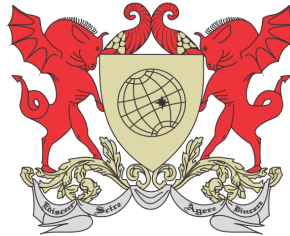


UNIVERSIDADE FEDERAL DE VIÇOSA
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO



MARCELO MACHADO DE SOUZA

BILHARES NO GEOGEBRA

**FLORESTAL – MINAS GERAIS
2021**

MARCELO MACHADO DE SOUZA

BILHARES NO GEOGEBRA

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obter o título de *Magister Scientiae*.

Orientador: Alexandre Alvarenga Rocha

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca da Universidade Federal de Viçosa - Campus Florestal

T

S729b Souza, Marcelo Machado de, 1981-
2021 Bilhares no GeoGebra / Marcelo Machado de Souza. –
Belo Horizonte, MG, 2021.
63 f.: il. (algumas color.).

Inclui apêndice.

Orientador: Alexandre Alvarenga Rocha.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa,
Instituto de Ciências Exatas e Tecnológicas, 2021.

Inclui bibliografia.

1. Bilhares. 2. Matemática. 3. GeoGebra. I. Rocha,
Alexandre Alvarenga. II. Universidade Federal de Viçosa.
Instituto de Ciências Exatas e Tecnológicas. Mestrado
Profissional em Matemática em Rede Nacional. III. Título.

515

Bibliotecário(a) responsável: Maria Aparecida Alves de Oliveira 1174

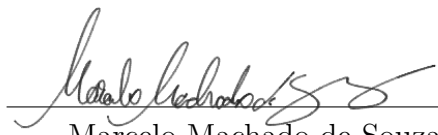
MARCELO MACHADO DE SOUZA

BILHARES NO GEOGEBRA


Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obter o título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 21 de outubro de 2021.

Assentimento:



Marcelo Machado de Souza
Autor



Alexandre Alvarenga Rocha
Orientador

Dedicatória

Dedico este trabalho aos meus pais Fatima e Geconias (in memoriam), que me inspiraram a buscar na educação, a chance de um futuro melhor. Espero que estejam orgulhosos!

Dedico à minha esposa Amira, parceira de todas horas.

Dedico aos meus amigos, por compartilharem comigo, horas de estudo, incentivos, risadas e por me apoiarem nos momentos difíceis.

Ao meu orientador, Alexandre Alvarenga Rocha, por toda dedicação, paciência e disponibilidade.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus.

Agradeço a minha esposa Amira, por toda parceria, dedicação e paciência, por estar sempre ao meu lado e pelo apoio incondicional.

Aos meus amigos do curso, que compartilharam inúmeros desafios, sempre com o espírito colaborativo e, além disso, se mostraram serem amigos de verdade. Em especial: Marcone, Cláudio, Rômulo, Ednéia, Carla, Eliane e Fernanda. Sem vocês eu não teria chegado até aqui. Muito obrigado!

Ao meu orientador, Alexandre Alvarenga Rocha, pela confiança depositada em mim durante o desenvolvimento do projeto. Obrigado por me manter motivado durante todo o tempo e por cada contribuição.

Agradeço também ao corpo docente da Universidade Federal de Viçosa, que sempre estiveram comprometidos com a qualidade e excelência do ensino.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

Resumo

SOUZA, Marcelo Machado de, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, outubro de 2021. **Bilhares no GeoGebra**. Orientador: Alexandre Alvarenga Rocha.

Os conteúdos matemáticos abordados no Ensino Médio apresentam a matemática como algo muito antigo e acabado, muitas vezes provocando desinteresse dos alunos em aprofundar seus estudos. Este trabalho se propõe a apresentar um tema da matemática com muitos tópicos a serem pesquisados, o Bilhar plano. Bilhares são exemplos “aplicados” de vários tipos de sistema dinâmicos, como será apresentado neste trabalho. Nos bilhares, as curvas que determinam a mesa de bilhar, podem ser parametrizadas, por exemplo, pelo comprimento do arco, daí entendemos ser importante uma breve abordagem das curvas utilizadas em sua forma parametrizada. Além de uma abordagem teórica, utilizamos algumas simulações para observar o comportamentos de alguns bilhares. Para as simulações dos bilhares, utilizamos o software de matemática dinâmica GeoGebra, que, por ser gratuito e de livre distribuição, é hoje líder na área de softwares de matemática dinâmica.

Palavras-chave: Matemática. Ensino. Bilhares.

Abstract

SOUZA, Marcelo Machado de, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, October, 2021. **Billiards in GeoGebra**. Adviser: Alexandre Alvarenga Rocha.

The mathematical contents covered in High School present mathematics as something very old and finished, often causing students' lack of interest in furthering their studies. This work proposes to present a theme of mathematics with many topics to be researched, the flat billiards. Billiards are “applied” examples of various types of dynamic systems, as will be presented in this work. In billiards, the curves that determine the pool table can be parameterized, for example, by the length of the arc, hence we believe that a brief approach to the curves used in their parameterized form is important. In addition to a theoretical approach, we use some simulations to observe the behavior of some billiards. For the simulations of billiards, we use the dynamic mathematics software GeoGebra, which, being free and freely distributed, is today a leader in the field of dynamic mathematics software.

Keywords: Mathematics. Teaching. Billiards.

Lista de Figuras

2.1	Exemplo de curva parametrizada.	13
2.2	Exemplo de curva fechada: Lemniscata de Bernoulli, ver [17].	13
2.3	Cone de Revolução (duas folhas)	14
2.4	Circunferência de Centro C	15
2.5	Circunferência de Centro O	15
2.6	Elise	17
2.7	epicicloide	19
2.8	P descreve um epicicloide	19
2.9	cardioide	21
3.1	Análise geométrica da equação (3.3)	25
3.2	Reflexão no Circulo	27
3.3	Construção do bilhar circular	27
3.4	Reflexão no Circulo	28
3.5	Espaço de fase do bilhar circular	28
3.6	Trajectoria não periódica	29
3.7	Exemplos de órbitas periódicas no círculo	29
3.8	Construção auxiliar demonstração 3.17 (i)	31
3.9	Construção auxiliar demonstração 3.17 (ii)	31
3.10	Exemplo de formação de cáustica no círculo.	32
3.11	Fluxo e espaço de fase no bilhar circular construídos no GeoGebra.	33
3.12	Fluxo e espaço de fase no bilhar cardioide construídos no GeoGebra.	33
3.13	Construção geométrica da Proposição 3.13,	34
3.14	Construção auxiliar 3.25	36
3.15	Teorema 3.27	37
3.16	Exemplo de formação de cáustica elíptica.	38
3.17	Exemplo de formação de cáustica hiperbólica	39
3.18	Espaço de fase do bilhar elíptico.	39
4.1	Exemplo de construção de bilhar com órbita racional	42
4.2	Exemplo de construção de bilhar com órbita irracional	42
4.3	Exemplo de bilhar na circunferência criado com o auxílio do ambiente de planilhas do GeoGebra.	45

4.4	Exemplo de bilhar na circunferência criado com o auxílio do ambiente de panilhas do GeoGebra.	45
4.5	Exemplo de bilhar na circunferência,e seu espaço de fase, criado com o auxílio do ambiente de “ <i>Panilhas</i> ” do GeoGebra.	48
4.6	Exemplo de bilhar elíptico com o auxílio do ambiente de panilhas do GeoGebra. Trajetórias passando por entre dos focos.	50
4.7	Exemplo de bilhar elíptico com o auxílio do ambiente de panilhas do GeoGebra. Trajetórias passando por “fora” dos focos.	51
4.8	Exemplo de bilhar na Elipse,e seu espaço de fase, criado com o auxílio do ambiente de panilhas do GeoGebra.	53
4.9	Exemplo de bilhar no cardioide,e seu espaço de fase, criado com o auxílio do ambiente de panilhas do GeoGebra.	55

Sumário

1	Introdução	10
2	Curvas Planas	12
2.1	Curvas Planas Parametrizadas	12
2.2	Parametrização das Cônicas	13
2.2.1	Parametrização da Circunferência	14
2.2.2	Parametrização da Elipse	16
2.2.3	Parametrização do cardioide	18
3	Bilhares Planos	22
3.1	Bilhar no Círculo e no Cardioide	26
3.2	Bilhar na Elipse	33
4	Roteiros de Construção de Bilhares no GeoGebra	40
4.1	Bilhar na Circunferência - Modelo 1	40
4.2	Bilhar na Circunferência - Modelo 2	42
4.3	Bilhar na Circunferência - Modelo 3	44
4.4	Bilhar na Elipse - Modelo 1	48
4.5	Bilhar na Elipse - Modelo 2	50
4.6	Bilhar no cardioide	53
5	Aplicações no Ensino Médio	56
6	Considerações Finais	58
A	Roteiro de Atividades	60
A.1	Objetivos	60
A.1.1	Geral	60
A.1.2	Específicos	60
A.2	Conteúdos	61
A.3	Procedimentos metodológicos	61
A.4	Recursos didáticos	61
A.5	Avaliação	61
A.6	Links dos materiais utilizados	61

Introdução

Bilhares são jogos bastante populares. No jogo, utilizam-se bolas e tacos em uma mesa plana. Embora existam várias regras para esse jogo, basicamente ela consiste em tentar encaçapar algumas bolas através de reflexões especulares (choques elásticos) de uma bola com as outras ou com a borda da mesa. Essa mesa geralmente tem bordas retangulares, porém, bordas em outros formatos também podem gerar bilhares com propriedades interessantes.

Na matemática, a Teoria dos Bilhares estuda a dinâmica (movimento) de uma partícula em uma região plana limitada por uma curva fechada, geralmente contida em uma região plana. Sim, esse estudo se dá no âmbito dos sistemas dinâmicos, porém nesse texto, não temos a pretensão de nos aprofundarmos nas propriedades dinâmicas dos bilhares com todo o rigor que eles merecem (o que não nos impede de uma breve abordagem), mas sim, apresentar de maneira leve e lúdica algumas características que fazem esse tipo de sistema dinâmico tão interessante.

Pesquisas sobre bilhares ganharam destaque recentemente, talvez isso se deva pelo fato de que sua dinâmica pode ser totalmente conhecida observando apenas as características geométricas da curva, além de serem aplicados ao estudo de fenômenos mecânicos. Iremos tratar sobre bilhares limitados por alguns tipos de curvas planas como o círculo e a elipse, e demonstrar algumas de suas propriedades, que podem ser colocadas em prática variando a posição inicial e alguns ângulos de tacadas (condições iniciais).

Nosso propósito aqui não é apresentar um texto matemático denso, essa parte deixamos por conta de nossas referências, queremos principalmente despertar o interesse do leitor para uma matemática mais moderna e incomum nos cursos de matemática da educação básica. Para tanto visitaremos alguns conceitos sobre as curvas planas parametrizadas, assunto que poderia ser bem melhor trabalhado em nossas aulas de geometria analítica, quando introduzimos rapidamente (e logo abandonamos) a ideia de *forma parametrizada da equação da reta*. Quando entendemos o que aquela equação “diferentona” pode significar uma forma de ver o futuro, ou até mesmo o passado dos pontos daquela reta, criamos uma nova forma de olhar para ela.

Os bilhares que trabalharemos nesse texto levarão em consideração apenas a forma da mesa, e as reflexões de apenas uma bola. Em uma mesa tradicional, na

forma retangular, já conhecemos os caminhos para que uma bola chegue até uma caçapa, mas, e se essa mesa tiver a forma de uma circunferência, de uma elipse ou de outra curva como um cardióide? Será que a bola do bilhar ainda se comportará da mesma forma quando se chocar com as bordas? Que tipo de jogadas poderemos fazer para acertar as caçapas com a bola atingindo primeiramente a borda da mesa? Algumas dessas respostas e a matemática por trás delas, além de algumas outras curiosidades serão mostradas nesse texto.

As cônicas e suas propriedades reflexivas estão diretamente ligadas ao estudo dos bilhares, e as aplicações dessas propriedades produzem um rico material para estudo em sala de aula. As antenas parabólicas e os faróis dos automóveis utilizam as propriedades reflexivas da parábola. Espelhos hiperbólicos e parabólicos foram determinantes na construção de telescópios mais eficientes, graças às suas propriedades reflexivas. Refletores odontológicos garantem a alta concentração da luminosidade graças a seu formato elíptico. Além das fascinantes casas de sussuros, ambientes que podem ter o formato de uma circunferência e são capazes de levar o som através das reflexões em sua parede por longas distâncias. Esse são apenas alguns exemplos de aplicações dessas propriedades reflexivas. O leitor pode ter mais detalhes em [11] e [9].

Para ilustrar e construir nossos bilhares, utilizamos o software de matemática dinâmica GeoGebra¹. Apesar de existirem outros softwares mais robustos, o GeoGebra é muito acessível por ser gratuito e de interface mais simples. Com isso, esperamos que todas as construções realizadas neste trabalho possam ser reproduzidas, e porque não aprimoradas, por qualquer leitor com um pouco de dedicação e interesse.

¹O GeoGebra é um software de matemática dinâmica para todos os níveis de ensino que reúne Geometria, Álgebra, Planilha de Cálculo, Gráficos, Probabilidade, Estatística e Cálculos Simbólicos em um único pacote fácil de se usar. O GeoGebra possui uma comunidade de milhões de usuários em praticamente todos os países. O GeoGebra se tornou um líder na área de softwares de matemática dinâmica, apoiando o ensino e a aprendizagem em Ciência, Tecnologia, Engenharia e Matemática.

Curvas Planas

As curvas planas são conceitos importantes para o estudo dos bilhares, pois são elas que determinam a forma da mesa de bilhar. Uma definição mais formal de mesa de bilhar será dada posteriormente no capítulo 3, específico de bilhares. Para manter o foco em nosso objetivo, nos restringiremos a abordar as parametrizações da circunferência, da elipse e do cardióide, pois serão estes os bilhares que abordaremos neste texto. Outras curvas parametrizadas podem ser encontradas em [10], [1] e [17].

2.1 Curvas Planas Parametrizadas

Uma curva plana, pode ser associada a ideia de um traço feito sem tirar a ponta do lápis de uma folha de papel. Ou ainda, podemos ver uma curva como a trajetória de uma partícula se deslocando no plano em um determinado espaço de tempo. Para analisarmos essa trajetória podemos determinar as coordenadas de um ponto da curva em relação a um parâmetro, por exemplo o tempo. Essas curvas são descritas através de funções de \mathbb{R} em \mathbb{R}^2 que chamamos de forma paramétrica da curva.

Definição 2.1: Uma curva plana parametrizada é uma aplicação contínua $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ de um intervalo $I \subset \mathbb{R}$ no espaço euclidiano bi-dimensional e seu traço é a imagem dessa aplicação.

A parametrização de α pelo parâmetro t é dada por $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, é contínua se x e y são funções contínuas e o Conjunto Imagem, traço da parametrização de α é:

$$\alpha(t) = \{(x(t), y(t)), t \in I\}.$$

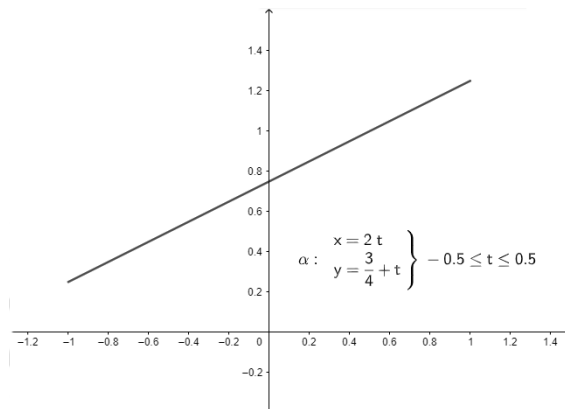


Figura 2.1: Exemplo de curva parametrizada.

Definição 2.2: Seja α uma curva plana definida num intervalo $I = [a, b]$, onde $\alpha(a)$ e $\alpha(b)$ são os pontos inicial e final, respectivamente. Dizemos que α é uma curva fechada se $\alpha(a) = \alpha(b)$.

Definição 2.3: Uma curva $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ é dita periódica, se existe um número real $l > 0$ tal que:

$$\alpha(t + l) = \alpha(t), \forall t \in \mathbb{R}.$$

O menor valor de $l = l_0$ para o qual a equação se torne verdadeira é chamado de período de α .

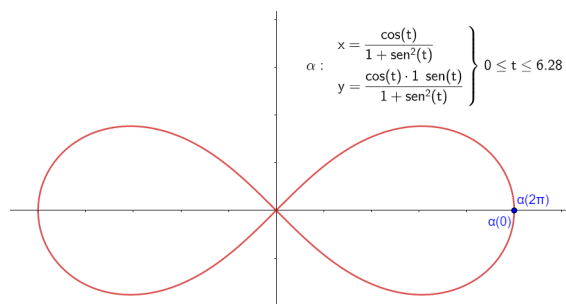


Figura 2.2: Exemplo de curva fechada: Lemniscata de Bernoulli, ver [17].

Definição 2.4: Uma curva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, é dita simples, se a parametrização for injetiva.

2.2 Parametrização das Cônicas

As cônicas são curvas planas obtidas pela seção de uma superfície cônica de revolução de duas folhas com um plano secante.

As cônicas tem origem na Grécia Antiga e são atribuídas ao matemático Menaecmus (aproximadamente 380 - 320 a.C). Ele era discípulo de Eudócio na Academia de Platão e descobriu as curvas (ou seções) cônicas quando trabalhava no problema da duplicação do cubo.

Credita-se a Aristeu (370 - 300 a.C) a publicação do primeiro tratado sobre seções cônicas, e muitos matemáticos importantes da época como Euclides (325-265 a.C) e Arquimedes (287 - 212 a.C) contribuíram no seu estudo. No entanto, o principal nome da matemática grega antiga atribuído ao estudo das cônicas é o de Apolônio de Perga (262 - 190 a.C). Ele escreveu um tratado intitulado Seções Cônicas, composto por oito volumes, esse tratado superou todo os anteriores sobre o tema.

A definição fornecida por Apolônio de Perga para uma superfície cônica de duas folhas de revolução continua válida ainda hoje:

“Se fizermos uma reta, de comprimento indefinido e passando por um ponto fixo, mover-se ao longo da circunferência de um círculo, que não estão em mesmo plano com o ponto, de modo a passar sucessivamente por cada um dos pontos dessa circunferência, a reta móvel descreverá a superfície de um cone duplo.”

Na definição de Apolônio o ponto fixo é chamado de vértice da superfície cônica, as retas móveis são chamadas geratrizes e a circunferência é denominada diretriz. Além disso a reta que une o vértice ao centro da circunferência diretriz é chamado de eixo do cone.

