Eves (2011) conta que civilizações antes de Cristo possuíam sim uma certa Álgebra. No entanto, Roque e Pitombeira (2012, p. 131) afirmam que "seria anacrônico associar os algoritmos usados [por esses povos] a qualquer tipo de álgebra [$\cdots$] [já] que não era usado nenhum tipo de notação algébrica, que implica em se utilizar um mesmo símbolo para designar coisas diferentes" ou quantidades desconhecidas, que hoje representamos por uma letra e chamamos de "incógnita".

Apesar disso, leituras do desenvolvimento histórico da Álgebra, como mostra Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), consideram que a mesma baseia-se na contribuição de diversas culturas à constituição desse campo de conhecimento.

> Nesse sentido, é possível falar de uma "álgebra egípcia", de uma "álgebra babilônica", de uma "álgebra grega pré-diofantina", de uma álgebra diofantina", de uma "álgebra chinesa", de uma "álgebra hindu", de uma

> “álgebra arábica”, de uma “álgebra da cultura européia renascentista” etc. (FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1993, p. 79)

O que nota-se é que o pensamento algébrico, assim como a Matemática, não possui uma única História de sua evolução até os nossos dias. Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) afirmam que não é possível concluir sobre um momento histórico específico do surgimento da Álgebra, já que essa foi constituída através da interação de pensamentos algébricos entre culturas, até adquirir o contorno definitivo da disciplina que chamamos por esse nome.

Em 1842, Nesselmann, como explica Eves (2011), caracterizou três estágios no desenvolvimento da notação algébrica.

> Primeiro se tem a álgebra retórica em que os argumentos da resolução de um problema são escritos em prosa pura, sem abreviações ou símbolos específicos. A seguir vem a álgebra sincopada em que se adotam abreviações para algumas das quantidades e operações que se repetem mais frequentemente. Finalmente, chega-se ao último estágio, o da álgebra simbólica, em que as resoluções se expressam numa espécie de taquigrafia Matemática formada de símbolos que aparentemente nada tem a ver com os entes que representam. (EVES, 2011, p. 206)

A Álgebra anterior ao século III d.C., conta Eves (2011), era retórica, porém a mesma continuou de maneira bastante generalizada pelo mundo, exceto na Índia, por muitas centenas de anos. Na Europa Ocidental, especificamente, a maior parte da Álgebra permaneceu retórica até o século XV. E embora a aparição da Álgebra simbólica se desse na Europa Ocidental no século XVI, somente pela metade do século XVII esse estilo acabou impondo-se. “Não raro passa despercebido que o simbolismo usado nos nossos textos de Álgebra elementar ainda não tem 500 anos” (EVES, 2011, p. 206).

Uma das principais contribuições para o desenvolvimento da Álgebra vem do matemático grego Diofanto de Alexandria, como afirma Eves (2011). Segundo Roque e Pitombeira (2012), com os trabalhos de Diofanto surge um modo de pensar bem mais próximo do que chamamos de “Álgebra”. “Uma das principais contribuições de Diofanto à Matemática foi a sincopação da álgebra grega” (EVES, 2011, p. 206), onde as soluções de problemas são descritas de modo discursivo, mas esta descrição é abreviada pelo uso de símbolos, que constituem um princípio de linguagem algébrica.

Este matemático, que viveu no século III d.C., introduziu um novo modo de pensar em um livro chamado Aritmética. Sobre isso, Roque e Pitombeira (2012) explicam que uma das principais contribuições de Diofanto está em ter introduzido uma forma de representar o valor desconhecido em um problema, designando-o como *arithme*, de onde vem o nome “Aritmética”. Esta obra contém uma coleção de problemas que faziam parte da tradição Matemática da época. Já no Livro I, ele introduz símbolos, que ele chama de "*designações abreviadas*", para representar diversos tipos de números, como sistematizado na Figura 17:

Figura 17 – Designações abreviadas escritas por Diofanto.

Símbolos Diofantinos	Descrição	Notação Moderna	Descrição
ζ	Arithmos	x	Incógnita
Δ^{Y}	Dynamis	x^2	Quadrado
K^{Y}	Kybos	x^3	Cubo
$\Delta^{Y}\Delta$	Dynamis-Dynamis	x^4	4ª Potência
ΔK^{Y}	Dynamis-Kybos	x^5	5ª Potência
$K^{Y}K$	Kybos-Kybos	x^6	6ª Potência

Fonte: Serrão e Brandemberg (2013, p. 3)

Muitos problemas tratados na Aritmética de Diofanto conduzem a equações do 1º e 2º graus, de uma ou mais incógnitas, determinadas ou não, como explica Serrão e Brandemberg (2013). Há também na obra problemas algébricos que Diofanto resolve por recurso à Geometria e problemas sobre triângulos retângulos de lados racionais. Para os problemas propostos na obra, são aceitas somente soluções racionais positivas.

Com o intuito de exemplificar a diferença entre as notações algébricas e relacionar a História da Matemática grega ao ensino de equações na Educação Básica selecionamos alguns problemas tratados na Aritmética de Diofanto e abordados por Serrão e Brandemberg (2013).

Exemplo 3.3.1. ***(Problema I-1) Dividir um número dado em dois números de diferença dada.***

Solução 3.3.1. .

(a) ***Resolução proposta por Diofanto (notação algébrica retórica):*** *O enunciado é genérico e aplica-se, a título de exemplo, a seguinte situação - seja 100 o número dado e a diferença de dois números que somados resulta em 100 é 40; encontrar esses dois números. Supondo arithmos o número menor, o maior será arithmos mais 40; logo, os dois somados dão 2 arithmos mais 40, que vale 100. Então, 100 é igual a 2 arithmos mais 40. Em seguida, vamos subtrair 40 a cada um dos membros ficando 2 arithmos igual a 60. Logo, o número será 30. Então, arithmos é igual a 30 e arithmos mais 40 é igual a 70. Conclui-se que 30 e 70 são os números procurados.*

(b) ***Explicação misturando as abreviações de Diofanto com os símbolos atuais para as operações:*** *Dois números são procurados. Sendo esses números diferentes e supondo* ζ *o número menor, o número maior será* $\zeta+40$*; logo, esses dois números somados resultam em* $2\zeta+40$*, que vale 100. Então, 100 é igual a* $2\zeta+40$*. Em seguida, vamos subtrair 40 a cada um dos membros ficando* 2ζ *igual a 60. Logo,* ζ *será 30 e* $\zeta+40$ *igual a 70.*

(c) ***Resolução em notação moderna:*** *Supondo* x *o número menor, o maior será* $x+40$*; logo, os dois somados* $(x+x+40)$ *resultam em* $2x+40$*, que vale 100. Temos então,*

$$\begin{aligned} 2x+40 &= 100 \\ 2x+40-40 &= 100-40 \\ 2x &= 60 \\ x &= 30 \end{aligned}$$

Logo, os números procurados são $x=30$ *e* $x+40=70$.

Exemplo 3.3.2. ***(Problema I-27) Encontrar dois números cuja soma e produto sejam números dados.***

Solução 3.3.2. .

(a) ***Resolução proposta por Diofanto (notação algébrica retórica):*** *Para esse problema, Diofanto considera que a soma de dois números é 20 e o produto desses mesmos dois números é 96. Supondo que a diferença entre os dois números seja 2 arithmos, começamos por dividir a soma destes números (que é 20) em dois (obtendo 10). A partir desse resultado, consideramos um arithmos somado a 10 e um arithmos subtraído de 10, respectivamente. Como a metade da soma é 10, tomando a metade subtraída a 1 arithmos mais a metade acrescentada de 1 arithmos obtemos 20, que é a soma desejada. Para que o produto seja 96, multiplicamos estas mesmas quantidades, obtendo 100 subtraído do quadrado do arithmos (um dynamis). Chegamos, assim, à conclusão de que o dynamis deve ser 4, logo o valor do arithmos é 2. Os valores procurados serão, portanto, 10 mais 2 e 10 menos 2, ou seja, 8 e 12.*

(b) ***Explicação misturando as abreviações de Diofanto com os símbolos atuais para as operações:*** *Queremos encontrar dois números com soma 20 e produto 96. Se esses números fossem iguais, cada um deles seria 10. Supomos que a diferença entre eles seja* 2ζ*, ou seja, os dois números procurados são obtidos retirando* ζ *de um destes 10 e adicionando* ζ *ao outro. Como a soma não muda após essas operações, temos* $10-\zeta+10+\zeta=20$*. Mas sabemos também que o produto desses* *números é 96, logo, podemos escrever* $(10-\zeta)(10+\zeta)=96$*. Observamos, então, que* $10^2-\Delta^Y=10^2-\zeta^2=96$*, e concluímos que o valor de* ζ *deve ser 2. Logo, os números procurados* $10-\zeta$ *e* $10+\zeta$ *são, respectivamente, 8 e 12.*

(c) ***Resolução em notação moderna:*** *Considere* x *e* y *os números procurados. Se esses números fossem iguais, cada um deles seria igual a 10, já que a soma desses números é 20. Sendo* $x \neq y$ *e tomando* $x<y$*, é certo que existe um* z *tal que* $x=10-z$ *e* $y=10+z$*. Substituindo esses valores na equação* $x \cdot y=96$*, obtemos:*

$$\begin{aligned}(10-z)(10+z) &= 96\\ 100-z^2 &= 96\\ 100-96 &= z^2\\ 4 &= z^2\\ z &= 2\end{aligned}$$

Logo, os números procurados $x=10-z$ *e* $y=10+z$ *são, respectivamente, 8 e 12.*

Exemplo 3.3.3. ***(Problema I-28) Encontrar dois números cuja soma seja um número igual a 20 e o quadrado somado seja um número igual a 208.***

Solução 3.3.3. .

(a) ***Resolução proposta por Diofanto (notação algébrica retórica):*** *Considere que a soma é 20 e os quadrados somados sejam 208. Supondo que a diferença entre os dois números seja 2 arithmos, começamos por dividir a soma desses números (que é 20) em dois (obtendo 10). A partir desse resultado, consideramos 1 arithmos somado a 10 e subtraído de 10, respectivamente, a cada uma das metades. Como a metade da soma é 10, tomando a metade subtraída 1 arithmos mais a metade acrescentada de 1 arithmos obtemos 20, que é a soma desejada. Para que a soma dos quadrados seja 208, somados os quadrados dessas mesmas quantidades, obtemos (10 - arithmos) ao quadrado mais (10 mais arithmos) ao quadrado igual a 208. Desenvolvendo esses quadrados, obteremos 100 menos 20 multiplicado por um arithmos mais dynamis mais 100 mais 20 multiplicado por um arithmos mais dynamis, tudo isso igual a 208, que implica em 200 mais 2 multiplicado por um dynamis igual a 208. Concluímos, a partir dessas operações, que arithmos é 2. Logo, os números procurados são 8 e 12.*

(b) ***Explicação misturando as abreviações de Diofanto com os símbolos atuais para as operações:*** *Queremos encontrar dois números com soma 20 e a soma dos quadrados igual a 208. Se esses números fossem iguais, cada um deles seria igual a 10. Supomos que a diferença entre eles seja* 2ζ*, ou seja, os dois números* *procurados são obtidos retirando ζ de um destes 10 e adicionando ζ ao outro. Como a soma não muda após essas operações, temos $10-\zeta+10+\zeta=20$. Mas sabemos também que a soma dos quadrados desses números é 208, logo, podemos escrever $(10-\zeta)^2+(10+\zeta)^2=208$. Observamos, então, que $100-20\zeta+\Delta^Y+100+20\zeta+\Delta^Y=208$, portanto $200+2\Delta^Y=208$ e concluímos que o valor de ζ deve ser 2. Logo, os números procurados $10-\zeta$ e $10+\zeta$ são, respectivamente, 8 e 12.*

(c) ***Resolução em notação moderna:*** *Considere x e y os números procurados, sendo $x+y=20$ e $x^2+y^2=208$. Utilizando o método da substituição na resolução de sistemas com duas equações, consideraremos que*

$$x+y=20 \Longrightarrow y=20-x$$

Substituindo o valor de y obtido acima em $x^2+y^2=208$, teremos

$$\begin{aligned} x^2+(20-x)^2 &= 208 \\ x^2+400-40x+x^2 &= 208 \\ 2x^2+400-40x-208 &= 0 \\ 2x^2-40x+192 &= 0 \end{aligned}$$

Podemos reduzir a equação acima dividindo cada termo de ambos os membros por 2. Logo, segue-se que

$$x^2-20x+96=0$$

A equação obtida é do segundo grau. Utilizando o método de resolução de equações do segundo grau, obtemos $x_1=8$ e $x_2=12$. Para $x_1=8$, temos $y=20-x=20-8=12$. Para $x_2=12$, temos $y=20-x=20-12=8$. Logo, os números procurados são 8 e 12.

Em seu trabalho, Serrão e Brandemberg (2013) utilizam de problemas matemáticos da antiguidade, tais como os expostos acima, como estratégia para o ensino de equações na Educação Básica e com o objetivo de despertar um espírito investigativo nos estudantes e um gosto pela resolução de problemas contextualizados por meio de fontes históricas, que possam garantir uma (re)construção das ideias presentes nos livros didáticos atuais. Aqui, esses problemas também foram citados como uma forma do professor revisar o método de resolução de sistemas com duas equações e comentar a diferença entre equações lineares e não lineares, conhecimentos que serão necessários para a aplicação das atividades propostas neste trabalho.

Com a exposição desses problemas, pode-se notar que, embora seja simples resolver algumas questões com nosso moderno simbolismo algébrico, "uma resolução retórica requereria uma atenção mental mais elevada"(EVES, 2011, p. 207). Ainda que as regras expostas na Aritmética de Diofanto tenha alguma generalidade, vemos o quanto seria difícil exprimir regras gerais por meio unicamente de palavras, sem os recursos de nosso poderoso simbolismo algébrico, afirma Roque e Pitombeira (2012).

A evolução dos métodos para resolver problemas teve um papel importante na História da Álgebra, de acordo com Roque e Pitombeira (2012). No que tange ao uso de símbolos em problemas algébricos, os autores também citam o papel dos árabes. "O passo decisivo para a constituição da Álgebra como disciplina pode estar na sua organização em torno da classificação e da resolução de equações, o que teve lugar pela primeira vez no século IX, com os trabalhos do árabe Al-Khwarizmi e de outros matemáticos ligados a ele"(ROQUE; PITOMBEIRA, 2012, p. 149).

O termo em si, "álgebra", surge somente na Idade Média e tem origem, segundo Roque (2012, p. 221), "em um dos livros árabes mais importantes dessa época: Tratado sobre o cálculo de al-jabr e al-mugabala, escrito por Al-Khwarizmi".

> A palavra al-jabr, ou "álgebra", em árabe, era utilizado para designar "restauração", uma das operações usadas na resolução de equações. Já a palavra al-mugabala queria dizer algo como "balanceamento". Trata-se, de fato, de duas etapas do método para resolver equações. (ROQUE, 2012, p. 221)

Contudo, até instituição do termo "álgebra", na Idade Média, muitas ocorrências marcaram o contexto histórico que levaram a essa mudança de cenário.

> Os primeiros séculos depois de Cristo presenciaram grandes turbulências no mundo conhecido de então. A conquista da Grécia por Roma praticamente apagou a chama que ardera intensamente no altar da Matemática Grega. O Império Romano atingiu seu ápice, mas começou a cair, abalado pela corrupção interna e pelos bárbaros que lhe rompiam as fronteiras. As guerras consumiam as energias dos povos e pouco restava a ser dedicado ao progresso das ciências. O Império fracionou-se, sua parte ocidental caiu nas mãos dos invasores e Bizâncio, capital do Império Romano do Oriente, ao qual pertenciam Alexandria. A escola de Alexandria, a última guardiã da cultura acumulada na Antiguidade Clássica, continuou a existir por mais alguns séculos, mas sua produção perdeu brilho e, com o fim do Império Romano e a ascensão do Cristianismo, a Europa entrou na Idade das Trevas, de onde somente começou a emergir muito tempo depois. Neste período, o fogo sagrado da Rainha das Ciências passou a ser velado por dois outros povos: os árabes e os hindus. (GARBI, 2010, p. 20)

Foram os árabes os responsáveis por destruir milhares de manuscritos da Biblioteca de Alexandria, como mencionado por Garbi (2010). O autor ainda relata que este triste episódio da História da Humanidade parecia prenunciar que o Império Árabe viria a tornar-se sinônimo de obscurantismo nas ciências e na cultura. Porém, foi exatamente o contrário. Pouco tempo após esse acontecimento, os califas, palavra que significa sucessor (de Maomé), reconheceram a importância do saber e das artes e passaram a patrociná-la. O árabe Harum Al-Raschid, imortalizado nos Contos das 1001 Noites, foi o primeiro a cercar-se de sábios e artistas, a ordenar a busca de antigos manuscritos gregos que pudessem ser encontrados e a tradução desses em árabe, inclusive dos Elementos de Euclides, possibilitando, assim, reencontrar ensinamentos perdidos de Euclides. Seu filho, Al-Mamun, que reinou entre 813 e 833 d.C., acompanhado de muitos cientistas, dos quais destaca-se Abu-Abdullah Muhammed Ibn-Musa Al-Khwarizmi, continuou a obra do pai, criando em Bagdah uma escola científica cuja biblioteca foi a melhor do mundo desde a que existira em Alexandria. Foi assim que nasceu a palavra "Álgebra", dos trabalhos de Al-Khwarizmi, de quem também herdamos a palavra "algarismo", corruptela de seu nome. (GARBI, 2010)

Sobre Al-Khwarizmi, Roque (2012) revela que ele não empregava nenhum simbolismo; sua linguagem era unicamente retórica, ao contrário de Diofanto. Al-Khwarizmi, continua Roque (2012), destaca-se também pelos seus estudos de problemas que atualmente correspondem a equações do segundo grau e, apesar de sua linguagem utilizar somente palavras, ele emprega um vocabulário padrão para os objetos que aparecem nesses tipos de problemas, principalmente os três modos sob os quais o número aparecia no cálculo da Álgebra: a raiz, o quadrado e o número simples. As palavras utilizadas por Al-Khwarizmi e o significado e sentido que cada uma exprime nos problemas são sintetizadas na Figura 18.

Figura 18 – Vocabulário utilizado por Al-Khwarizmi.

Palavra	Significado na língua corrente	Sentido nos problemas	Notação moderna
Adad	Número ou quantidade de dinheiro	Quantidade conhecida (número dado)	c
Jidhr	Raiz	Quantidade desconhecida	x
Mal	Possessão ou tesouro	Quadrado da quantidade desconhecida	x^2

Fonte: Roque (2012, p. 222)

Segundo Roque e Pitombeira (2012), além de mostrar como efetuar as quatro operações sobre expressões contendo quantidades desconhecidas ou radicais, Al-Khwarizmi enumerou seis problemas, ou seis casos, possíveis enunciados por palavras, que possuíam regras de solução justificadas por resultados dos Elementos de Euclides, ainda que os gregos não concebessem equações propriamente ditas, apenas relações entre grandezas. Abaixo destacamos esses casos e alguns exemplos que descrevem o algoritmo de resolução justificado, em seguida, por uma construção geométrica. Em todos os casos, os coeficientes eram sempre considerados positivos.

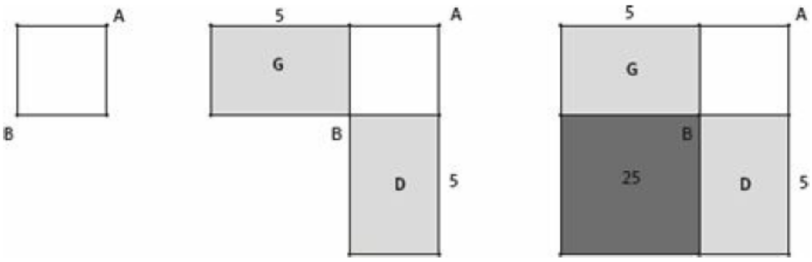
1. quadrados iguais a raízes ($ax^2 = bx$);
2. quadrados iguais a um número ($ax^2 = c$);
3. raízes iguais a um número ($bx = c$);
4. quadrados e raízes iguais a um número ($ax^2 + bx = c$);
5. quadrados e um número iguais a raízes ($ax^2 + c = bx$);
6. raízes e um número iguais a quadrados $bx + c = ax^2$.

Exemplo 3.3.4. *Para o quarto caso especificado acima, temos o seguinte exemplo, considerado por Al-Khwarizmi, de acordo com Roque e Pitombeira (2012): um* ***mal*** *e dez* ***jidhr*** *igualam trinta e nove denares, que em nossa notação algébrica moderna seria escrito como* $x^2 + 10x = 39$.

Solução 3.3.4. *Tome a metade da quantidade de jidhr (que neste exemplo é 5); multiplique esta quantidade por si mesma (obtendo 25); some no resultado os adad (fazemos* $39 + 25 = 64$*); extraia a raiz quadrada do resultado (que dá 8); subtraia deste resultado a metade dos jidhr, encontrando a solução (esta solução é* $8 - 5 = 3$*). Traduzindo este procedimento em linguagem algébrica atual teríamos que a solução de uma equação do tipo* $x^2 + bx = c$ *é dada por* $-\dfrac{b}{2} + \sqrt{\dfrac{b^2}{4} + c}$.

Representação Geométrica: *Deve-se construir um quadrado de diagonal* $\overline{AB}$ *que representa o Mal, ou o quadrado da raiz procurada, e dois retângulos iguais G e D cujos lados são a raiz e 5, metade de 10. A figura obtida é um gnomon de área 39. Usando a proposição II.4 dos Elementos de Euclides e completando esta figura com um quadrado de lado 5 (área 25), obtemos um quadrado de área* $64 = (39 + 25)$. *O lado* $\overline{AH}$ *deste quadrado mede 8. Daí obtém-se que a raiz procurada é* $3 = (8 - 5)$.

Figura 19 – Exemplo do quarto caso proposto por Al-Khwarizmi.

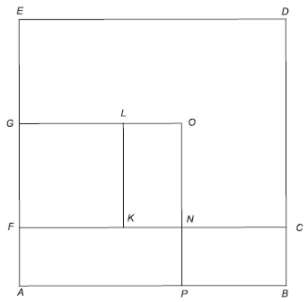


Fonte: Roque (2012, p. 225)

Exemplo 3.3.5. *Estudemos a resolução de Al-Khwarizmi para as equações do tipo* $px + q = x^2$*, exemplificado por* $3x+4 = x^2$*, justificada por representação geométrica.*

Solução 3.3.5. *Seja* $\overline{AB} = x$ *e construa o quadrado* $ABDE$*. Marque* F*, sobre* $\overline{AE}$*, de maneira que* $\overline{EF} = p$*. Como* $x^2 = px + q$*, vemos que a área do retângulo* $ABCF$ *é igual a* q*. Seja* G *o ponto médio de* $\overline{EF}$*. Então, por construção,* $\overline{AG}$ *mede* $s = x - \frac{p}{2}$*. Construa os quadrados* $FKLG$ *e* $APOG$*. Então, a congruência dos retângulos* $KNOL$ *e* $PBNC$ *acarreta que (traduzindo em nossa notação):*

Figura 20 – Solução de $3x+4 = x^2$.



