GABRIELA EGIDIO PENHA SILVA

UMA REVISÃO DE LITERATURA SOBRE A TEORIA DOS CONJUNTOS E O MOVIMENTO DA MATEMÁTICA MODERNA

LAVRAS – MG
2021

GABRIELA EGIDIO PENHA SILVA

UMA REVISÃO DE LITERATURA SOBRE A TEORIA DOS CONJUNTOS E O MOVIMENTO DA MATEMÁTICA MODERNA

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT - UFLA, para a obtenção do título de Mestre.

Prof. Dr. Gustavo Cipolat Colvero
Orientador

LAVRAS – MG
2021

Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da Biblioteca Universitária da UFLA, com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).

Silva, Gabriela Egidio Penha
Uma Revisão de Literatura sobre a Teoria dos Conjuntos e o Movimento da Matemática Moderna / Gabriela Egidio Penha Silva. – Lavras : UFLA, 2021.
75 p. : il.

Dissertação (Mestrado Profissional)–Universidade Federal de Lavras, 2021.
Orientador: Prof. Dr. Gustavo Cipolat Colvero.
Bibliografia.

1. Ensino de Matemática. 2. Movimento da Matemática Moderna. 3. Teoria dos Conjuntos. I. Colvero, Gustavo Cipolat. II. Título.

GABRIELA EGIDIO PENHA SILVA

UMA REVISÃO DE LITERATURA SOBRE A TEORIA DOS CONJUNTOS E O MOVIMENTO DA MATEMÁTICA MODERNA

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT - UFLA, para a obtenção do título de Mestre.

APROVADA em 18 de outubro de 2021.

Prof. Dr. Gustavo Cipolat Colvero	UFLA
Prof. Dr. Francinildo Nobre Ferreira	UFSJ
Prof. Dr. Mario Henrique Andrade Claudio	UFLA

Prof. Dr. Gustavo Cipolat Colvero
Orientador

LAVRAS – MG
2021

AGRADECIMENTOS

À Universidade Federal de Lavras e à Sociedade Brasileira de Matemática pela oportunidade de cursar o PROFMAT. Aos professores do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Lavras, especialmente ao Gustavo Cipolat Colvero pela dedicação na orientação deste trabalho. Aos professores Francinildo Nobre Ferreira, Mario Henrique Andrade Claudio e Nelson Antônio Silva pelas correções e sugestões. Aos colegas de curso, familiares, amigos e colegas de trabalho por todo apoio. A todos que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho.

RESUMO

Esta dissertação consiste em uma revisão de literatura com o objetivo de compreender o papel da Teoria dos Conjuntos nas propostas do Movimento da Matemática Moderna, que teve auge nas décadas de 1960 e 1970. Foi realizado um estudo sobre as evoluções da Matemática que serviram como inspiração para o Movimento da Matemática Moderna. Buscou-se entender os objetivos e as motivações desse movimento, bem como sua difusão no Brasil. Relatou-se o declínio do Movimento da Matemática Moderna, ocorrido em meados da década de 1970, e apresentou-se o legado dessa iniciativa para o ensino da Matemática. Com base em livros didáticos e outras fontes, foi possível entender que, nas propostas do Movimento da Matemática Moderna, a Teoria dos Conjuntos representava uma forma de promover um tratamento uniforme e rigoroso para a Matemática estudada na Educação Básica. Além disso, apresentou-se principais conceitos e resultados de tópicos da Teoria dos Conjuntos que passaram a ser tratados na Educação Básica por influência do Movimento da Matemática Moderna.

Palavras-chave: Ensino de Matemática. Movimento da Matemática Moderna. Teoria dos Conjuntos.

ABSTRACT

This dissertation consists of a literature review which aims at understanding the role of Set Theory in the proposals of the Modern Mathematics Movement, which reached its peak in the 1960s and 1970s. We studied the evolutions of Mathematics that served as inspiration for the Modern Mathematics Movement. We tried to understand the objectives and motivations of the movement, as well as its introduction in Brazil. We also related the demise of Modern Mathematics Movement, which occurred in the mid-1970s, as well as the legacy of the movement for the teaching of Mathematics. Based on textbooks and other sources, we concluded that Set Theory was believed to promote a uniform and rigorous treatment for Mathematics in elementary school, middle school and high school. In addition, we presented the main concepts and results on topics in Set Theory that were introduced in Basic Education curriculum by Modern Mathematics Movement.

Keywords: Mathematics Teaching. Modern Mathematics Movement. Set Theory.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

No Brasil e em diversos outros países, a Teoria dos Conjuntos foi introduzida na Educação Básica a partir da década de 1960 por iniciativa do Movimento da Matemática Moderna. Com o objetivo de fornecer a linguagem comum a diversas áreas da Matemática e permitir um tratamento mais rigoroso da disciplina, a Teoria dos Conjuntos passou a exercer um papel central no ensino da Matemática. Como consequência do Movimento da Matemática Moderna, entre as décadas de 1960 a 1980 e até mais recentemente, os símbolos e termos relacionados aos conjuntos estiveram presentes desde os primeiros anos de escolaridade para boa parte dos estudantes.

Dessa forma, buscamos neste trabalho entender as motivações para a inserção da Teoria dos Conjuntos na Educação Básica e a abordagem desse assunto nas propostas do Movimento da Matemática Moderna. Para tanto, realizamos uma revisão de literatura com base em artigos, livros e trabalhos acadêmicos, além de materiais didáticos que foram desenvolvidos em conformidade com as propostas do Movimento da Matemática Moderna.

Dado que as propostas de modernização do ensino tiveram como inspiração as evoluções da Matemática ocorridas nos séculos XIX e XX, buscamos, no Capítulo 2, apresentar o histórico do desenvolvimento do que podemos considerar como Matemática Moderna, que possui como características a abstração, a fundamentação lógica, a ênfase em estruturas e o uso da linguagem da Teoria dos Conjuntos. No Capítulo 2, também apresentamos a origem e desenvolvimento da Teoria dos Conjuntos, que teve grande importância para a evolução da Matemática e o Movimento da Matemática Moderna.

O Capítulo 3 traz as origens e motivações do Movimento da Matemática Moderna, além de descrever como essa iniciativa foi difundida no Brasil ainda na década de 1960. No Capítulo 4, buscamos entender o papel da Teoria dos Conjuntos no Movimento da Matemática Moderna em todos os níveis da Educação Básica. Para compreender melhor esse assunto, analisamos a abordagem da Teoria dos Conjuntos em alguns livros e manuais pedagógicos alinhados às propostas do Movimento da Matemática Moderna. O Capítulo 5, por sua vez, trata do declínio e das consequências do Movimento da Matemática Moderna. Por fim, no Apêndice A, é possível consultar definições e proposições de tópicos da Teoria dos Conjuntos que foram introduzidos na Matemática da Educação Básica por iniciativa do Movimento da Matemática Moderna.

2 O QUE É MATEMÁTICA MODERNA

No século XIX e no início do século XX, a Matemática passou por evoluções que modificaram profundamente a compreensão sobre a natureza do conhecimento dessa disciplina (STONE, 1961, p. 716). Neste capítulo, buscamos mostrar as origens das principais características do que podemos chamar de Matemática Moderna.

Conforme Boyer e Merzbach (2011, p. 548), no século XIX, o desenvolvimento da Matemática foi impulsionado pelo crescimento do número de periódicos, associações e departamentos acadêmicos destinados ao estudo dessa ciência. Nessa época, o trabalho de diversos pesquisadores contribuiu para o surgimento de uma concepção moderna para a Matemática, que passou a ser entendida como uma disciplina abstrata, fundamentada logicamente e independente de aplicações práticas (PHILLIPS, 2014; STONE, 1961). Stone (1961, p. 718) aponta que o principal fator que levou a essa nova compreensão da Matemática foi o desenvolvimento das Geometrias Não Euclidianas, da Álgebra Moderna e da Lógica.

Segundo Stone (1961, p. 718), as Geometrias Não Euclidianas, desenvolvidas por matemáticos como Bolyai, Gauss e Lobachevski, contribuíram para que a Matemática fosse entendida como uma área de estudo abstrata e autossuficiente. Conforme Dieudonné (1990, p. 214), as Geometrias Não Euclidianas surgiram das tentativas de se provar o quinto postulado da Geometria Euclidiana, conhecido como postulado das paralelas. Utilizando o método da redução ao absurdo, os matemáticos passaram a buscar alguma contradição que poderia surgir a partir da negação desse postulado. Entretanto, "[...] repetidos insucessos acabaram por convencer vários matemáticos de que nunca se chegaria à contradição procurada, e que havia portanto lugar em Matemática para várias geometrias diferentes" (DIEUDONNÉ, 1990, p. 216).

Ademais, o processo de axiomatização e abstração da Álgebra, ocorrido nos séculos XIX e XX, evidenciou as possibilidades de se trabalhar não apenas com um sistema numérico, mas também com sistemas mais gerais, formados por elementos abstratos que se relacionam de formas bem definidas (STONE, 1961, p. 718). Conforme Pinter (2015), esses sistemas compartilham certas características entre si, apesar de possuírem naturezas diferentes. Na Álgebra, a percepção de que sistemas distintos possuem características em comum se relaciona ao conceito de estrutura, que possui grande importância na Matemática Moderna. Conforme Pinter (2015), a Álgebra Moderna é caracterizada pelo estudo e comparação de estruturas, bem como a compreensão das relações existentes entre elas.

O desenvolvimento de novas técnicas e conceitos na Lógica entre o fim do século XIX e início do século XX também contribuiu para a formação da concepção moderna para a Matemática. Entre os principais avanços ocorridos na Lógica nesse período, Stone (1961, p. 719) elenca o surgimento da Teoria dos Conjuntos e o desenvolvimento da Lógica Simbólica. Outra contribuição importante foi feita por Alfred North Whitehead e Bertrand Russell, autores que, na obra *Principia Mathematica*, de 1911, mostraram como a Lógica, associada aos conceitos de função e conjuntos, poderia ser utilizada como base para definir os demais conceitos da Matemática (STONE, 1961, p. 719).

O avanço do processo de abstração da Matemática e da formalização de conceitos também é consequência do desenvolvimento da Análise, que é um ramo da disciplina que lida principalmente com processos matemáticos infinitos (BARONI; OTERO-GARCIA, 2014, p. 7). Para Baroni, Teixeira e Nobre (2009), a Análise deve ser compreendida

> [...] não apenas como uma tentativa de fornecer rigor e fundamento ao Cálculo, mas como um conjunto de objetos histórico-matemáticos que criaram necessidades que não existiam, e para elas dispensaram esforços que culminaram em uma crise de fundamentos e no estabelecimento de novas concepções. (BARONI; TEIXEIRA; NOBRE, 2009, p. 181 apud BARONI; OTERO-GARCIA, 2014, p. 7).

Devido às contribuições mencionadas, Stone (1961, p. 717) afirma que a Matemática Moderna pode ser entendida como o estudo de sistemas construídos sobre objetos abstratos que estão relacionados de formas escolhidas arbitrariamente, mas ainda assim bem definidas. A partir dessa caracterização e da comparação entre as estruturas presentes em diferentes sistemas, constatou-se que o conhecimento matemático apresenta um caráter unificado, tornando perceptível a correspondência entre áreas da Matemática que anteriormente pareciam não estar relacionadas (STONE, 1961).

Dessa forma, com a concepção moderna para a Matemática, a divisão tradicional em diversas áreas de estudo foi profundamente modificada. Segundo Pinter (2015), sistemas como números inteiros, números complexos e matrizes passaram a ter seus aspectos particulares isolados, postos na forma axiomática e estudados de forma abstrata. De acordo com Dieudonné (1990), a partir do século XIX, quando as relações entre objetos matemáticos passaram a ser enfatizadas em detrimento da natureza desses, passou-se a relativizar a divisão tradicional da Matemática, que anteriormente delegava "[...] números inteiros para a Aritmética, equações para a Álgebra, espaço e figuras para a Geometria, funções para a Análise" (DIEUDONNÉ, 1990, p. 143).

As características da Matemática Moderna foram exploradas na obra de um grupo de matemáticos franceses publicada sob o pseudônimo Nicolas Bourbaki. O grupo foi idealizado em 1934 por André Weil e Henri Cartan, que inicialmente pretendiam escrever um livro de Análise para ser utilizado em universidades francesas. Entretanto, o grupo passou a se dedicar à escrita da coleção *Éléments de Mathématique*, que tinha o objetivo de oferecer uma descrição axiomática completa para as principais áreas da Matemática (BURTON, 2011; CARTAN, 1980, p. 748).

O trabalho de Bourbaki influenciou muitos matemáticos e se tornou um expoente para a Matemática Moderna, servindo de inspiração para o processo de renovação do ensino da disciplina iniciado no fim da década de 1950. De acordo com Cartan (1980, p. 179), muitos dos termos e notações empregados na Matemática atual foram introduzidas por esse grupo. A obra de Bourbaki foi organizada de forma que um conceito ou resultado somente poderia ser utilizado se fosse definido ou demonstrado previamente (CARTAN, 1980, p. 178). Nesse sentido, *Éléments de Mathématique* se inicia com um livro publicado em 1939 sobre a Teoria dos Conjuntos, que fornece a base para a linguagem utilizada em toda a coleção (BOURBAKI, 2004, p. 9).

Bourbaki emprega o método axiomático para organizar objetos matemáticos a partir de um número reduzido de conceitos (BOURBAKI, 2004, p. 9). Conforme Pinter (2014, p. 18), o método axiomático foi popularizado na obra *Elementos*, de Euclides, datada de cerca de 300 a.C. Para Euclides, os axiomas eram afirmações inquestionavelmente verdadeiras. Atualmente, entende-se por axioma toda afirmação utilizada como premissa em um argumento e considera-se que um sistema é axiomático se determinadas proposições são escolhidas como axiomas e as demais são consequências lógicas desses axiomas e de um conjunto de regras de inferências estabelecido (PINTER, 2014). Além disso, os axiomas escolhidos devem ser formulados com clareza e as deduções feitas a partir deles devem ser suficientemente explícitas para que não seja necessário nenhum tipo de apelo à intuição (PINTER, 2014, p. 18).

A abordagem empregada por Bourbaki enfatizava as estruturas e classes, em vez das características particulares dos objetos estudados (PHILLIPS, 2014, p. 550). A ideia de que uma estrutura é a base de uma teoria matemática

> [...] é a consequência da constatação de que aquilo que desempenha o papel primordial numa teoria são as relações entre os objetos matemáticos que aí figuram, antes da natureza destes objetos, e que, em duas teorias diferentes, pode acontecer que haja relações que se exprimem da mesma maneira nas duas

> teorias; o sistema destas relações e as suas “correspondências” é uma mesma estrutura “subjacente” às duas teorias. (DIEUDONNÉ, 1990, p. 118)

Para Sangiorgi (1959 apud VALENTE, 2008), a principal diferença entre a Matemática Clássica e a Matemática Moderna reside no fato de que a primeira tem como base conceitos relativamente simples, como números inteiros, pontos e retas, enquanto a segunda se fundamenta em estruturas matemáticas, como as descritas por Bourbaki. Jean Dieudonné (1990), matemático que colaborou na obra do grupo Bourbaki, se refere à Matemática Clássica como aquela formada por todos os resultados conhecidos antes do século XIX.

Na obra de Bourbaki, destacam-se as estruturas algébricas, topológicas e de ordem, que são encontradas em diferentes áreas da Matemática. Conforme Abe (1989, p. 117), as estruturas algébricas, como grupo e anel, são formadas por conjuntos sobre os quais se definem certas operações. As estruturas topológicas estão relacionadas a noções como continuidade, vizinhança e limite. Por fim, as estruturas de ordem são identificadas quando é possível estabelecer uma relação binária de ordem, satisfazendo as propriedades reflexiva, antissimétrica e transitiva, como acontece na Álgebra de Boole e em conjuntos totalmente ordenados. De acordo com Cartan (1980, p. 177), nos números reais, as estruturas algébricas são definidas pelas operações aritméticas de adição e multiplicação, enquanto as estruturas de ordem e topológicas são identificadas em relações de desigualdades entre números desse conjunto e na noção de limite, respectivamente.

Bourbaki (1968) descreve a forma como o conceito de estrutura passou a ser utilizado na Matemática:

> É, portanto, tentador asseverar que a moderna noção de ‘estrutura’ existia substancialmente por volta de 1900, mas de fato outros trinta anos de preparação se evidenciaram necessários, antes de sua completa aparição. Certamente, não é difícil reconhecer estruturas da mesma espécie quando elas são de natureza suficientemente simples; com as estruturas de grupo, por exemplo, isto se alcançou em meados do século XIX. Porém, no mesmo período, Hankel estava ainda lutando, sem sucesso total, para extrair as idéias gerais de corpo e de extensão de corpo, que ele manejou para expressá-las apenas na forma semimetafísica de um princípio de permanência [...], e que foram definitivamente formuladas por Steinitz quarenta anos depois. Mostrou-se especialmente difícil se escapar do sentimento de que os objetos matemáticos são ‘dados’ junto com suas estruturas, e tardou diversos anos de análise funcional para fazer com que os matemáticos se familiarizassem com a idéia de que, por exemplo, existem várias topologias ‘naturais’ no conjunto dos números racionais e várias medidas na reta real. Com esta dissociação, a passagem à definição geral de estrutura [...] se efetuou finalmente. (BOURBAKI, 1968, p. 317-18 apud ABE, 1989, p. 114).

Como exposto anteriormente, a concepção moderna para a Matemática está fortemente associada à noção de estrutura, a qual, pelo menos no sentido mais usual, surge a partir de relações entre conjuntos. Conforme Abe (1989, p. 117), "[...] uma estrutura matemática se origina quando se definem certas funções, relações ou coleções de conjuntos, a partir de certos conjuntos básicos dados".

Além de ser fundamental para o estudo de estruturas, a Teoria dos Conjuntos possui uma grande importância para a Matemática Moderna, pois é a base da linguagem utilizada em diversas áreas da disciplina:

> Desde os tempos de Cantor, muitas disciplinas novas surgiram, como a Topologia, a Álgebra Abstrata, a Teoria da Medida e Integração, a Teoria da Probabilidade, a Análise Funcional e outras mais. E em todas essas disciplinas — que ao contrário de estanques e separadas, no mais das vezes se entrelaçam por meio de fronteiras indistinguíveis — em todas elas a linguagem, a notação e os resultados da Teoria dos Conjuntos se revelaram instrumento natural de trabalho, a ponto de ser impossível conceber o desenvolvimento de toda essa Matemática sem a utilização de conjuntos. (ÁVILA, 2010, p. 82).

2.1 O desenvolvimento da Teoria dos Conjuntos

Nesta seção, será apresentado um breve histórico do desenvolvimento da Teoria dos Conjuntos. Conforme Dieudonné (1990), a noção de conjunto sempre esteve implícita na Matemática:

> A ideia de reunir objetos da mesma natureza numa "coleção" é sem dúvida tão antiga como a linguagem, passando-se o mesmo para a noção de "parte" de um "todo" que pode ser uma coleção de objetos ou uma "extensão" como o plano ou o espaço. A necessidade de compreender e de utilizar estas noções aparece, no início das matemáticas gregas, na famosa "noção comum" de Euclides, enunciando que "o todo é maior do que a parte". [...] Os matemáticos de todos os tempos não podiam por outro lado deixar de referir os conjuntos formados pelos objetos que eles consideram, e as partes desses conjuntos, sob vários nomes: "lugares geométricos" de pontos do plano que satisfaçam a uma dada propriedade; "classes" de números ou de formas quadráticas em Euler e Gauss; "subgrupos" para Cauchy e Galois [...]. (DIEUDONNÉ, 1990, p. 147).

Contudo, o estudo sistematizado desse assunto teve início apenas no fim do século XIX, a partir das contribuições de Georg Cantor. Nascido na Rússia, mas filho de dinamarqueses, Cantor estudou e trabalhou em universidades da Alemanha, onde inicialmente desenvolveu estudos sobre Teoria dos Números e Trigonometria (BURTON, 2011, p. 677). Segundo Pinter (2014), o trabalho com séries trigonométricas levou Cantor a estudar alguns conjuntos de números reais e, posteriormente, observar que algumas propriedades presentes neles poderiam ser generalizadas, formando a base do que hoje conhecemos como Teoria dos Conjuntos. Conforme Burton (2011, p. 677), considera-se como marco inicial da Teoria dos Conjuntos um artigo publicado por Cantor em 1874 a respeito dos números reais algébricos.

De acordo com Pinter (2014), a teoria desenvolvida por Cantor não foi imediatamente aceita pelos matemáticos da época, pois apresentava resultados contraintuitivos a respeito da ideia de infinito, como a enumerabilidade dos números racionais. No entanto, na década de 1890, alguns conceitos da teoria começaram a ser utilizados em diversas áreas da Matemática, principalmente na Análise. Ainda no fim do século XIX, Dedekind e outros matemáticos apontaram que a Teoria dos Conjuntos poderia apresentar um papel fundamental, permitindo um tratamento unificado para diversas áreas da Matemática.

Segundo Pinter (2014), desde a antiguidade, acreditava-se que seria possível unificar a Matemática a partir de um número reduzido de princípios. Da época de Euclides até a Idade Média, acreditava-se que a Geometria era a base de toda a Matemática. No século XIX, matemáticos como Weierstrass e Dedekind sugeriram que esse papel seria desempenhado pela aritmética dos números naturais. No entanto, em 1888, Dedekind observou que o conceito de números naturais poderia ser obtido a partir da Teoria dos Conjuntos. Para tanto, associa-se ao zero o conjunto vazio, denotado por $\varnothing$. O número 1 corresponderia ao conjunto $\{\varnothing\}$, cujo único elemento é o conjunto vazio. O número 2 seria representado pelo conjunto $\{0,\ 1\}$, e assim sucessivamente. A partir desse raciocínio, todas as propriedades dos números naturais poderiam ser demonstradas utilizando essas definições e outros conceitos básicos da Teoria dos Conjuntos (PINTER, 2014).

No fim do século XIX, a Teoria dos Conjuntos passou a ser aceita por boa parte dos matemáticos e apontada por muitos como o fundamento para toda a Matemática. Entretanto, nesse mesmo período, a descoberta de alguns paradoxos colocou em dúvida a validade da teoria desenvolvida por Cantor. Ávila (2010) afirma que os principais problemas com a teoria de Cantor estavam associados à própria definição de conjunto. Cantor conceituou conjunto como "qualquer coleção numa totalidade M de objetos distintos, produtos de nossa intuição ou pensamento. Esses objetos são chamados elementos de M" (ÁVILA, 2010, p. 73). A partir dessa definição, tornam-se admissíveis conceitos como "conjunto de todos os conjuntos" e "conjuntos que são elementos de si próprios". Um exemplo desse último tipo é o conjunto das ideias abstratas, que é, em si, uma ideia abstrata (ÁVILA, 2010).

Conforme Burton (2011, p. 678), paradoxos são contradições que surgem a partir de raciocínios aparentemente válidos. De acordo com Pinter (2014), um dos paradoxos mais conhecidos envolvendo a Teoria dos Conjuntos foi apresentado inicialmente pelo matemático e filósofo Bertrand Russell no início do século XX. Nesse paradoxo, consideramos o conjunto A, formado por todos os conjuntos que não são elementos de si próprios. Assim, seria A um elemento de si próprio? Se A não é um elemento de si próprio, então A satisfaz a definição e, portanto, é um elemento de A. Porém, se A é um elemento de A, então, pela definição, deve ser um conjunto que não é elemento de si próprio. Dessa forma, conclui-se que A é elemento de si próprio se, e somente se, não for elemento de si próprio, o que é evidentemente uma contradição.