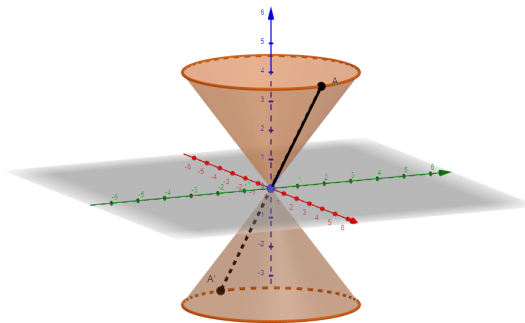


Figura 2.3: Cone de Revolução (duas folhas).

Agora passaremos a fazer algumas parametrizações de dois tipos de cônicas amplamente estudados nos bilhares, a elipse e a circunferência.

2.2.1 Parametrização da Circunferência

A circunferência é uma cônica obtida pela seção de um plano perpendicular ao eixo do cone, que não passa pelo vértice.

Também podemos definir uma circunferência como segue:

Definição 2.5: Uma circunferência é o lugar geométrico dos pontos P tais que arbitrado um ponto C , centro da circunferência, a distância d de C até P é igual a $r > 0$, fixo, (raio da circunferência).

Considerando que o centro da circunferência é o ponto $C(x_C, y_C)$, a distância r de P até C é calculada por

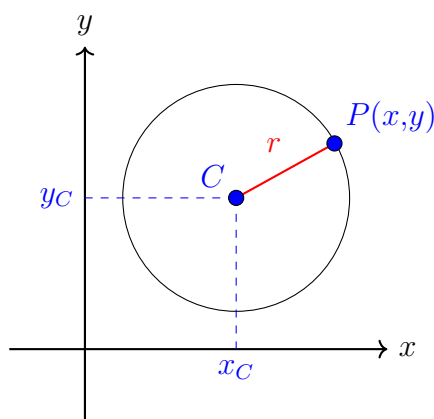


Figura 2.4: Circunferência de Centro C

$$\begin{aligned}
 d(P,C) &= \sqrt{(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2} \\
 r &= \sqrt{(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2} \\
 (x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 &= r^2
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

A equação 2.1 é chamada de equação canônica da circunferência com centro em $C(x_C, y_C)$.

Os pontos $P(x, y)$ que pertencem à circunferência de centro na origem $O(0, 0)$ obedecem a equação $x^2 + y^2 = r^2$, que é a equação (2.1) com $x_0 = 0$ e $y_0 = 0$.

Considerando a circunferência \mathcal{C} de centro na origem O e o ponto $P(x, y) \in c$, temos o triângulo OPQ retângulo em Q , onde $Q(x, 0)$ é o pé da perpendicular ao eixo Ox que passa por P . A hipotenusa é $OP = r$ e tomando o ângulo $\widehat{POQ} = \alpha$, $OQ = x$ é o cateto adjacente à α e $PQ = y$ é o cateto oposto à α .

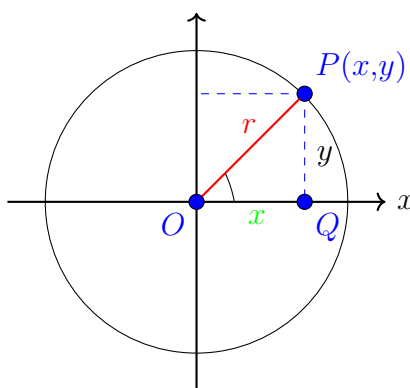


Figura 2.5: Circunferência de Centro O

Pelas relações trigonométricas temos:

$$\begin{cases} \cos \alpha = \frac{OQ}{OP} = \frac{x}{r} \\ \text{sen } \alpha = \frac{PQ}{OP} = \frac{y}{r} \end{cases} \implies \begin{cases} x = r \cdot \cos \alpha \\ y = r \cdot \text{sen } \alpha \end{cases}$$

Assim, uma parametrização da circunferência \mathcal{C} de centro na origem e raio r , tal que $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ é dada por:

$$c(\alpha) = (r \cdot \cos \alpha, r \cdot \sin \alpha) \quad (2.2)$$

Se deslocarmos o centro da circunferência para o ponto $C(a,b)$, então o ponto P terá como coordenadas $x_P = a + r \cdot \cos \alpha$ e $y_P = b + r \cdot \sin \alpha$. Uma parametrização da circunferência \mathcal{C} de centro $C(a,b)$ e raio r , tal que $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ é dada por:

$$c(\alpha) = (a + r \cdot \cos \alpha, b + r \cdot \sin \alpha) \quad (2.3)$$

2.2.2 Parametrização da Elipse

Definição 2.6: Uma Elipse \mathcal{E} de focos F_1 e F_2 é o conjunto do plano que consiste de todos os pontos P cuja soma das distâncias de F_1 e F_2 é igual a uma constante $2p > 0$, maior do que a distância entre os focos $2c \geq 0$

$$\mathcal{E} = \{P \in \mathbb{R}^2; d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2p\}.$$

Elementos Principais da Elipse

- F_1 e F_2 são os *focos* da elipse.
- A reta que contém os focos é chamada de *reta focal*, ou *eixo maior*.
- As interseções A_1 e A_2 da elipse com a reta focal são os *vértices sobre a reta focal*.
 - O segmento A_1A_2 é o *eixo focal* da elipse e seu comprimento é igual a $2a$.
 - O *centro* da Elipse é o ponto médio do segmento A_1A_2 , ele também é o ponto médio do segmento F_1F_2 .
- A reta que passa pelo centro da elipse e é perpendicular à reta focal é a *reta não focal*, ou *eixo menor*.
 - As interseções B_1 e B_2 da elipse com a reta não focal são os *vértices sobre a reta não focal*.
 - O segmento B_1B_2 é o *eixo não focal* da elipse e seu comprimento é igual a $2b$, tal que $b^2 = a^2 - c^2$.
 - O número $e = \frac{c}{a}$ é a *excentricidade* da elipse. Note que $0 \leq e < 1$, pois $2c < 2a$.

Forma Canônica da Elipse

Partindo da definição da elipse vamos obter sua equação em relação a um sistema de eixos ortogonais OXY. Considere a elipse \mathcal{E} com centro na origem e reta focal coincidindo com eixo OX. Assim, os vértices serão $A_1(-a,0)$, $A_2(a,0)$, $B_1(0, -b)$ e $B_2(0,b)$ e os focos $F_1(-c,0)$ e $F_2(c,0)$ onde, $0 < c < a$ e $b = \sqrt{a^2 - c^2}$. Logo,

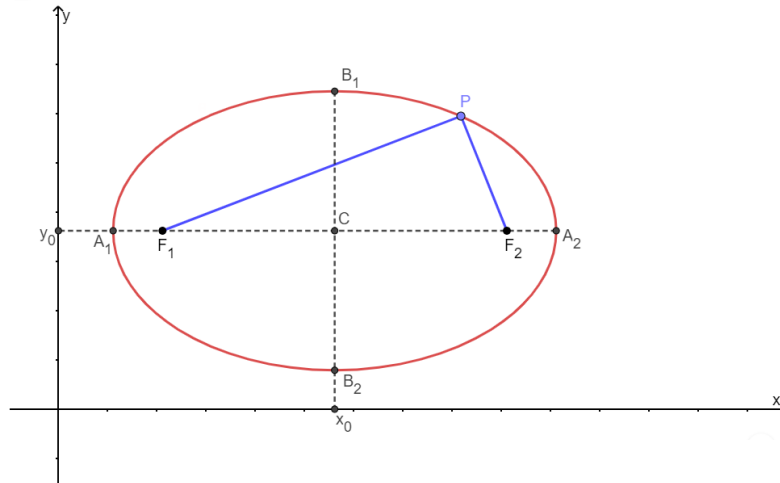


Figura 2.6: Elipse.

$$\begin{aligned}
 P(x,y) \in \mathcal{E} &\iff d(P,F_1) + d(P,F_2) = 2a \\
 \iff \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= 2a \\
 \iff \sqrt{(x+c)^2 + y^2} &= 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \tag{2.4} \\
 \iff (x+c)^2 + y^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2 \tag{2.5} \\
 \iff x^2 + 2cx + c^2 + y^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2 \\
 \iff 4cx &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\
 \iff a^2 - cx &= a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \tag{2.6} \\
 \iff (a^2 - cx)^2 &= a^2((x-c)^2 + y^2) \tag{2.7} \\
 \iff a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 &= a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2) \\
 \iff (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 &= a^4 - a^2c^2 = a^2(a^2 - c^2) \\
 \iff b^2x^2 + a^2y^2 &= a^2b^2 \\
 \iff \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1
 \end{aligned}$$

Note que (2.4) \implies (2.5) e (2.6) \implies (2.7), pois em ambos os casos, basta elevar os dois membros ao quadrado e observar que dos termos nas raízes são maiores ou iguais a zero.

A equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ é a *forma canônica* da elipse de centro na origem e reta focal coincidente com o eixo OX .

A equação $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ é a *forma canônica* da elipse com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo OY . A demonstração é análoga ao caso anterior.

Temos ainda as equações

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1 \tag{2.8}$$

$$\frac{(x-x_0)^2}{b^2} + \frac{(y-y_0)^2}{a^2} = 1. \tag{2.9}$$

A equação (2.8) se trata da equação canônica da elipse de centro no ponto $C(x_0, y_0)$ e seu eixo focal é paralelo ao eixo OX . A equação (2.9) se trata da equação canônica da elipse de centro no ponto $C(x_0, y_0)$ e seu eixo focal é paralelo ao eixo OY . As demonstrações das equações (2.8) e (2.9) podem ser encontradas em [10].

Substituindo $\frac{(x - x_0)}{a} = \beta$ e $\frac{(y - y_0)}{b} = \theta$, a forma canônica da elipse fica descrita por:

$$\beta^2 + \theta^2 = 1$$

O que equivale a uma circunferência de centro na origem e raio igual a 1, porém não representada no mesmo plano a elipse. Substituindo na equação (2.3) temos:

$$\beta = 1 \cdot \cos \alpha$$

$$\theta = 1 \cdot \sen \alpha$$

então:

$$\beta = \frac{(x - x_0)}{a} = 1 \cdot \cos \alpha \implies x = x_0 + a \cos \alpha$$

$$\theta = \frac{(y - y_0)}{b} = 1 \cdot \sen \alpha \implies y = y_0 + b \sen \alpha$$

Assim, a parametrização da elipse $\mathcal{E} : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ é dada por:

$$\mathcal{E}(\alpha) = (x_0 + a \cos \alpha, y_0 + b \sen \alpha). \tag{2.10}$$

O caso particular em que a elipse é dada pela equação: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ tem sua parametrização dada por:

$$\mathcal{E}(\alpha) = (a \cos \alpha, b \sen \alpha). \tag{2.11}$$

2.2.3 Parametrização do cardioide

Epicycloide

Sejam C_1 e C_2 dois círculos de raios R e r respectivamente em que C_1 e C_2 se tocam em apenas um ponto P e os pontos de C_2 , diferentes de P , são exteriores a C_1 .

O lugar geométrico descrito pelo ponto P quando C_2 rola sobre C_1 sem deslizar é chamado de *epicycloide*.

Afim de obtermos uma parametrização da epicycloide, vamos admitir C_1 com centro na origem, C_2 com centro no ponto $(R + r, 0)$ e que a posição inicial de P seja $P_1 = (R, 0)$.

As figuras 2.7 e 2.8 mostram o círculo C_2 após ser rolado, do sentido positivo, por alguns instantes sobre o círculo C_1 . Observe que:

- $P = (x,y)$ é o ponto da epicloide que partindo da posição inicial P_1 descreve o arco P_1P , quando C_1 rola um ângulo θ sobre C_2 ;
- A é o ponto de contato entre os círculos;
- O_2 é o centro de C_2 ;
- B e D são as projeções de O_2 sobre os eixos Ox e Oy ;
- $Q = (x,0)$ e $T = (0,y)$ as projeções de P sobre os eixos OX e OY ;
- M e N são as projeções de P sobre as retas O_2B e O_2D , respectivamente;
- e α é o ângulo $\widehat{AO_2P}$ descrito pelo ponto P com respeito a semirreta radial OO_2 .

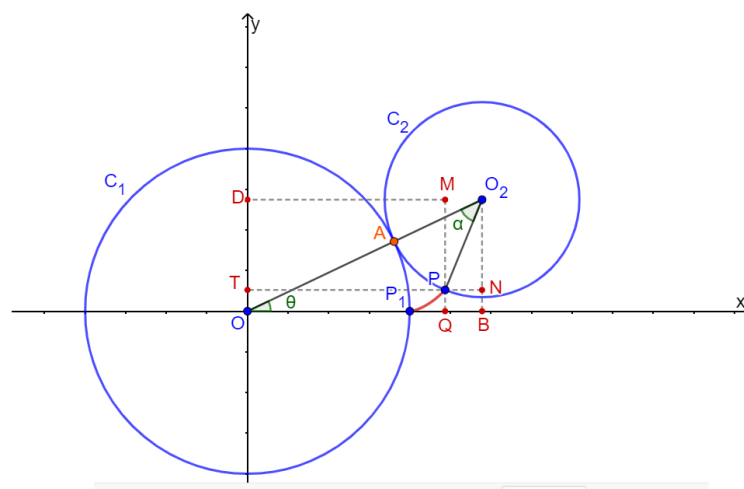


Figura 2.7: O movimento de P descreve uma epicloide.

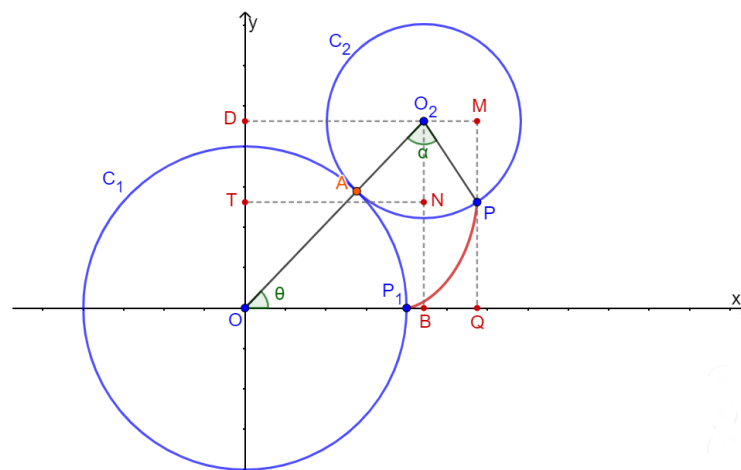


Figura 2.8: P continua o movimento.

Queremos descrever as coordenadas do ponto P em função de um parâmetro. As posições relativas entre O , Q e B e entre O , T e D variam de acordo com a posição de P , ou seja de acordo com a medida α do ângulo $\widehat{AO_2P}$.

Vamos analisar o caso em que Q está entre O e B e T está entre O e D . Os demais casos podem ser vistos em [10]. Conforme a figura 2.7. temos:

$$\begin{aligned} x &= |OQ| = |OB| - |BQ| = |OB| - |O_2M|, \\ y &= |OT| = |OD| - |TD| = |OD| - |O_2N|. \end{aligned} \quad (2.12)$$

No momento em que C_2 rola sobre C_1 , seu centro O_2 descreve um círculo centrado em O de raio $R + r$. Considerando o ângulo θ formado, no sentido positivos, entre o semieixo OX e a semirreta OO_2 , temos:

$$|OB| = (R + r) \cos(\theta) \quad \text{e} \quad |OD| = (R + r) \cdot \text{sen}(\theta) \quad (2.13)$$

Se α é a medida do ângulo que AO_2 faz com O_2P , no sentido positivo, então $N\widehat{O_2P} = O\widehat{O_2B} - A\widehat{O_2P} = \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) - \alpha = \frac{\pi}{2} - (\theta + \alpha)$ e portanto no triângulo PNO_2 temos:

$$\begin{aligned} |O_2M| &= r \cdot \text{sen}(N\widehat{O_2P}) = r \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - (\theta + \alpha)\right) = r \cdot \cos(\theta + \alpha), \\ |O_2N| &= r \cdot \cos(N\widehat{O_2P}) = r \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\theta + \alpha)\right) = r \cdot \text{sen}(\theta + \alpha). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Substituindo as identidades 2.13 e 2.14 em 2.12, obtemos

$$\begin{aligned} x &= (R + r) \cdot \cos(\theta) - r \cdot \cos(\theta + \alpha), \\ y &= (R + r) \cdot \text{sen}(\theta) - r \cdot \text{sen}(\theta + \alpha). \end{aligned} \quad (2.15)$$

O comprimento a_1 do arco de A a P ao longo de C_1 é igual ao comprimento a_2 do arco de P_1 a A no círculo C_2 . Como a $a_1 = r\alpha$ e $a_2 = R\theta$ temos $r\alpha = R\theta$, então $\alpha = \frac{R\theta}{r}$.

Substituindo $t = \frac{R\theta}{r}$ em 2.15. obtemos as equações paramétricas de uma epicloide, apenas em função do parâmetro θ .

$$\begin{aligned} x &= (R + r) \cos(\theta) - r \cdot \cos\left(\theta + \frac{R\theta}{r}\right) \\ &= (R + r) \cos(\theta) - r \cdot \cos\left(\left(\frac{R + r}{r}\right)\theta\right), \\ y &= (R + r) \text{sen}(\theta) - r \cdot \text{sen}\left(\theta + \frac{R\theta}{r}\right) \\ &= (R + r) \text{sen}(\theta) - r \cdot \text{sen}\left(\left(\frac{R + r}{r}\right)\theta\right). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Finalmente, as equações paramétricas da epicloide são:

$$\begin{cases} x = (R + r) \cos(\theta) - r \cdot \cos\left(\left(\frac{R + r}{r}\right)\theta\right) \\ y = (R + r) \text{sen}(\theta) - r \cdot \text{sen}\left(\left(\frac{R + r}{r}\right)\theta\right) \end{cases} \quad (2.17)$$

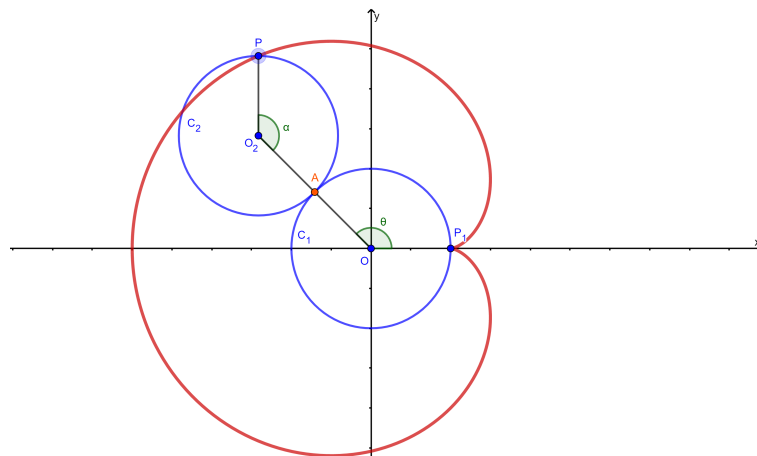


Figura 2.9: cardioide - epicycloide em que $R = r$

Note que quando C_2 percorre um arco de C_1 igual a $2\pi r$, o ponto P volta a tocar C_1 .

