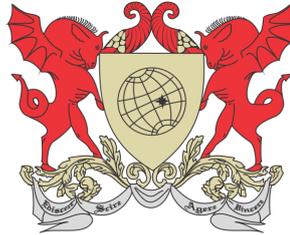


UNIVERSIDADE FEDERAL DE VIÇOSA  
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO



CARLA LOBENWEIN RESENDE RABELLO

QUADRILÁTEROS E A RETA DE SIMSON

**FLORESTAL – MINAS GERAIS  
2021**

**CARLA LOBENWEIN RESENDE RABELLO**

**QUADRILÁTEROS E A RETA DE SIMSON**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obter o título de *Magister Scientiae*.

Orientador: Luiz Gustavo Perona Araújo

Coorientador: Alexandre Alvarenga Rocha

**Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca da Universidade Federal de Viçosa - Campus Florestal**

T

R114q  
2021 Rabello, Carla Lobenwein Resende, 1986-  
Quadriláteros e a Reta de Simson / Carla Lobenwein  
Resende Rabello. – Florestal, MG, 2021.  
103 f.: il.

Orientador: Luiz Gustavo Perona Araújo.  
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa,  
Instituto de Ciências Exatas e Tecnológicas, 2021.  
Referências bibliográficas: f.103.

1. Matemática. 2. Geometria. 3. Quadriláteros. 4. Reta de  
Simson. I. Araújo, Luiz Gustavo Perona. II. Universidade  
Federal de Viçosa. Instituto de Ciências Exatas e Tecnológicas.  
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.  
III. Título.

516

Bibliotecário(a) responsável: Maria Aparecida Alves de Oliveira 1170

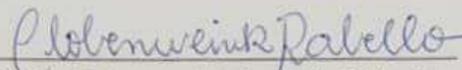
CARLA LOBENWEIN RESENDE RABELLO

QUADRILÁTEROS E A RETA DE SIMSON

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obter o título de *Magister Scientiae*.

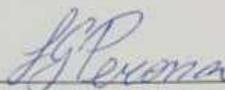
APROVADA: 18 de outubro de 2021.

Assentimento:



Carla Lobenwein Resende Rabello

Autora



Luiz Gustavo Perona Araújo

Orientador

# Dedicatória

---

Dedico este trabalho aos meus colegas de profissão que, assim como eu, amam a Matemática e o trabalho na sala de aula.

Dedico também às minhas filhas, Manuela e Helena, que em diversos momentos foram obrigadas a lidarem com a ausência da mãe, que dedicava-se por horas ao estudo e ao trabalho. Que essa jornada sirva de exemplo e que elas nunca se esqueçam da importância do estudo!

# Agradecimentos

---

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

Agradeço aos meus pais que jamais se furtaram em me proporcionar as melhores condições para o estudo, desde os meus primeiros anos de vida até os dias atuais, cuidando das minhas filhas sempre que eu preciso de silêncio para estudar.

Agradeço também ao meu esposo, Henrique, que foi o meu grande incentivador para a realização deste mestrado e que me ajudou a superar a grande montanha russa de emoções vivida nesses 2 anos e meio. Tenho certeza de que lidar com uma mestranda, professora, mãe e dona de casa não foi fácil!

Agradeço aos meus colegas do mestrado: Fernandinha, Eliane (Xerife), Marccone (Subxerife), Rômulo, Ednéia, Marcelo, Claudão e Renato pelas infindáveis horas de estudo, sempre seguidas de momentos inesquecíveis, com muita cerveja, risos e choros de emoção.

Agradeço imensamente aos meus professores do PROFMAT, em especial ao Mehran, que nos trouxe palavras doces e encorajadoras logo na primeira semana do curso, e ao Luiz Gustavo, por me incentivar e me apoiar nas minhas ideias, além de me impulsionar na escrita dessa dissertação, que por vezes parecia que não seria mais que um projeto.

Finalmente, agradeço a Deus por cada dia vivido até aqui e pela família maravilhosa que tenho.

# Resumo

---

RABELLO, Carla Lobenwein Resende, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, outubro de 2021. **Quadriláteros e a Reta de Simson**. Orientador: Luiz Gustavo Perona Araújo. Coorientador: Alexandre Alvarenga Rocha.

Esta dissertação tem como objetivo o estudo dos quadriláteros e suas propriedades. Inicialmente, o leitor encontrará a demonstração de todas as propriedades dos quadriláteros notáveis (trapézio, paralelogramo, retângulo, losango e quadrado) e duas possíveis classificações deles. Encontrará também diversos teoremas e demonstrações sobre os quadriláteros em geral, os inscritíveis, os circunscritíveis e os ortodiagonais. A culminância do trabalho se dá na demonstração do teorema que origina a *Reta de Simson* que, apesar de ser formada por três pontos de um triângulo, a prova de sua existência utiliza resultados dos quadriláteros.

Palavras-chave: Matemática. Geometria. Quadriláteros. Reta de Simson.

# Abstract

---

RABELLO, Carla Lobenwein Resende, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, October, 2021. **Quadrilaterals and the Simson's Line.** Adviser: Luiz Gustavo Perona Araújo. Co-adviser: Alexandre Alvarenga Rocha.

This dissertation aims to study quadrilaterals and their properties. Initially, the reader will find the demonstration of all the properties of remarkable quadrilaterals (trapezium, parallelogram, rectangle, rhombus and square) and two possible classifications of them. You will also find several theorems and proofs about quadrilaterals in general, the inscribable, the circumscribable and the orthodiagonal. The work culminates in the proof of the theorem that originates the Line of Simson, which despite being formed by three points of a triangle, is demonstrated by the quadrilaterals.

Keywords: Mathematics. Geometry. Quadrilaterals. Straight from Simson.

# Lista de Símbolos

---

Símbolos e notações utilizadas neste trabalho:

$\omega$  Letra grega Ômega

$\overline{AB}$  Segmento de reta com extremidades nos pontos  $A$  e  $B$

$AB$  Medida do segmento de reta  $\overline{AB}$

$\triangle ABC$  Triângulo  $ABC$

$\perp$  Retas ou segmentos perpendiculares

$//$  Retas ou segmentos paralelos

$\equiv$  Congruência de triângulos ou segmentos de retas

# Sumário

---

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>10</b>
<b>2</b>	<b>Quadriláteros Notáveis</b>	<b>14</b>
2.1	Trapézios	15
2.1.1	Propriedades dos trapézios em geral	16
2.1.2	Trapézios isósceles	18
2.2	Paralelogramos	20
2.3	Retângulos	23
2.4	Losangos	24
2.5	Quadrados	27
2.6	Classificação dos Quadriláteros	27
2.7	Trapézios como quadriláteros que possuem pelo menos um par de lados paralelos	28
2.8	Trapézios como quadriláteros que possuem <i>apenas</i> um par de lados paralelos	29
<b>3</b>	<b>Mais resultados interessantes sobre os quadriláteros</b>	<b>31</b>
3.1	Homotetia	31
3.2	Propriedades algébricas	32
3.3	Quadriláteros Inscritíveis	40
3.4	Quadriláteros Circunscritíveis	53
3.5	Quadriláteros Ortodiagonais	56
<b>4</b>	<b>A Reta de Simson</b>	<b>65</b>
4.1	A definição da Reta de Simson	65
4.2	Resultados interessantes relacionados à Reta de Simson	68
4.2.1	As retas de Simson de um quadrilátero inscritível	76
<b>5</b>	<b>Atividades</b>	<b>78</b>
5.1	Atividade 1 - Quadriláteros	78
5.1.1	Etapa 1	79
5.1.2	Etapa 2	82
5.1.3	Etapa 3	83
5.2	Atividade 2 - Quadriláteros Inscritíveis	85
5.2.1	Etapa 1	86
5.2.2	Etapa 2	88

5.3	Atividade 3 - Reta de Simson . . . . .	89
5.3.1	Etapa 1 . . . . .	90
5.4	Aplicação das atividades propostas . . . . .	91
<b>6</b>	<b>Conclusão</b>	<b>101</b>

# Introdução

---

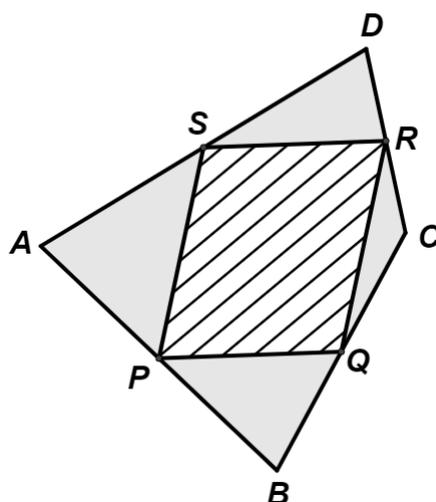
Os quadriláteros são entes importantes na Geometria e possuem propriedades muito interessantes, porém pouco conhecidas ou trabalhadas na sala de aula da escola básica. Este trabalho vem, portanto, dar a esses polígonos o seu lugar de destaque, abordando desde a sua definição até resultados mais complexos relacionados a eles.

Esta dissertação inicia-se com a definição e com a demonstração detalhada das propriedades de cada quadrilátero notável. O leitor perceberá que o Capítulo 2 aborda os quadriláteros, inicialmente, como polígonos independentes. O intuito da autora é fazer as ligações à medida que suas propriedades vão sendo demonstradas para que, somente no Capítulo 3, haja uma discussão sobre as interseções entre suas características.

Professora com experiência há mais de 10 anos na escola básica, esta autora sempre se incomodou com as diferentes maneiras de classificar os quadriláteros notáveis encontradas em livros didáticos. Por isso, o terceiro capítulo desta dissertação traz uma importante discussão sobre o assunto, mostrando duas possíveis classificações, baseadas na maneira com que se definem os trapézios. A conclusão que se chega, após o estudo dessas diferentes linhas de pensamento, é que não há uma mais correta que a outra. Contudo, a autora sempre preferiu aquela em que os trapézios são tratados como quadriláteros que possuem *apenas um* par de lados paralelos, fazendo, assim, com que os paralelogramos formem uma classe de polígonos separada deles. Tal preferência deve-se ao fato de que foi assim que a autora aprendeu, quando ainda era uma estudante do Ensino Fundamental.

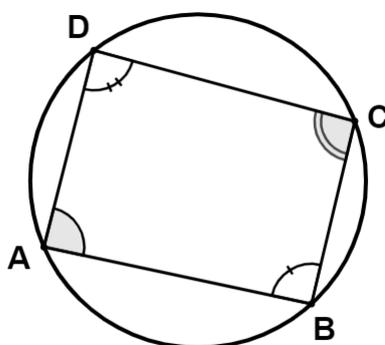
O Capítulo 3 vem abrilhantar o estudo dos quadriláteros de forma geral (não apenas dos notáveis), demonstrando diversos teoremas interessantes que se entrelaçam de maneira instigante e linda. Temos aqui propriedades de todos os tipos, sendo que, algumas delas, podem ser demonstradas tão facilmente que é difícil entender o porquê de não aparecerem no currículo da escola básica. Como exemplo, podemos citar os dois primeiros teoremas do capítulo (Teoremas 15 e 16), em que demonstra-se que os pontos médios de qualquer quadrilátero são vértices de um paralelogramo, cujo perímetro e área relacionam-se, respectivamente, com as medidas das diagonais e com a área do polígono inicial. A demonstração do Teorema 15 e da primeira parte do Teorema 16 usa apenas o conceito de base média de triângulo, assunto trabalhado no 9º ano do Ensino Fundamental. Já a segunda parte do Teorema 16, baseia-se na semelhança de triângulos, também ensinado na última série do Ensino Fundamental.

O capítulo aborda também, de maneira bastante detalhada, os quadriláteros incritíveis



**Figura 1.1:** Os Teoremas 15 e 16 mostram que  $PQRS$  é sempre um paralelogramo, cujo perímetro é igual à metade da soma de  $\overline{AC}$  e  $\overline{BD}$  e cuja área é igual à quarta parte da área de  $ABCD$

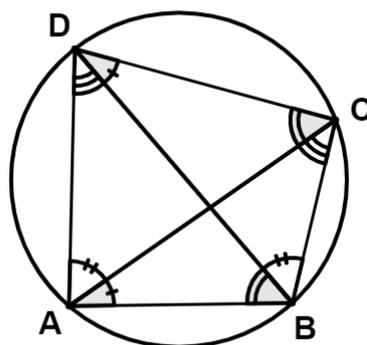
(ou cíclicos), os circunscritíveis e os ortodiagonais. Sobre os inscritíveis, destacam-se os Teoremas 24 e 28, utilizados na prova de vários outros teoremas aqui desta dissertação e cujas demonstrações utilizam ângulos inscritos em uma circunferência.



**Figura 1.2:** De acordo com o Teorema 24, um quadrilátero é considerado inscritível se, e somente se, possuir ângulos opostos suplementares

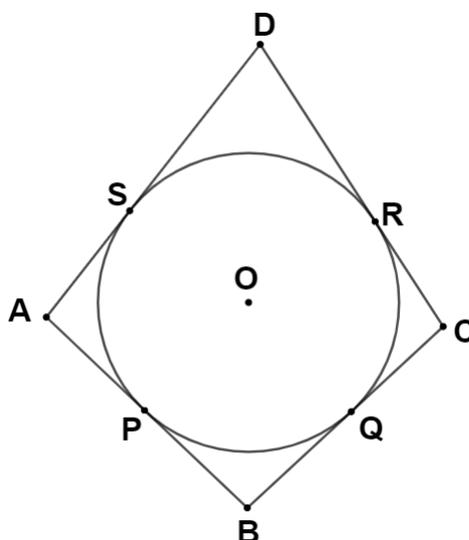
De acordo com [3], "relações entre arcos e ângulos na circunferência de um círculo" é um tema presente no currículo do 9º ano (habilidade EF09MA11). Não se faz aqui uma defesa de que estes teoremas citados precisam ser trabalhados no Ensino Fundamental ou mesmo no Ensino Médio, pelo menos não de maneira explícita, nem com provas e demonstrações, mas pode-se facilmente colocar seus resultados na forma de exercícios durante a aplicação do conteúdo.

Continuando nesta linha de teoremas que possuem demonstrações simples e alcançáveis por estudantes da escola básica, podemos citar o Teorema 37. Nele, o fato de que duas retas tangentes a uma circunferência passando por um ponto fora dela, determinam segmentos congruentes, é usado para mostrar que em um quadrilátero circunscritível, a soma das



**Figura 1.3:** Ângulos inscritos em uma circunferência demonstram o Teorema 28

medidas de cada par de lados opostos é a mesma.



**Figura 1.4:** Em qualquer quadrilátero  $ABCD$  circunscritível, temos que  $AB + CD = BC + DA$  (Teorema 37)

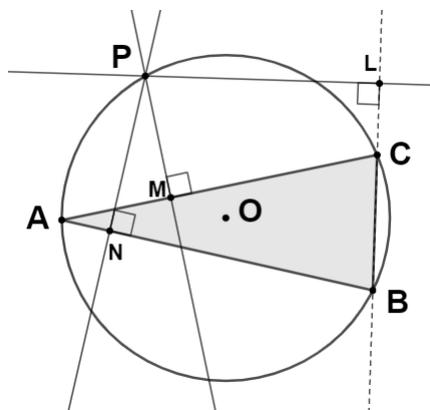
O capítulo termina com demonstrações sobre os quadriláteros ortodiagonais, que são aqueles cujas diagonais são perpendiculares entre si. Um resultado interessante sobre eles é o Teorema 40, em que demonstramos que os pontos médios de um quadrilátero ortodiagonal formam um paralelogramo retângulo. Este resultado está presente, inclusive, em uma das propostas de atividades constantes no Capítulo 5 deste trabalho, já que tal teorema pode ser comparado ao Teorema 15. Na sequência didática, o estudante é levado a comparar os quadriláteros formados pelos pontos médios de um quadrilátero qualquer (Teorema 15) e de um quadrilátero ortodiagonal (Teorema 40). Como as propriedades dos quadriláteros notáveis são estudadas ainda no 8º ano do Ensino Fundamental, a atividade pode ser aplicada nesta série, mas nada impede que ela também seja realizada em séries posteriores.

Grande parte dos teoremas demonstrados no Capítulo 3 e também no Capítulo 4 do baseia-se na obra "College Geometry - Uma introdução à geometria moderna do triângulo e do círculo" ([1]), de Nathan Altshiller-Court, um matemático polonês que nasceu em 1881 e

que, em 1919 se naturalizou americano. Esta importante obra aborda não só os quadriláteros, mas também os triângulos e as circunferências. Porém, muitos teoremas são demonstrados de maneira muito simples e direta que, nem sempre, são facilmente entendidos pelo leitor. Portanto, o trabalho da autora foi esmiuçar alguns resultados escritos por Nathan Altshiller-Court, com o intuito de facilitar o estudo de seus leitores. É importante ressaltar que há muito mais o que dizer sobre os quadriláteros.

Para a demonstração de alguns teoremas e corolários presentes nesta dissertação, recorremos a resultados dos triângulos (como base média, soma dos ângulos internos, propriedades dos triângulos isósceles, entre outros) ou da circunferência (como ângulos inscritos e sua relação com o arco que determinam na circunferência, segmentos na circunferência, entre outros). Nestes casos, as referências escolhidas foram os livros [11], [8] e [2]. Outras fontes que também foram importantes aliadas no entendimento e nas provas de alguns resultados apresentados neste trabalho foram a monografia [10] e a dissertação [9]. O *software* [7] foi a ferramenta escolhida para a produção de todas as imagens que constam ao longo do texto, além de auxiliar no entendimento de alguns resultados.

A pesquisa tem sua culminância no Capítulo 4, intitulado "A Reta de Simson". Tal reta é construída por três pontos, que são os pés das perpendiculares aos lados de um triângulo inscrito em uma circunferência. O leitor pode estranhar a presença de um capítulo inteiramente dedicado a uma reta relacionada a um triângulo inscrito em uma circunferência. Porém, esta autora, convida-o a visitar o capítulo para entender que a demonstração da colinearidade dos pontos citados é totalmente baseada em quadriláteros.



**Figura 1.5:** A Reta de Simson é formada por três pontos colineares relacionados a um triângulo inscrito em uma circunferência, porém sua demonstração é baseada nos quadriláteros

Tal demonstração não é facilmente aplicável nos anos finais do Ensino Fundamental ou mesmo nas três séries do Ensino Médio. Entretanto, estudantes destas fases do ensino podem ser instigados a contruírem uma Reta de Simson e verificarem seu resultado utilizando, por exemplo, o *GeoGebra*. Caso o leitor se interesse, há uma proposta de atividade sobre o assunto no Capítulo 5.

A autora deseja que o leitor experimente as mesmas sensações sentidas por ela na escrita dessa dissertação: satisfação e excitação em demonstrar o novo e o belo. Boa leitura!

## Quadriláteros Notáveis

---

Neste capítulo, abordaremos os principais quadriláteros e suas propriedades. As fontes usadas como referência para este capítulo foram [8], [11] e [2]. Vamos, primeiramente, definir os polígonos.

Segundo, [11], polígono é a união de pelo menos três segmentos de retas não colineares, em que cada par intercepta-se apenas em suas extremidades. Além disso, os polígonos podem ser convexos ou não convexos. Dizemos que um polígono é convexo se, para todo par de pontos distintos  $P$  e  $Q$  do interior do polígono, o segmento de reta  $\overline{PQ}$  está totalmente contido nele. Poré, se para pelo menos um par de pontos  $P$  e  $Q$  do polígono, o segmento  $\overline{PQ}$  é em parte ou totalmente exterior ao polígono, então, ele é dito não convexo. Vale ressaltar que os quadriláteros estudados nesta dissertação serão somente os convexos.

Os elementos de um polígono convexo são:

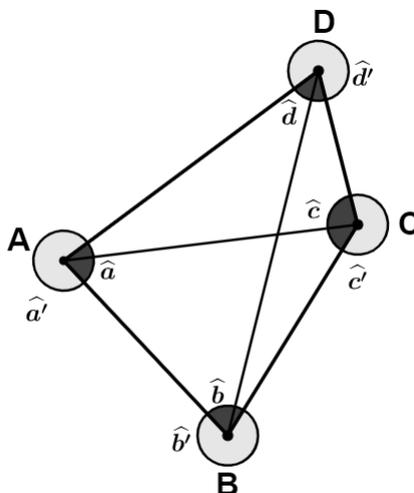
- **lados:** são os segmentos de reta que formam o polígono;
- **vértices:** são os pontos extremos dos lados;
- **lados consecutivos:** dois lados são consecutivos quando possuem um vértice em comum;
- **lados opostos:** são lados que não possuem pontos ou vértices comuns;
- **diagonais:** são os segmentos de reta que ligam vértices não consecutivos;
- **ângulos internos:** regiões determinadas por dois lados consecutivos;
- **ângulos externos:** são as regiões externas formadas por dois lados consecutivos.

Um segmento de reta com extremidades nos pontos  $A$  e  $B$ , por exemplo, pode ser representado de duas maneiras diferentes:  $AB$  ou  $\overline{AB}$ . Há autores que usam uma das notações para referir-se ao segmento e, a outra, para referir-se ao comprimento dele. Porém, não existe um consenso sobre isto. Por isso, neste trabalho, usaremos a notação  $AB$  sempre que quisermos mencionar o comprimento do segmento  $\overline{AB}$ .

Finalmente, vamos definir os quadriláteros.

**Definição 2.1:** Quadrilátero é todo polígono que possui quatro lados, o que é equivalente a dizer que possui quatro vértices ou quatro ângulos.

Assim, do quadrilátero  $ABCD$  da figura 2.1, temos:



**Figura 2.1:** Quadrilátero  $ABCD$  e seus elementos

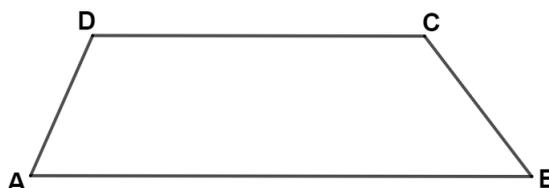
- **lados:**  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CD}$ ,  $\overline{DA}$ ;
- **vértices:**  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ;
- **pares de lados consecutivos:**  $\overline{AB}$  e  $\overline{BC}$ ,  $\overline{BC}$  e  $\overline{CD}$ ,  $\overline{CD}$  e  $\overline{DA}$ ,  $\overline{DA}$  e  $\overline{AB}$ ;
- **pares de lados opostos:**  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$ ,  $\overline{BC}$  e  $\overline{DA}$ ;
- **diagonais:**  $\overline{AC}$  e  $\overline{BD}$ ;
- **ângulos internos:**  $\hat{a}$ ,  $\hat{b}$ ,  $\hat{c}$  e  $\hat{d}$ ;
- **ângulos externos:**  $\hat{a}'$ ,  $\hat{b}'$ ,  $\hat{c}'$ ,  $\hat{d}'$ .

Neste capítulo estudaremos os quadriláteros notáveis (trapézios, paralelogramos, retângulos, losangos e quadrados) e algumas de suas características. A classificação destes polígonos por propriedades comuns será discutida apenas no Capítulo 3 e, por isso, cada quadrilátero será tratado aqui de maneira independente.

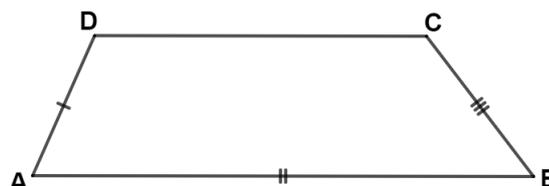
## 2.1 Trapézios

Existem duas maneiras de definirmos os trapézios. Uma delas é a de que *são quadriláteros que possuem pelo menos um par de lados paralelos* e, a outra, é a que os define como sendo *aqueles que possuem apenas um par de lados paralelos*. Veremos, mais adiante, que a escolha entre uma ou outra definição não exerce influência na compreensão sobre a figura geométrica em si, mas acaba interferindo na classificação dos quadriláteros.

Os lados paralelos em um trapézio são chamados de bases (maior e menor). Os trapézios podem ser:

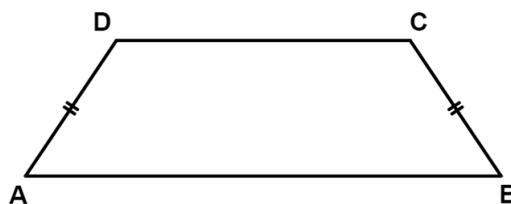


**Figura 2.2:** Trapézio



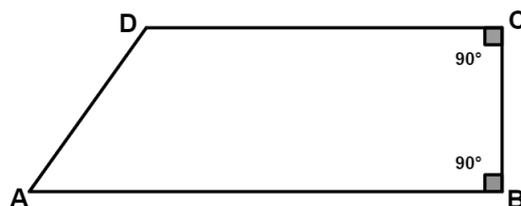
**Figura 2.3:** Trapézio escaleno: os quatro lados possuem medidas diferentes

- **escalenos:** quando os quatro lados possuem medidas diferentes.
- **isósceles:** quando os lados não paralelos possuem a mesma medida.



**Figura 2.4:** Trapézio isósceles: os lados  $\overline{DA}$  e  $\overline{BC}$ , não paralelos, são congruentes

- **retângulos:** quando um de seus lados não paralelos é perpendicular às bases.



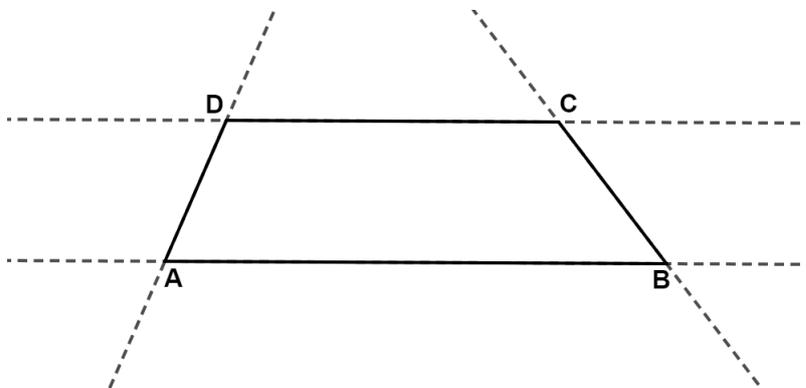
**Figura 2.5:** Trapézio retângulo: o lado  $\overline{BC}$  é perpendicular às bases  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$

### 2.1.1 Propriedades dos trapézios em geral

Nesta seção, mostraremos algumas propriedades que são válidas para todo tipo de trapézio.

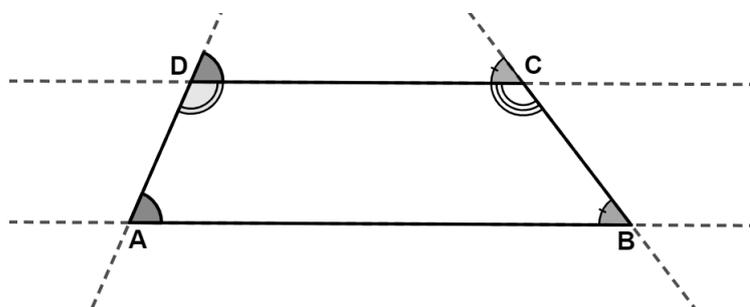
**Teorema 1:** Em todo trapézio, os ângulos consecutivos de bases diferentes são suplementares.

*Demonstração.* Para demonstrarmos essa congruência, basta entendermos que as bases formam, com cada um dos lados não paralelos, um sistema de retas paralelas cortadas por uma transversal, conforme mostra a figura 2.6: as retas suportes dos segmentos  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$  são paralelas, enquanto as retas suportes de  $\overline{DA}$  e  $\overline{BC}$  são transversais.



**Figura 2.6:**  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$  são paralelos e  $\overline{BC}$  e  $\overline{DA}$  são transversais

Temos que o ângulo  $\widehat{DAB}$  é correspondente<sup>1</sup> ao ângulo externo de vértice  $D$ , formado pelo prolongamento do lado  $\overline{DA}$  e pelo lado  $\overline{CD}$ . Este último ângulo forma um ângulo raso com o ângulo  $\widehat{CDA}$ . Assim, temos que  $\widehat{DAB}$  e  $\widehat{CDA}$  são ângulos suplementares (figura 2.7).



**Figura 2.7:** Ângulos consecutivos de bases diferentes são suplementares

De maneira análoga, temos que o ângulo  $\widehat{ABC}$  é correspondente ao ângulo externo de vértice  $C$ , formado pelo prolongamento do lado  $\overline{BC}$  e o lado  $\overline{CD}$ . Logo, os ângulos  $\widehat{ABC}$  e  $\widehat{BCD}$  são suplementares.

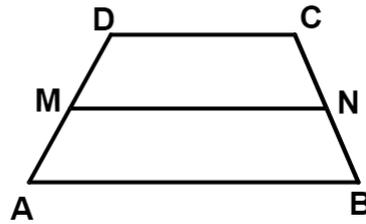
□

Além desta, os trapézios possuem uma propriedade muito importante, relacionada à base média, a qual definiremos a seguir.

**Definição 2.2:** Sejam  $M$  e  $N$  os pontos médios dos lados  $\overline{DA}$  e  $\overline{BC}$ , respectivamente, no trapézio  $ABCD$  da figura 2.8. O segmento  $\overline{MN}$  é chamado de base média do trapézio.

**Teorema 2:** A medida da base média de um trapézio é igual à média aritmética entre as medidas das bases.

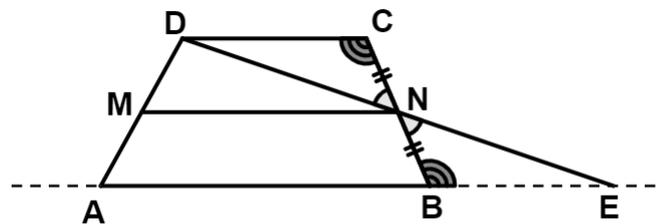
<sup>1</sup>Neste caso, estamos tratando de um par de ângulos formados por duas retas paralelas interceptadas por outra reta transversal. Caso o leitor precise ler sobre o assunto, sugerimos a referência [11].



**Figura 2.8:** O segmento  $\overline{MN}$  é base média do trapézio  $ABCD$

*Demonstração.* Pelo prolongamento do segmento de reta  $\overline{DN}$ , obtemos o ponto  $E$ , interseção com a reta suporte do lado  $\overline{AB}$  (figura 2.9). O ângulo  $\widehat{NCD}$  é alterno interno ao ângulo  $\widehat{NBE}$  e, por isso, eles são congruentes. Já os ângulos  $\widehat{CND}$  e  $\widehat{BNE}$  são congruentes porque são opostos pelo vértice. Além disso, como  $N$  é ponto médio de  $\overline{BC}$ , os segmentos  $\overline{BN}$  e  $\overline{NC}$  são congruentes. Assim, temos que os triângulos  $NCD$  e  $NBE$  são congruentes, pelo caso *ALA*<sup>2</sup>. Daí, segue que  $BE = CD$ ,  $DN = NE$  e que  $N$  também é ponto médio de  $\overline{DE}$ . Sendo assim,  $\overline{MN}$  é base média<sup>3</sup> do triângulo  $ADE$  e sua medida é:

$$\overline{MN} = \frac{\overline{AE}}{2} = \frac{\overline{AB} + \overline{BE}}{2} = \frac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2}$$



**Figura 2.9:**  $\overline{MN}$  é base média do triângulo  $ADE$  e do trapézio  $ABCD$

□

### 2.1.2 Trapézios isósceles

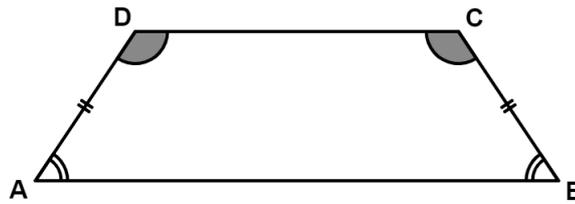
Agora, mostraremos algumas propriedades dos trapézios isósceles.

**Teorema 3:** Os trapézios isósceles possuem os ângulos de uma mesma base congruentes. Reciprocamente, se um trapézio possui ângulos de uma mesma base congruentes, então, seus lados não paralelos são congruentes.

*Demonstração.* Primeiramente, vamos mostrar que se os lados não paralelos de um trapézio são congruentes, então, os ângulos de uma mesma base possuem medidas iguais. Para

<sup>2</sup>Para estudar os casos de congruência, sugerimos a leitura do Capítulo 2 na referência [11]

<sup>3</sup>A base média de um triângulo é um segmento cujas propriedades serão muito utilizadas nesta dissertação. Portanto, caso o leitor queira, sugerimos a leitura do Teorema 6.13 do livro [2]



**Figura 2.10:** Os ângulos que formam uma mesma base no trapézio isósceles são congruentes:  $\hat{A} = \hat{B}$  e  $\hat{C} = \hat{D}$

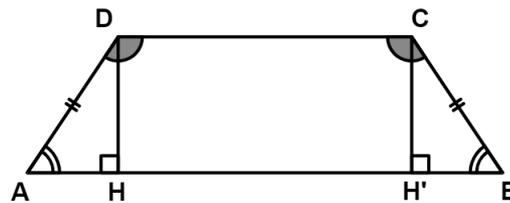
demonstrarmos esta congruência, vamos traçar as alturas  $\overline{DH}$  e  $\overline{CH'}$ , conforme figura 2.11. Desta forma, temos os triângulos  $AHD$  e  $BH'C$ , retângulos em  $H$  e  $H'$ , respectivamente.

Aplicando o Teorema de Pitágoras a cada um deles, temos:

$$(AH)^2 + (HD)^2 = (DA)^2 \quad (2.1)$$

$$(BH')^2 + (H'C)^2 = (CB)^2 \quad (2.2)$$

Como  $HD = H'C$  (pois são alturas do trapézio) e  $DA = CB$  (por hipótese), temos, pelas equações (2.1) e (2.2), que  $AH = BH'$ . Isto é, os triângulos  $AHD$  e  $BH'C$  são congruentes pelo caso LLL e, por isso, os ângulos  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$  têm mesma medida.



**Figura 2.11:** Os ângulos  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$  são congruentes

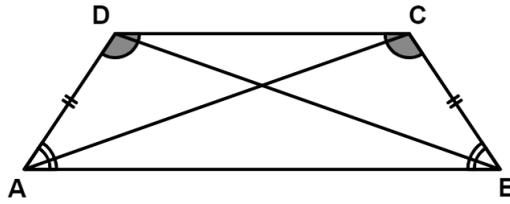
Falta mostrarmos que os ângulos  $\hat{D}$  e  $\hat{C}$  são também congruentes. Para isto, basta usarmos o fato de que os ângulos  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$  são, nesta ordem, suplementares aos ângulos  $\hat{D}$  e  $\hat{C}$ , pelo Teorema 1. Logo,  $\hat{A} = \hat{B}$ .

Agora, vamos mostrar a recíproca deste resultado, isto é, se os ângulos de uma mesma base de um trapézio são congruentes, então este trapézio é isósceles. Na mesma figura 2.11, temos que os triângulos  $AHD$  e  $BH'C$  são congruentes, pelo caso  $LAA_0$ , pois ambos são retângulos (em  $H$  e  $H'$ , respectivamente) e possuem ângulos congruentes ( $D\hat{A}H$  e  $C\hat{B}H'$ ), além de que  $HD = H'C$ . Assim, temos que  $DA = CB$ . □

Além da congruência dos ângulos das bases, os trapézios isósceles possuem também diagonais congruentes.