Fonte: Roque e Pitombeira (2012, p. 161)

Considerando, por exemplo, S_{APOG}*, notação utilizada para referir-se à área da figura plana delimitada pelos pontos A, P, O, G em Roque e Pitombeira (2012), fonte desse exemplo, segue-se então que*

$$S_{APOG} = s^2 = S_{FKLG} + S_{APNF} + S_{KNOL} =$$
$$= S_{FKLG} + S_{APNF} + S_{PBNC} =$$
$$= \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q.$$

Por meio desses exemplos, fica claro que Al-Khwarizmi estabelecia uma analogia entre a Geometria e a Álgebra, onde a justificativa geométrica apresentada por ele não servia apenas para garantir a verdade do algoritmo, como também permite compreender sua causa (a necessidade de completar o quadrado)

Em síntese, com base em Roque (2012), Diofanto empregava técnicas de manipulação de igualdades e abreviações. As matemáticas indiana e árabe possuíam em comum o fato de enunciarem métodos de resolução que, traduzidos simbolicamente, equivalem à nossa fórmula para resolução de equações do segundo grau. Al-Khwarizmi forneceu algoritmos de resolução justificados por procedimentos geométricos, alguns dos quais já utilizados por egípcios e babilônios. Quando traduzidas em notação simbólica atual, essas técnicas são equivalentes à fórmula para resolução de equações do segundo grau. Todavia, Roque (2012) observa que só podemos dizer que existe realmente uma “fórmula” quando:

1. representamos simbolicamente as incógnitas e as operações contidas em uma equação; e

2. a equação do segundo grau passar a ser considerada de modo genérico, ou seja, com todas as parcelas possíveis e com os coeficientes indeterminados.

As etapas mencionadas acima só “foram obtidas depois de muitos séculos de pesquisa, que vão desde Diofanto, passando por indianos e árabes, até chegar aos trabalhos de Viète, no século XVI” (ROQUE, 2012, p. 228). Isso nos leva a concluir que a fórmula geral que utilizamos hoje para resolução de equações de segundo grau não pode ter sido proposta por Bhaskara, que viveu no século XII e utilizava de um método geral para resolução de equações de segundo grau, expresso de modo retórico, que, com as devidas transcrições, assemelha-se ao que conhecemos hoje como “completar o quadrado”. Nessa época, não se fazia uso de “fórmulas” para a resolução de equações, no sentido que a entendemos hoje, uma vez que não havia simbolismo para os coeficientes. “Fórmulas matemáticas” como as de hoje só puderam ser escritas, como vemos em Roque (2012), depois que Viète introduziu um simbolismo para os coeficientes. No entanto, ele não pode ser considerado o inventor, por exemplo, da fórmula para resolução de equações de segundo grau, uma vez que seu método de resolução já era amplamente conhecido; sua contribuição soma, altera, molda, não origina. Não se pode pensar que a Matemática evoluiu de modo linear e surgiu por uma única civilização ou pessoa.

A partir de Viète,

> [$\cdots$] chegamos, assim, a uma concepção próxima da álgebra que conhecemos atualmente, sobretudo após o século XVII, quando algumas notações serão sugeridas, como a substituição das vogais, para representar as

> incógnitas, pelas últimas letras do alfabeto como $x, y, z, w, \cdots$; e a representação dos coeficientes pelas primeiras letras do alfabeto. (ROQUE; PITOMBEIRA, 2012, p. 176)

A notação introduzida por Viète, então, representou uma generalização dos métodos algébricos, o que permitiu classificar as equações tratadas anteriormente como "casos".

Sobre o francês François Viète, que viveu entre os anos 1540 e 1603, Roque e Pitombeira (2012) contam que ele introduziu uma representação padrão para os "coeficientes" de uma equação. Foi instituído que as incógnitas seriam representadas pelas vogais e os coeficientes pelas consoantes do alfabeto, todas maiúsculas. Além disso, complementam Roque e Pitombeira (2012), Viète simbolizava as potências usando uma mesma letra: "se A é a incógnita, seu quadrado é chamado *A quadratum*, seu cubo *A cubum*, e assim por diante" (ROQUE; PITOMBEIRA, 2012, p. 176).

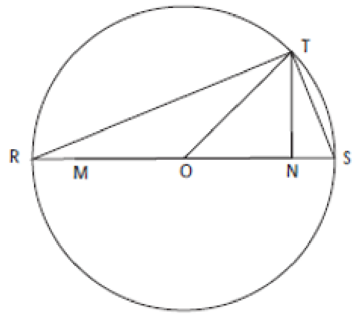
Segundo Roque e Pitombeira (2012), em seu livro mais importante, chamado "Arte analítica", Viète deixa claro que os métodos desenvolvidos em seu trabalho visam encarar os problemas de forma geral, investigando sua estrutura, antes de buscar resolver casos particulares. Esta obra também ressalta problemas de construção dos gregos.

> Para resolver problemas de geometria, Viète propunha usar o tipo de argumentação denominado "análise", que já tinha sido empregado pelos gregos, mas identificando-o à ferramenta algébrica. $[\cdots]$ A geometria sintética é aquela na qual construímos as soluções. Já pelo método analítico, supomos que as soluções desconhecidas são conhecidas e operamos com elas como se fossem conhecidas, até chegar a um resultado conhecido que determina a solução. A simbolização algébrica permite representar estas soluções desconhecidas por símbolos, manipulados segundo as mesmas regras que os números conhecidos. (ROQUE; PITOMBEIRA, 2012, p. 178).

Portanto, Viète utilizava a ferramenta algébrica para auxiliar na resolução de problemas geométricos. Em Roque e Pitombeira (2012) vemos como Viète encontrava geometricamente as soluções de uma equação do segundo grau utilizando somente régua e compasso.

Exemplo 3.3.6. *Dada a equação $A^2 + AB = D^2$, que escreveríamos hoje como $x^2 + px = q^2$, Viète procede como segue: constua $\overline{MN} = p$ e seja $\overline{TN} = q$ perpendicular a $\overline{MN}$. Seja O o ponto médio de $\overline{MN}$, com centro em O, trace a circunferência de raio $\overline{OT}$. Sejam R e S os pontos em que esta circunferência corta o prolongamento de $\overline{MN}$. Então, o triângulo retângulo RST fornece imediatamente que $(\overline{TN})^2 = \overline{RN} \cdot \overline{NS}$, ou seja, $q^2 = (x+p)x = x^2 + px$ (A construção é ilustrada na Figura 21).*

Figura 21 – Solução de $A^2 + AB = D^2$.



Fonte: Roque e Pitombeira (2012, p. 179)

É certo que, cada vez mais o tratamento algébrico de problemas geométricos era considerado; afinal, a história demonstra infrutíferos os esforços exclusivamente geométricos (GARBI, 2010). Como mencionado, relacionar a Geometria com a Álgebra é bastante interessante e também importante, "pois o conhecimento de cada uma é fundamental para uma melhor compreensão [e desenvolvimento] das duas"(REZENDE; QUEIROZ, 2008, p. 13). Dessa forma, foi estabelecendo-se as relações entre a Geometria e a Álgebra.

Assim sendo, reconstruímos, com nossa visão, uma pequena parte do processo histórico no qual observamos como a Geometria e a Álgebra podem relacionarem-se, uma vez que foram expostos problemas algébricos que puderam ser solucionados a partir da interpretação geométrica, utilizando-se construções geométricas.

No que tange às construções geométricas, é claro que não é possível resolver qualquer problema utilizando apenas régua (não graduada) e compasso. Por exemplo, "a duplicação do cubo, a retificação da circunferência, a quadratura do círculo, a trissecção do ângulo são sempre impossíveis, se apenas a régua (sem marcas) e o compasso forem admitidos"(GARBI, 2010, p. 187). Este trabalho restringe-se às construções utilizando apenas régua (não graduada) e compasso, no entanto, é informativo mostrar aos estudantes que existem outros instrumentos que propiciam (e algumas vezes facilitam) construções geométricas, como réguas graduadas, transferidores e esquadros. Até mesmo dobraduras em papéis podem ser úteis para se construir elementos geométricos, e mais, considerando nossos tempos tecnológicos, temos à disposição muitos *softwares* matemáticos para essa finalidade, como o GeoGebra.

Para cumprir a finalidade deste trabalho, que é voltado para o docente matemático da Educação Básica, finalizamos este capítulo esperando que ele sirva como uma fonte de métodos diferentes, interessantes e adequados para o ensino de tópicos da Matemática escolar; como uma fonte que possibilita uma tomada de consciência da unidade da Matemática; como resgate das construções geométricas como instrumento auxiliar no aprendizado da Matemática; e como uma fonte de episódios motivadores da aprendizagem da Matemática escolar e introdutórios para as atividades que aqui serão propostas.

Como as construções geométricas (ou Desenho Geométrico) estão cada vez mais ausentes dos currículos escolares da Educação Básica, de acordo com Wagner (2000), é necessário que o professor preocupe-se em oferecer subsídios para nortear o processo de ensino e aprendizagem do aluno. As sugestões de atividades propostas por nós consideram alguns conhecimentos prévios de Álgebra, Geometria e construções geométricas com régua e compasso. Por esse motivo, no próximo capítulo faremos uma revisão de definições e construções geométricas básicas que auxiliam o professor no desenvolvimento das atividades e dão base para que os alunos compreendam e realizem as mesmas.

4 CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS

Neste capítulo, trataremos da vantagem das "construções"no estudo da Geometria e na resolução de problemas, executar traçados com régua e compasso explorando problemas de forma gráfica, aproveitando ideias e resultados da Geometria. As construções geométricas que seguem restringem-se às construções base para a compreensão e solução de problemas propostos neste trabalho. Para isso, usaremos como instrumentos a régua e o compasso, instrumentos utilizados desde a época dos pitagóricos na antiga Grécia, no século V a.C. Na construção com régua e compasso, a régua não é graduada e, portanto, com ela podemos traçar retas ou segmentos de reta, mas não podemos efetuar medidas. Com o compasso podemos traçar circunferências e arcos e também transpor segmentos de reta.

Para o desenvolvimento deste capítulo nos apoiamos nos trabalhos de Dolce e Pompeo (2013); Oliveira (2015); Rezende e Queiroz (2008); Wagner (2015) e Wagner (2000).

4.1 Noções básicas

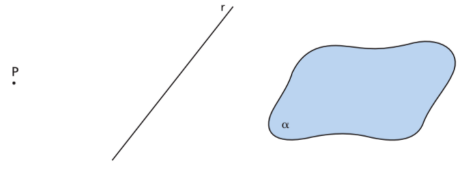
4.1.1 Noções primitivas

As **noções** (conceitos, termos, entes) geométricas são estabelecidas por meio de **definição**. No entanto, as **noções primitivas** são adotadas sem definição. Adotaremos sem definir as noções primitivas de **ponto, reta e plano**. De cada um desses conceitos, temos conhecimento intuitivo, decorrente da experiência e da observação.

A grosso modo, podemos dizer que a Geometria Euclidiana Plana estuda propriedades relativas aos pontos e retas no plano. Em geral, denotamos pontos por letras latinas maiúsculas $(A, B, C, \cdots)$, retas por letras latinas minúsculas $(a, b, c, \cdots)$ e planos por letras gregas minúsculas $(\alpha, \beta, \gamma, \cdots)$.

Ilustrativamente, temos:

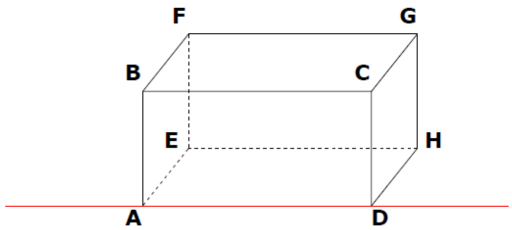
Figura 22 – Ponto, reta e plano.



Fonte: Dolce e Pompeo (2013, p. 2)

Na Figura 23, vemos outra forma de ilustrar essas noções primitivas. Os vértices A, B, C, D, E, F, G, e H são o que chamamos de pontos e, ao prolongarmos uma das arestas do paralelepípedo, nesse caso a aresta AD, temos r, a ideia de reta.

Figura 23 – Vértices de um paralelepípedo.



Fonte: Fonte autoral.

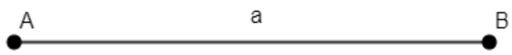
4.1.2 Segmento de reta e semirreta

Definição 4.1.1 (Segmento de reta)**.** *Dados dois pontos distintos, a reunião do conjunto desses dois pontos com o conjunto dos pontos que estão entre eles é um **segmento de reta**.*

Em outras palavras, dados dois pontos distintos A e B sobre uma reta r, o **segmento** AB é a porção de r situada entre A e B. Escrevemos $\overline{AB}$ para denotar o comprimento do segmento AB. Particularmente, usaremos $\overline{AB}$ ora para designar segmento de reta AB, ora para designar medida do segmento de reta AB e, nesse caso, também poderemos optar pela notação $\overline{AB} = a$ (sendo a um número real positivo), onde a pode ser interpretado como a "medida"de AB em certa unidade.

Assim, dados A e B, $A \neq B$, o segmento de reta $\overline{AB}$ é o que segue (Figura 24):

Figura 24 – Segmento de reta $\overline{AB}$.



Fonte: Fonte autoral.

Definição 4.1.2 (Semirreta)**.** *Dados dois pontos distintos A e B, a reunião do segmento de reta $\overline{AB}$ com o conjunto dos pontos X tais que B está entre A e X é a semirreta AB (indicada por $\overrightarrow{AB}$).*

Em outros termos, semirreta é uma parte da reta que possui uma origem, mas não existe um ponto em que ela termine. Observando a Figura 25, temos as semirretas $\overrightarrow{OA}$ e

$\overrightarrow{OB}$, em que $\overrightarrow{OA}$ é a semirreta onde O é ponto inicial e A indica à direção e o sentido, e $\overrightarrow{OB}$ é a semirreta onde O é o ponto inicial e B indica a direção e o sentido.

Figura 25 – Semirreta de origem A passando pelo ponto B.

Fonte: Fonte autoral.

4.1.3 Transporte de segmentos e algumas operações

Transportar um segmento sobre uma semirreta dada consiste em construir um segmento congruente ao segmento dado, mas contido na semirreta, e tendo uma de suas extremidades coincidindo com a origem da semirreta.

Exemplo 4.1.1. *Com o uso do compasso, transporte o segmento* $\overline{AB}$ *para a reta* r*.*

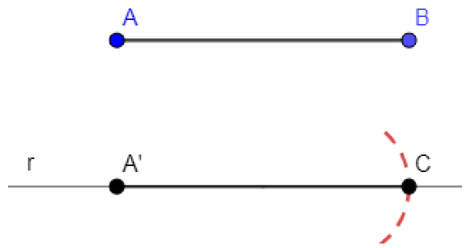
Figura 26 – Transporte do segmento $\overline{AB}$.

Fonte: Fonte autoral.

Solução 4.1.1. *Descrição da construção:*

1. *Tome uma reta suporte* r*;*
2. *Marque um ponto* A' *qualquer na reta* r*;*
3. *Centre o compasso em* A *e fixe a outra extremidade do mesmo em* B*;*
4. *Mantendo a abertura calibrada no item 2, centre o compasso em* A' *e marque, com a outra extremidade do mesmo, um ponto* C *sobre a reta* r*, tal que* $\overline{A'C} = \overline{AB}$*.*

Figura 27 – Segmento $\overline{AB} = \overline{A'C}$.



Fonte: Fonte autoral.

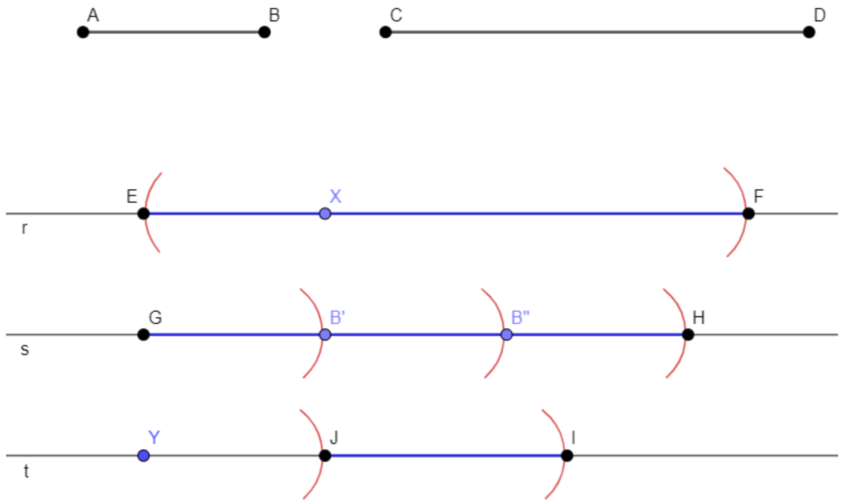
Também podemos usar um compasso para adicionar segmentos, subtrair segmentos e para multiplicar um segmento por um número natural, conforma propõe o próximo exemplo.

Exemplo 4.1.2. *Dados, no plano, os segmentos* $\overline{AB}$ *e* $\overline{CD}$*, com* $\overline{CD} > \overline{AB}$*, como na Figura 28, construa com régua e compasso segmentos* $\overline{EF}$*,* $\overline{GH}$ *e* $\overline{IJ}$*, tais que* $\overline{EF} = \overline{AB} + \overline{CD}$*,* $\overline{GH} = 3 \cdot \overline{AB}$ *e* $\overline{IJ} = \overline{CD} - \overline{AB}$*.*

Solução 4.1.2. *Descrição da construção:*

1. *Com o auxílio de uma régua, trace uma reta* r*;*
2. *Marque sobre a reta* r *um ponto* X *e, em seguida, transporte o segmento* $\overline{AB}$ *para* r*, obtendo um segmento* $\overline{EX}$*, tal que* $\overline{EX} = \overline{AB}$*;*
3. *Transporte o segmento* CD *para* r*, a partir do ponto* X*, obtendo um ponto* F*, tal que* $\overline{XF} = \overline{CD}$ *e* $X \in \overline{EF}$*;*
4. *Em uma cadeia análoga de passos, construímos o segmento* $\overline{GH}$ *sobre uma reta* s*, que nada mais é que* $3 \cdot \overline{AB} = \overline{AB} + \overline{AB} + \overline{AB}$*;*
5. *Por fim, com o auxílio de uma régua, trace uma reta* t*;*
6. *Marque sobre a reta* t *um ponto* Y *e, em seguida, transporte o segmento* $\overline{CD}$ *para* t*, obtendo um segmento* $\overline{IY}$*, tal que* $\overline{IY} = \overline{CD}$*;*
7. *Transporte o segmento* $\overline{AB}$ *para* h*, a partir do ponto* Y*, obtendo um ponto* J*, tal que* $\overline{JY} = \overline{AB}$ *e* $\overline{JY} \subset \overline{IY}$*.*

Figura 28 – Operações com segmentos.

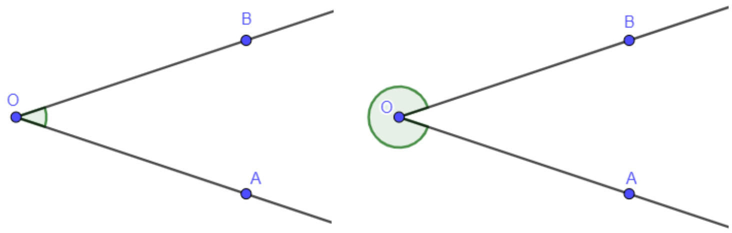


Fonte: Fonte autoral.

4.1.4 Ângulos

Definição 4.1.3. *Dadas, no plano, duas semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$, um* ***ângulo*** *(ou* ***região angular****) de vértice O e lados $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ é uma das duas regiões do plano limitadas pelas semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$.*

Figura 29 – Regiões angulares no plano.



Fonte: Fonte autoral.

Muitas vezes usamos, por economia de notação, letras gregas minúsculas para denotar medidas de ângulos, escreveremos $A\hat{O}B = \theta$ (lê-se *téta*) para significar que a medida do ângulo $\angle AOB$ é θ graus. Neste trabalho, quando tratarmos de ângulos, consideraremos sempre o ângulo de medida compreendida entre $0°$ e $180°$.

Exemplo 4.1.3. *Com o auxílio de um compasso, construa um ângulo de vértice O', com um lado situado sobre a reta r e "igual"ao ângulo α dado na Figura 30.*

Solução 4.1.3. *Descrição da construção:*

1. *Dado o ângulo $\angle XOY$ e uma reta suporte r,centre o compasso em O e fixe a outra extremidade do mesmo em X;*

2. *Mantenha a abertura calibrada no item 1, centre o compasso em O', construa o círculo c, cujo raio tem medida $\overline{OX}$, e marque o ponto X' de interseção com a reta r;*

3. *Centre o compasso em X e fixe a outra extremidade do mesmo em Y;*

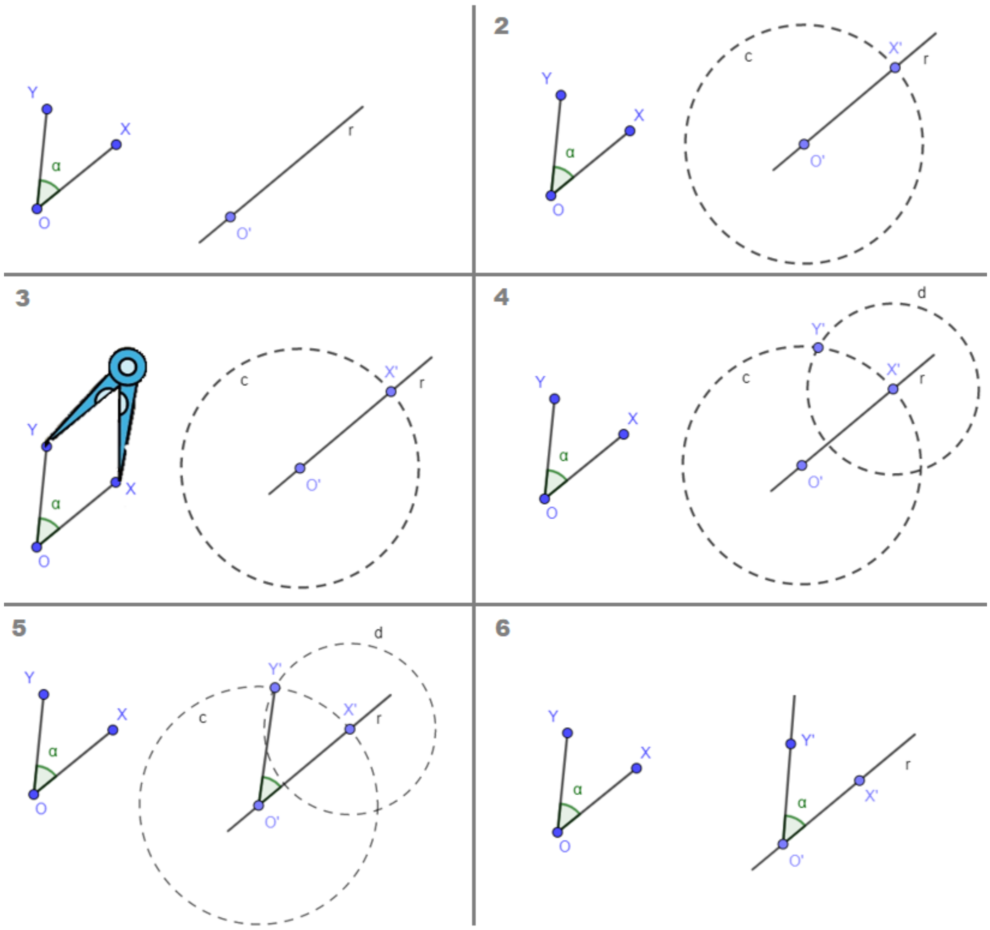
4. *Mantenha a abertura calibrada no item 3, centre o compasso em X', construa o círculo d, cujo raio tem medida $\overline{XY}$, e marque um dos pontos de interseção dos círculos c e d como Y';*

5. *Construa o segmento $\overline{O'Y'}$, evidenciando o ângulo $\angle X'O'Y'$;*

6. *O ângulo $\angle X'O'Y'$ mede α.*

Observação 4.1.1. *Os passos acima são justificados pelo caso LLL de congruência de triângulos. Estudaremos esse assunto na próxima seção.*

Figura 30 – Transporte de ângulo.