Assim, se $\frac{R}{r} = n$, com $n \in \mathbb{N}$, o ponto P toca C_1 n vezes até coincidir pela n -ésima vez com sua posição inicial.

$$\frac{R}{r} = n \implies R = rn \implies C_1 = 2\pi r \implies 2\pi(nr) \implies C_1 = n(2\pi r).$$

A **cardioide** é a epicycloide com $r = R$ ($\iff \theta = \alpha$). Então, pela equação 2.17, as equações paramétricas do cardioide são:

$$\begin{cases} x = 2 \cdot r \cdot \cos(\theta) - r \cdot \cos(2 \cdot \theta) \\ y = 2 \cdot r \cdot \sen(\theta) - r \cdot \sen(2 \cdot \theta) \end{cases} \quad (2.18)$$

Bilhares Planos

Os bilhares que estudaremos nesse capítulo não são exatamente como os jogos de bilhar comuns em ambientes de recreação, contudo, as propriedades que veremos nesse capítulo (na medida do possível) poderão ser utilizadas em suas próximas partidas de bilhar. Na teoria dos *bilhares*, veremos algumas “pequenas” diferenças em relação ao jogo. A primeira é em relação a bola de bilhar, aqui ela é uma partícula sem dimensões, ou seja, a bola de bilhar será apenas um ponto. Além disso, seu movimento no interior da mesa desconsidera o atrito e a partícula tem sempre velocidade constante enquanto se move no interior da mesa. Na fronteira, ela sofre uma reflexão e volta sempre ao interior da mesa, ou seja, normalmente não consideraremos as caçapas e a bola permanecerá em movimento contínuo. Em alguns casos, como veremos a seguir (seção 3.1), se considerarmos a caçapa como um intervalo aberto de raio ϵ , com ϵ suficientemente pequeno teremos condições de analisar se determinadas as condições iniciais, a bola atingirá, após algumas reflexões, a caçapa ou não. Por exemplo, no bilhar no círculo, temos dois tipos de trajetória da bola de bilhar: periódica, ou seja, passa sempre pelos mesmo pontos, ou não periódica (densa), quando ela passa por perto (o quanto queiramos) de todos os pontos da circunferência. No primeiro tipo, a bola só atinge a caçapa se ela contiver um ponto da órbita do bilhar. No segundo tipo, a bola sempre atinge a caçapa, pois a órbita é densa e estamos considerando a caçapa como um intervalo aberto.

No caso dos bilhares na elipse (seção 3.2), se considerarmos o segmento que passa pelos focos F_1 e F_2 , uma trajetória passa por fora do segmento F_1F_2 , nunca irá cruzar esse segmento. Já uma trajetória que cruze este segmento, voltará a cruzá-lo após cada uma de suas reflexões. Por outro lado, se colocarmos a caçapa sobre um dos focos e a bola de bilhar em uma trajetória que passe sobre o outro foco, a bola sempre atingirá a caçapa.

A seguir definiremos com um pouco mais precisão os *Bilhares* mais comuns, e mostraremos algumas propriedades matemáticas que poderão garantir uma boa tacada, levando em conta a posição inicial da bola e o ângulo escolhido.

Definição 3.1: Dizemos que uma curva parametrizada α é suave, se ela não possui “bicos” ou “quinas”. Ou ainda, se α é uma função suave, ou seja, se todas as derivadas

$\alpha', \alpha'', \alpha''', \dots$ existem.

Definição 3.2: Uma curva regular é uma curva parametrizada suave $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $\alpha'(t) \neq 0$, para todo $t \in I$, ver [5].

Definição 3.3: Dizemos que uma curva α é de classe C^n , se a n -ésima derivada de α for uma função contínua.

Definição 3.4: *Bilhar plano* é o sistema dinâmico que descreve o movimento (dinâmica) de uma partícula pontual de massa m (bola de bilhar) no interior de um conjunto compacto e conexo $Q \in \mathbb{R}^2$ cuja fronteira denotada por ∂Q , é uma curva regular ou uma reunião finita de curvas regulares (pelo menos de classe C^3) para que a curvatura¹, dessas curvas, seja de classe C^1 . No interior de Q o movimento é uniforme (velocidade constante) e a reflexão na fronteira ∂Q é elástica ou seja, é obedecida a seguinte regra da óptica geométrica: “o ângulo de incidência é igual ao ângulo refletido”.

Denotando $q_t = (x_t, y_t)$ as coordenadas do movimento da partícula no tempo t e por $v_t = (u_t, w_t)$ seu vetor velocidade, sua posição e velocidade no tempo $t + s$ podem ser expressas como

$$\begin{aligned} x_{t+s} &= x_t + u_t s & u_{t+s} &= u_t \\ y_{t+s} &= y_t + w_t s & w_{t+s} &= w_t. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Seja $Q_0 \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto aberto, conexo e limitado, denotemos por $Q = \overline{Q_0}$ seu fecho.

Definição 3.5: Uma *mesa de bilhar* Q é o fecho de um domínio aberto e conexo $Q \subset \mathbb{R}^2$ tal que ∂Q satisfaz as hipóteses (i – iii).

(i) A fronteira $\Gamma = \partial Q = \cup_i \Gamma_i$, $i = 1, \dots, r$, é uma união finita de curvas suaves. Chama-se Q uma mesa de bilhar e Γ_i parede ou componente de ∂Q . Cada Γ_i é de classe C^k , $k \geq 3$ definida por uma função $f_i : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^k sendo I um intervalo que está parametrizado pelo comprimento do arco;

(ii) As componentes da fronteira Γ_i tem partes comuns apenas em seus extremos, isto é $\Gamma_i \cap \Gamma_j \subset \partial \Gamma_i \cup \partial \Gamma_j$ com $i \neq j$.

Além disso, considere $\Gamma_* := \cup_i \partial \Gamma_i$ e $\tilde{\Gamma} := \Gamma \setminus \Gamma_*$, ou seja, Γ_* são as quinas formadas pelo encontro de duas curvas e $\tilde{\Gamma}$ são as partes que sobram das curvas, excluídas as quinas. Assim, $x \in \Gamma_*$ chama-se ponto de canto de Q e $x \in \tilde{\Gamma}$ um *ponto regular* de fronteira.

(iii) Em cada Γ_i a segunda derivada da curva, f_i'' , ou nunca se anula ou é identicamente nula (assim cada componente Γ_i ou é uma curva sem pontos de inflexão ou é um segmento de reta).

Definição 3.6: Seja $Q \in \mathbb{R}^2$ um domínio com fronteira suave ou suave por partes.

¹Consultar [18] para definição de curvatura e raio de curvatura.

Um bilhar plano corresponde ao movimento livre de uma partícula no interior de Q , com reflexões elásticas na fronteira ∂Q .

As paredes das mesas de bilhar Q podem ser divididas em três tipos, a saber: *Parede Plana* se $f_i'' \equiv 0$; já se $f_i'' \neq 0$ temos *Parede Focalizadora* ou convexa (se vista do interior) e (3) *Parede dispendosa* ou côncava (vista do exterior). Esses nomes padronizados na literatura são oriundos de motivações físicas.

Definição 3.7: Seja $\partial Q = \cup \Gamma_i$, definimos $|\Gamma_i|$, como sendo o comprimento de Γ_i que é claramente finito e $|\partial Q| = \sum_i |\Gamma_i|$ como sendo o perímetro de Q .

Supondo que a posição da partícula seja dada por $q = q(v) \in Q \subset \mathbb{R}^2$, uma vez que v é constante para cada condição inicial dada (v só muda após uma colisão), e $v = v(t) \in \mathbb{R}^2$, com $t \in \mathbb{R}$ o seu vetor velocidade. O movimento da partícula é dado pelo sistema

$$\begin{cases} \dot{q} = v \\ \dot{v} = 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

onde \dot{q} e \dot{v} são respectivas derivadas de q e v .

Quando a partícula, em movimento no interior da mesa de bilhar, colide com a parte regular da fronteira em um ponto $q \in \tilde{\Gamma}$, o vetor velocidade será refletido em relação a reta tangente a Γ em q , de maneira que “o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão” e pode ser obtido por

$$v_{pos} = v_{pre} - 2\langle n(q), v_{pre} \rangle n(q) \quad (3.3)$$

Onde v_{pos} e v_{pre} representam, respectivamente os vetores pós-colisão e pre-colisão, e $n(q)$ é o vetor normal a $\tilde{\Gamma}$ em q .

Note que

$$w = \text{proj}_{-n(q)}(v_{pre}) = \frac{\langle v_{pre}, -n(q) \rangle (-n(q))}{\| -n(q) \|^2} = \langle v_{pre}, n(q) \rangle n(q)$$

e também pela regra do paralelogramo (veja a figura 3.1), segue que

$$2w = v_{pre} - v_{pos} \implies v_{pos} = v_{pre} - 2\langle v_{pre}, n(q) \rangle n(q).$$

Observe que o tamanho (norma) de v_{pre} é igual ao tamanho do v_{pos} .

Observação 3.8: (i) Se a partícula atinge um ponto de canto, ou seja $q \in \Gamma_*$ seu movimento cessará e não estará mais definido para além desse ponto.

(ii) As equações de movimento dadas acima preservam a norma $\|v\|$ e assim pode-se tomar $\|v\| = 1$.

Definição 3.9: Uma colisão é dita *regular* se $q \in \tilde{\Gamma}$ e o vetor \vec{v}_{pre} não é tangente a Γ , neste caso tem-se $v_{pre} \neq v_{pos}$. No caso em que v_{pre} for tangente a Γ em um ponto de colisão tem-se $v_{pre} = v_{pos}$ e essa colisão será chamada de *tangencial*.

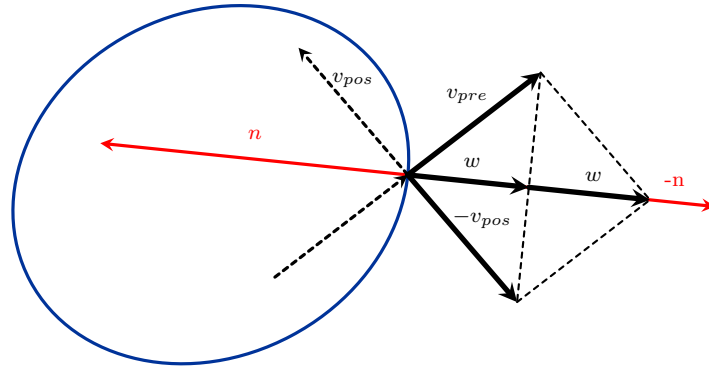


Figura 3.1: Análise geométrica da equação (3.3)

Arbitrando a origem da fronteira a partir da qual medimos o seu comprimento; sejam ∂Q_i as componentes regulares da fronteira (que se cortam nos “vértices” formando “ângulos” do bilhar) e $n(q)$ o vetor normal interior a ∂Q_i em que $q \in \partial Q_i$. Então, o *espaço de fase* onde está definido o sistema dinâmico pode ser parametrizado pelo comprimento de arco s e pelo ângulo θ de saída entre $n(q)$ e o vetor v_{pos} de saída. Suponhamos que o comprimento total de ∂Q seja L . Então o espaço de fase está contido no retângulo $[0, L] \times [-\pi/2, \pi/2]$ ou, mais exatamente, no cilindro \mathcal{R} que obtemos se identificamos de maneira natural as posições $s = 0$ com $s = L$. É neste espaço que representaremos o movimento de uma partícula material se chocando contra os bordos da mesa de bilhar. Neste caso, o que se representa são apenas os choques, os *trechos de trajetórias* (segmentos entre um choque e outro) só são visíveis no espaço de configuração, ou seja, na própria mesa de bilhar.

Seja S a transformação do bilhar tal que $S(s_0, \theta_0) = (s_1, \theta_1)$, onde s_0 e s_1 são respectivamente as coordenadas dos pontos de saída e de chegada (respectivamente) na fronteira e θ_0 e θ_1 são os ângulos de saída das trajetórias em q_0 e $q_1 \in \partial Q$ respectivamente. Lembrando que a função S (ou sua inversa) não está bem definida se q_1 ou q_0 está num vértice da fronteira e é descontínua nos pontos em que a trajetória tangencia a fronteira.

Os vértices da fronteira, os pontos de tangência e as imagens e pré-imagens por S de todos esses pontos denominam-se as *singularidades* de S .

Afirmção 3.10: O vetor velocidade v_t tem norma constante para todo $t \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Seja $v_t = (u_t, w_t)$ o vetor velocidade da partícula no tempo t . Se não houver colisão no intervalo de tempo $[t, t + s]$, as coordenadas do vetor velocidade permanecem constantes (veja a equação (3.1)), logo v_{t+s} tem norma constante. Suponhamos agora que haja uma colisão no intervalo de tempo $[t, t + s]$, assim os vetores velocidade antes e após a colisão são dados pela equação (3.3), ou seja basta mostrar que $\|v_{pos}\| = \|v_{pre}\|$.

Decorre da definição de produto interno que dados α e β pertencentes a um

espaço vetorial tem-se

$$\|\alpha \pm \beta\|^2 = \|\alpha\|^2 + 2\langle \alpha, \beta \rangle + \|\beta\|^2.$$

Fazendo $\alpha = v_{pre}$ e $\beta = 2\langle v_{pre}, n \rangle n$ acima temos

$$\|v_{pre} - 2\langle v_{pre}, n \rangle n\|^2 = \|v_{pre}\|^2 - 2\langle v_{pre}, 2\langle v_{pre}, n \rangle n \rangle + \|2\langle v_{pre}, n \rangle n\|^2$$

Agora, mostrar que $\|v_{pos}\| = \|v_{pre}\|$ é equivalente a mostrar que

$$\|2\langle v_{pre}, n \rangle n\|^2 - 2\langle v_{pre}, n \rangle = 0 \tag{3.4}$$

pois $v_{pos} = v_{pre} - 2\langle v_{pre}, n \rangle n$. De fato,

$$\begin{aligned} \|2\langle v_{pre}, n \rangle n\|^2 &= \langle 2\langle v_{pre}, n \rangle n, 2\langle v_{pre}, n \rangle n \rangle = \\ &= 4\langle v_{pre}, n \rangle^2 \langle n, n \rangle = 4\langle v_{pre}, n \rangle^2 \|n\|^2 = 4\langle v_{pre}, n \rangle^2 \end{aligned}$$

Por outro lado, temos

$$2\langle v_{pre}, 2\langle v_{pre}, n \rangle n \rangle = 4\langle v_{pre}, n \rangle^2$$

Portanto, a equação (3.4) se verifica. \square

Então, a partícula tem a norma da velocidade constante para todo tempo t . Pela Afirmação (3.10), podemos supor $\|v\| = 1$. Assim, o vetor velocidade pode ser expresso em coordenadas angulares, isto é, $v_t = (\cos \omega_t, \sin \omega_t)$, $\omega_t \in [0, 2\pi]$. A aplicação colisão $\mathcal{F} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ representa somente colisões.

3.1 Bilhar no Círculo e no Cardioide

Podemos dizer que o comportamento caótico em sistemas dinâmicos clássicos tem sido um fenômeno bastante estudado, principalmente no bilhar, mesmo assim, ainda desperta grande interesse em novas pesquisas, principalmente porque não temos uma *Teoria do Caos* completa. Modelos específicos tem sido de grande importância para a compreensão e desenvolvimento desta teoria. No caso do bilhar, a geometria da fronteira determina suas características dinâmicas. Vamos usar dois modelos de bilhar conhecidos para ilustrar este ponto: o bilhar circular e o bilhar cardioide.

O movimento no bilhar circular, ocorre de acordo com a Definição (3.4), contudo, a mesa é o disco unitário $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$. O movimento poderá continuar indefinidamente tanto no futuro como no passado. Movimentos periódicos também podem ocorrer. Por exemplo, quando a partícula percorre o diâmetro de \mathcal{D} , seu vetor velocidade ficará invertido a cada colisão, daí teremos um movimento periódico de período dois. Outro exemplo de movimento periódico é quando a partícula percorre os lados de um polígono regular (ver Figura (3.7)).

Nos estudos de sistemas dinâmicos o principal objetivo é descrever a evolução do sistema durante longos períodos de tempo e seu comportamento assintótico quando $t \rightarrow \infty$.

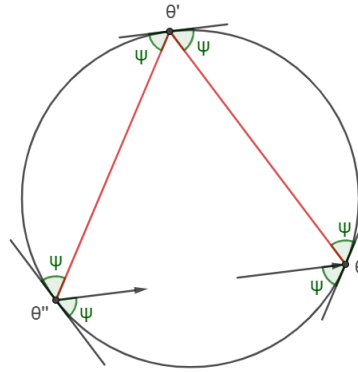


Figura 3.2: Movimento do bilhar no círculo

Parametrizamos o círculo unitário $x^2 + y^2 = 1$ pelo ângulo $\theta \in [0, 2\pi]$, $\mathcal{C} = \{\cos(\theta), \sin(\theta), 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$, e denotemos por $\psi \in [0, \pi]$ o ângulo de reflexão como mostrado na Figura (3.2).

Proposição 3.11: Para cada $n \in \mathbb{Z}$, seja θ_n o n -ésimo ponto de colisão e ψ_n o ângulo de colisão correspondente, então

$$\begin{aligned} \theta_{n+1} &= \theta_n + 2\psi_n \pmod{2\pi} \\ \psi_{n+1} &= \psi_n \end{aligned} \tag{3.5}$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Demonstração. Seja θ_1 o ponto do círculo da primeira colisão da trajetória z . Observando a figura (3.3) notamos que o triângulo $\theta_0 C \theta_1$ é isósceles. Logo o ângulo de incidência em θ_1 é ψ_0 e o ângulo central é $2\psi_0$ ($\alpha + 2(\pi/2 - \psi_0) = \pi$). Assim se $z_1 = T_z$, temos que $z_1 = (\theta_0 + 2\psi, \psi)$ e o resultado segue por indução. \square

Corolário 3.12: Seja (θ_0, ψ_0) os parâmetros iniciais de uma órbita. Então

$$\begin{aligned} \theta_n &= \theta_0 + 2n\psi_0 \pmod{2\pi} \\ \psi_{n+1} &= \psi_0 \end{aligned}$$

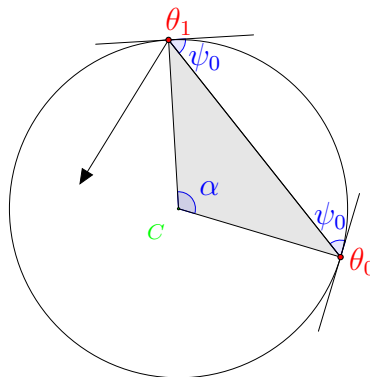


Figura 3.3: Construção do bilhar circular

Em relação ao espaço de configuração, a conexão do caminho entre dois choques consecutivos terá sempre o mesmo comprimento [15]. Observe na figura (3.4) que os triângulos $\triangle C\theta\theta'$ e $\triangle C\theta'\theta''$ são congruentes, pois os segmentos $C\theta$, $C\theta'$ e $C\theta''$ são raios do círculo, e os ângulos $\theta\hat{C}\theta'$ e $\theta'\hat{C}\theta''$ tem a mesma medida, conforme equação (3.5), (caso Lado-Ângulo-Lado).