**Teorema 4:** As diagonais dos trapézios isósceles são congruentes.

*Demonstração.* No trapézio da figura 2.12, o triângulo  $ACD$  é congruente ao triângulo  $BDC$ , pelo caso LAL, já que  $DA = BC$ ,  $\hat{D} = \hat{C}$  e  $\overline{CD}$  é um lado comum. Dessa congruência, temos que a diagonal  $\overline{AC}$  é congruente à diagonal  $\overline{BD}$ . □



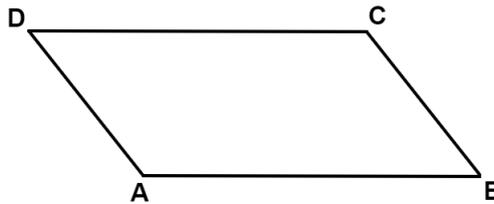
**Figura 2.12:** As diagonais de um trapézio isósceles são congruentes

Os trapézios retângulos não possuem propriedades específicas como os isósceles. Para eles, valem todas as propriedades citadas na Seção 2.1.1.

## 2.2 Paralelogramos

Vamos agora conhecer as propriedades específicas dos paralelogramos.

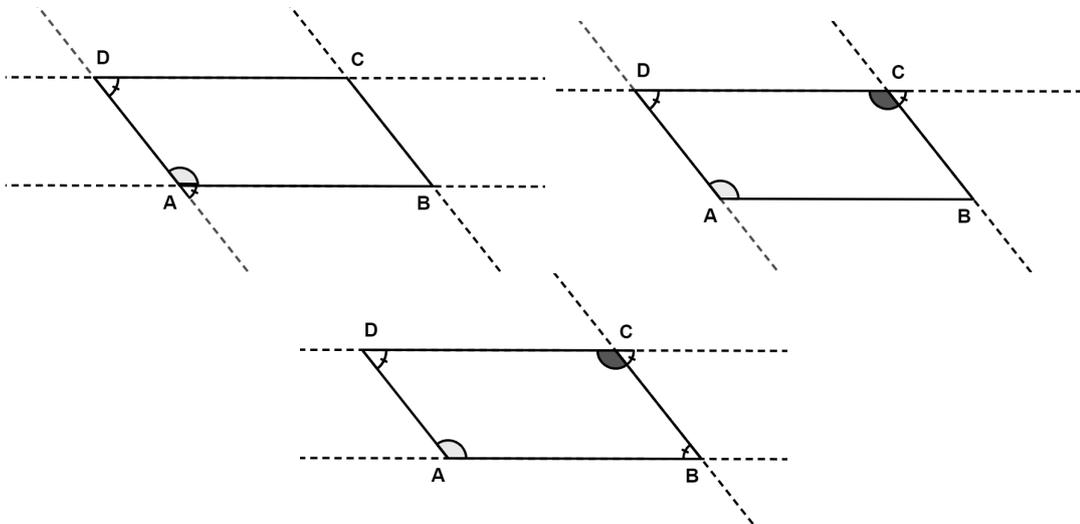
**Definição 2.3:** Um quadrilátero que possui dois pares de lados opostos paralelos é chamado de paralelogramo.



**Figura 2.13:** Paralelogramo:  $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$  e  $\overline{DA} \parallel \overline{BC}$

**Teorema 5:** Os ângulos consecutivos em todo paralelogramo são suplementares.

*Demonstração.* Tomemos os lados  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$  paralelos, interceptados pelo lado  $\overline{DA}$ , transversal (figura 2.14).



**Figura 2.14**

Deste sistema de retas, temos que o ângulo  $\widehat{D}$  é correspondente ao ângulo externo do vértice  $A$ , obtido pelo prolongamento do lado  $\overline{DA}$ . Como este ângulo forma um ângulo raso com o ângulo interno  $\widehat{A}$ , temos que

$$\widehat{A} + \widehat{D} = 180^\circ \quad (2.3)$$

Agora, tomemos o lado  $\overline{CD}$ , transversal aos lados paralelos  $\overline{DA}$  e  $\overline{BC}$ . O ângulo  $\widehat{D}$  é correspondente (e, portanto congruente) ao ângulo externo do vértice  $C$ , obtido pelo prolongamento do lado  $\overline{CD}$ . Assim, temos que

$$\widehat{C} + \widehat{D} = 180^\circ. \quad (2.4)$$

Tomando o lado  $\overline{BC}$ , transversal aos lados paralelos  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$  (figura 2.14), temos que o ângulo  $\widehat{B}$  é alterno interno ao ângulo externo do vértice  $C$ , obtido nos passos anteriores. Segue daí que

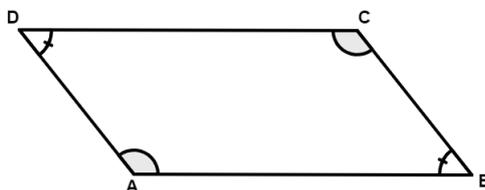
$$\widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ. \quad (2.5)$$

Sendo agora  $\overline{AB}$  transversal aos lados  $\overline{BC}$  e  $\overline{DA}$ , temos que

$$\widehat{B} + \widehat{A} = 180^\circ. \quad (2.6)$$

□

**Corolário 5.1:** Em todo paralelogramo, os ângulos opostos são congruentes.



**Figura 2.15:**  $\widehat{A} = \widehat{C}$  e  $\widehat{B} = \widehat{D}$

*Demonstração.* Pelas equações 2.5 e 2.6 temos que  $\widehat{A} = \widehat{C}$ . E, pelo Teorema 5, temos que  $\widehat{A}$  é suplementar a  $\widehat{D}$  e também a  $\widehat{B}$ , o que nos leva à igualdade  $\widehat{D} = \widehat{B}$ .

□

**Teorema 6:** Os lados opostos de um paralelogramo possuem as mesmas medidas.

*Demonstração.* A prova de que  $AB = CD$  e  $BC = DA$  no paralelogramo  $ABCD$ , vem do fato de que ao traçarmos uma de suas diagonais, obtemos dois triângulos congruentes. No paralelogramo da figura 2.16, sem perda de generalidade, podemos traçar a diagonal  $\overline{BD}$ , obtendo os triângulos  $ABD$  e  $CDB$ .

Como os ângulos  $\widehat{BDA}$  e  $\widehat{DBC}$  formam um par de alternos internos, então são congruentes. Na demonstração do Corolário 5.1, mostramos que  $\widehat{A} = \widehat{C}$  e, como o lado  $\overline{BD}$  é comum aos triângulos  $ABD$  e  $CDB$ , temos, pelo caso LAA, que eles são congruentes. Assim, temos que os lados  $\overline{DA}$  e  $\overline{BC}$  são congruentes, assim como os lados  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$ .

□

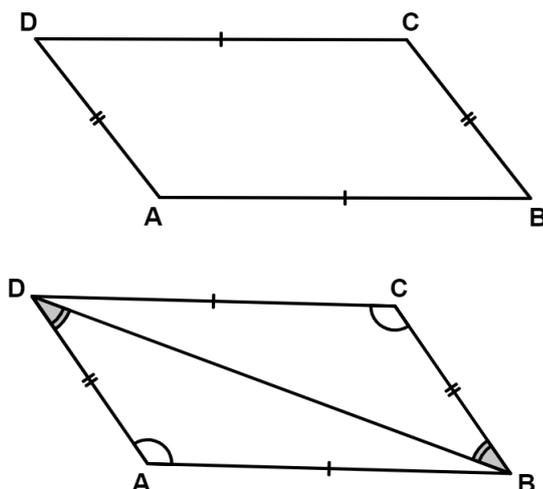


Figura 2.16:  $AB = CD$  e  $BC = DA$

**Teorema 7:** As diagonais de um paralelogramo interceptam-se no ponto médio.

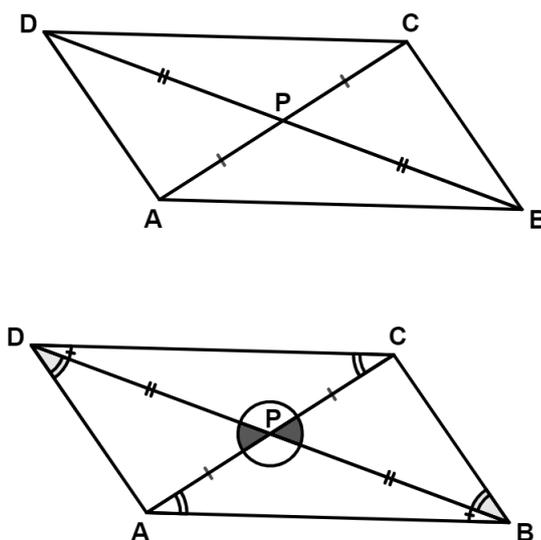


Figura 2.17:  $P$  é ponto médio de  $\overline{AC}$  e de  $\overline{BD}$

*Demonstração.* Seja  $P$  o ponto de interseção das diagonais do paralelogramo  $ABCD$  da figura 2.17. Já mostramos que os ângulos  $\widehat{BDA}$  e  $\widehat{DBC}$  são congruentes, pois são alternos internos. Da mesma forma, os pares de ângulos  $\widehat{BAC}$  e  $\widehat{DCA}$ ,  $\widehat{BDC}$  e  $\widehat{DBA}$  são alternos internos e, daí,  $\widehat{BAC} = \widehat{DCA}$  e  $\widehat{BDC} = \widehat{DBA}$ . Além disso, os ângulos  $\widehat{APB}$  e  $\widehat{CPD}$  são opostos pelo vértice, assim como  $\widehat{BPC}$  e  $\widehat{DPA}$ . Logo,  $\widehat{APB} = \widehat{CPD}$  e  $\widehat{BPC} = \widehat{DPA}$ .

Destas congruências segue que, pelo caso  $LAA_0$  (lado, ângulo, ângulo oposto), os triângulos  $APD$  e  $CPB$  são congruentes. E, então, temos que  $AP = CP$  e  $BP = DP$ .

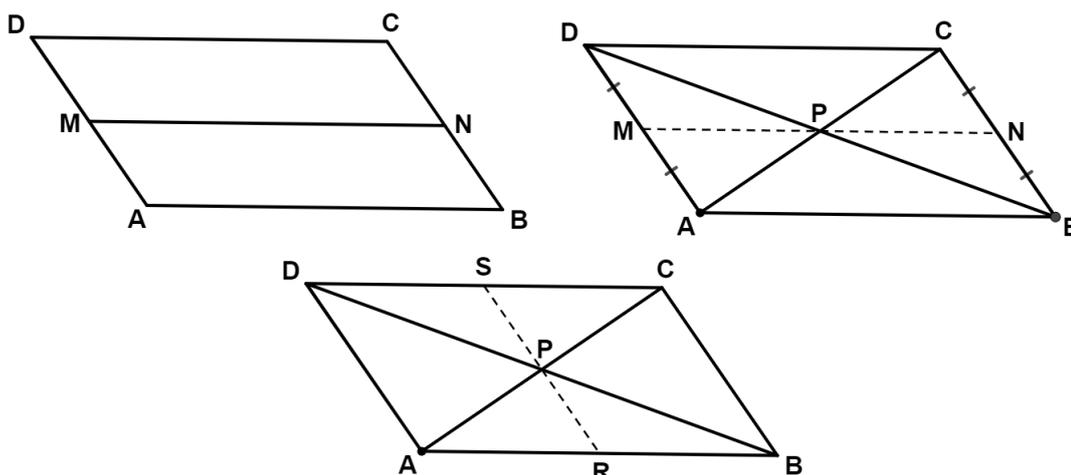
□

Por último, vamos mostrar que os paralelogramos também possuem propriedades importantes relacionadas à base média.

**Teorema 8:** O segmento que une os pontos médios de lados opostos de um paralelogramo é chamado de base média. A medida da base média é igual à média aritmética dos lados opostos.

*Demonstração.* Consideremos o paralelogramo  $ABCD$  da figura 2.18, onde  $M$  e  $N$  são os pontos médios dos lados paralelos  $\overline{DA}$  e  $\overline{BC}$ , respectivamente.

□



**Figura 2.18:** O segmento  $\overline{MN}$  é base média do paralelogramo  $ABCD$

Uma vez que o ponto  $P$ , interseção entre as diagonais do paralelogramo, as divide ao meio, pelo Teorema 7, temos que o segmento  $\overline{MP}$  é base média do triângulo  $DAC$ . O mesmo acontece com o segmento  $\overline{PN}$ , que é base média do triângulo  $BCA$ . Assim, temos que

$$MP = \frac{CD}{2} \text{ e } PN = \frac{AB}{2}. \quad (2.7)$$

Como os lados paralelos  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$  são congruentes, pelo Teorema 6, temos que

$$MN = MP + PN = \frac{CD + AB}{2} = 2 \cdot \frac{CD}{2} = 2 \cdot \frac{AB}{2} = CD = AB. \quad (2.8)$$

Analogamente, sendo  $R$  e  $S$  os pontos médios dos lados  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$ , respectivamente, temos que  $\overline{RS}$  é base média do paralelogramo  $ABCD$  e

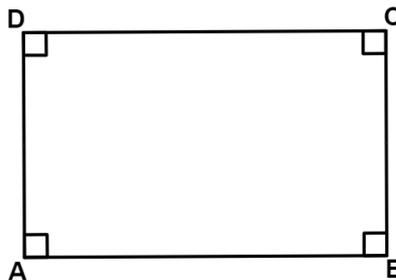
$$RS = \frac{BC + DA}{2} = BC = DA.$$

## 2.3 Retângulos

Agora, vamos estudar os retângulos e verificar que eles são um caso especial dos paralelogramos.

**Definição 2.4:** Retângulos são quadriláteros que possuem os quatro ângulos internos retos.

**Teorema 9:** Todo retângulo é um paralelogramo.



**Figura 2.19:**  $ABCD$  é um retângulo e  $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = 90^\circ$

*Demonstração.* Tomemos, inicialmente, o lado  $\overline{AB}$  do retângulo da figura 2.19. Se o ângulo  $\hat{ABC}$  é reto, então, o lado  $\overline{BC}$  é perpendicular a  $\overline{AB}$ . Agora, vamos usar o fato de que  $\hat{BCD} = 90^\circ$  e, por isso, os segmentos de reta  $\overline{BC}$  e  $\overline{CD}$  são perpendiculares. Assim, temos que

$$\overline{AB} \perp \overline{BC} \text{ e } \overline{BC} \perp \overline{CD} \Rightarrow \overline{AB} \parallel \overline{CD}.$$

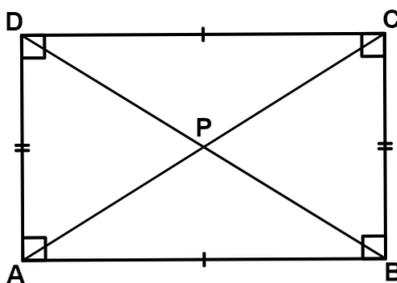
De maneira análoga, temos que  $\overline{BC} \parallel \overline{DA}$ . Pela definição 2.3, concluímos que os retângulos são paralelogramos.

□

Assim, todas as propriedades dos paralelogramos são verificadas para os retângulos. Porém, estes, possuem uma característica específica, a qual enunciaremos no próximo teorema.

**Teorema 10:** As diagonais de um retângulo possuem a mesma medida.

*Demonstração.* Tomemos os triângulos  $ABC$  e  $BAD$  da figura 2.20. Pelo caso  $LAL$ , temos que eles são congruentes, pois possuem o lado  $\overline{AB}$  em comum, os ângulos  $\hat{ABC}$  e  $\hat{BAD}$  retos e os lados  $\overline{BC}$  e  $\overline{DA}$  congruentes. Logo, os segmentos  $\overline{CA}$  e  $\overline{DB}$  possuem a mesma medida.

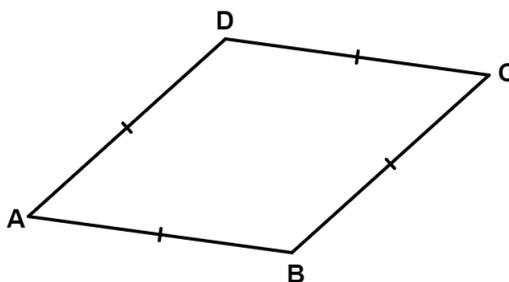


**Figura 2.20:** Os triângulos  $ABC$  e  $BAD$  são congruentes pelo caso  $LAL$

□

## 2.4 Losangos

Assim como fizemos para os retângulos, mostraremos que os losangos formam uma classe especial dos paralelogramos. Além disso, mostraremos as características próprias deles.



**Figura 2.21:**  $AB = BC = CD = DA$

**Definição 2.5:** Os losangos são quadriláteros que possuem os quatro lados congruentes.

**Teorema 11:** Os losangos são paralelogramos.

*Demonstração.* Observemos o primeiro losango da figura 2.22, em que a diagonal  $\overline{BD}$  foi traçada. Notemos que os triângulos  $ABD$  e  $CDB$  são congruentes pelo caso *LLL*, pois os lados  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CD}$  e  $\overline{DA}$  são congruentes e a diagonal  $\overline{BD}$  é comum aos dois polígonos. Logo, os ângulos  $\widehat{BDA}$  e  $\widehat{DBC}$  são congruentes.

O mesmo acontece com os ângulos  $\widehat{ABD}$  e  $\widehat{CDB}$  (segundo losango da figura 2.22), o que nos leva ao fato de que os lados  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$  formam, com a diagonal  $\overline{BD}$ , um sistema de retas paralelas interceptadas por uma transversal, e que os ângulos destacados são alternos internos.

Vejamos, agora na figura 2.23, onde a diagonal  $\overline{AC}$  foi traçada, que o mesmo acontece com os ângulos  $\widehat{CAB}$  e  $\widehat{ACD}$  e com  $\widehat{BCA}$  e  $\widehat{DAC}$  nos triângulos congruentes  $ABC$  e  $CDA$ .

Isto significa que os lados  $\overline{BC}$  e  $\overline{DA}$  são paralelos. Se  $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$  e  $\overline{BC} \parallel \overline{DA}$ , então, o losango  $ABCD$  é um paralelogramo, pela definição 2.3.

□

**Teorema 12:** As diagonais de um losango são bissetrizes de seus ângulos internos.

*Demonstração.* Observemos que o triângulo  $ABC$  da figura 2.23 é isósceles de base  $\overline{CA}$ . Logo, os ângulos  $\widehat{CAB}$  e  $\widehat{BCA}$  são congruentes. O mesmo acontece com os ângulos  $\widehat{DAC}$  e  $\widehat{ACD}$ . Já mostramos que os triângulos  $ABC$  e  $ADC$  são congruentes, então,  $\widehat{CAB} = \widehat{BCA} = \widehat{CAD} = \widehat{DCA}$ .

Analogamente, na figura 2.22, os triângulos  $ABD$  e  $CDB$  são isósceles de base  $\overline{BD}$ . Como os dois triângulos são congruentes, os ângulos das bases de ambos são também congruentes:  $\widehat{ABD} = \widehat{BDA} = \widehat{CDB} = \widehat{DBC}$ .

Assim, temos que as diagonais formam, com os lados do losango, ângulos congruentes sendo, desta forma, as bissetrizes dos ângulos internos do polígono. □

**Teorema 13:** As diagonais de qualquer losango são perpendiculares entre si.

*Demonstração.* Já mostramos que as diagonais são bissetrizes dos ângulos internos, então, os triângulos  $ABP$ ,  $BCP$ ,  $CDP$  e  $DAP$  são todos congruentes entre si, pelo caso *ALA*, considerando que  $AB = BC = CD = DA$ ,  $\widehat{PAB} = \widehat{PCB} = \widehat{PCD} = \widehat{PAD}$  e  $\widehat{PBA} = \widehat{PBC} =$

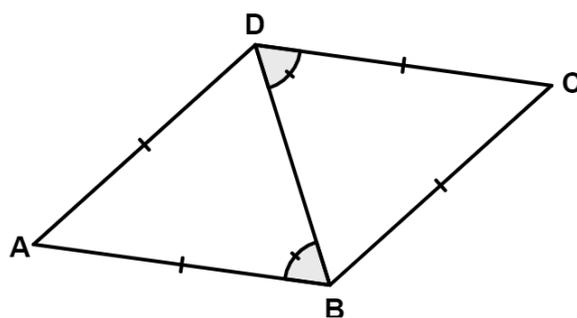
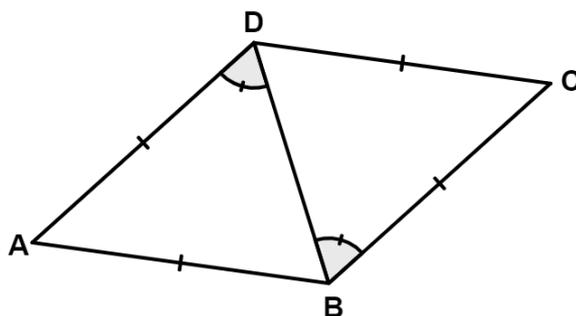


Figura 2.22: Os lados  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$  são paralelos

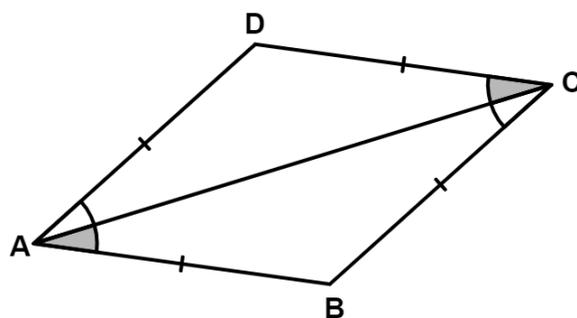


Figura 2.23: Os lados  $\overline{BC}$  e  $\overline{DA}$  são paralelos

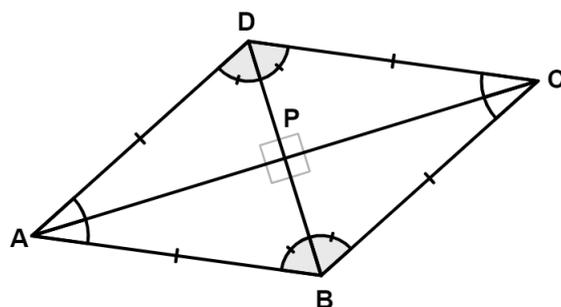


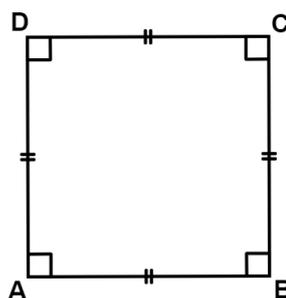
Figura 2.24:  $\overline{AC} \perp \overline{BD}$

$P\hat{D}C = P\hat{D}A$ . Logo, os ângulos  $A\hat{P}B$ ,  $B\hat{P}C$ ,  $C\hat{P}D$  e  $D\hat{P}A$  são todos congruentes:  $\frac{360^\circ}{4} = 90^\circ$ .

□

## 2.5 Quadrados

**Definição 2.6:** Os quadrados são quadriláteros que possuem os quatro ângulos retos e os quatro lados congruentes.



**Figura 2.25:**  $AB = BC = CD = DA$  e  $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = 90^\circ$

**Teorema 14:** Os quadrados são casos especiais dos retângulos e dos losangos.

*Demonstração.* Como o quadrado possui os quatro ângulos retos e os quatro lados congruentes, pelas definições de retângulo (2.4) e de losango (2.5), temos que os quadrados são casos especiais dos retângulos e dos losangos. □

## 2.6 Classificação dos Quadriláteros

Pelas seções anteriores, podemos observar que alguns quadriláteros notáveis possuem características comuns e, por isso, podemos agrupá-los. Faremos isso de duas formas diferentes, que se diferenciam pela maneira como relacionamos os trapézios e os paralelogramos. Esta diferença se dá principalmente pela forma com que definimos os trapézios, assunto já abordado na Seção 2.1.

Na Seção 2.1, vimos que os trapézios podem ser definidos como quadriláteros que possuem *pelo menos um par de lados paralelos*. Dessa forma, fazemos com que os paralelogramos sejam um caso especial deles, já que eles possuem dois pares de lados paralelos. Porém, ao trocarmos a expressão “*pelo menos um par*” por “*apenas um par*” de lados paralelos, excluimos os paralelogramos do grupo dos trapézios.

Vale ressaltar que, independente da definição que se escolhe para os trapézios, temos os retângulos e os losangos como casos especiais de paralelogramos e, os quadrados, como casos especiais dos retângulos e dos losangos. A seguir, compararemos as características dos quadriláteros notáveis, destacando suas interseções e diferenças. o tema “classificação dos quadriláteros notáveis” é um mais amplo do que abordaremos neste trabalho e, por isso, deixamos como sugestão de leitura os artigos [4] e [5].

## 2.7 Trapézios como quadriláteros que possuem pelo menos um par de lados paralelos

Vamos citar as características dos trapézios, discutidas na Seção 2.1:

- Pelo menos um par de lados opostos paralelos.
- Ângulos consecutivos de bases diferentes suplementares.
- Base média com medida igual à média aritmética entre as medidas das bases.

Observamos que os paralelogramos possuem os dois pares de lados opostos paralelos, logo, possuem a primeira característica citada para os trapézios. E, além de possuírem ângulos consecutivos suplementares, como os trapézios, seus ângulos opostos são congruentes. Assim, podemos considerar que os paralelogramos são um caso especial dos trapézios, isto é, possuem as mesmas propriedades que eles e mais algumas, as quais listaremos a seguir, conforme Seção 2.2:

- Lados opostos congruentes.
- Diagonais que interceptam-se no ponto médio.

Na Seção 2.3, vimos que os retângulos formam uma classe especial dos paralelogramos, pois além de possuírem as mesmas características deles, possuem também outras que são próprias:

- Seus ângulos internos são todos retos.
- Suas diagonais são congruentes.

Os losangos também possuem as mesmas características dos paralelogramos e mais três, conforme visto na Seção 2.4:

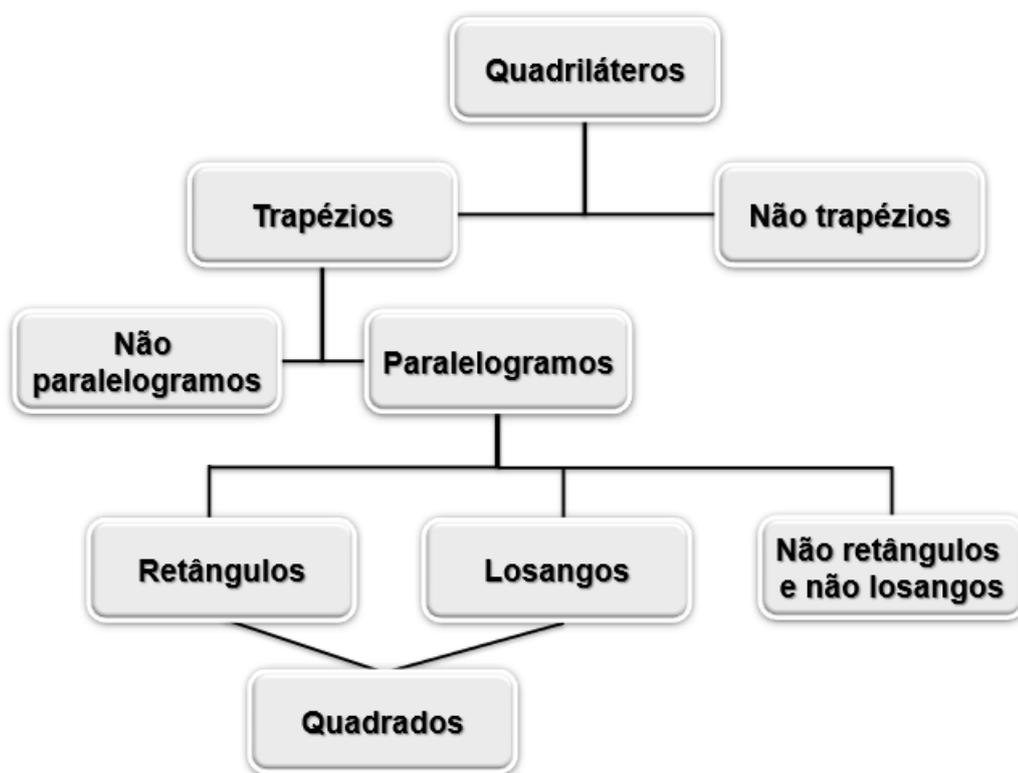
- Todos os lados congruentes.
- As diagonais são bissetrizes de seus ângulos internos.
- As diagonais são perpendiculares entre si.

Isto é, os losangos formam um caso especial dos paralelogramos, porém à parte dos retângulos.

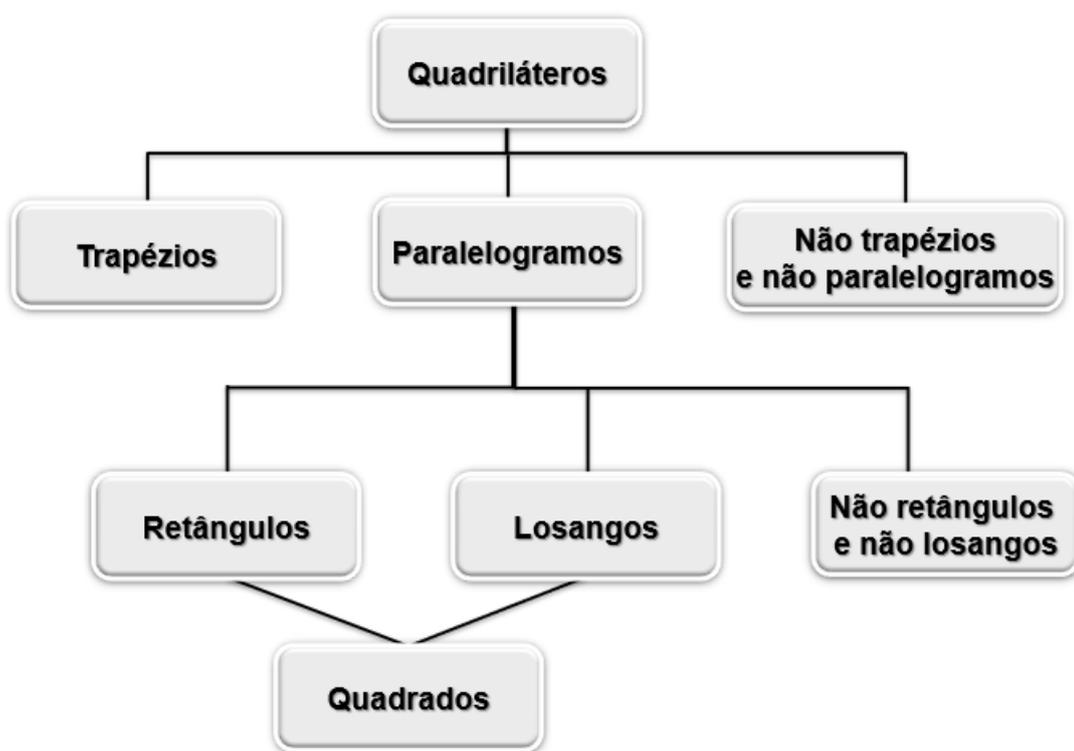
E, finalmente, vimos na Seção 2.5 que os quadrados são considerados um caso especial dos retângulos e também dos losangos. Os quadrados não possuem características exclusivas deles. De posse destas relações, podemos representar a classificação dos quadriláteros conforme esquema da figura 2.26.

## 2.8 Trapézios como quadriláteros que possuem *apenas um par de lados paralelos*

Vejamos, agora, o que muda na classificação dos quadriláteros notáveis quando usamos a definição de *quadriláteros que possuem apenas um par de lados paralelos* para os trapézios. Podemos observar que, neste caso, os paralelogramos não podem mais serem considerados um caso especial deles, já que violam a regra do “apenas um par” ao possuírem dois pares. Entretanto, esta é a única diferença entre as classificações dos quadriláteros, já que os retângulos e os losangos continuam sendo tipos de paralelogramos e, os quadrados, continuam formando uma interseção entre esses dois tipos. Assim, podemos representar a classificação conforme figura 2.27.



**Figura 2.26:** Nesta classificação, os paralelogramos são um tipo de trapézio



**Figura 2.27:** Aqui, os paralelogramos não são um tipo de trapézio

## Mais resultados interessantes sobre os quadriláteros

---

Neste capítulo enunciaremos e demonstraremos outras propriedades interessantes sobre os quadriláteros, que estão presentes, em grande parte, no livro [1]. Porém, inicialmente, falaremos sobre **homotetia**, assunto encontrado nas referências [2], [11] e [8].

### 3.1 Homotetia

Segundo [11], homotetias são transformações no plano que produzem figuras semelhantes, em que lados correspondentes são paralelos.

**Definição 3.1 (Homotetia):** Sejam  $P$ , um ponto do plano, e  $k$  um número real diferente de zero, temos que uma homotetia de centro em  $P$  e razão  $k$  é a transformação que associa a cada ponto  $A$  do plano, outro ponto  $A'$ , tal que a razão entre os segmentos  $\overline{PA}$  e  $\overline{PA'}$  é igual ao valor absoluto de  $k$ . O ponto  $P$  é conhecido como **centro homotético**. Além disso, temos que:



**Figura 3.1:** Homotetia direta ( $k > 0$ ) e inversa ( $k < 0$ )

- quando  $k > 0$ , há uma **homotetia direta** e o ponto  $A' \in \overrightarrow{PA}$ ;
- quando  $k < 0$ , ocorre uma **homotetia inversa** e o ponto  $A'$  pertence à semirreta oposta a  $\overrightarrow{PA}$ .

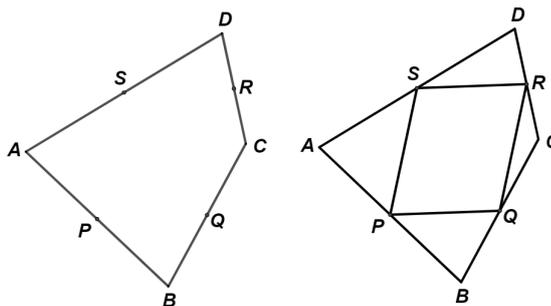
Na primeira homotetia da figura 3.1, temos  $k > 0$  e os pontos  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ ,  $D'$  e  $E'$  são correspondentes, respectivamente, aos pontos  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  e  $E$ . Na segunda figura, temos  $k < 0$

e os pontos  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ ,  $D'$  e  $E'$  são correspondentes, respectivamente, aos pontos  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  e  $E$ .

## 3.2 Propriedades algébricas

Agora, mostraremos algumas propriedades algébricas sobre os quadriláteros.

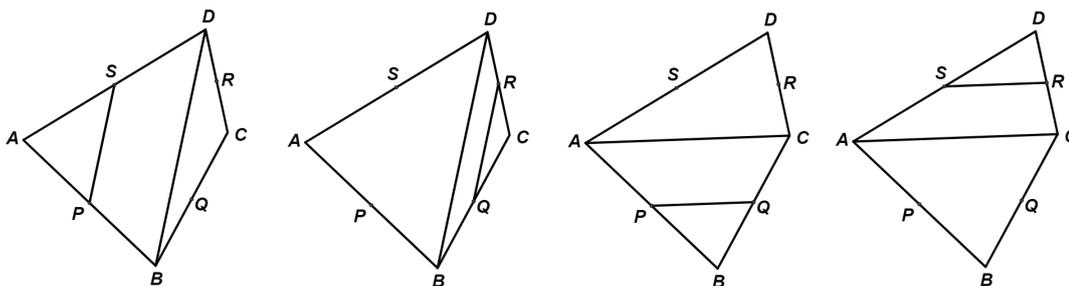
Seja  $ABCD$  um quadrilátero e sejam  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  e  $S$  os pontos médios dos lados  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CD}$  e  $\overline{DA}$ , respectivamente.



