UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

ANDREZA NASCIMENTO DE FRANÇA MACIEL

A INTRODUÇÃO DO MÉTODO DA INDUÇÃO MATEMÁTICA NO ENSINO MÉDIO

BELÉM - PA
2021

ANDREZA NASCIMENTO DE FRANÇA MACIEL

A INTRODUÇÃO DO MÉTODO DA INDUÇÃO MATEMÁTICA NO ENSINO MÉDIO

Dissertação de Mestrado, apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, da Universidade Federal do Pará como pré-requisito como obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Francisco Paulo Marques Lopes

BELÉM - PA
2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará

Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

F814i França Maciel, Andreza Nascimento de.
A introdução do método da indução matemática no ensino médio / Andreza Nascimento de França Maciel. — 2021.
78 f.: il. color.

Orientador(a): Prof. Dr. Fransico Paulo Marques Lopes
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Belém, 2021.

1. Ensino de matemática. 2. Demonstrações matemáticas. 3. Método da indução matemática. I. Título.

CDD 510

ANDREZA NASCIMENTO DE FRANÇA MACIEL

A INTRODUÇÃO DO MÉTODO DA INDUÇÃO MATEMÁTICA NO ENSINO MÉDIO

Dissertação de Mestrado, apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, da Universidade Federal do Pará como pré-requisito como obtenção do título de Mestre em Matemática.

DATA DA AVALIAÇÃO: 18 / 08 / 2021

CONCEITO: APROVADA

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Francisco Paulo Marques Lopes
(Orientador - UFPA)

Prof. Dr. Paulo Vilhena da Silva
(

Prof. Dr. Ducival Carvalho Pereira
(Membro Externo – UEPA)

BELÉM-PA
2021

Dedico esse trabalho em memória da minha mãe Gladys Cristina, que em todos os momentos acreditou em mim. A minha família por todo incentivo e ajuda. Ao meu marido por seu amor e apoio incondicional.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus por ter me proporcionado essa oportunidade, e por ter me concedido força e coragem.

A minha família, por não só acreditarem em meus sonhos, mas por sonhá-los junto comigo.

Ao meu marido por ser meu grande companheiro, sempre me apoiando e acreditando em mim.

Ao meu orientador Dr. Francisco Paulo Marques Lopes pela orientação e contribuição para a realização desse trabalho, sempre de forma atenciosa e dedicada.

A Universidade Federal do Pará (UFPA), a Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) e ao Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), pela oportunidade de realização deste curso.

A todos meus professores pelos ensinamentos e contribuição para minha formação profissional.

Aos meus companheiros de curso pelo incentivo durante esse período, e por todo compartilhamento de conhecimento.

A Universidade Federal de Santa Maria (UFSM), professores e colegas, pelo tempo que estive com vocês.

“Educar verdadeiramente não é ensinar fatos novos ou enumerar fórmulas prontas, mas sim preparar a mente para pensar.”

(Albert Einstein)

RESUMO

A presente pesquisa tem como finalidade realizar uma discussão sobre a importância de se utilizar o Método da Indução Matemática no Ensino Médio enquanto procedimento didático utilizando resolução de problemas, que propicie ao estudante o domínio da linguagem matemática num contexto de argumentação, análise e deduções lógicas. Para tanto, fizemos uma pesquisa descritiva quanto à fundamentação teórica e as aplicações didáticas e dedutiva quanto à verificação das hipóteses levantadas. Partimos da premissa que possivelmente muitos professores de matemática estejam presos a um modelo de ensino em que o cumprimento do conteúdo curricular esteja acima do próprio conhecimento e o livro didático seja a única fonte de pesquisa para sua prática docente. Isso nos levou a concluir que dificilmente o método da indução é utilizado como ferramenta didática em demonstrações de proposições Matemáticas no Ensino Médio. Pois, em geral, os livros didáticos não promovem em seu escopo as demonstrações de proposições Matemáticas pelo Método da Indução. Infere-se daí, a necessidade de se produzir um material didático aos professores de Matemática que apresente aplicações de procedimentos didáticos utilizando resolução de problemas para o ensino e aplicação do Método da Indução nas demonstrações, levando em consideração os norteamentos dos PCNs e as diretrizes pedagógicas-curriculares da BNCC.

Palavras-chave: Método da Indução Matemática; Demonstrações Matemáticas; Ensino de Matemática.

ABSTRACT

This research aims to carry out a discussion on the importance of using the Mathematical Induction Method in High School as a didactic procedure using problem solving, that provides the student with mastery of the mathematical language in a context of argumentation, analysis and logical deductions. For that, we carried out a descriptive research regarding the theoretical foundation and the didactic and deductive applications regarding the verification of the raised hypotheses. We start from the premise that possibly many mathematics teachers are stuck to a teaching model in which the fulfillment of the curricular content is above their own knowledge and the textbook is the only source of research for their teaching practice. This led us to conclude that the induction method is hardly used as a didactic tool in demonstrations of Mathematical propositions in High School. Because, in general, textbooks do not promote in their scope the demonstration of Mathematical propositions by the Method of Induction. It is inferred from this, the need to produce a teaching material for Mathematics teachers that presents applications of didactic procedure using problem solving for teaching and applying the Induction Method in demonstrations, taking into account the guidelines of the PCN's and the pedagogical-curricular guidelines, of the BNCC.

Keywords: Mathematical Induction Method, Mathematical Demonstrations, Mathematics Teaching.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
FAETEC	Fundação de Apoio a Escolas Técnicas Estaduais do Estado do Rio de Janeiro
OBMEP	Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas
PCNs	Parâmetros Curriculares Nacionais
PROFMAT	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho possui a finalidade de realizar uma discussão sobre a importância de se utilizar o método da indução matemática no Ensino Médio como ferramenta didática para o desenvolvimento de algumas competências como: raciocinar logicamente para compreender conceitos e elaborar argumentos de intervenção em situações problemas a partir da "linguagem matemática".

Realizaremos esta pesquisa partindo do conceito de demonstração, qual a sua importância e quais são os benefícios e maiores dificuldades enfrentadas nesta área, seguido da definição do conceito de Indução Matemática e aplicações de procedimentos didáticos utilizando resolução de problemas em algumas áreas da matemática

Tal estudo se justifica pela necessidade de se apontar caminhos para o desenvolvimento das competências supra citadas enfatizando que ambas estão entre as recomendações apontadas pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) do Ensino Médio e estabelecidas como metas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

Para isso, fizemos um estudo descritivo dos fundamentos teóricos do Método da Indução Matemática apoiados num levantamento bibliográfico de alguns autores que pesquisaram sobre a temática, além disso, buscamos os norteamentos dos PCNS (2000) e as diretrizes pedagógicas-curriculares da BNCC (2018) para justificar à necessidade de se fazer demonstrações de proposições matemáticas no Ensino Médio utilizando o Método da Indução Matemática.