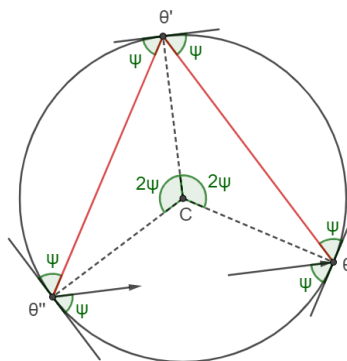


Figura 3.4: Trajetórias no bilhar no círculo

No *espaço de fase*, conforme definido anteriormente, as colisões são caracterizadas por dois parâmetros: O ponto θ e o ângulo ψ . No bilhar circular, ele apresenta segmentos de reta, que são ocasionados pelo fato que, se uma partícula, após o impacto com a fronteira, sair com um ângulo ψ_0 , todos os demais choques posteriores desta partícula ocorrerão sempre com o mesmo ângulo ψ_0 , conforme a equação (3.5). Sendo assim, a representação dos choques desta trajetória no espaço de fases estará restrita a um segmento de reta horizontal.

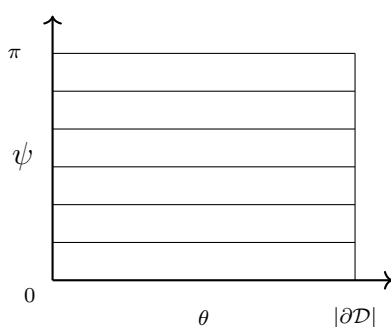


Figura 3.5: Espaço de fase do bilhar circular

A rotação rígida do círculo é um exemplo bem conhecido no estudo dos Sistemas Dinâmicos. As rotações por meio de ângulos racionais são periódicas, enquanto aquelas que ocorrem por meio de ângulos irracionais são densas, propriedades que provaremos adiante. [8].

Definição 3.13: Dizemos que a rotação de um ângulo é irracional se o número α/π é irracional, caso contrário, dizemos que a rotação é racional.

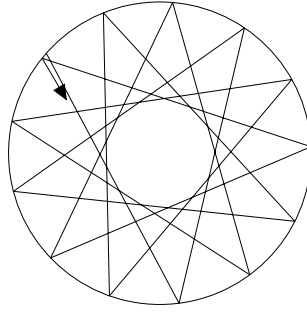


Figura 3.6: Trajetória não periódica

Proposição 3.14: Se $\psi < \pi$ é um múltiplo racional de π , isto é, $\psi/\pi = m/n$, com $m, n \in \mathbb{Z}$, então a rotação do círculo \mathcal{C}_ψ é periódica de período n , ou seja cada ponto do círculo é periódico de período n ou ainda $\mathcal{F}^n(\theta, \psi) = (\theta, \psi)$ para cada $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Demonstração. Temos que

$$\frac{\psi}{\pi} = \frac{m}{n} \implies 2\psi = 2\pi \frac{m}{n}$$

Fixando $0 \leq \theta \leq 2\pi$, pela equação 3.5, segue que

$$\mathcal{F}(\theta, \psi) = (\theta + 2\psi \pmod{2\pi}, \psi) = (\theta + 2\pi \frac{m}{n} \pmod{2\pi}, \psi)$$

$$\mathcal{F}^2(\theta, \psi) = (\mathcal{F}(\theta, \psi) + 2\psi \pmod{2\pi}, \psi) = (\theta + 4\pi \frac{m}{n} \pmod{2\pi}, \psi)$$

$$\mathcal{F}^3(\theta, \psi) = (\mathcal{F}^2(\theta, \psi) + 2\psi \pmod{2\pi}, \psi) = (\theta + 6\pi \frac{m}{n} \pmod{2\pi}, \psi)$$

\vdots

$$\mathcal{F}^n(\theta, \psi) = (\mathcal{F}^{n-1}(\theta, \psi) + 2\psi \pmod{2\pi}, \psi) = (\theta + 2n\pi \frac{m}{n} \pmod{2\pi}, \psi)$$

Logo,

$$\mathcal{F}^n(\theta, \psi) = (\theta + 2m\pi \pmod{2\pi}, \psi) \implies \mathcal{F}^n(\theta, \psi) = (\theta \pmod{2\pi}, \psi).$$

Ou seja,

$$\mathcal{F}^n(\theta, \psi) = (\theta, \psi).$$

□

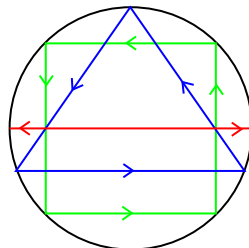


Figura 3.7: Exemplos de órbitas periódicas no círculo

Definição 3.15: Seja X um espaço topológico. Dizemos que o sistema dinâmico $f : X \rightarrow X$ é minimal se a órbita de cada ponto $x \in X$ é densa em X .

Proposição 3.16: Se ψ é irracional então a rotação R_ψ é minimal.

Demonstração. Seja $A \subset S^1$ o fecho de uma órbita. Se a órbita não é densa, o complementar $S^1 \setminus A$ é um conjunto aberto, invariante e não vazio que consiste em intervalos disjuntos. Seja I o maior desses intervalos (ou um dos maiores, se existirem vários do mesmo comprimento). Como a rotação conserva o comprimento de qualquer intervalo, os iterados $R_\psi^n I$ não se sobrepõem. Caso contrário $S^1 \setminus A$ conteria um intervalo maior que I . Como ψ é irracional, nenhum iterado de I pode coincidir; se não uma extremidade x de um iterado de I volta nele mesmo e teríamos $x + k\psi = x \pmod{1}$ com $K\psi = l$ um inteiro e ψ/k um número racional. Assim os intervalos $R_\psi^n I$ são todos de comprimentos iguais e disjuntos, o que é impossível pois o círculo possui comprimento finito e a soma dos comprimentos de intervalos disjuntos não pode exceder o comprimento do círculo. \square

Agora, vamos mostrar uma interessante e muito importante propriedade sobre o bilhar circular. Ela diz que cada segmento entre duas colisões consecutivas de uma trajetória é tangente a uma curva.

Afirmção 3.17: Cada segmento da trajetória da partícula entre colisões consecutivas é tangente ao círculo $S_\psi = \{x^2 + y^2 = \cos^2 \psi\}$ concêntrico ao disco \mathcal{D} . Além disso, se ψ/π é irracional, então as trajetórias preenchem densamente o anel entre $\partial\mathcal{D}$ e o círculo menor S_ψ .

Demonstração. Seja $O = (0,0)$ o centro do disco \mathcal{D} . Consideremos em \mathcal{D} duas trajetórias consecutivas tais que $\theta = (x,y)$ e $\theta' = (x',y')$ são pontos de colisão consecutivos dessas trajetórias. Seja $P \in \overline{\theta\theta'}$ tal que $\overline{OP} \perp \overline{\theta\theta'}$. Temos que os triângulos $\triangle O\theta P$ e $\triangle O\theta' P$ são semelhantes, daí $\theta\widehat{O}P = \theta'\widehat{O}P = \psi$, pois $\theta\widehat{O}\theta' = 2\psi$. Logo, concluímos que P é o ponto médio de $\overline{\theta\theta'}$, isto é, $P = \left(\frac{x+x'}{2}, \frac{y+y'}{2}\right)$.

Afirmamos que $P \in S_\psi$.

De fato, observe que

$$\text{dist}(O, P) = \sqrt{\left(\frac{x+x'}{2}\right)^2 + \left(\frac{y+y'}{2}\right)^2} \implies \cos \psi = \sqrt{\left(\frac{x+x'}{2}\right)^2 + \left(\frac{y+y'}{2}\right)^2}$$

$$\text{assim, } \cos^2 \psi = \left(\frac{x+x'}{2}\right)^2 + \left(\frac{y+y'}{2}\right)^2.$$

Portanto, $P \in S_\psi$. Como P é o único ponto com a propriedade de que $\overline{OP} \perp \overline{\theta\theta'}$, segue que $\overline{\theta\theta'}$ é tangente à S_ψ em P .

Para a segunda parte, tomemos um ponto P qualquer no anel entre $\partial\mathcal{D}$ e o círculo menor S_ψ . Dado $\epsilon > 0$, seja $B(P, \epsilon)$ a bola de centro P e raio ϵ . Seja r a reta por P tangente a S_ψ , assim r intersecta $\partial\mathcal{D}$ em dois pontos, denotemos

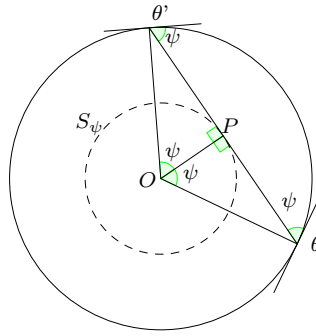


Figura 3.8: Construção auxiliar demonstração 3.17 (i)

por Q um desses pontos, isto é, $Q \in \partial\mathcal{D} \cap r$. Temos que a rotação por ângulo 2ψ é irracional, pois $2\psi/\pi$ é irracional por hipótese, conseqüentemente a órbita de todo (θ, ψ) é densa no bordo $\partial\mathcal{D}$ devido a minimalidade da rotação. Logo, existe um ponto $R \in \partial\mathcal{D}$ tal que $dist(Q, R) < \epsilon$.

Sejam, a trajetória l do bilhar que sai do ponto R (a qual é tangente a S_ψ), e s a reta passando por P e paralela ao segmento \overline{QR} . Denotemos por $E = l \cap s$. Para reforçar a ideia, observe na figura (3.9) que $dist(P, E) < dist(Q, R) < \epsilon$. Ou seja, dado qualquer ponto P no anel entre $\partial\mathcal{D}$ e o círculo menor S_ψ , temos que a trajetória do bilhar passando por P . Isso conclui a demonstração.

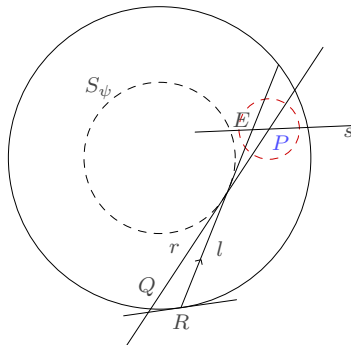


Figura 3.9: Construção auxiliar demonstração 3.17 (ii)

□

O círculo S_ψ definido acima, com a propriedade que cada segmento da trajetória de uma partícula entre duas colisões consecutivas é tangente a ele, é denominado *cáustica*. No bilhar no círculo, as *cáusticas* são círculos concêntricos. Vários tipos de bilhares possuem cáusticas, ver por exemplo, [12] para a prova de existência de cáusticas em domínios focalizadores.

Sintetizando os resultados apresentados temos que,

- Todo segmento que representa uma trajetória do bilhar, tem o mesmo comprimento, e é tangente a uma circunferência concêntrica denominada *cáustica*.

- Se ψ for um múltiplo irracional de π , a partícula descreve uma órbita que continuamente atinge pontos diferentes do círculo, preenchendo um anel no interior da mesa (entre o círculo e a *cáustica*, como mostra a Figura 3.10).
- Caso contrário, ou seja ψ for um múltiplo racional de π , a órbita é periódica, como a da Figura 3.7.

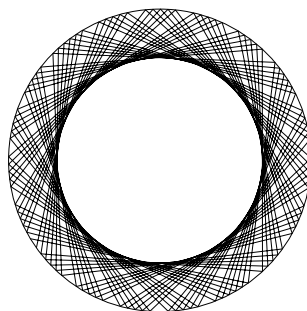


Figura 3.10: Exemplo de formação de cáustica no círculo.

O bilhar circular e o bilhar cardioide, podem ser obtidos a partir da mesma equação paramétrica dada em coordenadas polares, por

$$\rho(\psi) = 1 + \epsilon \cos(\psi), \quad \psi \in [0, 2\pi]. \quad (3.6)$$

Onde, para $\epsilon = 0$, obtemos um bilhar circular, e para $\epsilon = 1$, obtemos um bilhar cardioide. Arbitrando uma condição inicial, podemos obter iterações (colisão com a fronteira) e visualizar geometricamente a dinâmica destes bilhares, conforme mostrado nas Figuras (3.11) e (3.12). Já mostramos que o bilhar circular tem dinâmica regular (sistema integral), ver [4], e sabe-se que um bilhar cardioide tem dinâmica completamente caótica [3], o que significa que trajetórias vizinhas são separadas exponencialmente como uma função do tempo (hiperbolicidade) e uma trajetória típica preencherá uniformemente o espaço de configuração disponível (ergodicidade).

Mais especificamente, para o caso de um bilhar no círculo, os segmentos que aparecem em seu espaço de fase são causados pelo fato de que se uma partícula sai com um ângulo ψ_0 e após colidir com a fronteira, todos os choques subsequentes daquela partícula sempre ocorrerão com o mesmo ângulo ψ_0 , onde portanto, a representação do impacto da trajetória no espaço de fase será limitada a um segmento de reta horizontal.

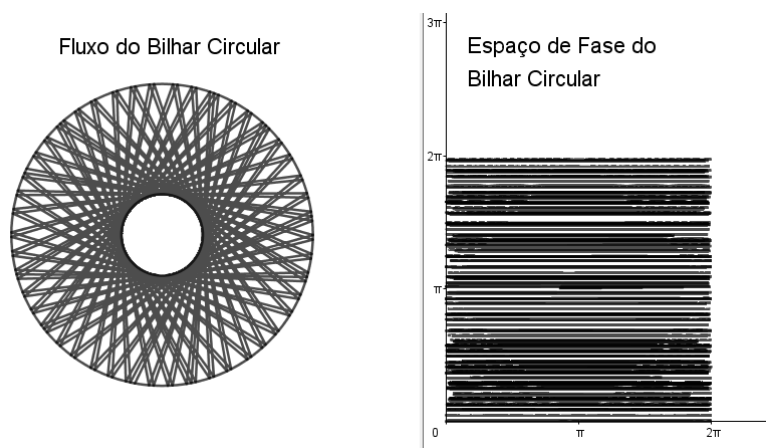


Figura 3.11: Fluxo e espaço de fase no bilhar circular construídos no GeoGebra.

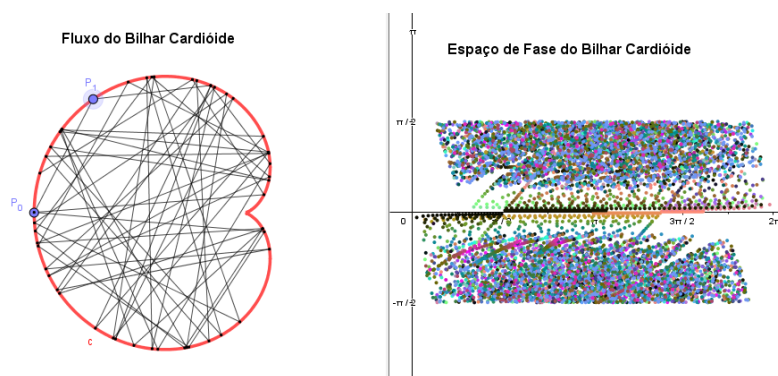


Figura 3.12: Fluxo e espaço de fase no bilhar cardióide construídos no GeoGebra.

3.2 Bilhar na Elipse

Um outro exemplo simples e que permite uma análise bastante elementar é o bilhar em uma elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

com $a > 0$ e $b > 0$. Foi esse exemplo que Birkhoff descreveu no primeiro livro sobre bilhares, em 1927 (ver [6]).

Seja o bordo de uma região \mathcal{D} a elipse $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a > b > 0\}$ de foco F_1 e F_2 . Por definição, uma elipse é o conjunto dos pontos $P \in \mathbb{R}^2$ tais que a soma das distâncias de A aos dois focos é igual a uma constante, ou seja $dist(A,F_1) + dist(A,F_2) = k$.

Os lemas a seguir podem ser encontrados em [13], e serão usados para demonstrar a próxima proposição.

Lema 3.18: Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 . Então o gradiente de f , $\nabla f(x,y)$, é perpendicular às curvas de nível de f , ou seja é perpendicular à reta

tangente à curva no ponto de tangência.

Note que também pode dizer que $\nabla f(x,y)$ é normal à curva.

Lema 3.19: Seja G um ponto do plano e $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(X) = |X - G|$, então g é derivável em $\mathbb{R}^2 \setminus \{G\}$ e $\nabla g(X) = \frac{X - G}{|X - G|}$.

Proposição 3.20: Sejam $P \in \partial\mathcal{D}$ e L a reta tangente à elipse por P . Então os segmentos PF_1 e PF_2 fazem ângulos iguais com L .

Demonstração. Definida $f : \partial\mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$f(X) = \text{dist}(X, F_1) + \text{dist}(X, F_2) = |X - F_1| + |X - F_2| = c$$

para valores de $c > |F_1 - F_2|$. Podemos escrever

$$f(X) = f_1(X) + f_2(X), \text{ onde } f_1(X) = |X - F_1| \text{ e } f_2(X) = |X - F_2|. \text{ Logo,}$$

pelo Lema 3.19, temos que $\nabla f_1(X) = \frac{X - F_1}{|X - F_1|}$ e $\nabla f_2(X) = \frac{X - F_2}{|X - F_2|}$. Então,

$$\nabla f(X) = \frac{X - F_1}{|X - F_1|} + \frac{X - F_2}{|X - F_2|}, \text{ daí o gradiente de } f \text{ é a soma de dois vetores}$$

unitários nas direções de F_1X e F_2X .

Logo, os vetores unitários formam com a normal à curva (gradiente de f) ângulos iguais. Veja a figura 3.13 para fixar a ideia. Como P é um ponto qualquer de $\partial\mathcal{D}$, segue o resultado.