**Figura 3.2:** O quadrilátero  $PQRS$  é um paralelogramo

**Teorema 15:** O quadrilátero  $PQRS$  é um paralelogramo.

*Demonstração.* Para demonstrarmos este teorema vamos, primeiramente, considerar o triângulo  $ABD$ , que possui o segmento de reta  $\overline{PS}$  como uma base média e, por isso, temos que  $\overline{PS}$  é paralelo a  $\overline{BD}$  e  $PS = \frac{BD}{2}$  (figura 3.3). Analogamente, temos que o segmento de reta  $\overline{QR}$  é base média do triângulo  $CBD$  e, daí, temos que  $QR = \frac{BD}{2} = PS$ .



**Figura 3.3:**  $\overline{PS} \parallel \overline{BD} \parallel \overline{QR}$  e  $\overline{PQ} \parallel \overline{AC} \parallel \overline{SR}$

Como os segmentos  $\overline{PS}$  e  $\overline{QR}$  são, um a um, paralelos à diagonal  $\overline{BD}$  do quadrilátero  $ABCD$ , então, podemos afirmar que  $\overline{PS} \parallel \overline{QR}$ , pelo Axioma das Paralelas <sup>1</sup>.

Repetindo o processo, agora em relação aos triângulos  $BAC$  e  $DAC$ , temos que os segmentos de reta  $\overline{PQ}$  e  $\overline{SR}$  são paralelos entre si e cada um deles tem a metade da diagonal  $\overline{AC}$  do quadrilátero  $ABCD$ .

Pela definição 2.3, o quadrilátero  $PQRS$  é um paralelogramo.  $\square$

**Teorema 16:** Sobre o perímetro e a área do paralelogramo  $PQRS$ , temos que:

<sup>1</sup>Consulte sobre o Axioma das Paralelas na referência [2]

(a) O perímetro do paralelogramo  $PQRS$  é igual à soma das diagonais do quadrilátero  $ABCD$ .

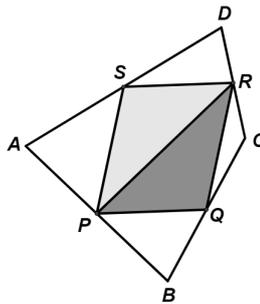
(b) A área do paralelogramo  $PQRS$  é igual à metade da área do quadrilátero  $ABCD$ .

*Demonstração.* (a) Para mostrarmos que o perímetro do paralelogramo  $PQRS$  é igual à soma das diagonais do quadrilátero  $ABCD$ , vamos usar os fatos de que  $\overline{PS}$ ,  $\overline{QR}$ ,  $\overline{PQ}$  e  $\overline{SR}$  são bases médias, respectivamente, dos triângulos  $ABD$ ,  $CBD$ ,  $BAC$  e  $DAC$ . Assim, temos que

$$PS + QR + PQ + SR = \frac{BD}{2} + \frac{BD}{2} + \frac{AC}{2} + \frac{AC}{2} = BD + AC. \quad (3.1)$$

(b) Para provarmos que a área do quadrilátero  $PQRS$  é a metade da área de  $ABCD$ , utilizaremos semelhança de triângulos.

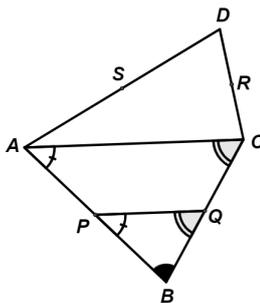
Notemos, na figura 3.4 que a área de  $PQRS$  é a soma das áreas dos triângulos  $PRS$  e  $PRQ$ :



**Figura 3.4:** Soma das áreas dos triângulos  $PRS$  e  $PRQ$

O triângulo  $PBQ$  é semelhante ao triângulo  $ABC$  (figura 3.5), pelo caso AA, pois:

- (i)  $\overline{PQ}$  é paralelo a  $\overline{AC}$ ;
- (ii)  $\widehat{BCA}$  é congruente a  $\widehat{BQP}$ , já que são correspondentes;
- (iii)  $\widehat{CAB}$  é congruente a  $\widehat{QPB}$ , já que são correspondentes;
- (iv) o ângulo  $\widehat{ABC}$  é comum aos dois triângulos.



**Figura 3.5:** Os triângulos  $PBQ$  e  $ABC$  são semelhantes pelo caso AA

Como  $\overline{PQ}$  é base média do triângulo  $ABC$  e os lados  $\overline{PB}$  e  $\overline{BQ}$  têm a metade das medidas dos lados  $\overline{AB}$  e  $\overline{BC}$ , respectivamente, por construção, temos que a razão  $r$  de semelhança entre os triângulos  $PBQ$  e  $ABC$  é igual a  $\frac{1}{2}$ . Daí, segue que

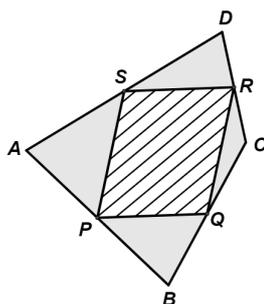
$$\frac{\text{Área } \Delta PBQ}{\text{Área } \Delta ABC} = r^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Usando um raciocínio análogo, é fácil perceber que:

$$\frac{\text{Área } \Delta SDR}{\text{Área } \Delta ADC} = r^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

$$\frac{\text{Área } \Delta APS}{\text{Área } \Delta ABD} = r^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

$$\frac{\text{Área } \Delta CQR}{\text{Área } \Delta CBD} = r^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$



**Figura 3.6:** A área do quadrilátero  $ABCD$  é igual à soma das áreas do quadrilátero  $PQRS$  com os triângulos  $PBQ$ ,  $QCR$ ,  $RDS$  e  $SAP$

As áreas dos triângulos  $PBQ$ ,  $QCR$ ,  $RDS$  e  $SAP$ , juntamente com a área do paralelogramo  $PQRS$ , formam o quadrilátero  $ABCD$  (figura 3.6):

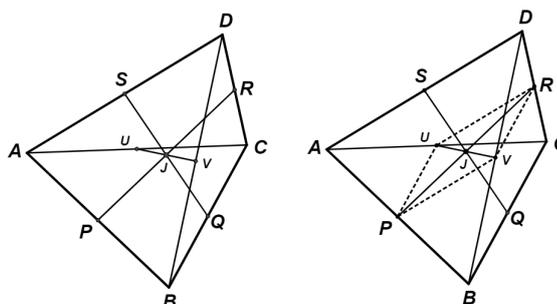
$$\begin{aligned} PBQ + QCR + RDS + SAP + PQRS &= ABCD \\ \frac{ABC}{4} + \frac{BCD}{4} + \frac{CDA}{4} + \frac{DAB}{4} + PQRS &= ABCD \\ \frac{ABC + BCD + CDA + DAB}{4} + PQRS &= ABCD \\ \frac{(ABC + CDA) + (BCD + DAB)}{4} + PQRS &= ABCD \\ \frac{2 \cdot ABCD}{4} + PQRS &= ABCD \\ PQRS &= ABCD - \frac{ABCD}{2} \\ PQRS &= \frac{ABCD}{2} \end{aligned}$$

Logo, a área do paralelogramo  $PQRS$  equivale à metade da área do quadrilátero  $ABCD$ .  $\square$

Considere o ponto  $J$  como sendo a interseção entre as diagonais  $\overline{PR}$  e  $\overline{QS}$  do paralelogramo  $PQRS$ .

**Definição 3.2:** O ponto  $J$  é chamado de **centróide** do quadrilátero  $ABCD$ .

Tomando  $U$  e  $V$ , respectivamente, como os pontos médios das diagonais  $\overline{AC}$  e  $\overline{BD}$  do quadrilátero  $ABCD$  (figura 3.7), temos o seguinte resultado:

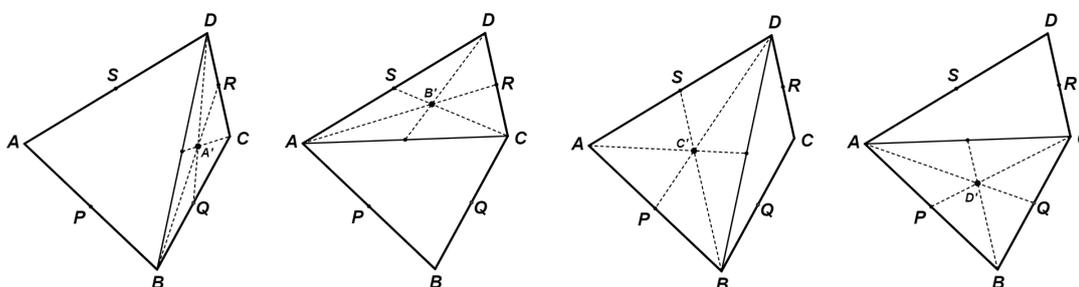


**Figura 3.7:**  $\overline{PR}$ ,  $\overline{QS}$  e  $\overline{UV}$  interceptam-se no mesmo ponto e  $PURV$  é paralelogramo

**Teorema 17:** Os segmentos  $\overline{PR}$ ,  $\overline{QS}$  e  $\overline{UV}$  interceptam-se no ponto  $J$ .

*Demonstração.* Sabemos que as diagonais de um paralelogramo interceptam-se no ponto médio, pelo Teorema 7. Assim, temos que o ponto  $J$  divide as diagonais  $\overline{PR}$  e  $\overline{QS}$  do paralelogramo  $PQRS$ . Temos também, na figura 3.7, que o segmento  $\overline{PU}$  é base média do triângulo  $ABC$ , assim como  $\overline{VR}$  é base média do triângulo  $BCD$ . Da mesma forma, temos que os segmentos  $\overline{PV}$  e  $\overline{UR}$  são bases médias, respectivamente, dos triângulos  $ABD$  e  $ACD$ . Logo, o quadrilátero  $PURV$  é um paralelogramo e suas diagonais  $\overline{PR}$  e  $\overline{UV}$  interceptam-se no ponto médio,  $J$ , de  $\overline{PR}$ .  $\square$

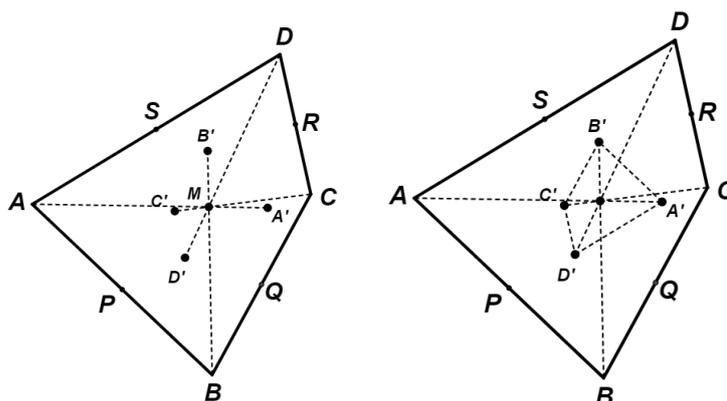
Observemos, agora, na figura 3.8 os pontos  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  e  $D'$ , baricentros<sup>2</sup> dos triângulos  $BCD$ ,  $ACD$ ,  $ABD$  e  $ABC$ , respectivamente.



**Figura 3.8:** Os pontos  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  e  $D'$  são baricentros dos triângulos  $BCD$ ,  $ACD$ ,  $ABD$  e  $ABC$

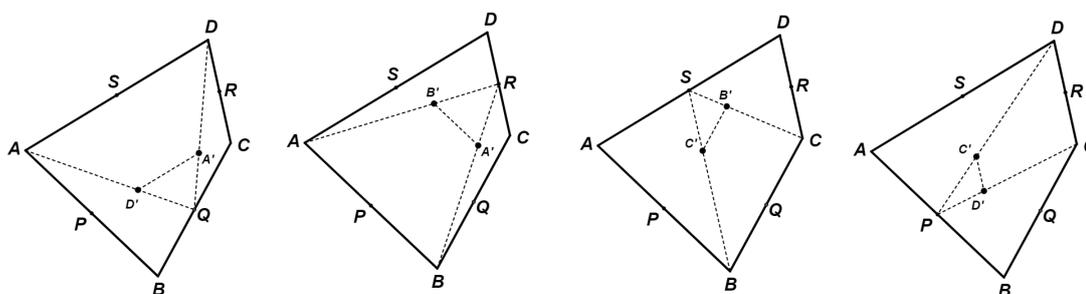
**Teorema 18:** Os segmentos  $\overline{AA'}$ ,  $\overline{BB'}$ ,  $\overline{CC'}$  e  $\overline{DD'}$  interceptam-se em um mesmo ponto (figura 3.9).

<sup>2</sup>Baricentro de um triângulo é o ponto de interseção entre as medianas.



**Figura 3.9:** Os segmentos de reta  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$  e  $DD'$  interceptam-se no ponto  $M$ . Os lados do quadrilátero  $A'B'C'D'$  são paralelos aos lados do quadrilátero  $ABCD$

*Demonstração.* Vejamos, na figura 3.9, que o segmento  $\overline{D'A'}$  é paralelo ao lado  $\overline{DA}$  do quadrilátero  $ABCD$  e o mesmo acontece com os demais segmentos:  $\overline{A'B'} \parallel \overline{AB}$ ,  $\overline{B'C'} \parallel \overline{BC}$  e  $\overline{C'D'} \parallel \overline{CD}$ . Vamos mostrar porque isto acontece, tomando o triângulo  $AQD$  na figura 3.10 como exemplo. Nela, o ponto  $D'$  divide a mediana  $\overline{AQ}$  em duas partes, sendo  $AD' = 2 \cdot D'Q$ . Ao mesmo tempo, o ponto  $A'$  divide a mediana  $\overline{DQ}$  de tal maneira que  $DA' = 2 \cdot A'Q$ . Como o ângulo  $\widehat{A'QD}$  também pertence ao triângulo  $D'QA'$ , então, pelo caso *LAL* de semelhança, temos que o triângulo  $AQD$  é semelhante ao triângulo  $D'QA'$ , já que os lados são proporcionais. Logo, os lados  $\overline{D'A'}$  e  $\overline{DA}$  são paralelos. Repetindo-se esse processo para os triângulos  $ARB$ ,  $BSC$  e  $CPD$ , podemos mostrar que os lados do quadrilátero  $A'B'C'D'$  são paralelos e proporcionais aos respectivos lados de  $ABCD$ .



**Figura 3.10:**  $\overline{A'B'} \parallel \overline{AB}$ ,  $\overline{B'C'} \parallel \overline{BC}$ ,  $\overline{C'D'} \parallel \overline{CD}$  e  $\overline{D'A'} \parallel \overline{DA}$

Portanto, os dois quadriláteros são homotéticos e os segmentos  $\overline{AA'}$ ,  $\overline{BB'}$ ,  $\overline{CC'}$  e  $\overline{DD'}$  interceptam-se no centro homotético  $M$  das duas figuras. □

**Teorema 19:** O centro homotético dos quadriláteros  $A'B'C'D'$  e  $ABCD$  coincide com o centróide  $J$ , isto é,  $M = J$ .

*Demonstração.* Tomemos o triângulo  $AQD$  da figura 3.10, a mediana  $\overline{QS}$  e o ponto  $S'$ , interseção de  $\overline{QS}$  com  $\overline{D'A'}$ . Já mostramos que  $\overline{D'A'} \parallel \overline{DA}$ , então, o ponto  $S'$  é ponto médio de  $\overline{D'A'}$ . No triângulo  $ARB$ , ocorre o mesmo com a mediana  $\overline{RP}$ . Por isso, temos

que os segmentos  $\overline{QS}$  e  $\overline{RP}$  passam pelo centro homotético dos quadriláteros  $ABCD$  e  $A'B'C'D'$ .  $\square$

**Teorema 20:** A soma dos quadrados dos lados de um paralelogramo é igual à soma dos quadrados de suas diagonais, isto é,

$$(AB)^2 + (BC)^2 + (CD)^2 + (DA)^2 = (AC)^2 + (BD)^2.$$

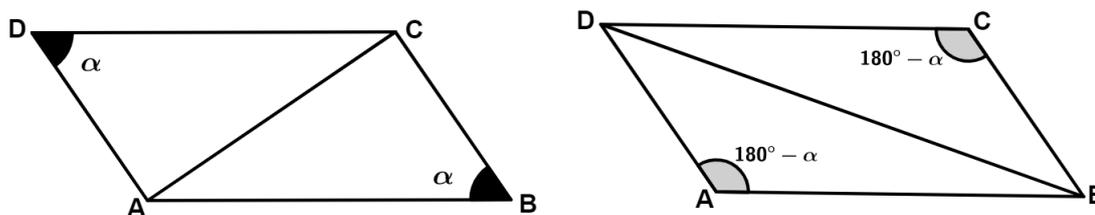


Figura 3.11

*Demonstração.* Na figura 3.11, podemos aplicar a Lei dos Cossenos<sup>3</sup> aos triângulos que se formam quando traçamos as diagonais  $\overline{AC}$  e  $\overline{BD}$ :

$$(AB)^2 + (BC)^2 - 2 \cdot (AB) \cdot (BC) \cdot \cos \alpha = (AC)^2 \quad (3.2)$$

$$(CD)^2 + (DA)^2 - 2 \cdot (CD) \cdot (DA) \cdot \cos(\alpha) = (AC)^2 \quad (3.3)$$

$$(DA)^2 + (AB)^2 - 2 \cdot (DA) \cdot (AB) \cdot \cos(180^\circ - \alpha) = (BD)^2 \quad (3.4)$$

$$(BC)^2 + (CD)^2 - 2 \cdot (BC) \cdot (CD) \cdot \cos(180^\circ - \alpha) = (BD)^2 \quad (3.5)$$

Somando as equações (3.2), (3.3), (3.4) e (3.5), usando a relação trigonométrica  $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$  e considerando que  $AB = CD$  e  $BC = DA$  temos:

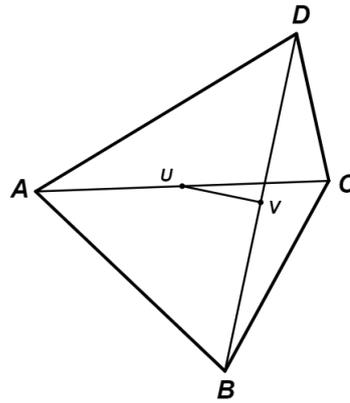
$$\begin{aligned} 2 \cdot [(AB)^2 + (BC)^2 + (CD)^2 + (DA)^2] &= 2 \cdot [(AC)^2 + (BD)^2] \\ \Downarrow \\ (AB)^2 + (BC)^2 + (CD)^2 + (DA)^2 &= (AC)^2 + (BD)^2. \end{aligned}$$

$\square$

**Teorema 21:** A soma dos quadrados dos lados de um quadrilátero é igual à soma dos quadrados das diagonais, mais o quádruplo do segmento que une os pontos médios delas. Ou seja, na figura 3.12, temos que

$$(AB)^2 + (BC)^2 + (CD)^2 + (DA)^2 = (AC)^2 + (BD)^2 + 4 \cdot (UV)^2.$$

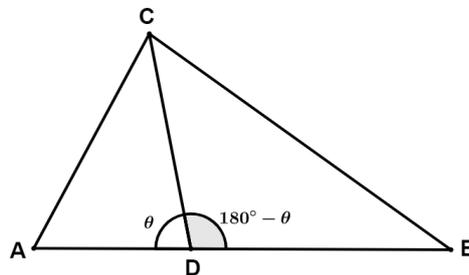
<sup>3</sup>Se o leitor precisar ler sobre a Lei dos Cossenos, sugiro consultar livro de Geometria da Coleção do PROFMAT.



**Figura 3.12:**  $(AB)^2 + (BC)^2 + (CD)^2 + (DA)^2 = (AC)^2 + (BD)^2 + 4 \cdot (UV)^2$

Para demonstrarmos este teorema, será preciso enunciarmos outro, conhecido como *Relação de Stewart*. É importante ressaltar que tal relação é utilizada no livro [1] sem, no entanto, ser citada. Nesse caso, foi preciso recorrer a outras fontes de pesquisa para que a prova do Teorema 21 fosse compreendida, sendo a monografia [10] essencial no processo.

**Teorema 22 (Relação de Stewart):** Seja  $ABC$  um triângulo e  $\overline{CD}$  uma ceviana que divide o segmento  $\overline{AB}$  em duas partes. Então, temos que



**Figura 3.13**

$$(AC)^2 \cdot (BD) + (BC)^2 \cdot (AD) = (AB) \cdot [(CD)^2 + (AD) \cdot (DB)].$$

*Demonstração.* A prova desse teorema pode ser feita usando-se a Lei dos Cossenos nos triângulos  $ACD$  e  $BCD$  da figura 3.13.

$$(AC)^2 = (AD)^2 + (CD)^2 - 2 \cdot (AD) \cdot (CD) \cdot \cos \theta \quad (3.6)$$

$$(BC)^2 = (CD)^2 + (DB)^2 - 2 \cdot (CD) \cdot (DB) \cdot \cos(180^\circ - \theta) \quad (3.7)$$

Pelas relações trigonométricas, temos que a equação (3.7) torna-se

$$(BC)^2 = (CD)^2 + (DB)^2 + 2 \cdot (CD) \cdot (DB) \cdot \cos \theta. \quad (3.8)$$

Multiplicando a equação (3.6) por  $(DB)$ , a equação (3.8) por  $(AD)$  e somando os resultados, temos:

$$\begin{aligned}
(AC)^2 \cdot (DB) + (BC)^2 \cdot (AD) &= (AD) \cdot [(AD) \cdot (DB) + (CD)^2] + (DB) \cdot [(CD)^2 + (DB) \cdot (AD)] \\
&= [(AD) + (DB)] \cdot [(CD)^2 + (DB) \cdot (AD)] \\
&= (AB) \cdot [(CD)^2 + (DB) \cdot (AD)]
\end{aligned}$$

□

*Demonstração do Teorema 21.* Usando a *Relação de Stewart* nos triângulos  $ABD$ ,  $BCD$  e  $ACV$  da figura (3.12), temos:

$$\begin{aligned}
(AB)^2 \cdot \frac{(BD)}{2} + (AD)^2 \cdot \frac{(BD)}{2} &= (BD) \cdot \left[ (AV)^2 + \frac{(BD)^2}{4} \right] \\
(AB)^2 + (AD)^2 &= 2(AV)^2 + \frac{(BD)^2}{2}, \tag{3.9}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(BC)^2 \cdot \frac{(BD)}{2} + (CD)^2 \cdot \frac{(BD)}{2} &= (BD) \cdot \left[ (CV)^2 + \frac{(BD)^2}{4} \right] \\
(BC)^2 + (CD)^2 &= 2(CV)^2 + \frac{(BD)^2}{2} \tag{3.10}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
(AV)^2 \cdot \frac{(AC)}{2} + (CV)^2 \cdot \frac{(AC)}{2} &= (AC) \cdot \left[ (UV)^2 + \frac{(AC)^2}{4} \right] \\
(AV)^2 + (CV)^2 &= 2(UV)^2 + \frac{(AC)^2}{2} \tag{3.11}
\end{aligned}$$

Somando as equações (3.9) e (3.10) e substituindo a equação (3.11) na soma, temos

$$\begin{aligned}
(AB)^2 + (BC)^2 + (CD)^2 + (AD)^2 &= 2 \cdot [(AV)^2 + (CV)^2] + (BD)^2 \\
&= 4(UV)^2 + (AC)^2 + (BD)^2.
\end{aligned}$$

□

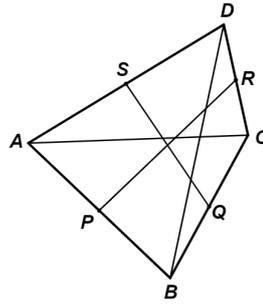
**Teorema 23:** Em um quadrilátero  $ABCD$ , sejam  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  e  $S$  os pontos médios dos respectivos lados  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CD}$  e  $\overline{DA}$ . Então,

$$(AC)^2 + (BD)^2 = 2 \cdot [(PR)^2 + (QS)^2].$$

*Demonstração.* Os segmentos  $\overline{PR}$  e  $\overline{QS}$  são diagonais do paralelogramo  $PQRS$  e, de acordo com o Teorema 20, temos que

$$(PQ)^2 + (QR)^2 + (RS)^2 + (SP)^2 = (PR)^2 + (QS)^2. \tag{3.12}$$

Além disso, já mostramos que os segmentos  $\overline{PQ}$  e  $\overline{RS}$  equivalem à metade do segmento  $\overline{AC}$  (ver demonstração do Teorema 15). Mostramos também que os segmentos  $\overline{QR}$  e  $\overline{SP}$  têm a metade do segmento  $\overline{BD}$ . Substituindo  $PQ$  e  $RS$  por  $\frac{AC}{2}$  e  $QR$  e  $SP$  por  $\frac{BD}{2}$  na equação (3.12), temos:



**Figura 3.14:**  $(AC)^2 + (BD)^2 = 2 \cdot [(PR)^2 + (QS)^2]$

$$\left(\frac{AC}{2}\right)^2 + \left(\frac{BD}{2}\right)^2 + \left(\frac{AC}{2}\right)^2 + \left(\frac{BD}{2}\right)^2 = (PR)^2 + (QS)^2$$

$$2 \cdot \frac{(AC)^2}{4} + 2 \cdot \frac{(BD)^2}{4} = (PR)^2 + (QS)^2$$

$$\frac{(AC)^2 + (BD)^2}{2} = (PR)^2 + (QS)^2$$

$$(AC)^2 + (BD)^2 = 2 \cdot [(PR)^2 + (QS)^2].$$

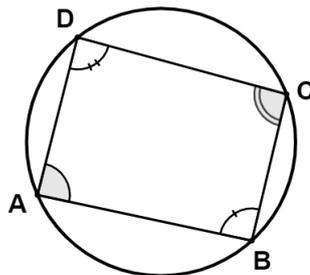
□

### 3.3 Quadriláteros Inscritíveis

Nesta seção, abordaremos algumas propriedades específicas dos quadriláteros inscritíveis (ou cíclicos).

**Definição 3.3:** Um quadrilátero convexo cujos vértices estão contidos em uma mesma circunferência é chamado de inscritível.

**Teorema 24:** Em um quadrilátero inscritível, os ângulos opostos são suplementares e a recíproca é verdadeira, ou seja, se um quadrilátero possui dois pares ângulos opostos suplementares, então ele é inscritível.



**Figura 3.15:** Os ângulos  $\hat{A}$  e  $\hat{C}$  são suplementares e os ângulos  $\hat{B}$  e  $\hat{D}$  também

*Demonstração.* Vamos demonstrar, primeiramente, que os ângulos opostos de um quadrilátero inscrito são suplementares. Uma vez que o ângulo  $\widehat{A}$  na circunferência da figura 3.15 é inscrito, sua medida tem a metade do arco  $\widehat{BCD}$ <sup>4</sup>. O mesmo ocorre com o ângulo  $\widehat{C}$ , que é inscrito e tem a metade da medida do arco  $\widehat{DAB}$ . Como os arcos  $\widehat{DAB}$  e  $\widehat{BCD}$  completam a circunferência, temos que

$$\widehat{A} + \widehat{C} = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ.$$

Analogamente, temos que

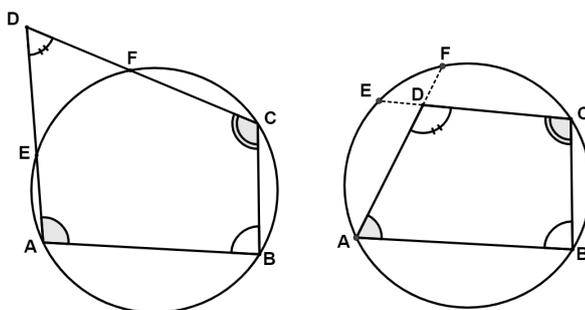
$$\widehat{B} + \widehat{D} = \frac{\widehat{ADC}}{2} + \frac{\widehat{CBA}}{2} = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ.$$

Agora, para demonstrarmos a recíproca do teorema, vamos considerar um quadrilátero  $ABCD$ , cuja soma dos ângulos  $\widehat{B}$  e  $\widehat{D}$  é igual a  $180^\circ$ . Suponhamos, por absurdo, que o vértice  $D$  não pertença à circunferência que passa pelos pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$ . Se o ponto  $D$  não pertence à circunferência, ele pode ser interno ou externo à ela:

- Se  $D$  for externo, o ângulo  $\widehat{D}$  terá medida igual a  $\frac{\widehat{ABC} - \widehat{EF}}{2}$  e o ângulo  $\widehat{B}$  medirá  $\frac{\widehat{AC}}{2}$ . Como  $\widehat{B} + \widehat{D} = 180^\circ$ , temos que

$$\frac{\widehat{ABC} - \widehat{EF}}{2} + \frac{\widehat{AC}}{2} = 180^\circ \Rightarrow \frac{\widehat{ABC} + \widehat{AC} - \widehat{EF}}{2} = 180^\circ,$$

o que é um absurdo, pois  $\widehat{ABC} + \widehat{AC} = 360^\circ$  (figura 3.16).



**Figura 3.16:** O ponto  $D$  não pode ser interno ou externo à circunferência

- Se  $D$  for interno à circunferência (figura 3.16), a medida de  $\widehat{D}$  será igual a  $\frac{\widehat{ABC} + \widehat{EF}}{2}$  e o ângulo  $\widehat{B}$  continuará medindo  $\frac{\widehat{AC}}{2}$ . Assim, teremos

$$\frac{\widehat{ABC} + \widehat{EF}}{2} + \frac{\widehat{AC}}{2} = 180^\circ \Rightarrow \frac{\widehat{ABC} + \widehat{EF} + \widehat{AC}}{2} = 180^\circ,$$

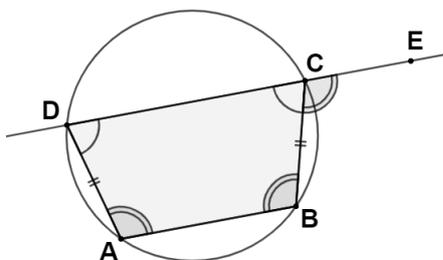
o que também é absurdo.

<sup>4</sup>Para saber mais sobre ângulos na circunferência, consulte o livro [11].

□

O teorema que enunciaremos e provaremos a seguir não encontra-se na referência [1], porém, é importante para a demonstração de outro teorema (Teorema 52), presente no Capítulo 4. O resultado pode ser encontrado na dissertação [12].

**Teorema 25:** Todo trapézio inscritível é isósceles.

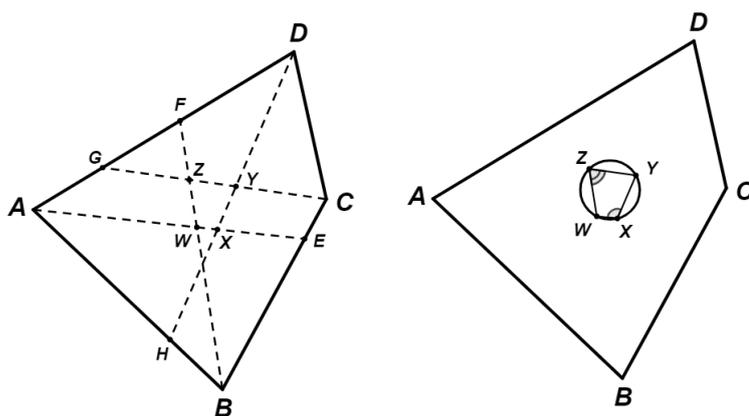


**Figura 3.17:** Todo trapézio inscritível é isósceles

*Demonstração.* Seja  $ABCD$  um trapézio inscrito em uma circunferência, com  $\overline{AB}$  paralelo a  $\overline{CD}$ . Queremos mostrar que os lados  $\overline{BC}$  e  $\overline{DA}$  são congruentes. Para isto, vamos tomar na reta  $\overleftrightarrow{CD}$  um ponto  $E$ , de tal forma que o vértice  $C$  esteja entre  $D$  e  $E$ . Temos que os ângulos  $\widehat{ABC}$  e  $\widehat{BCE}$  são alternos internos e, por isso, congruentes. Além disso, temos que  $\widehat{ABC}$  é suplementar a  $\widehat{CDA}$ , pelo Teorema 24. Por sua vez,  $\widehat{BCD}$  é suplementar a  $\widehat{BCE} = \widehat{ABC}$ . Logo,  $\widehat{CDA} = \widehat{BCD}$ . Assim, pelo Teorema 3, temos que  $ABCD$  é isósceles.

□

**Teorema 26:** As bissetrizes internas dos ângulos de um quadrilátero formam um quadrilátero inscritível.



**Figura 3.18:** O quadrilátero  $XYZW$  é inscritível

*Demonstração.* Sejam  $\overline{AE}$ ,  $\overline{BF}$ ,  $\overline{CG}$  e  $\overline{DH}$  bissetrizes internas dos ângulos  $\widehat{A}$ ,  $\widehat{B}$ ,  $\widehat{C}$  e  $\widehat{D}$  do quadrilátero  $ABCD$ , respectivamente. E sejam  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  e  $W$  os pontos de interseção entre essas bissetrizes, como na figura 3.18. Queremos mostrar que o quadrilátero  $XYZW$  é inscritível. Para isso, usaremos os triângulos  $AXD$  e  $BZC$ :

Na figura 3.19, temos que

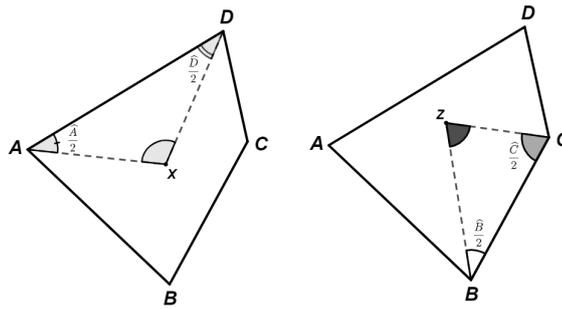


Figura 3.19:  $\hat{X}$  e  $\hat{Z}$  são suplementares

$$A\hat{X}D = 180^\circ - \frac{\hat{A}}{2} - \frac{\hat{D}}{2} \quad \text{e} \quad B\hat{Z}C = 180^\circ - \frac{\hat{B}}{2} - \frac{\hat{C}}{2},$$

de onde sai que

$$\begin{aligned} A\hat{X}D + B\hat{Z}C &= \left[ 180^\circ - \frac{\hat{A}}{2} - \frac{\hat{D}}{2} \right] + \left[ 180^\circ - \frac{\hat{B}}{2} - \frac{\hat{C}}{2} \right] \\ &= 360^\circ - \frac{1}{2} \cdot (\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D}) \\ &= 360^\circ - \frac{1}{2} \cdot (360^\circ) \\ &= 180^\circ. \end{aligned}$$

Analogamente, temos que  $X\hat{W}Z + X\hat{Y}Z = 180^\circ$ . Como os ângulos opostos do quadrilátero são suplementares, temos que o quadrilátero é inscrito, pelo Teorema 24.  $\square$

**Teorema 27:** As bissetrizes externas dos ângulos de um quadrilátero formam um quadrilátero inscrito.

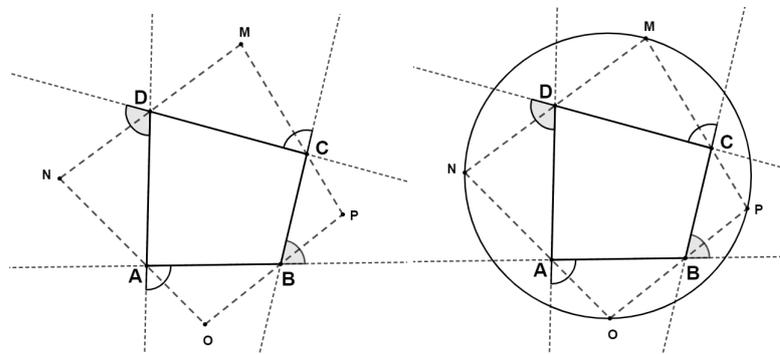


Figura 3.20: O quadrilátero  $MNOP$  é inscrito

*Demonstração.* No quadrilátero  $ABCD$  da figura (3.20), sejam  $\overline{AO}$ ,  $\overline{BP}$ ,  $\overline{CM}$  e  $\overline{DN}$  segmentos contidos nas bissetrizes dos ângulos externos  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$ ,  $\hat{C}$  e  $\hat{D}$ , respectivamente. Queremos

mostrar que o quadrilátero  $OPMN$  (cujos vértices são os pontos de interseção entre as bissetrizes externas de  $ABCD$ ) é inscritível. Para isso, tomemos as medidas dos ângulos no triângulo  $AOB$ :

- $\widehat{OAB} = \frac{180^\circ - \widehat{A}}{2} = 90^\circ - \frac{\widehat{A}}{2}$ ;
- $\widehat{OBA} = \frac{180^\circ - \widehat{B}}{2} = 90^\circ - \frac{\widehat{B}}{2}$ ;
- $\widehat{AOB} = 180^\circ - \left(90^\circ - \frac{\widehat{A}}{2}\right) - \left(90^\circ - \frac{\widehat{B}}{2}\right) = \frac{\widehat{A}}{2} + \frac{\widehat{B}}{2}$ .