Fonte: Fonte autoral.

4.1.5 Congruência de triângulos

Uma ferramenta valiosa para a resolução de vários problemas de construções geométricas são os casos de Congruência de Triângulos. Apresentamos aqui esses casos de um ponto de vista informal. Caso o professor tenha oportunidade e interesse, é possível trabalhar com os estudantes, a cada caso, definições, teoremas, propriedades da Geometria Euclidiana Plana, proporcionando um aprendizado aprofundado e rigor matemático.

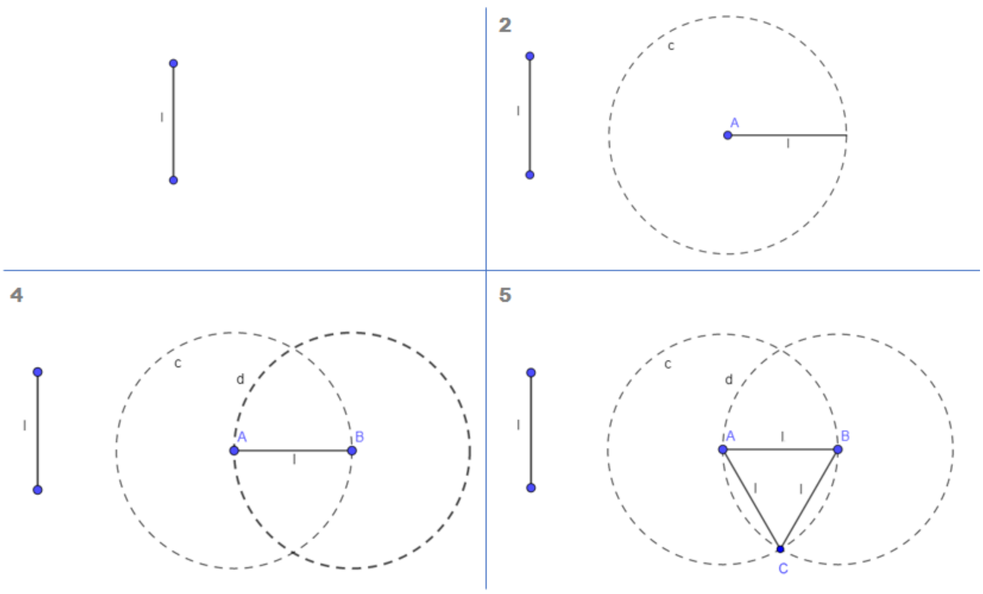
Consideremos, inicialmente, o exemplo a seguir:

Exemplo 4.1.4. *Construa com régua e compasso um triângulo equilátero ABC de lados iguais a l.*

Solução 4.1.4. *Descrição da construção:*

1. *Marque um ponto arbitrário A no plano;*
2. *Com a abertura do compasso igual a l, centre-o em A e construa o círculo c de centro A e raio l;*
3. *Marque um ponto arbitrário B sobre tal círculo;*
4. *Com a abertura do compasso igual a l, centre-o em B e construa o círculo b de centro B e raio l;*
5. *Denotando por C uma das interseções dos dois círculos traçados (c e b), construímos um triângulo ABC, equilátero, já que todos os seus lados medem l.*

Figura 31 – Construção de um triângulo equilátero.

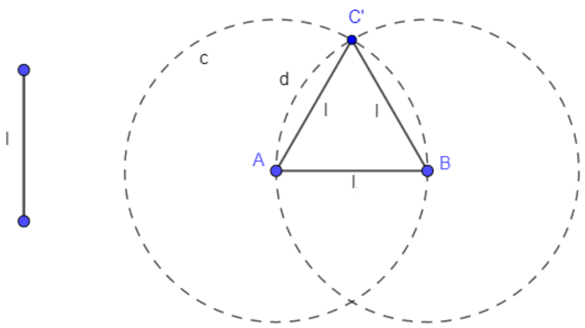


Fonte: Fonte autoral.

Questionamento: Por que podemos afirmar que os lados AC e BC do triângulo ABC, construído na Figura 31, medem l?

No exemplo acima, construímos o triângulo ABC. Se, ao contrário do que fizemos, tivéssemos escolhido a outra interseção dos círculos c e b traçados, denotando-a por C'; teríamos, então, construído o triângulo ABC', também equilátero e de lado l, como ilustrado na Figura 32.

Figura 32 – Triângulo equilátero ABC'.



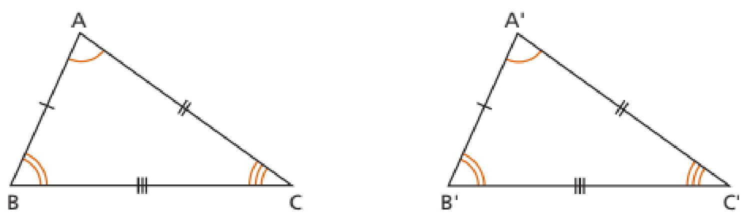
Fonte: Fonte autoral.

O triângulo ABC' merece ser qualificado como *"igual"* ao triângulo ABC, uma vez que só difere desse por sua posição no plano. Essa discussão motiva a noção de *"igualdade"* para triângulos, a qual recebe o nome especial de **congruência**.

Definição 4.1.4. *Dizemos que dois triângulos são* ***congruentes*** *se for possível mover um deles no espaço, sem deformá-lo, até fazê-lo coincidir com o outro.*

Assim, se dois triângulos ABC e $A'B'C'$ forem congruentes, deve existir uma *correspondência* entre os vértices de um e do outro, de modo que seus lados são ordenadamente congruentes aos lados do outro e seus ângulos são ordenadamente congruentes aos ângulos do outro. A Figura 33 mostra dois triângulos congruentes ABC e $A'B'C'$.

Figura 33 – Triângulos congruentes.



Fonte: Dolce e Pompeo (2013, p. 38)

Doravante, escrevemos

$$ABC \equiv A'B'C'$$

para denotar que os dois triângulos ABC e $A'B'C'$ são congruentes, com as seguintes correspondências

$$\begin{cases} \hat{A} = \widehat{A'}; \hat{B} = \widehat{B'}; \hat{C} = \widehat{C'} \\ \\ \overline{AB} = \overline{A'B'}; \overline{AC} = \overline{A'C'}; \overline{BC} = \overline{B'C'} \end{cases}$$

A congruência entre triângulos é **reflexiva**, **simétrica** e **transitiva**.

A definição de congruência de triângulos dá todas as condições que devem ser satisfeitas para que dois triângulos sejam congruentes. Essas condições (seis congruências: três entre lados e três entre ângulos) são totais. Existem, porém, *condições mínimas* para que dois triângulos sejam congruentes. São os chamados **casos** ou **critérios** de congruência.

- **1º caso de congruência - LAL**

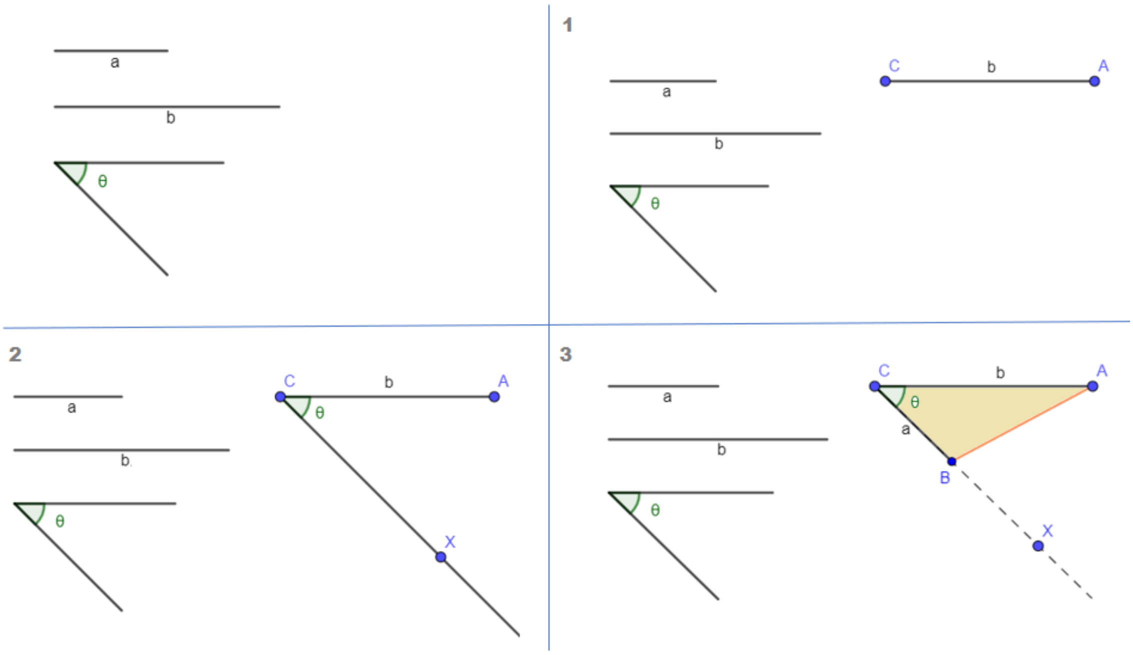
Consideremos o exemplo a seguir.

Exemplo 4.1.5. *Construa com régua e compasso o triângulo ABC, dados os segmentos de medida a e b e o ângulo de medida θ.*

Solução 4.1.5. *Descrição da construção:*

1. *Construa o segmento $\overline{AC} = b$ no plano;*
2. *Transporte o ângulo dado para um ângulo $A\hat{C}X = \theta$, de vértice C, determinando a semirreta $\overrightarrow{CX}$ de origem C;*
3. *Construa o segmento $\overline{BC} = a$, sobre a semirreta $\overrightarrow{CX}$; com isso, visualizamos o triângulo ABC.*

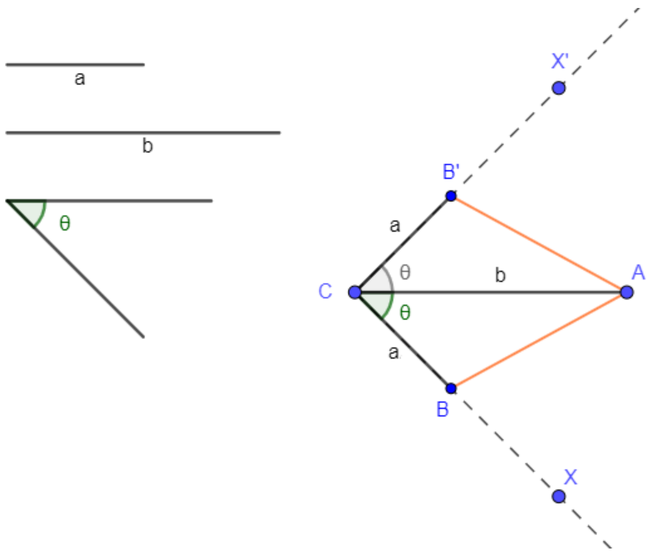
Figura 34 – Exemplo de construção de triângulo.



Fonte: Fonte autoral.

Analisando os passos da construção acima notamos que, escolhendo outra direção para os lados do ângulo $\angle ACX$, a construção do triângulo ABC continuar determinada. Pelos dados do exemplo, obtemos um triângulo $AB'C$, como mostra a Figura 35, que, intuitivamente, qualificamos como congruente ao triângulo ABC. Logo, temos o nosso primeiro caso de congruência.

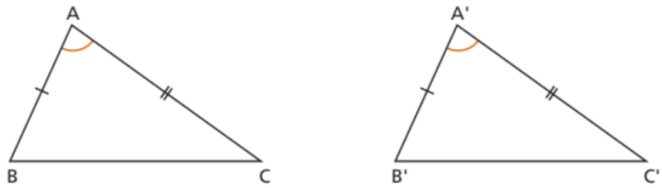
Figura 35 – Congruência dos triângulos ABC e $AB'C$ pelo caso LAL.



Fonte: Fonte autoral.

Axioma 4.1.1. *Se dois lados de um triângulo e o ângulo formado por esses dois lados forem respectivamente iguais a dois lados de outro triângulo e ao ângulo formado por esses dois lados, então os dois triângulos são congruentes.*

Figura 36 – O caso de congruência LAL.



Fonte: Dolce e Pompeo (2013, p. 38)

Em símbolos, o caso de congruência acima garante que, dados os triângulos ABC e $A'B'C'$, temos:

$$\left.\begin{array}{c} \overline{AB} = \overline{A'B'} \\ \overline{AC} = \overline{A'C'} \\ \widehat{A} = \widehat{A'} \end{array}\right\} \Longrightarrow ABC \equiv A'B'C'.$$

com a correspondência de vértices $A \leftrightarrow A'$, $B \leftrightarrow B'$, $C \leftrightarrow C'$. Em particular, segue daí que

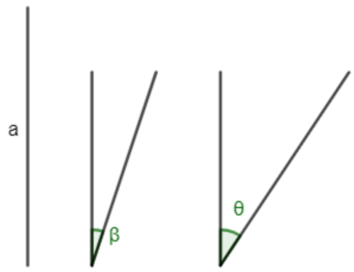
$$\widehat{B} = \widehat{B'},\ \widehat{C} = \widehat{C'},\ \overline{BC} = \overline{B'C'}.$$

- **2º caso de congruência - ALA**

Consideremos, agora, o exemplo a seguir.

Exemplo 4.1.6. *Construa com régua e compasso o triângulo ABC, conhecidos $\overline{BC} = a$, $\widehat{B} = \beta$ e $\widehat{C} = \theta$.*

Figura 37 – Lado e dois ângulos para construção de um triângulo.

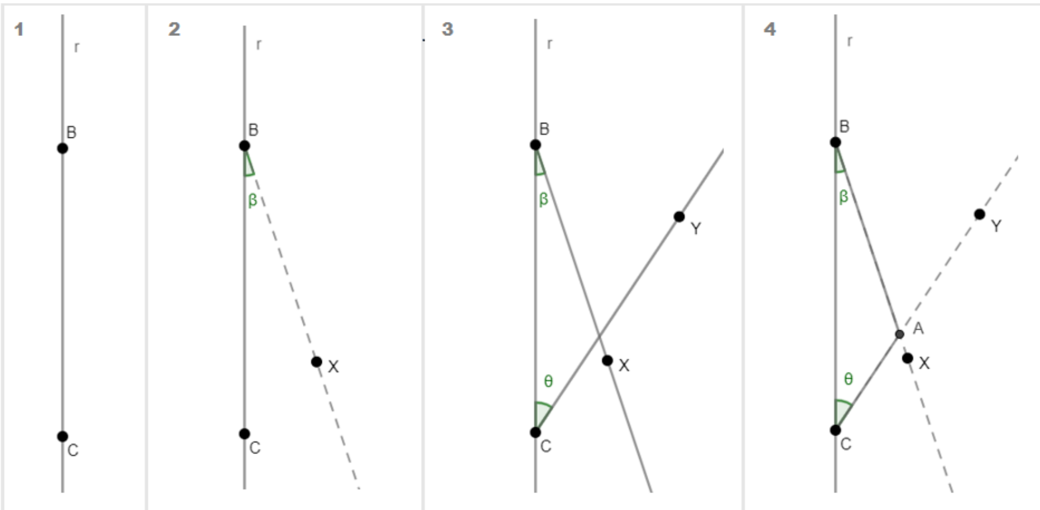


Fonte: Fonte autoral.

Solução 4.1.6. *Descrição da construção:*

1. *Trace uma reta r e, sobre a mesma, marque pontos B e C tais que $\overline{BC} = a$;*
2. *Construa uma semirreta $\overrightarrow{BX}$ tal que $C\widehat{B}X = \beta$;*
3. *No semiplano determinado por r e X construa a semirreta $\overrightarrow{CY}$ tal que $B\widehat{C}Y = \theta$;*
4. *Marque o ponto A como interseção das semirretas $\overrightarrow{BX}$ e $\overrightarrow{CY}$.*

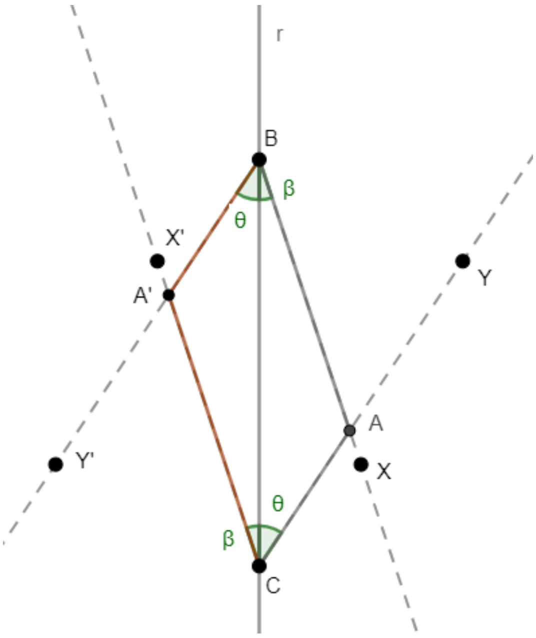
Figura 38 – Construção de um triângulo dados um lado e dois ângulos.



Fonte: Fonte autoral.

Analisando os passos da construção acima, notamos que, escolhendo outra direção para a semirreta $\overrightarrow{BX}$, a construção do triângulo ABC continua determinada pelos dados do exemplo e obtemos um triângulo $A'BC$, como mostra a Figura 39, que, intuitivamente, qualificamos como congruente ao triângulo ABC. Logo, temos o nosso segundo caso de congruência.

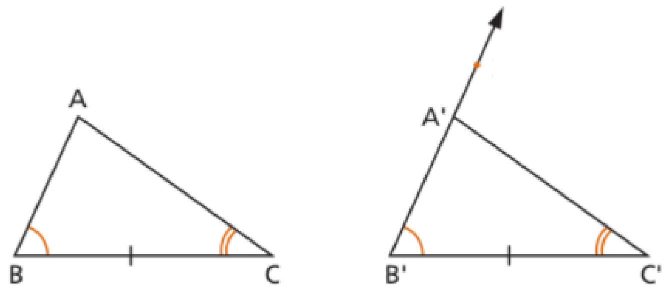
Figura 39 – Congruência dos triângulos ABC e $A'BC$ pelo caso ALA.



Fonte: Fonte autoral.

Axioma 4.1.2. *Se dois ângulos de um triângulo e o lado compreendido entre esses dois ângulos forem respectivamente iguais a dois ângulos de outro triângulo e ao lado compreendido entre esses dois ângulos, então os dois triângulos são congruentes.*

Figura 40 – O caso de congruência ALA.



Fonte: Dolce e Pompeo (2013, p. 40)

Em símbolos, o caso de congruência acima garante que, dados os triângulos ABC e $A'B'C'$, temos:

$$\left.\begin{array}{r}\widehat{A} = \widehat{A'} \\ \widehat{B} = \widehat{B'} \\ \overline{AB} = \overline{A'B'}\end{array}\right\} \Longrightarrow ABC \equiv A'B'C'.$$

com a correspondência de vértices $A \leftrightarrow A'$, $B \leftrightarrow B'$, $C \leftrightarrow C'$. Em particular, também devemos ter

$$\widehat{C} = \widehat{C'},\ \overline{AC} = \overline{A'C'} \text{ e } \overline{BC} = \overline{B'C'}.$$

- **3º caso de congruência - LLL**

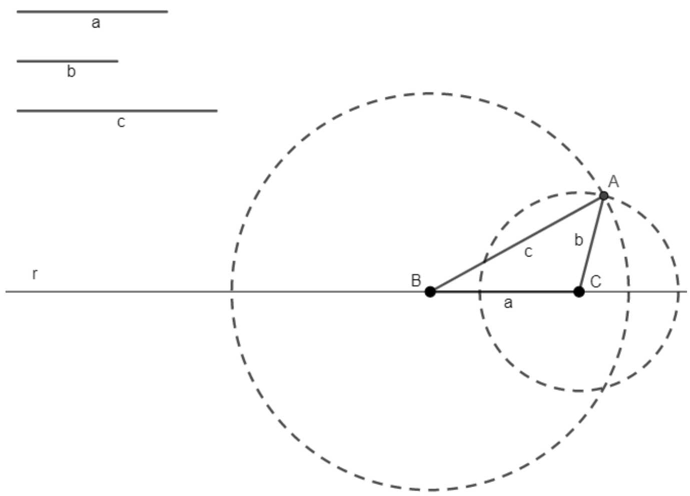
Examinaremos, agora, o exemplo que motivará nosso terceiro caso de congruência.

Exemplo 4.1.7. *Construa com régua e compasso o triângulo ABC, conhecidos $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{BC} = a$.*

Solução 4.1.7. *Descrição da construção:*

1. *Trace uma reta r e, sobre a mesma, marque pontos B e C tais que $\overline{BC} = a$;*
2. *Trace os círculos de centro B e raio c e de centro C e raio b;*
3. *Marque o ponto A como um dos pontos de interseção dos círculos traçados no item anterior.*

Figura 41 – Construção de um triângulo dados três lados.

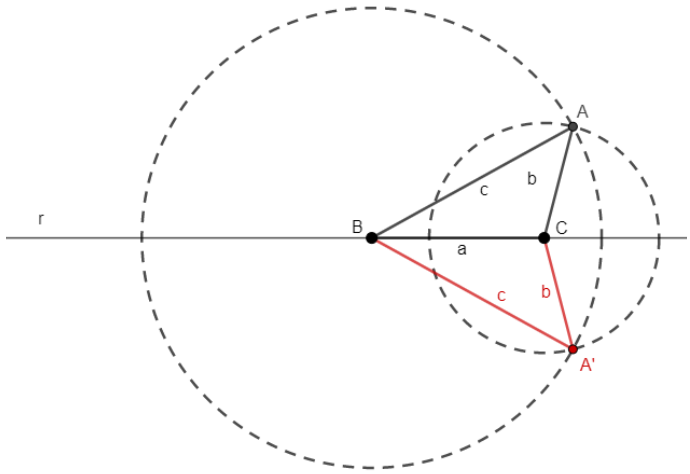


Fonte: Fonte autoral.