□

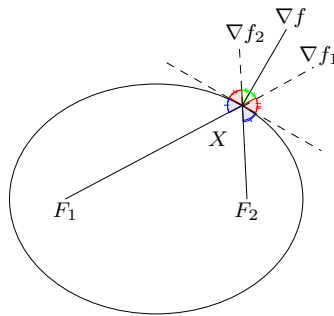


Figura 3.13: Construção geométrica da Proposição 3.13.

Observação 3.21: Segue dos resultados acima que $\nabla f(X)$ bissecta o ângulo $F_1\hat{X}F_2$ e é perpendicular a tangente.

Assim, se uma partícula segue na direção e sentido do vetor $A - F_1$, então após colidir em A , a partícula segue na direção do vetor $A - F_2$, mas com sentido contrário,

ou seja, em direção ao segundo foco. Portanto, se a trajetória do bilhar passa por um dos focos, após colidir com $\partial\mathcal{D}$ tal trajetória irá sempre para o outro foco.

Vamos parametrizar a elipse pelas coordenadas (r, ψ) , onde r é um parâmetro comprimento de arco na elipse e ψ é o mesmo ângulo definido na Seção 3.1 (o ângulo de reflexão em r medido a partir da tangente). Convencionamos o ponto referência $r = 0$ como sendo a extremidade $(a, 0)$ na elipse e r orientado no sentido anti-horário.

Seja $\lambda = |\partial\mathcal{D}|$ o comprimento da elipse $\partial\mathcal{D}$. O espaço de fase da aplicação do bilhar na elipse é o cilindro $\mathcal{M} = [0, \lambda] \times [0, \pi]$ (ou retângulo, imaginando \mathcal{M} com os lados esquerdo e direito identificados).

Lema 3.22: Sejam A_0A_1 e A_1A_2 segmentos consecutivos de uma mesma trajetória do bilhar elíptico com focos F_1 e F_2 . Então, os ângulos $\widehat{A_0A_1A_2}$ e $\widehat{F_1A_1F_2}$ tem a mesma bissetriz.

Demonstração. Pela definição da aplicação do bilhar, os ângulos que A_0A_1 e A_1A_2 fazem com a reta tangente à elipse no ponto A_1 são iguais. Dado que A_0 , A_1 e A_2 não são colineares, o ângulo que A_0A_1 faz com a bissetriz de $\widehat{A_0A_1A_2}$ é igual ao ângulo que A_1A_2 faz com a mesma bissetriz.

Sejam $\theta = \widehat{A_0A_1F_1}$ e $\Lambda = \widehat{F_2A_1A_2}$. Se $\theta = \Lambda$ então as bissetrizes dos ângulos $\widehat{A_0A_1A_2}$ e $\widehat{F_1A_1F_2}$ coincidem. Agora, pela Proposição 3.20, os ângulos que F_1A_1 e F_2A_1 fazem com a tangente a curva no ponto A_1 são iguais, o que prova que $\theta = \Lambda$.

Logo, as igualdades entre ângulos verificadas provam que as bissetrizes coincidem. □

Proposição 3.23: Se a trajetória do bilhar cruza o segmento F_1F_2 que une os dois focos, então ela reflete em $\partial\mathcal{D}$ e cruza o segmento novamente. Da mesma forma, se a trajetória cruza o eixo maior fora do segmento F_1F_2 , digamos a esquerda de F_1 , então após colidir com $\partial\mathcal{D}$ cruzará o eixo maior a direita de F_2 .

Demonstração. Sejam A_0A_1 e A_1A_2 segmentos consecutivos da mesma trajetória.

Segue do Lema 3.22 que $\widehat{A_0A_1A_2}$ e $\widehat{F_1A_1F_2}$ tem a mesma bissetriz. Logo, se A_0A_1 intersecta F_1F_2 , então A_1A_2 também intersecta F_1F_2 . Se A_0A_1 não intersecta F_1F_2 , então A_1A_2 também não vai intersectar F_1F_2 . Por indução sobre n , sendo A_0, \dots, A_n os pontos em que a trajetória colide com o bordo $\partial\mathcal{D}$, prova-se que se um dos segmentos da trajetória intersecta F_1F_2 então os restantes também intersectam.

Analogamente, se prova que se um dos seus segmentos não intersecta F_1F_2 então nenhum dos restantes intersecta F_1F_2 . □

Assim de acordo com a Proposição 3.23 existem três tipos de trajetórias no bilhar elíptico:

- as que passam pelos focos;

- as que cruzam o segmento F_1F_2 , que chamaremos de *Trajelórias interiores*;
- as que cruzam o eixo maior da elipse fora do segmento F_1F_2 , que chamaremos de *Trajelórias exteriores*.

O próximo resultado (Teorema 3.27) é considerado uma das propriedades mais importantes do bilhar elíptico. Ele nos garante que para cada tipo de trajetória (interior ou exterior) existe uma curva onde cada segmento entre duas rebatidas consecutivas da trajetória é tangente a essa curva. Este resultado também é verdadeiro para o bilhar no círculo (Afirmção 3.17). E como mencionado anteriormente, curvas com essa propriedade são chamadas de cáusticas. Antes de porv-lo precisamos da definição de hipérbole, Definição 3.24, que aparecerá na prova do Teorema 3.27, e do Lema 3.25.

Definição 3.24: Uma hipérbole é o conjunto dos pontos $A \in \mathbb{R}^2$ tais que a diferença das distâncias de P aos dois focos F_1 e F_2 em valor absoluto e constante.

Observação 3.25: Dado um ponto A na hipérbole de focos F_1 e F_2 , segue de um argumento análogo ao da Proposição 3.20, que a reta tangente à A bissecta o ângulo $F_1\hat{A}F_2$, para fixar ideias, veja a Figura 3.14.

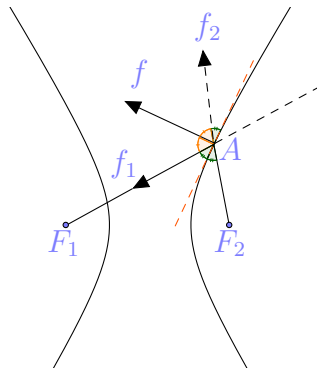


Figura 3.14: Construção auxiliar 3.25

Lema 3.26: Seja B um ponto pertencente à elipse de focos F_1 e F_2 e pertencente também a um segmento A_0A_1 , tal que o ângulo $A_0\hat{B}F_1$ é igual ao ângulo $F_2\hat{B}A_1$. Então A_0A_1 é tangente à elipse no ponto B .

Demonstração. Se o ângulo $A_0\hat{B}F_1$ é igual ao ângulo $F_2\hat{B}A_1$ então necessariamente pela Proposição 3.20 a reta que contém A_0 e A_1 deve coincidir com a reta tangente à elipse por B . □

Teorema 3.27: Seja ϵ a elipse de focos F_1 e F_2 . Para cada trajetória exterior existe uma elipse confocal com ϵ que é tangente a cada segmento entre duas rebatidas dessa trajetória. Para cada trajetória interior existe uma hipérbole confocal com ϵ que é tangente a cada segmento entre duas rebatidas dessa trajetória.

Demonstração. Dada ϵ a elipse de focos F_1 e F_2 . Sejam A_1, A e A_2 pontos dessa elipse tais que A_1A e AA_2 são dois segmentos consecutivos da mesma trajetória.

Assuma que A_1A não intersecta F_1F_2 . Segue do Lema 3.22 que $A_1\widehat{F}A_1 = A_2\widehat{A}F_2$. Refletindo F_1 relativamente a A_1A obtém-se B_1 e refletindo F_2 relativamente a AA_2 obtém-se B_2 . Sejam $C_1 = B_1F_2 \cap A_1A$ e $C_2 = B_2F_1 \cap AA_2$.

Considere a elipse ϵ_1 confocal a ϵ , passando por C_1 . Temos que $F_2\widehat{C}_1A = F_1\widehat{C}A_1$, pois $A\widehat{C}F_2 = A_1\widehat{C}B_1$ (ângulo oposto pelo vértice) e $A_1\widehat{C}_1B_1 = A_1\widehat{C}_1F_1$ (pela simetria). Para fixar ideias veja Figura 3.15.

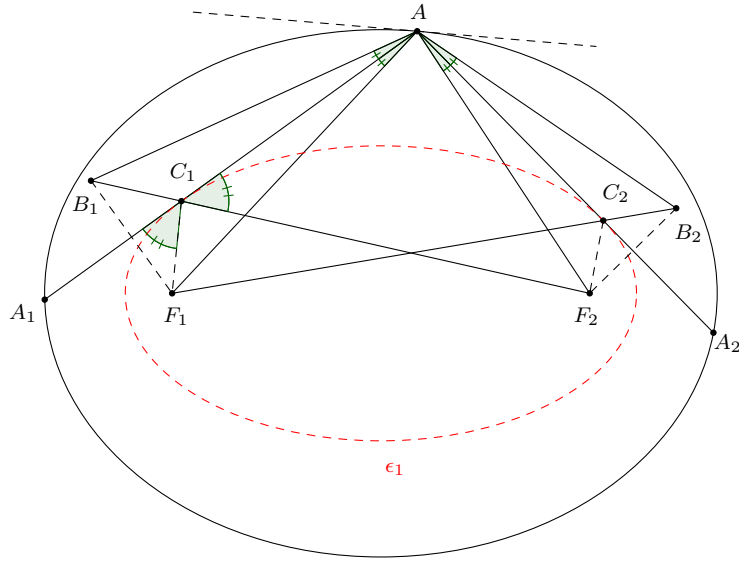


Figura 3.15: Teorema 3.27

Pelo lema anterior, ϵ_1 é tangente à A_1A em C_1 . Da mesma forma, uma outra elipse ϵ_2 confocal à ϵ é tangente à AA_2 em C_2 . Se mostrarmos que a elipse ϵ_1 é igual a elipse ϵ_2 , o teorema fica provado para o caso de trajetórias exteriores.

De fato, queremos mostrar que

$$|F_1C_1| + |C_1F_2| = |F_1C_2| + |C_2F_2|,$$

o que se reduz à $|B_1F_2| = |F_1B_2|$. Note que

$$B_1\widehat{A}A_1 = A_1\widehat{A}F_1 = F_2\widehat{A}A_2 = A_2\widehat{A}B_2.$$

Assim os triângulos $\triangle F_1AB_2$ e $\triangle B_1AF_2$ são congruentes, pois $|AF_1| = |AB_1|, |AB_2| = |AF_2|$ e $F_1\widehat{A}B_2 = B_1\widehat{A}F_2$. Portanto $|B_1F_2| = |F_1B_2|$ como queríamos. Suponhamos agora que A_1A intersecta o segmento F_1F_2 . Faremos uma construção semelhante a feita anteriormente. Com a mesma notação, refletimos F_1 e F_2 relativamente à A_1A e AA_2 , respectivamente, e obtemos B_1 e B_2 (resp.). Denotemos por C_1 a interseção da reta determinada por F_2 e B_1 com o segmento A_1A e, por C_2 , a interseção da reta determinada por F_1 e B_2 com o segmento AA_2 . Consideremos uma hipérbole h_1 confocal à ϵ passando por C_1 . Como $F_1\widehat{C}_1A = B_1\widehat{C}_1A$, então pela Observação 3.25, h_1 é tangente à A_1A . Analogamente, uma

outra hipérbole h_2 é tangente à AA_2 em C_2 . Vamos mostrar que as duas hipérboles são as mesmas.

De fato, queremos mostrar que

$$||F_1C_1| - |F_2C_1|| = ||F_2C_2| - |F_1C_2||.$$

Note que

$$||F_1C_1| - |F_2C_1|| = ||F_1C_1| - (|F_2B_1| + |B_1C_1|)| = |F_2B_1|,$$

pois $|B_1C_1| = |F_1C_1|$ (pela simetria) e

$$||F_1C_2| - |F_2C_2|| = ||F_1B_2| + (|B_2C_2| - |F_2C_2|)| = |F_1B_2|.$$

Assim, basta mostrar que $|F_2B_1| = |F_1B_2|$.

Temos que os triângulos $\triangle F_1AB_2$ e $\triangle B_1AF_2$ são congruentes, pois $|AF_1| = |AB_1|$, $|AB_2| = |AF_2|$ e $F_1\hat{A}B_2 = B_1\hat{A}F_2$.

Portanto, $|F_2B_1| = |F_1B_2|$. □

Resumindo o que foi feito ate aqui,

- se a trajetória passar entre os focos, todos os outros trechos de trajetória entre colisões sucessivas também passarão por entre os focos preenchendo uma área delimitada por uma hipérbole confocal à elipse (cáustica hiperbólica, Figura 3.17);
- se a trajetória passar entre um dos focos e a elipse, a órbita manterá esse padrão preenchendo uma área entre a mesa e a cáustica definida por uma elipse confocal à original (cáustica elíptica, Figura 3.16);
- passando sobre um dos focos, nossa terceira possibilidade, todos os segmentos de trajetória passarão por cima de um dos focos.

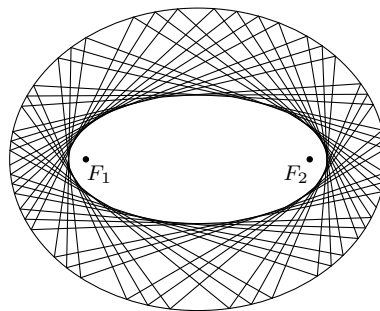


Figura 3.16: Exemplo de formação de cáustica elíptica.

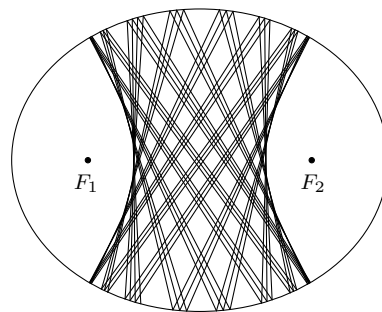


Figura 3.17: Exemplo de formação de cáustica hiperbólica

O espaço de fase do bilhar elíptico é folheado pelas curvas de nível de G , conforme Figura 3.18. Nesta figura,

- na curva com formato de ∞ estão as famílias de órbitas que passam pelos focos;
- as órbitas que descrevem uma hipérbole como cáustica (órbitas interiores) são as curvas no interior da região com o formato de ∞ ;
- as curvas fora dessa região são as formadas pelas órbitas com cáustica elíptica (órbitas exteriores);
- as órbitas periódicas de período dois estão representadas em quatro pontos desse espaço de fase: as interseções dos ramos da região com formato de ∞ representam a órbita periódica sobre o eixo maior e os centros desse mesmos ramos representam a órbita periódica sobre o eixo menor.

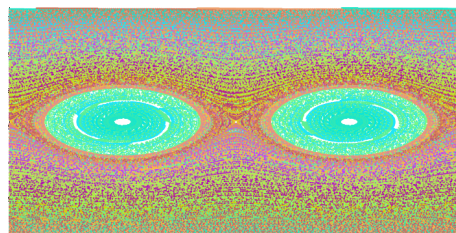
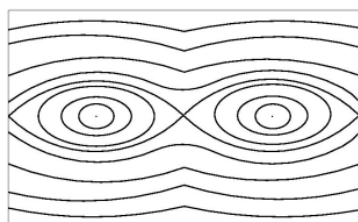


Figura 3.18: Espaço de fase do bilhar elíptico.

Roteiros de Construção de Bilhares no GeoGebra

Nesta seção apresentamos roteiros com o passo a passo de construção de alguns bilhares. Para isso utilizamos o software de matemática dinâmica GeoGebra, um software de código aberto e livre distribuição para fins não comerciais. Mais informações e instruções sobre o software GeoGebra e sua utilização, podem ser obtidas em [14], [2], [1] ou em uma rápida pesquisa na internet.

Alguns (poucos) modelos de bilhar podem ser encontrados nos materiais disponibilizados no site oficial do GeoGebra, porém eles se baseiam na construção individual de cada ponto da órbita, demandando muito tempo para sua realização. Essa é uma indesejável limitação às construções, uma vez que a quantidade de pontos da órbita pode influenciar muito na qualidade da construção.

Apresentamos seis modelos de construção de bilhar com três tipos de mesa, a circunferência, a elipse e o cardioide. Essas construções, com exceção da primeira 4.1, utilizam um método de construção que baseado no ambiente de “Planilha” do GeoGebra. Em nossa pesquisa não foram encontrados outros registros de método semelhante de construção. Além disso, o uso desse ambiente nos possibilitou construir também o *espaço de fase* dos bilhares, uma novidade nas construções utilizando o GeoGebra.

4.1 Bilhar na Circunferência - Modelo 1

Esse modelo de construção de bilhar busca exibir a órbita de um bilhar dadas as condições iniciais, P_k , $k \geq 0$, o ponto da circunferência, e $\sqrt{c} \cdot b$ ângulo que o segmento que representa a trajetória de P_k à P_{k+1} faz com a tangente à circunferência em P_k .