Segundo esses documentos, entre os objetivos do ensino da Matemática, nesse nível de ensino estão o desenvolvimento de competências que permitirão ao estudante a compreensão de conceitos, a análise e interpretação de situações problemas, a construção de argumentos lógicos a partir do domínio da linguagem matemática e a elaboração de estratégias que os permitam desenvolver estudos posteriores e intervir da realidade.

Outras hipóteses que justificam a necessidade deste estudo seguem de nossa vivência enquanto professores de Matemática no Ensino Médio onde observamos a grande dificuldade que nossos alunos apresentam na hora de conjecturar proposições, interpretar uma situação problema e apresentar argumentos consistentes de intervenção. Por outro lado, os professores se ressentem da falta de material didático adequado que os auxiliem no ensino de demonstrações de proposições matemáticas e fazem do livro didático sua única fonte de pesquisa para sua prática docente.

Na esteira de responder à última premissa, elaboramos um conjunto de aplicações de procedimentos didáticos utilizando resolução de problemas onde apresentamos várias demonstrações de proposições pelo Método da Indução que irão servir como base de entendimento desse método de demonstração, e algumas aplicações do Método da Indução que podem ser aplicadas no Ensino Médio, a fim de mostrar aos professores e estudantes que é possível inserir a indução matemática na Educação Básica, de modo que desperte o interesse, autonomia e curiosidade dos alunos para que eles resolvam problemas por seus próprios meios, estimulando neles o gosto pelo trabalho após a conquista da descoberta, gerando assim uma grande oportunidade aos professores.

2 DEMONSTRAÇÕES NO ENSINO MÉDIO

Neste capítulo abordaremos os seguintes assuntos: o uso de demonstração matemática como ferramenta de ensino, os apontamentos dos Parâmetros Curriculares Nacionais e da Base Nacional Comum Curricular para o ensino da matemática no Ensino Médio e algumas discussões de estudiosos desse assunto.

2.1 A pouca importância dada às demonstrações no ensino médio

Segundo D'Ambrósio (1989), os alunos passaram a acreditar que a aprendizagem da matemática se dá através de um acúmulo de fórmulas e algoritmos. Aliás, nossos alunos hoje acreditam que fazer matemática é seguir e aplicar regras. Para eles a matemática é um corpo de conceitos verdadeiros e estáticos, dos quais não se duvida ou questiona, e nem mesmo se preocupam em compreender porque funciona. Em geral, acreditam também, que esses conceitos foram descobertos ou criados por gênios.

Apesar dos diversos conceitos sobre demonstração, quando e como ela deve ser utilizada no processo de ensino de Matemática, há um consenso sobre sua importância ao longo da história para o desenvolvimento desta ciência. Sobre isso, são importantes às considerações apresentadas por Davis e Hersh (1985, p.178) no livro "A Experiência Matemática":

> Diz-se que a primeira demonstração na história da matemática foi dada por Thales de Mileto (600 a. C.). Ele demonstrou que o diâmetro de um círculo o divide em duas partes iguais. Ora, isso é uma afirmação tão simples que parece evidente por si própria. A genialidade, neste caso, foi perceber que uma demonstração é possível e necessária. O que torna uma demonstração mais do que simples pedantismo são suas aplicações a situações onde as afirmativas são muito menos transparentes. Na opinião de alguns, o nome do jogo da matemática é demonstração; sem demonstrações, nada de matemática. Na opinião de outros, isso é bobagem; há muitos jogos na matemática.

Para muitos estudiosos a observação e a demonstração formam a base do raciocínio científico, e para que isso aconteça em sala de aula, se faz necessário, que o professor adote um estilo em que o aluno possa se sentir envolvido com a referida disciplina, pois ele é o responsável por adotar em suas aulas as inovações contextualizadas e buscar do aluno a participação ativa com demonstrações e exemplos acoplando com a realidade vivenciada no dia a dia. Demonstrando exemplos práticos, com linguagem clara, chamando mais a atenção dos alunos e despertando sua curiosidade.

É necessário desafiar a curiosidade dos alunos para que eles resolvam problemas por seus próprios meios, estimulando neles o gosto pelo trabalho após a conquista da descoberta.

Isso gera uma grande oportunidade para os professores, porém essa oportunidade muitas vezes tem sido desperdiçada, onde a preocupação maior tem sido com a formalização ao invés da prática, com atividades rotineiras, monótonas, que não estimulam o desenvolvimento intelectual dos alunos.

> Nas décadas de 1960-1970, o ensino de matemática no Brasil e em outros países do mundo foi influenciado por um movimento de renovação conhecido como Matemática Moderna. [...] Apresentava uma matemática estruturada, apoiada em estruturas lógica, algébrica, topológica e de ordem, e enfatizava a teoria dos conjuntos. [...] Nesta reforma o professor falava, porém muitas vezes não seguro daquilo que dizia. O aluno não percebia a ligação que todas aquelas propriedades enunciadas tinham a ver com a matemática usada fora da escola. [...] Esse ensino passou a ter preocupações excessivas com formalização, distanciando-se das questões práticas. (ONUCHIC, 1999, p. 202-203).

Tudo na matemática deve ser provado antes que possa ser aceito como verdadeiro. Mesmo os fatos mais óbvios não são aceitos como fato, a menos que um matemático possa fornecer uma rigorosa prova, pois é a prova que define um teorema. Por este motivo entendemos que as demonstrações é parte fundamental no processo de aprendizagem, pois validam as verdades que lhes fora enunciada e contribui para a maturidade matemática do aluno.

Assim, surge à necessidade de favorecer um ensino que leve o educando a problematizar os mais variados conceitos abordados na referida disciplina escolar. O homem como ser social e integrante de uma cultura necessita do conhecimento matemático na sua relação interpessoal, muitas vezes não sendo perceptível a sua utilização. No entanto, ele o utiliza assim como utiliza a sua língua materna (CONCEIÇÂO, 2015).

Muitos professores geralmente ficam presos a um estilo de ensino que se baseia em apresentação de fórmulas, cálculos e equações, que não gera no aluno uma independência matemática, ou seja, o discente acaba não criando liberdade em buscar outras maneiras de solução. O problema desta situação não é a forma que o professor trabalha com fórmulas e cálculos, mas a maneira de serem apresentados sem a estratégia de possibilitar o seu entendimento e utilização.

Soares *et al*. (2015, p.11) realizaram uma pesquisa onde oito de dez docentes afirmaram que raramente exploravam as demonstrações em sala de aula, pois, segundo eles, os alunos não mostravam o menor interesse em compreender tais processos. Mas, os docentes que disseram explorar as demonstrações, enfatizaram que muitos alunos gostavam de compreender as demonstrações, pois, assim compreendiam o processo de construção do conhecimento matemático.

De Villiers (2002) comenta que é costume no ensino da matemática fazer uma abordagem na qual as demonstrações aparecem como um recurso para eliminar as dúvidas. Mas ele alerta que a demonstração tem outras funções em matemática:

a) verificação: convencimento próprio e dos outros a respeito da veracidade de uma afirmação;
b) explicação: compreensão do por que uma afirmação é verdadeira;
c) descoberta: de novas teorias, conjecturas ou resultados a partir da tentativa de se demonstrar uma conjectura;
d) comunicação: negociação do significado de objetos matemáticos;
e) desafio intelectual: satisfação pessoal pelo êxito na demonstração de um teorema;
f) sistematização: organização de resultados num sistema dedutivo de axiomas, conceitos e teoremas.