Questionamento: Qualquer que fosse o comprimento dos segmentos, seria possível formar um triângulo? O comprimento dos lados de um triângulo é arbitrário?

Uma vez mais, podemos usar os passos da construção para evidenciar que, escolhendo o outro ponto de interseção dos círculos de centro B e raio c e de centro C e raio b, obteríamos um triângulo $A'BC$, como mostra a Figura 42, que, intuitivamente, qualificamos como congruente ao triângulo ABC. Logo, temos o nosso terceiro caso de congruência.

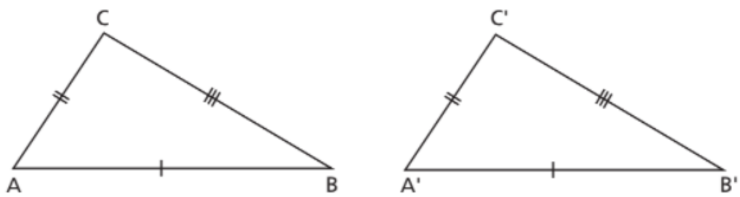
Figura 42 – Congruência dos triângulos ABC e $A'BC$ pelo caso LLL.



Fonte: Fonte autoral.

Axioma 4.1.3. *Se os três lados de um triângulo são, em alguma ordem, respectivamente congruentes aos três lados de outro triângulo, então os dois triângulos são congruentes.*

Figura 43 – O caso de congruência LLL.



Fonte: Dolce e Pompeo (2013, p. 41)

Em símbolos, o caso de congruência acima garante que, dados os triângulos ABC e $A'B'C'$, temos:

$$\left.\begin{array}{l} \overline{AB} = \overline{A'B'} \\ \overline{BC} = \overline{B'C'} \\ \overline{CA} = \overline{C'A'} \end{array}\right\} \Longrightarrow ABC \equiv A'B'C'.$$

com a correspondência de vértices $A \leftrightarrow A'$, $B \leftrightarrow B'$, $C \leftrightarrow C'$. Em particular, também temos

$$\widehat{A} = \widehat{A'},\ \widehat{B} = \widehat{B'} \text{ e } \widehat{C} = \widehat{C'}.$$

Por fim, há outros dois casos de congruência de triângulos, como enunciaremos a seguir, no entanto não os exploraremos como fizemos com os outros.

- **4º caso de congruência - LAAo**

Corolário 4.1.1. *Se dois ângulos de um triângulo e o lado oposto a um desses ângulos forem respectivamente iguais a dois ângulos de outro triângulo e ao lado oposto ao ângulo correspondente nesse outro triângulo, então os dois triângulos são congruentes.*

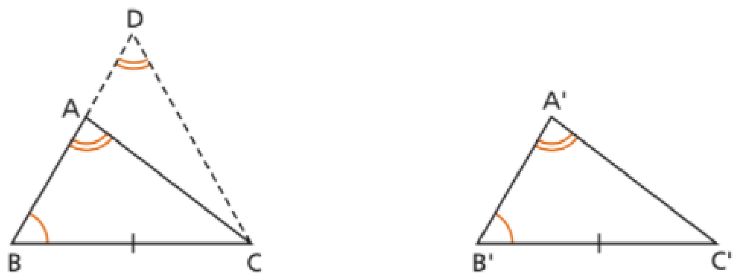
Em símbolos, o caso de congruência acima garante que, dados os triângulos ABC e $A'B'C'$, temos:

$$\left.\begin{array}{c}\overline{BC}=\overline{B'C'}\\ \widehat{A}=\widehat{A'}\\ \widehat{B}=\widehat{B'}\end{array}\right\}\Longrightarrow ABC\equiv A'B'C',$$

com a correspondência de vértices $A\leftrightarrow A'$, $B\leftrightarrow B'$, $C\leftrightarrow C'$. Em particular, também temos

$$\widehat{C}=\widehat{C'},\ \overline{AC}=\overline{A'C'},\ \overline{AB}=\overline{A'B'}.$$

Figura 44 – O caso de congruência LAAo.



Fonte: Dolce e Pompeo (2013, p. 45)

- **Caso especial de congruência de triângulos retângulos**

Corolário 4.1.2. *Se dois triângulos retângulos são tais que a hipotenusa e um dos catetos do primeiro são respectivamente congruentes à hipotenusa e a um dos catetos do outro, então esses triângulos são congruentes.*

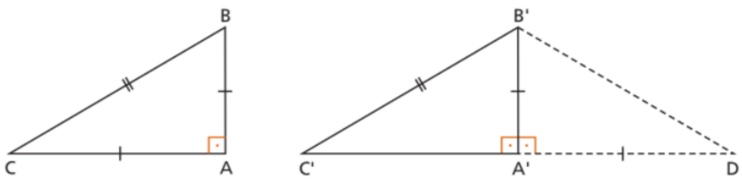
Em símbolos, o caso de congruência acima garante que, dados os triângulos retângulos ABC e $A'B'C'$ (retos em A e A' respectivamente), temos:

$$\left.\begin{array}{r}\widehat{A}=\widehat{A'}\\ \overline{AB}=\overline{A'B'}\\ \overline{BC}=\overline{B'C'}\end{array}\right\}\Longrightarrow ABC\equiv A'B'C',$$

com a correspondência de vértices $A \leftrightarrow A'$, $B \leftrightarrow B'$, $C \leftrightarrow C'$. Em particular, também temos

$$\widehat{B}=\widehat{B'},\ \widehat{C}=\widehat{C'},\ \overline{AC}=\overline{A'C'}.$$

Figura 45 – Caso especial de congruência de triângulos retângulos.



Fonte: Dolce e Pompeo (2013, p. 46)

4.1.6 Aplicações de congruência

Estudaremos nesta seção algumas aplicações úteis para este trabalho proporcionadas pelos casos de congruência de triângulos.

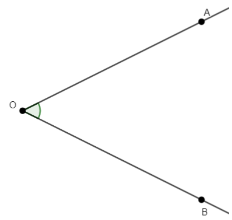
Definição 4.1.5. *Dado um ângulo $\angle AOB$, a* ***bissetriz*** *de $\angle AOB$ é a semirreta $\overrightarrow{OC}$ que o divide em dois ângulos iguais. Neste caso, dizemos ainda que $\overrightarrow{OC}$ bissecta $\angle AOB$. Assim,*

$$\overrightarrow{OC} \text{ bissecta } \angle AOB \Longleftrightarrow A\widehat{O}C = B\widehat{O}C.$$

O próximo exemplo ensina como construí-la.

Exemplo 4.1.8. *Construa com régua e compasso a bissetriz do ângulo $\angle AOB$ dado abaixo.*

Figura 46 – $\angle AOB$.

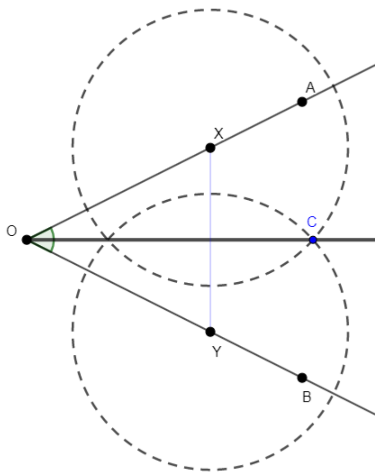


Fonte: Fonte autoral.

Solução 4.1.8. *Descrição da construção:*

1. *Centre o compasso em O e marque um ponto X de sua escolha sobre a semirreta $\overrightarrow{OA}$ e, mantendo a mesma abertura, marque um ponto Y sobre a semirreta $\overrightarrow{OB}$;*
2. *Centre o compasso em X e fixe uma abertura $s > \dfrac{1}{2}\overline{XY}$;*
3. *Mantendo a abertura s calibrada no item 2, trace os círculos de centro X e raio s e de centro Y e raio s;*
4. *Marque o ponto C como um dos pontos de interseção dos círculos traçados no item anterior;*
5. *A semirreta $\overrightarrow{OC}$ é a bissetriz de $\angle AOB$.*

Figura 47 – Construção da bissetriz do $\angle AOB$.

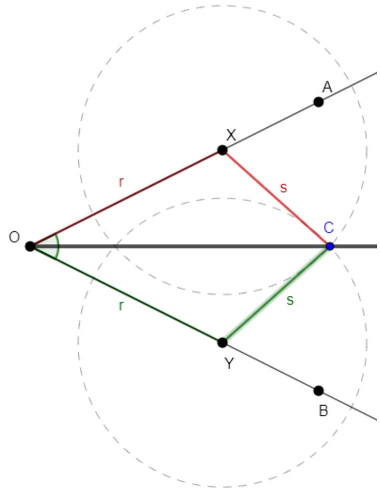


Fonte: Fonte autoral.

Justificativa: *Podemos afirmar que $\overrightarrow{OC}$ é a bissetriz de $\angle AOB$, pois essa semirreta dividiu o $\angle AOB$ em duas partes iguais. Isso constata-se ao observamos os triângulos*

XOC e YOC construídos, como evidenciado na Figura 48. Em relação a esses triângulos, de fato, temos $\overline{OX} = \overline{OY} = r$ e $\overline{XC} = \overline{YC} = s$; uma vez que o lado OC é comum aos dois triângulos, segue do caso de congruência LLL que $XOC \equiv YOC$. Logo, $X\hat{O}C = Y\hat{O}C$ ou, ainda, $A\hat{O}C = B\hat{O}C$.

Figura 48 – Justificando a construção da bissetriz pelo caso LLL.



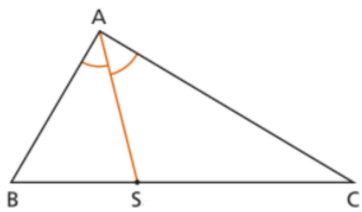
Fonte: Fonte autoral.

A partir desse entendimento, podemos definir a bissetriz interna de um triângulo ABC, relativa a $\overline{BC}$ (ou ao vértice A).

Definição 4.1.6 (Bissetriz interna de um triângulo)**.** *Bissetriz interna de um triângulo é o segmento, com extremidades num vértice e no lado oposto a esse vértice, que divide o ângulo desse vértice em dois ângulos congruentes.*

Na Figura 49, $\overline{AS}$ é a bissetriz relativa ao lado $\overline{BC}$ (ou ao vértice A); $S \in \overline{BC}$; $S\hat{A}B \equiv S\hat{A}C$.

Figura 49 – Bissetriz interna de um triângulo.



Fonte: Dolce e Pompeo (2013, p. 43)

Em uma aula direcionada, esse seria um momento instrutivo que o professor poderia sugerir que os estudantes desenhassem um triângulo ABC, juntamente com a bissetriz interna relativa a cada um dos vértices desse triângulo, em seguida levantar alguns questionamentos que direcionaria, por exemplo, ao entendimento de que todo triângulo possui exatamente três bissetrizes internas e que essas intersectam-se em um mesmo ponto, um ponto notável denominado **Incentro**, e que isso desencadeia outras propriedades úteis no estudo da Geometria.

Outra aplicação útil proporcionada pelos casos de congruência de triângulos resulta quando combinamos os casos LLL e LAL. A partir dessa combinação, podemos construir o **ponto médio de um segmento**, isto é, o ponto que o divide em duas partes iguais. O próximo exemplo explica como construí-lo.

Exemplo 4.1.9. *Construa com régua e compasso o ponto médio do segmento* $\overline{AB}$ *dado.*

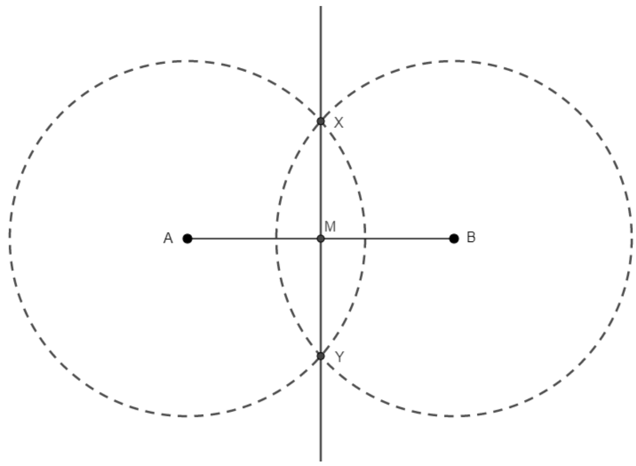
Figura 50 – Segmento de reta $\overline{AB}$.

Fonte: Fonte autoral.

Solução 4.1.9. *Descrição da construção:*

1. *Centre o compasso em* A *e fixe uma abertura* $r > \dfrac{1}{2}\overline{AB}$*;*
2. *Mantendo a abertura* r *calibrada no item 1, trace os círculos de centro* A *e raio* r *e de centro* B *e raio* r *e marque os pontos* X *e* Y *de interseção desses círculos;*
3. *O ponto* M *de interseção da reta* $\overleftrightarrow{XY}$ *com o segmento* $\overline{AB}$ *é o ponto médio de* $\overline{AB}$*.*

Figura 51 – Construção do ponto médio de $\overline{AB}$.



Fonte: Fonte autoral.

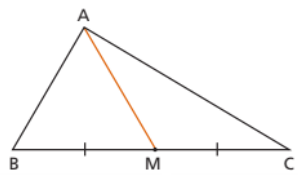
Justificativa: *De fato, em relação aos triângulos AXY e BXY, temos $\overline{AX} = \overline{BX}$ e $\overline{AY} = \overline{BY}$; uma vez que o lado XY é comum aos dois triângulos, segue do caso de congruência LLL que $AXY \equiv BXY$. Portanto, $A\widehat{X}Y = B\widehat{X}Y$ ou, ainda, $A\widehat{X}M = B\widehat{X}M$. Agora, nos triângulos AXM e BXM, temos que $\overline{AX} = \overline{BX}$ e $A\widehat{X}M = B\widehat{X}M$; mas, como o lado XM é comum aos mesmos, segue do caso LAL que $AXM \equiv BXM$. Logo, $\overline{AM} = \overline{BM}$.*

Dessa forma, podemos definir a **mediana** de um triângulo ABC, relativa a BC (ou ao vértice A).

Definição 4.1.7 (Mediana de um triângulo)**.** *Mediana de um triângulo é um segmento com extremidades num vértice e no ponto médio do lado oposto.*

Na Figura 52, M é o ponto médio do lado $\overline{BC}$; $\overline{AM}$ é a mediana relativa ao lado $\overline{BC}$; $\overline{AM}$ é a mediana relativa ao vértice A.

Figura 52 – Mediana de um triângulo.



Fonte: Dolce e Pompeo (2013, p. 43)

Mais uma vez, como sugestão didática, o professor pode aproveitar o ensejo para sugerir aos estudantes que desenhe um triângulo ABC, juntamente com a mediana relativa a cada um dos vértices desse triângulo, em seguida levantar alguns questionamentos que direcionaria, por exemplo, ao entendimento de que todo triângulo possui exatamente três medianas e que essas intersectam-se em um mesmo ponto, um ponto notável denominado **Baricentro**, e , junto disso, estudar outras propriedades úteis no estudo da Geometria. Para o propósito deste trabalho, não se faz necessário esses exemplos, mas fica a sugestão como abordagem desse conteúdo utilizando construções geométricas.

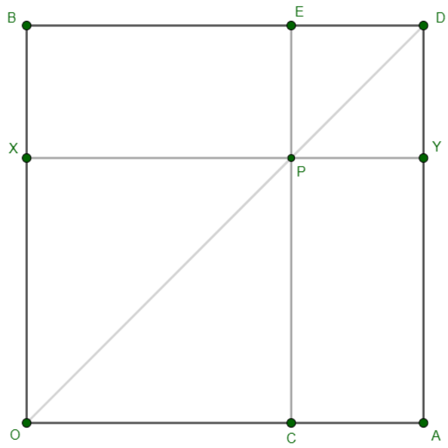
4.2 Construções Elementares

Como mencionado, as construções com régua e compasso tiveram enorme importância no desenvolvimento da Matemática, principalmente na Matemática grega. Na Grécia antiga, resolver a equação $ax = bc$ significava encontrar a altura x de um retângulo de base a que tivesse a mesma área de um retângulo de dimensões b e c. Vamos mostrar, como exemplo, como esse problema era resolvido na Grécia antiga.

Solução 4.2.1. *Constrói-se o retângulo $OADB$ com $\overline{OA} = a$ e $\overline{OB} = b$ (Figura 53). Sobre o lado OA toma-se um ponto C tal que $\overline{OC} = c$ (se $c > a$, C está no prolongamento de $\overline{OA}$) e traça-se $\overline{CE}$ paralelo a $\overline{OB}$ que intersecta $\overline{OD}$ em P. Traça-se então por P a paralela $\overline{XY}$ a $\overline{OA}$ e a solução é $\overline{OX} = x$.*

*A **justificativa** é a seguinte: são congruentes os triângulos OAB com OBD, OCP com OXP e ainda PYD com PED. Portanto, os retângulos $CAYP$ e $XPEB$ têm mesma área e, consequentemente, $OCEB$ e $OAYX$ são também equivalentes, isto é, são resultantes das somas de igual número de polígonos dois a dois congruentes entre si. Daí, $\overline{OC} \cdot \overline{OB} = \overline{OA} \cdot \overline{OX}$ ou $bc = ax$.*

Figura 53 – Resolvendo a equação $ax = bc$.



Fonte: Fonte autoral.

Para executar a construção da Figura 53, foi necessário o traçado de retas paralelas e perpendiculares. Como se sabe, a régua é capaz de traçar uma reta quando dois de seus pontos são conhecidos.

Dadas duas retas no plano, temos somente duas possibilidades para as mesmas: ou elas têm um ponto em comum ou não têm nenhum ponto em comum; no primeiro caso, as retas são ditas **concorrentes**; no segundo, as retas são **paralelas**.

4.2.1 Paralelas

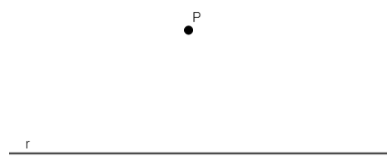
Definição 4.2.1 (Retas paralelas)**.** *Duas retas são paralelas (símbolo: $\|$) se, e somente se, são coincidentes (iguais) ou são coplanares (estão contidas no mesmo plano) e não têm nenhum ponto comum.*

Dois segmentos de reta são paralelos se, e somente se, estão contidos em retas paralelas.

O exemplo abaixo mostra como fazer a construção com régua e compasso de uma reta paralela a uma reta dada, passando por um ponto também dado.

Exemplo 4.2.1. *Construa com régua e compasso uma reta s, paralela à reta r e passando pelo ponto P.*

Figura 54 – Dados para construção da reta $s \parallel r$.

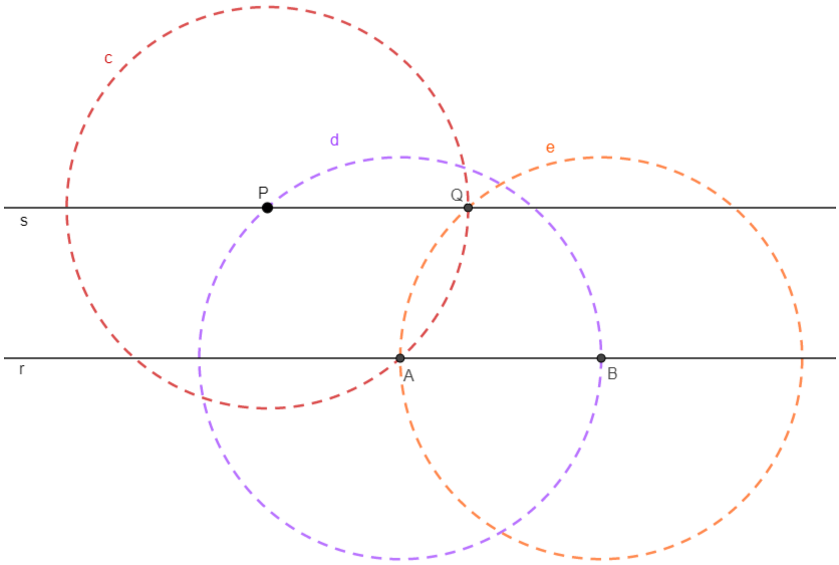


Fonte: Fonte autoral.

Solução 4.2.2. *Descrição da construção:*

1. *Calibre o compasso com uma abertura l, sendo l maior que a distância entre o ponto P e a reta r;*
2. *Mantenha a abertura calibrada no item 1, centre o compasso em P e construa o círculo c de raio l;*
3. *Marque como A um dos pontos de interseção do círculo c com a reta r;*
4. *Construa o círculo d de centro A e raio l e marque como B o ponto de interseção do círculo d com a reta r externo ao círculo c;*
5. *Construa o círculo e de centro B e raio l e marque como Q o ponto de interseção dos círculos c e e (sendo $Q \neq A$);*
6. *A reta $s = \overleftrightarrow{PQ}$ é paralela à reta r.*

Figura 55 – Construção da reta $s \parallel r$ passando por P.



Fonte: Fonte autoral.

Justificativa: *De forma simples, podemos afirmar que a reta s é paralela a r, pois, da forma como foi feita a construção, $PABQ$ é um losango (todos os seus lados tem mesma medida), e, portanto, seus lados PQ e AB são paralelos.*

A partir do traçado de paralelas e utilizando o Teorema de Tales[1], podemos resolver o seguinte exemplo como uma aplicação útil na construção de "fórmulas".

Exemplo 4.2.2. *Com o uso de régua e compasso divida o segmento $\overline{AB}$, dado a seguir, em cinco partes iguais.*

Figura 56 – Segmento de reta $AB \subset s$.

Fonte: Fonte autoral.

Solução 4.2.3. *Descrição da construção:*

1. *Trace, pelo ponto A, uma reta arbitrária r, de modo que o ângulo formado pelas retas $s \supset \overline{AB}$ e r seja θ, tal que $0° < \theta < 180°$;*

[1] Em https://portaldaobmep.impa.br/index.php/modulo/ver?modulo=10 podemos rever esse conteúdo, assim como o tópico "Semelhança de Triângulos", conteúdos da Geometria Plana importantes para a justificativa de algumas construções geométricas abordadas nesse trabalho

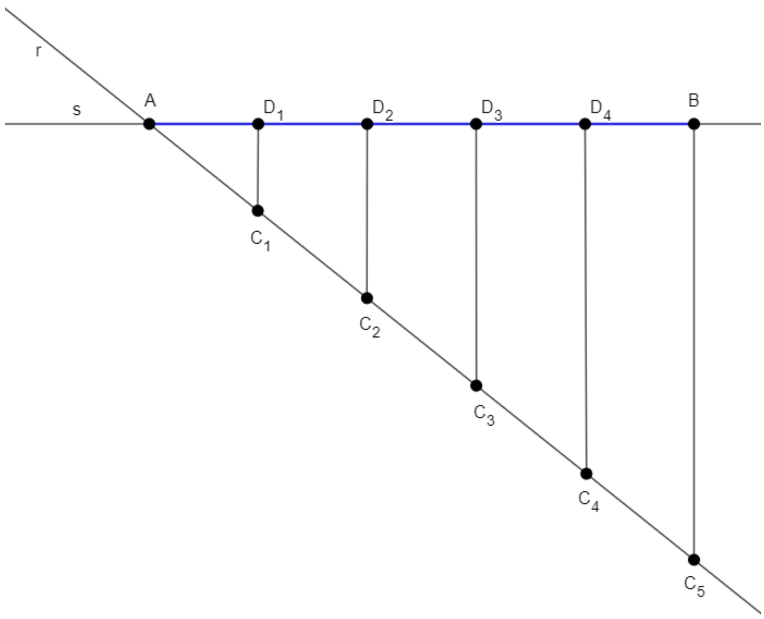
2. *Marque sobre r um ponto arbitrário C_1;*

3. *Marque sobre r pontos C_2, C_3, C_4 e C_5 tais que $\overline{AC_1} = \overline{C_1C_2} = \overline{C_2C_3} = \overline{C_3C_4} = \overline{C_4C_5}$;*

4. *Para $1 \leq i \leq 4$, trace a paralela à reta $\overleftrightarrow{C_5B}$ passando por C_i;*

5. *Se D_i, com $1 \leq i \leq 4$, é a interseção de tal paralela com o segmento $\overline{AB}$, então o teorema de Tales garante que os pontos D_1, D_2, D_3 e D_4 dividem $\overline{AB}$ em cinco partes iguais.*

Figura 57 – Divisão de $\overline{AB}$ em 5 partes iguais.