Analogamente, temos dos triângulos  $BPC$ ,  $CMD$  e  $DNA$ , respectivamente, os seguintes ângulos e medidas:

- $\widehat{BPC} = \frac{\widehat{B}}{2} + \frac{\widehat{C}}{2}$
- $\widehat{CMD} = \frac{\widehat{C}}{2} + \frac{\widehat{D}}{2}$
- $\widehat{DNA} = \frac{\widehat{D}}{2} + \frac{\widehat{A}}{2}$ .

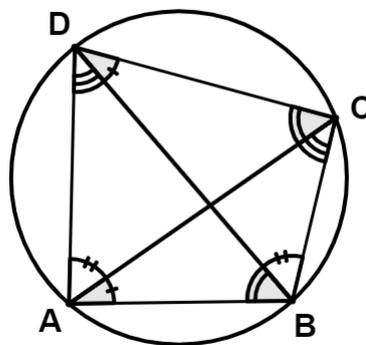
Somando as medidas de  $\widehat{AOB}$  e  $\widehat{CMD}$  (que são ângulos opostos no quadrilátero  $OPMN$ ), temos que

$$\widehat{AOB} + \widehat{CMD} = \frac{\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D}}{2} = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ. \quad (3.13)$$

Da mesma forma, os ângulos  $\widehat{BPC}$  e  $\widehat{DNA}$  somam  $180^\circ$ , então, pelo teorema 24, o quadrilátero  $OPMN$  é inscritível.

□

**Teorema 28:** Em um quadrilátero inscritível, o ângulo formado por um lado e uma diagonal é congruente ao ângulo formado pelo lado oposto e a outra diagonal.



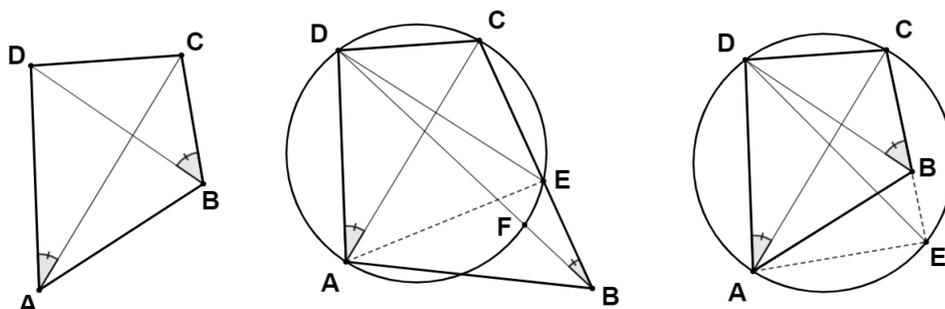
**Figura 3.21:**  $\widehat{ABD} = \widehat{ACD}$ ,  $\widehat{BAC} = \widehat{BDA}$ ,  $\widehat{CBD} = \widehat{CAD}$  e  $\widehat{DAC} = \widehat{DBC}$

*Demonstração.* Na figura 3.21, podemos notar que os ângulos citados no teorema são todos inscritos e, por isso, possuem a metade da medida dos arcos de circunferência que seus lados definem. Como os ângulos  $\widehat{ABD}$  e  $\widehat{ACD}$  definem o mesmo arco  $\widehat{AD}$ , possuem a mesma medida. O mesmo acontece com os demais ângulos. □

Reciprocamente, temos que

**Teorema 29:** Se, em um quadrilátero, o ângulo formado por um lado e uma diagonal é congruente ao ângulo formado pelo lado oposto e a outra diagonal, então, este quadrilátero é inscrito.

*Demonstração.* Seja  $ABCD$  o quadrilátero da figura 3.22 em que os ângulos  $\widehat{DAC}$  e  $\widehat{DBC}$  são congruentes. Queremos mostrar que o quadrilátero está inscrito em uma circunferência que passa pelos pontos  $A$ ,  $D$  e  $C$ .



**Figura 3.22:**  $\widehat{DAC} = \widehat{DBC}$

Suponhamos, por absurdo, que  $ABCD$  não esteja inscrito nesta circunferência. Então, existem duas possibilidades: o vértice  $D$  pertence ao interior da circunferência ou é exterior à ela. Vamos supor, primeiramente, que  $B$  seja um ponto exterior e que  $E$  seja o ponto de interseção do lado  $\overline{CB}$  com a circunferência. Neste caso, o quadrilátero  $AECD$  é inscrito na circunferência e os ângulos  $\widehat{DAC}$  e  $\widehat{DEC}$  descrevem o mesmo arco  $\widehat{DC}$ . Por serem ângulos inscritos na circunferência, ambos têm a metade do arco que descrevem sendo, portanto, congruentes. Dessa forma, temos que

$$\widehat{DBC} = \widehat{DAC} = \widehat{DEC},$$

o que é um absurdo, já que  $\widehat{DBC}$  é um ângulo externo à circunferência e sua medida é calculada por  $\frac{\widehat{DC} - \widehat{FE}}{2} < \frac{\widehat{DC}}{2}$  ( $F$  é a interseção de  $\overline{DB}$  e a circunferência).

Vamos supor, agora, que o vértice  $D$  do quadrilátero  $ABCD$  seja interior à circunferência e  $E$  seja a interseção do lado  $\overline{CB}$  e a circunferência. Assim, novamente temos que  $AECD$  é inscrito na circunferência e  $\widehat{DEC}$ , por descrever o mesmo arco de  $\widehat{DAC}$ , é congruente a ele. Porém, os ângulos  $\widehat{DEC}$  e  $\widehat{DBC}$ , congruentes, formam, respectivamente, os triângulos  $DEC$  e  $DBC$ , em que o lado  $\overline{DC}$  e o ângulo de vértice  $C$  são comuns. Ou seja, os dois triângulos possuem um lado, um ângulo e um ângulo oposto congruentes. Pelo

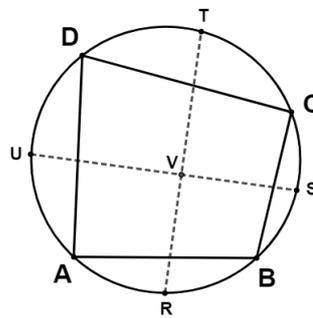
caso  $LAA_0$ ,  $DEC$  e  $DBC$  são congruentes e  $DB = DE \Rightarrow B = E$ , o que é uma contradição, pois  $E$  pertence à circunferência e  $B$  não.

Assim, a única possibilidade que resta ao vértice  $D$  do quadrilátero  $ABCD$  é ser um ponto da circunferência.

□

Um quadrilátero inscrito define, na circunferência, quatro arcos ( $\widehat{AB}$ ,  $\widehat{BC}$ ,  $\widehat{CD}$  e  $\widehat{DA}$ , na figura 3.23). Sejam  $R$ ,  $S$ ,  $T$  e  $U$  pontos médios dos arcos definidos pelo quadrilátero inscrito  $ABCD$ . Temos que

**Teorema 30:**  $\overline{RT}$  e  $\overline{SU}$  são segmentos perpendiculares.



**Figura 3.23:**  $\overline{RT} \perp \overline{SU}$

*Demonstração.* Considerando o ponto  $V$  como sendo a interseção entre os segmentos  $\overline{RT}$  e  $\overline{SU}$ , temos que o ângulo  $R\hat{V}S$  determina o arco de circunferência  $\widehat{RBS}$  e é oposto pelo vértice ao ângulo  $T\hat{V}U$ , que determina o arco  $\widehat{TDU}$ . Temos que

$$R\hat{V}S = T\hat{V}U = \frac{\widehat{RBS} + \widehat{TDU}}{2} = \frac{\left(\frac{\widehat{AB}}{2} + \frac{\widehat{BC}}{2}\right) + \left(\frac{\widehat{CD}}{2} + \frac{\widehat{DA}}{2}\right)}{2} = \frac{360^\circ}{4} = 90^\circ.$$

Da mesma forma, temos que

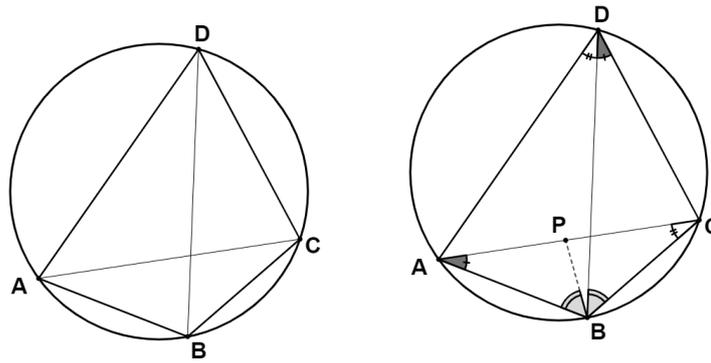
$$S\hat{V}T = U\hat{V}R = \frac{\widehat{SCT} + \widehat{UAR}}{2} = \frac{\left(\frac{\widehat{BC}}{2} + \frac{\widehat{CD}}{2}\right) + \left(\frac{\widehat{DA}}{2} + \frac{\widehat{AB}}{2}\right)}{2} = \frac{360^\circ}{4} = 90^\circ.$$

Logo, os quatro ângulos formados pela interseção dos segmentos  $\overline{RT}$  e  $\overline{SU}$  são retos.

□

**Teorema 31 (Ptolomeu):** Num quadrilátero inscrito  $ABCD$ , o produto das suas diagonais é igual à soma dos produtos dos pares de lados opostos. Isto é:

$$(AC) \cdot (BD) = (AB) \cdot (CD) + (BC) \cdot (DA). \quad (3.14)$$



**Figura 3.24:**  $(AC) \cdot (BD) = (AB) \cdot (CD) + (BC) \cdot (DA)$

*Demonstração.* Tomemos um ponto  $P$  da diagonal  $\overline{AC}$ , de tal forma que  $\widehat{ABP} = \widehat{DBC}$  (figura 3.24). Pelo Teorema 28, temos que  $\widehat{BAC} = \widehat{BDC}$  e  $\widehat{ADB} = \widehat{ACB}$ . Assim, temos que os triângulos  $ABP$  e  $DBC$  são semelhantes pelo caso AA. Da mesma forma, os triângulos  $ABD$  e  $PBC$  também são semelhantes, pois

$$\widehat{ABD} = \widehat{ABP} + \widehat{PBD} \text{ e } \widehat{PBC} = \widehat{PBD} + \widehat{DBC} \quad (3.15)$$

Uma vez que  $\widehat{ABP} = \widehat{DBC}$ , por (3.15), temos que  $\widehat{ABD} = \widehat{PBC}$ . Destas semelhanças, saem as seguintes proporções:

$$\frac{(AP)}{(CD)} = \frac{(AB)}{(BD)} \Rightarrow (AP) \cdot (BD) = (AB) \cdot (CD) \quad (3.16)$$

e

$$\frac{(DA)}{(BD)} = \frac{(PC)}{(BC)} \Rightarrow (PC) \cdot (BD) = (BC) \cdot (DA) \quad (3.17)$$

Somando as equações (3.16) e (3.17), temos que

$$[(AP) + (PC)] \cdot (BD) = (AB) \cdot (CD) + (BC) \cdot (DA). \quad (3.18)$$

Como  $AP + PC = AC$ , a equação (3.18) torna-se

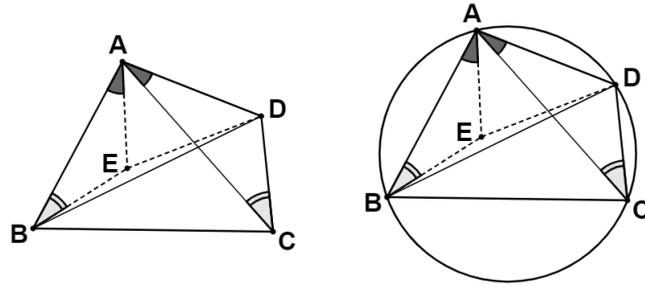
$$(AC) \cdot (BD) = (AB) \cdot (CD) + (BC) \cdot (DA).$$

□

A recíproca deste teorema é verdadeira e a demonstraremos a seguir.

**Teorema 32:** Se o produto das diagonais de um quadrilátero é igual à soma dos produtos dos lados opostos, então o quadrilátero é inscritível.

*Demonstração.* Seja  $ABCD$  o quadrilátero da figura 3.25. Seja  $E$  um ponto do interior do quadrilátero, tal que  $\widehat{BAE} = \widehat{CAD}$  e  $\widehat{ABE} = \widehat{ACD}$ . Queremos mostrar que o ponto  $E$  pertence à diagonal  $\overline{BD}$  pois, segundo o Teorema 33, se  $\widehat{ABE} = \widehat{ACD} = \widehat{ABD}$ , então, o quadrilátero será inscritível.



**Figura 3.25:** Recíproca do Teorema de Ptolomeu (31)

Os triângulos  $ABE$  e  $ACD$  são semelhantes, pelo caso  $AA$ . Então,

$$\frac{(AB)}{(AC)} = \frac{(BE)}{(CD)} \Rightarrow (AB) \cdot (CD) = (AC) \cdot (BE). \quad (3.19)$$

Da mesma semelhança, podemos escrever que

$$\frac{(AB)}{(AE)} = \frac{(AC)}{(DA)} \Rightarrow (AB) \cdot (DA) = (AC) \cdot (AE). \quad (3.20)$$

Além disso, temos que

$$\widehat{BAC} = \widehat{BAE} + \widehat{EAC} \text{ e } \widehat{EAD} = \widehat{EAC} + \widehat{CAD}. \quad (3.21)$$

Uma vez que  $\widehat{BAE} = \widehat{CAD}$ , por (3.21), temos que  $\widehat{BAC} = \widehat{EAD}$ . Da equação (3.20), temos que os lados  $\overline{AB}$  e  $\overline{AC}$  do triângulo  $ABC$  são, respectivamente, proporcionais aos lados  $\overline{AE}$  e  $\overline{DA}$  do triângulo  $AED$ . Logo, os triângulos  $ABC$  e  $AED$  são semelhantes, pelo caso  $LAL$ . Desta semelhança, temos que

$$\frac{(BC)}{(ED)} = \frac{(AC)}{(DA)} \Rightarrow (BC) \cdot (DA) = (AC) \cdot (ED). \quad (3.22)$$

Somando as equações (3.19) e (3.22), temos

$$(AB) \cdot (CD) + (BC) \cdot (DA) = (AC) \cdot [(BE) + (ED)]. \quad (3.23)$$

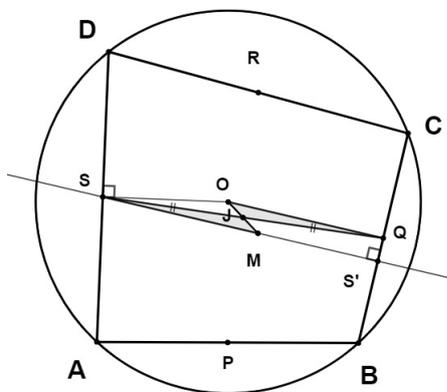
Uma vez que, por hipótese, o produto das diagonais é igual à soma dos produtos dos lados opostos do quadrilátero  $ABCD$ , pela equação (3.23),  $BE + ED = BD$ . Dessa forma, o ponto  $E$  pertence ao segmento  $\overline{BD}$  e o quadrilátero é inscrito.  $\square$

Agora, consideraremos o quadrilátero  $ABCD$ , inscrito em uma circunferência de centro  $O$ . Sejam  $J$  o centroide do quadrilátero e  $P, Q, R$  e  $S$  os pontos médios dos lados  $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$  e  $\overline{DA}$ , respectivamente.

**Teorema 33:** As retas perpendiculares aos lados de  $ABCD$  que passam por  $P, Q, R$  e  $S$  interceptam-se em um único ponto.

*Demonstração.* Seja  $S'$  o pé da perpendicular ao lado  $\overline{BC}$  que passa por  $S$ . Temos que  $\overline{SS'}$  intercepta  $\overline{OJ}$  em um ponto, o qual chamaremos de  $M$ . Temos também que  $\overline{OQ}$  é

perpendicular a  $\overline{BC}$ <sup>5</sup>, logo  $\overline{SS'}$  e  $\overline{OQ}$  são paralelos. Temos ainda que  $\widehat{QJO}$  e  $\widehat{SJM}$  são opostos pelo vértice e  $\widehat{QOJ}$  é alterno interno a  $\widehat{SMJ}$ . Como o ponto  $J$  é ponto médio de  $\overline{QS}$ , então, os triângulos  $QOJ$  e  $SMJ$  são congruentes pelo caso  $LAAO$ .



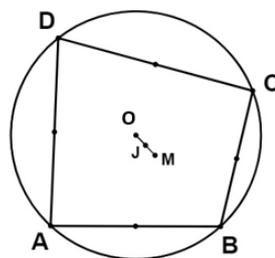
**Figura 3.26:** Os triângulos  $QOJ$  e  $SMJ$  são congruentes pelo caso  $LAAO$

Isto significa que temos  $\overline{OJ}$  e  $\overline{JM}$  congruentes, ou seja,  $M$  é o simétrico de  $O$  em relação ao centroide  $J$ . Repetindo o processo para as perpendiculares aos demais lados de  $ABCD$  que passam pelos pontos médios dos lados opostos, encontraremos  $M$  como interseção de todas elas.

□

Agora, definiremos um ponto dos quadriláteros inscritíveis, chamado de *anticentro*. Seja  $O$  o centro da circunferência circunscrita ao quadrilátero e  $J$  o centroide do quadrilátero. Temos que:

**Definição 3.4:** O ponto  $M$ , simétrico de  $O$  em relação ao ponto  $J$  é o anticentro do quadrilátero  $ABCD$ .



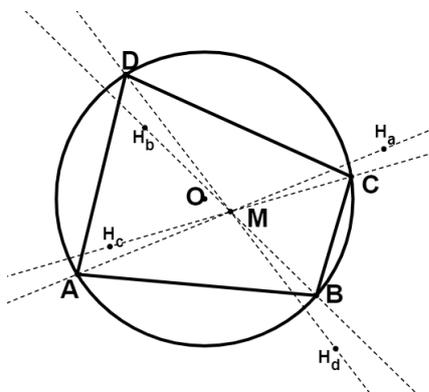
**Figura 3.27:** O ponto  $M$  é o anticentro do quadrilátero  $ABCD$

Seja  $ABCD$  um quadrilátero inscritível. Tomando seus vértices, três a três, formamos os seguintes triângulos:  $BCD$ ,  $ACD$ ,  $ABD$  e  $ABC$ . Considerando  $H_a$ ,  $H_b$ ,  $H_c$  e  $H_d$  como sendo os ortocentros<sup>6</sup> de cada um destes triângulos, respectivamente, temos que:

<sup>5</sup>Ver Teorema 6.5 do livro [11].

<sup>6</sup>Ortcentro de um triângulo é a interseção das alturas.

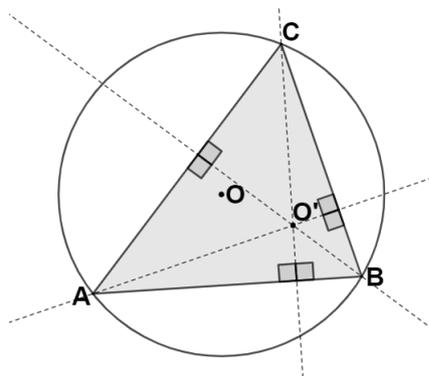
**Teorema 34:** As retas  $\overleftrightarrow{AH_a}$ ,  $\overleftrightarrow{BH_b}$ ,  $\overleftrightarrow{CH_c}$  e  $\overleftrightarrow{DH_d}$  interceptam-se em um único ponto e, além disso, tal ponto coincide com o anticentro do quadrilátero.



**Figura 3.28:**  $\overleftrightarrow{AH_a}$ ,  $\overleftrightarrow{BH_b}$ ,  $\overleftrightarrow{CH_c}$  e  $\overleftrightarrow{DH_d}$  interceptam-se no anticentro,  $M$

Para demonstrarmos este teorema, precisaremos mostrar outro resultado importante, que relaciona o centro de uma circunferência circunscrita a um triângulo e o ortocentro dele.

Seja  $ABC$  um triângulo inscrito em uma circunferência cujo centro é o ponto  $O$  e seja  $O'$  o ortocentro do triângulo.



**Figura 3.29:**  $ABC$  é um triângulo inscrito na circunferência de centro  $O$ . O ponto  $O'$  é o ortocentro do triângulo

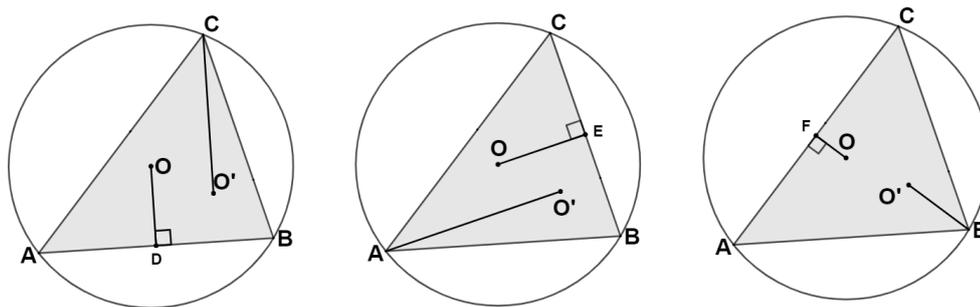
Temos que:

**Teorema 35:** A distância de um lado do triângulo  $ABC$  até o ponto  $O$  é igual à metade da distância entre o vértice oposto e o ponto  $O'$ .

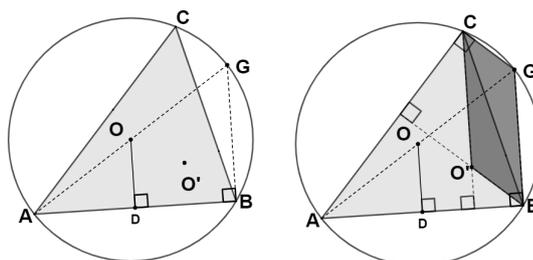
*Demonstração.* Queremos mostrar que, no triângulo da figura 3.29, a distância de  $O$  a cada lado do triângulo é igual à metade da distância do vértice oposto ao lado e o ponto  $O'$  (figura 3.30).

Seja  $G$  o ponto da circunferência obtido pela interseção da reta que passa por  $\overline{AO}$ . Como  $\overline{AG}$  é um diâmetro da circunferência, então, o triângulo  $AGB$  é retângulo em  $B$  (pois é inscrito em uma semicircunferência). Passando por  $O$  um segmento perpendicular ao lado  $\overline{AB}$  do triângulo, encontramos o ponto  $D$ , de forma que  $\overline{OD}$  é paralelo a  $\overline{GB}$ .

Como  $O$  é ponto médio de  $\overline{AG}$ , por construção, então,  $D$  é ponto médio do lado  $\overline{AB}$  e, por isso,  $\overline{OD}$  é base média do triângulo  $AGB$  (figura 3.31).



**Figura 3.30:**  $OD = \frac{O'C}{2}$ ,  $OE = \frac{O'A}{2}$  e  $OF = \frac{O'B}{2}$



**Figura 3.31:**  $OD = \frac{GB}{2} = \frac{CO'}{2}$  e  $CGBO'$  é paralelogramo

Vamos analisar, agora, o quadrilátero  $CGBO'$ . Nele, temos que o lado  $\overline{CG}$  é perpendicular ao segmento  $\overline{AC}$  (pois o triângulo  $ACG$  é inscrito na circunferência), assim como  $O'B$  (que pertence à altura do triângulo). Igualmente, temos que  $\overline{GB}$  e  $\overline{CO'}$  são perpendiculares ao lado  $\overline{AB}$ . Portanto,  $CGBO'$  é um paralelogramo e  $GB = CO'$ :

$$OD = \frac{GB}{2} = \frac{CO'}{2}.$$

A demonstração para  $OE = \frac{AO'}{2}$  e  $OF = \frac{BO'}{2}$  é análoga. □

De posse desse resultado, vamos agora provar o Teorema 34.

*Demonstração do Teorema 34.* Queremos mostrar que as retas  $\overleftrightarrow{AH_a}$ ,  $\overleftrightarrow{BH_b}$ ,  $\overleftrightarrow{CH_c}$  e  $\overleftrightarrow{DH_d}$  interceptam-se no anticentro do quadrilátero  $ABCD$ . De acordo com o Teorema 35,  $\overline{AH_d}$  tem o dobro da medida de  $\overline{OE}$  (figura 3.32), assim como  $\overline{DH_a}$ , pois  $\overline{OE}$  representa a distância entre o centro da circunferência e o lado  $\overline{BC}$  nos triângulos  $BCD$  e  $ABC$ . Além disso,  $\overline{AH_d}$  e  $\overline{DH_a}$  são perpendiculares ao lado  $\overline{AD}$ . Temos, então, que  $AH_dH_aD$  é um paralelogramo e suas diagonais  $AH_a$  e  $DH_d$  interceptam-se no ponto médio.

Analogamente, temos que  $BH_c = CH_b = 2 \cdot OF$ , onde  $\overline{OF}$  representa a distância do centro da circunferência até o lado  $\overline{AD}$  nos triângulos  $ACD$  e  $ABD$ . Isto é,  $BH_cH_bC$  é um paralelogramo e suas diagonais  $BH_b$  e  $CH_c$  interceptam-se no ponto médio.

O quadrilátero  $BH_dH_bD$  também é paralelogramo e, por isso, suas diagonais  $BH_b$  e  $DH_d$  interceptam-se no ponto médio, assim como as diagonais  $AH_a$  e  $BH_b$  do paralelogramo  $AH_bH_aB$ .

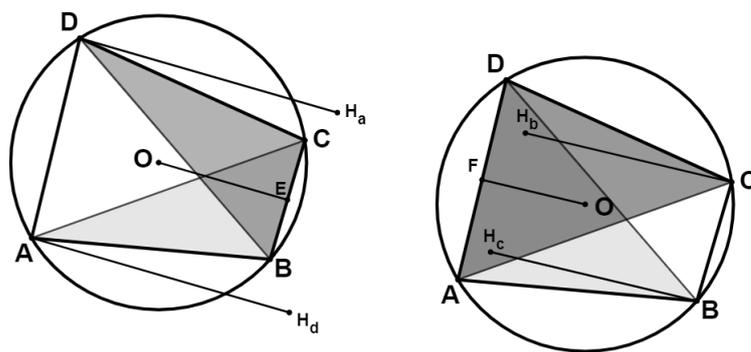


Figura 3.32:  $AH_d = DH_a = 2 \cdot OE$  e  $BH_c = CH_b = 2 \cdot OF$

Ou seja, os segmentos  $\overline{AH_a}$ ,  $\overline{BH_b}$ ,  $\overline{CH_c}$  e  $\overline{DH_d}$  interceptam-se em um único ponto, o qual chamaremos de  $X$ .

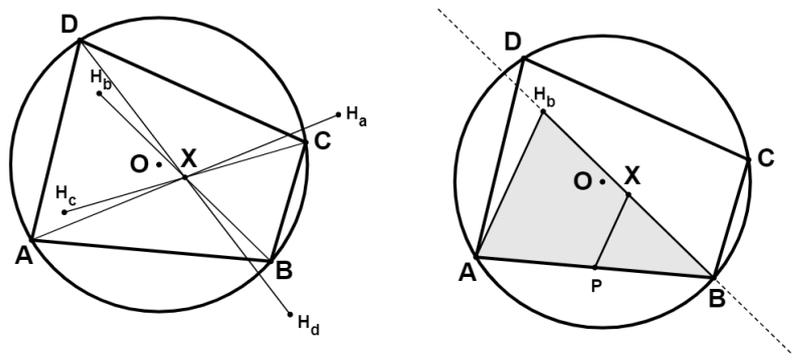


Figura 3.33:  $AH_a$ ,  $BH_b$ ,  $CH_c$  e  $DH_d$  interceptam-se em  $X$

Resta mostrar que este ponto de interseção coincide com o antcentro de  $ABCD$ , isto é,  $X = M$  (Definição 3.4).

Vamos analisar, como exemplo, o triângulo  $ABH_b$  (figura 3.33), considerando ainda o ponto médio  $P$  do lado  $\overline{AB}$ . Acabamos de constatar que o ponto  $X$  é médio do segmento  $\overline{BH_b}$ . Então,  $\overline{PX}$  é base média do triângulo, paralelo a  $\overline{AH_b}$  e perpendicular a  $\overline{CD}$ . Portanto, pelo Teorema 33 e pela definição 3.4,  $\overline{PX}$  passa pelo antcentro  $M$ . O mesmo acontece com  $\overline{QX}$ ,  $\overline{RX}$  e  $\overline{SX}$ , isto é,  $X$  e  $M$  são o mesmo ponto. □

Diante de todos os teoremas que enunciamos e provamos nesta seção, podemos reunir alguns deles, escrevendo uma caracterização para os quadriláteros inscritíveis.

**Teorema 36:** São equivalentes:

1. O quadrilátero é inscritível.
2. Os ângulos opostos são suplementares.
3. O ângulo formado por um lado e uma diagonal é congruente ao ângulo formado pelo lado oposto e a outra diagonal.

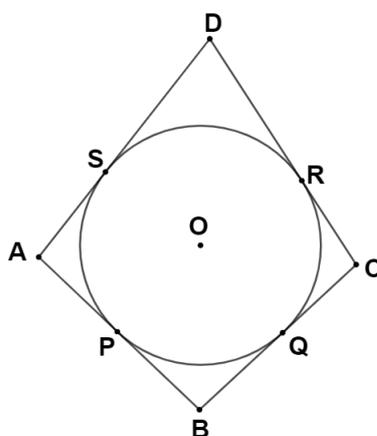
4. O produto das suas diagonais é igual à soma dos produtos dos pares de lados opostos (Teorema de Ptolomeu).

Nesta caracterização, temos que (1)  $\Leftrightarrow$  (2), (1)  $\Leftrightarrow$  (3) e (1)  $\Leftrightarrow$  (4).

### 3.4 Quadriláteros Circunscritíveis

Um quadrilátero também pode circunscrever uma circunferência. Dizemos, neste caso, que ele é circunscritível.

**Definição 3.5:** Um quadrilátero é considerado circunscritível quando todos os seus lados são tangentes a uma mesma circunferência.



**Figura 3.34:** O quadrilátero  $ABCD$  é circunscritível, pois seus lados são tangentes à circunferência de centro  $O$  nos pontos  $P, Q, R$  e  $S$

**Teorema 37:** Em um quadrilátero circunscritível, a soma das medidas de cada par de lados opostos é igual, isto é, na figura (3.34), temos que  $AB + CD = BC + DA$ .

*Demonstração.* Os vértices do quadrilátero  $ABCD$  são pontos externos à circunferência de centro  $O$  e cada um deles pertence a duas retas tangentes à circunferência. Sabe-se que "os dois segmentos tangentes a uma circunferência desde um mesmo ponto exterior dado são congruentes e formam ângulos congruentes com a reta que une o ponto exterior e o centro da circunferência." ([11]). Ou seja, se  $AP = AS$ ,  $BP = BQ$ ,  $CQ = CR$  e  $DR = DS$ , então,

$$\begin{aligned} AB + CD &= AP + BP + CR + DR \\ &= AS + BQ + CQ + DS \\ &= BQ + CQ + AS + DS \\ &= BC + DA. \end{aligned}$$

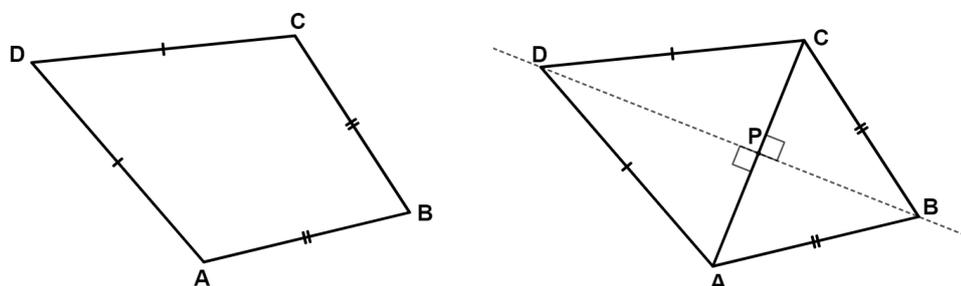
□

A recíproca do Teorema 37 é verdadeira:

**Teorema 38:** Se a soma de dois lados opostos de um quadrilátero é igual à soma dos outros dois lados, então o quadrilátero é circunscritível.

*Demonstração.* Queremos mostrar que se em um quadrilátero  $ABCD$ , temos  $AB + CD = BC + DA$ , então, existe um ponto  $O$ , no interior de  $ABCD$  que é equidistante dos lados do polígono. Como a bissetriz é o lugar geométrico dos pontos do plano que são equidistantes dos lados de um ângulo, se mostrarmos que as bissetrizes dos quatro ângulos internos do quadrilátero interceptam-se em um único ponto, este será o centro da circunferência inscrita no polígono.

Primeiramente, vejamos o caso em que dois lados adjacentes de um quadrilátero são congruentes. Por exemplo, no quadrilátero da figura 3.35, suponha que  $AB = BC$ . Como, por hipótese,  $AB + CD = BC + DA$ , então  $CD = DA$ .