Pinter (2014) afirma que os paradoxos da Teoria dos Conjuntos indicavam que as ideias de Cantor, em particular a definição para conjunto elaborada por ele, não apresentavam a consistência necessária para uma teoria matemática — especialmente para uma teoria que era apontada como o fundamento de toda a disciplina. A eliminação de alguns conceitos e definições não resolveu o problema de forma satisfatória. Assim, os matemáticos da época sugeriram que a Teoria dos Conjuntos deveria ser reformulada a partir do método axiomático.

Também conforme Pinter (2014), os axiomas da Teoria dos Conjuntos deveriam ser escolhidos de forma que os principais resultados obtidos por Cantor pudessem ser provados e que os paradoxos fossem eliminados. A primeira axiomatização da Teoria dos Conjuntos foi publicada por Ernst Zermelo em 1908. Com a incorporação de algumas modificações propostas por Fraenkel e Skolen, o sistema de Zermelo se popularizou e ainda é muito utilizado nos dias de hoje. Na forma axiomatizada da Teoria dos Conjuntos, os termos "conjunto" e "elemento" são tomados sem definição e as propriedades que envolvem esses conceitos são dadas por axiomas.

Zermelo percebeu que alguns paradoxos da Teoria dos Conjuntos seriam eliminados se não fosse permitida a consideração de conjuntos sem quaisquer restrições:

> Em suas considerações sobre os paradoxos, notadamente os de Cantor e de Russell, Zermelo percebeu que duas coisas não poderiam coexistir: a consideração livre de conjuntos, como o conjunto universal, e a caracterização de um conjunto por uma propriedade de seus elementos (sem maiores restrições). Ora, esta última consideração era muito natural e não deveria ser descartada. Zermelo optou pela impossibilidade de se considerar conjuntos sem qualquer restrição, como no caso do conjunto de todos os conjuntos, ou o conjunto de todos os conjuntos que não pertencem a si mesmos. Ele teve a intuição de que seria possível considerar conjuntos infinitos, porém, sempre a partir de algum conjunto preexistente. (ÁVILA, 2010, p. 77).

Assim, Zermelo propôs que uma condição não poderia ser usada para criar novos conjuntos, mas somente para selecionar de um conjunto preexistente os elementos que satisfazem essa condição. Essas restrições propostas por Zermelo são asseguradas pelo axioma da especificação, que pode ser enunciado da seguinte forma: "dados um conjunto A e uma propriedade $P(x)$, existe um conjunto M cujos elementos são os elementos de A que satisfazem a propriedade $P(x)$" (ÁVILA, 2010, p. 77).

Ainda segundo Ávila (2010), com a inclusão do axioma da especificação, não são mais permitidas considerações como "o conjunto de todos os conjuntos que não pertencem a si mesmos". Por outro lado, "o conjunto das raízes reais da equação $x^2 + 3x + 2 = 0$", que é um conjunto formado pela seleção de elementos do conjunto dos números reais que satisfazem a equação, é um conjunto perfeitamente válido e bem definido.

Entretanto, o axioma da especificação não elimina alguns paradoxos associados aos conjuntos e que decorrem das imprecisões da linguagem corrente. Com base em Pinter (2014), em uma forma do paradoxo de Berry, consideramos T como o conjunto formado por todos os números naturais que podem ser descritos com menos de vinte palavras na língua portuguesa. Como há um número finito de palavras na língua portuguesa, o número de arranjos que podemos fazer com menos de vinte palavras é finito. Assim, o conjunto T é finito e existem números naturais que são maiores que qualquer elemento de T. Logo, há um "menor número natural que não pode ser descrito com menos de vinte palavras na língua portuguesa". No entanto, descrevemos esse número com apenas dezesseis palavras e, portanto, ele é um elemento de T.

Para evitar ambiguidades e imprecisões como as que originam o paradoxo de Berry, os matemáticos Fraenkel e Skolen propuseram em 1922 que a linguagem corrente fosse banida da Matemática e substituída pela linguagem lógica formal, que é composta por símbolos e regras de sintaxe de significado único e bem definido (ÁVILA, 2010, p. 79).

Conforme Pinter (2014), o sistema axiomático desenvolvido por Zermelo, Fraenkel e Skolen apresenta a desvantagem de restringir a maneira como formulamos conjuntos. Todavia, esse sistema preserva os principais resultados obtidos por Cantor, ao mesmo tempo em que impede o surgimento de paradoxos que colocavam sob questionamento a fundamentação lógica da Teoria dos Conjuntos. Posteriormente, conforme Abe (1989, p. 119), surgiram outros sistemas axiomáticos para esse ramo da Matemática, resultando em diferentes Teorias dos Conjuntos que não são equivalentes entre si.

3 ORIGEM E DIFUSÃO DO MOVIMENTO DA MATEMÁTICA MODERNA

Nos últimos anos, observou-se um aumento no número de pesquisas sobre o Movimento da Matemática Moderna (MMM) no Brasil. Entre essas iniciativas, encontra-se o trabalho dos pesquisadores do GHEMAT (Grupo Associado de Estudos e Pesquisas sobre História da Educação Matemática), que desde 2004 realiza estudos sobre a história do ensino da Matemática (GHEMAT, 2021b).

Segundo Valente (2006, p. 28), o primeiro estudo sobre o Movimento da Matemática Moderna no Brasil foi a tese de doutorado de Beatriz D'Ambrosio, intitulada *The Dynamics and Consequences of the Modern Mathematics Reform Movement for Brazilian Mathematics Education*. Defendido em 1987 na Universidade de Indiana, nos Estados Unidos, esse trabalho contribuiu principalmente para a compreensão da influência estrangeira sobre o Movimento da Matemática Moderna no Brasil (VALENTE, 2006, p. 28).

Os estudos posteriores ajudaram a entender o ideário e, em menor grau, as práticas pedagógicas do MMM que ocorreram efetivamente nas escolas brasileiras (VALENTE, 2006, p. 31). Todavia, muitas dificuldades impedem a compreensão do real impacto do Movimento da Matemática Moderna:

> Os cadernos de alunos de outros tempos, os materiais pedagógicos de professores, as provas, não estão disponíveis, uma vez que costumam ser descartados depois do uso; some-se, ainda, o fato de que os documentos dos arquivos das escolas, além de não estarem organizados, acabam excluídos, em virtude da legislação, que costuma fixar um tempo máximo de guarda dos papéis nas instituições. Os livros didáticos antigos são dificilmente encontráveis, pois, tradicionalmente, não são pensados como fontes de pesquisa. Nossos próprios materiais escolares tendem a ser descartados em razão, por exemplo, de espaços cada vez menores nas moradias. Enfim, a obtenção dos testemunhos de cotidianos escolares passados transforma-se num grande problema. (VALENTE, 2006, p. 23).

Assim, ainda há muito o que discutir e analisar a respeito do Movimento da Matemática Moderna. Neste capítulo, iremos tratar das origens e objetivos do MMM, bem como sua difusão no Brasil.

3.1 Origens e motivações do Movimento da Matemática Moderna

O Movimento da Matemática Moderna foi um processo internacional de reformulação dos currículos escolares da disciplina de Matemática iniciado no fim da década de 1950. Nessa época, o ensino da Matemática passou por modificações em diversos países. Entretanto, as reformas desenvolvidas nos Estados Unidos foram as que mais influenciaram a modernização do ensino de Matemática ocorrida na América Central e América do Sul na década de 1960 (PHILLIPS, 2015, p. 12).

No contexto da Guerra Fria, acreditava-se que uma reformulação no ensino era necessária para incentivar o desenvolvimento científico e tecnológico nos Estados Unidos. Alguns autores, como Phillips (2015) e Kline (1976), relacionam a repercussão do lançamento do satélite soviético Sputnik, em 1957, ao fortalecimento de projetos de renovação do ensino preexistentes nos Estados Unidos, que passaram a receber apoio e financiamento governamentais. Também em outras fontes, encontramos a associação da eclosão do Movimento da Matemática Moderna ao lançamento do Sputnik:

> Durante os primeiros anos da década de 50, vários projetos começaram a ser desenvolvidos, tendo em vista a melhoria do ensino secundário, especialmente por meio da adequação à realidade da universidade e aos avanços tecnológicos. Mas foi um fato não ligado diretamente à situação escolar dos Estados Unidos que acabou acelerando as propostas pedagógicas americanas e desencadeando um movimento internacional de modernização. O lançamento, em 1957, do primeiro foguete soviético – o Sputnik – levou o governo americano a tomar consciência de que, para resolver o problema da clara desvantagem tecnológica existente em relação aos russos, era necessário repensar o ensino de matemática e o de ciências. (MIORIN, 1998, p. 108 apud ALVES; SILVEIRA, 2017, p. 10).

Conforme Phillips (2015), nos Estados Unidos, a renovação do ensino de Matemática iniciada na década de 1950 foi conduzida principalmente pelo *School Mathematics Study Group* (SMSG). Formado por matemáticos e professores da Educação Básica, o SMSG buscava inicialmente atrair estudantes para o estudo da Matemática. Ainda segundo Phillips (2015, p. 3), o objetivo do SMSG não era incentivar a formação de pesquisadores na área, mas propiciar ao maior número de estudantes possível uma boa instrução em Matemática, possibilitando o exercício inteligente da cidadania e a compreensão do papel dessa ciência na sociedade.

Phillips (2015, p. 13) afirma que, devido aos avanços da Matemática ocorridos no século XIX e no início do século XX, os proponentes da modernização do ensino acreditavam que a natureza do conhecimento matemático havia mudado. Segundo esse autor, alegava-se que o ensino tradicional, que enfatizava a memorização e a repetição mecanizada de algoritmos, fazia com que os estudantes desenvolvessem uma concepção equivocada e limitada sobre a Matemática. Assim, um dos principais propósitos do Movimento da Matemática Moderna era "[...] refletir o espírito da Matemática contemporânea que, graças ao processo de algebrização, tornou-se mais poderosa, precisa e fundamentada logicamente" (FIORENTINI, 2009, p. 13-14).

O Movimento da Matemática Moderna defendia uma concepção para o ensino da disciplina radicalmente diferente daquela que prevalecia nas escolas. Phillips (2014, p. 551) afirma que, de acordo com as propostas do MMM, a Matemática Escolar deixaria de ser entendida como um sistema composto por métodos para resolver problemas e passaria a configurar como uma forma de raciocinar a respeito de elementos abstratos. Essa nova concepção para o ensino da Matemática envolveria a introdução de termos derivados de conceitos da Teoria dos Conjuntos, que havia assumido um papel de destaque na Matemática por permitir um tratamento rigoroso e unificado em diferentes áreas da disciplina.

A mudança da linguagem matemática empregada na Educação Básica contribuiria para a formulação de raciocínios mais precisos, possibilitando a compreensão de procedimentos que até então eram feitos de forma mecanizada pelos estudantes (FIORENTINI, 2009, p. 13). Por esse motivo, a linguagem era uma das principais preocupações do Movimento da Matemática Moderna:

> Aliás, o nome de Matemática Moderna apresenta-se, a rigor, indevidamente, pois na realidade não se objetiva ensinar um programa completamente diferente daqueles tradicionalmente conhecidos. O que se deseja essencialmente com modernos programas de Matemática, e esta seria a expressão mais aconselhável, é modernizar a linguagem dos assuntos considerados imprescindíveis à formação do jovem estudante, usando os conceitos de 'conjunto' e 'estrutura'. (SANGIORGI, 1962, p. 3 apud BÚRIGO, 1989, p. 123).

Dessa forma, conclui-se que, apesar de ter introduzido nos currículo escolares temas como as bases de numeração, noções de Lógica, transformações geométricas e outros assuntos, a maior preocupação do MMM era dar um tratamento mais lógico e estruturado aos conteúdos tradicionalmente ensinados na Educação Básica (LAMPARELLI, 2018, p. 267). Com essas mudanças, buscava-se também reduzir a lacuna entre a Matemática Escolar e a Matemática dos cursos universitários, imprimindo o rigor e a linguagem resultantes da evolução da disciplina nos séculos XIX e XX:

> O sentido de aproximação ou adaptação à matemática universitária expressou-se com particular veemência em algumas ênfases presentes no discurso do movimento, relativas ao rigor, à precisão da linguagem e à correção matemática das abordagens pedagógicas; às generalizações e à unidade da matemática como disciplina acadêmica; à compreensão das relações de necessidade e possibilidade entre axiomas e proposições decorrentes. (BÚRIGO, 2006, p. 39).

O processo de modernização do ensino da Matemática teve influência do trabalho do grupo de matemáticos franceses identificado como Nicolas Bourbaki e de teorias da aprendizagem, sobretudo as desenvolvidas por Jean Piaget. O psicólogo suíço Jean Piaget, que não se envolveu diretamente na elaboração as propostas do Movimento da Matemática Moderna (BÚRIGO, 1989, p. 86), estabeleceu uma correspondência entre as primeiras operações por meio das quais a criança interagia com o mundo e as estruturas de ordem, algébricas e topológicas, que tinham destaque na obra do grupo Bourbaki (CORRY, 1992). Piaget considerava que essa correspondência deveria ser explorada em benefício do ensino da Matemática:

> Se o edifício matemático repousa sobre estruturas, que correspondem além do mais às estruturas da inteligência é, então, sobre a organização progressiva dessas estruturas operatórias que é preciso estar baseada a didática matemática. (PIAGET, et al. 1955, p. 32 apud VALENTE, 2008, p. 585).

De acordo com Alves e Silveira (2017, p. 20), a relação entre o tratamento moderno da Matemática, como o empregado por Bourbaki, e os estudos sobre a psicologia da aprendizagem realizados por Piaget dava fundamentação ao MMM. Ainda segundo esses autores, essa fundamentação favoreceu a adesão às propostas do Movimento da Matemática Moderna, pois dava suporte aos argumentos de que elas contribuiriam para a superação de muitas das dificuldades presentes no ensino da disciplina. Para Sangiorgi (1964),

> Havia, pois, uma imperfeição lógica na chamada Matemática tradicional, principalmente por não utilizar a linguagem que a estrutura mental da criança queria 'ouvir' e que só era falada devidamente — guardadas as devidas proporções — na Matemática Superior, estudada nas Faculdades de Filosofia dentro do espírito bourbakista. (SANGIORGI, 1964 apud BÚRIGO, 1989, p. 123 - 124).

Conforme Fiorentini (2009, p. 14), os entusiastas do Movimento da Matemática Moderna acreditavam que a abordagem baseada em estruturas subjacentes da disciplina seria facilmente assimilada pelo aluno, capacitando-o para a aplicação de formas estruturadas de pensamento na Matemática e em outras áreas do conhecimento. Além disso, alegava-se que os estudantes, ao terem contato a ideia de estrutura, perceberiam a Matemática como uma disciplina unificada, na qual definições e teoremas são dispostos em uma sequência lógica (KLINE, 1976, p. 106).

Alguns dos integrantes do grupo Bourbaki se posicionavam publicamente a favor da renovação do ensino da Matemática. Para Cartan (1980, p. 180), a nova concepção para a Matemática deveria influenciar o ensino dessa disciplina mesmo nos primeiros anos de escolaridade, etapa em que os conceitos que se revelaram fundamentais para a disciplina deveriam, segundo esse autor, ser apresentados em associação a exemplos concretos. Segundo Phillips (2015, p. 51), Jean Dieudonné, outro membro do grupo Bourbaki, defendia que a Geometria Euclidiana não deveria ter a importância que o ensino tradicional a atribuía, uma vez que do desenvolvimento da Matemática emergiram conteúdos e métodos mais relevantes e rigorosos.

Conforme Phillips (2015, p. 50), um dos principais argumentos para a modernização dos currículos era que as evoluções internas da Matemática, se integradas à Educação Básica, permitiriam que os estudantes compreendessem tópicos relativamente avançados da disciplina sem a necessidade de perfazer todas as etapas empregadas no ensino tradicional. Isso seria possível porque os avanços ocorridos nos séculos XIX e XX teriam revelado métodos mais diretos e eficientes para compreender a Matemática.

Os defensores da modernização acreditavam que a nova forma de ensinar Matemática permitiria que um maior número de estudantes, não apenas os mais "capazes", conseguisse compreender o conteúdo da disciplina e formular raciocínios mais complexos (PHILLIPS, 2015, p. 92). Assim, as críticas à introdução precoce do formalismo nos ensinos Primário e Ensino Secundário foram insuficientes para diminuir o otimismo com relação à adoção das propostas (BÚRIGO, 1989, p. 154).

3.2 A difusão do Movimento da Matemática Moderna no Brasil

A divulgação do MMM no Brasil é atribuída principalmente ao Grupo de Estudos do Ensino de Matemática (GEEM), que tinha base em São Paulo – SP e era presidido por Osvaldo Sangiorgi (BÚRIGO, 1989, p. 16). O GEEM contava com a participação de professores universitários e da Educação Básica, psicólogos e pedagogos (PIRES, 2008, p. 17). Alguns dos integrantes do GEEM eram autores de livros didáticos que contribuíram para a popularização da Matemática Moderna no Brasil.

No Brasil, o Movimento da Matemática Moderna teve apoio de órgãos como o Ministério da Educação e a Secretaria de Educação de São Paulo (BÚRIGO, 1989). Contudo, Búrigo (2006, p. 45) considera que a introdução do Movimento da Matemática Moderna no Brasil ocorreu principalmente devido a iniciativas não governamentais:

> O apelo do discurso do GEEM vinha, em parte, de sua condição de grupo de professores, autônomo em relação aos governos. Não se tratava de mais um programa de ensino redigido em gabinete ou imposto por uma escola às demais. A incorporação de elementos da Matemática Moderna pelas propostas curriculares oficiais foi precedida de muitos encontros e cursos de formação

> de professores, de participação voluntária e até mesmo militante. Nesse sentido é que se pode falar verdadeiramente de um Movimento da Matemática Moderna no Brasil ou, pelo menos, em São Paulo. A relativa autonomia do movimento não impediu que fosse aceito e incentivado pelos governos autoritários instalados após 1964. Num período de repressão ao debate educacional e às experiências de inovação pedagógica, o Movimento da Matemática Moderna contou com diversas modalidades de apoio oficial. (BÚRIGO, 2006, p. 45).

Conforme Valente (2008, p. 597), as propostas de modernização do ensino da Matemática no Brasil se fortaleceram após o estágio realizado por Osvaldo Sangiorgi no ano de 1960 nos Estados Unidos, onde ele teve contato com as iniciativas de reformulação do ensino que já estavam em andamento nas escolas desse país. As ações do GEEM, no Brasil, e do SMSG, nos Estados Unidos, eram semelhantes. Ambos os grupos articularam a modernização do currículo por meio de congressos, cursos de aperfeiçoamento de professores e produção de materiais didáticos.

Na dissertação de mestrado de Búrigo (1989), encontram-se as descrições dos principais congressos e conferências que contribuíram para a divulgação do Movimento da Matemática Moderna no Brasil durante a década de 1960. Segundo essa autora, os cursos destinados a professores da Educação Básica foram importantes para articular a modernização do ensino da Matemática no país, promovendo a formação de docentes em assuntos como Teoria dos Conjuntos, Lógica Matemática e Espaços Vetoriais.

O GEEM apresentou propostas como o documento *Assuntos Mínimos para um Moderno Programa de Matemática para o Ginásio e para o Colégio*, de 1965, que serviram de base para a elaboração de livros didáticos. Segundo Búrigo (2010, p. 285), o caráter inovador das propostas do GEEM não residia na inclusão de novos conteúdos para a Educação Básica, mas na ênfase em conjuntos e estruturas. Assim, como mostra Valente (2008), os *Assuntos Mínimos para um Moderno Programa de Matemática para o Ginásio e para o Colégio* sugerem que a ideia de conjunto deveria ser predominante no ensino de números inteiros, operações fundamentais e suas propriedades. Além disso, a linguagem da Teoria dos Conjuntos deveria ser usada no ensino de outros conteúdos.

A Matemática Moderna foi inserida no Brasil em um momento em que a educação era pouco acessível às camadas mais pobres da população e os índices de evasão e reprovação escolares eram altos (BÚRIGO, 2006, p. 42). A Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional de 1961 determinava que o Ensino Primário deveria ser ministrado para crianças a partir de sete anos de idade em quatro séries anuais, enquanto o Ensino Secundário admitiria matrículas de crianças com onze anos completos ou que viessem a completar essa idade ao longo do ano letivo. O Ensino Secundário era dividido nos ciclos Ginasial e Colegial, com duração de quatro e três anos, respectivamente (BRASIL, 1961). Ainda conforme a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional de 1961, o ingresso nos cursos secundários dependia de aprovação em exame de admissão no qual o candidato deveria demonstrar nível satisfatório de conhecimento dos conteúdos do Ensino Primário.

Embora o GEEM não apresentasse críticas ou se envolvesse em discussões mais amplas a respeito do sistema educacional vigente na época, seus integrantes acreditam que as propostas defendidas contribuiriam para a democratização do ensino de Matemática, que se tornaria mais prazeroso, eficaz e acessível aos estudantes, uma vez que a nova abordagem estaria em concordância com as estruturas de pensamento e os processos de aprendizagem (BÚRIGO, 2006; BÚRIGO, 1989). Além disso, segundo os entusiastas da Matemática Moderna no Brasil, essas propostas tornariam possível uma integração mais efetiva da Aritmética, Álgebra e Geometria, que haviam sido unificadas na disciplina de Matemática por iniciativa da Reforma Francisco Campos, de 1931 (BÚRIGO, 1989, p. 123).

As diversas formas de divulgação da Matemática Moderna, associadas aos livros didáticos que traziam a nova abordagem para a disciplina, fizeram com que as propostas do movimento alcançassem diferentes localidades no Brasil:

> Ainda que de forma confusa, a Matemática Moderna foi apropriada pela comunidade escolar, primeiramente, pelos grandes centros do país, posteriormente é lentamente difundida nas escolas mais longínquas, a maioria delas recebendo-a de sobressalto, via livro didático. Carregada de simbolismos e enfatizando a precisão de uma nova linguagem, professores e alunos passam a conviver com a Teoria dos Conjuntos, com as noções de estrutura e de grupo. Trazendo as promessas de um ensino mais atraente e descomplicado, em superação à rigorosa matemática tradicional, no entanto, a Matemática Moderna, chega ao Brasil com excessiva preocupação com a linguagem matemática e com a simbologia dos conjuntos, deixando marcas ainda pouco desveladas pela história da educação matemática. (PINTO, 2005, p. 9).

Conforme Valente (2006, p. 32), a ação de grupos locais também contribuiu para a interiorização do MMM no Brasil. Entretanto, segundo esse autor, esses grupos se valiam de diferentes influências internacionais, resultando em formas distintas de apropriação da Matemática Moderna cujas particularidades constituem objetos de pesquisas recentes.

4 O PAPEL DA TEORIA DOS CONJUNTOS NO MOVIMENTO DA MATEMÁTICA MODERNA

Neste capítulo, buscamos entender o papel que a Teoria dos Conjuntos desempenhava nas propostas do Movimento da Matemática Moderna. As principais definições e proposições da Teoria dos Conjuntos que são aqui mencionadas podem ser consultadas no Apêndice A desta dissertação.

Ainda que a Teoria dos Conjuntos fosse até então tratada exclusivamente no Ensino Superior, os proponentes do Movimento da Matemática Moderna defendiam a abordagem dos conceitos mais básicos da teoria desde os primeiros anos de escolaridade. Para Papy (1966),

> Todo professor de Matemática deve começar reconhecendo um fato fundamental: a Matemática de hoje reencontrou sua unidade na universalidade do conjunto. A noção usual de conjunto deve, portanto, ser introduzida e elaborada tão cedo quanto possível (PAPY, 1966, p. 84).