Analisando todas as teorias apresentadas, podemos compreender que é possível e necessária a exploração da demonstração matemática na educação básica. Acreditamos ser essencial que o docente de Matemática faça com que os estudantes se convençam da veracidade das propriedades apresentadas.

2.2 O que os Parâmetros Curriculares Nacionais dizem sobre a veracidade das proposições e demonstrações

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais, no ensino médio o aluno se encontra com mais maturidade para que os professores possam tratar os assuntos com mais profundidade as habilidades, competências e valores desenvolvidos nos educandos para que sirvam como exercício de intervenções e julgamentos práticos.

Cabe à Matemática do Ensino Médio apresentar ao aluno o conhecimento de novas informações e instrumentos necessários para que seja possível a ele continuar aprendendo. Sem dúvida, a formação do Ensino Médio deve auxiliar no desenvolvimento da autonomia e da capacidade de pesquisa, para que cada aluno possa confiar em seu próprio conhecimento, e esse domínio se dá através de um processo lento e trabalhoso através de resoluções de problemas, elaborações de conjecturas, capacidade de argumentação e interpretação.

> […] saibam usar a Matemática para resolver problemas práticos do cotidiano; para modelar fenômenos em outras áreas do conhecimento; compreendam que a Matemática é uma ciência com características próprias, que se organiza via teoremas e demonstrações; percebam a Matemática como um conhecimento social e

> historicamente construído; saibam apreciar a importância da Matemática no desenvolvimento científico e tecnológico (BRASIL, 2006, p. 69).

Dentre vários outros objetivos do ensino da matemática no ensino médio, temos:

a) compreender os conceitos, procedimentos e estratégias matemáticas que permitam a ele desenvolver estudos posteriores e adquirir uma formação científica geral;
b) expressar-se oral, escrita e graficamente em situações matemáticas e valorizar a precisão da linguagem e as demonstrações em matemática.

O encadeamento lógico é muito valorizado pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs). Consideram-no essencial para o desenvolvimento da aprendizagem do aluno. A lógica está ligada à matemática e não se pode dizer que a demonstração está inserida em um contexto educativo sem que haja um encadeamento lógico onde o aluno esteja desenvolvendo a criatividade, a intuição, a capacidade de analisar e criticar, podendo assim interpretar os fatos e os fenômenos. Sem que haja possibilidade de desenvolvimento da capacidade de argumentar dentro de um determinado espaço de conhecimento adquirido por ele no decorrer de sua trajetória escolar a demonstração perde a função formativa. Ela precisa possibilitar que o estudante possa evoluir para a realização de demonstrações formais por iniciativa própria (BRASIL, 1998).

Tem-se como objetivo trabalhar nos alunos do ensino médio algumas competências e habilidades como: Identificar o problema (compreender enunciados, formular questões etc), procurar, selecionar e interpretar informações relativas ao problema, formular hipóteses e prever resultados, selecionar estratégias de resolução de problemas, interpretar e criticar resultados numa situação concreta, distinguir e utilizar raciocínios dedutivos e indutivos, fazer e validar conjecturas, experimentando, recorrendo a modelos, esboços, fatos conhecidos, relações e propriedades, discutir ideias e produzir argumentos convincentes.

> Aprender Matemática de uma forma contextualizada, integrada e relacionada a outros conhecimentos traz em si o desenvolvimento de competências e habilidades que são essencialmente formadoras, à medida que instrumentalizam e estruturam o pensamento do aluno, capacitando-o para compreender e interpretar situações, para se apropriar de linguagens específicas, argumentar, analisar e avaliar, tirar conclusões próprias, tomar decisões, generalizar e para muitas outras ações necessárias à sua formação (BRASIL, 2006, p. 111).

Logo, segundo Correia (2018) os PCNs evidenciam que o ensino de Matemática na Educação Básica deve garantir o desenvolvimento de certas capacidades aos alunos, tais como: observação, estabelecimento de relações, comunicação (diferentes linguagens), argumentação, validação de processos e o estímulo às formas de raciocínio como intuição, indução, dedução, analogia e estimativa.

2.3 O que diz a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) para o Ensino da Matemática

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) da área de Matemática e suas Tecnologias propõe a consolidação, a ampliação e o aprofundamento das aprendizagens essenciais desenvolvidas no Ensino Fundamental. Para tanto, propõe colocar em jogo, de modo mais inter-relacionado, os conhecimentos já explorados na etapa anterior, a fim de possibilitar que os estudantes construam uma visão mais integrada da Matemática, ainda na perspectiva de sua aplicação à realidade.

Considerando a área da Matemática e suas tecnologias no ensino médio, o seu objetivo será de aproveitar toda capacidade já formada por esses estudantes durante o ensino fundamental promovendo a expansão do conhecimento matemático iniciado na etapa anterior, ou seja, devem ser utilizadas técnicas mais elaboradas que permitam aos estudantes formular e resolver problemas em diversos contextos com mais recursos e autossuficiência.

> Para que esses propósitos se concretizem nessa área, os estudantes devem desenvolver habilidades relativas aos processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas. Para tanto, eles devem mobilizar seu modo próprio de raciocinar, representar, comunicar, argumentar e, com base em discussões e validações conjuntas, aprender conceitos e desenvolver representações e procedimentos cada vez mais sofisticados (BRASIL, 2018).

Assim, para o desenvolvimento de habilidades relacionadas ao raciocínio, é necessário investigar, explicar e justificar as soluções apresentadas para os problemas, enfatizando os processos de argumentação matemática e expressando a construção da sua argumentação para justificar o raciocínio usado.

Para que o aluno tenha essa maturidade matemática espera-se que conheçam diversas possibilidades de resoluções e possam mobilizá-las para modelar situações diversas por meio da linguagem específica da matemática, verificando que os recursos dessa linguagem são mais apropriados e seguros na busca de soluções e respostas e, ao mesmo tempo, promover o desenvolvimento de seu próprio raciocínio.

> Com relação à competência de argumentar, seu desenvolvimento pressupõe também a formulação e a testagem de conjecturas, com a apresentação de justificativas, além dos aspectos já citados anteriormente em relação às competências de raciocinar e representar. Assim, as aprendizagens previstas para o Ensino Médio são fundamentais

> para que o letramento matemático dos estudantes se torne ainda mais denso e eficiente, tendo em vista que eles irão aprofundar e ampliar as habilidades propostas para o Ensino Fundamental e terão mais ferramentas para compreender a realidade e propor as ações de intervenção especificadas para essa etapa (BRASIL, 2018).