**Figura 3.35:**  $AB = BC$ ,  $CD = DA$  e as bissetrizes dos ângulos internos  $\hat{B}$  e  $\hat{D}$  são coincidentes

Ao traçarmos a diagonal  $\overline{AC}$  do quadrilátero  $ABCD$ , obtemos os triângulos isósceles  $ABC$  e  $ADC$ , ambos de base  $\overline{AC}$ . Assim, temos que a bissetriz do ângulo  $\hat{A}BC$  intercepta o segmento  $\overline{AC}$  no ponto médio dele, o qual daremos o nome de  $P$ <sup>7</sup>, por onde também passa a bissetriz do ângulo  $\hat{A}DC$ . Além disso, os segmentos  $\overline{BP}$  e  $\overline{DP}$  pertencem à uma mesma reta, já que os ângulos  $\hat{A}PB$  e  $\hat{A}PD$  são retos e, portanto, formam um ângulo raso. Isto significa que as bissetrizes dos ângulos  $\hat{B}$  e  $\hat{D}$  do quadrilátero  $ABCD$  são retas coincidentes e contêm a diagonal  $\overline{BD}$ .

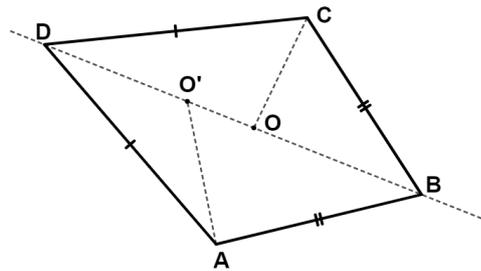
Agora, vamos traçar as bissetrizes  $\overline{CO}$  e  $\overline{AO'}$  dos ângulos  $\hat{B}CD$  e  $\hat{B}AD$ , respectivamente, de forma que  $O$  e  $O'$  sejam pontos do segmento  $\overline{BD}$  (figura 3.36). Os triângulos  $BCD$  e  $BAD$  são congruentes pelo caso  $LLL$ , pois  $\overline{BD}$  é um lado comum e  $BC = BA$  e  $CD = AD$ . Logo,

$$\hat{B}CD = \hat{B}AD \Rightarrow \hat{B}AO' = \hat{O}'AD = \hat{B}CO = \hat{O}CD,$$

de onde podemos concluir que os triângulos  $ADO'$  e  $CDO$  são congruentes pelo caso  $ALA$ , pois  $\hat{A}DO' = \hat{C}DO = \hat{D}/2$ . Assim, temos que

$$DO' = DO \Rightarrow O' = O,$$

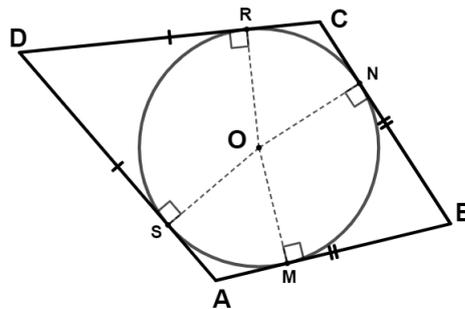
<sup>7</sup>Em todo triângulo isósceles (e também em todo triângulo equilátero), a bissetriz do ângulo oposto à base coincide com a mediana, com a mediatriz e também com a altura, todos relativos à base do triângulo.



**Figura 3.36:** Os pontos  $O$  e  $O'$  são coincidentes

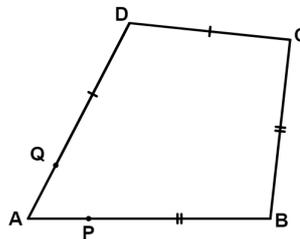
isto é, os pontos  $O$  e  $O'$  coincidem, sendo  $O$  o ponto de interseção entre as quatro bissetrizes.

Então, traçando por  $O$  segmentos perpendiculares aos lados do quadrilátero  $ABCD$ , encontraremos os pontos  $M, N, R$  e  $S$ , contidos na circunferência inscrita no polígono, ou seja, os segmentos  $\overline{OM}, \overline{ON}, \overline{OR}$  e  $\overline{OS}$  são raios da circunferência de centro  $O$ .



**Figura 3.37:**  $\overline{OM}, \overline{ON}, \overline{OR}$  e  $\overline{OS}$  são raios da circunferência de centro  $O$

Agora, vamos considerar o caso em que o quadrilátero  $ABCD$  não possui lados adjacentes congruentes. Sem perda de generalidade, seja  $AB > BC$ .



**Figura 3.38:**  $PB = BC$  e  $DQ = CD \Rightarrow AP = QA$

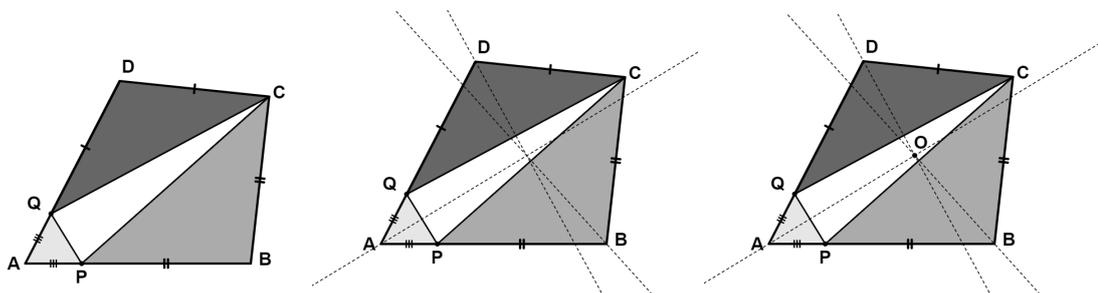
Como  $AB + CD = BC + DA$ , então temos que  $AB - BC = DA - CD$ . Marcando um ponto  $P$  sobre o lado  $\overline{AB}$  e o ponto  $Q$  sobre o lado  $\overline{DA}$  de tal maneira que tenhamos  $PB = BC$  e  $DQ = CD$  (figura 3.38), chegaremos a  $AP = QA$ , já que

$$(AP + PB) + CD = BC + (DQ + QA)$$

$$(AP + BC) + CD = BC + (CD + QA)$$

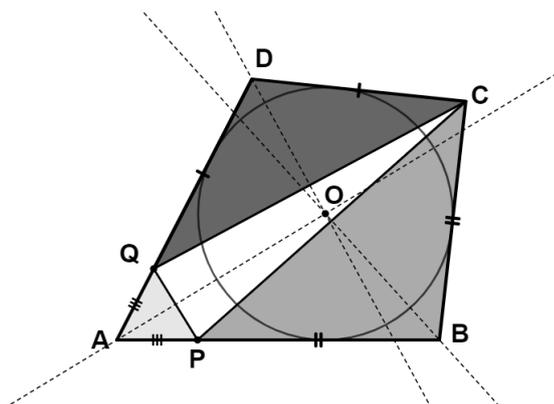
$$AP = QA.$$

Desta forma, obtemos três triângulos isósceles:  $APQ$ ,  $BCP$  e  $CDQ$ .



**Figura 3.39:** O ponto  $O$  é o centro da circunferência a qual o quadrilátero  $ABCD$  está circunscrito

Por serem triângulos isósceles, as bissetrizes dos ângulos  $\widehat{A}$ ,  $\widehat{B}$  e  $\widehat{D}$  (representadas na figura 3.39 por retas tracejadas) são também mediatrizes dos lados  $\overline{PQ}$ ,  $\overline{CP}$  e  $\overline{QC}$ , respectivamente. Estes, por sua vez, formam o triângulo  $PCQ$ , cujas mediatrizes interceptam-se em um único ponto, o circuncentro (identificado como ponto  $O$ ). Tal ponto, é equidistante dos lados do quadrilátero  $ABCD$  e, portanto, é o centro da circunferência inscrita no polígono.



**Figura 3.40**

□

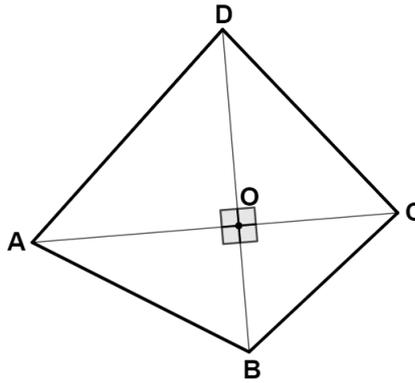
### 3.5 Quadriláteros Ortodiagonais

Nesta seção, definiremos um novo tipo de quadrilátero: os ortodiagonais. Além disso, mostraremos algumas propriedades específicas deste tipo de polígono.

**Definição 3.6:** Um quadrilátero é considerado **ortodiagonal** se as suas diagonais são perpendiculares.

**Teorema 39:** Em um quadrilátero ortodiagonal, a soma dos quadrados de dois lados opostos é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados. Isto é, no quadrilátero da figura 3.41,  $(AB)^2 + (CD)^2 = (BC)^2 + (DA)^2$ .

*Demonstração.* Seja  $O$  o ponto de interseção entre as diagonais  $\overline{AC}$  e  $\overline{BD}$  do quadrilátero  $ABCD$  da figura 3.41. Os lados do quadrilátero são hipotenusas dos triângulos retângulos  $ABO$ ,  $BCO$ ,  $CDO$  e  $DAO$ . Então, pelo Teorema de Pitágoras, temos que



**Figura 3.41:** Exemplo de quadrilátero ortodiagonal:  $\overline{AC} \perp \overline{BD}$

$$(AB)^2 = (BO)^2 + (OA)^2 \quad (3.24)$$

$$(BC)^2 = (CO)^2 + (OB)^2 \quad (3.25)$$

$$(CD)^2 = (DO)^2 + (OC)^2 \quad (3.26)$$

$$(DA)^2 = (AO)^2 + (OD)^2 \quad (3.27)$$

Somando as equações (3.24) e (3.26), temos

$$(AB)^2 + (CD)^2 = (BO)^2 + (OA)^2 + (DO)^2 + (OC)^2 \quad (3.28)$$

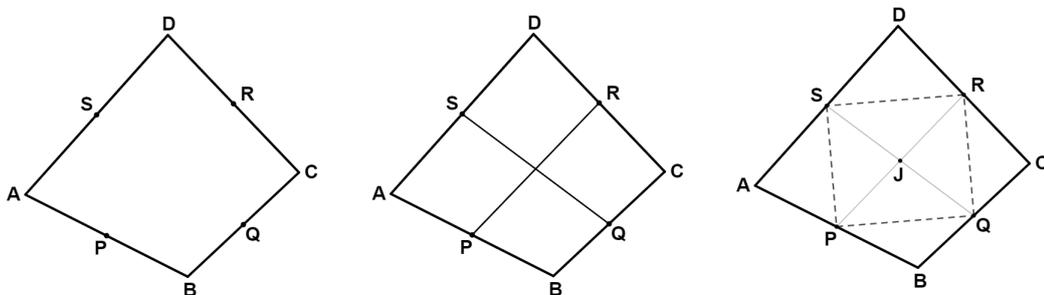
e, somando as equações (3.25) e (3.27), temos

$$(BC)^2 + (DA)^2 = (CO)^2 + (OB)^2 + (AO)^2 + (OD)^2. \quad (3.29)$$

Pelas equações (3.25) e (3.26), a equação (3.28) torna-se  $(AB)^2 + (CD)^2 = (BC)^2 + (DA)^2$ . O mesmo resultado é encontrado substituindo-se as equações (3.24) e (3.26) na equação (3.29).

□

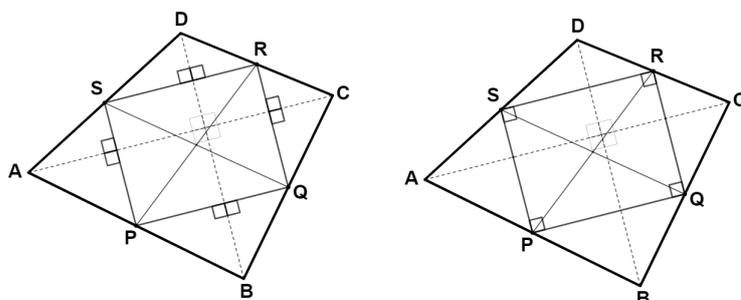
**Teorema 40:** Em um quadrilátero ortodiagonal, os segmentos que ligam os pontos médios de lados opostos são congruentes.



**Figura 3.42:**  $PR = QS$  e  $PQRS$  é um paralelogramo

*Demonstração.* Pelo Teorema 15, temos que o quadrilátero  $PQRS$  da figura 3.42 é um paralelogramo, de forma que os segmentos  $\overline{PR}$  e  $\overline{QS}$  são suas diagonais.

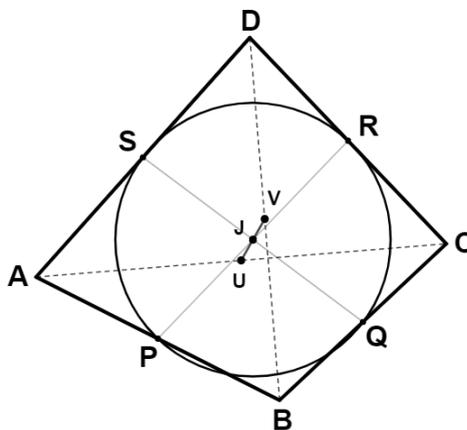
Temos que  $\overline{PQ}$  é paralelo à diagonal  $\overline{AC}$  do quadrilátero, pois é base média do triângulo  $ABC$ . Então, o ângulo formado entre  $\overline{PQ}$  e a diagonal  $\overline{BD}$  do quadrilátero também é reto. Da mesma forma, temos que os segmentos  $\overline{QR}$  e  $\overline{AC}$  são perpendiculares, já que  $\overline{QR}$  é paralelo a  $\overline{BD}$ , por ser base média do triângulo  $BCD$ . Assim, temos que os ângulos formados entre os lados do quadrilátero  $PQRS$  são todos retos, isto é,  $PQRS$  é um retângulo.



**Figura 3.43:** O quadrilátero  $PQRS$  é um retângulo

Pelo Teorema 10, as diagonais  $\overline{PR}$  e  $\overline{QS}$  do retângulo  $PQRS$  são congruentes. □

**Corolário 40.1:** Em um quadrilátero ortodiagonal, os pontos médios dos lados pertencem a uma circunferência cujo centro coincide com o centroide do quadrilátero.



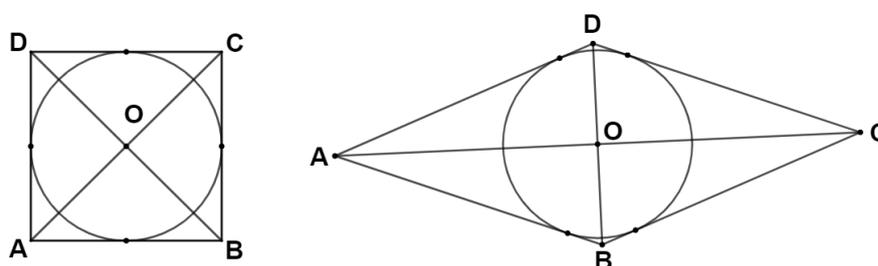
**Figura 3.44:** O ponto  $J$  é centroide do quadrilátero e centro da circunferência que contém os pontos  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  e  $S$

*Demonstração.* Seja  $J$  o ponto de interseção entre os segmentos  $\overline{PR}$  e  $\overline{QS}$ . Pela Definição 3.2,  $J$  é o centroide do quadrilátero  $ABCD$ . Como  $PQRS$  é um paralelogramo, então, pelo Teorema 7,  $J$  é o ponto médio de  $\overline{PR}$  e  $\overline{QS}$  e, como  $PR = QS$ ,  $J$  é equidistante dos pontos  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  e  $S$ . □

Um quadrilátero ortodiagonal pode ser inscritível ou circunscritível. Na primeira parte da demonstração do Teorema 38, mostramos que um quadrilátero que possui dois pares

de lados adjacentes congruentes possui diagonais perpendiculares entre si sendo, portanto, ortodiagonal. Além disso, a soma de dois de seus lados opostos é sempre igual à soma dos outros dois e, por isso, ele é circunscritível (figura 3.37). Este tipo de quadrilátero é conhecido como pipa.

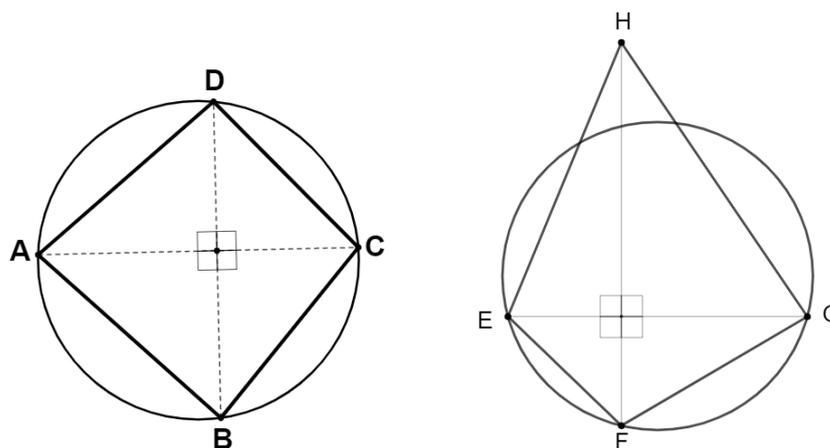
Ainda na demonstração do Teorema 38, vimos que o centro da circunferência é o ponto de interseção entre as bissetrizes dos ângulos internos da pipa. Assim, podemos concluir que o losango é também um quadrilátero ortodiagonal circunscritível, pois suas diagonais são perpendiculares (pelo Teorema 13) e a soma de dois de seus lados opostos é sempre igual à soma dos outros dois (pois são todos congruentes, pela definição 2.5). Neste caso, o centro da circunferência inscrita no losango é a interseção entre as diagonais, já que elas coincidem com as bissetrizes dos ângulos internos, conforme Teorema 12 (figura 3.45).



**Figura 3.45:** O losango e o quadrado são quadriláteros ortodiagonais circunscritíveis

O quadrado, por ser um losango (Teorema 14), é também ortodiagonal circunscritível.

Agora, veremos algumas propriedades dos ortodiagonais inscritíveis. Seja  $ABCD$  um quadrilátero ortodiagonal e inscritível ao mesmo tempo e seja  $O$  o ponto de interseção entre as diagonais dele (figura 3.46).

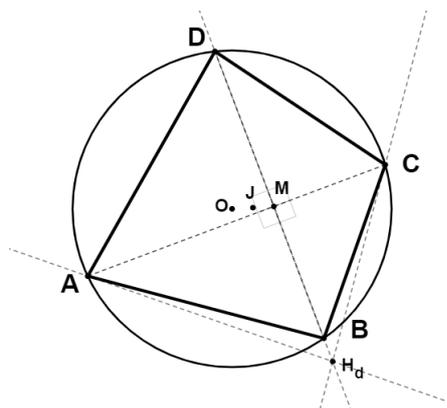


**Figura 3.46:** O quadrilátero  $ABCD$  é ortodiagonal inscritível, mas o quadrilátero  $EFGH$  é não inscritível, pois o vértice  $H$  não pertence à circunferência

No próximo teorema, usaremos a definição 3.4 de anticentro.

**Teorema 41:** Em um quadrilátero ortodiagonal inscritível, o anticentro coincide com a interseção entre as suas diagonais.

*Demonstração.* Seja  $ABCD$  um quadrilátero ortodiagonal e inscrito, onde  $O$  é o centro da circunferência e  $J$  é o centroide do quadrilátero. Como as diagonais  $\overline{AC}$  e  $\overline{BD}$  de  $ABCD$  são perpendiculares, temos que o ortocentro  $H_d$  do triângulo  $ABC$  pertence à diagonal  $\overline{BD}$ . Além disso, pelo Teorema 34, temos que  $\overline{DH_d}$  passa pelo anticentro  $M$  do quadrilátero  $ABCD$ . Portanto,  $M$  é um ponto da diagonal  $\overline{BD}$ , assim como da diagonal  $\overline{AC}$ . Logo, a interseção entre as diagonais é o anticentro  $M$ .



**Figura 3.47:**  $M$  é anticentro e interseção entre as diagonais do quadrilátero ortodiagonal inscrito

□

**Teorema 42 (de Brahmagupta):** A reta perpendicular a um lado, que passa pelo ponto  $M$ , divide o lado oposto ao meio.

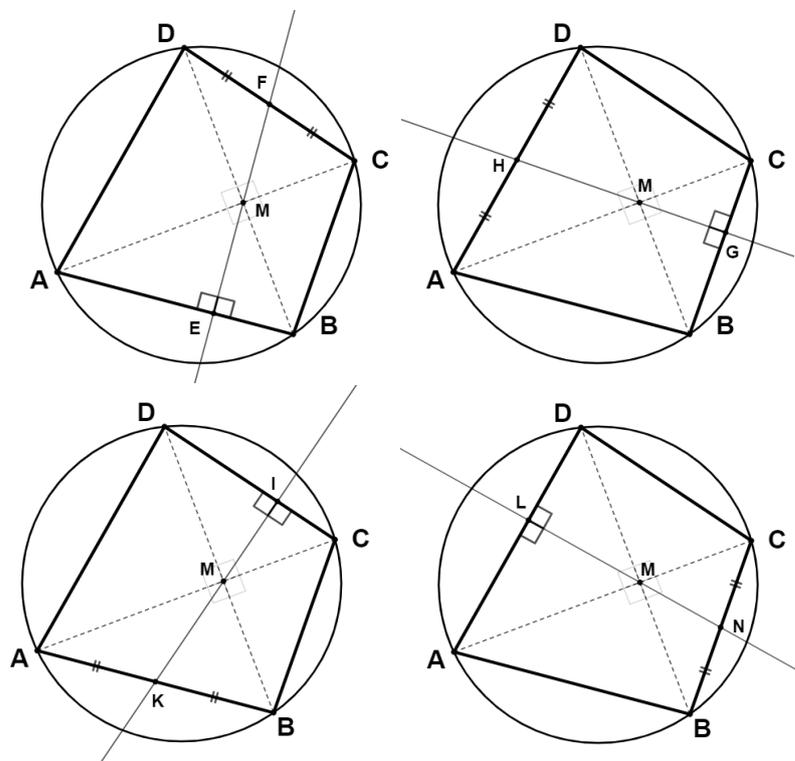
*Demonstração.* Seja  $E$  o pé da perpendicular ao lado  $\overline{AB}$ , passando por  $M$ , e seja  $F$  o ponto onde esta perpendicular intercepta o lado  $\overline{CD}$ . Queremos mostrar que  $F$  é o ponto médio de  $\overline{CD}$ . A demonstração para as retas perpendiculares aos demais lados do quadrilátero  $ABCD$  são análogas.

Pelo Teorema 28, o ângulo  $\widehat{MAB}$  da figura 3.49 é congruente ao ângulo  $\widehat{MDC}$ . O mesmo acontece com os ângulos  $\widehat{MBA}$  e  $\widehat{MCD}$ . Temos também que o ângulo  $\widehat{AME}$  é complementar ao ângulo  $\widehat{MAE}$  (já que o triângulo  $MAE$  é retângulo em  $E$ ) e, ao mesmo tempo, oposto pelo vértice ao ângulo  $\widehat{FMC}$ . Porém, os triângulos  $MAE$  e  $MAB$  são semelhantes pelo caso  $AA$ , pois possuem o ângulo  $\widehat{MAE}$  em comum, além de um ângulo reto. Isto significa que  $\widehat{AME} = \widehat{MBE} = \widehat{FMC} = \widehat{MCF}$ , ou seja, o triângulo  $MCF$  é isósceles de base  $\overline{MC}$ , assim como o triângulo  $MFD$  é isósceles de base  $\overline{MD}$ . Isto é, os segmentos  $\overline{MF}$ ,  $\overline{FC}$  e  $\overline{FD}$  são congruentes, tornando  $F$  o ponto médio do lado  $\overline{CD}$ . Assim, temos que  $F = R$ ,  $H = S$ ,  $K = P$  e  $N = Q$ , definidos no Teorema 40.

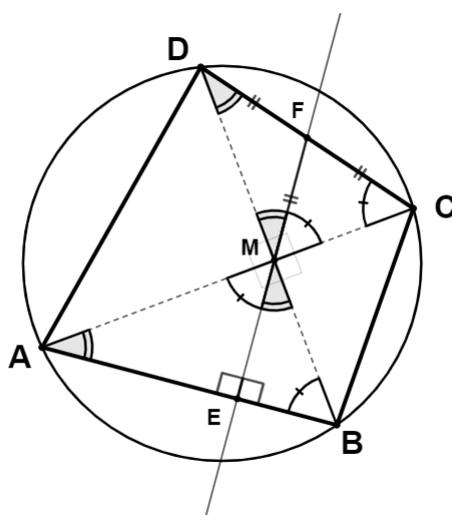
□

**Corolário 42.1:** Em um quadrilátero ortodiagonal inscrito, as projeções ortogonais do ponto de interseção das diagonais sobre os quatro lados, interceptam a circunferência que contém os pontos médios dos lados.

*Demonstração.* Já mostramos que as retas perpendiculares aos lados de um quadrilátero ortodiagonal inscrito e que passam pelo ponto  $M$ , interceptam os lados opostos no



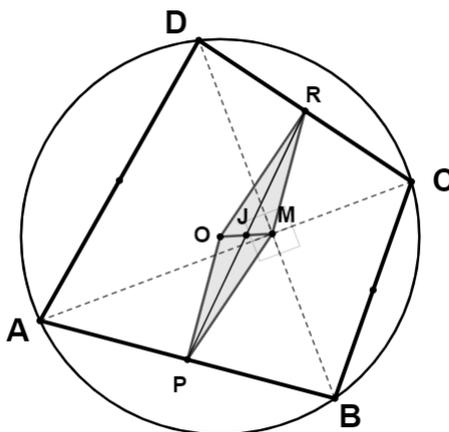
**Figura 3.48:** A reta  $\overleftrightarrow{EF}$  corta o lado  $\overline{CD}$  em seu ponto médio,  $F$ . A reta  $\overleftrightarrow{GH}$  corta o lado  $\overline{DA}$  em seu ponto médio,  $H$ . A reta  $\overleftrightarrow{IJ}$  corta o lado  $\overline{AB}$  em seu ponto médio,  $J$ . A reta  $\overleftrightarrow{KL}$  corta o lado  $\overline{BC}$  em seu ponto médio,  $L$ .



**Figura 3.49:** Os triângulos  $MFC$  e  $MFD$  são isósceles de bases  $\overline{MC}$  e  $\overline{MD}$

ponto médio deles. Os segmentos  $\overline{ME}$ ,  $\overline{MG}$ ,  $\overline{MI}$  e  $\overline{ML}$  da figura 3.48 são as projeções ortogonais do ponto  $M$  sobre os lados de  $ABCD$ . Tais projeções contêm os pontos  $F = R$ ,  $H = S$ ,  $K = P$  e  $N = Q$ , pelos quais passa uma circunferência, conforme demonstração do Teorema 42.  $\square$

**Teorema 43:** Em um quadrilátero ortodiagonal inscrito, a distância de um lado ao centro da circunferência circunscrita é igual à metade do lado oposto.



**Figura 3.50:**  $PMRO$  é paralelogramo

*Demonstração.* Na figura 3.50,  $\overline{OM}$  intercepta  $\overline{PR}$  no ponto seu ponto médio  $J$  (centroide do quadrilátero  $ABCD$ ). Como  $J$  também é o ponto médio de  $\overline{OM}$ , então, o quadrilátero  $PMRO$  é um paralelogramo e, daí, temos que  $OP = MR$ . Sabemos que  $\overline{OP}$  é perpendicular à corda  $\overline{AB}$ <sup>8</sup> e, portanto, sua medida representa a distância de  $O$  ao lado  $\overline{AB}$  do quadrilátero.

Agora, tomemos o triângulo  $CMD$ , retângulo em  $M$ . Já vimos, na demonstração do Teorema 42, que  $MR = RC = RD$ .

Como  $MR = OP$  (por serem lados opostos de um paralelogramo), então temos que a distância do centro da circunferência ao lado  $\overline{AB}$  do quadrilátero  $ABCD$  é igual à metade do lado oposto,  $\overline{CD}$ . A demonstração da distância aos demais lados do quadrilátero pode ser feita de maneira análoga.  $\square$

Ainda considerando um quadrilátero  $ABCD$  ortodiagonal inscrito, temos que:

**Teorema 44:** A soma dos quadrados de dois lados opostos de  $ABCD$  é igual ao quadrado do diâmetro da circunferência.

*Demonstração.* Vamos analisar o triângulo  $AOP$  da figura 3.51, retângulo em  $P$ . Utilizando o Teorema 43 e o Teorema de Pitágoras, temos que

<sup>8</sup>Ver Teorema 6.5 do livro [11].

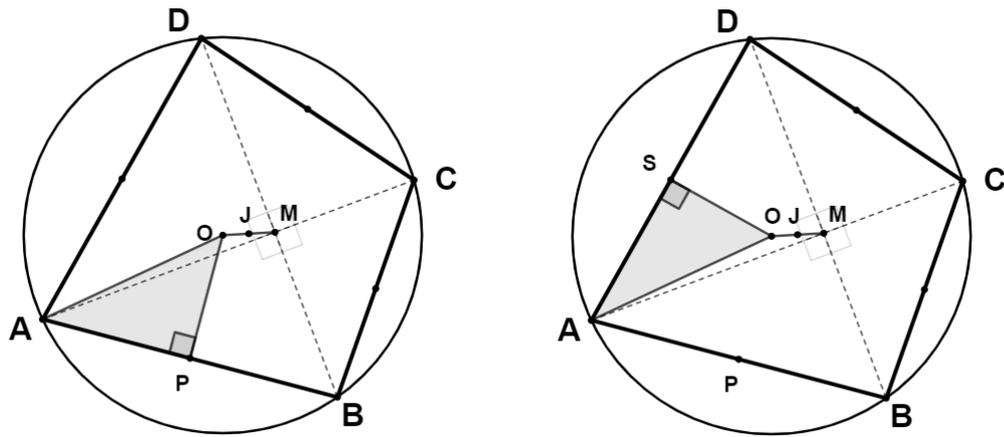


Figura 3.51

$$\begin{aligned} (AO)^2 &= (OP)^2 + (PA)^2 \\ &= \frac{1}{4}(CD)^2 + \frac{1}{4}(AB)^2 \\ 4(AO)^2 &= (AB)^2 + (CD)^2 \\ [2 \cdot (AO)]^2 &= (AB)^2 + (CD)^2 \end{aligned}$$

Como  $\overline{AO}$  é um raio da circunferência, então,  $2 \cdot (AO)$  é a medida do diâmetro da circunferência.

Repetindo o processo no triângulo AOS, temos que  $(2 \cdot AO)^2 = (BC)^2 + (AD)^2$ .  $\square$

Para finalizarmos o estudos dos quadriláteros ortodiagonais inscritíveis, vamos mostrar dois corolários.

**Corolário 44.1:** No paralelogramo  $PMRO$  da figura 3.50, temos que  $(PR)^2 + (OM)^2 = 2 \cdot (AO)^2$ .

*Demonstração.* Pelo Teorema 20, temos que:

$$\begin{aligned} (PR)^2 + (OM)^2 &= (PM)^2 + (MR)^2 + (RO)^2 + (OP)^2 \\ &= 2 \cdot [(OP)^2 + (OR)^2] \end{aligned} \tag{3.30}$$

e, pelo Teorema 43, temos que

$$OP = \frac{CD}{2} \tag{3.31}$$

$$OR = \frac{AB}{2}. \tag{3.32}$$

Então, substituindo as equações (3.31) e (3.32) em (3.30), temos que

$$(PR)^2 + (OM)^2 = 2 \cdot \left[ \frac{(CD)^2}{4} + \frac{(AB)^2}{4} \right] = \frac{(CD)^2 + (AB)^2}{2} = 2 \cdot (AO)^2,$$

pelo Teorema 44.

$\square$

**Corolário 44.2:** A soma dos quadrados dos lados de  $ABCD$  é igual a oito vezes o quadrado do raio da circunferência circunscrita.

*Demonstração.* Do Teorema 44, temos que

$$(AB)^2 + (CD)^2 = [2 \cdot (AO)]^2 \quad (3.33)$$

$$(BC)^2 + (AD)^2 = [2 \cdot (AO)]^2 \quad (3.34)$$

Somando as equações (3.33) e (3.34), temos que

$$(AB)^2 + (CD)^2 + (BC)^2 + (AD)^2 = 4 \cdot (AO)^2 + 4 \cdot (AO)^2 = 8 \cdot (AO)^2.$$

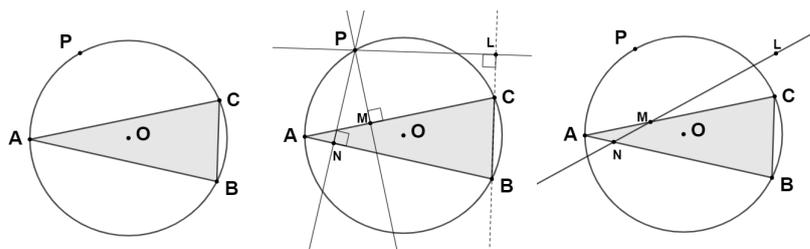
□

## A Reta de Simson

Neste capítulo, nos dedicaremos a conhecer a *Reta de Simson*, suas propriedades e aplicações. Tal reta é resultado de pontos obtidos a partir de retas perpendiculares aos lados de um triângulo inscrito. Apesar de trabalhar com triângulo e circunferência, a demonstração da existência da reta é feita utilizando-se resultados dos quadriláteros inscritíveis, trabalhados na Seção 3.3. Os teoremas aqui apresentados estão todos presentes no livro [1], os quais demonstraremos o mais detalhadamente possível.

### 4.1 A definição da Reta de Simson

Antes de definirmos a *Reta de Simson*, vamos enunciar e demonstrar um teorema, considerando que  $ABC$  é um triângulo inscrito em uma circunferência de centro  $O$ . Além disso, vamos tomar um ponto  $P$  da circunferência e, por ele, vamos traçar as retas perpendiculares às retas suporte dos lados  $\overline{BC}$ ,  $\overline{AC}$  e  $\overline{AB}$ , respectivamente, nos pontos  $L$ ,  $M$  e  $N$ .

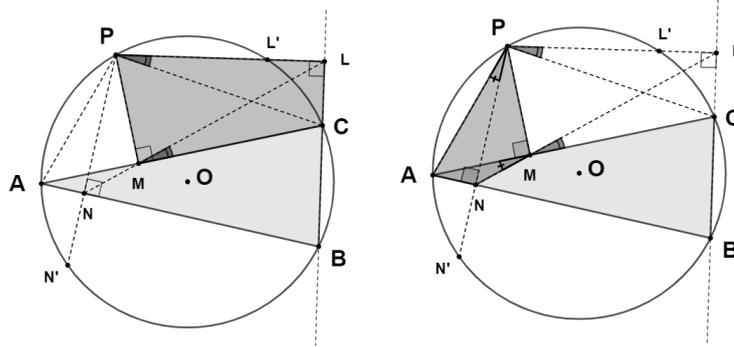


**Figura 4.1:** Os pontos  $L$ ,  $M$  e  $N$  são colineares

**Teorema 45:** Os pontos  $L$ ,  $M$  e  $N$  (pés das das três perpendiculares  $\overrightarrow{PL}$ ,  $\overrightarrow{PM}$  e  $\overrightarrow{PN}$ ) são colineares (figura 4.1).