- Na barra de ferramentas, selecionar a ferramenta “*Controle Deslizante*” e clicar em qualquer lugar da “*Janela de Visualização*” para criar o “*Controle Deslizante*” para o parâmetro a , no formato de ângulo, variando de 0° à 360° e incremento 1° . Este parâmetro indica a posição de P_0 na circunferência (parametrizada pelo comprimento de arco);

- Criar o “Controle Deslizante” para o parâmetro b , no formato de ângulo variando de 0° à 360° , com incremento de 1° . Este parâmetro combinado com o parâmetro c (que criaremos em seguida) indica o ângulo que o segmento f_k , trajetória $P_k P_{k+1}$, faz com a tangente à circunferência d em P_k ;
- Criar o “Controle Deslizante” para o parâmetro c , variando de 1 a 10, com incremento igual a 1. Este parâmetro nos permitirá definir se o ângulo $\sqrt{c} \cdot b$ será racional ou irracional;
- Criar o “Controle Deslizante” para o parâmetro k variando de 1 a 1000, com incremento igual a 1. Este parâmetro indica o número de iterações que faremos no bilhar;
- Inserir circunferência parametrizada pelo comprimento do arco. A curva $d = \text{Curva}(\cos(a), \sin(a), a, 0^\circ, 360^\circ)$. Para isso digitar no “Campo de Entrada” a expressão: $d = \text{curva}(\cos(a), \sin(a), a, 0^\circ, 360^\circ)$;
- Inserir o ponto P_k . No “Campo de Entrada” inserir a expressão:
 $P_{\{k\}} = (\cos(a + k \cdot 2 \cdot \sqrt{c} \cdot b), \sin(a + k \cdot 2 \cdot \sqrt{c} \cdot b))$.
 A expressão deverá ficar assim:
 $P_k = (\cos(a + k \cdot 2 \cdot \sqrt{c} \cdot b), \sin(a + k \cdot 2 \cdot \sqrt{c} \cdot b))$;
- Inserir o ponto P_{k+1} . No “Campo de Entrada” inserir a expressão:
 $P_{\{k+1\}} = (\cos(a + (k+1) \cdot 2 \cdot \sqrt{c} \cdot b), \sin(a + (k+1) \cdot 2 \cdot \sqrt{c} \cdot b))$.
 A expressão deverá ficar assim:
 $P_{k+1} = (\cos(a + (k+1) \cdot 2 \cdot \sqrt{c} \cdot b), \sin(a + (k+1) \cdot 2 \cdot \sqrt{c} \cdot b))$;
- Inserir o ponto P_{k+2} . No “Campo de Entrada” inserir a expressão
 $P_{\{k+2\}} = (\cos(a + (k+2) \cdot 2 \cdot \sqrt{c} \cdot b), \sin(a + (k+2) \cdot 2 \cdot \sqrt{c} \cdot b))$.
 A expressão deverá ficar assim:
 $P_{k+2} = (\cos(a + (k+2) \cdot 2 \cdot \sqrt{c} \cdot b), \sin(a + (k+2) \cdot 2 \cdot \sqrt{c} \cdot b))$;
- Inserir o segmento f que representa a trajetória P_k à P_{k+1} . No “Campo de Entrada”, inserir a expressão $f = \text{Segmento}(P_k, P_{k+1})$;
- Habilitar o rastro do segmento f . O que pode ser feito clicando com o botão direito do mouse sobre o segmento e marcando essa opção;
- Inserir o segmento f_{k+1} que representa a trajetória P_{k+1} à P_{k+2} . No “Campo de Entrada”, inserir a expressão $f_{k+1} = \text{Segmento}(P_{k+1}, P_{k+2})$;
- Habilitar o rastro do segmento f_{k+1} . O que pode ser feito clicando com o botão direito do mouse sobre o segmento e marcando essa opção;
- Inserir a *cáustica*. No “Campo de Entrada”, inserir a expressão:
 $d_b : x^2 + y^2 = \cos^2(\sqrt{c} \cdot b)$. A expressão deverá ficar assim:
 $d_b : x^2 + y^2 = \cos^2(\sqrt{c} \cdot b)$;

Variando o parâmetro k teremos as iteradas de P_k . Como os segmentos f_k e f_{k+1} estão com o rastro ativo, a variação do parâmetro k nos permitirá ver um grande número de trajetórias no interior do bilhar. Variando o parâmetro c temos que quando o número \sqrt{c} representar um número racional a órbita do bilhar será periódica, quando o número \sqrt{c} representar um número irracional a órbita não será periódica fazendo com que “quase” todos os pontos do círculo d façam parte, em algum momento, da órbita do bilhar e suas trajetórias preenchem densamente o anel $d \setminus d_b$. Além disso podemos observar que todas as trajetórias do bilhar são tangentes à circunferência d_b , chamada cáustica.

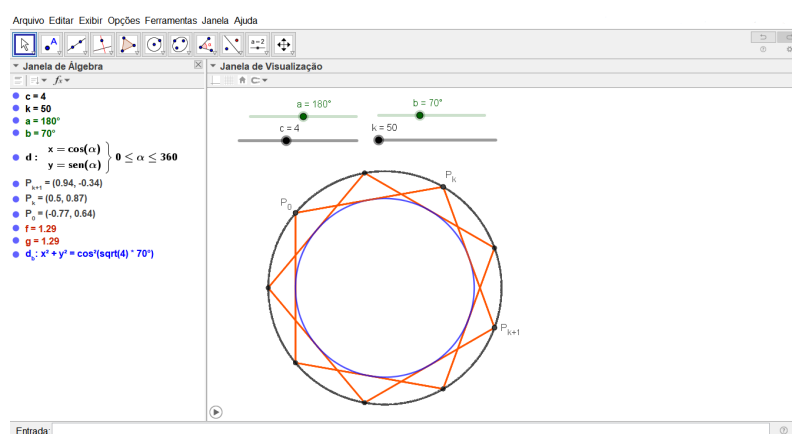


Figura 4.1: Exemplo de construção de bilhar com órbita racional

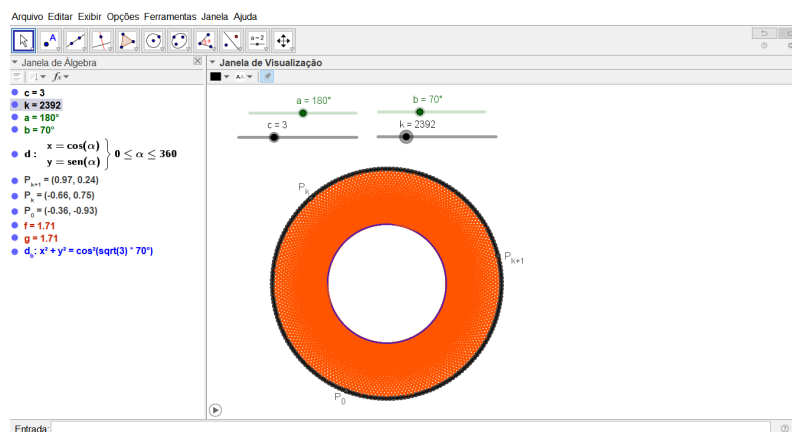


Figura 4.2: Exemplo de construção de bilhar com órbita irracional

4.2 Bilhar na Circunferência - Modelo 2

O segundo método de construção do bilhar na circunferência usa o “Ambiente de Planilha” contida no GeoGebra. A diferença em relação ao Modelo 1 apresentado em 4.1 é que as iterações são calculadas antecipadamente na planilha, assim o fluxo do bilhar é apresentado por completo¹. Nesse modelo mostramos o movimento da bola de bilhar no interior da mesa.

¹Considerando o número de iterações predeterminado.

Nele também precisaremos determinar os parâmetros a , b e c . A partir deles podemos determinar as P_k com $k \geq 0$, e suas iteradas.

- Na barra de ferramentas, selecionar a ferramenta “Controle Deslizante” e clicar em qualquer lugar da “Janela de Visualização” para criar o “Controle Deslizante” para o parâmetro a , no formato de ângulo variando, de 0° à 360° , com incremento 1° . Este parâmetro indica a posição de P_0 na circunferência (parametrizada pelo comprimento de arco);
- Criar o “Controle Deslizante” para o parâmetro b , no formato de ângulo variando, de 0° à 360° , com incremento 1° . Este parâmetro combinado com o parâmetro c (que criaremos em seguida) indica o ângulo que o segmento que representa a trajetória $P_k P_{k+1}$ faz com a tangente à circunferência d em P_0 ;
- Criar o “Controle Deslizante” para o parâmetro c , variando de 1 a 10, com incremento igual a 1. Este parâmetro nos permitirá definir se o ângulo $\sqrt{c} \cdot b$ será racional ou irracional;
- Abrir o Ambiente de Planilha² do GeoGebra. No menu principal clicar em “Exibir”, em seguida em “Planilha” (ou pressionar as teclas **Ctrl** + **Shift** + **s**);
- Identificar os parâmetros a , b e c . Uma sugestão é colocar os parâmetros nas células $A1$, $A2$ e $A3$, respectivamente. Para que o texto apareça digite os parâmetros entre aspas, assim em $A1$ digitar “ a ”, em $A2$ digitar “ b ” e em $A3$ digitar “ c ”;
- Inserir os valores dos parâmetros a , b e c (dessa vez os valores serão digitados sem as aspas). Digitar a na célula $B1$, em $B2$ digitar b e em $B3$ digitar c ;
- Na célula $A4$, identificar o parâmetro K . Em $A4$ digitar “ k ” ele determinará o número de iterações que teremos;
- Os valores de K ocuparão as demais células da coluna A . Então em $A5$ digitar 1, o primeiro valor para K ;
- Em $A6$ inserir o sucessor do valor de K inserido em $A5$, então em $A6$ digitar $= A5 + 1$, irá retornar o número 2;
- Clicar em $A6$ e apontar o ponteiro do mouse para o canto inferior direito da célula (o ponteiro exibirá uma cruz) e ao arrastar para baixo é possível definir quantos números desejarmos³. Para nosso exemplo usaremos 50 iterações, então arrastaremos o ponteiro do mouse até a célula $A54$.

Inserir as coordenadas dos pontos P_k .

²O caminho pode variar de acordo com a versão do Geogebra

³É claro que o número de iterações que podemos inserir é limitado, além disso quanto maior o número de iterações mais demorados podem ser tornar os cálculos.

- Os valores de x_{P_k} dos pontos P_k , serão inseridos na coluna B . Digitar na célula $B5$ o comando `=cos(B1 + A5 * 2 * sqrt(B3) B2);`
- As coordenadas y_{P_k} dos pontos P_k , serão inseridos na coluna C . Digitar na célula $C5$ o comando `=sin(B1 + A5 * 2 * sqrt(B3) B2);`
- Seleccionar as células $B5$ e $C5$ e apontar o ponteiro do mouse para o canto inferior direito da célula $C5$ (o ponteiro exibirá uma cruz), arrastar para baixo para definir quantos números desejar. Para nosso exemplo usaremos 50 iterações então arrastaremos o ponteiro do mouse até a célula $C54$.

Agora escreveremos os pontos P_k e o fluxo do bilhar. Para isso selecionaremos as coordenadas dos pontos P_k (intervalo de células que vai de $B5$ até $C54$);

- Clicar com o botão direito do mouse sobre o intervalo selecionado, levar o ponteiro do mouse até “Criar” e clicar em “Caminho Poligonal”. Serão plotados os pontos P_k e as trajetórias de P_k para P_{k+1} ;

Inserir a circunferência parametrizada pelo comprimento do arco.

- Digitar no “Campo de Entrada”, `d=Curva(cos(B2),sin(B2),B2,0°,360°);`
- Digitar no “Campo de Entrada” `d_b:x^2+y^2=cos^2(sqrt(B3)*B2)`, para inserir também a cáustica (a equação deve ficar assim: $d_b : x^2 + y^2 = \cos^2(\sqrt{B3} \cdot B2)$);
- Inserir a “bola de bilhar”. Para isso digitar no campo de entrada `=Ponto(f);`
- Clicar com o botão direito do mouse sobre o ponto criado (no item anterior), em seguida clicar “Propriedades...”;
- Na aba “Básico”, desmarcar a caixa “Exibir Rótulo” e marcar a caixa “Animar”;
- Na aba “Álgebra” preencher em “Incremento”, 0.1, e em “Velocidade”, 0.1, para ver a “bola de bilhar” se deslocando sobre a sua trajetória $P_k P_{k+1}$.

Variando o parâmetro c temos que, quando o número \sqrt{c} representar um número racional a órbita do bilhar será periódica, quando o número \sqrt{c} representar um número irracional a órbita não será periódica fazendo com que “quase” todos os pontos do círculo d façam parte, em algum momento, da órbita do bilhar e suas trajetórias preencham densamente o anel $d \setminus d_b$. Além disso podemos observar que todas as trajetórias do bilhar são tangentes a circunferência d_b , chamada cáustica.

4.3 Bilhar na Circunferência - Modelo 3

Neste modelo, além de construir o bilhar, construiremos também o seu espaço de fase. Poderemos observar que dada uma condição inicial, o ângulo de reflexão (igual ao de incidência), permanece constante durante toda a trajetória do bilhar. Este fato produz uma linha reta no espaço de fase do bilhar. Cada linha tem o comprimento da mesa de bilhar (2π ou 360°).

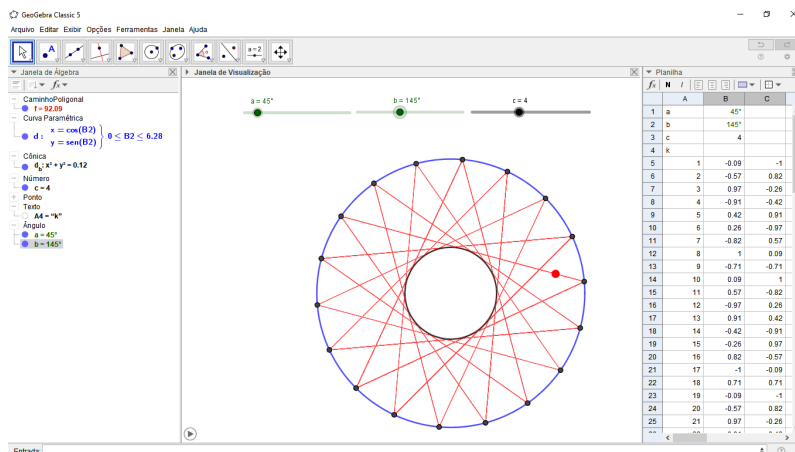


Figura 4.3: Exemplo de bilhar na circunferência criado com o auxílio do ambiente de planilhas do GeoGebra.

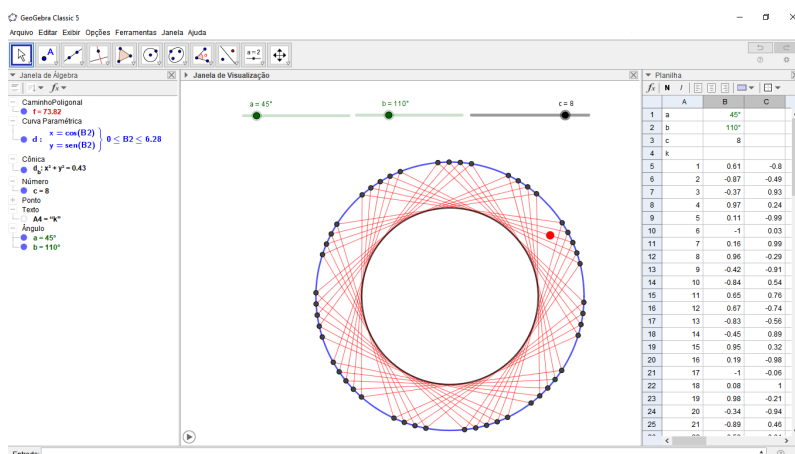


Figura 4.4: Exemplo de bilhar na circunferência criado com o auxílio do ambiente de planilhas do GeoGebra.

Para este modelo também utilizaremos o ambiente de “Planilha” do GeoGebra. Além disso, para exibir espaço de fases também utilizaremos um outra janela de exibição.

O primeiros passos para a construção deste modelo são iguais aos apresentados em 4.2, porém, algumas alterações serão feitas principalmente em relação ao ambiente de “Planilha”, deixando os cálculos mais simples.

- Na barra de ferramentas, selecionar a ferramenta “Controle Deslizante” e clicar em qualquer lugar da “Janela de Visualização” para criar o controle deslizante para o parâmetro a , no formato de ângulo variando, de 0° à 360° e incremento 1° . Este parâmetro indica a posição do ponto P_0 na circunferência (parametrizada pelo comprimento de arco);
- Criar o controle deslizante para o parâmetro b , no formato de ângulo variando de 0° à 360° e incremento 1° . Este parâmetro combinado com o parâmetro c (que criaremos em seguida) indica o ângulo do segmento que representa a trajetória $P_k P_{k+1}$ faz com a tangente à circunferência d em P_k ;

- Inserir circunferência parametrizada pelo comprimento do arco. A curva $d = \text{Curva}(\cos(a), \sin(a), a, 0^\circ, 360^\circ)$. No campo de entrada, digitar a expressão $d = \text{curva}(\cos(a), \sin(a), a, 0^\circ, 360^\circ)$;
- Criar o *controle deslizante* para o parâmetro c , variando de 1 a 10, com incremento igual a 1. Este parâmetro nos permitirá definir se o ângulo $\sqrt{c} \cdot b$ será racional ou irracional;
- Abrir o *Ambiente de Planilha*⁴ do GeoGebra. No menu principal clicar em “Exibir”, em seguida em “Planilha” (ou pressionar as teclas **Ctrl + Shift + s**);
- Identificar os parâmetros a , b e c . Uma sugestão é colocar os parâmetros nas células $A1$, $A2$ e $A3$ respectivamente. Para que o texto apareça digite os parâmetro entre aspas, assim em $A1$ digitar “ a ”, em $A2$ digitar “ b ” e em $A3$ digitar “ c ”;
- Inserir os valores dos parâmetros a , b e c , dessa vez os valores serão digitados sem as aspas. Digitar a na célula $B1$, em $B2$ digitar b e em $B3$ digitar c ;
- Na célula $A4$ iremos identificar o parâmetro k . Em $A4$ digitar “ k ” esse determinará o número de iterações que teremos;
- Os valores de k ocuparão as demais células da coluna A . Então em $A5$ digitar 1, o primeiro valor para k ;
- Em $A6$ vamos inserir o sucessor do valor de k inserido em $A5$, então em $A6$ digitar $= A5 + 1$, irá retornar o número 2;
- Clicar em $A6$, apontando o ponteiro do mouse para o canto inferior direito da célula (o ponteiro exibirá uma cruz) e arrastando para baixo podemos definir quantos números desejarmos⁵. Para nosso exemplo usaremos 50 iterações. Então, iremos arrastar o ponteiro do mouse até a célula $A54$.

Inserir as coordenadas dos pontos P_k .

- As coordenadas x_{P_k} e y_{P_k} serão inseridas na coluna B . Digitemos na célula $B5$ o comando

$$=(\cos(\$B\$1 + A5 * 2 * \text{sqrt}(\$B\$3) \$B\$2),$$

$$\sin(\$B\$1 + A5 * 2 * \text{sqrt}(\$B\$3) \$B\$2));$$
- Selecionar a célula $B5$, apontar o ponteiro do mouse para o canto inferior direito da célula $B5$ (o ponteiro exibirá uma cruz) e arrastar para baixo para definir tantos números quanto desejarmos. Para nosso exemplo usaremos 50 iterações então iremos arrastar o ponteiro do mouse até a célula $B54$.

⁴O caminho pode variar de acordo com a versão do Geogebra

⁵É claro que o número de iterações que podemos inserir é limitado, além disso quanto maior o número de iterações mais demorados podem se tornar os cálculos.

Agora criaremos os segmentos de reta que formam o “fulxo do bilhar”.

- Na célula $C6$, inserir o comando `=Segmento(B5, B6)`;
- Selecionar a célula $C6$, e sobrepondo o ponteiro do mouse sobre seu canto inferior direito, o ponteiro se transforma em uma cruz. Clicar sobre a cruz e arrastar até a célula $C54$;
- Selecionar o intervalo $C6 : C54$, clicar com o botão direito do mouse sobre o intervalo selecionado e desmarcar a opção *Exibir Rótulo*;
- Inserir o ângulo que o segmento que liga a origem ao ponto de coordenadas em $B6$ faz com o eixo x , para isso, na célula $D5$ iremos inserir `=Ângulo(B6)`;
- Inserir os ângulos de reflexão. Para isso na célula $E6$ digitar `=(180°-Ângulo(B5,B6,B7))/2`;
- Na célula $F6$, inserir os pontos que tem como coordenadas $x = D6$ e $y = E6$. Para isso digitar na célula $F6$ o comando `=(D6,E6)`;
- Selecionar o intervalo $D6 : F6$ e arrastar para copiar o conteúdo até a linha 54;
- Caso esses elementos apareçam na “Janela de visualização”, selecione na planilha o intervalo $D6 : F54$, clique com o botão direito do mouse e desmarque a opção “*Exibir Objeto*”.