Fonte: Fonte autoral.

4.2.2 Perpendiculares

Definição 4.2.2 (Retas perpendiculares)**.** *Duas retas são perpendiculares (símbolo: $\perp$) se, e somente se, são concorrentes e formam ângulos adjacentes suplementares congruentes.*

Em outras palavras, dadas duas retas r e s no plano, dizemos que r é perpendicular a s, que s é perpendicular a r ou, ainda, que r e s são perpendiculares quando r e s tiverem um ponto em comum e formarem ângulos de 90° nesse ponto.

Dois segmentos de reta são perpendiculares se, e somente se, estão contidos em retas perpendiculares e têm um ponto comum.

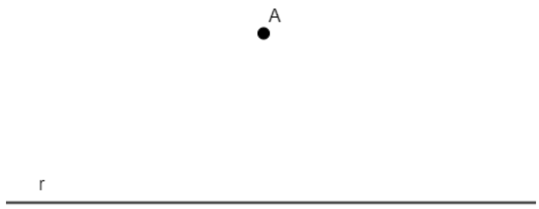
O próximo exemplo mostra como usar os casos de congruência estudados anteriormente para construir a reta perpendicular a uma reta e passando por um ponto dado.

Exemplo 4.2.3. *Dados, no plano, uma reta r e um ponto A, construa com régua e compasso uma reta s tal que $r \perp s$.*

Solução 4.2.4. *Descrição da construção:*

Caso 1: $A \notin r$.

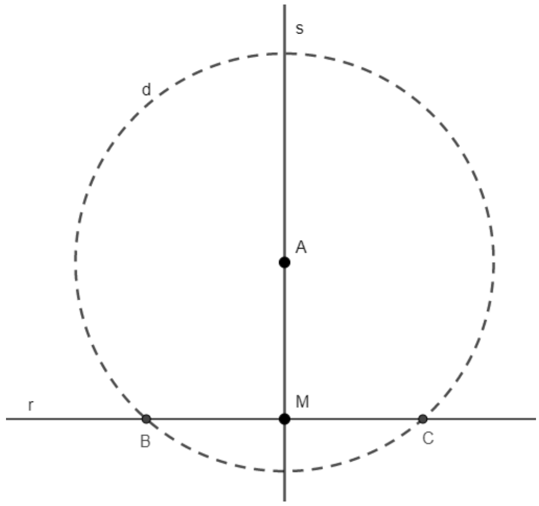
Figura 58 – Dados para construção da reta $r \perp s$ com $A \notin r$.



Fonte: Fonte autoral.

1. *Com o compasso centrado em A, descreva um círculo que intersecte a reta r em dois pontos distintos B e C;*
2. *Construa o ponto médio M de $\overline{BC}$ e faça $s = \overleftrightarrow{AM}$.*

Figura 59 – Construção da reta $r \perp s$ com $A \in s$.



Fonte: Fonte autoral.

Justificativa: *De fato, em relação aos triângulos ABM e ACM, temos $\overline{AB} = \overline{AC}$ e $\overline{BM} = \overline{CM}$; como AM é lado de ambos os triângulos, segue do caso LLL que $ABM \equiv ACM$ e, daí, $A\widehat{M}B = A\widehat{M}C$. Mas, como $A\widehat{M}B + A\widehat{M}C = 180°$, devemos ter, então, que $A\widehat{M}B = A\widehat{M}C = 90°$ ou, ainda, $\overleftrightarrow{AM} \perp r$.*

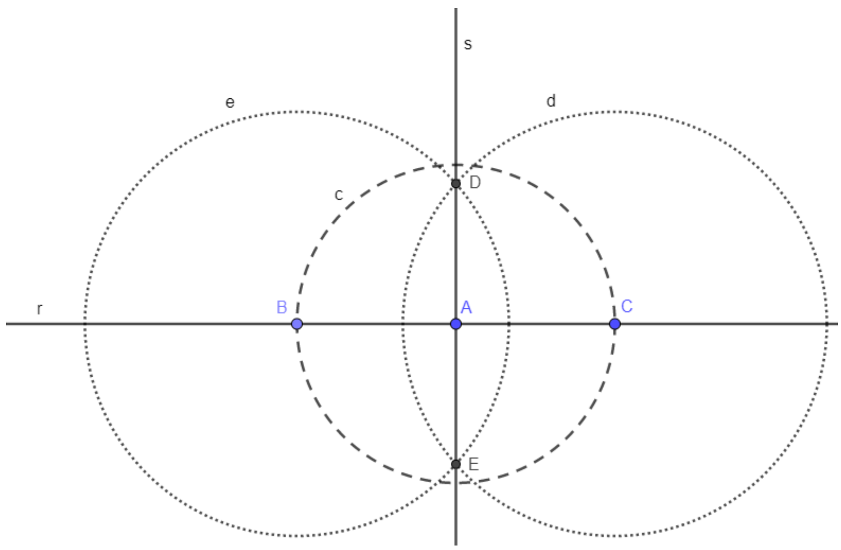
Caso 2: $A \in r$.

Figura 60 – Dados para construção da reta $r \perp s$ com $A \in r$.

Fonte: Fonte autoral.

1. *Com o compasso centrado em A, construa um círculo que intersecta a reta r nos pontos B e C;*
2. *Trace, agora, círculos de raio $p > \frac{1}{2}\overline{BC}$ e centros respectivamente em B e em C; sendo D e E os pontos de interseção de tais círculos, temos $s = \overleftrightarrow{DE} \perp r$.*

Figura 61 – Construção da reta $r \perp s$ com $A \in r$.



Fonte: Fonte autoral.

Justificativa: *De fato, temos $ABD \equiv ACD$ por LLL e, daí, $D\widehat{A}B = D\widehat{A}C$. Mas, como $D\widehat{A}B + D\widehat{A}C = 180°$, segue que $D\widehat{A}B = D\widehat{A}C = 90°$.*

A partir do traçado de perpendiculares, podemos construir, a exemplo, a altura de um triângulo e a mediatriz de um segmento. A saber:

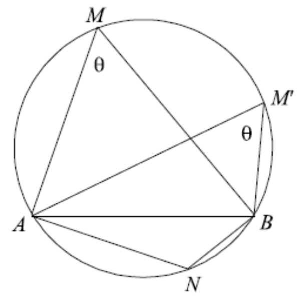
Definição 4.2.3 (Altura de um triângulo)**.** *Altura de um triângulo é o segmento de reta perpendicular à reta suporte de um lado do triângulo com extremidades nesta reta e no vértice oposto ao lado considerado.*

Definição 4.2.4 (Mediatriz de um segmento)**.** *A mediatriz de um segmento é a reta perpendicular ao segmento pelo seu ponto médio.*

4.2.3 Arco capaz

Esta seção estuda uma importante noção da Geometria Euclidiana, que relaciona retas e círculos. Considere dois pontos A e B sobre uma circunferência. Para todo ponto M sobre um dos arcos, o ângulo $A\widehat{M}B = \theta$ é constante.

Figura 62 – Arco capaz do ângulo θ sobre o segmento $\overline{AB}$.



Fonte: Wagner (2015, p. 21)

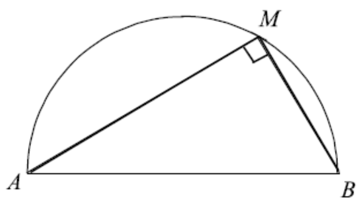
Um observador que percorra o maior arco AB da Figura 62, consegue ver o segmento $\overline{AB}$ sempre sob o mesmo ângulo. Este arco chama-se *arco capaz do ângulo θ sobre o segmento $\overline{AB}$.*

Definição 4.2.5. *Dados um segmento $\overline{AB}$ e um ângulo θ, com $0° < \theta < 180°$, o lugar geométrico dos pontos M do plano tais que $A\widehat{M}B = \theta$ é a reunião de dois arcos de círculo, simétricos em relação à reta $\overleftrightarrow{AB}$ e tendo os pontos A e B em comum. Tais arcos são os* ***arcos capazes*** *de θ em relação a $\overline{AB}$.*

Naturalmente que, se um ponto N pertence ao outro arco AB, então o ângulo $\angle ANB$ é também constante e igual a $180° - \theta$.

Ainda é interessante notar que se M é qualquer ponto da circunferência de diâmetro $\overline{AB}$ o ângulo $A\widehat{M}B = 90°$. Por isso, cada semicircunferência de diâmetro $\overline{AB}$ é chamada de *arco capaz de* $90°$ *sobre* $\overline{AB}$.

Figura 63 – Arco capaz de $90°$ sobre AB.



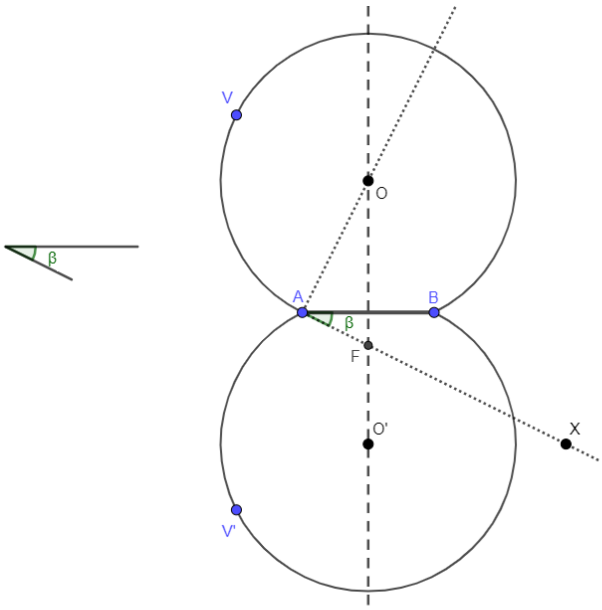
Fonte: Wagner (2015, p. 22)

Exemplo 4.2.4. *Construção do arco capaz, dados o ângulo β e o segmento $\overline{AB}$.*

Solução 4.2.5. *Descrição da construção:*

1. *Traçamos a mediatriz do segmento $\overline{AB}$, pois nela devem estar os centros dos arcos;*
2. *Transportamos o ângulo β sobre a semirreta $\overrightarrow{AB}$, obtendo a semirreta $\overrightarrow{AX}$ e $B\hat{A}X = \beta$;*
3. *Traçamos a perpendicular à semirreta $\overrightarrow{AX}$ pelo ponto A, que encontra a mediatriz de $\overline{AB}$ no ponto O, centro de um arco capaz;*
4. *O ponto O', simétrico do ponto O em relação ao segmento $\overline{AB}$, é o centro do outro arco capaz;*
5. *Os arcos procurados são AVB e $AV'B$, de centro O e O' e de mesmo raio $\overline{OA}$.*

Figura 64 – Arcos capazes de β em relação a $\overline{AB}$.



Fonte: Fonte autoral.

Justificativa: *Justificamos esse procedimento levando em conta que, pela semelhança dos triângulos retângulos OAF e AMF, sendo M o ponto médio do segmento $\overline{AB}$, o ângulo AOF é congruente a β. Como o triângulo OAB é isósceles e a reta $\overleftrightarrow{OM}$ é a mediatriz da base, temos $A\hat{O}B = 2A\hat{O}M$. Sabendo que a medida de um ângulo inscrito numa circunferência é a metade da medida do seu arco correspondente, temos $A\hat{V}B = \dfrac{1}{2}A\hat{O}B = \beta$.*

Observação 4.2.1. *Note que na definição de "arco capaz" utilizamos a expressão* ***lugar geométrico****. Em Geometria, essa é uma expressão antiga que designa o conjunto de todos os pontos que possuem uma determinada propriedade. Assim, dizemos que no plano, a mediatriz é o lugar geométrico dos pontos que equidistam dos extremos de um segmento; a bissetriz de um ângulo é o lugar geométrico dos pontos que equidistam dos lados do ângulo; O arco delimitado por dois pontos A e B é o lugar geométrico de um ângulo θ sobre o segmento $\overline{AB}$; o círculo é o lugar geométrico dos pontos que estão a uma distância dada de um ponto fixo (o centro); etc. Devemos deixar claro que quando dizemos que uma figura F é o lugar geométrico dos pontos que possuem a propriedade p, queremos dizer que todo ponto de F possui a propriedade p e nenhum ponto fora de F possui a propriedade p.*

4.3 Segmentos Construtíveis

De acordo com Rezende e Queiroz (2008, p. 149), "chamamos de segmentos construtíveis aqueles que podem ser obtidos, a partir de segmentos dados, por meio de construções com régua e compasso". Porém,

> [$\cdots$] nem sempre é possível, com régua e compasso, construir qualquer segmento a partir de determinadas condições dadas, ou seja, nem todos os segmentos são construtíveis. Um exemplo é o segmento $\sqrt[3]{2}$, cuja construção equivale ao conhecido problema geral da "duplicação do cubo", o qual consiste em determinar-se a medida do cubo cujo volume é igual ao dobro do volume de um cubo de aresta a dado. Esta nova aresta deve medir $a\sqrt[3]{2}$ (REZENDE; QUEIROZ, 2008, 150).

Lembramos que a duplicação do cubo é um dos problemas, juntamente com a trissecção do ângulo e a quadratura do círculo, não resolvidos pelos matemáticos da Escola Grega por serem impossíveis se forem utilizados apenas a régua (sem marcas) e o compasso (GARBI, 2010). Reiteramos que estamos trabalhando apenas com construções possíveis com régua (sem marcações)!

Rezende e Queiroz (2008) explicam que a possibilidade de construção de segmentos é equivalente à da construção de números, isto é,

> [$\cdots$] fixado um segmento considerado unitário, só poderá ser construído com régua e compasso um segmento cuja medida se exprima mediante um número finito de operações de adição, subtração, multiplicação, divisão e extração de raiz quadrada, estas operações sendo efetuadas a partir de números inteiros positivos, ou seja, só poderá ser construído um segmento cuja medida seja um número construtível (REZENDE; QUEIROZ, 2008, p. 151).

Como podemos observar, $\sqrt[3]{2}$ é raiz da equação $x^3 - 2 = 0$, mas não é raiz de nenhuma equação de grau menor do que 3, com coeficientes inteiros (verifique!). Portanto, embora sendo um número algébrico, $\sqrt[3]{2}$ não é um número construtível. Assim, não é construtível também $\sqrt[3]{a^3+b^3}$, da qual $\sqrt[3]{2}$ é um caso particular, para $a=b=1$.

Concluímos então que um número só pode ser construtível se for um número algébrico e também observamos, com base em Rezende e Queiroz (2008), que nem todos os números algébricos são construtíveis, um exemplo disso são os "números transcendentes", como π (Um número é transcendente se não for raiz de nenhuma equação polinomial com coeficientes inteiros).

Como mencionado, muitas vezes representaremos um segmento por uma letra minúscula; por exemplo, poderemos denotar o segmento de reta $\overline{AB}$ pela letra a. Assim, a letra a poderá, sem que isso gere confusão, representar tanto o segmento $\overline{AB}$ como a sua medida. Utilizaremos um segmento auxiliar u, o qual poderemos denotar simplesmente por 1, que representará o segmento unitário. Se a medida de um segmento a for menor que a medida de um segmento b, isto será denotado por $a<b$ ou $b>a$. Se a e b forem congruentes, isto será denotado por $a=b$.

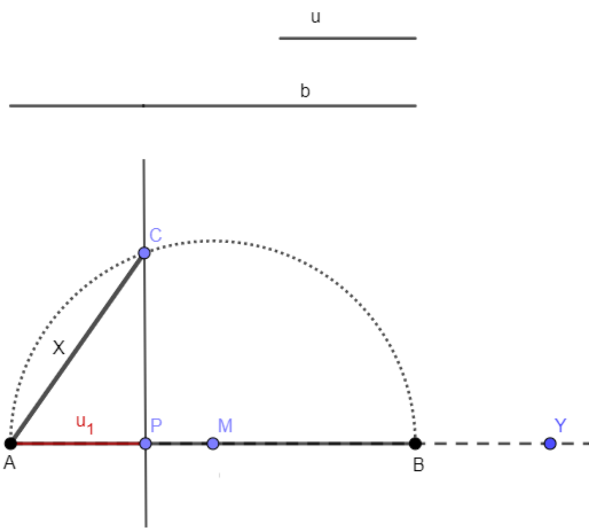
Vejamos a seguir construções de alguns segmentos com régua e compasso.

Exemplo 4.3.1. *Dado o segmento b, vamos construir o segmento $x=\sqrt{b}$.*

Solução 4.3.1. *Descrição da construção:*

1. *Trace a semirreta $\overrightarrow{AY}$ e construa sobre ela o segmento $\overline{AB}=b$;*
2. *A partir de A e na semirreta oposta a $\overrightarrow{BA}$, trace o segmento $\overline{AP}=u$;*
3. *Determine o ponto médio M do segmento $\overline{AB}$ e trace a semicircunferência de centro M e raio $\overline{MA}$;*
4. *Trace por P a perpendicular ao segmento $\overline{AB}$; em seguida, marque o ponto C de interseção dessa perpendicular com a semicircunferência.*
5. *O segmento $\overline{AC}$ tem medida $x=\sqrt{b}$.*

Figura 65 – Construção do segmento $x = \sqrt{b}$.



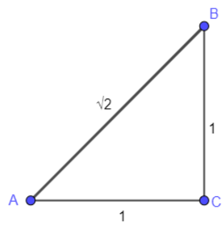
Fonte: Fonte autoral.

Justificativa: *O triângulo ABC é retângulo em C, pois, como vimos ao definir arco capaz, cada semicircunferência de diâmetro $\overline{AB}$ é chamada de arco capaz de $90°$ sobre $\overline{AB}$. Logo, para o triângulo retângulo ABC, retângulo em C, vale a relação $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{AP}}$, pela semelhança do triângulo ABC com o triângulo DBA. Logo, $\dfrac{b}{x} = \dfrac{x}{u}$. E daí, $x = \sqrt{b}$.*

Observação 4.3.1. *Usamos aqui resultados da Geometria Euclidiana Plana sobre semelhança de triângulos, em particular, entre triângulos retângulos.*

A partir disso, podemos construir, por exemplo, um segmento de medida $\sqrt{2}$. No entanto, de maneira diferente, podemos sugerir construir um triângulo retângulo isósceles cujos catetos são segmentos unitários. Pelo Teorema de Pitágoras, concluímos que a hipotenusa desse triângulo medirá $\sqrt{2}$ (a hipotenusa desse triângulo é também a diagonal de um quadrado de lado 1).

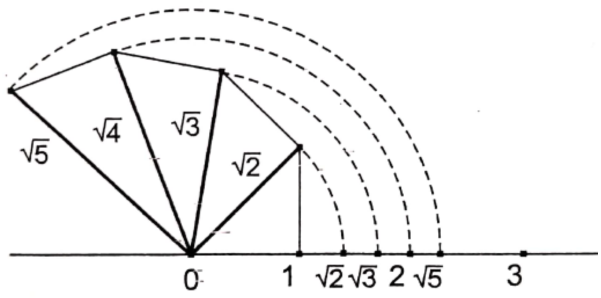
Figura 66 – Construção do segmento de medida $\sqrt{2}$.



Fonte: Fonte autoral.

Com o argumento acima, podemos construir um segmento de medida $\sqrt{3}$, que será a hipotenusa do triângulo retângulo cujos catetos medem $\sqrt{2}$ e 1, respectivamente. E, assim, para qualquer número natural n, podemos ilustrar o segmento $\sqrt{n}$. Estas construções nos permitem localizar, sobre a reta numérica, os pontos correspondentes aos números irracionais $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \cdots$. Para isso, basta que associemos a coordenada 0 ao ponto A e a coordenada 1 ao ponto B e teremos:

Figura 67 – Correspondentes aos números $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \cdots$ sobre a reta numérica.

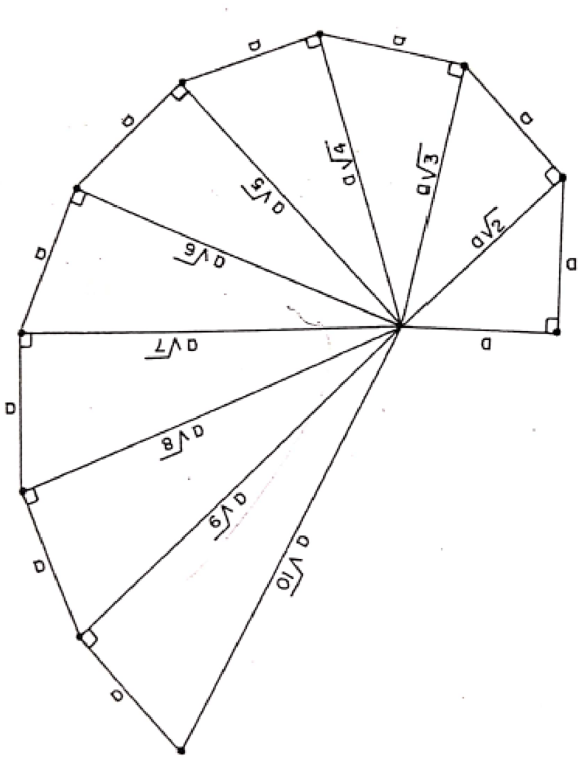


Fonte: Rezende e Queiroz (2008, p. 150)

Exemplo 4.3.2. *Dado o segmento a, construir o segmento $p = a\sqrt{21}$.*

Observação 4.3.2. *Dado um segmento a, podemos construir todos os elementos da sequência $a\sqrt{2}, a\sqrt{3}, a\sqrt{4}, \cdots$, como vemos na construção expressa pela Figura 68. Observe que $AA_n = a\sqrt{n}$.*

Figura 68 – Construção de $a\sqrt{n}$.



Fonte: Wagner (2000, p. 34)

Entretanto, quando n é grande, podemos buscar um caminho mais curto. Vejamos a construção de $p = a\sqrt{21}$.