Diante de tudo que foi exposto, a BNCC levantou cinco competências específicas da matemática e suas tecnologias para o ensino médio, considerando o foco deste trabalho listaremos três que são voltadas para a habilidade de argumentação matemática:

a) **utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente;**

As habilidades indicadas para o desenvolvimento dessa competência específica estão relacionadas à interpretação, construção de modelos, resolução e formulação de problemas matemáticos. Para resolver problemas, os estudantes podem, no início, identificar os conceitos e procedimentos matemáticos necessários ou os que possam ser utilizados na chamada formulação matemática do problema. Depois disso, eles precisam aplicar esses conceitos, executar procedimentos e, ao final, compatibilizar os resultados com o problema original, comunicando a solução aos colegas por meio de argumentação consistente e linguagem adequada.

Certos problemas, o tipo de resolução estará explicita no enunciado, cabendo ao aluno apenas adaptar o que lhe foi dito e aplicar o conceito, exigindo portanto maior grau de interpretação. Porém, outros problemas irão exigir do estudante conhecimentos e habilidades para identificar conceitos e definir um processo de resolução.

> Em alguns desses problemas, os estudantes precisam identificar ou construir um modelo para que possam gerar respostas adequadas. Esse processo envolve analisar os fundamentos e propriedades de modelos existentes, avaliando seu alcance e validade para o problema em foco. Essa competência específica considera esses diferentes tipos de problemas, incluindo a construção e o reconhecimento de modelos que podem ser aplicados (BRASIL, 2018).

b) **Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas;**

Segundo a BNCC As habilidades vinculadas a essa competência específica tratam da utilização das diferentes representações de um mesmo objeto matemático na resolução de problemas em vários contextos, como os socioambientais e da vida cotidiana, tendo em vista que elas têm um papel decisivo na aprendizagem dos estudantes.

Esta competência pode ser compreendida como forma de complemento das demais, pois quando se utiliza, interpreta e resolve situações problemas é necessário a comunicação das ideias entre os estudantes por meio da linguagem matemática, e a construção desta habilidade que os permite transitar entre os diversos registros de representações vai gerar nos alunos uma compreensão mais sólida dos conceitos matemáticos. Ou seja a representação de uma mesma situação em diferentes formas vai estabelecer conexões que os tornem aptos a resolver problemas matemáticos utilizando diversas estratégias.

Quando os estudantes compreendem as ideias que as representações matemáticas expressam, eles passam a ganhar uma visão matemática mais ampla que potencializa sua capacidade de resolver problemas e argumentar.

> Portanto, para as aprendizagens dos conceitos e procedimentos matemáticos, é fundamental que os estudantes sejam estimulados a explorar mais de um registro de representação sempre que possível. Eles precisam escolher as representações mais convenientes a cada situação, convertendo-as sempre que necessário. A conversão de um registro para outro nem sempre é simples, apesar de, muitas vezes, ser necessária para uma adequada compreensão do objeto matemático em questão, pois uma representação pode facilitar a compreensão de um aspecto que outra não favorece (BRASIL, 2018).

c) **investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.**

Segundo a BNCC o desenvolvimento dessa competência específica pressupõe um conjunto de habilidades voltadas às capacidades de investigação e de formulação de explicações e argumentos, que podem emergir de experiências empíricas, induções decorrentes de investigações e experimentações.

> Ao formular conjecturas com base em suas investigações, os estudantes devem buscar contraexemplos para refutá-las e, quando necessário, procurar argumentos para validá-las. Essa validação não pode ser feita apenas com argumentos empíricos, mas deve trazer também argumentos mais ‘formais’, incluindo a demonstração de algumas proposições. Tais habilidades têm importante papel na formação matemática dos estudantes, para que construam uma compreensão viva do que é a Matemática, inclusive quanto à sua relevância (BRASIL, 2018).

Ou seja, o aluno passa a perceber que existe um conjunto de conhecimentos que podem ser inter-relacionados, e construído através de seus objetos de estudo. E, através do desenvolvimento desta competência o aluno passa a enxergar a atividade matemática como uma atividade humana, sujeita a acertos e erros, que é construída através de um processo de buscas, conjecturas, exemplos e aplicações.

2.4 Por que nossos alunos têm dificuldade de conjecturar proposições e de criar argumentos lógicos para a resolução de problemas?

A Matemática ao se configurar para os alunos como algo difícil de compreensão, sendo de pouca utilidade prática, produz representações e sentimentos que vão influenciar no desenvolvimento da aprendizagem. Vitti (1999, p.19) afirma:

> O fracasso do ensino de matemática e as dificuldades que os alunos apresentam em relação a essa disciplina não é um fato novo, pois vários educadores já elencaram elementos que contribuem para que o ensino da matemática seja assinalado mais por fracassos do que por sucessos.

Segundo Polya (1977) para resolução de problemas existem quatro fases fundamentais: primeiro, é preciso compreender o problema, segundo, temos de ver como os diversos itens estão inter-relacionados, como a incógnita está ligada aos dados, para termos a ideia da resolução, para estabelecermos um plano. Terceiro, executamos o nosso plano. Quarto, fazer uma reflexão e discussão a respeito da resolução completa.

A dificuldade em conjecturar proposições e de criar argumentos lógicos para resolução de problemas parte da dificuldade dos alunos em realizar por completo as quatro etapas, muitos desejam pular diretamente para a parte de realizar cálculos sem ter compreendido o problema, como se a matemática fosse algo pronto em sua cabeça. Deixar para trás qualquer uma das quatro fases significa perder algo para o crescimento matemático do aluno. É geralmente inútil executar detalhes sem perceber a conexão principal ou sem ter feito uma espécie de plano. Muitos enganos podem ser evitados se, na execução do seu plano, o estudante verificar cada passo. Muitos dos melhores efeitos podem ficar perdidos se ele deixar de reexaminar e de reconsiderar a solução completa.

Para que o aluno consiga realizar uma conjectura é necessário estar em condições de identificar as partes principais do problema, a incógnita, os dados, e a condicionante. Para isso é necessário que o professor estimule o aluno a pensar: qual é a incógnita? O que o enunciado lhe fornece como informação? E qual a condicionante?

> Os materiais indispensáveis à resolução de um problema matemático são certos itens relevantes do conhecimento matemático já adquirido, tais como problemas anteriormente resolvidos e teoremas anteriormente demonstrados. Assim sendo, deve-se muitas vezes começar o trabalho pela indagação: Conhece um problema relacionado? (POLYA,1977).

Boero *et al*. (1996) discutem o processo mental subjacente à produção de afirmações e provas por alunos. Nessa pesquisa, o problema consistiu em verificar se a maioria dos alunos neste nível de escolaridade pode produzir teoremas (conjecturas e provas) se eles fossem colocados sob condições de implementar um processo com as seguintes características: durante a produção da conjectura, o estudante progressivamente trabalha sua hipótese por meio de uma atividade argumentativa intensa misturada funcionalmente com a justificação da plausibilidade de suas escolhas; durante o estágio seguinte da prova, o estudante organiza, por meio de relações construídas de maneira coerente, algumas justificativas (“argumentos”) produzidas durante a construção da afirmação de acordo com uma corrente lógica. Os resultados do estudo de Boero *et al*. (1996) mostraram que os alunos apresentam condições de fazer conjecturas e generalizações sobre propriedades matemáticas.