Agora construiremos o espaço de fase do bilhar. Para isso precisaremos de uma segunda “Janela de Visualização”.

- No menu principal clicar em “*Exibir*”, em seguida em “*Janela de Visualização 2*”, (ou pressionar as teclas `Crtl+Shift+2`);
- Selecionar o intervalo de células $F6 : F53$;
- Clicar com o botão direito do mouse sobre o intervalo selecionado e clique em “*Propriedades...*”;
- Na aba “*Básico*” selecione as caixas “*Exibir Objeto*”, “*Exibir Rastro*”;
- Na aba “*Avançado*”, desmarque as caixas “*Janela de Visualização*” e “*Janela de Visualização 3D*” e marque a caixa “*Janela de Visualização 2*”;
- Ainda na aba “*Avançado*” em “*Cores Dinâmicas*”, preencher “*Vermelho*” b , “*Verde*” $0.5b$ e “*Azul*” $0.7b$;
- Digitar no “*Campo de Entrada*” `d_b:x^2+y^2=cos^2(sqrt(B3)*B2)`, para inserir também a cáustica (a equação deve ficar assim: $d_2 : x^2 + y^2 = \cos^2(\sqrt{B3} \cdot B2)$);

Os pontos aparecerão alinhados na “Janela de Visualização 2”. Variando o ângulo b , novas linhas horizontais contendo os pontos da coluna F aparecerão, formando o espaço de fase do bilhar no círculo. Algumas personalizações são possíveis e até recomendáveis, como adicionar um título para cada janela ou até mesmo ocultar a planilha, porém tais personalizações ficam como exercício para o leitor.

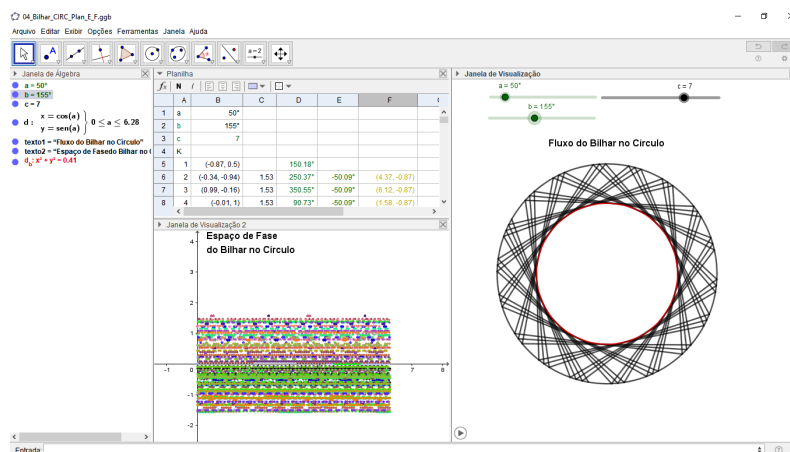


Figura 4.5: Exemplo de bilhar na circunferência, e seu espaço de fase, criado com o auxílio do ambiente de “Planilhas” do GeoGebra.

4.4 Bilhar na Elipse - Modelo 1

O objetivo desse primeiro modelo é observar as trajetórias do bilhar elíptico e a formação das cáusticas na forma de elipse confocal, quando as trajetórias passam por entre os focos, e na forma de uma hipérbole, quando as trajetórias passam por “fora” do segmento que tem como extremos, os focos da elipse.

Primeiro criaremos a elipse usando a ferramenta “Elipse”⁶ do GeoGebra para isso.

- Usando a ferramenta “Ponto” vamos criar três pontos e em seguida vamos renomeá-los, F_1 , F_2 e E que serão os dois focos e um ponto da elipse, respectivamente. Para renomear os pontos clicar com o botão direito do mouse e clicar em “Renomear”;
- Na “Barra de Ferramentas”, selecionar a ferramenta “Elipse”, clicar nos pontos F_1 , F_2 e E para criar a elipse c ;
- No “Campo de Entrada” digitar o comando $P_0 = \text{Ponto}(c)$ para criar um ponto sobre a elipse c ;
- No “Campo de Entrada” digitar o comando $P_1 = \text{Ponto}(c)$ para criar um segundo ponto sobre c (caso os dois pontos fiquem sobrepostos, mover um dos pontos para separá-los);
- Usando a ferramenta “Reta”, vamos criar a reta f que passa por P_0P_1

⁶As instruções básicas para o uso do aplicativo GeoGebra podem ser encontradas em [2]

- Usando a ferramenta “*Reta Tangente*”, vamos criar a reta g que passa por P_1 e é tangente a c . Na “*Barra de Ferramentas*”, selecionar a ferramenta “*Reta Tangente*”, que se encontra no quarto botão. Clicar no ponto P_1 em seguida na elipse c ;
- Usando a ferramenta “*Reta Perpendicular*”, vamos criar a reta h que passa por P_1 e é perpendicular à reta g (tangente à c). Na “*Barra de Ferramentas*”, selecionar a ferramenta “*Reta Perpendicular*”, que se encontra no quarto botão. Clicar no ponto P_1 em seguida na reta g ;
- Usando a ferramenta “*Reflexão em Relação a Uma Reta*”, vamos criar a reta f' . Na “*Barra de Ferramentas*”, selecionar a ferramenta “*Reflexão em Relação a uma Reta*” (que se encontra no nono botão). Clicar na reta f em seguida na reta h ;
- Criar o ponto P_2 digitando, no campo de entrada, o comando $P_2=Interseção(f',c,2)$.

Agora vamos criar uma nova ferramenta, para facilitar as reflexões.

- Vamos clicar com o botão direito sobre os elementos f , g , h e f' e desmarcar a opção “*Exibir Objeto*”, para ocultá-los ;
- No menu principal selecionar “*Ferramentas*” e em seguida “*Criar Uma Nova Ferramenta...*”;
- Selecionar em “*Objetos Finais*”, o ponto P_2 ;
- Selecionar em “*Objetos Iniciais*” os pontos P_0 , P_1 e a elipse c ;
- Renomear a ferramenta como *ReflElip*;
- O campo “*Nome do Comando*” se atualizará automaticamente;
- No campo “*Ajuda da ferramenta*” digitar P_i , P_{i+1} , c ;
- Deixar marcada a caixa “*Exibir na Barra de Ferramentas*”;
- Se preferir você poderá trocar o ícone da ferramenta clicando em “*Ícone...*”.
- Clicar em “*Concluído*”.

Vamos agora criar a órbita do bilhar elíptico. Para tornar esse procedimento mais prático, faremos esse processo utilizando o ambiente de “*Planilha*” do GeoGebra.

- No menu principal selecionar “*Exibir*” em seguida “*Planilha*”. Você também pode ativar o ambiente de “*Planilha*” pressionando as teclas **Ctrl+Shift+S**.
- Na célula $A1$ digitar P_0 ;
- Na célula $A2$ digitar P_1 ;

- Na célula $A3$ digitar o comando $=\text{ReflelElip}(A1, A2, c)$;
- Na célula $B2$ digitar o comando $=\text{Segmento}(A1,A2)$;
- Na célula $B3$ digitar o comando $=\text{Segmento}(A2,A3)$;
- Selecionar as células $A3$ e $B3$;
- Posicionar o ponteiro do mouse sobre o canto inferior direito da célula $B3$ (o intervalo $A3 : B3$ ainda deve estar selecionado) e arrastar a seleção para baixo até a linha 200;
- Selecionar o intervalo $A1 : A200$ clicar como botão direito do mouse e desmarcar as caixa “*Exibir Rótulo*” e “*Exibir Objeto*”;
- Caso os segmentos não apareçam na construção selecionar o intervalo $B2 : B200$ em seguida clicar com o botão direito do mouse e depois em “*Propriedades...*”. Na aba “*Estilo*” colocar o seletor da “*Espessura da Linha*” no 2.

Movimente os pontos P_0 e P_1 para observar os três tipos de trajetórias do bilhar elíptico e a formação das cáusticas hiperbólicas se P_0P_1 cruza o segmento F_1F_2 , e elípticas se P_0P_1 não cruza o segmento F_1F_2 . Nesse tipo de construção não temos muita facilidade em posicionar o pontos P_0 e P_1 de maneira que o segmento P_0P_1 passe por um dos focos, porém caso consiga, o leitor poderá observar que todos os demais segmentos que representam as trajetórias também passarão pelos focos.

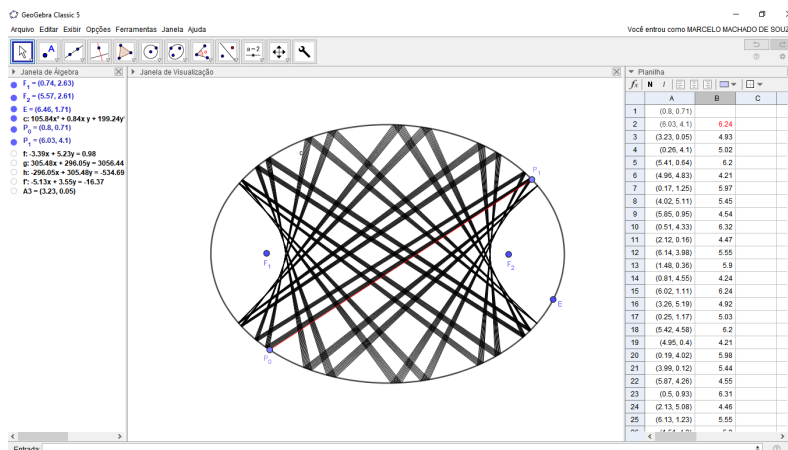


Figura 4.6: Exemplo de bilhar elíptico com o auxílio do ambiente de planilhas do GeoGebra. Trajetórias passando por entre dos focos.

4.5 Bilhar na Elipse - Modelo 2

Este modelo de construção do bilhar na elipse também será desenvolvido do ambiente “*Planilha*” do GeoGebra. Para que o modelo funcione com mais precisão trabalharemos com a equação implícita da elipse. Podemos construir esse modelo com um número consideravelmente grande de iterações, contudo, quanto mais iterações mais exigidos serão os recursos de processamento.

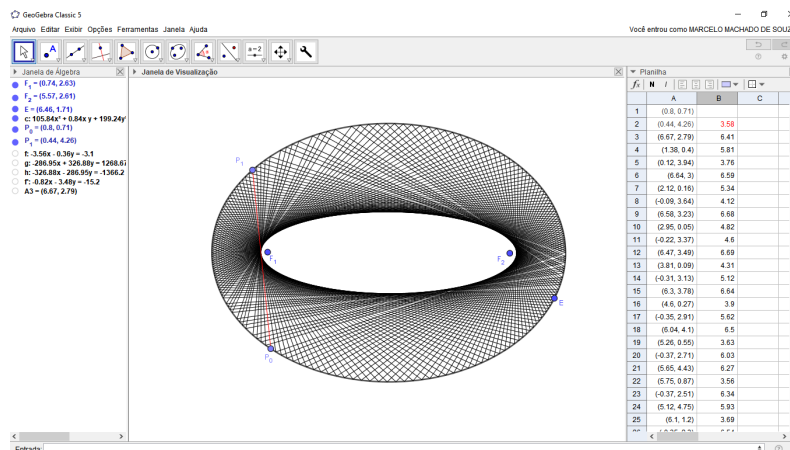


Figura 4.7: Exemplo de bilhar elíptico com o auxílio do ambiente de planilhas do GeoGebra. Trajetórias passando por “fora” dos focos.

- Na “Barra de Ferramentas” selecionar a ferramenta “Controle Deslizante”, clicar em qualquer lugar da “Janela de Visualização” para criar os parâmetros a e b ;
- Inserir a equação implícita da elipse digitando no “Campo de Entrada” o comando $e: x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$;
- Mostrar os focos da elipse. para isso no “Campo de Entrada”, digitar o comando $=foco(e)$;
- No “Campo de Entrada”, criar o ponto P_0 , digitando o comando $P_0 = Ponto(e)$;
- No “Campo de Entrada”, criar o ponto P_1 , digitando o comando $P_1 = Ponto(e)$. Caso os pontos P_0 e P_1 fiquem sobrepostos, experimente mover um deles para separá-los;
- No menu principal clicar em “Exibir”, em seguida em “Planilha” (ou pressionar as teclas $Ctrl+Shift+S$);
- Na célula A1 digitar o comando $=P_0$;
- Na célula A2 digitar o comando $=P_1$;
- Selecionar as células A1 e A2. Clicar sobre as células selecionadas com o botão direito do mouse e desmarcar a opção “Exibir Objeto”;
- Na célula B2 digitar o comando $=Vetor(A1, A2)$. Clicar sobre a célula com o botão direito do mouse e desmarcar a opção “Exibir Objeto”;
- Na célula C2 digitar o comando $=Reflexão(B2, Tangente(A2, e))$. Clicar sobre a célula com o botão direito do mouse e desmarcar a opção “Exibir Objeto”;
- Na célula D2 digitar o comando $=Segmento(A1, A2)$. Clicar sobre a célula com o botão direito do mouse e desmarcar a opção “Exibir Rótulo”;

- Na célula $A3$ digitar o comando $=\text{Interseção}(e, \text{Semirreta}(A2, C2), 2)$, esse será nosso terceiro ponto (segunda iterada). Clicar sobre a célula com o botão direito do mouse e desmarcar a opção “*Exibir Rótulo*”;
- Selecionar o intervalo $B2 : D2$ e arrastar copiando o conteúdo para a linha 3;
- Selecionar o intervalo $A3 : D3$ e arrastar copiando o conteúdo para as próximas linhas (as 100 próximas linhas deverão bastar). Neste passo fizemos as iteradas do bilhar na elipse e os segmentos “formam” o *espaço de configuração* do bilhar onde podemos observar *Fluxo* do bilhar.

Passaremos agora para a construção do *espaço de fase* do bilhar na elipse.

- Na célula $E2$ digite o comando $=\hat{\text{Ângulo}}(A2)$, para exibir a posição, em graus, do ponto P_0 , sobre a elipse e (desmarcar a caixa “*Exibir Objeto*”);
- Na célula $F2$ digite o comando $=(180^\circ - \hat{\text{Ângulo}}(A1, A2, A3)) / 2$, para exibir o ângulo de reflexão (desmarcar a caixa “*Exibir Objeto*”);
- Na célula $G2$ digitar o comando $=(E2, F2)$, para gerar o primeiro ponto do espaço de fase (desmarcar a caixa “*Exibir Rótulo*”);
- Selecionar o intervalo $E2 : G2$ e arrastar para copiar até a linha 102;
- Selecionar o intervalo $G2 : G102$, clicar com o botão direito sobre as células selecionadas, em seguida clicar em “*Propriedades...*”;
- Na aba “*Básico*” marcar as caixas “*Exibir objeto*” e “*Exibir Rastro*”;
- Na aba “*Estilo*”, mover o seletor “*Tamanho do ponto*” para 1 e o “*Estilo do Ponto*” deve ficar ●;
- Na aba “*Avançado*” desmarcar a caixa “*Janela de Visualização*” e marcar a caixa “*Janela de Visualização 2*”;
- Ainda na aba “*Avançado*”, digitar em “*Cores Dinâmicas*”, Vermelho: $x(P_0)$, Verde: $y(P_1)$ e Azul: $x(P_1) + y(P_1)$;
- No “*Menu Principal*” clicar em “*Exibir*”, em seguida em “*Janela de Visualização 2*” (ou pressionar as teclas **Ctrl+Shift+2**);
- Clicar com o botão direito do mouse no ponto P_0 em seguida “*Propriedades...*”;
- Na aba “*Básico*”, marcar a caixa “*Animar*”;
- Na aba “*Álgebra*”, selecione “*Oscilando*” em “*Repetir*” e digite a “*Velocidade*” 1.5;
- Clicar com o botão direito do mouse no ponto P_1 em seguida “*Propriedades...*”;
- Na aba “*Básico*”, marcar a caixa “*Animar*”;

- Na aba “Álgebra”, selecione “Oscilando” em “Repetir”;

Variando a posição de P_1 podemos observar a formação das curvas descritas em 3.2. O leitor poderá experimentar animar os pontos P_0 e P_1 para observar a formação das *curvas de nível* citadas em 3.2.

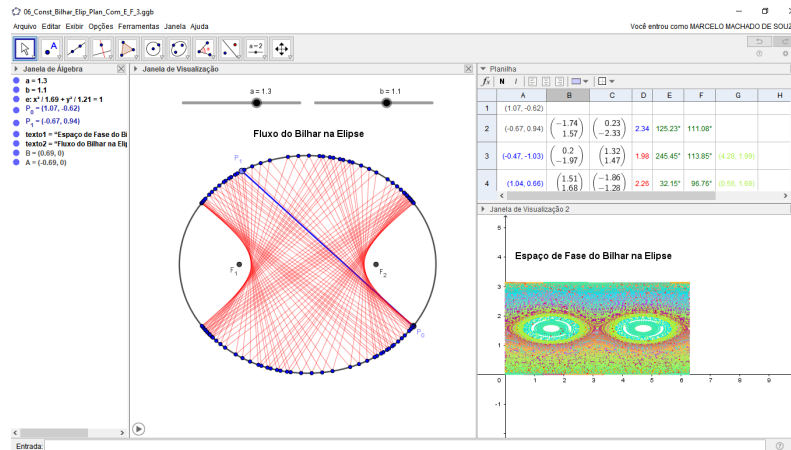


Figura 4.8: Exemplo de bilhar na Elipse, e seu espaço de fase, criado com o auxílio do ambiente de painéis do GeoGebra.

4.6 Bilhar no cardioide

O bilhar no cardioide é totalmente caótico. Além disso, dos exemplos que trouxemos ele é o único que apresenta uma quina (ou ponto de canto). Isso significa que a trajetória do bilhar fica interrompida caso ela coincida com esse ponto. Devido a algumas limitações das ferramentas do GeoGebra, usaremos para essa construção, a equação implícita do cardioide.