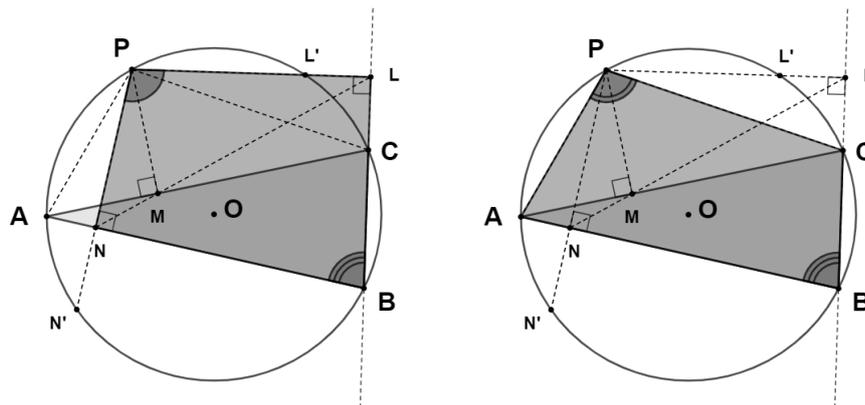
*Demonstração.* Na figura 4.2, temos que o quadrilátero  $PMCL$  é inscritível, pois seus ângulos opostos  $\widehat{PMC}$  e  $\widehat{CLP}$  são suplementares (Teorema 24). Sendo  $PMCL$  inscritível, traçando a diagonal  $\overline{ML}$ , temos, segundo o Teorema 28, que os ângulos  $\widehat{CML}$  e  $\widehat{CPL}$  são congruentes.

Ainda na figura 4.2, temos que  $APMN$  também é um quadrilátero inscritível, pois  $\overline{PN}$  é uma diagonal e os ângulos  $\widehat{ANP}$  e  $\widehat{AMP}$  são congruentes (Teorema 29). Assim, temos como consequência, que  $\widehat{APN} = \widehat{AMN}$  (Teorema 28).



**Figura 4.2:**  $PMCL$  e  $APMN$  são quadriláteros inscritíveis

Como queremos mostrar que os pontos  $N$ ,  $M$  e  $L$  são colineares, então, é suficiente mostrar que os ângulos  $\widehat{AMN}$  e  $\widehat{CML}$  são congruentes, pois, neste caso, eles formarão um par de ângulos opostos pelo vértice, já que  $A$ ,  $M$  e  $C$  são, sem dúvida, pontos de uma mesma reta. Para isto, vamos usar os quadriláteros  $PNBL$  e  $PABC$  (figura 4.3), ambos inscritíveis, pois  $P\widehat{NB} = P\widehat{LB} = 90^\circ$  (Teorema 24) e  $P$ ,  $A$ ,  $B$  e  $C$  são todos pontos da circunferência de centro  $O$ .



**Figura 4.3:**  $PNBL$  e  $PABC$  são quadriláteros inscritíveis

Tomemos o quadrilátero  $PNBL$ , em que  $N\widehat{PL}$  é suplementar ao ângulo  $N\widehat{BL}$  e, o quadrilátero  $PABC$ , onde  $A\widehat{PC}$  é suplementar a  $A\widehat{BL} = N\widehat{BL}$  (também pelo Teorema 24). Logo,

$$N\widehat{PL} = A\widehat{PC}.$$

Temos que

$$N\widehat{PL} = N\widehat{PM} + M\widehat{PC} + C\widehat{PL}$$

e

$$A\widehat{PC} = A\widehat{PN} + N\widehat{PM} + M\widehat{PC},$$

então,  $C\widehat{PL} = A\widehat{PN}$ . Assim,

$$C\widehat{ML} = C\widehat{PL} = A\widehat{PN} = A\widehat{MN}.$$

Uma vez que  $\widehat{AMN}$  e  $\widehat{CML}$  são congruentes, concluímos que eles formam um par de ângulos opostos pelo vértice e, portanto, os pontos  $N$ ,  $M$  e  $L$  pertencem a uma mesma reta.

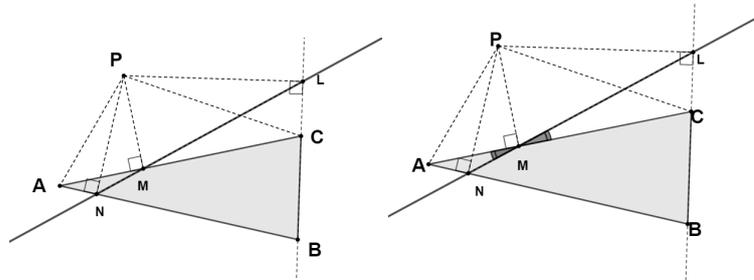
□

**Definição 4.1:** A reta que contém os pontos  $M$ ,  $N$  e  $L$  é chamada de *Reta de Simson*.

Vamos agora mostrar que a recíproca do Teorema 45 é verdadeira.

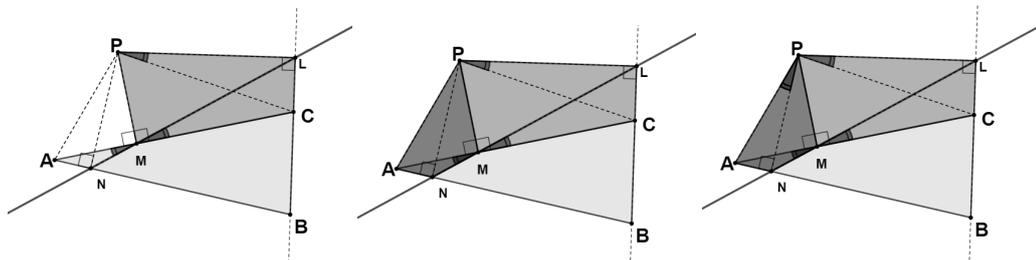
**Teorema 46 (Recíproca do Teorema 45):** Se os pés das perpendiculares aos lados de um triângulo, traçadas a partir de um ponto  $P$  qualquer do plano, são colineares, então, o ponto  $P$  pertence à circunferência circunscrita ao triângulo.

*Demonstração.* Seja  $ABC$  um triângulo qualquer e seja  $P$  um ponto qualquer do plano, pelo qual são traçadas as retas  $\overrightarrow{PL}$ ,  $\overrightarrow{PM}$  e  $\overrightarrow{PN}$ , perpendiculares aos lados  $\overline{BC}$ ,  $\overline{AC}$  e  $\overline{AB}$ , respectivamente.



**Figura 4.4:**  $\widehat{AMN} = \widehat{CML}$

Na figura 4.4, como os pontos  $L$ ,  $M$  e  $N$  são colineares (por hipótese), então, os ângulos  $\widehat{AMN}$  e  $\widehat{CML}$  são opostos pelo vértice e, portanto, congruentes. Além disso, o quadrilátero  $PMCL$  é inscriível, pelo Teorema 24, já que os ângulos  $\widehat{PMC}$  e  $\widehat{CLP}$  são suplementares (figura 4.5) e daí segue que  $\widehat{CML} = \widehat{CPL}$ .



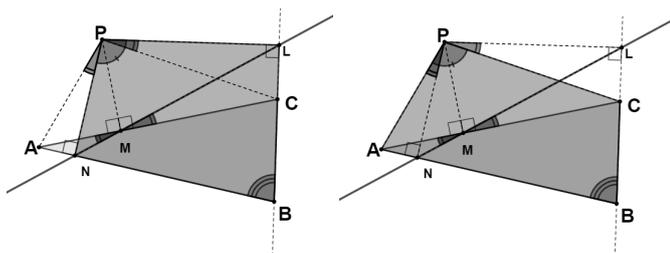
**Figura 4.5:**  $\widehat{AMN} = \widehat{CML} = \widehat{CPL} = \widehat{APN}$

O quadrilátero  $APMN$  também é inscriível, pelo Teorema 29, já que  $\widehat{ANP} = \widehat{AMP}$ . Então,  $\widehat{AMN} = \widehat{APN}$ , pelo Teorema 28.

Logo, temos que:

$$\widehat{AMN} = \widehat{CML} = \widehat{CPL} = \widehat{APN}.$$

Agora, vejamos o quadrilátero  $PNBL$  da figura 4.6. Ele é inscriível, pelo Teorema 24 e, por isso, os ângulos  $\widehat{LPN}$  e  $\widehat{NBL}$  são suplementares, isto é



**Figura 4.6:**  $PNBL$  e  $PABC$  são quadriláteros inscritíveis

$$\widehat{LPN} + \widehat{NBL} = 180^\circ. \quad (4.1)$$

Mas, note que

$$\widehat{LPN} = \widehat{CPL} + \widehat{CPN} \quad (4.2)$$

e

$$\widehat{CPA} = \widehat{CPN} + \widehat{APN}, \quad (4.3)$$

o que nos leva a concluir que  $\widehat{LPN} = \widehat{CPA}$ . Então, no quadrilátero  $PABC$ , os ângulos opostos  $\widehat{CPA}$  e  $\widehat{ABC} = \widehat{NBL}$  são suplementares, pela equação (4.1).

Isto significa que o quadrilátero  $PABC$  possui ângulos opostos suplementares, sendo, portanto, inscritível, pelo Teorema 24. Logo, seus vértices  $P$ ,  $A$ ,  $B$  e  $C$  são pontos de uma mesma circunferência.

□

## 4.2 Resultados interessantes relacionados à Reta de Simson

Agora, vamos considerar que a partir do ponto  $P$  de uma circunferência com centro em  $O$ , sejam traçadas três cordas:  $\overline{PA}$ ,  $\overline{PB}$  e  $\overline{PC}$ , conforme figura 4.7. Consideremos, ainda, que estas cordas sejam diâmetros de outras três circunferências.

Podemos observar que as três circunferências interceptam-se, duas a duas, nos pontos  $G$ ,  $H$  e  $I$  (figura 4.8).

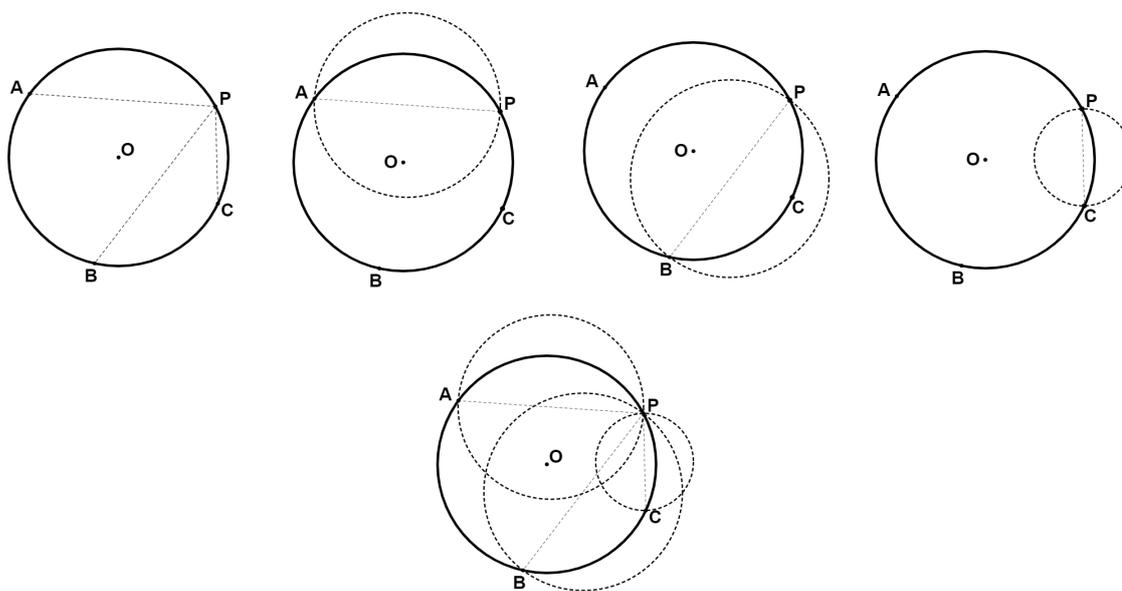
**Teorema 47:** Os pontos  $G$ ,  $H$  e  $I$  são colineares.

*Demonstração.* Na figura 4.9, temos que o ponto  $H$  é o pé da perpendicular ao segmento  $\overline{AC}$ , traçada a partir do ponto  $P$  ( $PAH$  é um triângulo inscrito em uma semicircunferência e, por isso, é retângulo em  $H$ ).

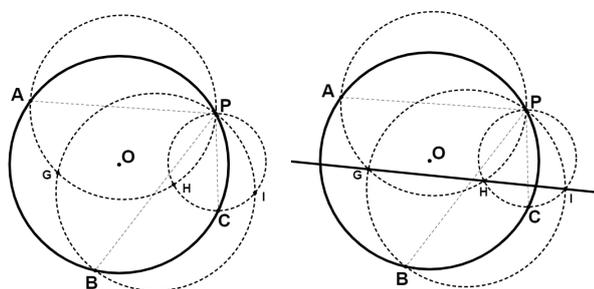
Igualmente,  $G$  é o pé da perpendicular ao lado  $\overline{AB}$  e  $I$  é o pé da perpendicular ao lado  $\overline{BC}$ . Isto é, os pontos  $I$ ,  $H$  e  $G$  são os pés das três perpendiculares aos lados de um triângulo ( $ABC$ ) inscrito em uma circunferência e, de acordo com o Teorema 45, eles são colineares.

□

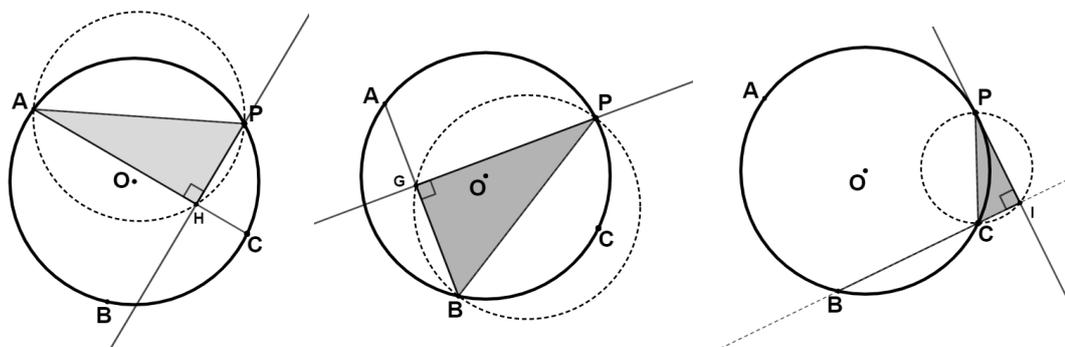
A recíproca do Teorema 47 é verdadeira:



**Figura 4.7:** As cordas  $\overline{PA}$ ,  $\overline{PB}$  e  $\overline{PC}$  são diâmetros de outras três circunferências

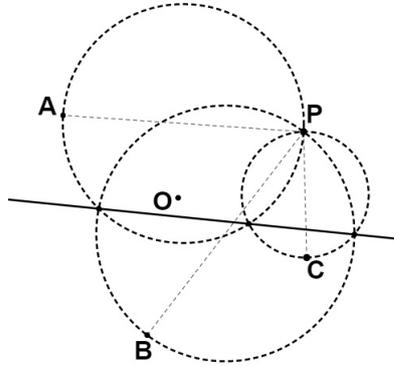


**Figura 4.8:** As circunferências interseccionam-se nos pontos  $G$ ,  $H$  e  $I$



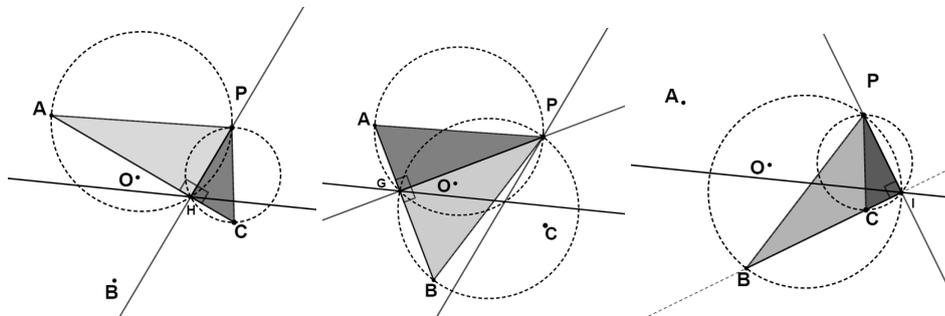
**Figura 4.9:**  $H$ ,  $G$  e  $I$  são os pés das perpendiculares aos lados  $\overline{AC}$ ,  $\overline{AB}$  e  $\overline{BC}$

**Teorema 48:** Se três circunferências de diâmetros  $\overline{PA}$ ,  $\overline{PB}$  e  $\overline{PC}$  interceptam-se, duas a duas, em três pontos colineares, então, os pontos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $P$  pertencem a uma mesma circunferência.



**Figura 4.10:**

*Demonstração.* Primeiramente, vamos considerar apenas as circunferências de diâmetros  $\overline{PA}$  e  $\overline{PC}$  que interceptam-se no ponto  $H$  (figura 4.11). Nela, temos que os triângulos  $PAH$  e  $PHC$  são inscritos em uma semicircunferência e, por isso, ambos são retângulos em  $H$ .

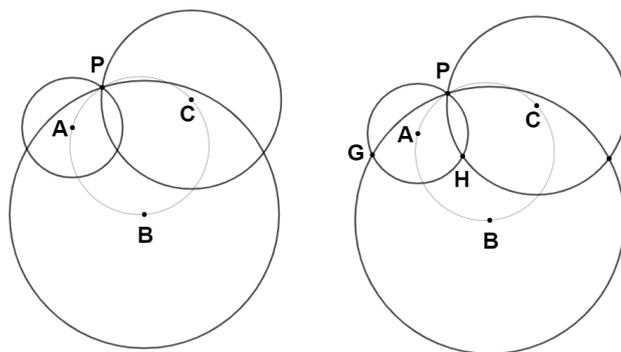


**Figura 4.11:** Os triângulos  $PAH$ ,  $PHC$ ,  $PAG$ ,  $PGB$ ,  $PCI$  e  $PBI$  são retângulos

Analogamente, os triângulos  $PAG$  e  $PGB$  são inscritos em semicircunferências e, portanto, são retângulos em  $G$ . E, finalmente, os triângulos  $PCI$  e  $PBI$  são retângulos em  $I$ .

Estes resultados nos levam ao fato de que os pontos  $G$ ,  $H$  e  $I$ , além de serem colineares, são os pés das perpendiculares aos lados de um triângulo  $(ABC)$ , traçadas a partir de um mesmo ponto  $P$ . Então, pelo Teorema 46, os pontos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $P$  pertencem a uma mesma circunferência. □

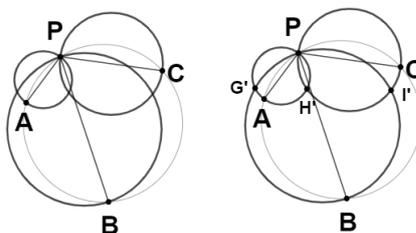
**Teorema 49:** Consideraremos agora três circunferências de centros em  $A$ ,  $B$  e  $C$ . Seja  $P$  um ponto da circunferência que contém os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$ . Se  $P$  pertence às três circunferências, então, elas interceptam-se, aos pares, em três pontos colineares.



**Figura 4.12:** As circunferências de centros em  $A$ ,  $B$  e  $C$  e que passam por  $P$ , interceptam-se nos pontos  $G$ ,  $H$  e  $I$ , colineares

*Demonstração.* Na figura 4.12, temos três circunferências com centros em  $A$ ,  $B$  e  $C$ . Temos também o ponto  $P$  que, além de pertencer a cada uma delas, é um ponto da circunferência que passa por  $A$ ,  $B$  e  $C$ .

Se tomarmos os segmentos  $\overline{PA}$ ,  $\overline{PB}$  e  $\overline{PC}$  como sendo diâmetros de outras circunferências, pelo Teorema 47, temos que tais circunferências interceptam-se nos pontos  $G'$ ,  $H'$  e  $I'$ , que são colineares (figura 4.13).



**Figura 4.13:** As circunferências de diâmetros  $\overline{PA}$ ,  $\overline{PB}$  e  $\overline{PC}$  interceptam-se nos pontos  $G'$ ,  $H'$  e  $I'$ , que são colineares

Observemos agora a figura 4.14, na qual foram marcados os pontos  $A'$  e  $B'$ , que são as interseções dos segmentos  $\overline{PA}$  e  $\overline{PB}$ , respectivamente, com as circunferências de centros em  $A$  e  $B$ .

Vejamus que o triângulo  $PG'A$  é retângulo em  $G'$ , pois  $\overline{PA}$  é diâmetro da circunferência que circunscreve o triângulo. Igualmente, temos que o triângulo  $PGA'$  é retângulo em  $G$ , pois  $\overline{PA'}$  é diâmetro da circunferência na qual o  $PGA'$  é inscrito. Além disso, por construção, temos que

$$\frac{PA}{PA'} = \frac{1}{2} \text{ e } \frac{PB}{PB'} = \frac{1}{2}.$$

Assim, temos que  $\overline{AB}$  é base média do triângulo  $PA'B'$ .

Vejamus, agora, que os triângulos  $PG'B$  e  $PGB'$  também são retângulos em  $G'$  e  $G$ , respectivamente, pois são inscritos em semicircunferências. Então, podemos concluir que os pontos  $G'$ ,  $A$  e  $B$  são colineares, uma vez que  $\overline{PG'}$  é perpendicular, simultaneamente, aos segmentos  $\overline{G'A}$  e  $\overline{G'B}$ . Igualmente, concluímos que os pontos  $G$ ,  $A'$  e  $B'$  pertencem

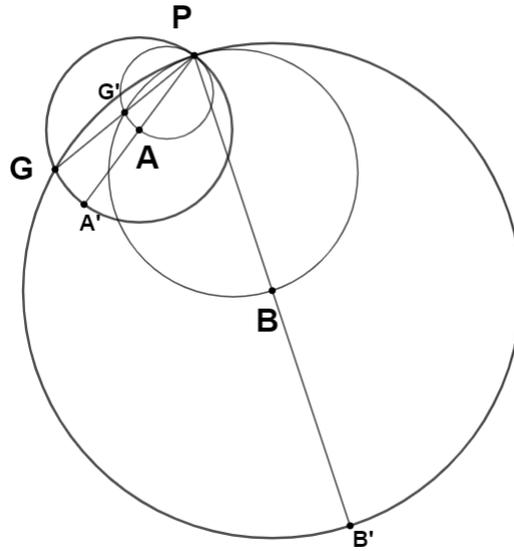


Figura 4.14:

a uma mesma reta, já que  $\overline{PG}$  forma um ângulo reto com os segmentos  $\overline{GA'}$  e  $\overline{GB'}$ , ao mesmo tempo. Logo,  $G'$  é ponto médio do segmento  $\overline{PG}$  e, então, temos que

$$\frac{PG}{PG'} = 2.$$

O mesmo acontece com as demais circunferências traçadas por  $B$  e  $C$ :

$$\frac{PH}{PH'} = 2$$

$$\frac{PI}{PI'} = 2.$$

Pela definição 3.1, Os pontos  $G$ ,  $H$  e  $I$  correspondem aos pontos  $G'$ ,  $H'$  e  $I'$  na homotetia de centro  $P$  e razão 2. Assim,  $G$ ,  $H$  e  $I$  são colineares, como queríamos demonstrar.  $\square$

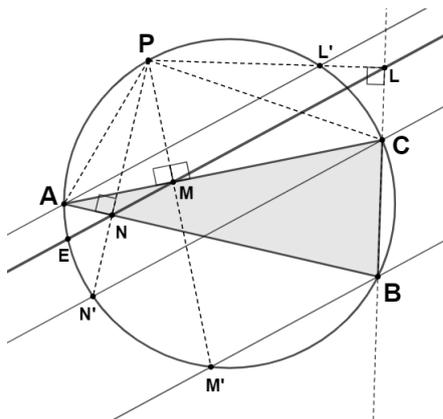
No próximo teorema, veremos que a recíproca deste fato é verdadeira.

**Teorema 50:** Se três circunferências, de centros em  $A$ ,  $B$  e  $C$ , que possuem um ponto  $P$  em comum, interceptam-se em três pontos colineares, então,  $P$  pertence à circunferência que passa por  $A$ ,  $B$  e  $C$ .

*Demonstração.* Sejam  $G$ ,  $H$  e  $I$  as interseções, duas a duas, das circunferências de centros em  $A$ ,  $B$  e  $C$ . Tomando os pontos  $G'$ ,  $H'$  e  $I'$  nas semirretas  $\overrightarrow{PG}$ ,  $\overrightarrow{PH}$  e  $\overrightarrow{PI}$ , de forma que  $\frac{PG}{PG'} = \frac{PH}{PH'} = \frac{PI}{PI'} = 2$ , temos que tais pontos são colineares. Pelo Teorema 48,  $P$ ,  $A$ ,  $B$  e  $C$  são pontos de uma mesma circunferência.  $\square$

Veremos, agora, importantes retas paralelas à *Reta de Simson* que serão utilizadas na demonstração dos próximos teoremas.

Vamos retomar o triângulo  $ABC$ , inscrito em uma circunferência, e o ponto  $P$  desta circunferência, pelo qual são traçadas retas perpendiculares aos lados de  $ABC$ . Sejam os pontos  $L'$ ,  $M'$  e  $N'$ , interseções das perpendiculares com a circunferência (figura 4.15).



**Figura 4.15:** Os pontos  $L'$ ,  $M'$  e  $N'$  são interseções das semirretas  $\overrightarrow{PL}$ ,  $\overrightarrow{PM}$  e  $\overrightarrow{PN}$  com a circunferência que passa por  $A$ ,  $B$  e  $C$

**Teorema 51:** As retas  $\overleftrightarrow{AL'}$ ,  $\overleftrightarrow{BM'}$  e  $\overleftrightarrow{CN'}$  são paralelas à Reta de Simson.

*Demonstração.* Vamos mostrar, primeiramente, que o ângulo  $L'\hat{A}C$  (figura 4.15), formado pela reta  $\overleftrightarrow{AL'}$  e o lado  $\overline{AC}$  do triângulo  $ABC$  é congruente ao ângulo  $L\hat{M}C$ , formado pela Reta de Simson e  $\overline{AC}$ . Além disso, os ângulos  $L'\hat{A}C$ ,  $L'\hat{P}C$  e  $L\hat{P}C$  são todos inscritos na circunferência e descrevem o mesmo arco  $\widehat{L'C}$ . Temos também que o quadrilátero  $PMCL$  é inscritível, pois  $P\hat{M}C = C\hat{L}P = 90^\circ$ , isto é, seus ângulos opostos são suplementares (Teorema 24). Pelo Teorema 28, os ângulos  $L\hat{P}C$  e  $L\hat{M}C$  são congruentes.

Para mostrarmos que a reta  $\overleftrightarrow{BM'}$  é paralela à Reta de Simson, vamos usar o fato de que  $A\hat{B}M' = A\hat{P}M' = A\hat{P}M$ . Como o quadrilátero  $APMN$  é inscritível (pelo Teorema 29), temos que  $A\hat{P}M + A\hat{N}M = 180^\circ$ . Mas,  $A\hat{N}M + A\hat{N}E = 180^\circ$  e  $A\hat{N}E$  é o ângulo descrito pela Reta de Simson e o lado  $\overline{AB}$  do triângulo.

Resta mostrarmos que a reta  $\overleftrightarrow{CN'}$  forma com o lado  $\overline{AC}$  o mesmo ângulo que a Reta de Simson forma com o mesmo lado. Temos que  $A\hat{C}N' = A\hat{P}N' = A\hat{P}N = A\hat{M}N$ , logo,  $\overleftrightarrow{CN'} \parallel \overleftrightarrow{LN}$ .  $\square$

Agora, vamos considerar o ortocentro  $H$  do triângulo  $ABC$ . Se traçarmos o segmento  $\overline{PH}$ , temos que

**Teorema 52:** A Reta de Simson intercepta  $\overline{PH}$  em seu ponto médio.

*Demonstração.* Sejam  $ABC$ , um triângulo inscrito em uma circunferência,  $P$  um ponto desta circunferência, e  $L$ ,  $M$  e  $N$  os pés das perpendiculares aos lados  $\overline{BC}$ ,  $\overline{AC}$  e  $\overline{AB}$ , traçadas pelo ponto  $P$ . Queremos mostrar que  $F$  é ponto médio de  $\overline{PH}$  (figura 4.16).

Inicialmente, vamos traçar o segmento de reta  $\overline{BT}$ , sendo  $T$  a interseção da reta  $\overleftrightarrow{BH}$  com a circunferência. Tomemos também o ponto  $E$ , interseção desta mesma reta com o lado  $\overline{AC}$  do triângulo. Seja  $K$  a interseção da reta  $\overleftrightarrow{PM}$  com a circunferência, vamos traçar o segmento  $\overline{BK}$  e, posteriormente,  $\overline{HU}$ , paralelo a  $\overline{BK}$ , por  $H$  (figura 4.17).

Dessa forma obtemos o quadrilátero  $PTBK$  inscritível, em que os lados  $\overline{KP}$  e  $\overline{TB}$  são paralelos, já que eles formam o mesmo ângulo de  $90^\circ$  com o lado  $\overline{AC}$  do triângulo. Segundo o Teorema 25,  $PTBK$  é um trapézio isósceles. Como, por construção,  $HU = BK = PT$ , então  $HUPT$  também é trapézio isósceles.

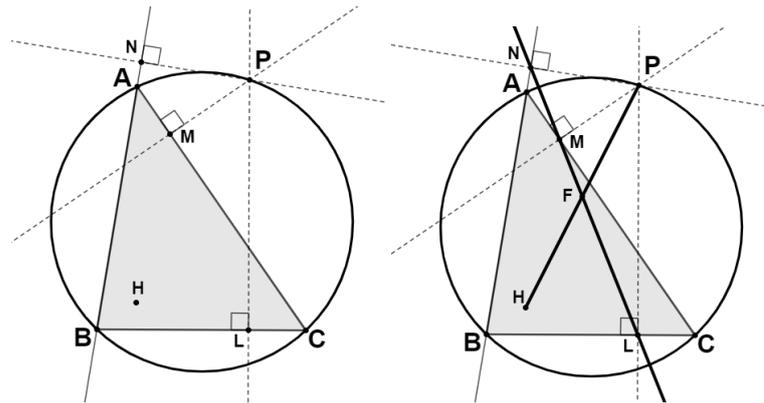


Figura 4.16:  $F$  é ponto médio de  $\overline{PH}$

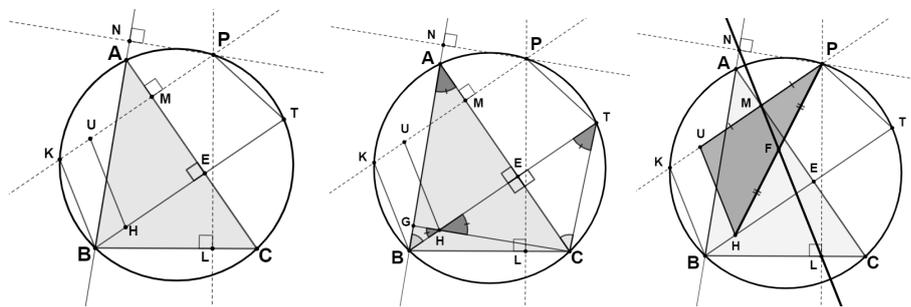


Figura 4.17:  $PTBK$  é quadrilátero inscritível,  $HCT$  é triângulo isósceles e  $M$  é ponto médio do segmento  $\overline{PU}$

Agora, precisaremos mostrar que  $E$  é ponto médio de  $\overline{HT}$ . Para isto, vamos tomar o ângulo  $\widehat{BTC}$ , congruente ao ângulo  $\widehat{BAC}$ , pois ambos são inscritos na circunferência e descrevem o mesmo arco  $\widehat{BC}$ . Temos também que  $\widehat{TCE} = \widehat{ABE}$ , pois eles são inscritos na circunferência e descrevem o mesmo arco  $\widehat{APT}$ . O triângulo  $HGB$ , em que  $G$  é pé da altura relativa ao lado  $\overline{AB}$ , tem o ângulo  $\widehat{BHG}$  complementar a  $\widehat{ABE}$  e, portanto, congruente a  $\widehat{BTC}$ . O ângulo  $\widehat{EHC}$  é oposto pelo vértice a  $\widehat{BHG}$  e, daí, temos que o triângulo  $HCT$  é isósceles, de base  $\overline{HT}$ .

Sendo  $HCT$  um triângulo isósceles, temos que  $\overline{CE}$  é altura e mediana relativa à base, logo,  $E$  é ponto médio de  $\overline{HT}$ . Sendo  $E$  ponto médio de  $\overline{HT}$ , o triângulo  $HME$  é congruente ao triângulo  $TME$ , pelo caso  $LAL$ , já que ambos são retângulos em  $E$ , compartilham o lado  $\overline{ME}$  e possuem  $\widehat{EHM} = \widehat{HTM}$ . Igualmente, os triângulos  $MHU$  e  $MTP$  são congruentes pelo mesmo caso  $LAL$  (os ângulos  $\widehat{MHU}$  e  $\widehat{MTP}$  são congruentes). Logo,  $M$  também é ponto médio de  $\overline{PU}$ .

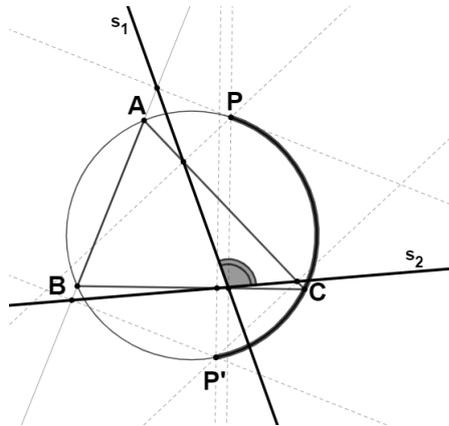
A Reta de Simson é paralela ao segmento  $\overline{BK}$  (e, conseqüentemente, ao segmento  $\overline{HU}$ ), pelo Teorema 51. Como  $M$  é ponto médio do lado  $\overline{PU}$  do triângulo  $PUH$ , ela contém a base média do triângulo e, portanto, intercepta o lado  $\overline{PH}$  em seu ponto médio.  $\square$

Vamos agora mostrar um último teorema relacionado à Reta de Simson, apesar de haver muitos outros e que podem ser pesquisados no livro [1].

Seja  $ABC$  um triângulo inscrito em uma circunferência e sejam  $P$  e  $P'$  dois pontos desta circunferência que definirão duas Retas de Simson.

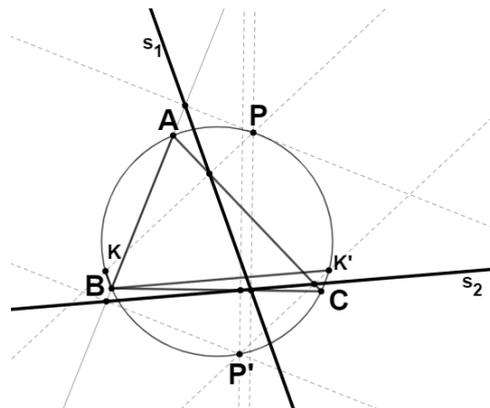
**Teorema 53:** O ângulo formado pelas duas Retas de Simson tem a metade do arco definido

por  $P$  e  $P'$ .