Solução 4.3.2. *Percebemos que a hipotenusa de um triângulo retângulo de catetos $4a$ e $2a$ é:*

$$m = \sqrt{(4a)^2 + (2a)^2} = \sqrt{16a^2 + 4a^2} = \sqrt{20a^2} = a\sqrt{20}.$$

Assim, com mais um passo, chegamos a $p = a\sqrt{21}$.

Descrição da construção:

1. *Trace a semirreta $\overrightarrow{AF}$ e construa sobre ela o segmento $\overline{AB} = 4a$;*

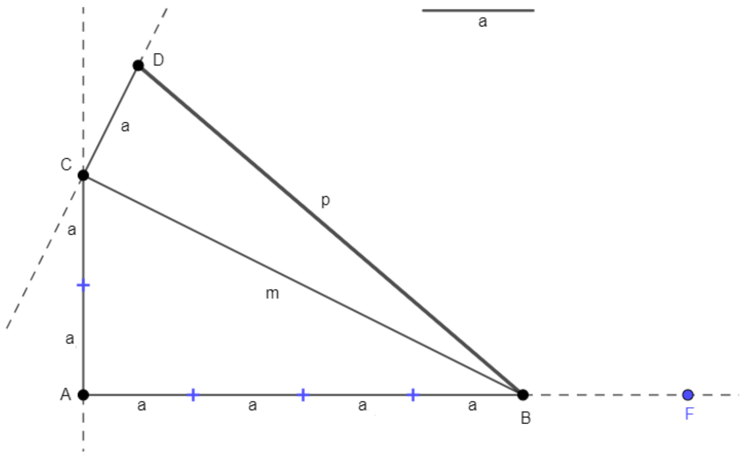
2. *Trace por A a reta perpendicular ao segmento $\overline{AB}$; em seguida, construa o segmento $\overline{AC} = 2a$;*

3. *A hipotenusa m do triângulo retângulo ABC, retângulo em A, tem medida $a\sqrt{20}$;*

4. *Trace por C a reta perpendicular ao segmento $\overline{BC}$ e, sobre essa reta, construa o segmento $\overline{CD} = a$;*

5. *O triângulo retângulo BCD, retângulo em C, tem catetos de medida a e $m = a\sqrt{20}$ e hipotenusa $\overline{BD} = p = a\sqrt{21}$.*

Figura 69 – Construção de $a\sqrt{21}$.



Fonte: Fonte autoral.

4.3.1 Segmentos proporcionais

Os segmentos a e b são ditos proporcionais aos segmentos c e d quando é verificada a relação

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

ou qualquer outra equivalente a ela.

Dizemos que o segmento de comprimento x é a **quarta proporcional** dos segmentos de comprimentos a, b e c (nessa ordem) quando for válida a relação

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x}.$$

Esta relação de proporcionalidade já aparece no século 5 a.C. e sua construção é feita com o argumento do Teorema de Tales. Vejamos a seguir como construir a quarta proporcional dos segmentos de comprimentos a, b e c.

Exemplo 4.3.3. *Construa, com régua e compasso, a quarta proporcional dos segmentos observados na Figura 70.*

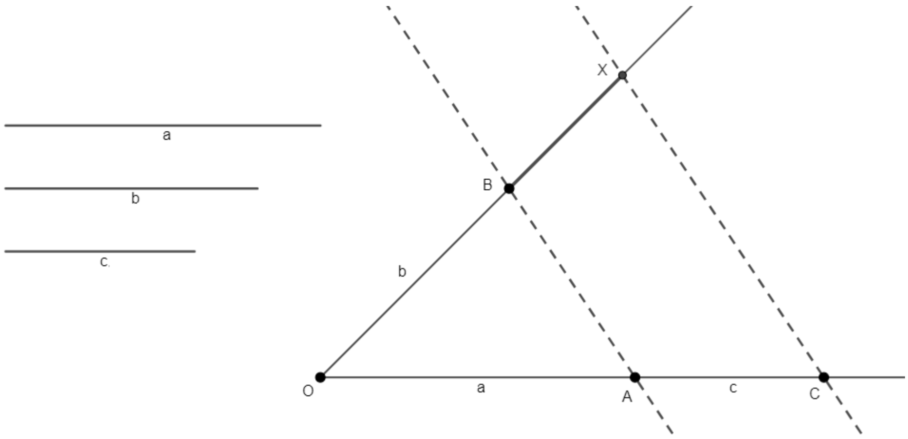
Solução 4.3.3. *Descrição da construção:*

1. *Construa um ângulo agudo qualquer de vértice O e transporte sobre um de seus lados os segmentos $\overline{OA} = a$, e depois $\overline{AC} = c$, e sobre o outro lado o segmento $\overline{OB} = b$;*

2. *Trace $\overleftrightarrow{AB}$, e pelo ponto C a reta $\overleftrightarrow{CX}$, paralela a $\overleftrightarrow{AB}$, com X pertencente a $\overrightarrow{OB}$;*

3. *A solução procurada é o segmento $\overline{BX} = x$. A justificativa pode ser feita pelo Teorema de Tales.*

Figura 70 – Construção da quarta proporcional de a, b e c.



Fonte: Fonte autoral.

Por outro lado, dados segmentos de comprimento a e b, dizemos que um segmento de comprimento x é a terceira proporcional de a e b (nessa ordem) se

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{x} \Leftrightarrow b^2 = ax \Leftrightarrow x = \frac{b^2}{a}.$$

A construção dessa relação é a mesma que mostramos para a quarta proporcional.

Como uma aplicação útil da quarta proporcional, podemos obter o segmento $m = a^2$.

Exemplo 4.3.4. *Dados os segmentos a e $u = 1$, construa o segmento $m = a^2$.*

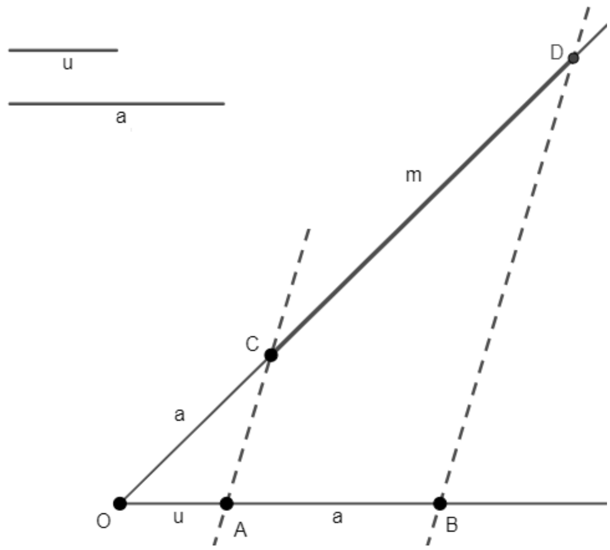
Solução 4.3.4. *Descrição da construção:*

1. *Construa um ângulo agudo qualquer de vértice O e transporte sobre um de seus lados os segmentos $\overline{OA} = u$, e depois $\overline{AB} = a$, e sobre o outro lado o segmento $\overline{OC} = a$;*

2. *Trace $\overleftrightarrow{AC}$, e pelo ponto B a reta $\overleftrightarrow{BD}$, paralela a $\overleftrightarrow{AC}$, com D pertencente a $\overrightarrow{OC}$;*

3. *A solução procurada é o segmento $\overline{CD} = m$.*

Figura 71 – Construção do segmento $m = a^2$.



Fonte: Fonte autoral.

Justificativa: *Pelo Teorema de Tales, temos*

$$\frac{1}{a} = \frac{a}{m} \Leftrightarrow m = a^2.$$

A mesma relação dessa última construção pode ser utilizada para construir, por exemplo, $x = \dfrac{1}{a}$. Aqui, a unidade é a média geométrica entre x e a. A seguir, explicamos a média geométrica entre dois segmentos.

4.3.2 Média geométrica

Definição 4.3.1. *Dados dois segmentos a e b, definimos a média geométrica ou a média proporcional entre eles como o segmento m tal que $m = \sqrt{ab}$.*

Exemplo 4.3.5. *Vamos construir a média geométrica entre os segmentos a e b.*

Solução 4.3.5. *Descrição da construção:*

- ***Primeiro método***

1. *Transporte sobre uma semirreta $\overrightarrow{AY}$ traçada, o segmento $\overline{AB} = a$ e o segmento $\overline{BC} = b$, como na Figura 72;*

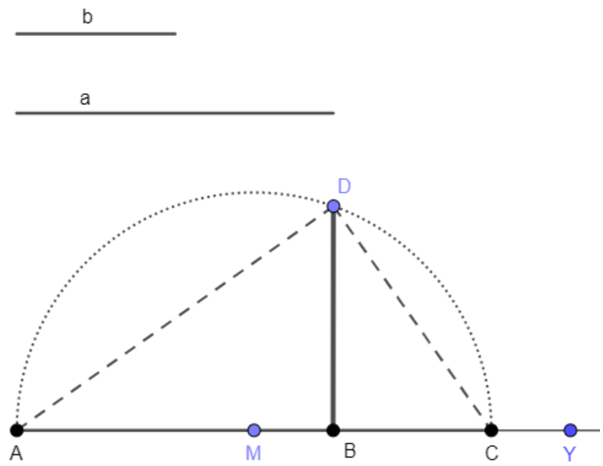
2. *Determine o ponto médio M do segmento $\overline{AC}$ e construa a semicircunferência de centro M e raio $\overline{MA}$;*

3. *Trace por B a perpendicular à semirreta $\overrightarrow{AY}$; em seguida, marque o ponto D de interseção dessa perpendicular com a semicircunferência;*

4. *Construa o triângulo DAC, retângulo em D;*

5. *O segmento $\overline{BD} = x$ é a média proporcional ou média geométrica entre os segmentos a e b.*

Figura 72 – Primeiro método de construção da média geométrica entre a e b.



Fonte: Fonte autoral.

Justificativa: *Em todo triângulo retângulo, "a altura relativa à hipotenusa é média proporcional (ou média geométrica) entre os segmentos que determina sobre a hipotenusa"(DOLCE; POMPEO, 2013, p. 217).*

- ***Segundo método***

1. *Transporte sobre uma semirreta $\overrightarrow{OY}$ o segmento $\overline{OA} = a$ e, depois, o segmento $\overline{OB} = b$;*

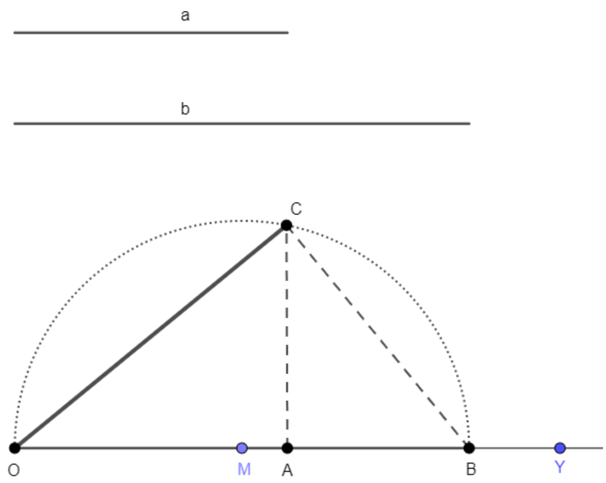
2. *Determine o ponto médio M do segmento $\overline{OB}$ e construa a semicircunferência de centro M e raio $\overline{MO}$;*

3. *Trace por A a perpendicular à semirreta $\overrightarrow{OY}$; em seguida, marque o ponto C de interseção dessa perpendicular com a semicircunferência;*

4. *Construa o triângulo OBC, retângulo em C com hipotenusa $\overline{OB}$;*

5. *O segmento $\overline{OC} = x$ é a média geométrica entre os segmentos a e b.*

Figura 73 – Segundo método de construção da média geométrica entre a e b.



Fonte: Fonte autoral.

Justificativa: *Em todo triângulo retângulo, "cada cateto é média proporcional (ou média geométrica) entre sua projeção sobre a hipotenusa e a hipotenusa"(DOLCE; POMPEO, 2013, p. 217).*

Observação 4.3.3. *Esse procedimento constitui uma das maneiras de encontrar o segmento $x = \sqrt{a}$, bastando, para isso, que construa-se a média geométrica entre a e a unidade dada.*

Com esses conhecimentos, temos a possibilidade de propor atividades didáticas, utilizando a MRP mediada pelas construções geométricas como ferramenta, que desafiem e instiguem a curiosidade e o aprendizado dos estudantes. No próximo capítulo, continuaremos trabalhando com construções geométricas, porém de forma diferente. A fim de impulsionar a participação dos estudantes na resolução dos problemas e construção das soluções a partir do que estudamos até aqui, traremos sistemas com duas equações para que sejam, a princípio, solucionados algebricamente, resultando em uma "fórmula"que determina o segmento desconhecido (a incógnita) em função dos dados do problema; e, por fim, utilizando as propriedades, definições e teoremas da Geometria Euclidiana Plana e as ferramentas de desenho geométrico, construiremos a fórmula encontrada.

5 ATRIBUINDO SIGNIFICADO GEOMÉTRICO ÀS EXPRESSÕES ALGÉBRICAS

Ao explorar situações problema que envolvam variação de grandezas, o estudante se depara com equações, fórmulas, sentenças matemáticas que traduzem uma informação. Muitos problemas podem ser resolvidos usando equações com uma incógnita, outros, porém, podem ser resolvidos usando equações com duas ou mais incógnitas. Nesses casos, temos que montar um sistema de equações para encontrar a solução. Hoje, tais problemas seriam resolvidos de forma algébrica, através de técnicas convencionais de resolução de sistemas com duas equações. D'Ambrosio (2007) entende, porém, que os professores devem conseguir libertar-se do seu método de resolver um problema ou do método usual e aceitar soluções alternativas, proporcionando um repertório de soluções mais rico e repleto de conexões e relações entre ideias.

Sem dúvida os algoritmos da Matemática Moderna, as fórmulas matemáticas, tornaram triviais a solução de diversos problemas, como afirma D'Ambrosio (2007). No entanto, conforme abordamos no capítulo 3, a História da Matemática mostra que podemos apreciá-la de diferentes formas, indo além de uma simples abordagem simbólica-formal. Este capítulo, então, inspirado pelo que estudamos até aqui, visa propiciar ao professor de Matemática uma abordagem didática que conduza estudantes à aprendizagem e ao interesse em apreciar a Álgebra de uma forma diferente, entendê-la como um processo geométrico, ao utilizar construções geométricas para interpretar, a exemplo, expressões algébricas resultantes de resoluções de sistemas com duas equações. Acreditamos ser essa uma abordagem não padrão desse conteúdo, porém relevante e aprofundada, que possibilita o estudante explorar a situação por diversos ângulos, ligar processos aritméticos e algébricos aos fundamentos geométricos, construir procedimentos variados para resolver o problema dado e apreciar a Matemática como um corpo de conhecimento e um processo sócio cultural.

Seguindo essa metodologia histórica de resolução de problemas algébricos que se utiliza da Geometria para interpretação de conceitos e resultados, este capítulo pretende apoiar a prática diária de professores de Matemática, sistematizando propostas de atividades que utilizarão a MRP mediada por construções geométricas elementares com régua e compasso para interpretar expressões algébricas resultantes da resolução de sistemas com duas equações.

Nessa articulação, compactuamos com Bonjorno *et. al.* (2014) ao afirmar que o ensino de Matemática apresenta-se fortemente ligado a MRP. Ele também afirma que essa é uma metodologia que extrapola para outras áreas do conhecimento e é amplamente discutida por autores como Polya (1995), Van de Walle (2009), Dante (1991), Onuchic

(1999), além de ser articulada pelos documentos oficiais da educação como os PCN's (BRASIL, 1998) e a BNCC (BRASIL, 2018).

É interessante falarmos de "problemas", pois para a grande maioria das pessoas essa palavra tem uma conotação negativa. Geralmente, ela faz associações com situações nas quais resolver problemas não é algo fácil, e muito menos prazeroso. No entanto, precisamos reverter esse quadro. As definições apresentadas no dicionário mostram caminhos, na medida em que lançam palavras-chave para definir "problemas": desafio, conflito, investigação, discussão, entre outras. Não temos dúvida de que ensinar por meio de resolução de problemas seja trabalhoso. "As tarefas de Matemática devem ser planejadas constantemente, e a compreensão atual dos alunos (nível em que encontram-se), bem como as necessidades curriculares, deve ser levada em conta"(BONJORNO *et. al.*, 2014, p. 42).

Com base na BNCC de Matemática do Ensino Médio, os estudantes devem desenvolver

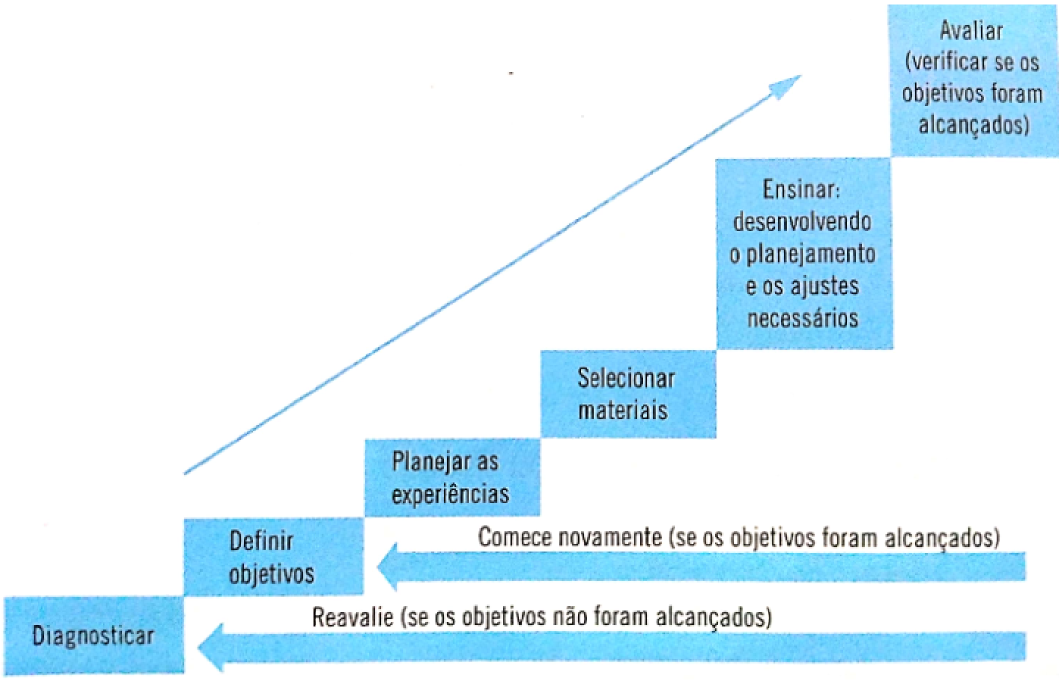
> [...] habilidades relativas aos processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas. Para tanto, eles devem mobilizar seu modo próprio de raciocinar, representar, argumentar, comunicar e, com base em discussões e validações conjuntas, aprender conceitos e desenvolver representações e procedimentos [...]. (BRASIL, 2018, p. 519)

Nesse contexto, os PCN's de Matemática estabelecem pressupostos básicos para lidar com a resolução de problemas:

> [...] a situação-problema é o ponto de partida da atividade Matemática e não a definição. No processo de ensino e aprendizagem, conceitos, ideias e métodos matemáticos devem ser abordados mediante a exploração de problemas, ou seja, de situações em que os alunos precisem desenvolver algum tipo de estratégia para resolvê-las;
>
> [...] aproximações sucessivas de um conceito são construídas para resolver um certo tipo de problema; num outro momento, o aluno utiliza o que aprendeu para resolver outros, o que exige transferências, retificações, rupturas, segundo um processo análogo ao que se pode observar na História da Matemática;
>
> [...] um conceito matemático se constrói articulado com outros conceitos, por meio de uma série de retificações e generalizações. Assim, pode-se afirmar que o aluno constrói um campo de conceitos que toma sentido num campo de problemas, e não um conceito isolado em resposta a um problema particular;
>
> [...] a resolução de problemas não é uma atividade para ser desenvolvida em paralelo ou como aplicação da aprendizagem, mas uma orientação para a aprendizagem, pois proporciona o contexto em que se pode aprender conceitos, procedimentos e atitudes matemáticas. (BRASIL, 1998, p. 40-41)

Em síntese, apresentamos na Figura 74 algumas sugestões de passos para o desenvolvimento de tarefas por meio da MRP:

Figura 74 – Diagrama de passos para lidar com resolução de problemas.



Fonte: Charlesworth (2011 *apud* BONJORNO *et. al.*, 2014, p. 42)

Considerando esses princípios e na tentativa de exemplificar atividades com base na MRP, apresentamos a seguir atividades cujo objetivo é subsidiar o exercício cognitivo do estudante acerca das relações entre aspectos geométricos e algébricos em expressões algébricas resultantes da resolução de sistemas com duas equações. As atividades e desafios da seção seguinte são apresentados por Wagner (2000), porém a resolução e direcionamento é de elaboração própria. O conteúdo abordado nessas atividades são: resolução de sistema com duas equações; conhecimentos elementares sobre Geometria Euclidiana Plana e os conhecimentos de construções geométricas abordados no capítulo anterior. As temáticas problematizadas a seguir visam relacionar esses conteúdos, revisá-los, fixá-los e aprofundá-los.

Dessa forma, e em adequação ao Documento Referência para Elaboração dos Planos de Ensino, encaminhado pela Secretaria da Educação, Juventude e Esportes do Tocantins (Seduc – TO) e aprovado pelo Conselho Estadual de Educação (CEE) em 2018, a proposta didática deste trabalho tem em consideração estudantes da Primeira Série do Ensino Médio, porém pode ser aplicada a qualquer série do Ensino Médio, desde que em conformidade com a proposta curricular adotada pela escola.

Para o desenvolvimento das atividades, serão necessários alguns recursos, como: régua não graduada, compasso, lápis e borracha. Os estudantes podem trabalhar tanto individualmente quanto em grupo, enquanto o professor atua como um mediador.

Um direcionamento para os docentes referente a avaliação das atividades é observar o envolvimento dos estudantes, de forma individual e coletivamente, acerca dos processos solicitados, analisar o trabalho executado, comparar esse resultado com outros e, se possível, prever o potencial de crescimento de cada estudante. Cabe também avaliar aspectos como motivação e empenho na execução das atividades, interação, cooperação e organização. Por fim, a partir disso, verificar se os objetivos estabelecidos foram alcançados.

Entendemos ao longo deste trabalho que a própria História da Matemática mostra que ela foi construída como resposta a perguntas provenientes de diferentes origens e contextos, motivadas por problemas de ordem prática (divisão de terra, cálculo de créditos, etc), por problemas vinculados a outras ciências (Física, Astronomia, etc), bem como por problemas relacionados a investigações internas à própria Matemática. Logo, sugerimos ao professor que introduza as problemáticas que serão propostas a seguir com uma contextualização histórica. Mais do que uma fonte de métodos pedagogicamente adequados e interessantes para a abordagem de certos tópicos da Matemática, a História da Matemática abordada neste trabalho, revisada como forma de apoiar o uso de construções geométricas na resolução de problemas, pode ser utilizada para promover o processo de ensino.