- Na barra de ferramentas, selecionar a ferramenta “Controle Deslizante” e clicar em qualquer lugar da “Janela de Visualização” para criar o Controle Deslizante para o parâmetro r , no formato de número, variando 0 à 1 e incremento 0.1.
- No “Campo de Entrada”, digitar a equação implícita do cardioide $c: (x^2 + y^2 + 2 \cdot r \cdot x)^2 = 4 \cdot r \cdot (x^2 + y^2)$. Ela deve aparecer assim:

$$c: (x^2 + y^2 + 2 \cdot r \cdot x)^2 = 4 \cdot r \cdot (x^2 + y^2);$$
- Criar o ponto P_0 sobre o cardioide c digitando no campo de entrada o comando $P_0 = \text{Ponto}(c)$;
- Criar o ponto P_1 sobre o cardioide c digitando no campo de entrada o comando $P_1 = \text{Ponto}(c)$. Caso esses pontos estejam sobrepostos basta mover um deles e separá-los;
- Abrir o ambiente “Planilha”, clicando em “Exibir”, no menu principal em seguida em “Planilha”, ou pressionar $\text{Ctrl} + \text{Shift} + \text{s}$;

- Na célula $A1$ digitar $=P_0$. Clicar com o botão direito do mouse na célula $A1$ e desmarcar a caixa “*Exibir Objeto*”;
- Na célula $A2$ digitar $=P_1$. Clicar com o botão direito do mouse na célula $A2$ e desmarcar a caixa “*Exibir Objeto*”;
- Na célula $B2$, digitar o comando $=\text{Vetor}(A1,A2)$. Clicar com o botão direito do mouse na célula $B2$ e desmarcar a caixa “*Exibir Objeto*”;
- Na célula $C2$ digitar $=\{\text{Tangente}(A2,c)\}$, as $\{ \}$ servem para criar a lista das tangentes (dependendo da curva podemos ter mais de uma tangente por um ponto dado). Clicar com o botão direito do mouse na célula $C2$ e desmarcar a caixa “*Exibir Objeto*”;
- Na célula $D2$ digitar $=\text{Elemento}[C2,1]$, para definirmos apenas a primeira tangente;
- Criar a reflexão do vetor u digitando na célula $E2$ o comando $=\text{Reflexão}(B2,D2)$. Clicar com o botão direito do mouse na célula $E2$ e desmarcar a caixa “*Exibir Objeto*”;
- Na célula $A3$ digitar o comando $=\text{Interseção}(\text{Semirreta}(A2,E2),c,2)$;
- Na célula $F2$ digitar o comando $=\text{Segmento}(A1,A2)$;
- Selecionar o intervalo $B2 : F2$ e arrastar até a linha 3;
- Selecionar o intervalo $A3 : F3$ e arrastar até a linha 50 para criar as iteradas do ponto P_0 . Esse é um ponto crítico da construção. Uma vez que a trajetória atinja o “ponto de canto” os cálculos se perdem gerando um erro. Clicar em “*ok*” até que a mensagem de erro desapareça. Em seguida mover os pontos P_0 e P_1 e repetir esse passo até obter uma quantidade de iteradas satisfatória.
- Selecionar o intervalo $F2 : F50$, clicar com o botão direito e desmarcar a opção “*Exibir Rótulo*”;
- Na célula $G2$, digitar o comando $=\hat{\text{Angulo}}(A2)$;
- Copiar o conteúdo de $G2$ arrastando o ponteiro do mouse até a célula $G50$ (ou a última linha sem erro);
- Selecionar o intervalo $G2 : G50$, clicar com o botão direito e desmarcar a opção “*Exibir Objeto*”;
- Na célula $H2$ digitar o comando $=(180^\circ - \hat{\text{Angulo}}(A1,A2,A3))/2$;
- Copiar o conteúdo de $H2$ arrastando o ponteiro do mouse até a célula $H50$ (ou a última linha sem erro);
- Selecionar o intervalo $H2 : H50$, clicar com o botão direito e desmarcar a opção “*Exibir Objeto*”;

- Na célula $I2$ digitar o comando $=(G2,H2)$;
- Copiar o conteúdo da célula $I2$ clicando e arrastando até a linha 50 (ou a última linha sem erro);
- Selecionar o intervalo $I2 : I50$, clicar com botão direito e em “Propriedades...”;
- Na aba “Básico” desmarcar a caixa “Exibir rótulo” e marcar as caixas “Exibir objeto” e “Exibir Rastro”;
- Na aba “Estilo”, mover o seletor “Tamanho do ponto” para 1 e o “Estilo do Ponto” deve ficar ●;
- Na aba “Avançado”, em “Cores Dinâmicas”, digitar $Vermelho = x(P_1)$, $Verde = y(P_1)$ e $Azul = x(P_1) + y(P_1)$;
- Desmarcar a caixa “Janela de Visualização” e marcar a caixa “Janela de visualização 2”;

Variando as posições dos pontos P_0 e P_1 (que deteminam as condições iniciais) as trajetórias ficam bastante alteradas. Animando os pontos P_0 e P_1 , o leitor poderá observar que o espaço de fase ficará densamente preenchido, por pontos que se distaciam caoticamente uns dos outros.

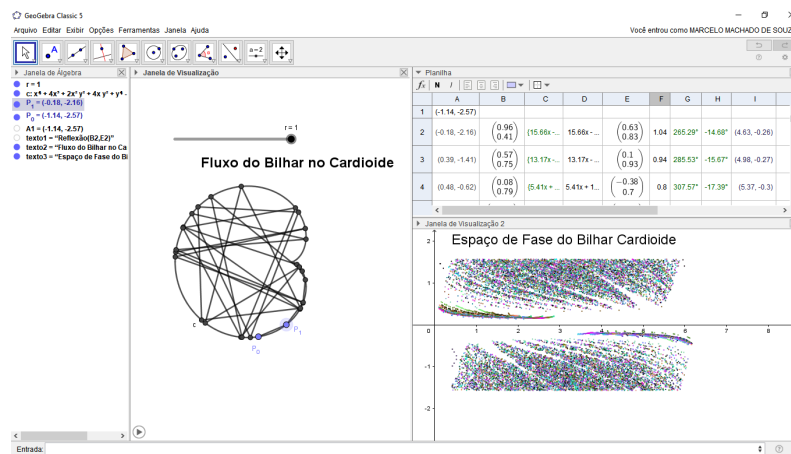


Figura 4.9: Exemplo de bilhar no cardioide,e seu espaço de fase, criado com o auxílio do ambiente de panilhas do GeoGebra.

Aplicações no Ensino Médio

A BNCC¹ de Matemática e suas Tecnologias, propõe a consolidação, ampliação e aprofundamento das aprendizagens essenciais desenvolvidas no ensino fundamental. Para tanto, propõe colocar em jogo, de modo mais inter-relacionado, os conhecimentos já explorados na etapa anterior, a fim de possibilitar que os estudantes construam uma visão mais integrada da Matemática, ainda na perspectiva de sua aplicação à realidade (ver[7]).

Para que esses propósitos se concretizem nessa área, os estudantes devem desenvolver habilidades relativas aos processos de **investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas**. Para tanto, eles devem mobilizar seu modo próprio de raciocinar, representar, comunicar, argumentar e, com base em discussões e validações conjuntas, aprender conceitos e desenvolver representações e procedimentos cada vez mais sofisticados.

Os Bilhares, apesar de se situarem em um nível mais avançado de conhecimentos matemáticos, podem ser apresentados já no ensino médio, utilizando os conhecimentos adquiridos na Geometria Analítica, geralmente abordado no terceiro ano do ensino médio. Essas habilidades são descritas na BNCC estão organizadas com os seus respectivos objetos de conhecimento em como:

- (EM13MAT105) Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras).
- (EM13MAT401) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1^o grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica.
- (EM13MAT402) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2^o grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo

¹A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica.

os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica, entre outros materiais.

Apresentamos os bilhares a uma turma de alunos do 3º ano do ensino médio, de uma escola da rede privada de Belo Horizonte (o roteiro da aula está disponível no apêndice A). A turma estava dividida em dois grupos, um presencialmente na escola e outro on-line através do aplicativo Google Meet. Exibimos um vídeo sobre as aplicações práticas das reflexões especulares. O vídeo mostra como as propriedades reflexivas são importantes, e sua utilização em diferentes instrumentos como o farol de um carro, que tem formato de espelho parabólico e usa as propriedades reflexivas para concentrar e direcionar a iluminação, as antenas parabólicas, que concentram as ondas, refletindo-as para o seu foco, e até mesmo numa casa de sussurros, que usa as propriedades reflexivas para levar o som a longas distâncias, utilizando as reflexões. No vídeo, também mostramos como as reflexões especulares estão presentes na dinâmica dos bilhares. Em seguida, apresentamos algumas definições e conceitos importantes sobre os bilhares como a mesa de bilhar, o espaço de configuração, as órbitas dos bilhares e o espaço de fase do bilhar. Apresentamos ainda as simulações dos bilhares no círculo, na elipse e no cardióide, construídas com o GeoGebra.

A recepção dos alunos foi muito boa e se mostraram bastante interessados. O fato de uma teoria tão avançada como a dos bilhares poder ser “traduzida” através de alguns conceitos básicos, como funções compostas e geometria analítica, chamou a atenção dos alunos. Discutimos de maneira intuitiva a ideia de sistemas dinâmicos, ressaltando que, com um “modelo matemático ideal” para um determinado evento, poderíamos conhecer seus resultados no “passado”, e até prever o “futuro”. A trajetória da bola de bilhar foi um excelente exemplo para isso. Ainda de maneira intuitiva, relacionamos o caos com a ideia de imprevisibilidade, ou seja, resultados que, com o tempo, podem variar muito, desde que aconteçam pequenas mudanças nas condições iniciais. O bilhar no cardióide serviu bem para esse objetivo. Falamos ainda um pouco a respeito da pesquisa na área da matemática e de como essa pode ser opção de profissão.

Para finalizar, aplicamos um *quiz* on-line utilizando o site www.kahoot.com sobre os bilhares (o link para acesso ao *quiz* está disponível no apêndice A). Esse site permite a criação de jogos de perguntas e respostas, em diferentes formatos como múltipla escolha, verdadeiro ou falso, entre outros. Para acessar o site e criar (ou usar) um jogo, é necessário cadastrar uma conta, que pode ser gratuita ou paga (os participantes acessam o site www.kahoot.it para jogar, e não precisam de cadastro). A versão gratuita, conta com vários recursos e é suficiente para a criação de jogos. Na competição, o participante que responde corretamente, e mais rapidamente ganha mais pontos. Esses pontos são somados a cada rodada, e ganha o participante que obtiver, ao findar as perguntas, o maior número de pontos. O formato do jogo é muito divertido e promove o engajamento dos participantes nos assuntos discutidos.

Considerações Finais

Nosso objetivo desde a concepção deste trabalho era ampliar os horizontes de possibilidades matemáticas dos alunos do ensino médio, e para tanto, os bilhares se mostram bastante interessantes. A ideia inicial era realizar as construções de algumas simulações e apresentá-las aos alunos. Contudo, o processo de desenvolvimento dessas construções se apresentou como um grande desafio. Com muitos erros e alguns acertos, conseguimos estabelecer um padrão de construção que serve, a priori, para muitos tipos de mesa de bilhar. As primeiras simulações foram feitas a partir do *Billiard Simulator* [16], um módulo de *Mathlab* bastante robusto, onde existem algumas mesas de bilhar pré-programadas, além da possibilidade de criar suas próprias mesas com formatos variados e obter diversas informações como espaço de fase, espaço de configuração e fluxo. Porém, o *Mathlab* é um software pago, o que poderia inviabilizar sua utilização pelo leitor. Foi a partir daí que optamos pelo GeoGebra. Por ser um software gratuito, bastante intuitivo e funcionar em diversas plataformas (inclusive sem a necessidade de download) ele se torna muito acessível.

Alguns modelos de bilhar podem ser encontrados nos materiais disponibilizados do site geogebra.org, contudo, os objetivos das construções encontradas eram bem específicos e não se encaixavam bem aos agora pretendidos. Começamos então a desenvolver nosso próprio modelo. Obter uma reflexão especular no GeoGebra não é uma tarefa difícil pois ele tem ferramentas que possibilitam essa construção de maneira até intuitiva. Porém, nos bilhares, para avaliar um ponto dependemos dos pontos anteriores e suas reflexões e, por particularidades do software, essa pode ser uma questão não tão simples de se resolver. Estudamos as ferramentas disponíveis, a criação de novas ferramentas, alguns comandos que não são tão populares e, por particularidades do software, encontramos muitas dificuldades para realizar as construções. Por fim, percebemos que apesar de usarmos as curvas parametrizadas para construir os bilhares, algumas ferramentas do GeoGebra só trabalham com curvas implícitas. Então resolvemos utilizar o ambiente de *Planilha* do GeoGebra e foi aí que a “mágica” aconteceu. No ambiente de planilhas podemos, a partir de condições iniciais, definir um ponto e com ferramentas bem simples fazer as reflexões daquele ponto. Colocando as coordenadas de um ponto em uma determinada célula temos uma referência para encontrar o próximo a assim por diante. Trabalhar

nesse ambiente também nos possibilitou plotar os pontos de uma órbita do bilhar e utilizando o recurso de “rastros” desses pontos podemos observar o espaço de fase dos bilhares. Este trabalho apresentou na seção 4, as construções por ordem de seu nível de desenvolvimento e todas estas construções estão disponibilizadas no site de materiais do GeoGebra <https://www.geogebra.org/materials>.

De maneira geral, concluímos que os bilhares são uma boa alternativa de apresentar aos alunos do ensino médio, outras teorias da matemática, abrindo seus horizontes em relação a possibilidade de aprofundamento e pesquisa na área. E Apesar de ainda pouco utilizado para os bilhares, o GeoGebra se mostrou um excelente recurso também para esse fim.

Roteiro de Atividades

Nesta seção apresentamos uma sugestão para a apresentação dos bilhares para alunos do ensino médio.

Plano de Aula

Dados de Identificação	
Professor:	
Disciplina:	Matemática
Tema:	Bilhares no Ensino Médio
Turma:	3º Ano EM
Data:	
Duração da aula:	140 minutos

A.1 Objetivos

A.1.1 Geral

Apresentar a teoria dos bilhares como uma possibilidade de ampliação de conhecimentos matemáticos e destacar a incompletude dessa teoria a fim de incentivar o aprofundamento dos estudos para os alunos interessados.

A.1.2 Específicos

- Conhecer a teoria dos bilhares e os principais conceitos envolvidos;
- Relacionar o bilhar com conhecimentos já adquiridos no ensino médio como o estudo das cônicas e de curvas parametrizadas;
- Perceber algumas das várias aplicações da teoria, principalmente no que se refere as reflexões especulares;
- Entender como a teoria dos bilhares se relaciona com a definição de caos determinístico, através da ideia intuitiva de ergodicidade.

A.2 Conteúdos

- Estudo das cônicas;
- Aplicações das propriedades reflexivas das cônicas;
- Curvas parametrizadas;
- Fenômenos que evoluem com o tempo;
- Bilhares.

A.3 Procedimentos metodológicos

Exibição de vídeo sobre as aplicações da teoria dos bilhares, disponível em <https://youtu.be/HZ5mqvWTo4g>. Apresentação expositiva dos principais conceitos dos bilhares. Apresentação de alguns modelos de bilhar construídos utilizando o software de matemática dinâmica GeoGebra.

A.4 Recursos didáticos

- Computador, projetor multimídia, pincel e quadro.

A.5 Avaliação

Participação em um “Quiz” on-line, com questões sobre conceitos de bilhares, aplicado usando o site kahoot.com. O “Quiz” pode ser acessado pelo link <https://create.kahoot.it/details/587b2c47-7713-4b60-aec5-cb35a9fab15c>.

A.6 Links dos materiais utilizados

Para facilitar o acesso, disponibilizamos os QRCODES com os links dos materiais utilizados.



Vídeo com Aplicações de Bilhares:
<https://youtu.be/HZ5mqvWTo4g>.



Bilhar no Círculo:
<https://www.geogebra.org/m/devf27ct>



Bilhar no Círculo (Fluxo):
<https://www.geogebra.org/m/jhfry4zr>



Bilhar no Círculo (Espaço de Fase):
<https://www.geogebra.org/m/wbbzrfz2>.



Bilhar no Cardioide (com espaço de fase):
<https://www.geogebra.org/m/p7zv5vdm>.



Bilhar na Elipse (com espaço de fase):
<https://www.geogebra.org/m/vz8psvzm>.



“Quiz” no site *kahoot.com* sobre bilhares:
<https://create.kahoot.it/details/587b2c47-7713-4b60-aec5-cb35a9fab15c>.

Bibliografia

- [1] Araújo, C. L. et al. “Geogebra como recurso facilitador do processo de ensino-aprendizagem de curvas planas” (2018).
- [2] Araújo, L. C. L. de e Nóbriga, J. C. C. “Aprendendo matemática com o Geogebra”. *Editores Exato, Sao Paulo* (2010).
- [3] Bäcker, A. “Numerical aspects of eigenvalue and eigenfunction computations for chaotic quantum systems”. *The mathematical aspects of quantum maps*. Springer, 2003, pp. 91–144.
- [4] Berry, M. V. “Regularity and chaos in classical mechanics, illustrated by three deformations of a circular billiard”. *European Journal of Physics* 2.2 (1981), p. 91.
- [5] Biezuner, R. J. *Notas de aula geometria diferencial*. 2015.
- [6] Birkhoff, G. D. *Dynamical systems*. Vol. 9. American Mathematical Soc., 1927.
- [7] BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília. 2018.
- [8] Chernov, N. e Markarian, R. *Chaotic billiards*. 127. American Mathematical Soc., 2006.
- [9] DA SILVA, D. M. F. “A Hipérbole e suas Aplicações” (2013).
- [10] Delgado, J., Frensel, K. e Crissaff, L. *Geometria Analítica*. 1ª Ed. Coleção Profmat. SBM, 2013, p. 320.
- [11] Junior, F. H. M. M. “Seções Cônicas” (2018).
- [12] Lazutkin, V. F. “The existence of caustics for a billiard problem in a convex domain”. *Mathematics of the USSR-Izvestiya* 7.1 (1973), p. 185.
- [13] Lima, E. L. *Números e Funções Reais*. 1ª Ed. Coleção Profmat. SBM, 2013, p. 289.
- [14] *Manual Geogebra*. <https://wiki.geogebra.org/pt/Manual>. acessado em 14/07/2021.
- [15] Markarian, R. “Bilhares”. *A Hipótese Ergódica de Boltzmann. Matemática Universitária* 29 (2000), pp. 45–74.
- [16] Spinella, H. *Billiard Simulator*. (<https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/79063-billiard-simulator>), MATLAB Central File Exchange. Acesso em 18 de junho 2021. Versão 2021.
- [17] Soares, J. J. F. “Curvas planas no ensino médio” (2018).
- [18] Teles, R. d. S. et al. “Bilhares: aspectos clássicos e quânticos” (2012).