Dessa forma, no Ensino Primário, o Movimento da Matemática Moderna não se limitou ao objetivo de introduzir métodos e práticas que garantissem que os alunos entendessem os mecanismos por trás dos algoritmos ensinados tradicionalmente, embora esse fosse um dos seus objetivos principais (PHILLIPS, 2015, p. 89 - 90). Ao contrário, segundo Alves e Silveira (2017), o Movimento da Matemática Moderna trouxe uma abordagem totalmente nova para o ensino de Aritmética, tendo como base as estruturas matemáticas e a noção de conjunto.

Nas propostas do MMM, a introdução da Teoria dos Conjuntos no Ensino Primário representava uma forma de atingir a compreensão de conceitos de números e operações, conteúdos que "[...] deveriam ser trabalhados após o desenvolvimento de exercícios com conjuntos, os quais desenvolveriam nos alunos as estruturas de correspondência, seriação e classificação" (ALVES; SILVEIRA, 2017, p. 16).

Conforme Phillips (2015, p. 82), a partir da representação de coleções de objetos, animais ou pessoas, a noção de conjuntos era o primeiro conteúdo apresentado na disciplina de Matemática no Ensino Primário. As crianças deveriam desenvolver a habilidade de distinguir os objetos que pertenciam a um conjunto daqueles que não pertenciam, além de reconhecer que um elemento pode pertencer a conjuntos diferentes e que alguns conjuntos podem não ter elemento algum.

Após essa etapa, os estudantes deveriam aprender a comparar e ordenar conjuntos. Ainda segundo Phillips (2015), para desenvolver as noções de maior, menor e igual, os professores deveriam ensinar a estabelecer correspondências entre os elementos de dois conjuntos distintos e analisar se algum elemento não possuía par. Essas tarefas deveriam ser realizadas sem que o aluno fizesse contagens ou representações numéricas. Quando dois conjuntos estivessem em correspondência um a um (biunívoca) — ou seja, se cada elemento de um conjunto pudesse ser associado a apenas um elemento do outro conjunto —, dizia-se que esses conjuntos eram equivalentes (ou equipotentes). Só então o conceito de número deveria ser apresentado aos alunos, sendo definido como a propriedade comum de conjuntos equivalentes e representado por um símbolo chamado numeral.

As operações aritméticas também deveriam ser ensinadas usando noções de conjunto. A adição corresponderia à união entre conjuntos, enquanto a subtração envolveria a separação dos elementos de um conjunto. De forma semelhante, a multiplicação poderia ser entendida como um agrupamento de conjuntos equivalentes (PHILLIPS, 2015, p. 85).

De acordo com Pires (2008, p. 20), por influência do Movimento da Matemática Moderna, o estudo sobre conjuntos passou a ser realizado no início de todas as séries escolares. O ensino de alguns conceitos mais abstratos, como as relações entre conjuntos, era acompanhado pelo uso de materiais como os blocos lógicos, cartazes, flanelógrafos (quadro retangular revestido com tecido utilizado para exposição gravuras) e objetos diversos (PIRES, 2008; ARRUDA; FLORES, 2010).

Conforme Arruda e Flores (2010, p. 417), os blocos lógicos são um tipo de material manipulativo que, no contexto das propostas do Movimento da Matemática Moderna, permitiam que o aluno se familiarizasse com as relações entre conjuntos, como as de pertinência, interseção, união e inclusão. Esse material é composto por peças com diferentes formatos, tamanhos, cores e espessuras, como se pode observar na Figura 4.1. Com os blocos lógicos, poderia-se, por exemplo, tomar como conjunto universo aquele formado por todas as peças azuis, que poderiam ser usadas para formar subconjuntos, como o das peças azuis e redondas (ARRUDA; FLORES, 2010, p. 417).

Figura 4.1 – Peças do material conhecido como blocos lógicos.

Fonte: Dahm (2012).

No Ensino Secundário, a Teoria dos Conjuntos foi utilizada para dar precisão à linguagem e integrar as diferentes áreas da Matemática. As soluções de uma equação passaram a ser tratadas como elementos de um conjunto-verdade, as figuras geométricas eram definidas usando a linguagem da Teoria dos Conjuntos e as funções eram apresentadas em termos de conjuntos de pares ordenados e relações (KLINE, 1976, p. 110).

4.1 A Teoria dos Conjuntos em alguns dos livros e manuais didáticos da Matemática Moderna

A linguagem da Teoria dos Conjuntos foi fortemente empregada nos livros didáticos e manuais pedagógicos editados no período em que o Movimento da Matemática Moderna exercia grande influência na educação. Segundo Valente (2008, p. 603), os livros didáticos, especialmente os de autoria de Osvaldo Sangiorgi, desempenharam um papel crucial na popularização da Matemática Moderna no Brasil:

> Desde o primeiro estudo realizado sobre o Movimento da Matemática Moderna no Brasil, fica claro o papel dos livros didáticos como veículos privilegiados da divulgação da nova proposta. Cabe aos manuais escolares "falar" diretamente aos professores brasileiros, para além de debates e discussões ocorridas em congressos e cursos. O livro didático de matemática moderna vai, por meio de sua circulação e uso no cotidiano escolar, permitir a apropriação por alunos e professores de uma nova matemática escolar. Aqui, novamente, está presente o pioneirismo de Osvaldo Sangiorgi. Seus novos livros didáticos de matemática moderna têm um estrondoso sucesso editorial. (VALENTE, 2008, p. 603).

Considerando a importância dos livros didáticos para a difusão das propostas do Movimento da Matemática Moderna no Brasil e buscando compreender melhor como a Teoria dos

Conjuntos era tratada pelo MMM, analisamos a abordagem sobre esse assunto nos seguintes livros:

a) *Curso Completo de Matemática Moderna para o Ensino Primário*, Volume 1, de Tosca Ferreira e Henriqueta de Carvalho, primeira edição, lançado na década de 1960;

b) *Matemática: Curso Moderno para os Ginásios*, Volume 1, de Osvaldo Sangiorgi, edição de 1968;

c) *Matemática: Curso Moderno para os Ginásios*, Volume 4, de Osvaldo Sangiorgi, edição de 1967;

d) *Matemática: Curso Moderno para o Segundo Ciclo*, Volume 1, de Jacy Monteiro, Osvaldo Sangiorgi e Renate Watanabe, edição de 1970.

O livro da coleção *Curso Completo de Matemática Moderna para o Ensino Primário* foi obtido no *Repositório de Conteúdo Digital* do GHEMAT (2021a), enquanto os demais livros foram analisados em formato físico. Cabe observar que as obras analisadas estão de acordo com as propostas do Movimento da Matemática Moderna expostas anteriormente e que os autores Henriqueta de Carvalho, Osvaldo Sangiorgi, Jacy Monteiro e Renate Watanabe eram membros do GEEM, o que pode ser verificado nas curtas biografias presentes no início desses livros. Assim, essas obras tendem a representar bem a forma como o Movimento da Matemática Moderna apresentava e aplicava os conceitos da Teoria dos Conjuntos.

4.1.1 Curso Completo de Matemática Moderna para o Ensino Primário, Volume 1

A primeira edição da coleção *Curso Completo de Matemática Moderna para o Ensino Primário*, de Tosca Ferreira e Henriqueta de Carvalho, não apresenta o ano de lançamento, mas infere-se que foi publicada na década de 1960 (GHEMAT, 2021a). A coleção é destinada a professores do Ensino Primário e seu primeiro livro apresenta a seguinte divisão em capítulos: *Noção de conjunto*; *Número, Numeral, Algarismo*; *Adição e Subtração*; *Multiplicação e Divisão*; *Entrosamento da Matemática com a Língua Pátria, Estudos Sociais, Ciências e Saúde*; *Fatos Fundamentais da Multiplicação e Divisão*; *Geometria*; Recordação.

O livro aborda o conteúdo e a didática característicos do Movimento da Matemática Moderna, como se observa a seguir:

> É nossa intenção dotar o professor de tudo que de mais moderno há, tanto na didática como no material necessário à execução dos planos por nós levados a efeito nesta obra. Dentro das necessidades do trabalho, apresentamos técnicas de aula, como da feitura do material a eles relacionados. (FERREIRA; CARVALHO, 196-?a, não paginado).

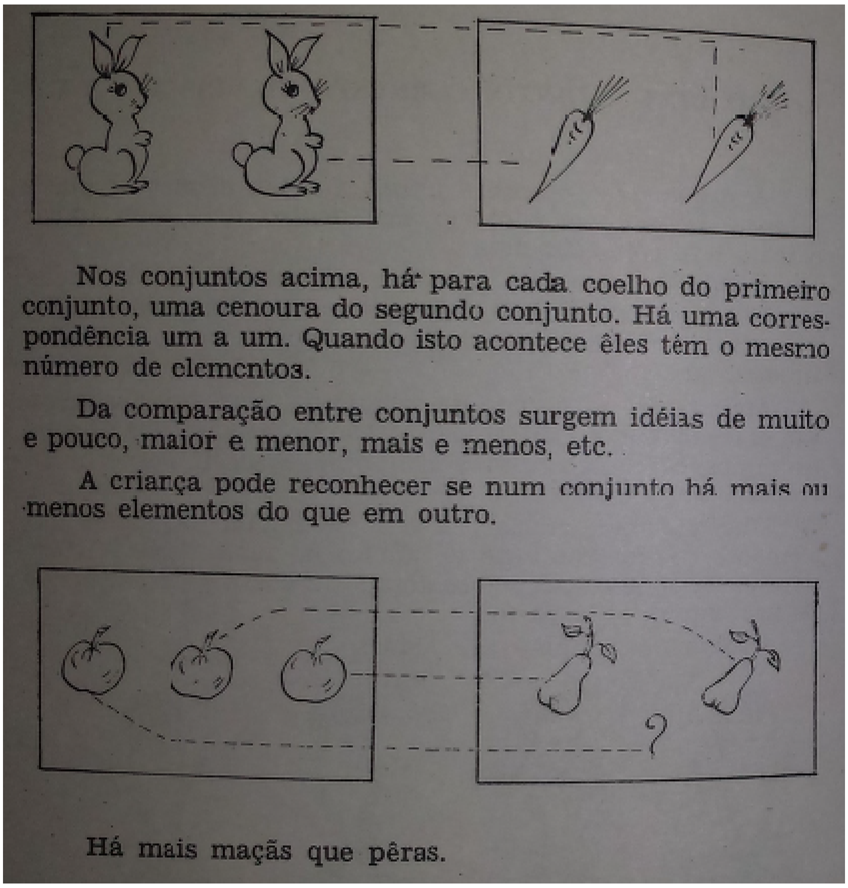
Tratando do conteúdo do primeiro ano do Ensino Primário, o primeiro volume da coleção destaca a Teoria dos Conjuntos como o ponto de partida para evoluções na Matemática. As autoras expressam a preocupação em atualizar a Matemática do Ensino Primário de modo semelhante ao que ocorria em outros níveis de ensino:

> O genial Cantor, no fim do século XIX, criou a teoria dos conjuntos. Essa criação estabeleceu um ponto de partida para depois difundir concepções altamente modernizadoras. Esse tratamento foi prontamente aplicado nas Escolas Superiores. [...] Como não poderia deixar de ser, nós, do ensino primário, começamos a nos preocupar com a diferença de tratamento: de uma parte a do ensino médio e da outra, a do primário. (FERREIRA; CARVALHO, 196-?a, não paginado).

No primeiro capítulo do livro, denominado *Noções de Conjunto*, as autoras caracterizam a noção de conjunto como algo presente desde cedo no cotidiano das crianças, pois "é intuitiva e tão elementar que a criança, no seu viver diário, age dentro dela, sem tomar o mais leve conhecimento" (FERREIRA; CARVALHO, 196-?a, p. 35).

Ferreira e Carvalho (196-?a) propõem o uso de representações de conjuntos para desenvolver a capacidade de comparação de quantidades, que deveria ser trabalhada por meio da correspondência entre os elementos de conjuntos diferentes, como pode ser visto no trecho que consta na Figura 4.2.

Figura 4.2 – Trecho do Volume 1 da coleção *Curso Completo de Matemática Moderna para o Ensino Primário* mostrando o uso da noção de conjuntos na comparação de quantidades.



Nos conjuntos acima, há para cada coelho do primeiro conjunto, uma cenoura do segundo conjunto. Há uma correspondência um a um. Quando isto acontece êles têm o mesmo número de elementos.

Da comparação entre conjuntos surgem idéias de muito e pouco, maior e menor, mais e menos, etc.

A criança pode reconhecer se num conjunto há mais ou menos elementos do que em outro.

?

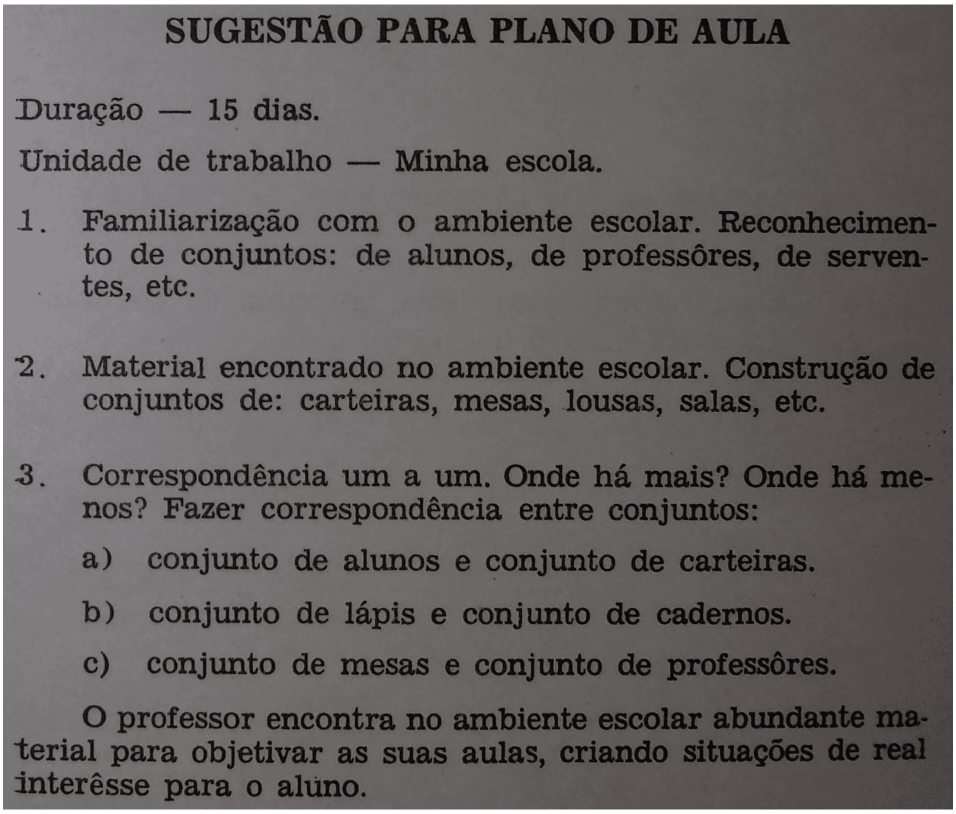
Há mais maçãs que pêras.

Fonte: Ferreira e Carvalho (196-?a, p. 36).

O livro apresenta sugestões de atividades para desenvolver a noção de distância, tamanho, posição e quantidade, recomendando uma abordagem que fosse atrativa às crianças. Algumas das atividades sugeridas envolvem a utilização de gravuras e manipulação de objetos diversos. As autoras recomendam o uso de palitos de sorvete e tampas de garrafas para representar elementos de conjuntos, que poderiam ser delimitados por fitas coloridas ou barbantes. Além disso, são dadas instruções para a confecção de flanelógrafos e quadros de pregas, que poderiam ser utilizados para exibir figuras relacionadas aos conjuntos e outros conteúdos abordados no livro.

No trecho disponível na Figura 4.3, propõe-se que a noção de conjuntos seja trabalhada a partir de elementos do cotidiano escolar.

Figura 4.3 – Trecho do Volume 1 da coleção *Curso Completo de Matemática Moderna para o Ensino Primário* com sugestão de plano de aula envolvendo a noção de conjunto.



SUGESTÃO PARA PLANO DE AULA

Duração — 15 dias.

Unidade de trabalho — Minha escola.

1. Familiarização com o ambiente escolar. Reconhecimento de conjuntos: de alunos, de professôres, de serventes, etc.

2. Material encontrado no ambiente escolar. Construção de conjuntos de: carteiras, mesas, lousas, salas, etc.

3. Correspondência um a um. Onde há mais? Onde há menos? Fazer correspondência entre conjuntos:

   a) conjunto de alunos e conjunto de carteiras.

   b) conjunto de lápis e conjunto de cadernos.

   c) conjunto de mesas e conjunto de professôres.

O professor encontra no ambiente escolar abundante material para objetivar as suas aulas, criando situações de real interêsse para o aluno.

Fonte: Ferreira e Carvalho (196-?a, p. 51).

As atividades que envolvem correspondência entre conjuntos são propostas como um requisito para a introdução da noção de número, confirmando a importância da Teoria dos Conjuntos no Ensino Primário nas propostas do Movimento da Matemática Moderna, como se observa a seguir:

> É comparando conjuntos que se chega à ideia de quantidade. Mesmo sem conhecimento dos nomes e símbolos dos números, a criança é capaz de desenvolver o conceito de número, pois é uma noção fundamental. Somente quando a criança, por meio de correspondência, for capaz de reconhecer prontamente a quantidade de elementos de um conjunto e designá-lo pelo seu nome é que podemos lhes dar o seu símbolo, isto é, o seu numeral correspondente. (FERREIRA; CARVALHO, 196-?a, p. 55).

Os conceitos básicos da Teoria dos Conjuntos também são abordados nos demais volumes da coleção *Curso Completo de Matemática Moderna para o Ensino Primário*. No segundo livro da coleção, as autoras Ferreira e Carvalho (196-?b) ressaltam a importância da inclusão da Teoria dos Conjuntos no Ensino Primário:

> Estudar Matemática, nos moldes da renovação, implica a inclusão de uma teoria que ocupa lugar de grande destaque: a Teoria dos Conjuntos. É ela o

> alicerce de toda a modernização e, como tal, não poderia deixar de constar, no curso primário, rudimentos de conceito de tão relevante valor (FERREIRA; CARVALHO, 196-?b, p.15).

A coleção também trata de tópicos como conjunto vazio, conjunto unitário, união e interseção entre conjuntos, subconjuntos, igualdade de conjuntos, conjuntos finitos e infinitos. Em alguns casos, esses conceitos são apresentados ao professor sem a indicação clara de como introduzi-los em sala de aula.

4.1.2 Matemática: Curso Moderno para os Ginásios, Volume 1

O primeiro livro da coleção *Matemática: Curso Moderno para os Ginásios*, de Osvaldo Sangiorgi, lançado em 1968, é destinado à primeira série do Ciclo Ginasial e aborda os seguintes assuntos:

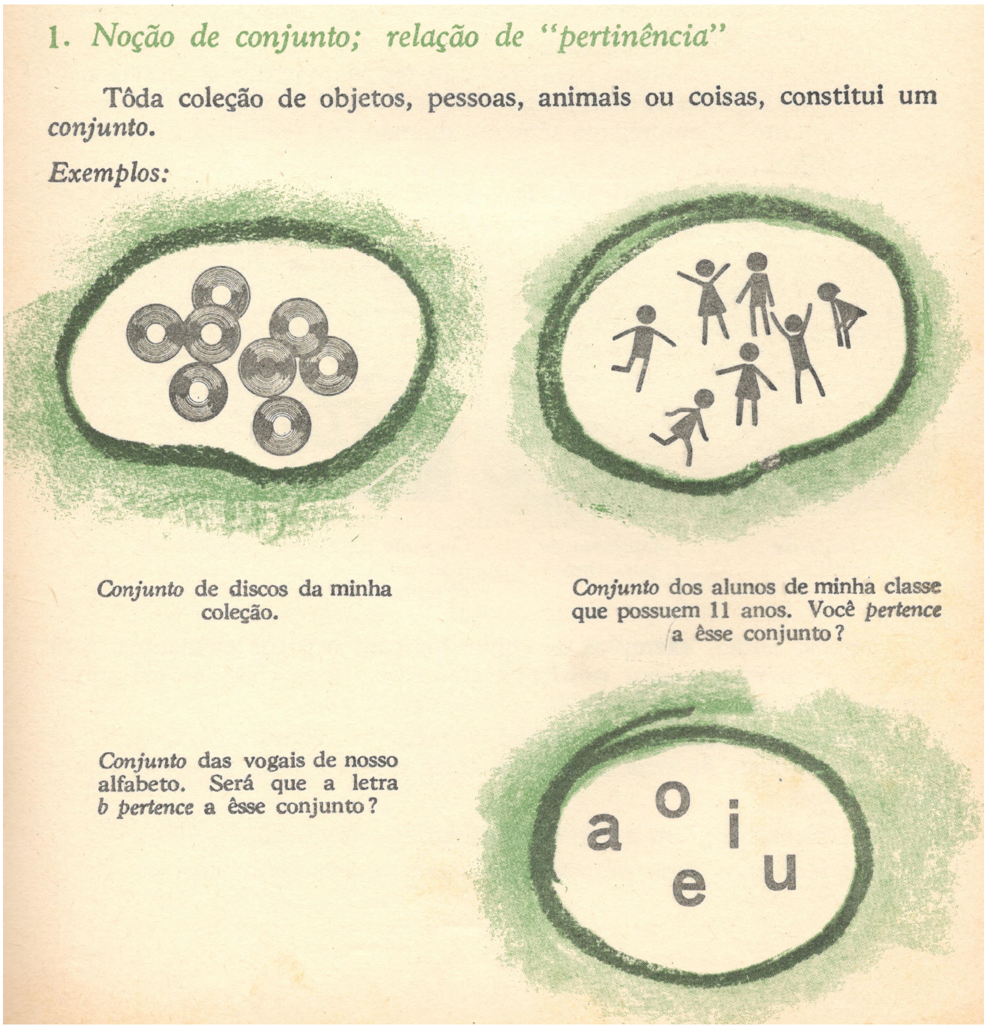
> 1. noções de conjunto; operações com conjuntos; relações;
> 2. número natural; numerais de um número — sistemas de numeração — bases;
> 3. operações (operações inversas) com números naturais — propriedades estruturais;
> 4. divisibilidade — múltiplos e divisores; números primos; fatoração completa;
> 5. conjunto dos números racionais; números fracionários — operações (operações inversas); propriedades estruturais;
> 6. estudo intuitivo das principais figuras geométricas planas e espaciais — sistemas de medidas: decimal e não-decimais. (SANGIORGI, 1968, não paginado)

O autor apresenta aos estudantes as vantagens da Matemática Moderna, indicando que o estudo das estruturas da Matemática substituiria os cálculos trabalhosos:

> Hoje, na Era Atômica em que vivemos, isto [cálculos trabalhosos] é trabalho para as máquinas (os fabulosos computadores eletrônicos de que tanto falam os jornais...), razão pela qual você vai aproveitar o seu precioso tempo aprendendo o verdadeiro *significado* e as belas estruturas da *Matemática Moderna*. Então, você perceberá, por exemplo, uma certa *semelhança* entre o modo de raciocinar em *Matemática* e nas outras matérias de seus estudos, como Português, História, Geografia, Ciências, Música, Educação Física etc. (SANGIORGI, 1968, não paginado, grifo do autor).

O primeiro capítulo é dividido em três partes, intituladas *Conjuntos e Relações*, *Conjunto dos Números Naturais* e *Sistemas de Numeração; Bases*. A primeira parte se inicia conceituando conjunto como "toda coleção de objetos, pessoas, animais ou coisas" (SANGIORGI, 1968, p. 3), como se observa na Figura 4.4.

Figura 4.4 – Trecho do livro *Matemática: Curso Moderno para os Ginásios*, Volume 1, apresentando a noção de conjuntos.