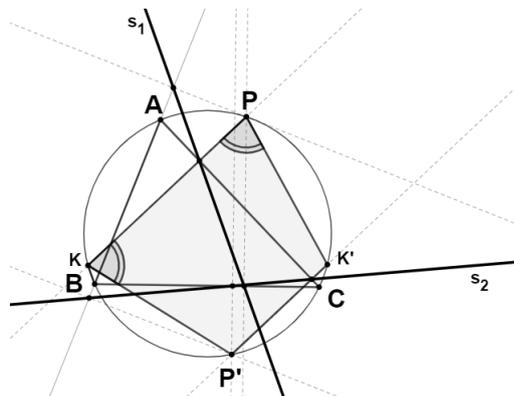
**Figura 4.18:** O ângulo formado pelas retas  $\overleftrightarrow{s_1}$  e  $\overleftrightarrow{s_2}$  tem metade da medida do arco  $\widehat{PCP'}$

*Demonstração.* Sejam  $K$  e  $K'$  os pontos de interseção entre a circunferência e as perpendiculares ao lado  $\overline{AC}$  do triângulo, passando por  $P$  e  $P'$ , respectivamente.



**Figura 4.19:** O ângulo  $\widehat{KBK'}$  é congruente ao ângulo formado pelas duas *Retas de Simson*

Pelo Teorema 51, os segmentos de reta  $\overline{BK}$  e  $\overline{BK'}$  são paralelos às retas  $\overleftrightarrow{s_1}$  e  $\overleftrightarrow{s_2}$ , respectivamente. Assim, o ângulo  $\widehat{KBK'}$  é congruente ao ângulo formado pelas *Retas de Simson*.



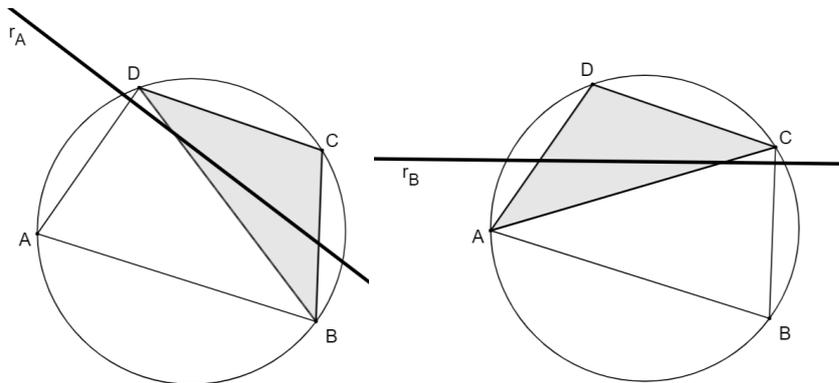
**Figura 4.20:** O quadrilátero  $KPK'P'$  é um trapézio isósceles

Agora, tomemos o quadrilátero inscrito formado pelos pontos  $K$ ,  $P$ ,  $K'$  e  $P'$  (figura 4.20). Os lados  $\overline{KP}$  e  $\overline{K'P'}$  são paralelos, já que ambos são perpendiculares ao lado  $\overline{AC}$  do triângulo inscrito. Assim, temos que  $KPK'P'$  é um trapézio inscrito de bases  $\overline{KP}$  e  $\overline{K'P'}$  e, pelo Teorema 25, os ângulos  $P'\widehat{K}P$  e  $K\widehat{P}K'$  são congruentes. Dessa congruência, sai que os arcos  $\widehat{PP'}$  e  $\widehat{K'K}$  são congruentes, pois são determinados, respectivamente, pelos ângulos congruentes e inscritos na circunferência,  $K\widehat{P}K'$  e  $P'\widehat{K}P$ . Como o ângulo  $K\widehat{B}K'$  determina o arco  $\widehat{K'PK}$ , que mede  $(360^\circ - \widehat{K'K})$ , então  $K\widehat{B}K' = \frac{360^\circ - \widehat{K'K}}{2} = \frac{360^\circ - \widehat{PP'}}{2} = 180^\circ - \frac{\widehat{PP'}}{2}$ .  $\square$

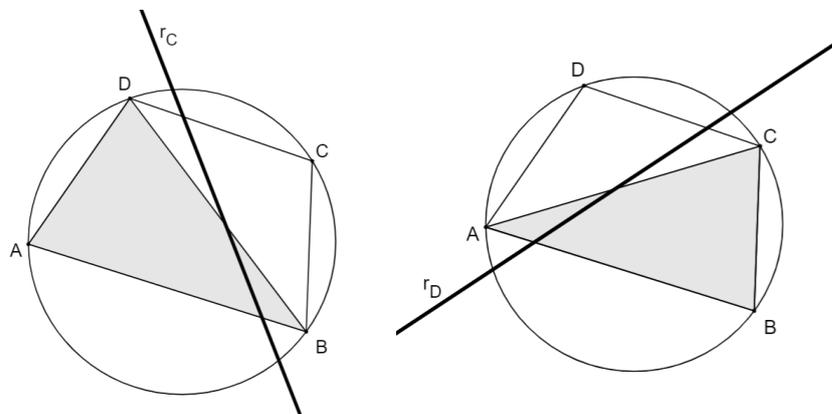
Para finalizarmos este capítulo, deixaremos uma sugestão de atividade para o leitor, que relaciona a *Reta de Simson* e os quadriláteros inscritíveis.

#### 4.2.1 As retas de Simson de um quadrilátero inscrito

Dado um quadrilátero  $ABCD$  inscrito, temos quatro triângulos associados a ele, escolhidos os vértices. São eles:  $BCD$ ,  $ACD$ ,  $ABD$  e  $ABC$ . Para cada um, podemos analisar a *Reta de Simson* associada ao vértice do quadrilátero que não pertence ao triângulo. Dessa maneira, temos quatro *Retas de Simson*,  $r_A$ ,  $r_B$ ,  $r_C$  e  $r_D$  associadas aos triângulos  $BCD$ ,  $ACD$ ,  $ABD$  e  $ABC$ , respectivamente.



**Figura 4.21:** Retas de Simson associadas aos triângulos  $BCD$  e  $ACD$

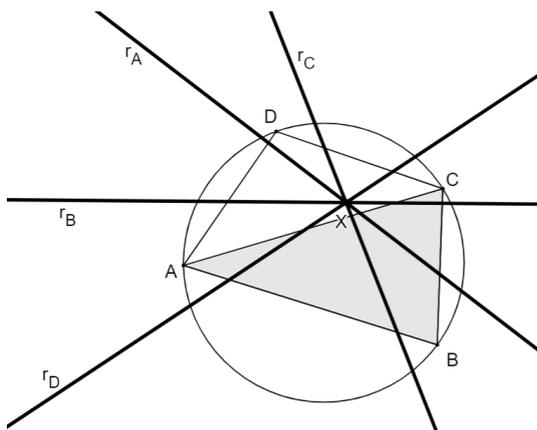


**Figura 4.22:** Retas de Simson associadas aos triângulos  $ABD$  e  $ABC$

Sejam  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  e  $S$  os pontos médios dos lados do quadrilátero  $ABCD$ . Do Teorema 33, podemos mostrar que as quatro retas perpendiculares aos lados do quadrilátero que passam pelos pontos  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  e  $S$  interceptam-se em um único ponto  $X$ . Segundo [6], podemos mostrar também que:

**Teorema 54:** As retas  $r_A, r_B, r_C$  e  $r_D$  interceptam-se em  $X$ .

A prova desse resultado pode ser encontrada em [6], mas não vamos prová-lo neste trabalho.



**Figura 4.23:** As retas  $r_A, r_B, r_C$  e  $r_D$  interceptam-se em  $X$

# Atividades

---

Neste capítulo, descreveremos três propostas de atividades sobre os quadriláteros e a *Reta de Simson*. A ideia por trás de todas as propostas é fazer com que os estudantes verifiquem resultados interessantes demonstrados, na forma de teoremas, nesta dissertação.

As atividades podem ser desenvolvidas em aulas de Desenho Geométrico, com a utilização de régua e compasso, porém, o uso do *GeoGebra* pode ser um atrativo para os alunos, além de proporcionar agilidade e maior precisão na execução das tarefas. A escolha pelo *software* requererá, então, que os estudantes conheçam o programa e saibam utilizar suas principais ferramentas. Assim, torna-se útil a realização de algumas aulas prévias, com apresentação das ferramentas e de uma posterior aplicação por parte dos alunos. Neste trabalho usaremos a versão 6.0.664.0 do *GeoGebra*.

Além disso, é importante explicar aos estudantes que os pontos marcados no *GeoGebra* recebem nomes que seguem a ordem alfabética. No passo-a-passo das atividades, para facilitar, os pontos são citados seguindo-se a mesma ordem. Porém, caso o estudante marque algum ponto errado durante a construção e não o apague, os nomes que surgirão em sua tarefa não coincidirão com a ordem descrita na proposta. Isto não desabona em nada a realização, porém é importante que eles estejam cientes disso para não serem levados a acreditar que sua atividade está errada. Uma tarefa teste pode ser aplicada para que essa explicação se torne mais eficiente.

O público-alvo das tarefas são estudantes que estejam cursando a partir do 8º ano do Ensino Fundamental, inclusive do Ensino Médio. Entretanto, o aconselhável é que as atividades sejam aplicadas no próprio 8º ano, pois de acordo com [3] é nesta etapa do ensino básico que o estudante deve desenvolver a habilidade de “demonstrar propriedades de quadriláteros por meio da identificação da congruência de triângulos” (habilidade EF08MA14). O ideal é, portanto, que a aplicação venha logo após as aulas sobre os quadriláteros notáveis e suas propriedades.

## 5.1 Atividade 1 - Quadriláteros

Esta atividade é composta por três etapas, sendo o resultado da primeira, essencial para a realização das posteriores. Na terceira fase da tarefa, os estudantes construirão um quadrilátero inscrito em uma circunferência, de maneira que suas diagonais sejam perpendiculares, porém, o conceito de quadriláteros ortodiagonais ou inscriíveis não precisa ser trabalhado

de maneira explícita. Ao final, espera-se que eles comparem o resultado da etapa 3 com o resultado da etapa 2, que se diferem pelo fato de que um quadrilátero é ortodiagonal inscritível e o outro não. Pode ser que os alunos percebam tais diferenças, mas também pode ser que não e, aí, uma simples intervenção do professor os levará ao entendimento. Na atividade, serão trabalhados os Teoremas 15, 16 e 40.

### **Total de aulas para a Atividade 1:**

Serão necessárias 7 aulas de 50 minutos cada, sendo uma para introdução ao *software GeoGebra* e com uma breve apresentação das suas principais ferramentas; duas para cada etapa da tarefa.

#### **Aula 1:**

Introdução ao *software GeoGebra*, com apresentação das suas principais ferramentas:

- Polígono
- Ponto Médio ou Centro
- Segmento
- Valor
- Ângulo
- Círculo definido por Três Pontos

### **5.1.1 Etapa 1**

#### **Objetivo:**

Verificar que os pontos médios de um quadrilátero qualquer são vértices de um paralelogramo. (Teorema 15).

#### **Público-alvo:**

Estudantes do 8º ano do Ensino Fundamental ou séries posteriores, inclusive do Ensino Médio.

#### **Pré-requisitos:**

Os estudantes devem compreender o conceito de ponto médio de um segmento de reta, além de conhecerem todas as características de um paralelogramo. O conhecimento básico em *GeoGebra* é essencial.

#### **Aula 2:**

Nesta segunda aula, os estudantes deverão seguir os passos descritos para realizarem a construção:

#### **Passos para a realização da tarefa:**

##### **Passo 1:**

Abra o *GeoGebra* no modo "Geometria".

**Passo 2:**

Use a ferramenta “Polígono” e construa um quadrilátero qualquer  $ABCD$ .

**Passo 3:**

Marque os pontos médios  $E$ ,  $F$ ,  $G$  e  $H$ , de cada lado do quadrilátero, usando a ferramenta “Ponto Médio ou Centro”.

**Passo 4:**

Construa o polígono  $EFGH$ , utilizando a ferramenta “Polígono”.

**Passo 5:**

Usando a ferramenta “Mover”, clique em cada segmento construído no passo anterior e, então, meça seus tamanhos, escolhendo a opção “Valor”.

**Passo 6:**

Agora, meça os ângulos  $G\hat{H}E$  e  $E\hat{F}G$ , usando a ferramenta “Ângulo”.

**Passo 7:**

Repita o passo 6 para os ângulos  $F\hat{G}H$  e  $H\hat{E}F$ .

**Questionário:**

Agora, de acordo com os seus resultados encontrados, responda as seguintes perguntas:

1. O que você observa com relação às medidas dos lados  $\overline{EF}$  e  $\overline{GH}$ ? Se você mover os vértices do quadrilátero  $ABCD$ , a relação entre os segmentos  $\overline{EF}$  e  $\overline{GH}$  muda?
2. O que você observa com relação às medidas dos lados  $\overline{FG}$  e  $\overline{HE}$ ? Se você mover os vértices do quadrilátero  $ABCD$ , a relação entre os segmentos  $\overline{FG}$  e  $\overline{HE}$  muda?

*Nesta etapa, espera-se que os estudantes percebam que os pares de lados mencionados nas perguntas 1 e 2 são sempre congruentes, independente do quadrilátero  $ABCD$  que se construa. É interessante, inclusive, que os estudantes comparem suas imagens e seus resultados.*

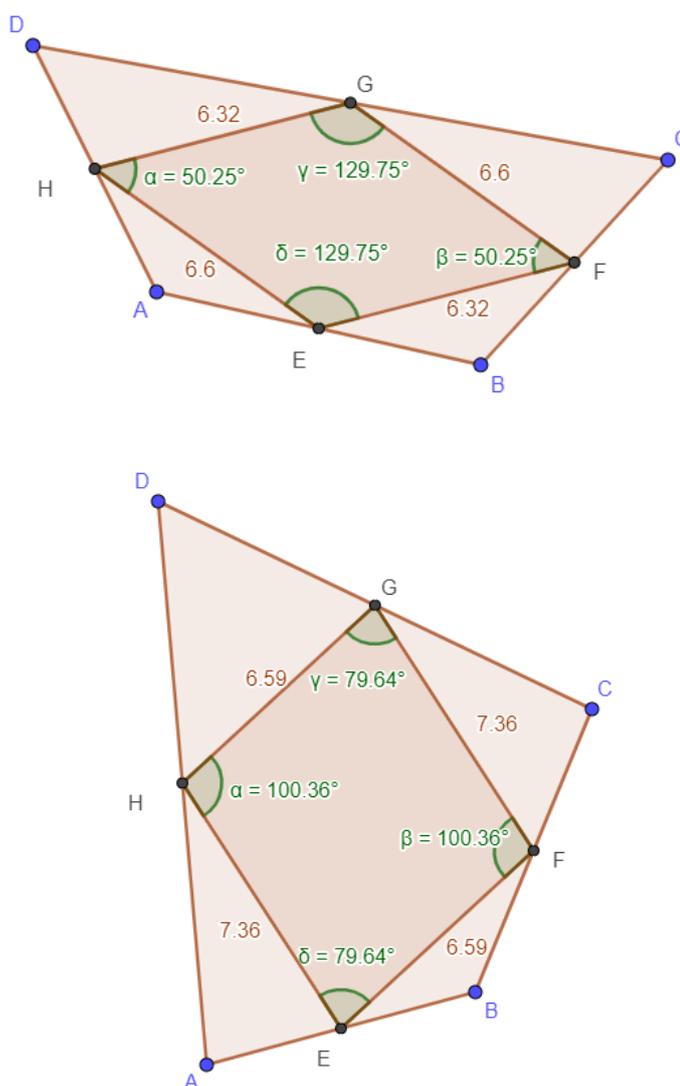
*Além disso, é importante mostrar aos alunos que não é possível mover os pontos  $E$ ,  $F$ ,  $G$  e  $H$ , pois eles são pontos médios do quadrilátero  $EFGH$  e, portanto, dependem da posição dos vértices do quadrilátero  $ABCD$ .*

3. O que você observa com relação às medidas dos ângulos  $G\hat{H}E$  e  $E\hat{F}G$ ? E com relação às medidas dos ângulos  $F\hat{G}H$  e  $H\hat{E}F$ ? Se você movimentar os vértices do quadrilátero  $ABCD$ , as relações entre os pares de ângulos mencionados acima muda?
4. Calcule a soma dos ângulos  $G\hat{H}E$  e  $E\hat{F}G$ . Faça o mesmo com os ângulos  $F\hat{G}H$  e  $H\hat{E}F$ . O que você observa com relação aos resultados destas somas?

*Aqui, o esperado é que os alunos vejam que os pares de ângulos mencionados são congruentes, independente do quadrilátero que se construa. Além disso, é importante que eles percebam que os ângulos opostos são suplementares. Tais resultados serão importantes para que eles consigam responder à próxima pergunta.*

5. Diante das características que você elencou acima e de acordo com as propriedades dos quadriláteros notáveis, como você classificaria o quadrilátero  $EFGH$ ?

*O quadrilátero  $EFGH$  é um paralelogramo, mas é possível que alguns respondam que são retângulos ou até losangos. Nos casos em que isso ocorrer, é importante que o professor analise a construção feita pelo aluno, já que o resultado dele pode levá-lo ao engano. Além disso, dependendo da quantidade de respostas erradas, é útil uma conversa e uma retomada sobre as propriedades dos quadriláteros notáveis.*



**Figura 5.1:** Exemplos de construções da Etapa 1 - Atividade 1

### Aula 3:

É muito importante que o professor reúna-se com os estudantes para conversarem sobre os resultados encontrados. Os alunos podem compartilhar suas construções com o objetivo de constatar que diferentes quadriláteros produzirão o mesmo resultado.

## 5.1.2 Etapa 2

### Objetivo:

Verificar que o perímetro do quadrilátero  $EFGH$ , produzido na Etapa 1, é igual à soma das medidas das diagonais  $\overline{EG}$  e  $\overline{FH}$ . (Teorema 16).

### Público-alvo:

Estudantes do 8º ano do Ensino Fundamental ou séries posteriores, inclusive do Ensino Médio.

### Pré-requisitos:

Os estudantes precisam entender os conceitos de diagonal e perímetro de um polígono. O conhecimento básico em *GeoGebra* é essencial.

### **Aula 4:**

#### Passos para a realização da tarefa:

##### **Passo 1:**

Utilizando a construção feita anteriormente, trace os segmentos de reta  $\overline{EG}$  e  $\overline{FH}$ , que são diagonais do quadrilátero  $EFGH$ . Para isto, use a ferramenta "Segmento" (se desejar, clique, com o botão direito do mouse, nas medidas dos ângulos e desmarque a opção "Exibir Objeto", para que a imagem não fique com excesso de informação).

##### **Passo 2:**

Com a ferramenta "Mover", exiba as medidas destes segmentos e some-as.

##### **Passo 3:**

Calcule o perímetro do quadrilátero  $EFGH$ .

##### **Passo 4:**

Compare os resultados obtidos nos passos 2 e 3.

### Questionário:

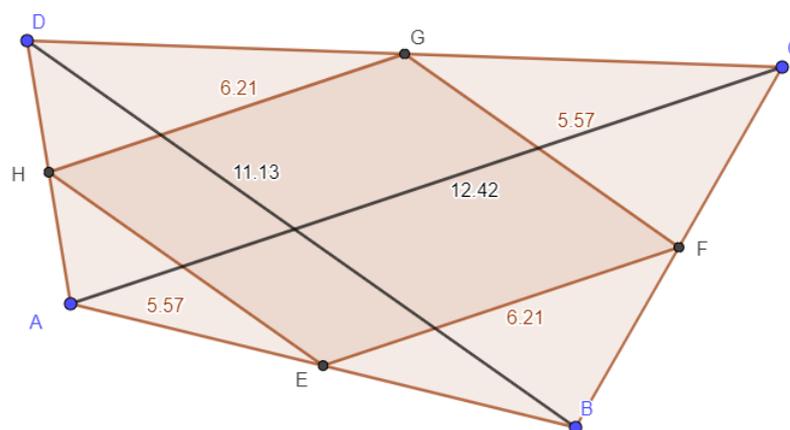
Agora, responda as seguintes perguntas:

1. Ao comparar os resultados obtidos nos passos 2 e 3, o que você observou?
2. Se você movimentar os vértices do quadrilátero  $ABCD$ , a relação observada acima muda?

*Os resultados obtidos para a soma dos segmentos  $\overline{EG}$  e  $\overline{FH}$  e para o perímetro de  $EFGH$  devem ser iguais e é isso que se espera que os estudantes respondam. Além disso, eles precisam perceber que este resultado vale para qualquer quadrilátero e, então, ao final, o professor pode fazer a seguinte pergunta: "A soma das diagonais do quadrilátero  $ABCD$  é igual ao perímetro do quadrilátero  $EFGH$  sempre?"*

### **Aula 5:**

Nesta aula, os estudantes podem apresentar suas construções e resultados. A comparação das diferentes construções produz um resultado importante na compreensão do teorema.



**Figura 5.2:** Exemplo de construção da Etapa 2 - Atividade 1

### 5.1.3 Etapa 3

Nesta etapa, os estudantes construirão um quadrilátero ortodiagonal inscrito, sobre o qual um resultado será analisado. Entretanto, não é necessário que os conceitos de ortodigonais e inscritíveis sejam trabalhados. Apenas no final da atividade é que as características desses quadriláteros serão observadas e mencionadas.

#### **Aula 6:**

#### **Objetivo:**

Verificar que os pontos médios dos lados de um quadrilátero ortodiagonal inscrito são vértices de um retângulo. (Teorema 40).

#### **Público-alvo:**

Estudantes do 8º ano do Ensino Fundamental ou séries posteriores, inclusive do Ensino Médio.

#### **Pré-requisitos:**

Os estudantes precisam conhecer os conceitos de circunferência e seus elementos, segmentos de retas perpendiculares, interseção entre dois objetos e ângulos no polígono. O conhecimento básico em *GeoGebra* é essencial.

#### **Passos para a realização da tarefa:**

##### **Passo 1:**

Com a ferramenta “Círculo definido por Três Pontos”, construa uma circunferência que passe pelos pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$ .

##### **Passo 2:**

Trace o segmento  $\overline{AB}$  (“Segmento”).

**Passo 3:**

Construa uma reta perpendicular a  $\overline{AB}$ , passando pelo ponto  $C$  (a reta não precisa passar pelo centro da circunferência).

**Passo 4:**

Marque o ponto  $D$  na interseção desta reta com a circunferência, utilizando “Interseção de Dois Objetos”.

**Passo 5:**

Trace os segmentos  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CA}$ ,  $\overline{AD}$  e  $\overline{DB}$ .

**Passo 6:**

Marque os pontos médios  $E$ ,  $F$ ,  $G$  e  $H$  dos lados  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CA}$ ,  $\overline{AD}$  e  $\overline{DB}$ , respectivamente.

**Passo 7:**

Construa o quadrilátero  $EFGH$  (“Segmentos” ou “Polígono”).

**Passo 8:**

Meça cada lado do quadrilátero  $EFGH$ .

**Passo 9:**

Meça os ângulos internos do quadrilátero  $EFGH$ .

Agora, responda as seguintes perguntas:

1. O que você observou com relação às medidas dos lados do quadrilátero  $EFGH$ ? E com relação às medidas dos seus ângulos internos?

*Os alunos precisarão encontrar lados opostos congruentes no quadrilátero  $EFGH$  e, também, encontrarão os quatro ângulos internos retos.*

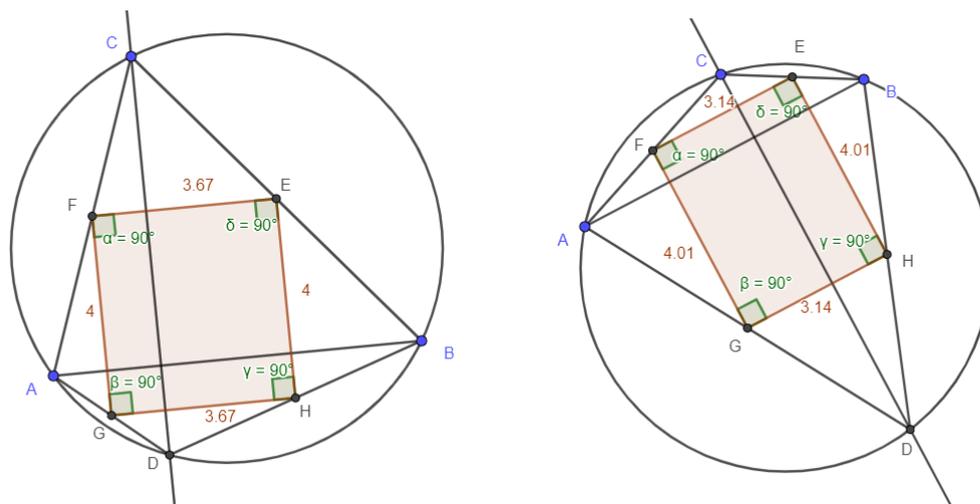
2. Modifique o quadrilátero  $BCAD$ , movimentando os pontos  $B$ ,  $C$ ,  $A$  e  $D$ . Para cada movimentação, verifique as medidas dos lados e dos ângulos internos de  $EFGH$ . O que você percebe?

3. De acordo com a sua resposta anterior e com seus conhecimentos sobre os quadriláteros notáveis, como você classifica o polígono  $EFGH$ ?

*O quadrilátero  $EFGH$  é um retângulo, já que seus quatro ângulos retos são congruentes e os lados opostos também. É esperado que algum estudante construa um quadrilátero de forma que  $EFGH$  tenha todos os lados congruentes e, então, o classifique como um quadrado. Neste caso, vale uma intervenção do professor, incentivando a comparação entre as diferentes construções feitas e levando o grupo a perceber que  $EFGH$  sempre será um retângulo, mesmo quando ele for um quadrado.*

**Aula 7:**

Momento para apresentação e discussão dos resultados.



**Figura 5.3:** Exemplos de construção da Etapa 3 - Atividade 1

## 5.2 Atividade 2 - Quadriláteros Inscritíveis

Nesta atividade, serão estudados resultados interessantes sobre os quadriláteros inscritíveis, discutidos nos Teoremas 24 e 25. Caso o grupo de estudantes não conheça ou não se lembre desse conceito, o professor pode dar uma explicação prévia sobre o assunto, de maneira simples e breve. A atividade é composta por duas etapas.

### Total de aulas para a Atividade 2:

Estima-se que 5 aulas, de 50 minutos cada, serão suficientes para a realização de toda a tarefa. A primeira aula deve ser destinada a uma breve apresentação das ferramentas do *GeoGebra* e, as demais, duas a duas, para a realização de cada etapa.

#### **Aula 1:**

Relembre e exemplifique o uso das seguintes ferramentas do *GeoGebra*:

- Círculo definido por Três Pontos
- Ponto em Objeto
- Segmento
- Reta Paralela
- Interseção de Dois Objetos
- Mover
- Valor
- Ângulo
- Polígono

### 5.2.1 Etapa 1

#### Objetivo:

Verificar que todo trapézio inscrito em uma circunferência é isósceles. (Teorema 25).

#### Público-alvo:

Estudantes do 8º ano do Ensino Fundamental ou séries posteriores, inclusive do Ensino Médio.

#### Pré-requisitos:

Os estudantes precisam saber o conceito de circunferência, quadriláteros notáveis e suas propriedades, além de conhecerem segmentos de retas paralelas, interseção entre dois objetos e ângulos no polígono. O conhecimento básico em *GeoGebra* é essencial.

#### **Aula 2:**

#### Passos para a realização da Tarefa:

##### **Passo 1:**

Com a ferramenta “Círculo definido por Três Pontos”, construa uma circunferência que passe pelos pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$ .

##### **Passo 2:**

Trace o segmento de reta  $\overline{AB}$ , utilizando a ferramenta “Segmento”.

##### **Passo 3:**

Agora, trace uma reta paralela ao segmento  $\overline{AB}$  passando pelo ponto  $C$ , escolhendo a ferramenta “Reta Paralela”.

##### **Passo 4:**

Marque o ponto  $D$  onde a reta intercepta a circunferência (ponto  $D$ ). Para isto, use a ferramenta “Interseção de Dois Objetos”.

##### **Passo 5:**

Construa o quadrilátero  $ABCD$ , traçando os segmentos  $\overline{BC}$  e  $\overline{DA}$  ou usando a ferramenta “Polígono”.

##### **Passo 6:**

Com a ferramenta “Mover”, clique nos segmentos  $\overline{BC}$  e  $\overline{DA}$  e meça-os, usando a opção “Valor”.

##### **Passo 7:**

Meça os quatro ângulos internos do quadrilátero, usando a ferramenta “Ângulo”.

#### Questionário:

1. Como os segmentos  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$  são paralelos, que tipo de quadrilátero é o polígono  $ABCD$ ?

Os estudantes precisam perceber que o quadrilátero inscritível construído por eles trata-se de um trapézio. Se o professor sentir necessidade, pode fazer uma revisão sobre os quadriláteros notáveis antes da aplicação da tarefa.

2. De acordo com as medidas dos ângulos internos de  $ABCD$  e com as medidas dos lados  $\overline{BC}$  e  $\overline{DA}$ , classifique o quadrilátero.

Como os segmentos  $\overline{BC}$  e  $\overline{DA}$  são congruentes, espera-se que os estudantes classifiquem-o como trapézio isósceles.

3. Movimentando os vértices do quadrilátero  $ABCD$ , o resultado observado na pergunta anterior muda?

Espera-se que o estudante perceba que a maneira com que o quadrilátero foi construído, faz com que ele seja sempre um trapézio isósceles.

4. Escreva uma breve conclusão sobre a construção realizada nesta tarefa.

A intenção aqui é apenas avaliar se o estudante consegue levar o resultado encontrado por ele a todos os trapézios inscritos em uma circunferência. É preciso que ele entenda que a movimentação dos vértices do quadrilátero  $ABCD$  é uma maneira muito rápida de desenhar vários trapézios diferentes e imediatamente verificar que o resultado não muda.

### Aula 3:

Uma conversa com o grupo sobre os resultados encontrados por ele e uma comparação das construções é extremamente eficaz, visto que os alunos perceberão que independente do trapézio que se construa, desde que ele seja inscrito em uma circunferência, ele sempre será isósceles.

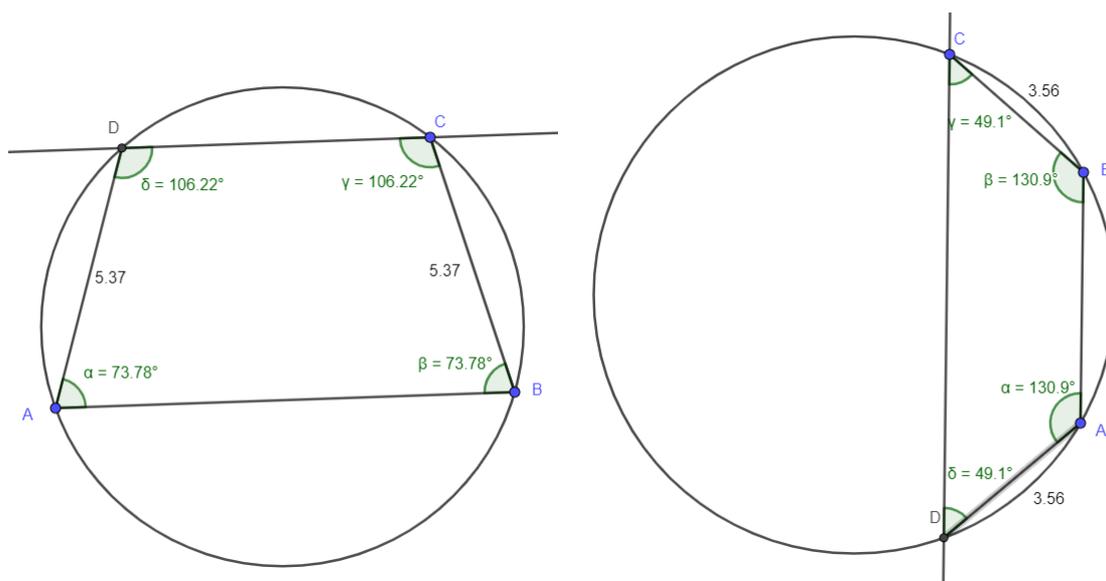


Figura 5.4: Exemplos de construção da Etapa 1 - Atividade 2

## 5.2.2 Etapa 2

### Objetivo:

Verificar que os ângulos opostos de um quadrilátero inscrito são suplementares. (Teorema 24).

### Público-alvo:

Estudantes do 8º ano do Ensino Fundamental ou séries posteriores, inclusive do Ensino Médio.

### Pré-requisitos:

Os estudantes precisam conhecer os conceitos de circunferência e seus elementos, segmentos de retas, ângulos no polígono e ângulos suplementares. O conhecimento básico em *GeoGebra* é essencial.

### **Aula 4:**

### Passos para a realização da Tarefa:

#### **Passo 1:**

Com a ferramenta “Círculo definido por Três Pontos”, construa uma circunferência que passe pelos pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$ .

#### **Passo 2:**

Marque um quarto ponto,  $D$ , sobre a circunferência, usando a ferramenta “Ponto em Objeto”.

#### **Passo 3:**

Trace os segmentos  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CD}$  e  $\overline{DA}$ , utilizando a ferramenta “Segmento” (você pode também usar a ferramenta “Polígono” e ligar os quatro pontos).

#### **Passo 4:**

Meça os ângulos  $D\hat{A}B$  e  $B\hat{C}D$ , com a ferramenta “Ângulo” e, depois, some as duas medidas.

#### **Passo 5:**

Repita o passo anterior para os ângulos  $A\hat{B}C$  e  $C\hat{D}A$ .

### Questionário:

1. No 4º e no 5º passos da construção, você mediu e somou os pares de ângulos  $D\hat{A}B$  e  $B\hat{C}D$  e  $A\hat{B}C$  e  $C\hat{D}A$ . O que você verifica para as duas somas realizadas?

*Os alunos precisam encontrar  $180^\circ$  para a soma de cada par de ângulos do quadrilátero. Seria bom que eles percebessem que os ângulos somados formam pares de ângulos opostos no quadrilátero, porém, tal percepção pode ser avançada para o público-alvo.*

2. Com a ferramenta “Mover”, modifique o quadrilátero  $ABCD$ , movimentando os pontos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$ . Em cada movimentação, realize a soma dos pares de ângulos mencionados nos passos 4 e 5. O que você observa?

Mesmo que não utilizem o termo "suplementares", os estudantes precisam ver que a adição será sempre igual a  $180^\circ$ .

3. Se o quadrilátero  $ABCD$  não fosse inscrito em uma circunferência, sua resposta para a pergunta anterior se manteria? Se desejar, construa um quadrilátero qualquer, fora da circunferência, e repita os passos 4 e 5 da construção.

Esta pergunta deve levar os estudantes a perceberem que os ângulos opostos sempre são suplementares nos quadriláteros inscritíveis, isto é, fora de uma circunferência, nem sempre verifica-se tal propriedade.

### Aula 5:

Neste momento, o professor deve instigar seus alunos a compararem suas construções, seus resultados e suas conclusões. O professor deve também instigá-los a perceber que o fato de o quadrilátero ser inscritível faz com que seus ângulos opostos sejam sempre suplementares. É preciso alertar os estudantes que um quadrilátero não inscritível também pode conter tal propriedade, como os paralelogramos em geral. Porém, essa propriedade não é garantida para qualquer quadrilátero.