De Villiers (2002) comenta que é costume no ensino da matemática fazer uma abordagem na qual as demonstrações aparecem como um recurso para eliminar as dúvidas. Porque não tratar as demonstrações como parte fundamental do ensino matemático se é um elemento tão importante para a maturidade matemática do estudante?

Embora a resolução de problemas seja valorizada, para muitos professores parece difícil de se trabalhar com ela pois os mesmos relatam que os alunos tem dificuldades em resolver problemas, como afirma Dante (2009), é comum alunos resolverem operações e saber fórmulas e não conseguir aplicá-los na hora de resolver um problema.

O enfrentamento de desafios desperta no aluno interesse para buscar e solucionar problemas, isso é peça fundamental para o ensino da matemática, pois o pensar se desenvolve justamente quando o indivíduo está em meio a uma nova descoberta.

> Essa competência não se desenvolve quando propomos apenas exercícios de aplicação dos conceitos e técnicas matemáticos, pois, neste caso, o que está em ação é uma simples transposição analógica: o aluno busca na memória um exercício semelhante e desenvolve passos análogos aos daquela situação, o que não garante que seja capaz de utilizar seus conhecimentos em situações diferentes ou mais complexas (BRASIL, 2006).

Sabemos que isso é verdade, pois em sala de aula nossos alunos acabam falhando quando propomos a análise de situações que devem ser relacionados diversos conceitos ou quando é necessário que eles tenham que tomar decisões entre os diversos caminhos de resolução. Podemos notar que mesmo quando possuem conceitos suficientes para a tomada de decisão, algumas vezes não combinam as informações corretas, desanimam e esperam pela resolução do professor, pois muitos deles hoje não se permitem tentar e não confiam em suas próprias formas de pensar.

> Na resolução de problemas, o tratamento de situações complexas e diversificadas oferece ao aluno a oportunidade de pensar por si mesmo, construir estratégias de resolução e argumentações, relacionar diferentes conhecimentos e, enfim, perseverar na busca da solução. E, para isso, os desafios devem ser reais e fazer sentido. Isso não significa que os exercícios do tipo “calcule...”, “resolva...” devam ser eliminados, pois eles cumprem a função do aprendizado de técnicas e propriedades, mas de forma alguma são suficientes para preparar os alunos tanto para que possam continuar aprendendo, como para que construam visões de mundo abrangentes ou, ainda, para que se realizem no mundo social ou do trabalho. (BRASIL, 2006).

2.5 O professor tem dificuldade de ensinar através do uso de demonstrações?

Diante de todas os benefícios de incluir o uso de demonstrações matemáticas no ensino, qual seria então as dificuldades encontradas pelo professor para não conseguir colocar em prática? É preciso se levar muitas questões em relevância para se responder essa pergunta.

É o que afirma Silva (2012, p. 51): “Não é fácil ensinar matemática através da resolução de problemas. As atividades devem ser planejadas a cada dia e o professor deve considerar a compreensão do aluno e a necessidade do currículo.” Muitos professores utilizam os problemas do livro didático e nem sempre o interesse do aluno é despertado já que “os problemas não têm desempenhado seu verdadeiro papel no ensino, pois na melhor das hipóteses, são utilizados apenas como forma de aplicação de conhecimentos adquiridos anteriormente pelos alunos.” (BRASIL, 1998, p. 40).

O primeiro problema que podemos citar é com relação a formação dos professores, pois com o passar dos anos surgiram inúmeras faculdades, universidades e cursos específicos na área da educação. Porém, há de se questionar a qualidade e não a quantidade. Será realmente que ocorre esta preocupação? O processo de formação destes profissionais deve ser repensado e criticamente analisado. O professor de matemática está preparado para formar um aluno crítico e capaz de conjecturar proposições?

Porém, sabemos também que nosso país está repleto de professores qualificados, conscientes da sua função de educador e preparados para uma boa formação dos alunos, mas ainda assim sofrem com barreiras que podem acabar atrasando ou comprometendo seu plano de aula.

Segundo Antunes e Jungblut (2008) sabe-se também a realidade das escolas públicas de hoje, que atendem crianças na sua maioria carentes, cujos pais muitas vezes são analfabetos e não possuem os conhecimentos necessários ou possuem uma carga horária de trabalho alta para conseguir auxiliar seus filhos nos deveres escolares. Sendo assim, onde fica o papel das escolas e de seus profissionais neste percurso de conhecimento?

É de conhecimento de todos também que muitas escolas apresentam um quadro de professores comprometido, infelizmente onde as crianças se sentem abandonadas pela educação. Diante de tudo isso é certo que é preciso se melhorar as condições de trabalho, infra estrutura, quantidade de alunos por sala, melhor apoio pedagógico e salários mais dignos a profissão.

Esses desafios, têm ocasionado a desvalorização profissional da educação pela sociedade. Nesse cenário, é importante destacar que, na perspectiva de Nóvoa (1992), a formação docente deve estimular uma perspectiva crítico-reflexiva, fornecendo aos professores os meios de um pensamento autônomo e que facilite as dinâmicas de auto formação participada. Assim sendo, estar nesse processo de formação implica investimento pessoal, trabalho livre e criativo com vista à construção de identidade profissional.

São muitas questões, recomendações, operações mentais a serem levadas em conta por um professor em sala de aula. Segundo Pólya (1977), ao procurar realmente ajudar o aluno, com descrição e naturalidade, o professor é repetidamente levado a fazer as mesmas perguntas e a indicar os mesmos passos. Assim, em inúmeros problemas, temos de indagar: Qual é a incógnita? Podemos variar as palavras e indagar a mesma coisa de muitas maneiras diferentes: Do que é que se precisa? O que é que se quer? O que é que se deve procurar? A finalidade destas indagações é focalizar a atenção do aluno na incógnita. Algumas vezes, obtém-se o mesmo efeito de maneira mais natural, com uma sugestão: Considere a incógnita! A indagação e a sugestão visam ao mesmo objetivo: ambas tendem a provocar a mesma operação mental.

Todas estas discussões nos levam a pensar no trabalho docente, o que realmente interessa no aprendizado do aluno: a repetição de fórmulas e questões ou o aprendizado para vida com um ser crítico e pronto a realmente compreender o que lhe pede.

O educador que tem por objetivo desenvolver nos alunos a capacidade de resolver problemas, deve estimular nas suas mentes algum interesse e lhes proporcionar oportunidade de praticar. Com isso, o estudante acabará descobrindo o objetivo do seu estudo, e ao colocar em prática, conquistará algo mais importante do que o simples conhecimento de um fato matemático qualquer.