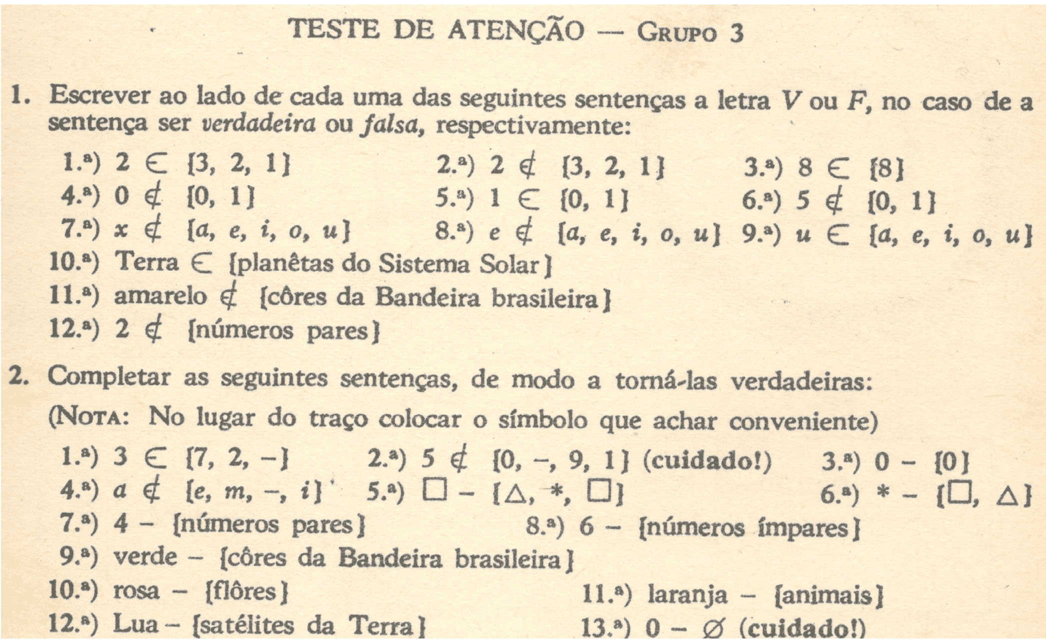


Fonte: Sangiorgi (1968, p. 3).

Utilizando figuras e exemplos, são apresentadas as formas de representação de conjuntos, os conceitos de conjunto unitário, conjunto vazio e conjunto infinito. Como exemplos de conjunto unitário e conjunto vazio são dados, respectivamente, o conjunto dos "dias da semana cujos nomes comecem pela letra *d*" (SANGIORGI, 1968, p. 7) e o conjunto dos "dias da semana cujos nomes comecem por *x*" (SANGIORGI, 1968, p. 7). Nessa parte introdutória, são empregados o símbolo $\in$ (para indicar que um elemento pertence a determinado conjunto), as chaves (para delimitar os elementos de um conjunto) e o símbolo $\varnothing$ (para indicar o conjunto vazio).

No primeiro capítulo, as atividades classificadas como *exercícios exploratórios* incentivam a aplicação dos conceitos estudados em situações cotidianas, solicitando ao aluno "escrever o conjunto cujos elementos são as letras que figuram no nome de sua escola e não figuram no nome do estado em que localiza a escola" (SANGIORGI, 1968, p. 9), por exemplo. Já os *exercícios de fixação*, *exercícios de aplicação* e *teste de atenção* envolvem conceitos mais abstratos e exigem conhecimento sobre notação. A Figura 4.5 traz exemplos de exercícios do tipo *teste de atenção* tratando da relação de pertinência.

Figura 4.5 – Exercícios sobre a relação de pertinência apresentados no livro *Matemática: Curso Moderno para os Ginásios*, Volume 1.



TESTE DE ATENÇÃO — GRUPO 3

1. Escrever ao lado de cada uma das seguintes sentenças a letra *V* ou *F*, no caso de a sentença ser *verdadeira* ou *falsa*, respectivamente:

1.ª) $2 \in \{3, 2, 1\}$ 2.ª) $2 \notin \{3, 2, 1\}$ 3.ª) $8 \in \{8\}$
4.ª) $0 \notin \{0, 1\}$ 5.ª) $1 \in \{0, 1\}$ 6.ª) $5 \notin \{0, 1\}$
7.ª) $x \notin \{a, e, i, o, u\}$ 8.ª) $e \notin \{a, e, i, o, u\}$ 9.ª) $u \in \{a, e, i, o, u\}$
10.ª) Terra $\in$ {planêtas do Sistema Solar}
11.ª) amarelo $\notin$ {côres da Bandeira brasileira}
12.ª) 2 $\notin$ {números pares}

2. Completar as seguintes sentenças, de modo a torná-las verdadeiras:
(NOTA: No lugar do traço colocar o símbolo que achar conveniente)

1.ª) $3 \in \{7, 2, -\}$ 2.ª) $5 \notin \{0, -, 9, 1\}$ (cuidado!) 3.ª) $0 - \{0\}$
4.ª) $a \notin \{e, m, -, i\}$ 5.ª) $\square - \{\triangle, *, \square\}$ 6.ª) $* - \{\square, \triangle\}$
7.ª) 4 – {números pares} 8.ª) 6 – {números ímpares}
9.ª) verde – {côres da Bandeira brasileira}
10.ª) rosa – {flôres} 11.ª) laranja – {animais}
12.ª) Lua – {satélites da Terra} 13.ª) $0 - \varnothing$ (cuidado!)

Fonte: Sangiorgi (1968, p. 9).

Ainda na primeira parte do primeiro capítulo de *Matemática: Curso Moderno para os Ginásios*, Volume 1, são definidas as operações de união, interseção, complementação e produto cartesiano. A exposição do conteúdo sobre operações entre conjuntos é acompanhado por representações em diagramas de Venn, como se verifica na Figura 4.6,

Figura 4.6 – Trecho do livro *Matemática: Curso Moderno para os Ginásios*, Volume 1, tratando da união entre conjuntos.

2. Reunião ou união ($\cup$)

Sejam, por exemplo, os conjuntos:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 6\}$$
$$B = \{2, 3, 5\}$$

Formemos um nôvo conjunto com *todos* os elementos dos conjuntos dados, de modo que não figurem *elementos repetidos:*

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Êsse conjunto é chamado **reunião** ou **união** dos conjuntos A e B.

No diagrama (fig. 6) a região colorida é o conjunto formado pelos elementos que pertencem ao conjunto A, ao conjunto B **ou** a ambos.
Indicação: $\cup$ (lê-se: "união")

Assim: $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

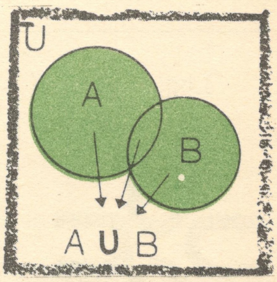


Fig. 6

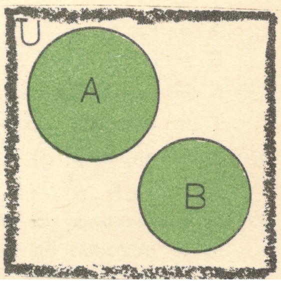
Se os conjuntos forem *disjuntos*, como por exemplo:

$$A = \{1, 3, 5\}$$
$$B = \{2, 4, 6\}$$

a *reunião* será o conjunto:

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

assinalado, na região colorida do diagrama (fig. 7) como dois conjuntos separados.



Logo: A **reunião** de dois conjuntos A e B *é o conjunto constituído pelos elementos que pertencem* a A **ou** a B.

Fonte: Sangiorgi (1968, p. 17).

Na Figura 4.7, constam alguns exercícios sobre operações com conjuntos.

Figura 4.7 – Exercícios sobre operações com conjuntos no livro *Matemática: Curso Moderno para os Ginásios*, Volume 1.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — Grupo 11

1. Sendo $U = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ e $A = \{1, 5, 9\}$, calcular A'.
2. Sendo $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{2, 4\}$ e $B = \{1, 5\}$, calcular:
   1.º) A' 2.º) B' 3.º) $A' \cap B'$ 4.º) $A' \cup B'$
   5.º) $A' \cup B$ 6.º) $A \cap B'$ 7.º) $(A \cup B)'$ 8.º) $(A \cap B)'$

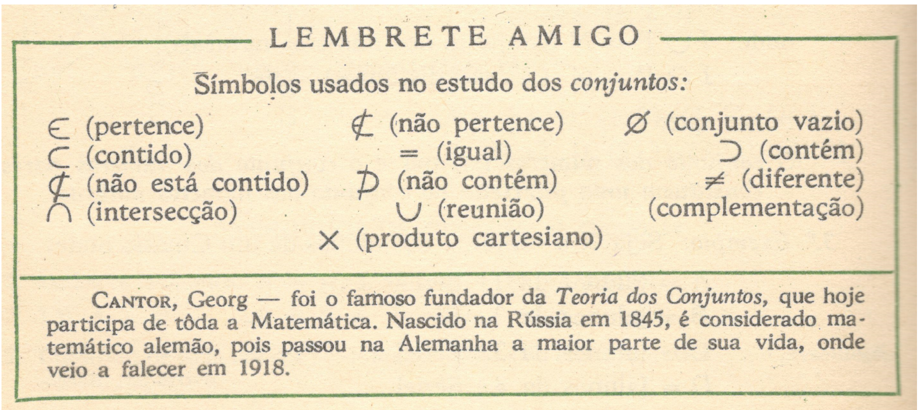
Nota: Calcular, nos exercícios 7.º e 8.º, as operações indicadas entre parênteses e a seguir o *complementar* do resultado.

3. Sendo U = {planêtas do Sistema Solar} e A = {Terra}, calcular A'.
4. Sendo U = {alunos do Ginásio} e A = {alunos da 2.ª, 3.ª e 4.ª séries ginasiasi} calcular A'.

Fonte: Sangiorgi (1968, p. 20).

No apêndice da primeira parte do primeiro capítulo, o autor usa exemplos para introduzir o conceito de partição, definindo que “dados vários subconjuntos de um conjunto U, se estes subconjuntos são disjuntos, dois a dois, e a sua reunião é o conjunto U, diz-se que eles constituem uma partição do conjunto U” (SANGIORGI, 1968, p. 30). Ao fim da primeira parte do primeiro capítulo, no trecho disponível na Figura 4.8, o autor destaca os símbolos da Teoria dos Conjuntos e traz uma breve biografia de Georg Cantor, matemático ao qual é atribuída a fundação da Teoria dos Conjuntos.

Figura 4.8 – Trecho do livro *Matemática: Curso Moderno para os Ginásios*, Volume 1, destacando os símbolos da Teoria dos Conjuntos.



LEMBRETE AMIGO

Símbolos usados no estudo dos *conjuntos:*

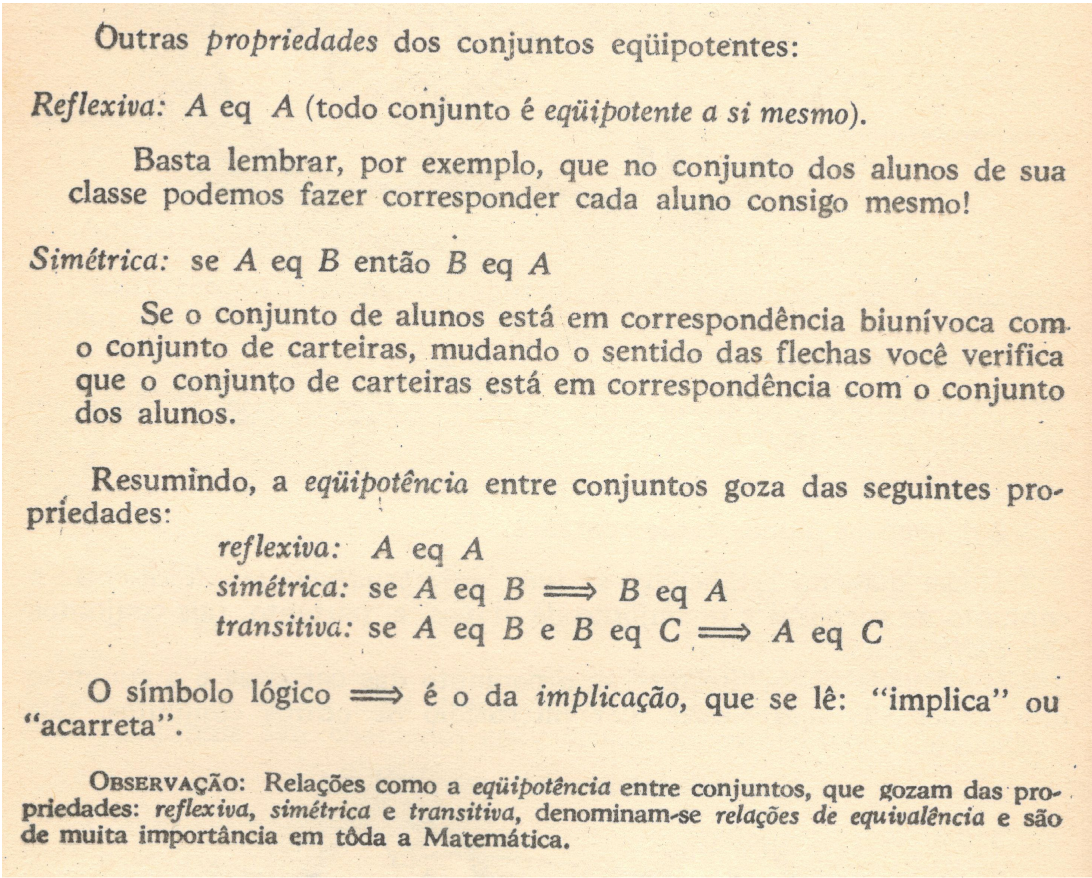
$\in$ (pertence) $\notin$ (não pertence) $\varnothing$ (conjunto vazio)
$\subset$ (contido) $=$ (igual) $\supset$ (contém)
$\not\subset$ (não está contido) $\not\supset$ (não contém) $\neq$ (diferente)
$\cap$ (intersecção) $\cup$ (reunião) (complementação)
$\times$ (produto cartesiano)

CANTOR, Georg — foi o famoso fundador da *Teoria dos Conjuntos*, que hoje participa de tôda a Matemática. Nascido na Rússia em 1845, é considerado matemático alemão, pois passou na Alemanha a maior parte de sua vida, onde veio a falecer em 1918.

Fonte: Sangiorgi (1968, p. 30).

Na segunda parte do primeiro capítulo, denominada *Número Naturais*, o autor utiliza diagramas para apresentar os conceitos de correspondência biunívoca e conjuntos equipotentes. No livro, os conjuntos A e B são ditos equipotentes quando existe uma correspondência biunívoca entre eles. Nesse caso, denota-se “A *eq* B” (SANGIORGI, 1968, p. 32). O autor apresenta o conjunto de alunos e o conjunto das carteiras de uma sala de aula como exemplo de conjuntos equipotentes. Utilizando esse exemplo, Sangiorgi (1968, p. 34) explica, no trecho reproduzido na Figura 4.9, algumas propriedades da equipotência entre conjuntos.

Figura 4.9 – Trecho do livro *Matemática: Curso Moderno para os Ginásios*, Volume 1, apresentando as propriedades da relação de equipotência entre conjuntos.



Outras *propriedades* dos conjuntos eqüipotentes:

Reflexiva: A eq A (todo conjunto é *eqüipotente a si mesmo*).

Basta lembrar, por exemplo, que no conjunto dos alunos de sua classe podemos fazer corresponder cada aluno consigo mesmo!

Simétrica: se A eq B então B eq A

Se o conjunto de alunos está em correspondência biunívoca com o conjunto de carteiras, mudando o sentido das flechas você verifica que o conjunto de carteiras está em correspondência com o conjunto dos alunos.

Resumindo, a *eqüipotência* entre conjuntos goza das seguintes propriedades:

reflexiva: A eq A
simétrica: se A eq $B \Longrightarrow B$ eq A
transitiva: se A eq B e B eq $C \Longrightarrow A$ eq C

O símbolo lógico $\Longrightarrow$ é o da *implicação*, que se lê: "implica" ou "acarreta".

Observação: Relações como a *eqüipotência* entre conjuntos, que gozam das propriedades: *reflexiva*, *simétrica* e *transitiva*, denominam-se *relações de equivalência* e são de muita importância em tôda a Matemática.

Fonte: Sangiorgi (1968, p. 34).

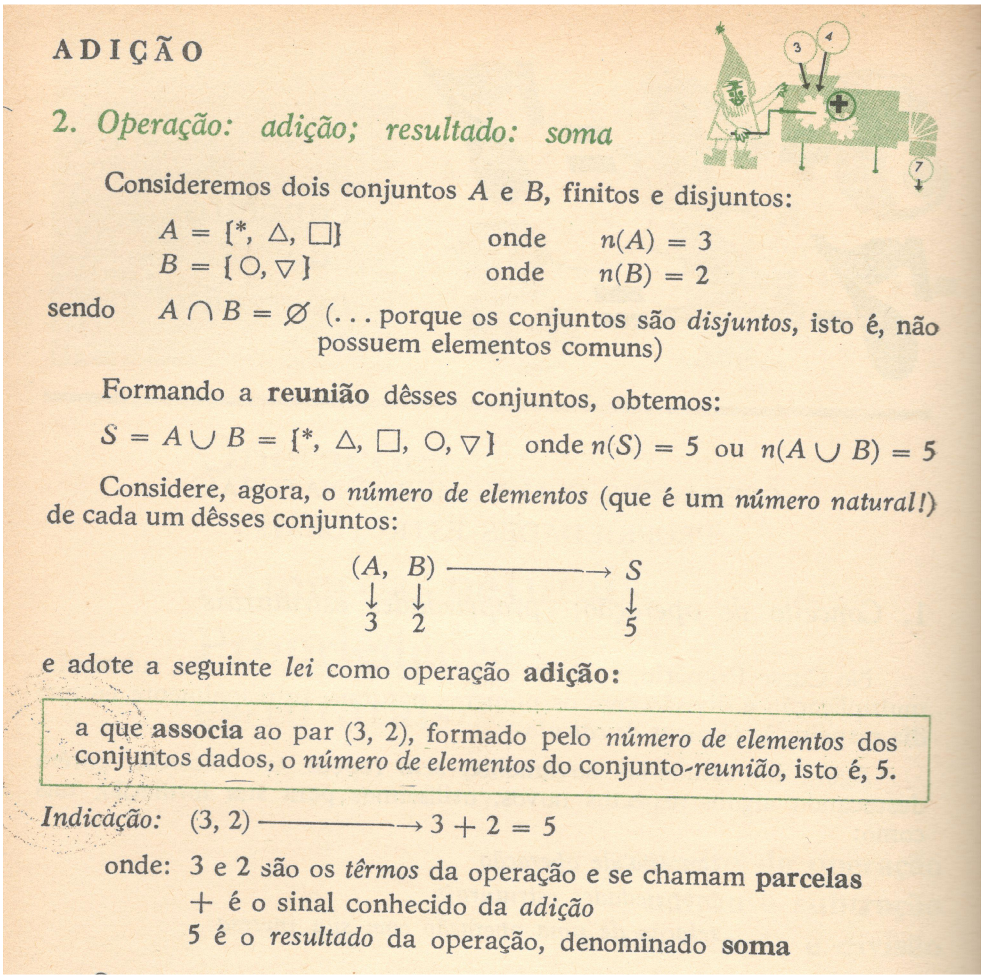
O autor escreve que a noção de equipotência de conjuntos foi utilizada historicamente pelo homem para auxiliar no processo de contagem:

> O uso de conjuntos equipotentes para "contar" sempre pertenceu ao homem. Na Antiguidade, os primitivos pastores guardavam o *número* de suas ovelhas (sem saberem contar como nós...) estabelecendo uma correspondência biunívoca entre o *conjunto* de *ovelhas* e o *conjunto* de *pedrinhas* (ou de quaisquer outros objetos). [...] Se, na hora de recolher as ovelhas, à última delas correspondesse a última pedrinha, os dois conjuntos conservavam, naturalmente, o *mesmo número de elementos*. Eram, pois, *equipotentes*. Caso sobrasse ou faltasse alguma pedrinha, então os conjuntos já não eram mais equipotentes e, portanto, não possuíam o *mesmo número de elementos*. (SANGIORGI, 1968, p. 37, grifo do autor).

Desse modo, Sangiorgi (1968) utiliza o conceito de equipotência de conjuntos para definir número natural: "Que é **número**, então? *Número* ou *número natural* é a **propriedade comum** (ideia), associada a todos os conjuntos equipotentes entre si, e que não depende da *natureza* dos elementos nem da *ordem* com que eles figuram nos conjuntos." (SANGIORGI, 1968, p. 38, grifo do autor).

No capítulo *Operações com Números Naturais: Propriedades Estruturais*, do livro *Matemática: Curso Moderno para os Ginásios*, os conceitos da Teoria dos Conjuntos são empregados para definir as operações com números naturais. No trecho que consta na Figura 4.10, o autor relaciona a adição entre números naturais e o número de elementos da união de conjuntos disjuntos.

Figura 4.10 – Trecho do livro *Matemática: Curso Moderno para os Ginásios*, Volume 1, relacionando a operação de adição à união de conjuntos disjuntos.



ADIÇÃO

2. *Operação: adição; resultado: soma*

Consideremos dois conjuntos A e B, finitos e disjuntos:

$A = \{*, \triangle, \square\}$ onde $n(A) = 3$
$B = \{\bigcirc, \triangledown\}$ onde $n(B) = 2$

sendo $A \cap B = \varnothing$ (. . . porque os conjuntos são *disjuntos*, isto é, não possuem elementos comuns)

Formando a **reunião** dêsses conjuntos, obtemos:

$S = A \cup B = \{*, \triangle, \square, \bigcirc, \triangledown\}$ onde $n(S) = 5$ ou $n(A \cup B) = 5$

Considere, agora, o *número de elementos* (que é um *número natural!*) de cada um dêsses conjuntos:

$$\begin{array}{ccc} (A, & B) & \longrightarrow S \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 2 & 5 \end{array}$$

e adote a seguinte *lei* como operação **adição:**

a que **associa** ao par (3, 2), formado pelo *número de elementos* dos conjuntos dados, o *número de elementos* do conjunto-*reunião*, isto é, 5.

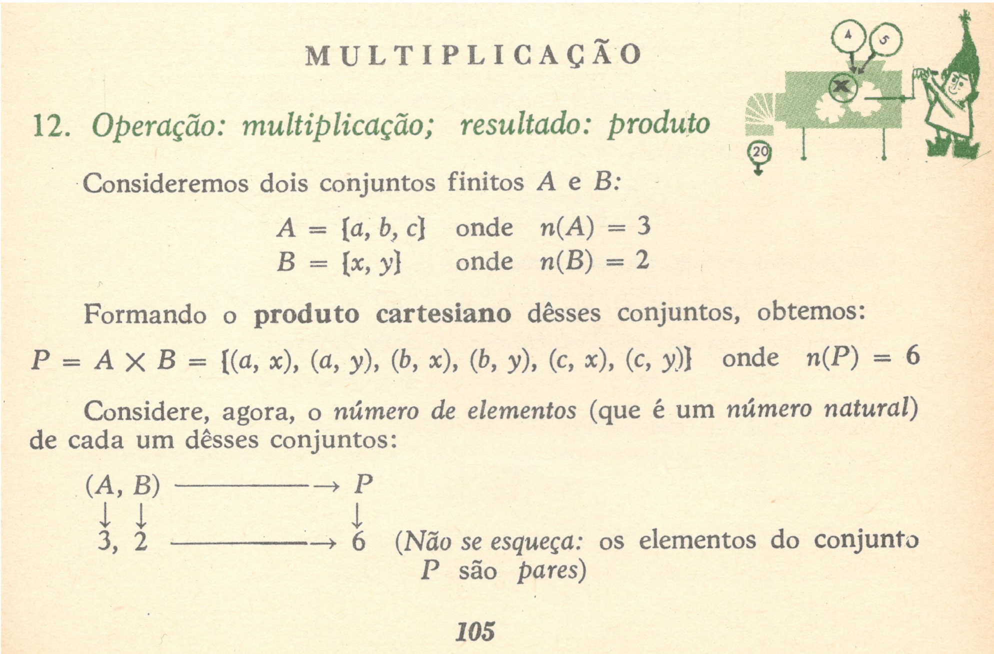
Indicação: $(3, 2) \longrightarrow 3 + 2 = 5$

onde: 3 e 2 são os *têrmos* da operação e se chamam **parcelas**
$+$ é o sinal conhecido da *adição*
5 é o *resultado* da operação, denominado **soma**

Fonte: Sangiorgi (1968, p. 86).