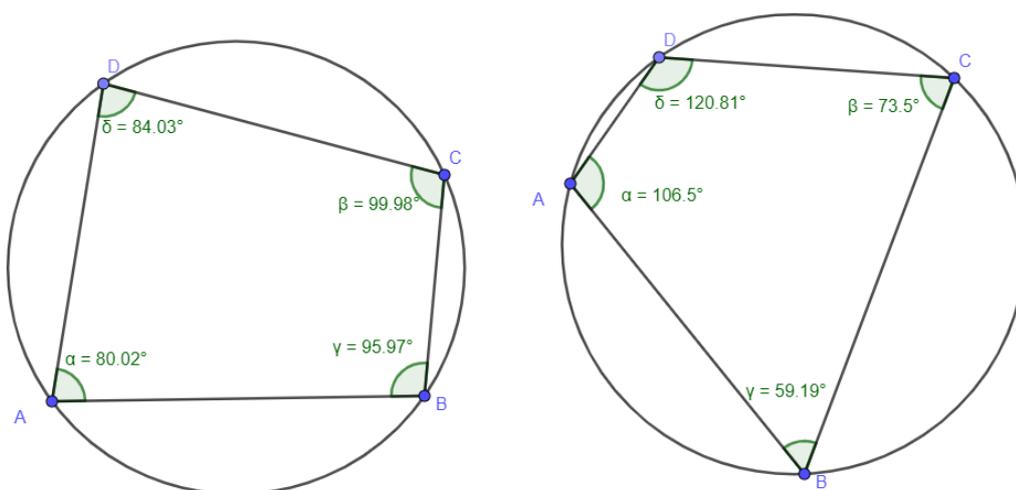


Figura 5.5: Exemplos de construção da Etapa 2 - Atividade 2

## 5.3 Atividade 3 - Reta de Simson

Nesta atividade, propõe-se que os estudantes construam uma *Reta de Simson* no *GeoGebra*, sem que saibam antecipadamente do que se trata. Para a realização desta tarefa, o professor pode apenas fazer uma rápida apresentação do *software* e pedir que os alunos sigam os passos para a construção, dizendo que um resultado importante será percebido. As tarefas aqui propostas são aplicações dos Teoremas 45 e 46, juntamente com a definição 4.1.

### Total de aulas para a Atividade 2:

Em 3 aulas de 50 minutos cada será possível finalizar toda a tarefa.

**Aula 1:**

Relembre e exemplifique o uso das seguintes ferramentas do *GeoGebra*:

- Círculo definido por Três Pontos
- Ponto em Objeto
- Reta
- Segmento
- Polígono
- Reta Perpendicular
- Interseção de Dois Objetos
- Mover

**5.3.1 Etapa 1****Objetivo:**

Verificar que os pés das perpendiculares aos lados de um triângulo inscrito, traçadas a partir de um ponto  $P$  da circunferência, são colineares (Reta de Simson).

**Público-alvo:**

Estudantes do 8º ano do Ensino Fundamental ou séries posteriores, inclusive do Ensino Médio.

**Pré-requisitos:**

Os estudantes precisam saber o conceito de circunferência, polígonos inscritíveis, além de conhecerem segmentos de retas perpendiculares, interseção entre dois objetos e pontos colineares. O conhecimento básico em *GeoGebra* é essencial.

**Aula 2:****Passos para a realização da Tarefa:****Passo 1:**

Com a ferramenta “Círculo definido por Três Pontos”, construa uma circunferência que passe pelos pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$ .

**Passo 2:**

Construa o triângulo  $ABC$ , usando a ferramenta “Segmento” ou “Polígono”.

**Passo 3:**

Marque mais um ponto ( $D$ ) sobre a circunferência (“Ponto em Objeto”).

**Passo 4:**

Utilizando a ferramenta “Reta Perpendicular”, trace a reta perpendicular ao lado  $\overline{AB}$ , passando pelo ponto  $D$  (se necessário, prolongue o lado  $\overline{AB}$ , usando a ferramenta “Reta”).

**Passo 5:**

Marque o ponto de interseção ( $E$ ) entre a reta e o lado  $\overline{AB}$ , com a ajuda da ferramenta “Interseção de Dois Objetos”.

**Passo 6:**

Trace a reta perpendicular ao lado  $\overline{BC}$ , passando pelo ponto  $D$ .

**Passo 7:**

Marque o ponto de interseção ( $F$ ) desta reta com o lado  $\overline{BC}$ .

**Passo 8:**

Trace a reta perpendicular ao lado  $\overline{CA}$ , passando por  $D$ .

**Passo 9:**

Marque o ponto ( $G$ ) de interseção entre a última reta traçada e o lado  $\overline{CA}$ .

**Passo 10:**

Com a ferramenta “Reta”, ligue os pontos  $E$  e  $F$ .

**Questionário:**

1. O que acontece com a reta  $\overleftrightarrow{EF}$  e o ponto  $G$ ?

*Neste ponto, espera-se que o aluno veja que os três pontos,  $E$ ,  $F$  e  $G$ , são colineares, mesmo que ele não utilize este termo.*

2. Movimente os vértices do triângulo  $ABC$  e verifique o que ocorre com a reta que passa por  $E$  e  $F$ .

*Os alunos precisam perceber aqui que independente do movimento que ele faça, os três pontos sempre estarão alinhados.*

3. Movimente também o ponto  $D$  da circunferência e verifique o que ocorre com a reta  $\overleftrightarrow{EF}$ .

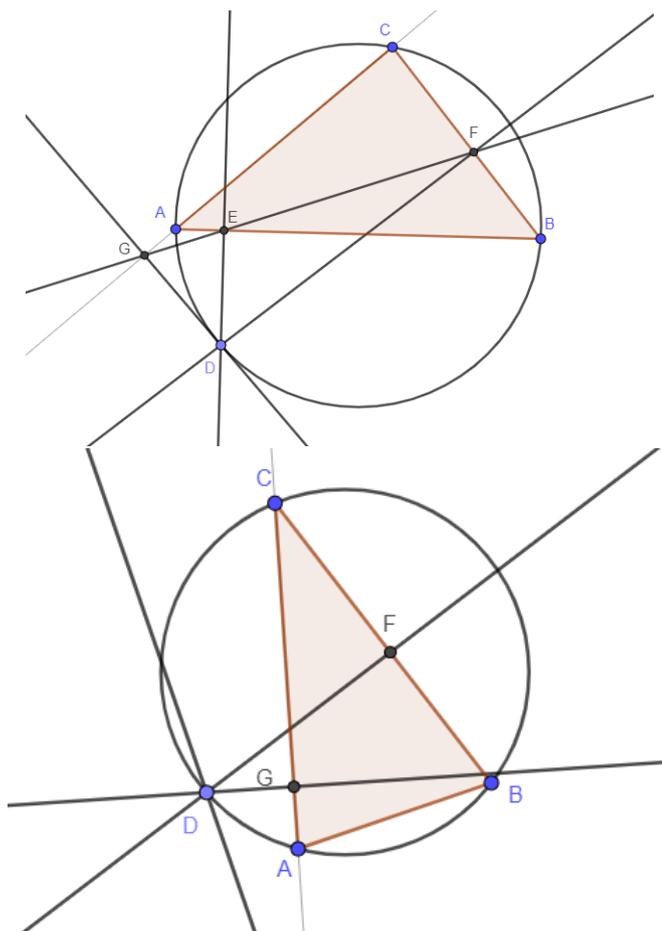
*O resultado esperado aqui é o mesmo da pergunta anterior.*

**Aula 3:**

A finalização da atividade é a parte mais importante dela, pois é quando o professor deve garantir que todos os estudantes entenderam que os pontos  $E$ ,  $F$  e  $G$  da construção sempre estarão alinhados, independente do triângulo e da circunferência que se construa. Após esta conclusão, o professor pode apresentar o nome da reta construída e, até mesmo, propor exercícios que utilizem a *Reta de Simson*.

## 5.4 Aplicação das atividades propostas

Nesta seção, detalharemos a aplicação da Atividade 2 sugerida neste capítulo. Professora de uma grande rede de escolas particulares de Belo Horizonte, a autora teve a oportunidade de colocar em prática uma das propostas escritas por ela a um grupo de estudantes do 8º ano do Ensino Fundamental. O momento escolhido para a realização da tarefa foi durante



**Figura 5.6:** Exemplos de construções da *Reta de Simson*

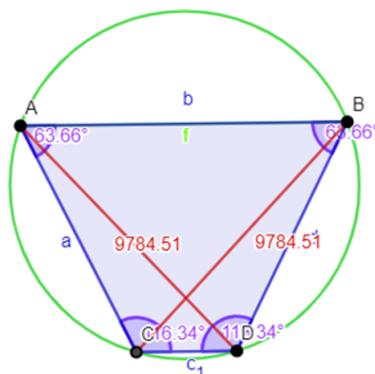
o estudo dos quadriláteros, objeto de conhecimento presente no currículo da série contido em [3]. Por se tratar de uma escola particular que utiliza material didático de um sistema de ensino, a grade curricular a ser seguida em todas as séries é bem extensa e o tempo de aulas seria insuficiente para a aplicação de uma atividade extracurricular, ainda que contemplasse um assunto do currículo. Sendo assim, a autora optou por promover encontros extra-turno e convidou estudantes com perfis engajados, amantes da Matemática, que encarariam o desafio de estudar algumas horas a mais no dia.

Participaram destes encontros 5 alunos, todos com conhecimento prévio do *software GeoGebra*, o que acelerou o processo e tornou possível o desenvolvimento da Atividade 2 em apenas uma aula de 2 horas ininterruptas. É importante ressaltar que outros alunos se inscreveram para a tarefa, mas não puderam comparecer na data escolhida.

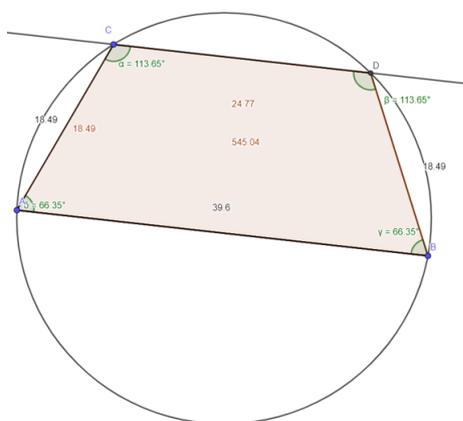
Inicialmente, a professora lembrou as ferramentas básicas do programa e logo solicitou que os estudantes fizessem a primeira construção (Etapa 1). Os alunos sabiam que a atividade abordava os quadriláteros notáveis e já conheciam todas as propriedades dos quadriláteros notáveis citadas nas Seções 2.1 a 2.5, exceto a propriedade da base média (assunto que compõe o currículo do 9º ano do Ensino Fundamental).

Todos os alunos fizeram a construção sem dificuldade, as quais foram *printadas* e enviadas pelos próprios autores. Por questões de proteção de dados, os nomes dos estudantes e da instituição de ensino não serão divulgados e as imagens e respostas dadas por eles serão

nomeados apenas por "Aluno A". "Aluno B", etc.



**Figura 5.7:** Construção da Etapa 1 - Atividade 2 - Aluno A



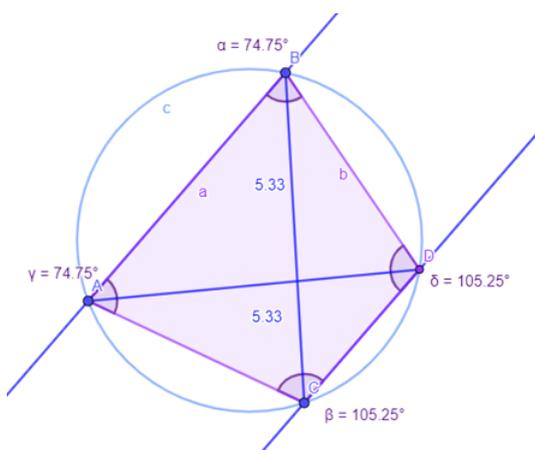
**Figura 5.8:** Construção da Etapa 1 - Atividade 2- Aluno B

É interessante observarmos que alguns estudantes mediram as diagonais do quadrilátero construído, como mais uma forma de verificar que o polígono é um trapézio isósceles (figuras 5.7 e 5.9). Esta iniciativa partiu deles, sem que a professora fizesse qualquer menção a esta propriedade no momento da tarefa. Além disso, durante a realização da Etapa 1, dois alunos mencionaram que ao movimentarem os vértices do quadrilátero  $ABCD$ , conseguiram obter um retângulo e também um quadrado. Porém, um deles alterou a quantidade de casas decimais nas configurações do aplicativo e percebeu que os ângulos internos poderiam ser muito próximos de  $90^\circ$ , mas que o valor exato não poderia ser atingido (figura 5.12).

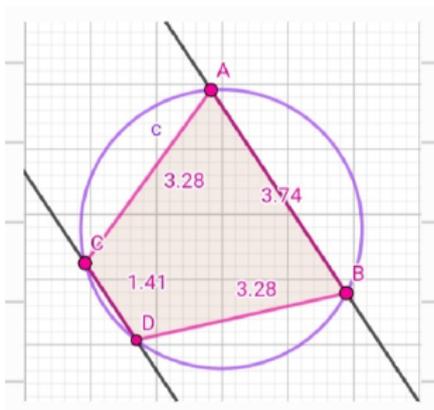
Diante desta dúvida, vale verificarmos a possibilidade de que o quadrilátero  $ABCD$  seja retângulo ou quadrado. Como os ângulos formados pelos lados  $\overline{AB}$  e  $\overline{BC}$  e pelos lados  $\overline{CD}$  e  $\overline{DA}$  não foram definidos na construção, é possível que eles sejam retos e, sendo os lados congruentes, o polígono será um retângulo ou quadrado. Porém, caso isso aconteça, é importante mostrar aos estudantes que o quadrilátero terá dois pares de lados opostos paralelos, sendo então, um paralelogramo. Para os casos mais gerais, em que os ângulos não são retos, teremos apenas um par de lados opostos paralelos, característica dos trapézios.

Ao responderem às questões 1 e 2 do questionário da Etapa 1, os estudantes disseram:

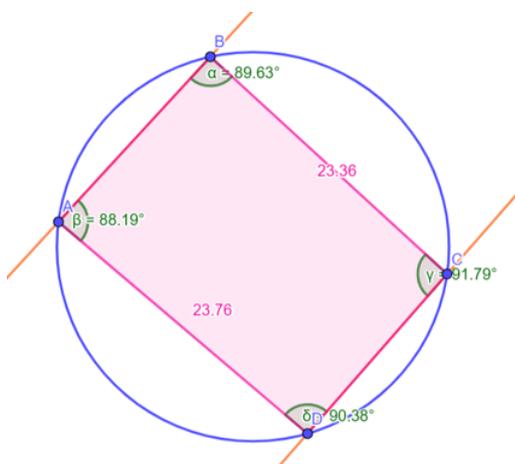
- Alunos A e E: "Trapézio isósceles"



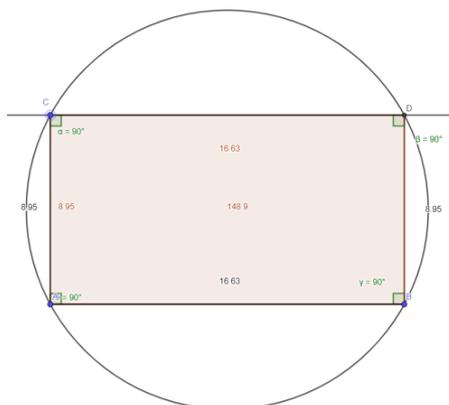
**Figura 5.9:** Construção da Etapa 1 - Atividade 2- Aluno C



**Figura 5.10:** Construção da Etapa 1 - Atividade 2- Aluno D



**Figura 5.11:** Construção da Etapa 1 - Atividade 2- Aluno E



**Figura 5.12:** Quadrilátero construído segundo os passos da Etapa 1, com os ângulos retos

- Aluno B: *"O tipo de quadrilátero é um trapézio isósceles"*
- Aluno C: *"De acordo com as medidas dos ângulos internos de ABCD e com as medidas dos lados BC e DA, o seguinte polígono é um trapézio isósceles"*
- Aluno D: *"Trapézio isósceles, pois os lados não paralelos são congruentes e os ângulos de mesma base são congruentes"*

Com relação à movimentação dos vértices (pergunta 3 do questionário), as respostas dadas foram as seguintes:

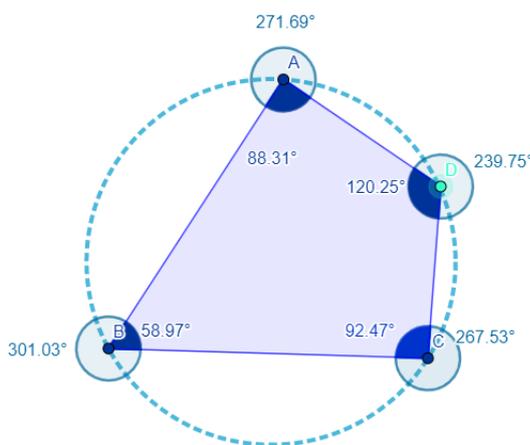
- Aluno A: *"Não muda, mesmo chegando bem perto de se formar um quadrado ou um retângulo, ele continua sendo um Trapézio Isósceles"*
- Aluno B: *"O resultado não mudou"*
- Aluno C: *"Mesmo que se movimente os vértices, fazendo com que elas tenham medidas diferentes o polígono ABCD continuará sendo um trapézio isósceles"*
- Alunos D e E: *"Não muda"*

A última tarefa da Etapa 1 era escrever uma breve conclusão do resultado obtido, onde se esperava que os alunos percebessem que um trapézio inscritível é sempre isósceles. As respostas escritas por eles foram:

- Aluno A: *"Percebi que não se altera o resultado da definição do quadrilátero mexendo nos segmentos, pois ele continua sendo um trapézio isósceles. Os pontos A e B tem o mesmo ângulo e os pontos C e D tem os mesmos ângulos. Os segmentos AD e BC tem o mesmo valor, ele pode mudar quando modificamos os pontos do trapézio, porém, continuam sendo o mesmo entre si"*
- Aluno B: *"O que eu concluí foi: sempre que você construir um quadrilátero com os pontos de uma circunferência cruzada por uma reta que seja paralela a base do quadrilátero esse quadrilátero será um trapézio isósceles"*

- Aluno C: "Trapézios são quadriláteros que possui apenas um par de lados paralelos (por isso os trapézios não são paralelogramos). Trapézios isósceles são aqueles que possuem 2 lados não paralelos congruentes (tipo os triângulos). Uma das propriedades dos trapézios isósceles é que seus ângulos de mesma base possuem medidas iguais, e suas diagonais também são congruentes"
- Aluno D: "Percebi que o trapézio construído dentro da circunferência é isósceles pois é inscrito na circunferência"
- Aluno E: "Percebi que vendo os ângulos corretos, alguma hora as retas vão se encontrar. Se movimentarmos os vértices os ângulos só vão estar diferentes mas continuará sendo um trapézio isósceles".

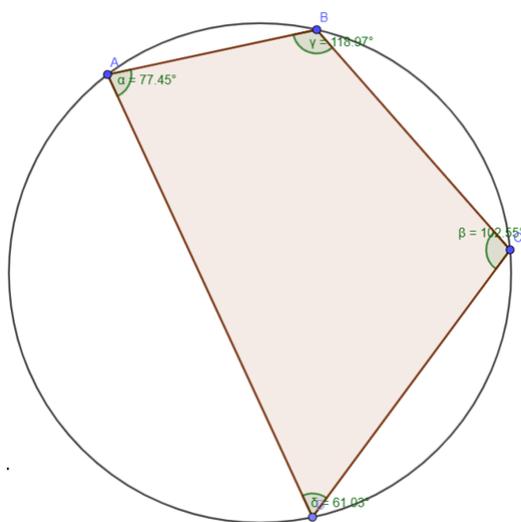
Tendo finalizado a Etapa 1 de maneira totalmente satisfatória, os estudantes foram convidados a realizarem a Etapa 2, em que se propõe a construção de um quadrilátero inscrito para verificarmos que seus ângulos internos opostos são sempre suplementares (Teorema 24). As imagens das construções são 5.14, 5.15, 5.16 e 5.17.



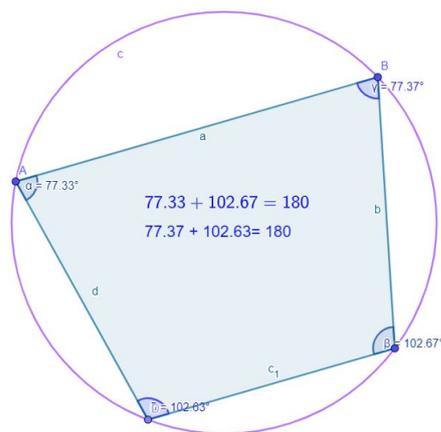
**Figura 5.13:** Construção da Etapa 2 - Atividade 2 - Aluno A

Perguntados sobre o valor das somas dos ângulos opostos dos quadriláteros inscritíveis construídos, os alunos responderam:

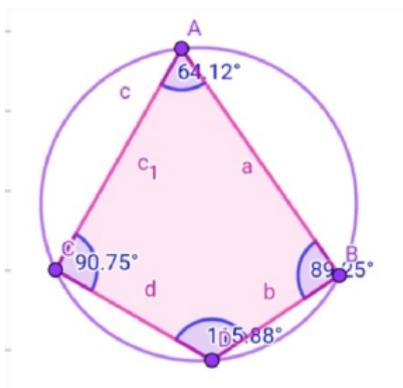
- Aluno A: "A soma dos ângulos internos é igual a  $360^\circ$ , sendo  $DAB$  e  $BCD = 180,78$ ,  $ABC$  e  $CDA = 179,22$  e a soma dos ângulos externos é igual a 1080, que é múltiplo de 360,  $360 \times 3 = 1080$ ."
- Aluno B: "Eu percebi que a soma desses ângulos é  $180^\circ$ "
- Aluno C: "Em ambas as somas o resultado final foi 180"
- Aluno D: "A soma é igual a  $180^\circ$ "
- Aluno E: "A soma do  $DAB$  e  $BCD$  e do  $ABC$  e do  $CDA$  dão  $180^\circ$ "



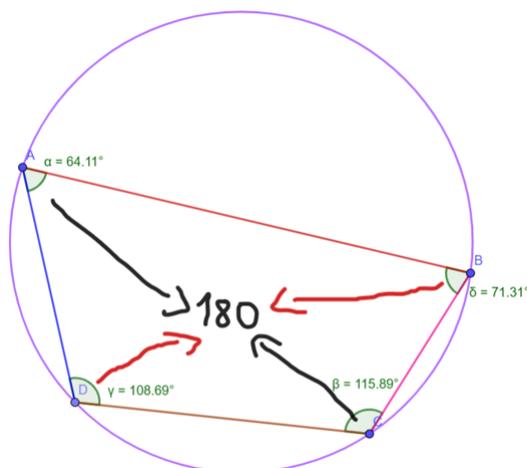
**Figura 5.14:** Construção da Etapa 2 - Atividade 2 - Aluno B



**Figura 5.15:** Construção da Etapa 2 - Atividade 2 - Aluno C

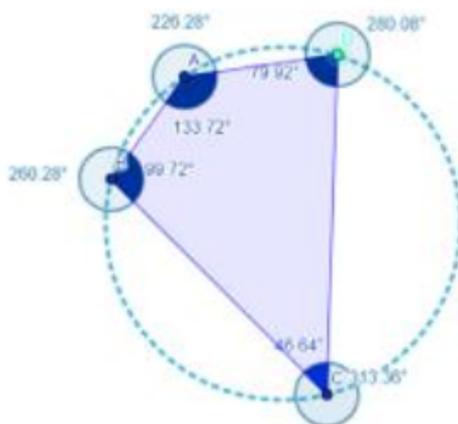


**Figura 5.16:** Construção da Etapa 2 - Atividade 2 - Aluno D



**Figura 5.17:** Construção da Etapa 2 - Atividade 2 - Aluno E

A soma dos ângulos opostos do quadrilátero construído pelo aluno A não foi exata, tendo ele encontrado valores aproximados a  $180^\circ$ . Como o estudante compartilhou sua construção um dia após a aula, não foi possível investigar o porquê de tal aproximação. O que podemos inferir é que ele não usou a ferramenta "Ponto em Objeto" para marcar os vértices do quadrilátero. Para responder à segunda pergunta, o mesmo aluno movimentou os vértices e compartilhou a imagem (figura 5.18). Nela, vemos que os valores também estão aproximados.



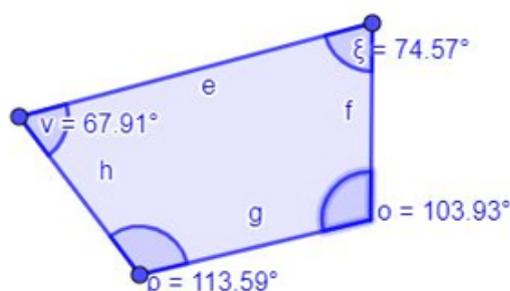
**Figura 5.18:** Construção da Etapa 2 (letra B) - Atividade 2 - Aluno A

Ao movimentarem os vértices do quadrilátero e verificarem a soma dos ângulos opostos, os estudantes disseram:

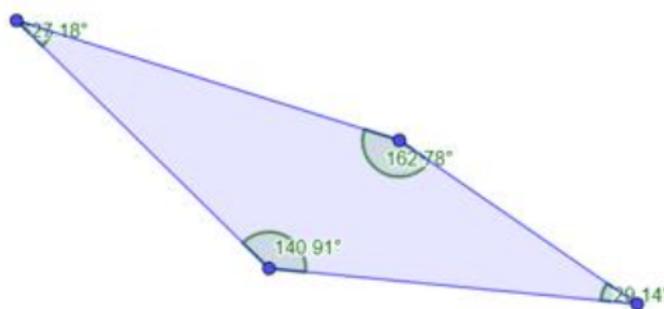
- Aluno B: "Eu observo que a soma dos dois ângulos continua sendo  $180^\circ$ "
- Aluno C: "Mesmo movendo o quadrilátero de forma que suas medidas fossem diferentes, o resultado da soma continuou sendo  $180^\circ$ "
- Aluno D: "A soma continua igual a  $180^\circ$ "
- Aluno E: "O resultado da soma não muda, continua  $180^\circ$ "

Finalmente, os estudantes deveriam dizer se o resultado se manteria caso o quadrilátero não fosse inscrito em uma circunferência. Neste momento, o estudante C construiu um trapézio não inscrito em uma circunferência (figura 5.19) e fez a seguinte observação: "Há possibilidade da minha resposta ser mantida, porém na maioria dos casos onde quadriláteros não são inscritos em uma circunferência a probabilidade de seus opostos serem suplementares é mínima". O que se nota, pela fala do aluno, é que ele reconhece que um quadrilátero não inscrito pode conter ângulos opostos suplementares, porém, isto não é uma regra como ocorre nos inscritíveis.

O aluno A também decidiu verificar o resultado em um quadrilátero não inscritível (figura 5.20), mas sua resposta à terceira pergunta do questionário mostra que a soma procurada por ele não era a dos pares de ângulos opostos, mas sim de todos os ângulos internos: "A diferença foi extremamente mínima, porém a soma dos ângulos internos desse meu quadrilátero foi igual a  $360,01^\circ$ . Sendo assim, a minha resposta da pergunta anterior não se mantém".



**Figura 5.19:** Verificação da Etapa 2 - Atividade 2 - Aluno C



**Figura 5.20:** Verificação da Etapa 2 - Atividade 2 - Aluno A

As respostas dos demais estudantes para a terceira pergunta do questionário da Etapa 2 foram:

- Aluno B: "A minha resposta não se manteria"
- Aluno D: "Se o quadrilátero não fosse inscrito na circunferência as medidas não necessariamente seriam iguais a  $180^\circ$ "
- Aluno E: "Minha resposta não se manteria".

Nesta etapa, os objetivos foram alcançados em sua plenitude, uma vez que um dos estudantes encontrou valores aproximados para os ângulos internos do polígono. Mesmo assim, podemos considerar que o resultado da tarefa foi satisfatório.

A aplicação da proposta de atividade transcorreu de maneira muito leve e rápida, o que pode trazer a ideia de que a atividade é muito simples. Porém, é importante ressaltarmos que o público ao qual a tarefa foi passada é bastante específico, tanto cognitivamente, como financeiramente. Todos os estudantes participantes da pesquisa já tiveram contatos prévios com a ferramenta em anos anteriores no laboratório de informática da escola, em aulas promovidas pela própria autora. Além disso, a autora faz uso recorrente do *software* nas aulas, mostrando suas ferramentas e possibilidades. Pode ser que no cenário de uma escola pública, por exemplo, as oportunidades não sejam as mesmas.

De qualquer forma, analisando previamente o público ao qual as atividades serão passadas, pode-se haver uma adequação das tarefas, dificultando-a ou omitindo passos das construções. Por exemplo, na Atividade 2, os passos da construção da Etapa 1 podem ser alterados para os seguintes:

- **Passo 1:** Construa uma circunferência e nela marque 3 pontos.
- **Passo 2:** Construa um segmento de reta cujas extremidades sejam dois dos pontos marcados no passo anterior.
- **Passo 3:** Pelo terceiro ponto marcado no 1º passo, trace uma reta paralela ao segmento construído no passo 2.
- **Passo 4:** Marque o ponto onde a reta intercepta a circunferência.
- **Passo 5:** Construa o quadrilátero cujos vértices são os quatro pontos marcados sobre a circunferência.
- **Passo 6:** Meça os lados do polígono.
- **Passo 7:** Meça os quatro ângulos do polígono.

Fazendo estas alterações, o questionário também deverá ser mudado, retirando-se os nomes dos pontos, dos segmentos e do quadrilátero. Dessa maneira, sem que se especifique os lados e os ângulos a serem comparados, os estudantes deverão pensar um pouco mais sobre as propriedades dos quadriláteros notáveis para conseguirem responder aos questionamentos. De toda forma, a aplicação da atividade mostra que muitas das propriedades dos quadriláteros que não são trabalhadas na escola básica podem ser inseridas no currículo, com o objetivo de aguçar a investigação e desenvolver o raciocínio lógico.

Outra percepção que se pode extrair da aplicação da atividade proposta é que o *GeoGebra* é uma ferramenta que acelera muito o estudo das propriedades, proporcionando não só o estudo de mais resultados num menor tempo, mas também despertando o interesse dos estudantes. O desenho geométrico tradicional, com régua, compasso e transferidor não pode ser substituído, pois ele traz resultados que no *software* parecem "mágicos". Mas aliar as duas ferramentas é o ideal.

## Conclusão

---

Este trabalho trouxe uma oportunidade há muito esperada pela autora: a de se discutir a classificação dos quadriláteros notáveis. Tudo teve início quando ela e outro professor dividiam turmas do 8º ano de um mesmo colégio. O próximo assunto a ser trabalhado naquele ano letivo eram os quadriláteros e, o professor, decidiu compartilhar slides feitos por ele para abordagem do conteúdo. Nestes slides, os paralelogramos eram considerados um tipo de trapézio, porém, a literatura adotada pela escola à época, abordava os paralelogramos de maneira desvinculada dos trapézios. A discussão entre a dupla de professores se estendeu aos demais membros da equipe de Matemática do colégio, mas jamais teve uma conclusão.

Desde então, temas semelhantes a este chamam a atenção da autora como, por exemplo, os triângulos isósceles e equiláteros que, assim como os trapézios e paralelogramos, podem ser ou não vinculados, dependendo da forma com que são definidos. Há professores que consideram que o fato de os equiláteros possuírem três lados congruentes faz com que eles possam ser classificados como um caso especial dos isósceles. Porém, uma vez que definimos os triângulos isósceles como sendo aqueles que possuem dois lados congruentes e um lado com medida diferente, exclui-se a possibilidade de classificarmos os equiláteros como isósceles.

Outro exemplo são os polígonos e linhas poligonais. Certa vez, durante uma aula de Geometria no 6º ano desta mesma escola, uma estudante questionou à autora se os polígonos são apenas o contorno das formas geométricas ou todo o seu interior. A dúvida da estudante levou a autora a buscar informações em livros e, anos depois, nas aulas do PROFMAT. A conclusão a que se chegou por ela foi a de que tudo depende da definição. Para minimizarmos estas dúvidas, podemos, por exemplo, utilizar os termos "região poligonal", para nos referirmos ao interior da figura, e "linha poligonal", ao mencionarmos somente o contorno dela. Porém, no dia a dia, estes pormenores acabam sendo esquecidos e tudo volta a ser chamado de polígono.

A escrita desta dissertação e a aplicação das atividades propostas mostram que muitos dos resultados interessantes sobre os quadriláteros não são sequer mencionados nas salas de aula da educação básica. Sabe-se que, atualmente, as escolas precisam seguir o currículo mínimo exigido pela Base Nacional Comum Curricular, a BNCC ([3]), que já é bem extenso e toma grande parte do cotidiano escolar. Porém, nas escolas, quase sempre, há um grupo de alunos amantes da Matemática e que nem sempre têm a oportunidade de desbravá-la para

além do básico da sala de aula. Para estes grupos, o estudo de alguns teoremas discutidos nesta dissertação, pode ser algo atrativo e propulsor para novas descobertas.

O desejo é que este trabalho contribua e enriqueça o estudo dos quadriláteros, seja na escola básica ou no ensino superior. Seus resultados podem trazer novas possibilidades de atividades para a sala de aula, além de desenvolverem o raciocínio e a escrita matemática.

# Bibliografia

---

- [1] Altshiller-Court, N. *College Geometry: An Introduction to the Modern Geometry of the Triangle and the Circle*. Dover publication, Inc., 2007.
- [2] Barbosa, J. L. M. *Geometria Euclidiana Plana*. SBM, 1999.
- [3] *Base Nacional Comum Curricular*. BRASIL. Ministério da Educação. 2018.
- [4] Brunheira, L. “Uma trajetória de aprendizagem para a classificação e definição de quadriláteros”. *Educação e Matemática, Revista da Associação de Professores de Matemática, Lisboa, Edição 145* (2017), pp. 33–37.
- [5] DE VILLIERS, M. *O papel e a função de uma classificação hierárquica de quadriláteros*. 1993.
- [6] Gulasekharam, F. H. V. “1508. A Note on Simson’s Pedal Line”. *The Mathematical Gazette* 25.263 (1941), pp. 58–60. URL: <http://www.jstor.org/stable/3606491>.
- [7] Hohenwarter, M. et al. *GeoGebra*. 2017. URL: <http://www.geogebra.org> (acesso em 22 de set. de 2021).
- [8] José Nicolau Pompeo, O. D. e. *Fundamentos de Matemática Elementar Volume 9*. Editora Saraiva, 2005.
- [9] Lago, R. C. *Quadriláteros Inscritíveis e os Teoremas de Simson-Wallace e de Steiner-Lehmus*. Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Tecnológica Federal do Paraná em Curitiba. 2018.
- [10] Rezende, C. S. *Pontos notáveis de quadriláteros*. Monografia de Especialização, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, Brasil. 2013.
- [11] Rezende, E. Q. F. e Queiroz, M. L. B. de. *Geometria euclidiana plana e construções geométricas*. Editora da UNICAMP, 2008.
- [12] Silva, E. A. da. *Teorema de Casey: Uma generalização do Teorema de Ptolomeu para quadriláteros inscritíveis*. Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal Rural de Pernambuco. 2016.