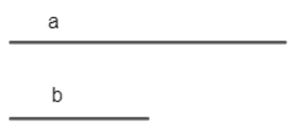
5.1 Interpretação geométrica de soluções de sistemas com duas equações: algumas propostas de problematizações

Atividade 1. *Sejam a e b números reais positivos que representam os comprimentos de dois segmentos dados, determine (construa) os segmentos x e y tais que*

$$\begin{cases} x - y = a \\ xy = b^2. \end{cases}$$

Considere a e b os segmentos apresentados na Figura 75.

Figura 75 – Segmentos a e b da Atividade 1.



Fonte: Fonte autoral.

Inicialmente, o professor pode levantar alguns questionamentos: o que é solicitado? Qual a primeira estratégia que vem à mente para determinar o que se pede? Como a so-

lução solicitada é um segmento de reta, deveríamos abordar uma estratégia puramente geométrica? Analise os dados informados, que tipo de equações compõe o sistema enunciado? Quais os métodos de resolução de sistema de equações você se recorda e qual desses métodos poderíamos utilizar nessa questão?

Para solucionar esse problema, podemos optar pelo seguinte processo:

1. *Resolver o sistema (sugestão: pelo método da substituição), encontrando os valores (expressão algébrica) de x e y;*

2. *Construir os segmentos x e y (na construção devem constar os procedimentos adotados, a ilustração desses procedimentos seguida da discussão da solução).*

Acompanhe a resolução: pelo método da substituição, isolaremos uma incógnita na equação $x-y=a$ e substituiremos seu valor na equação $xy=b^2$.

$$x-y=a \Leftrightarrow x=y+a.$$

Substituindo em $xy=b^2$ o valor de x encontrado, temos:

$$\begin{aligned}(y+a)\cdot y &= b^2\\ y^2+ay &= b^2\\ y^2+ay-b^2 &= 0.\end{aligned}$$

A equação $y^2+ay-b^2=0$ é uma equação do $2°$, de incógnita y, que pode ser resolvida pela fórmula de Bhaskara resultando em:

$$y=\frac{-a\pm\sqrt{a^2+4b^2}}{2},$$

ou ainda,

$$y=\frac{-a\pm\sqrt{a^2+(2b)^2}}{2}.$$

Podemos afirmar que $y=\dfrac{-a-\sqrt{a^2+(2b)^2}}{2}$ é um número negativo, não satisfazendo o problema, já que y representa o comprimento de um segmento de reta, portanto um número real positivo. Logo,

$$y=\frac{-a+\sqrt{a^2+(2b)^2}}{2}.$$

Poderíamos substituir na equação $x=y+a$ o valor de y encontrado, para obter *o valor de x em favor de a e b, porém não será necessário para a construção que nos proporemos a fazer.*

Na construção dos segmentos de comprimento x e y, iniciaremos com a construção de y. Antes disso, cabe ao professor questionar os estudantes sobre o que representa geometricamente a expressão $\dfrac{-a+\sqrt{a^2+(2b)^2}}{2}$ correspondente a y. Para auxiliar nessa interpretação, apresente aos estudantes o seguinte exemplo:

Considere um triângulo retângulo com catetos medindo a e $2b$. Determine o valor h da hipotenusa desse triângulo. Nesse caso, pelo Teorema de Pitágoras, teríamos

$$\begin{aligned} h^2 &= a^2+(2b)^2 \\ h &= \sqrt{a^2+(2b)^2}. \end{aligned}$$

Logo, a expressão $\sqrt{a^2+(2b)^2}$ nada mais é que a medida da hipotenusa de um triângulo retângulo com catetos de medida a e $2b$.

Retornando para a construção de $y = \dfrac{-a+\sqrt{a^2+(2b)^2}}{2}$, podemos reescrever o valor de y da seguinte forma:

$$y = \frac{-a+h}{2}.$$

A interpretação que se faz, portanto, é que y é um segmento de reta que mede a metade da diferença entre h e a.

Acreditamos que desse ponto fica mais claro para o aluno responder, caso não tenha feito, alguns questionamentos levantados inicialmente. Portanto, é útil refazer, por exemplo, o questionamento "qual a estratégia para determinar o que se pede?".

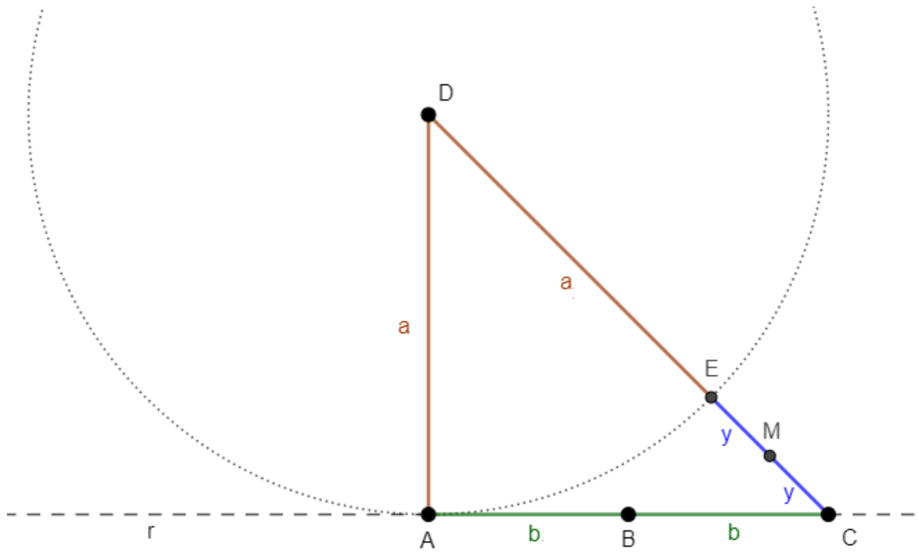
A partir disso, podemos construir os segmentos x e y.

- *Descrição da construção ilustrada na Figura 76:*

1. *Construa sobre uma reta r o segmento $\overline{AC} = 2b$;*
2. *Trace a reta perpendicular a r passando por A e, sobre essa perpendicular, trace o segmento $\overline{AD} = a$;*
3. *Trace o segmento $\overline{CD} = h$, hipotenusa do triângulo retângulo ACD, retângulo em A;*
4. *Construa a circunferência de centro D e raio $\overline{AD} = a$, em seguida, marque o ponto E de interseção da circunferência com o segmento $\overline{CD}$; temos que $\overline{DE} = a$;*
5. *Determine o ponto médio M do segmento $\overline{CE}$.*

Segue-se que $\overline{CM} = \overline{ME} = y$ *e, sendo* $x = y + a$, *temos que* $\overline{DM} = y + a = x$.

Figura 76 – Solução da Atividade 1.



Fonte: Fonte autoral.

Assim como sugerido na Atividade 1, para as próximas problemáticas, o professor pode levantar questionamentos semelhantes que direcionem e instiguem os estudantes. Espera-se que, com a prática, o estudante consiga lidar de forma simples com a abstração dos problemas, com a inter-relação algébrica e geométrica proposta, e com as construções geométricas.

Atividade 2. *Sejam* a *e* b *números reais positivos que representam os comprimentos de dois segmentos dados, determine (construa) os segmentos* x *e* y *tais que*

$$\begin{cases} x + y = b \\ x^2 - y^2 = a^2. \end{cases}$$

Considere a *e* b *os segmentos apresentados na Figura 77.*

Figura 77 – Segmentos a e b da Atividade 2.

Fonte: Fonte autoral.

Acompanhe a resolução: *É possível, pelo método de substituição, determinar o valor de* x *e* y *em favor de* a *e* b*; no entanto, observando que a expressão* $x^2 - y^2$ *é resultante do* *produto da soma pela diferença dos termos x e y, simplificaremos um pouco o processo.*

$$x^2 - y^2 \Leftrightarrow (x+y)(x-y).$$

Sendo assim, segue-se que

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= a^2 \\ (x+y)(x-y) &= a^2 \\ b(x-y) &= a^2 \\ (x-y) &= \frac{a^2}{b}. \end{aligned}$$

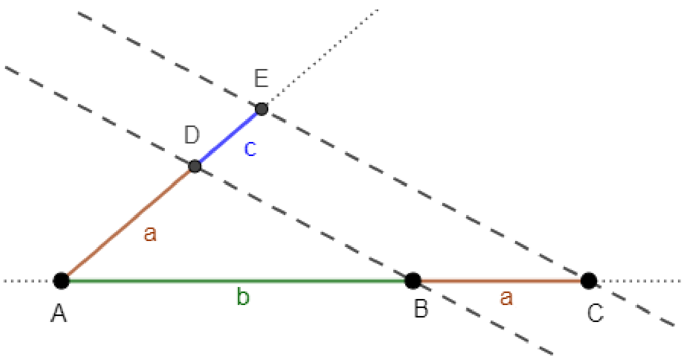
Para seguir de forma mais clara com a equação acima, podemos calcular o segmento resultante de $\frac{a^2}{b}$. Considere c o segmento resultante de $\frac{a^2}{b}$. Logo,

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{b} &= c \\ \frac{a \cdot a}{b} &= c \\ \frac{a}{b} &= \frac{c}{a} \\ \frac{b}{a} &= \frac{a}{c}. \end{aligned}$$

Temos, então, que c é a terceira proporcional dos segmentos a e b (nessa ordem).

Sendo a e b segmentos conhecidos, podemos representar a proporção acima geometricamente, como vemos na Figura 78 (ver a descrição da construção de segmentos proporcionais no Capítulo 4).

Figura 78 – Construção da terceira proporcional de a e b.



Fonte: Fonte autoral.

A partir disso e sabendo que $x+y=b$ e $x-y=c$, podemos reescrever o sistema de *equações não lineares, dado pela questão, pelo sistema de equações lineares abaixo.*

$$\begin{cases} x+y=b \\ x-y=c. \end{cases}$$

Para resolução desse sistema de equações, podemos utilizar tanto o método de substituição como também outros métodos, a exemplo do método de adição. De qualquer maneira, a solução desse sistema é $x=\dfrac{b+c}{2}$ *e* $y=\dfrac{b-c}{2}$.

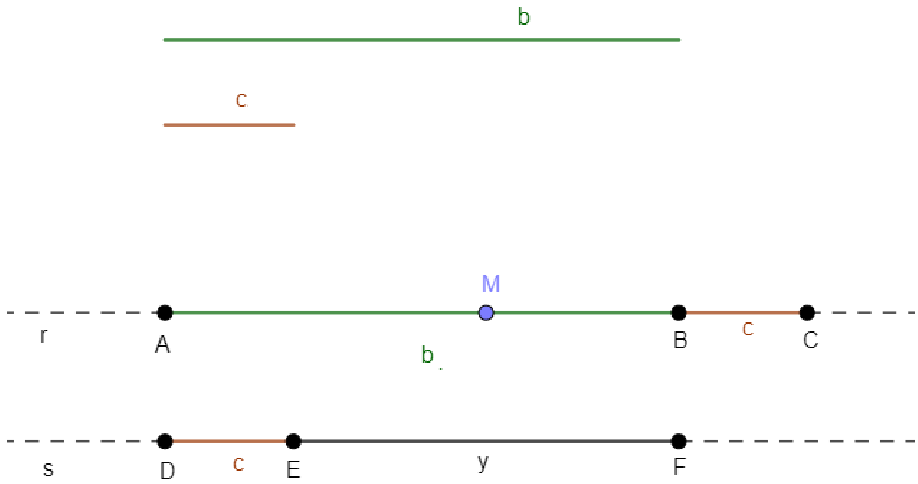
Conseguimos, assim, construir os segmentos x *e* y*, como segue abaixo.*

- *Descrição da construção ilustrada na Figura 79:*

1. *Com o auxílio de uma régua, trace a reta* r*;*
2. *Marque sobre a reta* r *um ponto* A *e, em seguida, transporte o segmento* b *para* r*, a partir de* A*, obtendo o segmento* $\overline{AB}=b$*;*
3. *Transporte o segmento* c *para* r*, a partir de* B*, obtendo um ponto* C*, tal que* $\overline{AC}=b+c$*;*
4. *Determine o ponto médio* M *do segmento* $\overline{AC}$*;*
5. *Por fim, com o auxílio de um régua, trace a reta* s*;*
6. *Marque sobre a reta* s *um ponto* D *e, em seguida, transporte o segmento* b *para* s*, a partir de* D*, obtendo o segmento* $\overline{DF}=b$*;*
7. *Transporte o segmento* c *para* s*, a partir de* D*, obtendo o segmento* $\overline{DE}=c$*, de modo que* $E\in\overline{DF}$ *;*

Segue-se que $\overline{AM}=\overline{MC}=x$ *e* $\overline{EF}=y$.

Figura 79 – Solução da Atividade 2.

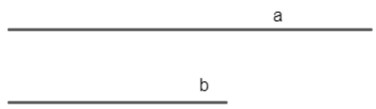


Fonte: Fonte autoral.

Atividade 3. *Sejam a e b números reais positivos que representam os comprimentos de dois segmentos dados, determine (construa) os segmentos x e y tais que*

$$\begin{cases} x^2+y^2=a^2 \\ xy=b^2. \end{cases}$$

Figura 80 – Segmentos a e b da Atividad 3.



Fonte: Fonte autoral.

Acompanhe a resolução: *Fica a cargo do estudante escolher o método algébrico de resolução para solucionar o sistema enunciado. Optaremos por aplicar o método da adição. Somando as duas equações que compõe o sistema, obtemos:*

$$x^2+xy+y^2=a^2+b^2.$$

Em análise, percebemos que a expressão x^2+xy+y^2 muito se assemelha a um trinômino quadrado perfeito resultante do quadrado da soma de dois termos. Para isso, bastaria adicionar o termo xy à expressão. Utilizando o método de completar quadrados, *temos:*

$$\begin{aligned} x^2+xy+y^2+(xy) &= a^2+b^2+(xy) \\ x^2+2xy+y^2 &= a^2+b^2+(b^2) \\ (x+y)^2 &= a^2+2b^2 \\ x+y &= \sqrt{a^2+2b^2} \\ x+y &= \sqrt{a^2+(\sqrt{2}b)^2}. \end{aligned}$$

Poderíamos reescrever o sistema dado pelo seguinte:

$$\begin{cases} x+y=c \\ xy=b^2, \end{cases}$$

sendo $c=\sqrt{a^2+(\sqrt{2}b)^2}$.

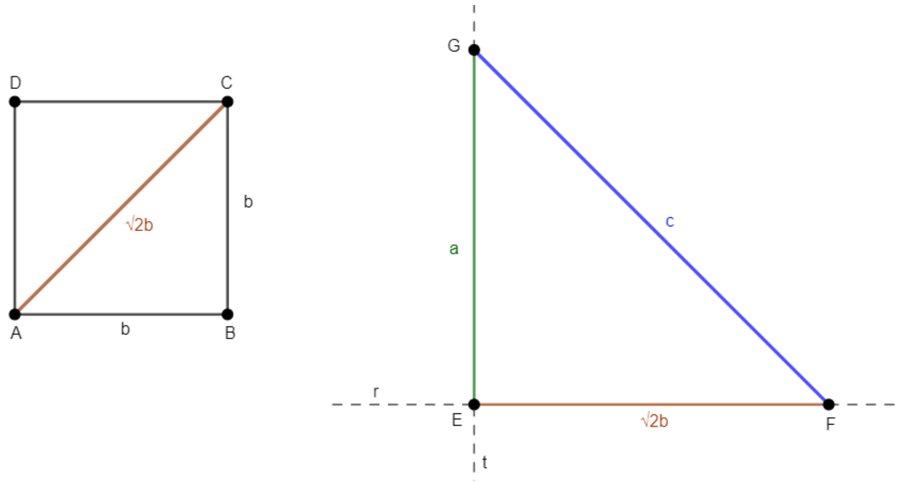
Se relembrarmos da Atividade 1 teremos a noção de que a expressão $\sqrt{a^2+(\sqrt{2}b)^2}$ *trata-se da medida da hipotenusa de um triângulo retângulo, nesse caso, de catetos* a *e* $\sqrt{2}b$.

Antes de determinar os segmentos x *e* y, *precisamos construir o segmento* c, *isto é, a hipotenusa do triângulo retângulo, nesse caso, de catetos* a *e* $\sqrt{2}b$.

Descrição da construção ilustrada na Figura 81:

1. *Construa o quadrado* $ABCD$ *de lado medindo* b;
2. *Traçar o segmento* $\overline{AC}=\sqrt{2}b$, *diagonal do quadrado de lado* $ABCD$;
3. *Construa sobre uma reta* r *o segmento* $\overline{EF}=\sqrt{2}b$;
4. *Trace a reta perpendicular a* r *passando por* E *e, sobre essa perpendicular, trace o segmento* $\overline{EG}=a$;
5. *Trace o segmento* $\overline{FG}=c=\sqrt{a^2+(\sqrt{2}b)^2}$, *hipotenusa do triângulo retângulo* EFG, *retângulo em* E.

Figura 81 – Construção do segmento $c = \sqrt{a^2 + (\sqrt{2}b)^2}$.



Fonte: Fonte autoral.

A partir disso, podemos construir os segmentos x e y tais que

$$\begin{cases} x + y = c \\ xy = b^2, \end{cases}$$

em que b e c são segmentos conhecidos.

Isolando uma das incógnitas em uma das equações:

$$x + y = c \Leftrightarrow x = c - y.$$

Substituindo na equação $xy = b^2$ o valor de x, obtemos:

$$\begin{aligned} (c - y) \cdot y &= b^2 \\ cy - y^2 &= b^2 \\ y^2 - cy + b^2 &= 0. \end{aligned}$$

A equação $y^2 - cy + b^2 = 0$ é uma equação do 2°, de incógnita y, que pode ser resolvida pela fórmula de Bhaskara resultando em:

$$y = \frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4b^2}}{2},$$

ou ainda,

$$y = \frac{c \pm \sqrt{c^2 - (2b)^2}}{2}.$$

Portanto, y (e por conseguinte x) possui duas soluções válidas e distintas. Antes de construir as soluções encontradas, o professor novamente pode indagar os estudantes sobre o que representa geometricamente a expressão $\sqrt{c^2-(2b)^2}$. Para compreender melhor o exposto, considere um triângulo retângulo com hipotenusa medindo c e catetos medindo m e $2b$. Pelo Teorema de Pitágoras, teríamos

$$\begin{aligned} c^2 &= m^2+(2b)^2 \\ c^2-(2b)^2 &= m^2 \\ \sqrt{c^2-(2b)^2} &= m. \end{aligned}$$

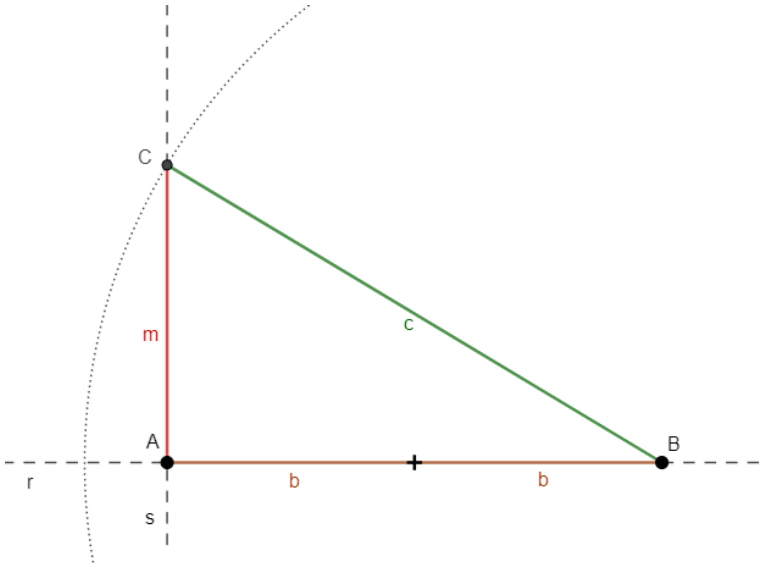
Logo, a expressão $\sqrt{c^2-(2b)^2}$ corresponde a medida m do cateto de um triângulo retângulo com hipotenusa medindo c e o outro cateto $2b$.

Portanto, a interpretação que se faz é que, para $y=\dfrac{c+\sqrt{c^2-(2b)^2}}{2}$, y é um segmento de reta que mede a metade da soma de c e m; já para $y=\dfrac{c-\sqrt{c^2-(2b)^2}}{2}$, y é um segmento de reta que mede a metade da diferença de c e m.

O segmento m pode ser obtido através da seguinte construção:

1. *Com o auxílio de uma reta, trace a reta r;*
2. *Marque sobre a reta r um ponto A e, em seguida, construa o segmento $\overline{AB}=2b$;*
3. *Trace a reta s perpendicular a r passando por A;*
4. *Construa a circunferência de centro B e raio c, em seguida, marque o ponto C de interseção da circunferência com a reta s; temos, então, a hipotenusa $\overline{BC}=c$ do triângulo ABC, retângulo em A, de catetos $\overline{AB}=2b$ e $\overline{AC}=m$.*

Figura 82 – Construção do segmento $m = \sqrt{c^2 - (2b)^2}$.



Fonte: Fonte autoral.

Por fim, podemos construir os segmentos x e y.

Solução 1: *para* $y = \dfrac{c + \sqrt{c^2 - (2b)^2}}{2}$.

Descrição da construção ilustrada na Figura 83:

1. *Com o auxílio de uma reta, trace a reta r;*

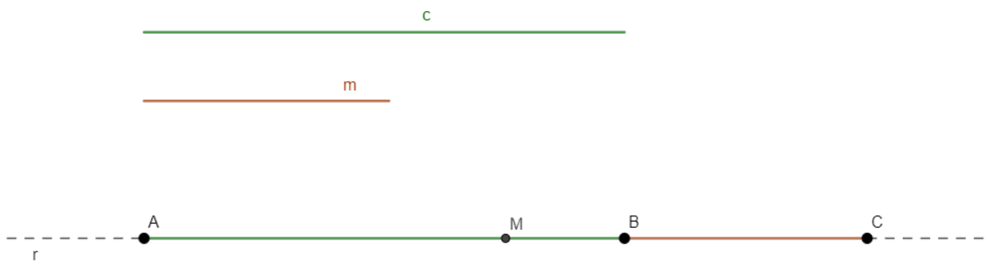
2. *Marque sobre a reta r um ponto A e, em seguida, transporte o segmento c para r, a partir de A, obtendo o segmento $\overline{AB} = c$;*

3. *Transporte o segmento m para r, a partir de B, obtendo um ponto C, tal que $\overline{AC} = c + m$;*

4. *Determine o ponto médio M do segmento $\overline{AC}$.*

Segue-se, então, que $\overline{AM} = \overline{MC} = y$ e, sabendo que $x = c - y$, temos que $\overline{AB} - \overline{AM} = c - y = \overline{MB} = x$.

Figura 83 – Solução 1 da Atividade 3.



Fonte: Fonte autoral.