Por sua vez, a multiplicação entre dois números naturais é relacionada ao número de pares ordenados do produto cartesiano entre dois conjuntos, como se observa na Figura 4.11.

Figura 4.11 – Trecho do livro *Matemática: Curso Moderno para os Ginásios*, Volume 1, relacionando a operação de multiplicação de números naturais ao número de pares ordenados do produto cartesiano entre dois conjuntos.



MULTIPLICAÇÃO

12. *Operação: multiplicação; resultado: produto*

Consideremos dois conjuntos finitos A e B:

$A = \{a, b, c\}$ onde $n(A) = 3$
$B = \{x, y\}$ onde $n(B) = 2$

Formando o **produto cartesiano** dêsses conjuntos, obtemos:

$P = A \times B = \{(a, x), (a, y), (b, x), (b, y), (c, x), (c, y)\}$ onde $n(P) = 6$

Considere, agora, o *número de elementos* (que é um *número natural*) de cada um dêsses conjuntos:

$$\begin{array}{ccc} (A, B) & \longrightarrow & P \\ \downarrow\ \downarrow & & \downarrow \\ 3,\ 2 & \longrightarrow & 6 \end{array}$$

(*Não se esqueça:* os elementos do conjunto P são *pares*)

105

Fonte: Sangiorgi (1968, p. 105).

Assim, Sangiorgi (1968) apresenta a multiplicação como a operação “que **associa** ao par $(2,3)$, formado pelos números de elementos dos conjuntos dados, ao número de elementos do conjunto produto cartesiano, isto é, 6” (SANGIORGI, 1968, p. 106, grifo do autor).

4.1.3 Matemática: Curso Moderno para os Ginásios, Volume 4

No quarto livro da coleção *Matemática: Curso Moderno para os Ginásios*, de Sangiorgi (1967), destinado ao quarto ano do Ciclo Ginasial, são abordados os seguintes assuntos:

1. Números reais — prática com os números irracionais — radicais; potências com expoente racional relativo — operações e propriedades;
2. Equações do segundo grau — generalidades — resolução — relações entre os coeficientes e as raízes; equações biquadradas e equações irracionais; sistemas simples do segundo grau — problemas;
3. Funções — domínio e conjunto-imagem; função linear e sua representação gráfica cartesiana — resolução gráfica de sistemas de equações; função trinômio do segundo grau e sua representação gráfica cartesiana; inequações do segundo grau;
4. Semelhanças — razão e proporcionalidade de segmentos — Teorema de Tales — semelhança de triângulos — semelhança de polígonos; razões trigonométricas;
5. Relações métricas num triângulo retângulo — Teorema de Pitágoras; num triângulo qualquer — lei dos senos e lei dos cossenos; relações métricas num círculo;

6. Polígonos regulares e medida da circunferência — polígonos regulares inscritíveis e circunscritíveis numa circunferência; construção e relações métricas entre os elementos de um quadrado, do triângulo equilátero, do hexágono e decágono regulares; noções sobre a medida da circunferência — cálculo de π;

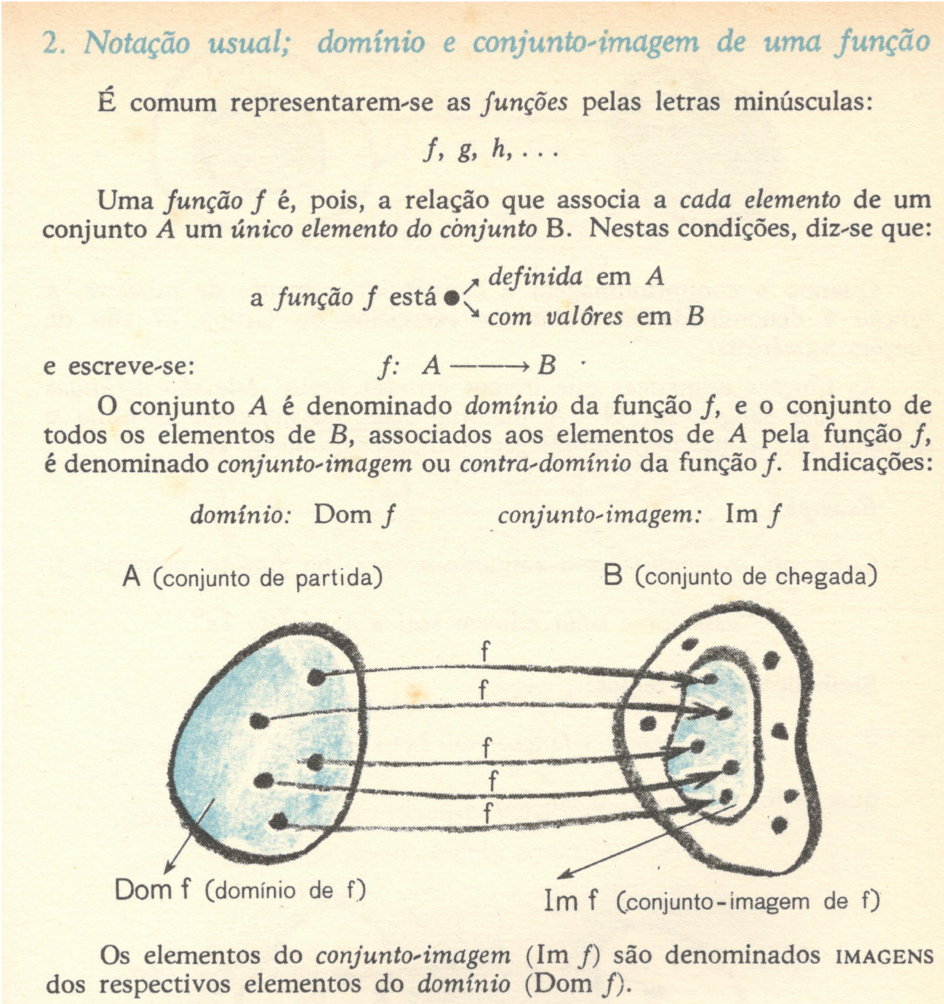
Apêndice: Números complexos; áreas de regiões planas; mapas topológicos. (SANGIORGI, 1967, não paginado).

Nesse livro, a linguagem da Teoria dos Conjuntos é empregada, entre outras finalidades, para designar as raízes de uma equação, na definição de funções e na representação da posição relativa entre entes geométricos. Por exemplo, o autor afirma que “resolver uma equação é determinar o seu conjunto-verdade” (SANGIORGI, 1967, p. 20) e, assim, as raízes da equação $x^2 - 5x + 6 = 0$ são representadas como elementos do conjunto $V = \{2, 3\}$.

Uma equação polinomial de segundo grau na variável x é definida como “toda sentença aberta da forma $ax^2 + bx + c = 0$, onde a, b e c representam números reais, com a condição de que a deve ser diferente de zero” (SANGIORGI, 1967, p. 17). Após apresentar exemplos, o autor mostra como definir simbolicamente uma equação de segundo grau: “(eq. 2° grau) $\Leftrightarrow ax^2 + bx + c = 0, \forall a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$” (SANGIORGI, 1967, p. 17).

No segundo capítulo, o conceito de função é apresentado como uma relação entre conjuntos e introduzido por exemplos ilustrados com diagramas de flechas. Um dos exemplos de função trazidos pelo autor é a relação entre conjuntos de números naturais que associa a cada número x o seu dobro $2x$. Como contraexemplo, Sangiorgi (1967) cita a relação que associa a um número natural x um número maior que x, que não satisfaz a definição dada pelo autor, que conceitua função como “uma relação especial entre dois conjuntos A e B que associa a cada elemento do conjunto A um único elemento do conjunto B” (SANGIORGI, 1967, p. 70). Na Figura 4.12, a seguir, observa-se a definição dada por Sangiorgi (1967) para os conjuntos domínio, contradomínio e imagem de uma função.

Figura 4.12 – Trecho do livro *Matemática: Curso Moderno para os Ginásios*, Volume 4, apresentando conjuntos domínio, contradomínio e imagem de uma função.



2. *Notação usual; domínio e conjunto-imagem de uma função*

É comum representarem-se as *funções* pelas letras minúsculas:

$$f,\ g,\ h,\ \ldots$$

Uma *função* f é, pois, a relação que associa a *cada elemento* de um conjunto A um *único elemento do conjunto* B. Nestas condições, diz-se que:

a *função* f está • *definida* em A / *com valôres* em B

e escreve-se: $f\colon\ A \longrightarrow B$

O conjunto A é denominado *domínio* da função f, e o conjunto de todos os elementos de B, associados aos elementos de A pela função f, é denominado *conjunto-imagem* ou *contra-domínio* da função f. Indicações:

domínio: Dom f *conjunto-imagem:* Im f

Os elementos do *conjunto-imagem* (Im f) são denominados IMAGENS dos respectivos elementos do *domínio* (Dom f).

Fonte: Sangiorgi (1967, p. 77).

4.1.4 Matemática: Curso Moderno para o Segundo Ciclo, Volume 1

O primeiro volume da coleção *Matemática: Curso Moderno para o Segundo Ciclo*, de Monteiro, Sangiorgi e Watanabe (1970), destinado ao Ciclo Colegial, é dividido nos seguintes capítulos: *Conjuntos*; *Relações*; *Aplicações*; *Progressões aritméticas e progressões geométricas*; *Funções circulares (ou trigonométricas)*; *Resolução de triângulos*; *O sistema geométrico*; *Pontos, retas e planos no espaço*; *Paralelismo e perpendicularismo no espaço*.

O primeiro capítulo traz definições, exemplos e algumas propriedades relacionadas aos conceitos de igualdade entre conjuntos, subconjuntos, interseção, reunião, complementar, diferença e partições. A Figura 4.13 apresenta o trecho em que os autores definem a interseção entre conjuntos.

Figura 4.13 – Trecho do livro *Matemática: Curso Moderno para o Segundo Ciclo*, Volume 1, apresentando a definição de interseção entre conjuntos.

7.2. DEFINIÇÕES. Sejam A e B duas partes do conjunto-universo U. Chama-se *intersecção* de A e B ao conjunto de todos os elementos de U que pertencem simultâneamente a A e a B.

Notação: $A \cap B$

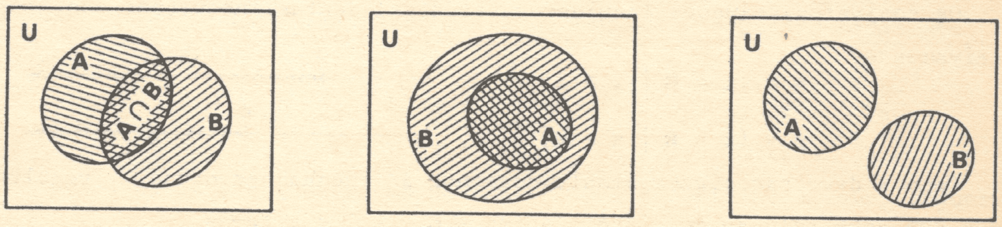
Leitura: "A intersecção B" ou, abreviadamente, "A inter B"

Simbòlicamente, temos:

$$\boxed{A \cap B = \{x \in U \mid x \in A \text{ e } x \in B\}}$$

Quando A e B não têm elementos comuns, isto é, quando $A \cap B = \emptyset$, diremos que os conjuntos A e B são *disjuntos*. Se $A \cap B \neq \emptyset$, diremos que os conjuntos A e B *se cortam* ou que A e B *se interceptam*.

Ilustração da intersecção por meio dos diagramas de Venn



$A \cap B$ $\quad$ $A \subset B \Rightarrow A \cap B = A$ $\quad$ $A \cap B = \emptyset$ (A e B são disjuntos)

Fig. 8

Fonte: Monteiro, Sangiorgi e Watanabe (1970, p. 21).

O livro não traz as demonstração das propriedades enunciadas. Em alguns casos, como no trecho que consta na Figura 4.14, apenas recomenda que o leitor as verifique por meio de diagramas de Venn.

Figura 4.14 – Trecho do livro *Matemática: Curso Moderno para o Segundo Ciclo*, Volume 1, apresentando algumas propriedades relacionadas ao complementar de um conjunto.

9.4. PROPRIEDADES. Sejam A e B dois subconjuntos quaisquer do conjunto-universo U e sejam A' e B' seus complementares. Demonstra-se que as seguintes propriedades são verdadeiras:

$$\boxed{\begin{array}{l} A \cup A' = U \quad \text{e} \quad A \cap A' = \phi \\ (A')' = A \\ A \subset B \iff B' \subset A' \\ A = B \iff A' = B' \\ (A \cap B)' = A' \cup B' \\ (A \cup B)' = A' \cap B' \end{array}}$$

Fazer as verificações destas propriedades por meio dos diagramas de Venn.

Fonte: Monteiro, Sangiorgi e Watanabe (1970, p. 28)

Ao longo dos capítulos, os autores propõem exercícios de fixação do conteúdo. Os exercícios mostrados na Figura 4.15 são apresentados no fim da seção que discorre sobre o complementar de um conjunto.

Figura 4.15 – Exercícios sobre o complementar de um conjunto apresentados no livro *Matemática: Curso Moderno para o Segundo Ciclo*, volume 1.

EXERCÍCIOS — GRUPO 6

1. Seja $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ e consideremos as seguintes partes

$$A = \{x \in U \mid x \text{ é múltiplo de } 4\}$$
e
$$B = \{x \in U \mid x \text{ é múltiplo de } 2\}$$

a) Determinar os complementares de A e de B.

b) Verificar que $B' \subset A'$

2. Consideremos o mesmo conjunto-universo do exercício anterior e sejam

$$A = \{1, 2, 3, 6, 8, 10\}$$
e
$$B = \{1, 2, 3, 6, 4, 5, 9\}$$

a) Verificar que $(A \cap B)' = A' \cup B'$.

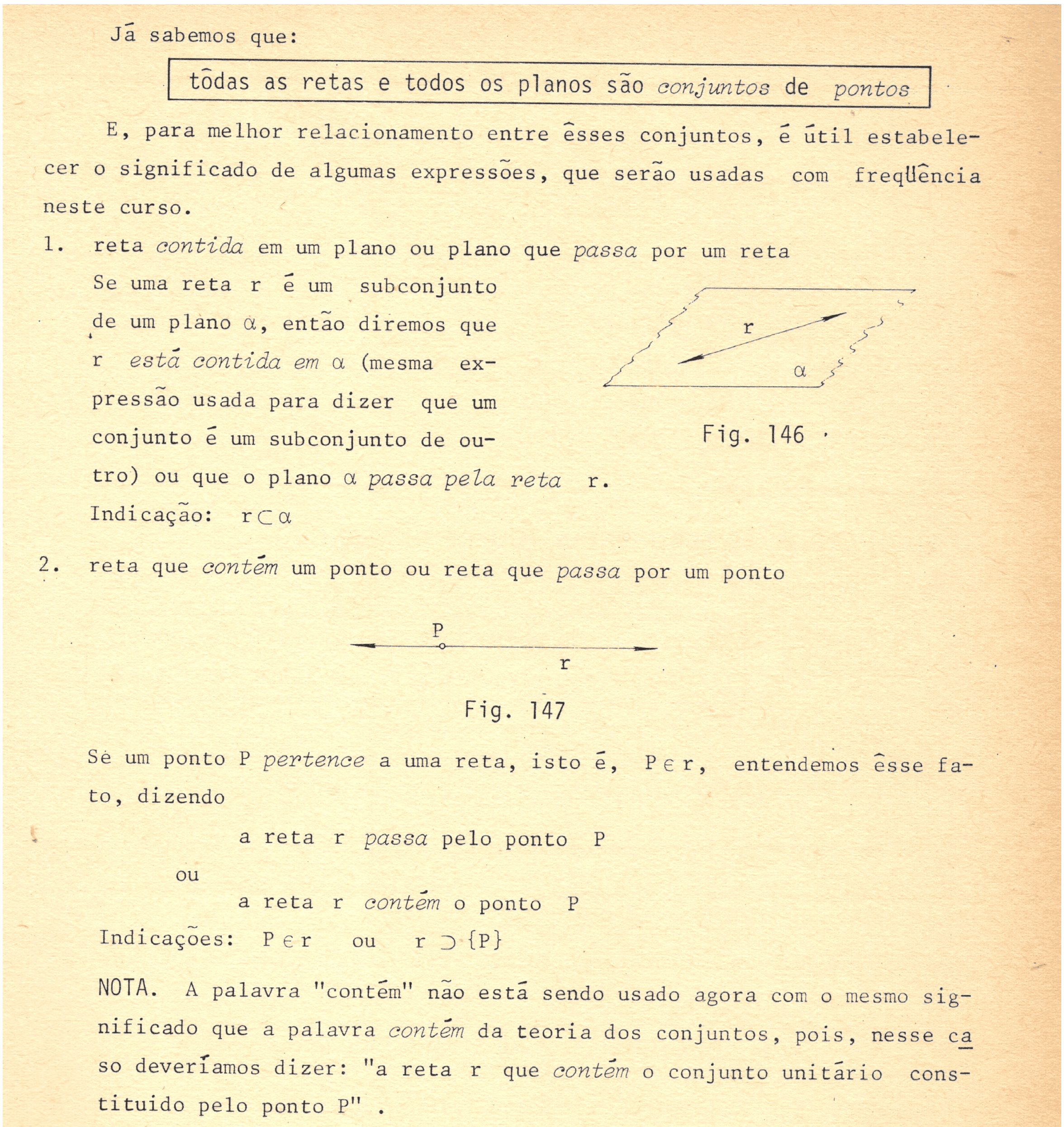
b) Verificar que $(A \cup B)' = A' \cap B'$.

Fonte: Monteiro, Sangiorgi e Watanabe (1970, p. 28).

Nos capítulos que tratam de Geometria, os planos e as retas são tratados como conjunto de pontos e, por isso, Monteiro, Sangiorgi e Watanabe (1970) empregam os símbolos e terminologia da Teoria dos Conjuntos para indicar posições relativas. Para representar que uma reta

r passa pelo ponto P, escreve-se $P \in r$ ou $r \supset \{P\}$. Analogamente, a expressão $r \subset \alpha$ é usada para indicar que a reta r está contida no plano α, como se observa na Figura 4.16.

Figura 4.16 – Trecho do livro *Matemática: Curso Moderno para o Segundo Ciclo*, Volume 1, em que a linguagem da Teoria dos Conjuntos é utilizada em definições de conceitos da Geometria.



Já sabemos que:

tôdas as retas e todos os planos são *conjuntos* de *pontos*

E, para melhor relacionamento entre êsses conjuntos, é útil estabelecer o significado de algumas expressões, que serão usadas com freqüência neste curso.

1. reta *contida* em um plano ou plano que *passa* por um reta

Se uma reta r é um subconjunto de um plano α, então diremos que r *está contida em* α (mesma expressão usada para dizer que um conjunto é um subconjunto de outro) ou que o plano α *passa pela reta* r.

Indicação: $r \subset \alpha$

Fig. 146

2. reta que *contém* um ponto ou reta que *passa* por um ponto

Fig. 147

Se um ponto P *pertence* a uma reta, isto é, $P \in r$, entendemos êsse fato, dizendo

a reta r *passa* pelo ponto P

ou

a reta r *contém* o ponto P

Indicações: $P \in r$ ou $r \supset \{P\}$

NOTA. A palavra "contém" não está sendo usado agora com o mesmo significado que a palavra *contém* da teoria dos conjuntos, pois, nesse caso deveríamos dizer: "a reta r que *contém* o conjunto unitário constituido pelo ponto P" .

Fonte: Monteiro, Sangiorgi e Watanabe (1970, p. 195).

5 O DECLÍNIO DO MOVIMENTO DA MATEMÁTICA MODERNA

No Brasil e no exterior, a proposta da Matemática Moderna enfraqueceu em meados da década de 1970, quando as críticas ao movimento se tornaram comuns no meio acadêmico e na imprensa em geral (PINTO, 2005, p. 8). Em 1973, foi lançado nos Estados Unidos o livro *Why Johnny Can't Add: The Failure of the New Math*, de Morris Kline, que foi publicado no Brasil em 1976 sob o título *O Fracasso da Matemática Moderna*. Com grande repercussão, esse livro trazia fortes críticas às propostas do Movimento da Matemática Moderna.

As críticas ao Movimento da Matemática Moderna formuladas por Kline (1976) referem-se ao uso exagerado de símbolos e do método dedutivo, além de poucas aplicações práticas, rigor excessivo e a insistência na discussão de pormenores, como a distinção entre número e numeral, ou a distinção entre o conjunto vazio (representado por $\varnothing$) e o conjunto cujo único elemento é o conjunto vazio (representado por $\{\varnothing\}$).

A ênfase na Teoria dos Conjuntos se tornou o aspecto mais associado ao Movimento da Matemática Moderna pelo público em geral e, também, um dos principais alvos de críticas. Kline (1976, p. 110) considera que, pelo menos nos primeiros anos de escolaridade, o uso da Teoria dos Conjuntos com o intuito de unificar conceitos da Matemática leva a uma terminologia artificial e que não contribui para o aprendizado. Como relata Phillips (2015, p. 106), o estudo da correspondência biunívoca e da equivalência entre conjuntos era tratado como requisito para entender o conceito de número, mesmo que boa parte das crianças ingressassem na escola já sabendo contar. Para Kline (1976), na Matemática elementar, a Teoria dos Conjuntos "dificulta ideias que são muito mais facilmente compreendidas intuitivamente" (KLINE, 1976, p. 120).

Segundo Soares (2001, p. 49), muitas definições sobre a Teoria dos Conjuntos eram apresentadas sem um propósito claro, não sendo utilizadas posteriormente. A partir da análise de livros didáticos da Matemática Moderna, Macedo (2008, p. 96) conclui que a intenção de utilizar a linguagem da Teoria dos Conjuntos para unificar as diferentes áreas da Matemática na Educação Básica nem sempre se concretizava, uma vez que algumas obras se limitavam a abordar esse conteúdo apenas em um capítulo inicial.

Lima (2007, p. 164) considera que o Movimento da Matemática Moderna levou ao abandono do ensino de Geometria e ao uso exagerado de formalismo e da linguagem da Teoria dos Conjuntos, enquanto os aspectos práticos da disciplina eram relegados. Para esse autor, o ensino de Matemática possui três componentes: a manipulação, as aplicações e a conceituação. A manipulação consiste em "atitudes mentais automáticas" (LIMA, 2007, p. 155) que possibilitam o uso adequado de fórmulas, equações e construções geométricas. As aplicações dizem respeito ao uso da Matemática em situações cotidianas e em outras áreas do conhecimento. Por fim,

> A conceituação compreende a formulação correta e objetiva das definições matemáticas, o enunciado das proposições, a prática do raciocínio dedutivo, a nítida conscientização de que conclusões sempre são provenientes de hipóteses que se admitem, a distinção entre uma afirmação e sua recíproca, o estabelecimento de conexões entre conceitos diversos, bem como a interpretação e a reformulação de ideias e fatos sob diferentes formas e termos. (LIMA, 2007, p. 154).