> Um dos primeiros deveres do professor é não dar aos seus alunos a impressão de que os problemas matemáticos têm pouca relação uns com os outros, de que nenhuma relação têm com qualquer outra coisa. Surge uma oportunidade natural de investigar as relações de um problema quando fazemos o retrospecto de sua resolução. Os estudantes acharão realmente interessante a reflexão se eles tiverem feito um esforço honesto e ficarem conscientes de terem resolvido bem o problema. Neste caso, ficarão ansiosos para ver o que mais poderão conseguir com aquele esforço e como poderão, da próxima vez, fazer tão bem quanto desta. O professor deve encorajar os alunos a imaginar casos em que poderão utilizar outra vez o procedimento usado ou o resultado obtido. É possível utilizar o resultado, ou o método, em algum outro problema? (PÓLYA, 1977)

Portanto, o professor deve estar pronto para as mudanças educacionais e à superação de paradigmas que existem em sua prática docente, para um melhor desenvolvimento do aluno e da construção de um educando pronto a questionar, aplicar conceitos e demonstrar.

3 PRINCÍPIO DA INDUÇÃO MATEMÁTICA

Os números naturais tiveram sua origem no oriente médio, a partir do momento que foi surgindo a necessidade de realizar processos rápidos de contagem para acompanhar o progresso da sociedade. De início quando os pastores precisavam controlar o rebanho, utilizavam pedras para controle dos animais, foi de onde surgiu a palavra cálculo, que é derivada da palavra latina *calculus*, que significa pedrinha.

A contagem não era feita apenas com pedras, mas também com talhes em ossos, desenhos em cavernas, marcas nas paredes, nós em cordas, etc. Porém, ao longo dos anos, as quantidades foram sendo representadas por outras formas, como, por símbolos, gestos, dentre outros.

> A origem dos números naturais se remete desde os tempos mais antigos, pela necessidade do ser humano de contar seus objetos, fazendo comparações dos seus conjuntos de objetos com valores abstratos que tornaram mais organizados e preciso a noção de quantidade. E por conta desse processo de contagem temos como consequência uma sequência numérica. Tomando como números naturais os valores 1, 2, 3, 4, ... e como o conjunto desses valores, um conjunto, chamado de conjunto dos naturais, e daí $\mathbb{N}=\{1, 2, 3, 4, ...\}$. Mas ainda precisamos ter uma construção mais consistente do que seja o conceito de números naturais (FÉLIX, 2015, p.12).

Em 1883, o matemático alemão Georg Cantor[1], responsável por grande parte da fundamentação das teorias modernas de conjuntos e de cardinalidade, conceituou número cardinal (ou seja, número de elementos). Assim, o conceito (abstrato) de número natural emerge como uma sofisticação dos problemas concretos de contagem (RIPOLL; RANGEL; GIRALDO, 2016).

Um número natural é um "rótulo" dado a todos os conjuntos de objetos que podem ser postos em correspondência um a um entre si, isto é, que têm a mesma quantidade de elementos. Portanto, um número natural é um atributo abstrato que todos esses conjuntos têm em comum – independentemente da espécie dos objetos contados (RIPOLL; RANGEL; GIRALDO, 2016). Assim, um número natural é um atributo generalizado de uma quantidade de objetos, como por exemplo, o número seis, é a propriedade que permanece, de qualquer coleção de objetos, quando desconsideramos todas as características, relações e organização desses objetos, portanto o número natural 6 não são os seis quadros, nem as seis caixas, nem os seis cadernos, logo, não podemos tocar e nem sentir o número seis, podemos apenas entendê-lo como uma

1 Matemático alemão nasceu em São Petersburgo, Rússia, nasceu no dia 3 de março de 1845 e morreu no dia 6 de janeiro de 1918.

propriedade que é compartilhada por essas coleções e por todas as outras que podem ser postas em correspondência um a um com elas.

Os números constituem um dos principais objetos de estudo da matemática e são encontrados nos seus diversos segmentos. Segundo Giraldo, Ripoll e Rangel (2014, p. 23) os números naturais estão certamente entre os objetos mais elementares de toda a matemática, por este motivo, uma parte significativa da "alfabetização matemática" é dada através de estudo desses números, sua escrita, suas operações elementares e resoluções de problemas utilizando estas operações.

Segundo Freitas (2013, p.15) apesar da importância do conjunto dos números naturais, esse conhecimento não é suficiente para o estudo de toda a matemática e não atende à todas as necessidades práticas da vida cotidiana. No entanto, é a partir de $\mathbb{N}$ e de suas propriedades que podemos construir os principais conjuntos numéricos usados na educação básica.

No conjunto dos números naturais valem dois princípios fundamentais: o Princípio da Boa Ordem e o Princípio da Indução Matemática. Estes, apesar de poderem ser aplicados em situações-problemas distintas, são matematicamente equivalentes. De fato, se consideramos o princípio da boa ordenação como sendo um postulado podemos deduzir o axioma de indução e, reciprocamente, se consideramos o axioma de indução como sendo um postulado podemos deduzir o princípio da boa ordenação.

O Princípio da Indução é um eficiente instrumento para a demonstração de fatos referentes aos números naturais, é um método ideal para provar que certos fatos envolvendo números naturais são válidos para todos eles. Por isso deve-se adquirir prática em sua utilização. Por outro lado, é importante também conhecer seu significado e sua posição dentro da Matemática. Entender o Princípio da Indução é praticamente o mesmo que entender os números naturais (LIMA, 1988, p. 26).

Imagine uma fila com infinitos dominós, um atrás do outro. Suponha que eles estejam de tal modo distribuídos que, uma vez que um dominó caia, o seu sucessor na fila também caia. O que acontece quando derrubamos o primeiro dominó? Apesar da simplicidade da pergunta acima ela traz em sua essência toda a ideia usada no Método da Indução Matemática. Esse método é uma das grandes armas do matemático moderno e tem utilidade na solução de vários problemas (CORCHO *et al.*, 2006, p.111).

A imagem a seguir demonstra o conceito de Indução Matemática em forma de arte, que mostra uma criança, numa espécie de escada, dando um passo de cada vez, onde a pintura sugere que o número de degraus não termina nunca, ou seja os degraus serão infinitos, quer dizer então que a criança vai passar do degrau n, para o degrau $n + 1$, demonstrando o conceito de sucessor de um número e do Princípio da Indução Matemática.

Figura 1 – Pintura Infinita

Fonte: Alejandra Duque-Estrada, Pintura Infinita, 1970, Acrílico sobre tela, 19,7 L x 23,6 A

Para explicar o que a imagem retrata sobre o princípio da indução, suponha que sejam verdadeiras as seguintes afirmações sobre suas habilidades de subir escadas, a primeira é que a criança pode alcançar o primeiro degrau, e a segunda é que ao chegar a um degrau qualquer, isto implica que a criança sempre pode alcançar a um degrau seguinte. Portanto, pela primeira afirmação, sabe-se que a criança pode chegar ao primeiro degrau, pela segunda sentença, é garantido que ela chegue ao segundo degrau, novamente pela segunda sentença é garantido que ela chegue ao terceiro degrau, e assim sucessivamente.