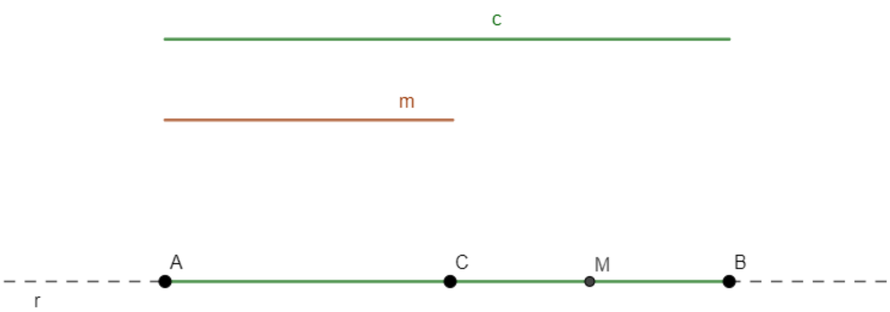
Solução 2: *para* $y = \dfrac{c - \sqrt{c^2 - (2b)^2}}{2}$.

- *Descrição da construção ilustrada na Figura 84:*

1. *Com o auxílio de uma reta, trace a reta* r*;*
2. *Marque sobre a reta* r *um ponto* A *e, em seguida, transporte o segmento* c *para* r*, a partir de* A*, obtendo o segmento* $\overline{AB} = c$*;*
3. *Transporte o segmento* m *para* r*, a partir de* A*, obtendo um ponto* $C \in \overline{AB}$*, tal que* $\overline{BC} = c - m$*;*
4. *Determine o ponto médio* M *do segmento* $\overline{BC}$*.*

Segue-se, então, que $\overline{BM} = \overline{MC} = y$ *e, sabendo que* $x = c - y$*, temos que* $\overline{AB} - \overline{BM} = c - y = \overline{AM} = x$*.*

Figura 84 – Solução 2 da Atividade 3.



Fonte: Fonte autoral.

Outros desafios

1. Construir $x = \sqrt{a^2 + 3b^2}$ onde a e b são segmentos dados.
2. Dados os segmentos a, b, c e d, construa o segmento $x = \dfrac{a^2 + bc}{d}$.
3. Construir os segmentos x e y, onde a e b são segmentos dados, tais que

$$\begin{cases} x + y = b \\ x^2 - y^2 = a^2 \end{cases}$$

4. Construir os segmentos x e y, onde a e b são segmentos dados, tais que

$$\begin{cases} 5x + 3y = a \\ x + y = b^2 \end{cases}$$

5. Construir x tal que $\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$.
6. Construa um triângulo retângulo conhecendo a sua hipotenusa e a soma dos catetos.
7. Construa um triângulo retângulo conhecendo a soma dos catetos e a altura relativa à hipotenusa.

Em suma, organizamos essas atividades com a finalidade de construir uma proposta de abordagem para a temática expressões algébricas, de modo que os professores possam desenvolver um ensino investigatório com significado, capacidade de abstração, aprofundamento e desenvolvimento conceitual, além de promover conexões fundamentais, permitindo identificar e esclarecer relações entre a Geometria e a Álgebra e refletir sobre as possibilidades didáticas propiciadas pelo uso de construções geométricas. Para além destes, é importante lembrar que este tema tem aspectos históricos muito relevantes que podem proporcionar interessantes atividades.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho explorou construções geométricas com régua e compasso com o propósito de sistematizar atividades que as utilizem como instrumento na inter-relação de conceitos algébricos e geométricos, com o intuito de oferecer um encaminhamento que contribua com a prática pedagógica dos professores de Matemática do Ensino Médio e no letramento de estudantes acerca das dimensões da Matemática.

O interesse por esse tema surgiu durante a realização do PROFMAT, quando, pela primeira vez, pude explorar as potencialidades das construções geométricas na compreensão e resolução de problemas matemáticos e no desenvolvimento de habilidades matemáticas. Construções geométricas (Desenho Geométrico) estão cada vez mais ausentes dos currículos da Educação Básica, seja como disciplina a parte ou integrada à disciplina de Matemática. Mesmo nos cursos de formação de professores de Matemática, onde, como descreve Biembengut (2009), muitos currículos permanecem com planos rígidos e metodologias de ensino pautadas na formação tradicional, com aulas de simples transposição de conteúdos, exercícios ou técnicas e de exposição de teoremas e demonstrações desprovidas de objetivos significativos, pouco ou nada aborda-se sobre construções geométricas. Por esse motivo, esse trabalho contribui com o resgate e exploração do assunto e, em particular, com a utilização das construções geométricas como ferramenta na articulação da Álgebra com a Geometria, promovendo a aproximação entre essas subáreas da Matemática.

No desenvolvimento dessa pesquisa, apresentamos, primeiramente, alguns argumentos colocados por pesquisadores em relação a tomada da História da Matemática como recurso didático no processo de ensino e aprendizagem da Matemática escolar, a fim de sustentar a escolha metodológica para o desenvolvimento das propostas de atividades desse trabalho e potencializar as razões para o uso da História da Matemática em sala de aula. Com base nas investigações realizadas,

> [$\cdots$] o modo como concebemos essa participação não vê a história como um repositório fixo e invariável de objetivos, técnicas, métodos, problemas, obstáculos, mecanismos ou do que quer que seja, a ser total ou parcialmente transposto de forma mecânica para o plano do ensino-aprendizagem, mas como um conjunto heterogêneo de formas simbólicas produzidas por comunidades de memória envolvidas com diferentes práticas sociais e produtoras de diferentes jogos de linguagem e que constituem e condicionam, em todo e qualquer momento presente, a produção e apropriação subjetiva da Matemática. (MIGUEL; MIORIM, 2019, p. 149)

De nossa parte, assim como de Miguel e Miorim (2019, p. 50), acreditamos que, apesar de argumentos contrários (legítimos) à integração da História no processo de ensino e aprendizagem da Matemática na Educação Básica, como mencionamos no desenvolvimento do trabalho, esses argumentos deveriam ser encarados "menos como uma barreira intransponível às iniciativas pedagógicas que buscam uma vinculação entre a história e a Educação Matemática, e mais como um estímulo à continuidade das investigações nesse sentido".

Num segundo momento dessa pesquisa, retratamos uma perspectiva do desenvolvimento histórico da Geometria e da Álgebra que possibilitaram às construções geométricas, exemplificando como determinadas civilizações de diferentes épocas resolviam seus problemas matemáticos, ora abordando-os de forma algébrica, ora de forma geométrica, ou inter-relacionando conhecimentos, a fim de incentivar a utilização de variados métodos de abordagem de um conteúdo ou problema. Consideramos que, entendendo a evolução do conhecimento matemático através dos séculos, o professor tem não somente um maior repertório de problemas motivadores para o ensino, como também uma coleção de variados métodos de solução, desde as mais simples até as mais modernas. Conforme analisamos nesse trabalho, há muitas razões para estudar-se História da Matemática quando pretende-se ensinar Matemática na Educação Básica, porém o maior benefício é o enriquecimento da visão de mundo do próprio professor. Cabe ressaltar que, não compartilhamos da ilusão de reconstituir a História da Matemática tal como ela aconteceu, o que significa afirmar que essa reconstituição não se faz sem pressupostos de naturezas diversas, isto é, que toda reconstituição é, na verdade, uma nova constituição, uma nova leitura.

Por fim, adotamos uma posição intermediária que acredita que a combinação da abordagem Histórica da Matemática em sala de aula com outros recursos didáticos e metodológicos contribuem para transformação qualitativa da cultura escolar e da educação escolar. Com base nisso, utilizamos a MRP para sistematizar problemas mediados por construções geométricas elementares com régua e compasso para interpretar expressões algébricas resultantes da resolução de sistemas com duas equações. Para isso, foi necessário revisar construções geométricas elementares que, juntamente com outros conhecimentos básicos da Geometria Euclidiana Plana e da Álgebra, norteiam as atividades propostas.

A partir disso, é possível concluir que as construções geométricas não servem apenas para figurar uma forma ou problema, mas, principalmente, para demonstrações e interpretações matemáticas úteis na resolução de problemas. Para essa finalidade, é necessária uma análise da situação, onde faz-se o planejamento da construção, seguindo-se à execução dessa construção, a posterior conclusão sobre o número de soluções distintas e também sobre a compatibilidade dos dados. Para a realização desse processo, é necessário o conhecimento de ferramentas e propriedades, definições, teoremas e símbolos. Temos aí a oportunidade de os estudantes explorar os problemas por diversos ângulos, ligar processos aritméticos e algébricos aos fundamentos geométricos e apreciar a Matemática como um corpo de conhecimento e um processo sócio cultural.

Ao atingirmos tais objetivos, obtemos a resposta da problemática inicial. As atividades aqui propostas, bem como todo o plano complementar sugerido, incentivam a inter-relação de conhecimentos, possibilitando diferentes modelos de aprendizagem, com linguagens e raciocínios diferentes daqueles já explorados e que levam a um aprofundamento das habilidades relativas aos conceitos e ferramentas geométricas e a uma nova percepção e interpretação de expressões algébricas.

Entendemos que o uso das construções geométricas em demonstrações e abordagem de problemas mobiliza conhecimentos, desencadeia a construção de outros, atribui significados a situações propostas, num processo criativo e reflexivo. Para Zuin (2001, p. 13), "as construções geométricas, se bem trabalhadas e contextualizadas [...] propiciam o desenvolvimento do raciocínio lógico-dedutivo, além de materializar situações abstratas, vistas apenas na teoria, contribuindo para a construção do conhecimento". Além disso, as construções geométricas contribuem com a inter-relação de saberes de sub-áreas da Matemática, na medida que mostra que não existe uma única forma de expressar o pensamento matemático. O próprio pensamento algébrico pode expressar-se através de diferentes linguagens, assim como o pensamento aritmético e geométrico. Esse ponto de vista levanta a possibilidade de uma leitura diferenciada da Matemática. Consequentemente, no plano pedagógico, a construção do pensamento matemático não se realiza de modo isolado, mas em articulação com seus campos e outras áreas.

Tais considerações colocam a área da Matemática e os profissionais que nela atuam diante da responsabilidade de aproveitar o potencial apresentado e constituído historicamente, para promover ações, direcionadas à estudantes da Educação Básica, que, como prevê Brasil (2018, p. 518), "estimulem e provoquem [...] processos de reflexão e de abstração, que deem sustentação a modos de pensar criativos, analíticos, indutivos, dedutivos e sistêmicos e que favoreçam a tomada de decisões".

REFERÊNCIAS

ANDRADE, Bernardino Carneiro de. **A evolução histórica da resolução das equações do 2º grau**. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática Pura, Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, Porto, 2000. 116 p. Disponível em: chrome-extension://oemmndcbldboiebfnladdacbdfmadadm/https://repositorio-aberto.up.pt/bitstream/10216/9895/2/3026_TM_01_C.pdf. Acesso em: 12 jan. 2021.

BATISTA, Irinéa de Lourdes; LUCCAS, Simone. ABORDAGEM HISTÓRICO-FILOSÓFICA E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: uma proposta de interação entre domínios de conhecimento. **Revista Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 6, n. 1, p. 101-133, jan. 2004. Disponível em: http://www.uel.br/grupo-pesquisa/ifhiecem/arquivos/4682-10997-1-PB.pdf Acesso em: 01 nov. 2020.

BONJORNO, José Roberto et al. **Projeto Athos**: matemática. São Paulo: FTD, 2014. 359 p.

BRASIL, Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC/SEB, 2018. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=85121-bncc-ensino-medio&category_slug=abril-2018-pdf&Itemid=30192 Acesso em: 21 nov. 2020

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais**: Matemática. Terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998. 148 p. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf Acesso em: 12 nov. 2020

BIEMBENGUT, Maria Salett. 30 Anos de Modelagem Matemática na Educação Brasileira: das propostas primeiras às propostas atuais. **Alexandria**: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, Florianópolis, v. 2, n. 2, p. 7-32, jul. 2009. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/alexandria/article/view/37939. Acesso em: 04 jun. 2021.

CABRAL, Natanael Freitas. **Sequências didáticas**: estrutura e elaboração. Belém: SBEM-PA, 2017. 104 p. Disponível em: http://www.sbembrasil.org.br/

files/sequencias_didaticas.pdf Acesso em: 20 nov. 2020

D'AMBROSIO, Beatriz S.. REFLEXÕES SOBRE A HISTÓRIA DA MATEMÁTICA NA FORMAÇÃO DE PROFESSORES. **Revista Brasileira de História da Matemática**, v. 1, n. 1, p. 399-406, dez. 2007. Disponível em: https://www.rbhm.org.br/index.php/RBHM/article/view/312 Acesso em: 05 jan. 2021.

D'AMBROSIO, Ubiratan. POR QUE E COMO ENSINAR HISTÓRIA DA MATEMÁTICA. **Revista de Matemática, Ensino e Cultura**, Natal, v. 8, n. 12, p. 7-21, jan. 2013. Disponível em: http://www.rematec.net.br/index.php/rematec/issue/download/13/13 Acesso em: 24 nov. 2020.

DANTE, L. R. **Didática da Resolução de Problemas de Matemática**. São Paulo: Ática, 1991. 176p.

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos de matemática elementar 9**: geometria plana. 9. ed. São Paulo: Atual, 2013. 468 p.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. Tradução Hygino H. Domingues. Campinas: Unicamp, 2011. 848 p.

FIORENTINI, Dario; MIORIM, Maria Ângela; MIGUEL, Antônio. CONTRIBUIÇÃO PARA UM REPENSAR A EDUCAÇÃO ALGÉBRICA ELEMENTAR. **Pro-Posições**, v. 4, n. 1, p. 78-91, mar. 1993. Disponível em: https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/proposic/article/view/8644384/11808 Acesso em: 03 jan. 2021.

FORATO, Thais; GUERRA, Andreia; BRAGA, Marco. HISTORIADORES DAS CIÊNCIAS E EDUCADORES: frutíferas parcerias para um ensino de ciências reflexivo e crítico. **Revista Brasileira de História da Ciência**, v. 7, n. 2, p. 137-141, 2015. Disponível em: chrome-extension://oemmndcbldboiebfnladdacbdfmadadm/https://www.sbhc.org.br/arquivo/download?ID_ARQUIVO=1952 Acesso em: 12 jan. 2021.

GARBI, Gilberto Geraldo. **Romance Das Equacoes Algebricas**. 4. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2010. 258 p.

GERDES, Paulus. Condições e estratégias para uma educação matemática emancipatória nos países subdesenvolvidos. In: GERDES, Paulus. **Etnomatemática:** cultura, matemática, educação. 2. ed. Moçambique: Isteg, 2012. Cap. 8. p. 133-150. Disponível em: http://www.etnomatematica.org/BOOKS_Gerdes/etnomatem%C3%A1tica___cultura__matem%C3%A1tica__educa%C3%A7%C3%A3o___colect%C3%A2nea_de_textos_1979_1991___ebook_.pdf. Acesso em: 14 jan. 2021.

GIL, Antônio Carlos. **Como elaborar projetos de pesquisa.** 4. ed. São Paulo: Atlas, 2002. 176 p. Disponível em: chrome-extension://oemmndcbldboiebfnladdacbdfmadadm/http://www.uece.br/nucleodelinguasitaperi/dmdocuments/gil_como_elaborar_projeto_de_pesquisa.pdf. Acesso em: 02 fev. 2021.

GOMES, Fabricio de Jesus Leite. **CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS**: teoria e aplicação. 2017. 67 p. Dissertação (Mestrado) - Curso de Programa de Mestrado Profissional de Matemática em Rede Nacional - Profmat, Universidade de Brasília, Brasília, 2017. Disponível em: https://repositorio.unb.br/handle/10482/31093. Acesso em: 02 dez. 2020.

MENDES, Iran Abreu. **Abordagem dos conteúdos matemáticos escolares através da história da Matemática:** contribuições para a prática docente. PPGEd/UFRN, 2002.

MENDES, Iran Abreu; CHAQUIAM, Miguel. **História nas aulas de Matemática:** fundamentos e sugestões didáticas para professores. Belém: SBHmat, 2016. 124 p. Disponível em: http://www.sbembrasil.org.br/files/historia_nas_aulas_de_matematica.pdf Acesso em: 29 nov. 2020

MIGUEL, A. AS POTENCIALIDADES PEDAGÓGICAS DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA EM QUESTÃO: argumentos reforçadores e questionadores. **Revista do Círculo de Estudo, Memória e Pesquisa em Educação Matemática**, Campinas, ano 3, n 4, p. 73-106, 1997. Disponível em: https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646849 Acesso em: 25 jan. 2021

MIGUEL, Antônio; FIORENTINI, Dario; MIORIM, Maria Ângela. ÁLGEBRA OU GEOMETRIA? PARA ONDE PENDE O PÊNDULO? **Pró-Posições**, Campinas, v. 3, n. 1, p. 39-54, mar. 1992. Disponível em: https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/proposic/article/view/8644424/11844. Acesso em: 24 mar. 2021

MIGUEL, Antônio; MIORIM, Maria Ângela. **História na Educação Matemática:** propostas e desafios. 3 ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2019. 184 p.

MOL, Rogério Santos. **Introdução à História da Matemática**. Belo Horizonte: CAED-UFMG, 2013. 138 p. Disponível em: chrome-extension://oemmndcbldboiebfnladdacbdfmadadm/http://150.164.25.15/ead/acervo/livros/introducao_a_historia_da_matematica.pdf. Acesso em: 23 nov. 2020.

OLIVEIRA, Lucas Maken da Silva. **Ensinando Geometria com régua e compasso:** uma proposta para o 8º ano. 2015. 100 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, Campos dos Goytacazes, 2015. Disponível em: chrome-extension://oemmndcbldboiebfnladdacbdfmadadm/https://uenf.br/posgraduacao/matematica/wp-content/uploads/sites/14/2017/09/27112015Lucas-Maken-da-Silva-Oliveira.pdf. Acesso em: 12 jan. 2021.

ONUCHIC, Lourdes de la Rosa. **Ensino-aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas**. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani (Org.). Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas. São Paulo: Unesp, 1999.

POLYA, G. **A Arte de Resolver Problemas**: um novo aspecto do método matemático. Trad. Heitor Lisboa de Araújo. 2. ed. Rio de Janeiro: Interciência, 1995. 196p. Tradução de: How to solve it.

PONTE, João Pedro. Concepções de professores de Matemática e processos de formação. In: **Educação Matemática**: temas de investigação. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional, 1992. 40 p. Disponível em: http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/92-Ponte(Ericeira).pdf Acesso em: 14 jan. 2021.

REZENDE, Eliane Quelho Frota; QUEIROZ, Maria Lúcia Bontorim de. **Geometria Euclidiana Plana e Construções Geométricas.** 2. ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2008. 257 p.

ROQUE, Tatiana. DESMASCARANDO A EQUAÇÃO: A história no ensino de que matemática? **Revista Brasileira de História da Ciência**, Rio de Janeiro, v. 7, n. 2, p. 167-185, dez. 2014. Disponível em: https://www.sbhc.org.br/arquivo/download?ID_ARQUIVO=1955. Acesso em: 05 jan. 2021.

ROQUE, Tatiana. **História da Matemática**: uma visão crítica desfazendo mitos e lendas. 1 ed. Rio de Janeiro: Jorge Kahar, 2012. 512 p.

ROQUE, Tatiana; PITOMBEIRA, João Bosco. **Tópicos de História da Matemática**. Coleção Profmat. 1 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

SAITO, Fumikazu; DIAS, Marisa da Silva. INTERFACE ENTRE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA E ENSINO: uma atividade desenvolvida com base num documento do século XVI. **Ciênc. educ.**, Bauru, v.19, n.1, p.89-91, 2013. Disponível em: https://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1516-73132013000100007&lng=en&nrm=iso. Acesso em: 11 jan. 2021.

SANTOS, Márcia Nunes dos; VIANA, Marger da Conceição Ventura. Abordagem histórica para aprendizagem dos teoremas de Tales e de Pitágoras. **Anais do IX Seminário Nacional de História da Matemática**. Sociedade Brasileira de História da Matemática. Organização: Carlos Henrique Barbosa Gonçalves e Eva Maria Siqueira Alves. 2011. Disponível em: chrome-extension://oemmndcbldboiebfnladdacbdfmadadm/http://www.each.usp.br/ixsnhm/Anaisixsnhm/Comunicacoes/1_Santos_M_N_Abordagem_hist%C3%B3rica_para_aprendizagem.pdf Acesso em: 02 fev. 2021.

SERRÃO, Marcelo Miranda; BRANDEMBERG, João Cláudio. **Utilizando problemas da história antiga da matemática como estratégia para o ensino de equações no 9º ano da escola básica.** X Seminário Nacional de História da Matemática - SNHM, 2013. Disponível em: chrome-extension://oemmndcbldboiebfnladdacbdfmadadm/https://www.cle.unicamp.br/eprints/index.php/anais-snhm/article/download/46/37 Acesso em: 13 mar. 2021.

SECRETARIA DA EDUCAÇÃO, JUVENTUDE E ESPORTES DO GOVERNO DO TOCANTINS. **Documento para elaboração dos planos de ensino**. Tocantins: 2018, 113 p. Disponível em: https://pt.scribd.com/document/372231405/Doc-Referencia-p-Elaboracao-dos-Planos-de-Ensino-2018-pdf Acesso em: 25 fev. 2021.

SILVA, Andréa Villela Mafra da. A PEDAGOGIA TECNICISTA E A ORGANIZAÇÃO DO SISTEMA DE ENSINO BRASILEIRO. **Histedbr Online**, Campinas, n. 70, p. 197-209, dez. 2016. Disponível em: chrome-extension://oemmndcbldboiebfnladdacbdfmadadm/https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/histedbr/article/download/8644737/15765/27456. Acesso em: 15 jun. 2021.

VAN DE WALLE, John A. **Matemática no Ensino Fundamental:** a formação de professores e aplicação em sala de aula. Tradução: Paulo Henrique Colonese. 6 ed. Porto Alegre: Artmed, 2007.

VIANNA, Carlos Roberto. **Usos didáticos para História da Matemática**. Anais do I Seminário Nacional de História da Matemática (Org). Recife: SBHMat, 1998. p. 65 – 79. Disponível em: chrome-extension://oemmndcbldboiebfnladdacbdfmadadm/http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/MATEMATICA/1998_SNHM_Recife.pdf Acesso em: 22 dez. 2020.

WAGNER, Eduardo. **Uma Introdução às Construções Geométricas**. Rio de Janeiro: Impa, 2015. 87 p. Disponível em: chrome-extension://oemmndcbldboiebfnladdacbdfmadadm/http://www.obmep.org.br/docs/apostila8.pdf. Acesso em: 17 nov. 2020.

WAGNER, Eduardo; CARNEIRO, José Paulo Q. (colaborador). **Construções Geométricas** (Coleção do Professor de Matemática). 4 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2000. 110 p.

ZUIN, Elenice de Souza Lodron. **DA RÉGUA E DO COMPASSO**: as construções geométricas como um saber escolar no Brasil. Dissertação (Mestrado) - Curso de Pós Graduação em Educação e Ensino de Ciências e Matemática, UFMG, Belo Horizonte, 2001. Disponível em: chrome-extension://oemmndcbldboiebfnladdacbdfmadadm/https://repositorio.ufmg.br/bitstream/1843/FAEC-85DGQB/1/zuin_elenice_disserta_nopw.pdf. Acesso em: 26 out. 2020.