Lima (2007) defende que o ensino da Matemática deve buscar o equilíbrio entre manipulação, aplicações e conceituação. Segundo o autor, durante o período da Matemática Moderna, dava-se uma ênfase excessiva à conceituação em detrimento da manipulação e das aplicações. Isso fazia com que o ensino de Matemática tivesse pouca objetividade, pois as noções abstratas apresentadas não tinham motivação nem aplicação. Porém, o autor considera que algumas das práticas propostas pelo Movimento da Matemática Moderna são aconselháveis, como

> [...] o uso da linguagem dos conjuntos, que facilita, dá precisão e assegura a generalidade à expressão das ideias matemáticas (desde que usada com moderação) e a ênfase na conceituação adequada dos objetos matemáticos. (LIMA, 2007, p. 167).

Quanto à relação entre professores e alunos, o Movimento da Matemática Moderna não trouxe mudanças significativas. Segundo Fiorentini (2009, p. 14), o ensino continuou centrado na autoridade do professor, enquanto aos alunos cabia reproduzir passivamente a linguagem e raciocínios apresentados pelo docente. Esse autor considera que as propostas da Matemática Moderna, ainda que formuladas para a Educação Básica, pareciam visar à formação de especialistas na disciplina.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais, de 1997, o Movimento da Matemática Moderna aproximou a Matemática escolar da Matemática pura, trazendo um conteúdo que estava fora do alcance dos alunos:

> O ensino passou a ter preocupações excessivas com abstrações internas à própria Matemática, mais voltadas à teoria do que à prática. A linguagem da teoria dos conjuntos, por exemplo, foi introduzida com tal ênfase que a aprendizagem de símbolos e de uma terminologia interminável comprometia o ensino do cálculo, da geometria e das medidas. (BRASIL, 1997, p. 20).

Outros fatores que contribuíram para a rejeição do Movimento da Matemática Moderna foram a inadequação pedagógica e filosófica da proposta (THOM, 1971), a insuficiência de testes para avaliar a qualidade do currículo (KLINE, 1976, p. 132 - 133) e distorções das propostas originais. Essas distorções explicariam alguns dos exageros no uso de termos e símbolos da Teoria dos Conjuntos presentes em livros didáticos (BÚRIGO, 1989, p. 198).

A forma como a Matemática Moderna foi divulgada também pode ter contribuído para seu declínio. A propagação do MMM ocorreu principalmente por meio de livros didáticos, "[...] sem discussão mais profunda de seus princípios ou finalidades junto aos professores" (PIRES, 2008). No Brasil, a liberdade concedida para que cada sistema de ensino elaborasse seus currículos escolares contribuiu para a proliferação de livros didáticos identificados como "modernos" que pouco tinham em comum com as propostas originais do MMM (SOARES, 2001, p. 60).

De acordo com Phillips (2015, p. 127), o argumento de que as práticas propostas pelo Movimento da Matemática Moderna levaram a uma queda no desempenho escolar nos Estados Unidos não é suficientemente fundamentado. No entanto, ainda conforme esse autor, a opinião pública — especialmente dos pais, que muitas vezes relatavam dificuldade em compreender as mudanças nos conteúdos de Matemática estudados por seus filhos — e a resistência por parte dos professores da Educação Básica em reformular suas práticas de ensino influenciaram no esgotamento do MMM. Assim, em pouco mais de uma década após sua inserção nas escolas, a Matemática Moderna ficou indissociada da imagem de uma proposta de ensino mal sucedida.

Assim como sua divulgação e adesão, o abandono do Movimento da Matemática Moderna foi um fenômeno internacional. Em todo o mundo, a partir do fim da década de 1970, buscou-se construir currículos de Matemática mais contextualizados e com o rigor e conceituação mais acessíveis aos estudantes (PIRES, 2008, p. 15). Os Parâmetros Curriculares Nacionais relatam que, nos Estados Unidos, o *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM), apresentou propostas para que o ensino da Matemática fosse integrado a aspectos sociais e culturais, dando foco às habilidades de resolução de problemas. Com o declínio do Movimento da Matemática Moderna, as propostas do NCTM influenciaram a construção de novos currículos em diversos países (BRASIL, 1997, p. 20).

Pires (2008, p. 15) informa que, no Brasil, na década de 1980, as secretarias estaduais e municipais de ensino lideraram reformas curriculares que se contrapunham às propostas do Movimento da Matemática Moderna. Essas reformas refletiam a concepção de que o ensino da Matemática deveria tanto zelar pela formação teórica do estudante quanto colocá-lo em contato com aplicações práticas e com os aspectos sociais da disciplina. Com essas reformas, em vez das estruturas e da organização lógica da Matemática, os currículos passaram a considerar principalmente a relevância social dos conteúdos e a formação integral do aluno (PIRES, 2008, p. 37). Também nessa época, ocorreu o fortalecimento de programas baseados na Etnomatemática, que é caracterizada por associar ao ensino da disciplina aspectos socioculturais e políticos (BRASIL, 1997, p. 20).

O esgotamento da Matemática Moderna resultou na redução do tratamento da Teoria dos Conjuntos na Educação Básica. Segundo Ávila (2010, p. 73), na maioria dos países, esse conteúdo foi praticamente eliminado dos currículos escolares nos anos 1970. Entretanto, no Brasil, a ênfase em conjuntos e outras práticas da Matemática Moderna perduraram por mais tempo, até mesmo no ensino de aritmética nos primeiros anos de escolaridade (ÁVILA, 2010, p. 73).

A redução na abordagem da Teoria dos Conjuntos foi recomendada no documento *Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio*, do ano 2000, que rejeita a ideia de que o estudo sobre conjuntos e suas operações é um requisito para o aprendizado de funções:

> Tradicionalmente o ensino de funções estabelece como pré-requisito o estudo dos números reais e de conjuntos e suas operações, para depois definir relações e a partir daí identificar as funções como particulares relações. Todo esse percurso é, então, abandonado assim que a definição de função é estabelecida, pois para a análise dos diferentes tipos de funções todo o estudo relativo a conjuntos e relações é desnecessário. Assim, o ensino pode ser iniciado diretamente pela noção de função para descrever situações de dependência entre duas grandezas, o que permite o estudo a partir de situações contextualizadas, descritas algébrica e graficamente. Toda a linguagem excessivamente formal que cerca esse tema deve ser relativizada e em parte deixada de lado, juntamente com os estudos sobre funções injetoras, sobrejetoras, compostas e modulares. (BRASIL, 2000, p. 121)

Embora as críticas prevaleçam nas análises referentes ao Movimento Matemática Moderna, é importante compreender o movimento como uma iniciativa que buscava melhorias e renovações em um contexto em que o ensino de Matemática era pouco estudado e debatido. Conforme Búrigo (1989, p. 40), o ensino de Matemática nos anos 1950 era caracterizado pela quase exclusividade de aulas expositivas, prevalência de provas orais, escassez de livros e materiais didáticos, ênfase na memorização e cálculos trabalhosos. Assim, é preciso levar em consideração as consequências positivas do Movimento da Matemática Moderna, como:

> [...] diminuição da ênfase na memorização e prática exaustiva de exercícios repetitivos, uma preocupação maior com os processos de pensamento das crianças, o surgimento de lideranças na área da educação matemática, o contato

> entre profissionais da área da educação matemática e da psicologia e mudanças na concepção dos programas de atualização dos professores no sentido de uma atenção ao trabalho realizado em sala de aula. (D'AMBRóSIO, 1987 apud BÚRIGO, 1989, p. 13).

Além disso, o Movimento da Matemática Moderna contribuiu com iniciativas para tornar as aulas mais atraentes, como o uso de jogos e materiais concretos, expôs a existência de problemas no ensino de Matemática e incentivou o desenvolvimento de pesquisas sobre a didática da disciplina (PIRES, 2008, p. 20).

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os séculos XIX e XX trouxeram uma nova concepção para a Matemática, que se consolidou como uma ciência autônoma, fundamentada logicamente e de natureza abstrata. O desenvolvimento da Teoria dos Conjuntos foi um dos fatores que permitiram a rápida evolução da Matemática ocorrida nesse período. A linguagem e os resultados dessa teoria propiciam a precisão e o rigor necessários para lidar com a complexidade da Matemática Moderna.

A Matemática havia mudado radicalmente, mas o mesmo não havia ocorrido com o currículo da Educação Básica. No início da década de 1960, foram popularizadas as iniciativas que buscavam mudar essa realidade, trazendo para as escolas de Ensino Primário e Secundário a linguagem da Teoria dos Conjuntos e o estudo das estruturas, que anteriormente eram restritos ao Ensino Superior. Apoiadas em uma associação entre as estruturas matemáticas e as teorias da aprendizagem, as reformas do Movimento da Matemática Moderna prometiam tornar o ensino mais eficiente e acessível. Essas propostas foram articuladas por grupos de professores e propagadas principalmente por meio de livros didáticos.

A análise de livros e manuais didáticos confirma o papel de destaque que a Teoria dos Conjuntos desempenhava nas propostas do Movimento da Matemática Moderna. Os autores das obras analisadas neste trabalho empregam o conceito de correspondência biunívoca para trabalhar a capacidade de comparar quantidades e na definição de número natural, enquanto as operações de adição e multiplicação são relacionadas à união de conjuntos disjuntos e produto cartesiano, respectivamente. Além disso, as funções são apresentadas como relações entre conjuntos e os símbolos empregados no estudo dessa teoria são utilizados para expressar as posições relativas entre pontos, retas e planos. Assim, a Teoria dos Conjuntos aparece nas obras analisadas como a base para a definição dos principais conceitos matemáticos estudados na Educação Básica. Ao mesmo tempo, percebe-se que mesmo as definições e os resultados da Teoria dos Conjuntos não utilizados posteriormente eram valorizados, aparecendo no início dos livros e sempre acompanhados de diversos exemplos e ilustrações.

Na década de 1970, as críticas às propostas do Movimento da Matemática Moderna tornaram-se comuns. Alegava-se que o nível de rigor e falta de contextualização não eram adequados à Matemática Escolar. Assim, o formalismo e a ênfase em conjuntos e estruturas passaram a ser desincentivados. No entanto, algumas práticas não deixaram de estar presentes no ensino da Matemática décadas após o declínio do MMM. Em especial, a Teoria dos Conjuntos geralmente ainda é estudada no início do primeiro ano do Ensino Médio, precedendo o ensino de funções. Nessa etapa de escolaridade, o estudo da Teoria dos Conjuntos pode contribuir para uma compreensão mais precisa da Matemática, além de auxiliar na resolução de problemas de Lógica, Análise Combinatória e Probabilidade.

O estudo das propostas e consequências do MMM suscita questões recentes sobre o ensino da Matemática. Como lembra Phillips (2015), o debate acerca do grau de importância atribuída à repetição de procedimentos e à memorização no ensino da Matemática foi renovado devido à popularização das tecnologias da informação. Alguns outros dilemas levantados pela experiência proporcionada pelo Movimento da Matemática Moderna estão presentes no cotidiano de todo professor, que muitas vezes se depara com situações em que o rigor parece se contrapor a um ensino mais intuitivo e significativo da Matemática. Também são atuais as discussões a respeito da lacuna existente entre a Matemática do Ensino Superior e a Matemática Escolar.

Ainda que não seja o objetivo deste trabalho responder às questões mencionadas acima, consideramos que o estudo sobre o MMM pode auxiliar o professor de Matemática na reflexão sobre sua prática, levando-o a uma melhor compreensão dos propósitos e métodos do ensino dessa disciplina que se mostra cada vez mais presente em um cotidiano marcado pela rápida evolução da tecnologia.

REFERÊNCIAS

ABE, J. M. A Noção de Estrutura em Matemática e Física. **Estudos Avançados**, v. 3, n. 6, p. 113–125, 1989. Disponível em: <https://www.scielo.br/j/ea/a/g9rmRbxHb3WTZ7vyCK8ssHR>. Acesso em: 26 mai. 2021.

ALVES, A. M. M.; SILVEIRA, D. N. Uma Leitura Sobre as Origens do Movimento da Matemática Moderna (MMM) no Brasil. **Revista Tópicos Educacionais**, Recife, v. 23, n. 1, p. 76–91, jan/jun 2017. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/190769>. Acesso em: 21 dez. 2020.

ARRUDA, J. P.; FLORES, C. R. A Linguagem dos Conjuntos no Ensino de Matemática: Um Estudo de Caso em uma Escola Primária. **Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, v. 23, n. 35B, p. 405 – 423, abril 2010. Disponível em: <https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/3759>. Acesso em: 30 mar. 2021.

ÁVILA, G. **Várias Faces da Matemática**: Tópicos para Licenciatura e Leitura Geral. 2. ed. São Paulo: Editora Blucher, 2010. 203 p.

BARONI, R. L. S.; OTERO-GARCIA, S. C. **Aspectos da História da Análise Matemática de Cauchy a Lebesgue**. São Paulo: Cultura Acadêmica, 2014. Disponível em: <https://repositorio.unesp.br/handle/11449/126211>. Acesso em: 11 jul. 2021.

BOURBAKI, N. **Theory of Sets**. Berlin: Springer, 2004. 414 p.

BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. **A History of Mathematics**. 3. ed. Hoboken: John Wiley & Sons, 2011.

BRASIL. **Lei Nº 4.024, de 20 de dezembro de 1961.** Fixa as Diretrizes e Bases da Educação Nacional: Brasília, DF, 1961. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/l4024.htm>.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. Brasília, DF: Ministério da Educação, 1997. 142 p. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf>. Acesso em: 21 mai. 2021.

BRASIL. **Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais**: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Ensino Médio. Brasília, DF: Ministério da Educação, 2000. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/conaes-comissao-nacional-de-avaliacao-da-educacao-superior/195-secretarias-112877938/seb-educacao-basica-2007048997/12598-publicacoes-sp-265002211>. Acesso em: 12 fev. 2021.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. [s.n.], 2018. Disponível em: <http://download.basenacionalcomum.mec.gov.br/>. Acesso em: 26 dez. 2020.

BÚRIGO, E. Z. **Movimento da Matemática Moderna no Brasil**: Estudo da Ação e do Pensamento de Educadores Matemáticos nos Anos 60. 293 p. Dissertação (Mestrado em Educação) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 1989. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/163050>. Acesso em: 21 dez. 2020.

BÚRIGO, E. Z. O Movimento da Matemática Moderna no Brasil: Encontro de Certezas e Ambiguidades. **Revista Diálogo Educacional**, [S.l.], v. 6, n. 18, p. 35–47, jul 2006. Disponível em: <https://periodicos.pucpr.br/index.php/dialogoeducacional/article/view/3226>. Acesso em: 26 jun. 2021.

BÚRIGO, E. Z. Tradições Modernas: Reconfigurações da Matemática Escolar nos Anos 1960. **Bolema**, v. 23, n. 35B, p. 277–300, abril 2010. Disponível em: <https://lume.ufrgs.br/handle/10183/180062>. Acesso em: 04 jun. 2021.

BURTON, D. M. **The History of Mathematics**: An Introduction. 7. ed. [S.l.]: McGraw-Hill, 2011.

CARTAN, H. Nicolas Bourbaki and Contemporary Mathematics. **The Mathematical Intelligencer**, Mathematical Association of America, v. 2, p. 175–180, 1980. Disponível em: <https://link.springer.com/article/10.1007/BF03028596#>. Acesso em: 26 mai. 2020.

CORRY, L. Nicolas Bourbaki and the Concept of Mathematical Structure. **Synthese**, Springer, v. 92, n. 3, p. 315–348, 1992. Disponível em: <https://link.springer.com/article/10.1007/BF00414286>. Acesso em: 20 jan. 2021.

DAHM, F. **Blocos Lógicos no Ensino de Matemática**: Eperiências de Professores nos Anos 1970. 137 p. Monografia (Graduação em Licenciatura em Matemática) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2012. Disponível em: <https://www.lume.ufrgs.br/handle/10183/66872>. Acesso em: 30 mar. 2021.

DIEUDONNÉ, J. **A Formação da Matemática Contemporânea**. 1. ed. Lisboa: Publicações Dom Quixote, 1990. 292 p.

DOMINGUES, H. H.; IEZZI, G. **Álgebra Moderna**. 4. ed. São Paulo: Atual Editora, 2003.

FERREIRA, T.; CARVALHO, H. **Curso Completo de Matemática Moderna para o Ensino Primário**. 1. ed. São Paulo: Editora Renovação, 196–? v. 1. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/158565>. Acesso em: 22 dez. 2020.

FERREIRA, T.; CARVALHO, H. **Curso Completo de Matemática Moderna para o Ensino Primário**. 1. ed. São Paulo: Editora Renovação, 196–? v. 2. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/158565>. Acesso em: 22 dez. 2020.

FIORENTINI, D. Alguns Modos de Ver e Conceber o Ensino da Matemática no Brasil. **Zetetike**, v. 3, n. 1, out. 2009. Disponível em: <https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646877>. Acesso em: 29 fev. 2020.

GHEMAT. **Repositório de Conteúdo Digital (RCD)**. 2021. Disponível em: <https://www.ghemat-brasil.com/giving>. Acesso em: 21 jul. 2021.

GHEMAT. **Sobre GHEMAT Brasil**. 2021. Disponível em: <https://www.ghemat-brasil.com/about-us>. Acesso em: 26 jun. 2021.

KLINE, M. **O Fracasso da Matemática Moderna**. 1. ed. São Paulo: Ibrasa, 1976. 211 p.

LAMPARELLI, L. C. Matemática: uma Escolha Anunciada de Estudos e Vida. **Revista de História da Educação Matemática**, v. 4, n. 2, p. 263–290, out 2018. Disponível em: <http://histemat.com.br/index.php/HISTEMAT/article/view/226>. Acesso em: 26 dez. 2020.

LIMA, E. L. **Matemática e Ensino**. 3. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2007. 250 p.

MACEDO, R. S. **Um Estudo da Teoria dos Conjuntos no Movimento da Matemática Moderna**. 115 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) — Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2008. Disponível em: <https://sapientia.pucsp.br/handle/handle/11342>. Acesso em: 21 fev. 2021.

MONTEIRO, J.; SANGIORGI, O.; WATANABE, R. **Matemática**: Curso Moderno para o Segundo Ciclo. 2. ed. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1970. v. 2. 278 p.

PAPY, G. Métodos e Técnicas de Ensinar Conceitos Novos de Matemática no Início do Curso Secundário. In: **Anais do V Congresso Brasileiro do Ensino da Matemática**. [s.n.], 1966. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/196521>. Acesso em: 21 jul. 2021.

PHILLIPS, C. J. In Accordance with a “More Majestic Order”: The New Math and the Nature of Mathematics at Midcentury. **Isis**, The University of Chicago Press, The History of Science Society, v. 105, n. 3, p. 540–563, set 2014. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/10.1086/678170>. Acesso em: 26 mai. 2021.

PHILLIPS, C. J. **The New Math: A Political History**. 1. ed. Chicago: University of Chicago Press, 2015.

PINTER, C. C. **A Book of Set Theory**. 1. ed. Massachusetts: Dover Publications, 2014.

PINTER, C. C. **A Book of Abstract Algebra**. 2. ed. Nova York: Dover Publications, 2015.

PINTO, N. B. Marcas Históricas da Matemática Moderna no Brasil. **Revista Diálogo Educacional**, v. 5, n. 16, p. 25–38, 2005. Disponível em: <https://periodicos.pucpr.br/index.php/dialogoeducacional/article/view/7916>. Acesso em: 22 dez. 2020.

PIRES, C. M. C. Educação Matemática e sua Influência no Processo de Organização e Desenvolvimento Curricular no Brasil. **Boletim de Educação Matemática**, v. 21, n. 29, p. 13–42, 2008. Disponível em: <https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/1715>. Acesso em: 30 mar. 2021.

SANGIORGI, O. **Matemática**: Curso Moderno para os Ginásios. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1967. v. 4.

SANGIORGI, O. **Matemática**: Curso Moderno para os Ginásios. 10. ed. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1968. v. 1. 371 p.

SOARES, F. **Movimento da Matemática Moderna no Brasil**: Avanço ou Retrocesso? 192 p. Dissertação (Mestrado em Matemática) — Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 2001. Disponível em: <https://app.uff.br/riuff/handle/1/2191>. Acesso em: 30 mar. 2021.

STONE, M. The Revolution in Mathematics. **The American Mathematical Monthly**, Mathematical Association of America, v. 68, n. 8, p. 715–734, out 1961. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/2311976>. Acesso em: 26 mai. 2020.

THOM, R. "Modern" Mathematics: An Educational and Philosophic Error? A distinguished French Mathematician Takes Issue With Recent Curricular Innovations in His Field. **American Scientist**, Sigma Xi, The Scientific Research Society, v. 59, n. 6, p. 695–699, 1971. Disponível em: <https://www.jstor.org/stable/27829916>. Acesso em: 20 mar. 2021.

VALENTE, W. R. A Matemática Moderna nas Escolas do Brasil: Um tema para estudos históricos comparativos. **Revista Diálogo Educacional**, v. 6, n. 18, maio/ago 2006. Disponível em: <https://periodicos.pucpr.br/index.php/dialogoeducacional/article/view/3214>. Acesso em: 26 jun. 2021.

VALENTE, W. R. Osvaldo Sangiorgi e o Movimento da Matemática Moderna no Brasil. **Revista Diálogo Educacional**, Curitiba, v. 8, n. 25, p. 583–613, 2008. Disponível em: <https://periodicos.pucpr.br/index.php/dialogoeducacional/article/view/3724/3640>. Acesso em: 08 fev. 2021.

APÊNDICE A – Conjuntos

Neste apêndice, serão apresentados os principais tópicos da Teoria dos Conjuntos que foram incorporados à Educação Básica por iniciativa do Movimento da Matemática Moderna. Tomamos como referência Domingues e Iezzi (2003) e Pinter (2014) para a escrita das definições e demonstração das proposições. Entretanto, a seleção dos conteúdos foi feita com base nos livros didáticos *Mátemática: Curso Moderno para os Ginásios*, Volume 1, de Sangiorgi (1968), e *Mátemática: Curso Moderno para Segundo Ciclo*, Volume 1, de Monteiro, Sangiorgi e Watanabe (1970).

Em geral, os conjuntos são representados por letras maiúsculas e seus elementos são representados por letras minúsculas. Se a é um elemento do conjunto A, dizemos que a pertence a A, denotando $a \in A$. Caso contrário, dizemos que a não pertence a A e indicamos $a \notin A$. Um conjunto pode ser representado das seguintes formas:

a) pela descrição de seus elementos. Exemplos:
   - conjunto dos números naturais pares;
   - conjunto dos países da América do Sul;

b) por uma propriedade que identifica seus elementos, utilizando chaves e a barra vertical, que significa "tal que". Exemplos:
   - $A = \{x \mid x \text{ é um divisor de } 72\}$;
   - $B = \{x \mid x \text{ é natural e } x > 5\}$;

c) pela listagem de seus elementos, colocando-os entre chaves. Exemplos:
   - $C = \{2,\ 15,\ 33,\ 41\}$;
   - $D = \{a,\ e,\ i,\ o,\ u\}$.

Podemos nos referir ao número de elementos de um conjunto A como *cardinalidade de* A, denotando $n(A)$. Por exemplo, se $A = \{1,\ 3,\ 5\}$, então $n(A) = 3$.

Alguns conjuntos especiais

Na Teoria dos Conjuntos, admite-se a existência de conjuntos cujos elementos são outros conjuntos, como é o caso dos exemplos 1 e 2.

Exemplo 1 *O conjunto* $A = \{\{0, 2\}, \{a, b, c\}\}$ *tem como elementos os conjuntos* $\{0, 2\}$ *e* $\{a, b, c\}$.