Formalizaremos este conceito utilizando uma axiomática, método que, apesar de ser considerado uma construção, na verdade, apenas assume a existência do conjunto dos naturais, satisfazendo axiomas que caracterizam rigorosamente a ideia intuitiva. Em outras palavras, assumiremos a existência do conjunto e mostraremos que ele obedece a tais axiomas. Esta axiomatização foi dada por Giuseppe Peano, no final do século XIX, e se apresenta aqui de forma adaptada a simbologia matemática atual (MACHADO, 2014, p. 15).

3.1 Axiomas de Peano

Giuseppe Peano [2]publicou em 1889 os seus axiomas. Ele constatou que toda a teoria dos números naturais pode ser desenvolvida a partir de quatro fatos básicos, denominados Axiomas de Peano. A partir destes princípios, é possível descrever, de forma precisa e concisa, todos os números naturais. Deste modo, os quatro axiomas elaborados por Giuseppe Peano permitem a construção axiomática dos naturais (FREITAS, 2013, p.17).

O conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais tem toda sua estrutura algébrica assentada sobre quatro propriedades fundamentais, chamadas de axiomas[3] de Peano. Desses axiomas, decorrem todas as afirmações verdadeiras que se podem fazer sobre esses números, algumas como consequências lógicas imediatas outras fazendo uso de algum método de demonstração entre os quais está o método da indução.

Esses axiomas são carregados de uma formalização matemática que, numa primeira leitura, podem parecer complicados. Por isso, organizamos didaticamente nosso texto, apresentando um breve comentário explicativo ao final de cada axioma. Numa linguagem mais direta e objetiva, podemos dizer que todo número natural $n \in \mathbb{N}$ pode ser construído a partir desses axiomas, isto é, o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais é caracterizado pelas seguintes propriedades:

Axioma 3.1.1 Existe uma função $s: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, que associa a cada $n \in \mathbb{N}$ um elemento $s(n) \in \mathbb{N}$, chamado o sucessor de n;

A definição da função $s: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, prova que todo número natural possui um único sucessor e que o cada sucessor também é um número natural.

Axioma 3.1.2 A função $s: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é injetiva;

O fato da função $s: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ser injetiva, permite afirmar que números naturais diferentes possuem sucessores diferentes, pois a função s leva elementos diferentes à imagens diferentes. (Ou ainda: se dois números naturais têm o mesmo sucessor, então eles são iguais.)

Axioma 3.1.3 Existe um único elemento 1 no conjunto $\mathbb{N}$, tal que $1 \neq s(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$;

Existe um único número natural que não é sucessor de nenhum outro, isto é, não existe um número natural que o anteceda. Este número é representado pelo símbolo 1 e chamado de "número um".

---

[2] Nasceu no dia 27 de agosto de 1858 em Cuneo, Piemont, Itália, e morreu em 20 de abril de 1932 em Turin, Itália. Foi o fundador da lógica simbólica e o centro de seus interesses foram os fundamentos da matemática e o desenvolvimento de uma linguagem lógica formal.

[3] Premissa considerada necessariamente evidente e verdadeira, fundamento de uma demonstração, porém ela mesma indemonstrável.

Axioma 3.1.4 Se um subconjunto $X \subset \mathbb{N}$ é tal que $1 \in X$ e $s(X) \subset X$, então $X = \mathbb{N}$.

Este Axioma é chamado de axioma da indução, ele significa que se um conjunto de números naturais contém o número 1 e, além disso, contém o sucessor de cada um de seus elementos, então esse conjunto coincide com $\mathbb{N}$, isto é, contém todos os números naturais. Este axioma nos fornece uma arma muito poderosa para realizar demonstrações de propriedades envolvendo os números naturais, que são chamadas de provas por indução.

Observe que, como estamos chamando de $\mathbb{N}$ o conjunto dos números naturais, a notação $n \in \mathbb{N}$ significa que n é um número natural.

Os algarismos 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 são as notações usadas para indicar, respectivamente, os seguintes sucessores: $2 = s(1),\ 3 = s(2), 4 = s(3), 5 = s(4)$, e assim por diante. A mesma ideia se aplica aos demais números naturais. Assim, aplicando sucessivas vezes o procedimento de tomar o sucessor $s(n)$, obtém-se todos os números naturais. (FREITAS, 2013, p. 18).

3.2 Princípio da Indução

Temos então que o Princípio da Indução é dado pelo seguinte Teorema:

Teorema 3.2.1. (Princípio da Indução) Seja $P(n)$ uma sentença aberta em n. Se $P(n)$ satisfaz às condições:

i) $P(1)$ é verdadeira;
ii) Para todo $n \in \mathbb{N}$, se $P(n)$ é verdadeira, implica $P(n + 1)$ é verdadeira;

Então a proposição $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Para provarmos que o Princípio da Indução é verdadeiro, vamos utilizar por hipótese os axiomas de Peano. Seja uma propriedade P que cumpra as proposições (i) e (ii), o conjunto X dos números naturais n para os quais a proposição $P(n)$ é verdadeira, ou seja: $X = \{n \in N; P(n) \text{é } verdadeira\}$. Pelo item (i) temos que $P(1)$ é verdadeira, então $1 \in X$, esse é passo base da indução matemática. Pelo item (ii), temos o passo indutivo onde diz que para todo número natural n, se $n \in X$, então $n + 1 \in X$. Logo o conjunto X satisfaz as duas condições do axioma da indução e, portanto, $X = \mathbb{N}$.

3.3 Princípio da Indução Generalizado

Temos que pode também acontecer que uma determinada proposição seja verdadeira a partir de um determinado $k \in \mathbb{N}$, e não necessariamente para valores menores do que k.

Portanto, estes casos podem ser demonstrados pelo Princípio da Indução Generalizado, conforme está a seguir:

Teorema 3.3.1 (Princípio da Indução Generalizado). Seja k um número natural e $P(n)$ uma proposição referente a cada número natural $n \geq k$ e que satisfaz as duas condições a seguir:

i) $P(k)$ é verdadeira;

ii) Para todo $n \geq k$, se $P(n)$ é verdadeira, implica $P(n+1)$ também é verdadeira.

Então a proposição $P(n)$ é verdadeira para todo número natural $n \geq k$. Este princípio nos permite aplica-lo em situações em que uma proposição vale para todos os números naturais a partir de um certo valor.

Demonstração: Seja X o conjunto de todos os números naturais n para os quais a proposição $P(k+n-1)$ é verdadeira, ou seja que $X = \{n \in \mathbb{N}; P(k+n-1) \text{ é verdadeira}\}$. Pelo item (i), $P(k) = P(k+1-1)$, é verdadeira, portanto $1 \in X$. Pelo item (ii), se $P(k+n-1)$ é verdadeira, então $P\big((k+n-1)+1\big) = P(k+(n+1)-1)$, também é verdadeira. Então, se $n \in X$, então $n+1 \in X$, logo, pelo axioma da indução, X é o conjunto dos números naturais $X = \mathbb{N}$, ou seja $P(n)$ é verdadeira para todo número natural $n \geq k$.