Exemplo 2 *Um conjunto formado por retas quaisquer é um conjunto cujos elementos são outros conjuntos, uma vez que podemos considerar que uma reta é um conjunto de pontos.*

A Definição 3, a seguir, trata do conjunto vazio. Os exemplos 4 e 5 decorrem dessa definição.

Definição 3 (Conjunto vazio) *O conjunto vazio, denotado por* $\varnothing$, *é aquele ao qual nenhum objeto pertence.*

Exemplo 4 *Na Geometria Euclidiana, se* A *é o conjunto dos triângulos cuja soma dos ângulos internos não é 180°, então* $A = \varnothing$.

Exemplo 5 *Se* $B = \{x \mid x < 0 \text{ e } x \in \mathbb{N}\}$, *então* $B = \varnothing$, *uma vez que nenhum número menor que zero pertence ao conjunto* $\mathbb{N}$ *dos números naturais.*

A seguir, apresentamos exemplos de conjunto unitário (com um único elemento) e conjunto infinito (com infinitos elementos).

Exemplo 6 *O conjunto das capitais do Paraná, representado como* $\{Curitiba\}$, *é um conjunto unitário (SANGIORGI, 1968, p. 7).*

Exemplo 7 *O conjunto dos números naturais maiores que 50, que podemos representar como* $\{51, 52, 53, 54, 55, 56, ...\}$, *é um conjunto infinito (SANGIORGI, 1968, p. 7).*

Igualdade entre conjuntos

A Definição 8 estabelece quais são as condições para que possamos afirmar que dois conjuntos são iguais.

Definição 8 (Igualdade entre conjuntos) *Dizemos que dois conjuntos* A *e* B *são iguais, denotando* $A = B$, *se todo elemento de* A *for elemento de* B *e todo elemento de* B *for elemento de* A.

Se A e B forem conjuntos diferentes, denotamos $A \neq B$. Os exemplos 9 a 11, a seguir, decorrem da definição de igualdade entre conjuntos.

Exemplo 9 *Dados os conjuntos* $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 \leq x \leq 4\}$ *e* $B = \{2,\ 3,\ 4\}$*, temos* $A = B$*.*

Exemplo 10 *Se C =* $\{$*Espírito Santo, Minas Gerais, Rio de Janeiro, São Paulo*$\}$ *e D é o conjunto dos estados da Região Sudeste do Brasil, então* $C = D$*.*

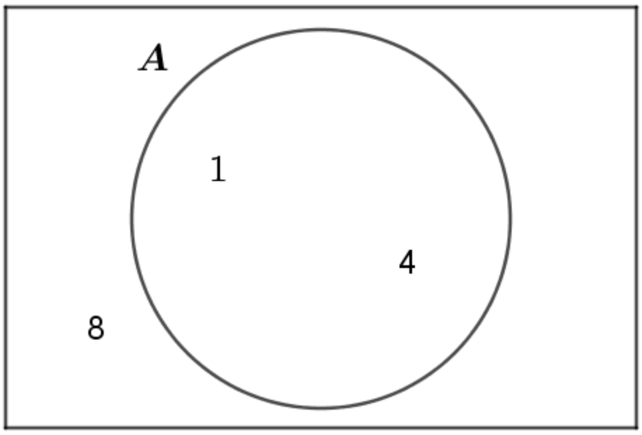
Exemplo 11 *Sendo* $\mathbb{R}$ *o conjunto do números reais e* $\mathbb{Q}$ *o conjunto dos números racionais, temos* $\mathbb{R} \neq \mathbb{Q}$*, pois, por exemplo,* $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$*, mas* $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ *(MONTEIRO; SANGIORGI; WATANABE, 1970, p. 10).*

Diagramas de Venn

As relações entre conjuntos podem ser representadas graficamente por meio de um recurso conhecido como diagrama de Venn, em que os conjuntos são representados por curvas fechadas. Neste trabalho, indicaremos os conjuntos por círculos.

Em um diagrama de Venn, para indicar que um elemento pertence a um dado conjunto, iremos situá-lo na região interior ao círculo que representa esse conjunto. Na Figura 1, percebe-se que $1 \in A$ e $4 \in A$, mas $8 \notin A$.

Figura 1 – Representação de um conjunto por meio de diagrama de Venn.



Fonte: Da autora (2021).

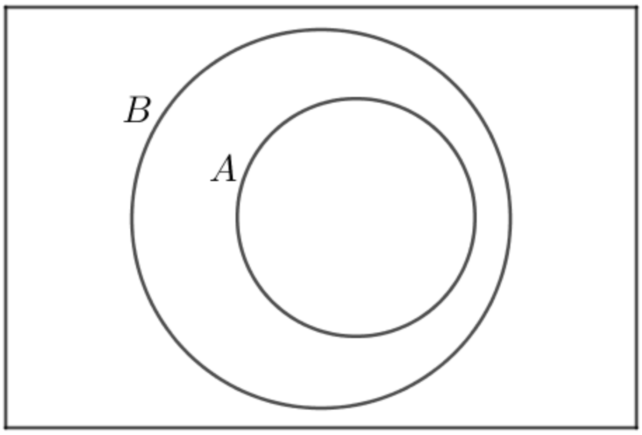
Subconjuntos

A relação de inclusão é definida a seguir.

Definição 12 (Inclusão entre conjuntos) *Se A e B são conjuntos tais que todo elemento de A é também elemento de B, dizemos que A está contido em B ou que A é subconjunto de B, denotando* $A \subset B$*.*

Se A não for subconjunto de B, denotamos $A \not\subset B$. De forma equivalente a $A \subset B$, podemos dizer que B contém A, escrevendo $B \supset A$. Para representar que A é subconjunto de B por meio de diagramas de Venn, desenhamos o círculo que representa o conjunto A no interior do círculo que representa a conjunto B, como pode ser observado na Figura 2.

Figura 2 – Diagrama de Venn representando uma relação de inclusão entre conjuntos.



Fonte: Da autora (2021).

Os exemplos 13 e 14, bem como a Proposição 15, envolvem a relação de inclusão entre conjuntos.

Exemplo 13 *Se* $A = \{3,\ 4,\ 5,\ 7\}$ *e* $B = \{4,\ 7\}$*, então* $B \subset A$*.*

Exemplo 14 *Sendo* $\mathbb{N}$ *o conjunto dos números naturais e* $\mathbb{Z}$ *o conjunto dos números inteiros, é verdadeiro que* $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$*, pois todo número natural é também um número inteiro.*

Proposição 15 *Para todo conjunto A e para o conjunto vazio* $\varnothing$*, temos que* $\varnothing \subset A$*.*

Demonstração: Caso quiséssemos provar que $\varnothing \not\subset A$, deveríamos mostrar que existe um objeto x tal que $x \in \varnothing$ e $x \notin A$. Entretanto, isso seria absurdo, uma vez que não pode ocorrer $x \in \varnothing$.

■

Dados os conjuntos A, B e C, mostraremos a seguir que a relação de inclusão possui as propriedades reflexiva, transitiva e antissimétrica. A propriedade antissimétrica é muito útil para provar que dois conjuntos são iguais.

Proposição 16 (Propriedade reflexiva da inclusão) $A \subset A$.

Demonstração: De fato, todo elemento de A pertence a A. Portanto, pela Definição 12, da relação de inclusão entre conjuntos, temos que $A \subset A$.

■

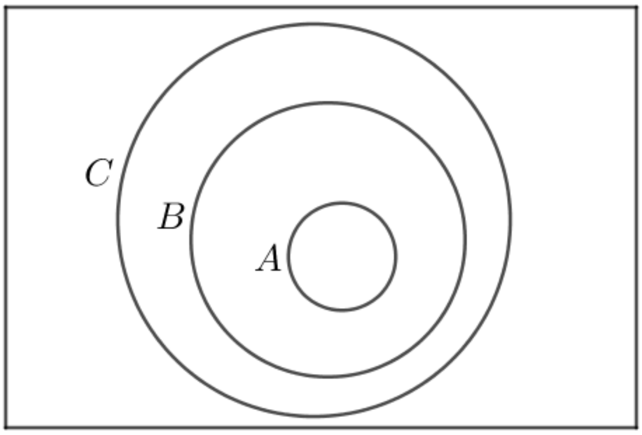
Proposição 17 (Propriedade transitiva da inclusão) *Se $A \subset B$ e $B \subset C$, então $A \subset C$.*

Demonstração: Suponhamos que $A \subset B$ e $B \subset C$. Seja x um objeto qualquer tal que $x \in A$. Assim, $x \in B$, pois $A \subset B$. Além disso, como $B \subset C$, concluímos que $x \in C$. Isso nos mostra que, se um objeto qualquer pertence a A, então esse objeto também pertence a C. Portanto, pela definição de inclusão entre conjuntos, temos que $A \subset C$.

■

A Figura 3 é uma representação na forma de diagrama de Venn para a Proposição 17. Nota-se que o círculo que representa o conjunto A está no interior dos círculos que representam os conjuntos B e C.

Figura 3 – Diagrama de Venn representando a propriedade transitiva da inclusão.



Fonte: Da autora (2021).

Proposição 18 (Propriedade antissimétrica da inclusão) *Se $A \subset B$ e $B \subset A$, então $A = B$.*

Demonstração: Se $A \subset B$, então todo elemento de A é também elemento de B. Se $B \subset A$, então todo elemento de B é também elemento de A. Assim, a Definição 8, de igualdade entre conjuntos, garante que $A = B$.

■

A Definição 19, abaixo, também segue da relação de inclusão entre conjuntos.

Definição 19 (Conjunto das partes) *Dado um conjunto A, o conjunto das partes de A, representado por $\mathscr{P}(A)$, é o conjunto cujos elementos são todos os subconjuntos de A.*

Dessa forma, $\mathscr{P}(A) = \{B \mid B \text{ é } subconjunto\ de\ A\}$ é uma representação para o conjunto das partes de A. O Exemplo 20, o Exemplo 21 e a Proposição 22 são consequências da definição de conjuntos das partes.

Exemplo 20 *Se $A = \{a,\ b\}$, então $\mathscr{P}(A) = \{\varnothing,\ \{a\},\ \{b\},\ \{a,\ b\}\}$.*

Exemplo 21 *$\mathscr{P}(\varnothing) = \{\varnothing\}$, pois o único subconjunto do conjunto vazio é o próprio conjunto vazio.*

Proposição 22 *Se A é um conjunto com n elementos, o número de elementos de $\mathscr{P}(A)$ é 2^n.*

Demonstração: Para formar um subconjunto de A devemos decidir, para cada um dos n elementos de A, entre duas possibilidades: pertencer, ou não, a esse subconjunto. Dessa forma, pelo Princípio Fundamental da Contagem, podemos formar 2^n subconjuntos de A. Portanto, o número de elementos de $\mathscr{P}(A)$ é 2^n.

■

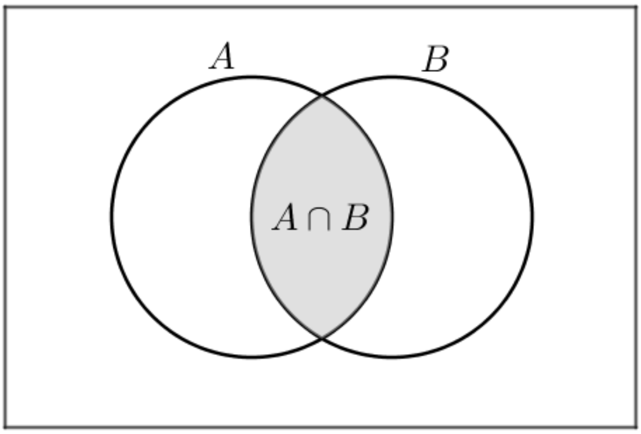
Interseção entre conjuntos

A seguir, apresentamos a definição da relação de interseção entre conjuntos.

Definição 23 (Interseção de conjuntos) *A interseção dos conjuntos A e B é o conjunto denotado por $A \cap B$, cujos elementos pertencem simultaneamente ao conjunto A e ao conjunto B.*

Utilizando a notação da Teoria dos Conjuntos, escrevemos $A \cap B = \{x \mid x \in A \ e\ x \in B\}$. Quando $A \cap B = \varnothing$, dizemos que A e B são disjuntos. A Figura 4 mostra uma representação por diagrama de Venn para a interseção dos conjuntos A e B, que corresponde à região comum aos círculos que representam esses conjuntos.

Figura 4 – Representação da interseção entre conjuntos.



Fonte: Da autora (2021).

Os exemplos 24 a 26, abaixo, decorrem da definição de interseção de conjuntos.

Exemplo 24 *Dados os conjuntos* $A = \{2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ *e* $B = \{4,\ 5,\ 6\}$*, temos* $A \cap B = \{4,\ 5\}$.

Exemplo 25 *Considerando* $C = \{c \mid c \text{ é um número par}\}$ *e* $D = \{d \mid d \text{ é um número primo}\}$*, temos* $C \cap D = \{2\}$*, pois o número 2 é o único número primo par.*

Exemplo 26 *Se P é o conjunto dos números pares e Q é conjunto dos números ímpares, então* $P \cap Q = \varnothing$*. Assim, P e Q são conjuntos disjuntos.*

A seguir, considerando que A, B e C são conjuntos quaisquer, apresentaremos algumas propriedades decorrentes da definição da relação de interseção entre conjuntos.

Proposição 27 $(A \cap B) \subset A$ *e* $(A \cap B) \subset B$.

Demonstração: Se x é um objeto qualquer tal que $x \in A \cap B$, então $x \in A$ e $x \in B$. Assim, $x \in A \cap B$ implica em $x \in A$. Portanto, pela definição de inclusão entre conjuntos, temos que $(A \cap B) \subset A$. A demonstração de que $(A \cap B) \subset B$ é análoga.

■

Proposição 28 $A \cap \varnothing = \varnothing$.

Demonstração: Os elementos de $A \cap \varnothing$ são aqueles que pertencem simultaneamente aos conjuntos A e $\varnothing$. Como nenhum objeto pertence a $\varnothing$, concluímos que $A \cap \varnothing = \varnothing$.

■

Proposição 29 (Idempotência da interseção) $A \cap A = A$.

Demonstração: Considerando a propriedade antissimétrica da relação de inclusão (Proposição 18), para provar que $A \cap A = A$, devemos mostrar que $(A \cap A) \subset A$ e $A \subset (A \cap A)$.

Seja x um objeto qualquer tal que $x \in A$. Assim, $x \in A$ e $x \in A$ são afirmações verdadeiras. Logo, $x \in A \cap A$, o que mostra que pertencer a A implica em pertencer a $A \cap A$. Assim, $A \subset (A \cap A)$.

De forma análoga, podemos provar que $(A \cap A) \subset A$. Como $(A \cap A) \subset A$ e $A \subset (A \cap A)$, concluímos que $A \cap A = A$.

■

Proposição 30 (Associatividade da interseção) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

Demonstração: Consideremos qualquer objeto x tal que $x \in A \cap (B \cap C)$. Pela definição de interseção entre conjuntos, temos que $x \in A$ e $x \in B \cap C$. Logo $x \in A$, $x \in B$ e $x \in C$. Assim, $x \in A \cap B$ e $x \in C$. Então, temos que $x \in (A \cap B) \cap C$. Portanto, $(A \cap (B \cap C)) \subset ((A \cap B) \cap C)$.

De forma análoga, podemos mostrar que $((A \cap B) \cap C) \subset (A \cap (B \cap C))$. Dessa forma, como $(A \cap (B \cap C)) \subset ((A \cap B) \cap C)$ e $((A \cap B) \cap C) \subset (A(B \cap C))$, concluímos que $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

■

Proposição 31 (Comutatividade da interseção) $A \cap B = B \cap A$.

Demonstração: Consideremos um objeto x qualquer tal que $x \in A \cap B$. Pela definição de interseção entre conjuntos, temos $x \in A$ e $x \in B$, o que equivale a $x \in B$ e $x \in A$. Logo, $x \in B \cap A$. Portanto, $(A \cap B) \subset (B \cap A)$. De forma análoga, podemos mostrar também que $(B \cap A) \subset (A \cap B)$ e concluir que $A \cap B = B \cap A$.

■

Proposição 32 *Se $A \subset B$, então $A \cap B = A$.*

Demonstração: Suponhamos que $A \subset B$. Se x é um objeto qualquer tal que $x \in A \cap B$, então $x \in A$ e $x \in B$. Em particular, temos que $x \in A$, o que mostra que $(A \cap B) \subset A$.

Além disso, se $x \in A$, então temos que $x \in B$, pois $A \subset B$. Assim, como $x \in A$ e $x \in B$, temos que $x \in A \cap B$. Portanto, $A \subset (A \cap B)$. Como $(A \cap B) \subset A$ e $A \subset (A \cap B)$, concluímos que $A \cap B = A$.

■

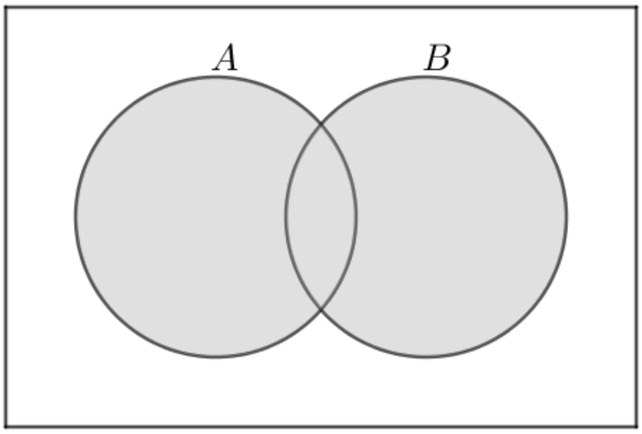
União de conjuntos

Apresentamos a seguir a definição da relação de união entre conjuntos. A união entre conjuntos disjuntos foi utilizada por Sangiorgi (1968), em seu livro *Mátemática: Curso Moderno para os Ginásios*, Volume 1, para apresentar uma definição para a adição de números naturais.

Definição 33 (União de conjuntos) *A união dos conjuntos A e B é o conjunto denotado por $A \cup B$, cujos elementos pertencem ao conjunto A ou ao conjunto B.*

Em linguagem simbólica, escrevemos $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$. Na Figura 5, temos uma representação para a união dos conjuntos A e B, que corresponde à região interna aos dois círculos.

Figura 5 – Representação da união de conjuntos por meio de um diagrama de Venn.



Fonte: Da autora (2021).

Os exemplos a seguir são aplicações da definição de união entre conjuntos.

Exemplo 34 *Se* $A = \{1,\ 2,\ 3\}$ *e* $B = \{2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, *então* $A \cup B = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$.

Exemplo 35 *Se* $A = \{a,\ b,\ c\}$ *e* $B = \{d,\ e\}$, *então* $A \cup B = \{a,\ b,\ c,\ d,\ e\}$.

Exemplo 36 *Dados* $C = \{1,\ 10,\ 100,\ 1000\}$ *e* $D = \varnothing$, *temos* $C \cup D = \{1,\ 10,\ 100,\ 1000\}$.

Dados os conjuntos A, B, C e D, mostraremos a validade de algumas proposições que envolvem a relação de união de conjuntos.

Proposição 37 (Idempotência da união) $A \cup A = A$.

Demonstração: Se x é um objeto qualquer tal que $x \in A \cup A$, então, pela definição de união entre conjuntos, temos que $x \in A$ ou $x \in A$. Assim, como é verdadeiro que $x \in A$, temos que $(A \cup A) \subset A$. De forma análoga, podemos provar que $A \subset (A \cup A)$. Portanto, pela propriedade antissimétrica da inclusão (Proposição 18), concluímos que $A \cup A = A$.

■

Proposição 38 (Associatividade da união) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.

Demonstração: Se x é um objeto qualquer tal que $x \in A \cup (B \cup C)$, então $x \in A$ ou $x \in B \cup C$. Assim, $x \in A$, $x \in B$ ou $x \in C$. Logo, $x \in A \cup B$ ou $x \in C$. Portanto, $x \in (A \cup B) \cup C$, o que mostra que $(A \cup (B \cup C)) \subset ((A \cup B) \cup C)$. De forma análoga, podemos provar que $((A \cup B) \cup C) \subset (A \cup (B \cup C))$ e, assim, concluir que $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.

■

Proposição 39 (Comutatividade da união) $A \cup B = B \cup A$.

Demonstração: Consideremos um objeto qualquer x tal que $x \in A \cup B$. Pela definição de união entre conjuntos, temos que $x \in A$ ou $x \in B$, o que equivale a $x \in B$ ou $x \in A$. Logo, $x \in B \cup A$. Assim, $(A \cup B) \subset (B \cup A)$. Da mesma forma, podemos provar que $(B \cup A) \subset (A \cup B)$. Portanto, $A \cup B = B \cup A$.

■

Proposição 40 (Distributiva da união com relação à interseção) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Demonstração: Para demonstrar essa proposição, devemos provar que $(A \cup (B \cap C)) \subset ((A \cup B) \cap (A \cup C))$ e $((A \cup B) \cap (A \cup C)) \subset (A \cup (B \cap C))$. Para mostrar que $(A \cup (B \cap C)) \subset ((A \cup B) \cap (A \cup C))$, consideremos qualquer objeto x tal que $x \in A \cup (B \cap C)$. Então, pela definição de união entre conjuntos, temos que $x \in A$ ou $x \in (B \cap C)$ e, assim, podemos considerar os dois casos a seguir:

a) se $x \in A$, então $x \in A \cup B$ e $x \in A \cup C$, pois A é subconjunto de $A \cup B$ e $A \cup C$;

b) se $x \in B \cap C$, então $x \in B$ e $x \in C$ e , assim, $x \in A \cup B$ e $x \in A \cup C$, pois B é subconjunto de $A \cup B$ e C é subconjunto de $A \cup C$.

Assim, concluímos que, se $x \in A \cup (B \cap C)$, então $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Portanto, $(A \cup (B \cap C)) \subset ((A \cup B) \cap (A \cup C))$.

Para provar que $((A \cup B) \cap (A \cup C)) \subset (A \cup (B \cap C))$, consideremos x tal que $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Da definição de interseção entre conjuntos, segue que $x \in A \cup B$ e $x \in A \cup C$. Assim, teremos dois casos a considerar:

a) se $x \in A$, então $x \in A \cup (B \cap C)$, pois A é subconjunto de $A \cup (B \cap C)$;

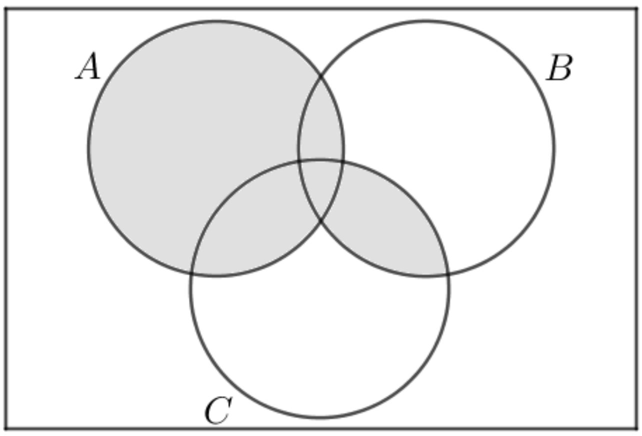
b) se $x \notin A$, então segue de $x \in A \cup B$ que $x \in B$ e segue de $x \in A \cup C$ que $x \in C$, logo $x \in B \cap C$ e, assim, $x \in A \cup (B \cap C)$.

Dessa forma, em todo caso, $x \in A \cup (B \cap C)$, o que mostra que $((A \cup B) \cap (A \cup C)) \subset (A \cup (B \cap C))$. Como provamos que $(A \cup (B \cap C)) \subset ((A \cup B) \cap (A \cup C))$ e $((A \cup B) \cap (A \cup C)) \subset (A \cup (B \cap C))$, concluímos que $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

$\blacksquare$

A Proposição 40 está representada na Figura 6, em que é possível observar que a região que corresponde a $A \cup (B \cap C)$ também corresponde a $(A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Figura 6 – Representação para a propriedade distributiva da união com relação à interseção.



Fonte: Da autora (2021).

Proposição 41 (Distributiva da interseção com relação à união) $A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$.

Demonstração: Para provar essa proposição, devemos mostrar que $(A\cap(B\cup C)) \subset ((A\cap B)\cup(A\cap C))$ e $((A\cap B)\cup(A\cap C)) \subset (A\cap(B\cup C))$. Para provar que $(A\cap(B\cup C)) \subset ((A\cap B)\cup(A\cap C))$, consideremos um objeto x tal que $x\in A\cap(B\cup C)$. Da definição de interseção entre conjuntos, segue que $x\in A$ e $x\in B\cup C$. A partir desse resultado, podemos considerar os seguintes casos:

a) se $x\in B$, então $x\in A$ e $x\in B$, logo $x\in A\cap B$;

b) como $x\in B\cup C$, se $x\notin B$, então $x\in C$ e, como $x\in A$, segue que $x\in A\cap C$.

Assim, concluímos que $x\in A\cap B$ ou $x\in A\cap C$, ou seja, $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$. Portanto, $(A\cap(B\cup C)) \subset ((A\cap B)\cup(A\cap C))$.

Resta provar que $((A\cap B)\cup(A\cap C)) \subset (A\cap(B\cup C))$. Se x é um objeto tal que $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$, então $x\in A\cap B$ ou $x\in A\cap C$. Assim, temos duas possibilidades:

a) se $x\in A\cap B$, então $x\in A$ e $x\in B$, logo $x\in A$ e $x\in B\cup C$, pois B é subconjunto de $B\cup C$;

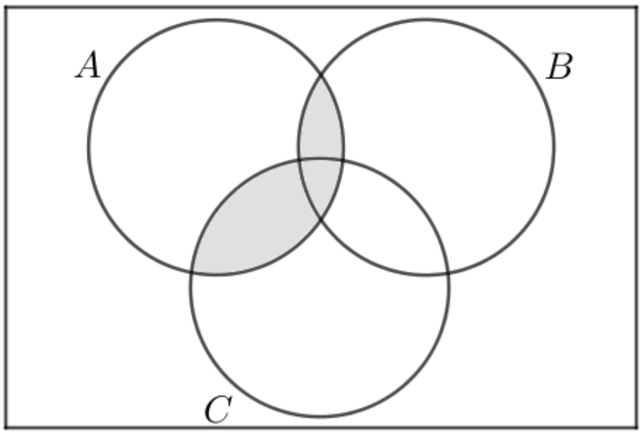
b) se $x\in A\cap C$, então $x\in A$ e $x\in C$, logo $x\in A$ e $x\in B\cup C$, uma vez que C está contido em $x\in B\cup C$.

Dessa forma, temos em todos os casos que $x\in A$ e $x\in B\cup C$, ou seja, $x\in A\cap(B\cup C)$. Assim, $(A\cap B)\cup(A\cap C)\subset(A\cap(B\cup C))$. Como provamos que $(A\cap(B\cup C))\subset((A\cap B)\cup(A\cap C))$ e $(A\cap B)\cup(A\cap C)\subset A\cap(B\cup C)$, concluímos que $A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$.

$\blacksquare$

A Figura 7 representa a Proposição 41. Observa-se que tanto $A\cap(B\cup C)$ quanto $(A\cap B)\cup(A\cap C)$ correspondem à região em cinza.

Figura 7 – Representação para a propriedade distributiva da interseção com relação à união.



Fonte: Da autora (2021).

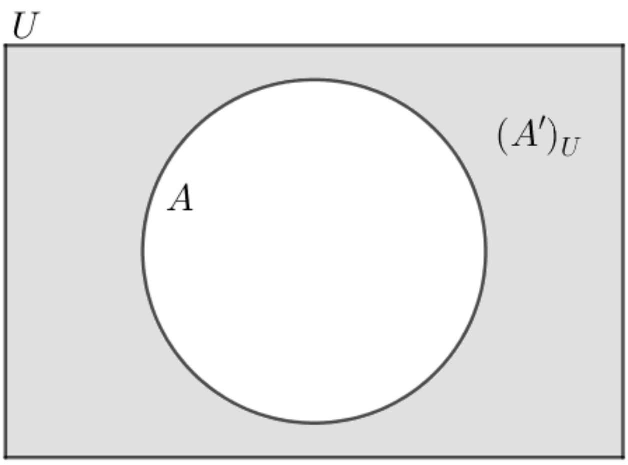
Complementar

Definição 42 (Complementar) *Dados os conjuntos U e A, tais que $A \subset U$, o complementar de A em relação a U é o conjunto $(A')_U$ dos objetos que pertencem a U, mas não pertencem a A.*

Na notação da Teoria dos Conjuntos, temos $(A')_U = \{x \in U \mid x \notin A\}$. O conjunto U, utilizado na definição de complementar, é denominado *conjunto universo* e seus elementos são todos os objetos que devem ser considerados em cada situação. Por exemplo, no Cálculo, o conjunto dos números reais é tomado como conjunto universo. Quando não há dúvidas sobre qual é o conjunto universo U a ser levado em consideração, o complementar de um conjunto A em relação a U pode ser denotado simplesmente como A'.

Na Figura 8, o complementar do conjunto A corresponde à região exterior ao círculo e o conjunto universo é representado por toda a região interior ao retângulo.

Figura 8 – Representação do complementar de um conjunto por meio de um diagrama de Venn.



Fonte: Da autora (2021).

Exemplo 43 *Se* $X = \{0,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8\}$ *e* $Y = \{2,\ 6\}$*, então* $(Y')_X = \{0,\ 4,\ 8\}$

Exemplo 44 *O complementar de* $\mathbb{Q}$*, o conjunto dos números racionais, em relação a* $\mathbb{R}$*, o conjunto dos números reais, é o conjunto* $\mathbb{I}$*, dos números irracionais.*

Considerando o conjunto U e seus subconjuntos A e B, apresentaremos a seguir algumas propriedades envolvendo a definição de complementar de um conjunto.

Proposição 45 $(U')_U = \varnothing$.

Demonstração: Pela definição de complementar de um conjunto, os elementos de $(U')_U$ são os objetos que pertencem a U, mas não pertencem a U. Como não pode existir um objeto que satisfaça essas duas condições ao mesmo tempo, concluímos que $(U')_U = \varnothing$.

■

Proposição 46 $(\varnothing')_U = U$.

Demonstração: Pela definição de complementar, os elementos do conjunto $(\varnothing')_U$ são os objetos que pertencem a U, mas não pertencem a $\varnothing$. Como nenhum objeto pertence a $\varnothing$, concluímos que $(\varnothing')_U = U$.

■

Proposição 47 $(A')' = A$.

Demonstração: Se x é um objeto qualquer tal que $x \in (A')'$, então $x \notin A'$. Logo, $x \in A$. Dessa forma, $(A')' \subset A$.

Por outro lado, se x é um objeto tal que $x \in A$, então $x \notin A'$ e, portanto, $x \in (A')'$. Assim, $A \subset (A')'$. Concluímos que $(A')' = A$, uma vez que $(A')' \subset A$ e $A \subset (A')'$.

■

Proposição 48 $A \cap A' = \varnothing$.

Demonstração: Os elementos de $A \cap A'$ são os objetos x tais que $x \in A$ e $x \in A'$ ao mesmo tempo. Como isso é uma contradição, concluímos que $A \cap A' = \varnothing$.

■

Proposição 49 $A \cup A' = U$.

Demonstração: Se x é um objeto qualquer tal que $x \in A \cup A'$, então $x \in A$ ou $x \in A'$, isto é, $x \in A$ ou $x \notin A$. Como qualquer objeto satisfaz alguma das duas condições, temos que $x \in U$. Portanto, $(A \cup A') \subset U$.

Por outro lado, se x é um objeto qualquer tal que $x \in U$, então $x \in A$ ou $x \notin A$, ou seja, $x \in A$ ou $x \in A'$. Logo, $x \in A \cup A'$ e assim concluímos que $U \subset (A \cup A')$. Portanto, como $(A \cup A') \subset U$ e $U \subset (A \cup A')$, temos que $A \cup A' = U$.

■

Proposição 50 *$A \subset B$ se, e somente se, $B' \subset A'$.*

Demonstração: Suponhamos que $A \subset B$. Consideremos um objeto x tal que $x \in B'$. Pela definição de complementar, temos que $x \notin B$. Como $A \subset B$, segue que $x \notin A$. Logo, $x \in A'$. Portanto, $A \subset B$, então $B' \subset A'$.

Reciprocamente, suponhamos que $B' \subset A'$. Seja x um objeto tal que $x \in A$. Assim, $x \notin A'$. Como $B' \subset A'$, então $x \notin B'$. Logo, $x \in B$, o que mostra que $A \subset B$. Assim, se $B' \subset A'$, então $A \subset B$.

■

As proposições 51 e 52, a seguir, que são conhecidas como Leis de De Morgan, asseguram que o complementar da interseção entre dois conjuntos é igual à união entre os complementares desses conjuntos e o que complementar da união entre dois conjuntos é a interseção entre os complementares desses conjuntos.

Proposição 51 (Primeira Lei de De Morgan) $(A \cap B)' = A' \cup B'$.

Demonstração: Consideremos um objeto qualquer x tal que $x \in (A \cap B)'$. Então, pela definição de complementar, temos que $x \notin A \cap B$. Logo, x não pertence a A e B ao mesmo tempo. Dessa forma, $x \notin A$ ou $x \notin B$, isto é, $x \in A'$ ou $x \in B'$. Assim, $x \in A' \cup B'$ e, portanto, $(A \cup B)' \subset (A' \cap B')$.

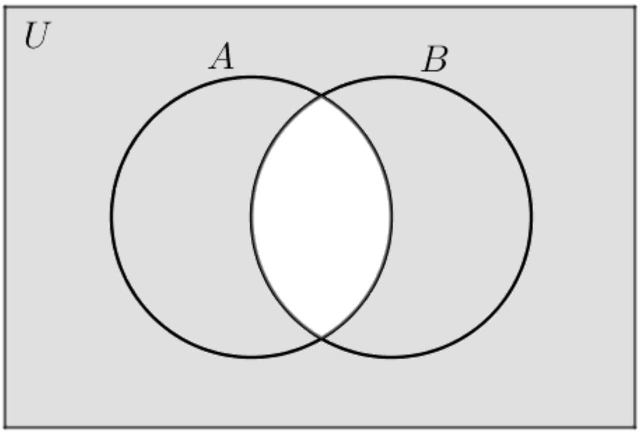
Por outro lado, se x é um objeto qualquer tal que $x \in A' \cup B'$, então $x \in A'$ ou $x \in B'$. Assim, $x \notin A$ ou $x \notin B$, logo x não pode pertencer a A e B ao mesmo tempo. Dessa forma, $x \notin A \cap B$, logo $x \in (A \cap B)'$. Portanto, $(A' \cup B') \subset (A \cap B)'$.

Como $(A \cup B)' \subset (A' \cap B')$ e $(A' \cup B') \subset (A \cap B)'$, concluímos que $(A \cap B)' = A' \cup B'$.

■

A Figura 9 é uma representação para a Primeira Lei de De Morgan. Nota-se que a região em cinza representa simultaneamente $(A \cap B)'$ e $A' \cup B'$

Figura 9 – Representação para Primeira Lei de De Morgan em diagrama de Venn.



Fonte: Da autora (2021).

Proposição 52 (Segunda Lei de De Morgan) $(A \cup B)' = A' \cap B'$.

Demonstração: Seja x um objeto tal que $x \in (A \cup B)'$. Então, decorre da definição de complementar que $x \notin A \cup B$ e, dessa forma, x não pode pertencer a A nem B. Logo $x \notin A$ e $x \notin B$. Assim, segue que $x \in A'$ e $x \in B'$. Como $x \in A' \cap B'$, concluímos que $(A \cup B)' \subset (A' \cap B')$.

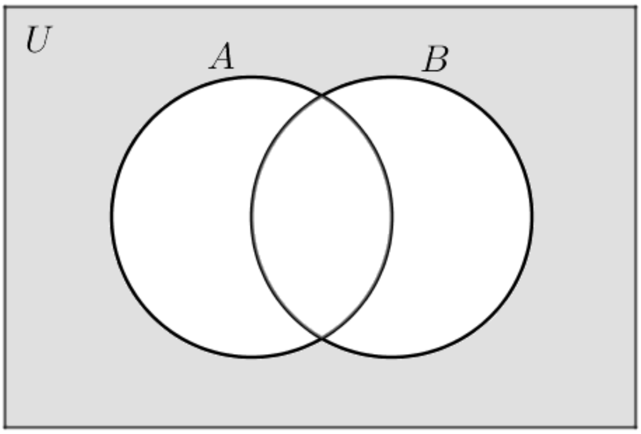
Se x é um objeto tal que $x \in A' \cap B'$, temos que $x \in A'$ e $x \in B'$, então $x \notin A$ e $x \notin B$. Logo, $x \notin A \cup B$. Dessa forma, $x \in (A \cup B)'$ e, portanto, $(A' \cap B') \subset (A \cup B)'$.

Como $(A \cup B)' \subset (A' \cap B')$ e $(A' \cap B') \subset (A \cup B)'$, concluímos que $(A \cup B)' = A' \cap B'$.

■

A Segunda Lei de De Morgan é representada na Figura 10, na qual pode-se observar que a região em cinza corresponde tanto a $(A \cup B)'$ quanto a $A' \cap B'$

Figura 10 – Representação para Segunda Lei de De Morgan.



Fonte: Da autora (2021).

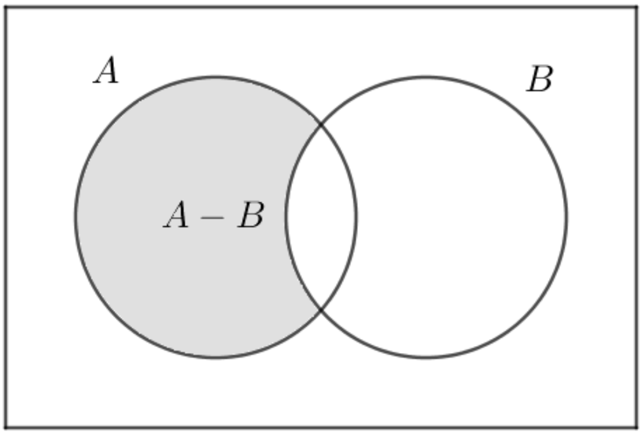
Diferença entre conjuntos

A diferença entre conjuntos é definida a seguir.

Definição 53 (Diferença entre conjuntos) *A diferença entre os conjuntos A e B é o conjunto $A - B$, cujos elementos pertencem a A, mas não pertencem a B.*

Usando a notação da Teoria dos Conjuntos, temos $A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$. Na Figura 11, a diferença entre os conjuntos A e B corresponde à região sombreada.

Figura 11 – Representação da diferença entre os conjuntos A e B.



Fonte: Da autora (2021).

Os exemplos 54 e 55, a seguir, decorrem da definição de diferença entre conjuntos.

Exemplo 54 *Se $A = \{3,8,9\}$ e $B = \{3,5\}$, então $A - B = \{8,9\}$.*

Exemplo 55 *Indicamos como $\mathbb{R}^*$ o conjunto dos números reais não nulos. Isto é, $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$.*

Sendo A, B e C conjuntos quaisquer, demonstraremos a seguir algumas proposições que envolvem a definição de diferença entre conjuntos.

Proposição 56 $A - B = A \cap B'$.

Demonstração: Consideremos um objeto x qualquer tal que $x \in A - B$. Assim, pela definição de diferença entre conjuntos, temos que $x \in A$ e $x \notin B$, ou seja, $x \in A$ e $x \in B'$, o que mostra que $x \in A \cap B'$. Logo, $x \in (A - B) \subset (A \cap B')$. De forma semelhante, podemos mostrar que $(A \cap B') \subset (A - B)$. Como $(A - B) \subset (A \cap B')$ e $(A \cap B') \subset (A - B)$, concluímos que $A - B = A \cap B'$.

■

Proposição 57 $A - B = B' - A'$.

Demonstração: Seja x um objeto tal que $x \in A - B$. Assim, $x \in A$ e $x \in B'$. Assim, segue de $x \in A$ que $x \notin A'$. Como $x \in B'$ e $x \notin A'$, a definição de diferença entre conjuntos garante que $x \in B' - A'$ e, portanto, $(A - B) \subset (B' - A')$. De forma semelhante, podemos provar que $(B' - A') \subset (A - B)$ e concluir que $A - B = B' - A'$.

■

Proposição 58 *Se $A \subset B$, então $A - B = \varnothing$.*

Demonstração: Suponhamos que $A \subset B$. Assim, todo elemento que pertence a A também pertence a B. Pela definição da diferença entre conjuntos, concluímos que $A - B = \varnothing$.

■

Produto cartesiano

Definição 59 (Produto cartesiano) *Sendo A e B conjuntos não vazios, o produto cartesiano de A por B, denotado $A \times B$, é o conjunto formado por todos os pares ordenados $(x,\ y)$, em que $x \in A$ e $y \in B$.*

O conceito de par ordenado é tomado como primitivo, para o qual vale que $(x, y) = (a, b)$ se, e somente se, $x = a$ e $y = b$. Podemos escrever em linguagem simbólica que $A \times B = \{(x,\ y) \mid x \in A \text{ e } y \in B\}$.

Exemplo 60 *Dados os conjuntos* $A = \{1,\ 2,\ 3\}$ *e* $B = \{4,\ 5\}$*, o produto cartesiano entre A e B é* $A \times B = \{(1,\ 4),\ (1,\ 5),\ (2,\ 4),\ (2,\ 5),\ (3,\ 4),\ (3,\ 5)\}$.

A proposição a seguir foi utilizada por Sangiorgi (1968) para apresentar uma definição para a operação de multiplicação entre números naturais.

Proposição 61 *Se n e m designam o número de elementos que pertecem aos conjuntos finitos A e B, respectivamente, então o conjunto* $A \times B$ *possui* $n \cdot m$ *elementos.*

Demonstração: Para formar um par ordenado $(x,\ y)$, com $x \in A$ e $y \in B$, temos n possibilidades para escolher um elemento de A e m possibilidades para escolher um elemento de B. Logo, podemos formar $m \cdot n$ pares ordenados, que são os elementos de $A \times B$.

■

Proposição 62 *Sendo A, B e C conjuntos não vazios, então* $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$ *e* $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

Demonstração: Se $(x,\ y)$ é um par ordenado que pertence a $A \times (B \cap C)$, então $x \in A$ e $y \in B \cap C$. Logo, $x \in A$, $y \in B$ e $y \cap C$. Assim, $(x,\ y) \in A \times B$ e $(x,\ y) \in A \times C$. Dessa forma, $(x,y) \in (A \times B) \cap (A \times C)$, mostrando que $A \times (B \cap C) \subset (A \times B) \cap (A \times C)$. De forma análoga, podemos provar que $(A \times B) \cap (A \times C) \subset A \times (B \cap C)$. Como $A \times (B \cap C) \subset (A \times B) \cap (A \times C)$ e $(A \times B) \cap (A \times C) \subset A \times (B \cap C)$, concluímos que $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

A demonstração de $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ é análoga.

■

Relações

Definição 63 *Dados os conjuntos A e B, uma relação binária R de A em B é todo subconjunto do produto cartesiano* $A \times B$.

No termos dessa definição, podemos escrever $R = \{(a,\ b) \mid (a,\ b) \in A \times B\}$. Nesse caso, A é denominado *conjunto de partida* e B é denominado *conjunto de chegada*. Dizemos que $a \in A$ se relaciona com $b \in B$ segundo R se $(a,\ b) \in R$, denotando $a\,R\,b$. Por outro lado, se $(a,\ b) \notin R$, indicamos $a \not R\, b$. Os exemplos a seguir decorrem da Definição 63, sendo que o Exemplo 65 foi adaptado de Monteiro, Sangiorgi e Watanabe (1970, p. 47).

Exemplo 64 *Dados os conjuntos* $A = \{0,\ 1,\ 2\}$ *e* $B = \{3,\ 4\}$*, são exemplos de relações de A em B:*

a) $R_1 = \varnothing$*;*

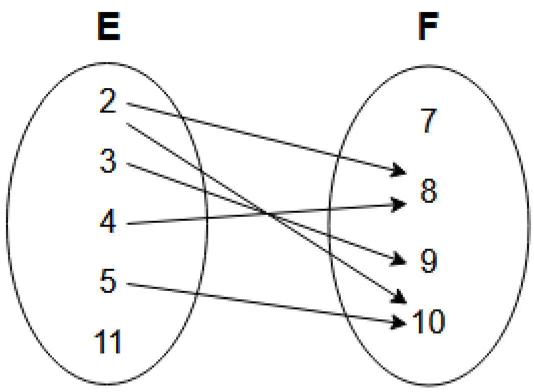
b) $R_2 = \{(0,\ 3),\ (1,\ 4)\}$*;*

b) $R_3 = \{(0,\ 4),\ (1,\ 4),\ (1,\ 3)\}$.

Exemplo 65 *Consideremos os conjuntos* $E = \{2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 11\}$ *e* $F = \{7,\ 8,\ 9,\ 10\}$*. A relação R que associa um elemento x de E a um elemento y de F se, e somente se, x é divisor de y pode ser representada por* $R = \{(x,\ y) \in E \times F \mid x|y\} = \{(2,\ 8),\ (2,\ 10),\ (3,\ 9),\ (4,\ 8)\ (5,\ 10)\}$.

Podemos representar um relação entre conjuntos finitos por meio de um diagrama de flecha, no qual cada par $(x,\ y) \in R$ é representado por uma flecha com início em x e fim em y. A relação apresentada no Exemplo 65 está representada no diagrama de flechas da Figura 12.

Figura 12 – Diagramas de flechas da relação do Exemplo 65.



Fonte: Da autora (2021).

A seguir, apresentamos uma definição para relação biunívoca – que também é chamada de correspondência biunívoca ou correspondência um a um – e equipotência de conjuntos. No primeiro livro da coleção *Curso Completo de Matemática Moderna para o Ensino Primário*, as autoras Ferreira e Carvalho (196-?a) recomendam que a noção de correspondência biunívoca seja explorada no Ensino Primário para trabalhar a capacidade de comparação de quantidades. De forma semelhante, Sangiorgi (1968), em seu livro *Matemática: Curso Moderno para os Ginásios*, Volume 1, define número natural como a propriedade compartilhada por conjuntos equipotentes e utiliza a correspondência biunívoca para apresentar a relação de ordem entre números naturais.

Definição 66 (Relação biunívoca) *Uma relação R de A em B é dita biunívoca se todo $x \in A$ se relacionar segundo R a exatamente um elemento $y \in B$ e se, para todo $y \in B$, existir um $x \in A$ tal que $(x,\ y) \in R$.*

Definição 67 (Conjuntos equipotentes) *Os conjuntos A e B são ditos equipotentes se existir uma relação biunívoca entre A e B.*

Exemplo 68 *Considerando os conjuntos $A = \{a,\ b,\ c\}$ e $B = \{x,\ y,\ z\}$, temos que a relação $R = \{(a,\ z),\ (b,\ y),\ (c,\ x)\}$ é biunívoca, pois cada elemento de A se relaciona a apenas um elemento de B e, para todo $y \in B$, existe um $x \in A$ tal que $(x,\ y) \in R$. Portanto, podemos dizer que A e B são conjuntos equipotentes.*