3.4 Propriedades dos Naturais

No conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais são definidas algumas operações fundamentais que veremos a seguir.

3.4.1 Adição dos Naturais

A adição de dois números naturais, m e n, é designada por sua soma $m+n$, e é definida da seguinte forma:

$$m + 1 = s(m)$$

$$m + s(n) = s(m+n)$$

3.4.1.1 Propriedades da Adição

a) Associativa: $P(n): \{m + (n+p) = (m+n) + p; \forall\, m, n \; e \; p \in \mathbb{N}\}$

A prova será feita por indução sobre p, tomando m, n fixos.

Demonstração: Seja X o conjunto dos $p \in \mathbb{N}$, para os quais a propriedade vale, mostraremos por indução que $X = \mathbb{N}$, temos que $1 \in X$, pois segue da definição de soma que $m + (n+1) = (m+n) + 1$. Agora suponha que $p \in X$, isto é $P(n)$ é verdadeira para algum p, mostraremos que $p + 1 \in X$. Logo $m + [n + (p+1)] = m + [(n+p) + 1] = [m + (n+p)] + 1$. Por Hipótese de Indução temos: $[(m+n) + p] + 1 = (m+n) + (p+1)$. Como $1 \in X$, e $p \in X \rightarrow p + 1 \in X$, concluímos por indução que $X = \mathbb{N}$, ou seja, $m + (n+p) = (m+n) + p; \forall\, m, n\ e\ p \in \mathbb{N}$.

b) Comutativa: $P(n)\colon \{m + p = p + m;\ \forall\, m, n \in \mathbb{N}\}$

A prova será feita por indução sobre p, tomando m fixo.

Demonstração: Seja X o conjunto dos $p \in \mathbb{N}$, para os quais a propriedade vale, mostraremos por indução que $X = \mathbb{N}$, temos que $1 \in X$, pois é facilmente demonstrado por indução que $m + 1 = 1 + m$. Agora suponha que $p \in X$, isto é $P(n)$ é verdadeira para algum p, mostraremos que $p + 1 \in X$. Logo $m + (p+1) = (m+p) + 1 = 1 + (m+p)$. Por Hipótese de Indução temos: $1 + (p+m) = (1+p) + m = (p+1) + m$. Como $1 \in X$, e $p \in X \rightarrow p + 1 \in X$, concluímos por indução que $X = \mathbb{N}$, ou seja, $m + p = p + m\ \forall\, m, n \in \mathbb{N}$.

c) Lei do corte: $P(n)\colon \{m + p = n + p \rightarrow m = n;\ \forall\, m, n\ e\ p \in \mathbb{N}\}$

A prova será feita por indução sobre p, tomando m, n fixos.

Demonstração: Seja X o conjunto dos $p \in \mathbb{N}$, para os quais a propriedade vale, mostraremos por indução que $X = \mathbb{N}$, temos que $1 \in$ X, pois $m + 1 = n + 1 \rightarrow m = n$ (Pela injetividade). Suponha que p $\in$ X, isto é $P(n)$ é verdadeira para algum p, mostraremos que $p + 1 \in X$. Logo $m + (p+1) = (m+p) + 1$, por hipóstese de indução temos $(m+p) + 1 = (n+p) + 1 = n + (p+1)$, então $m + (p+1) = n + (p+1)$ (Pela injetividade). Temos então que $m = n$. Como $1 \in X$, e $p \in X \rightarrow p + 1 \in X$, concluímos por indução que $X = \mathbb{N}$, ou seja, $m + p = n + p \rightarrow m = n, \forall\, m, n\ e\ p \in \mathbb{N}$.

d) Tricotomia : Dados $m, n \in \mathbb{N}$, ou $m = n$ (1), ou existe um $p \in \mathbb{N}$ tal que $m = n + p$ (2), ou existe um $q \in \mathbb{N}$ tal que $n = m + q$ (3), $\forall\, m, n \in \mathbb{N}$.

Demonstração[4]: Vamos mostrar primeiro que duas delas não podem ocorrer simultanemante e depois mostrar que obrigatoriamente uma delas deve ocorrer:

• Claramente, 1 e 2, não podem ocorrer simultaneamente, pois, teríamos $m = n + p$ com $p \in \mathbb{N}$ e $m = n$, daí, substituindo a segunda igualdade na primeira, obteríamos que, $m = m + p$, com isso obteremos $m + 1 = (m + p) + 1 \to m + 1 = m + (p + 1) \to 1 = p + 1 \to 1 = s(p)$, absurdo! Da mesma forma, 1 e 3 não podem ocorrer juntas. Suponhamos agora que 2 e 3 ocorram ao mesmo tempo, isto é, $m = n + p$ e $n = m + q$, com $p, q \in \mathbb{N}$. Substituindo a segunda igualdade na primeira, obtemos, $m = (m + p) + q$ ou ainda, $m = m + (p + q)$, com isso obteremos $m + 1 = m + (p + q) + 1 \to 1 = (p + q) + 1 \to s(p + q) = 1$, absurdo!

• Vamos mostrar por indução matemática que obrigatoriamente uma delas deve ocorrer.

$M = \{x \in \mathbb{N} | x = m \; ou \; x > m \; ou \; x < m\}$ com m sendo um natural qualquer. Temos que $0 \in M$, pois $0 = m$ ou $0 \neq m$. Se $0 \neq m$, então $0 < m$. Suponhamos agora que $k \in M$, isto é, $k = m$ ou $k > m$ ou $k < m$. Analisemos os três casos:

(a) $k = m \Rightarrow k + 1 = m + 1 \Rightarrow k + 1 > m \Rightarrow k + 1 \in M$;

(b) $k > m \Rightarrow k = m + p$ para $p \in \mathbb{N}$. $\Rightarrow k + 1 = (m + p) + 1 \Rightarrow k + 1 = m + (p + 1) \Rightarrow k + 1 > m \Rightarrow k + 1 \in M$;

(c) $k < m \Rightarrow m = k + p$ para $p \in \mathbb{N}$. Como $p \neq 0$, temos que $p = p_1 + 1$ com $p_1 \in \mathbb{N}$. Logo, $m = k + p \Rightarrow m = k + (p_1 + 1) \Rightarrow m = (k + 1) + p_1$. Se $p_1 = 0$ teremos $m = k + 1$ e portanto, $k + 1 \in M$. Se $p_1 \neq 0$, então, $k + 1 < m$, logo, $k + 1 \in M$. Sendo assim, concluímos que, se $k \in M$, então $k + 1 \in M$. Logo, por indução, $\mathbb{N} = M$.

3.4.2 Multiplicação dos Naturais

A Multiplicação de dois números naturais, m e n, é designada pelo seu produto $m.n \in \mathbb{N}$ e definida recursivamente da seguinte forma:

i) $m.1 = m$

ii) $m.(n + 1) = m.n + m$

[4] Esta demonstração foi reproduzida do texto de Machado (2014, p. 33).

3.4.2.1 Propriedades da Multiplicação

a) Distributiva: $P(n)$: $\{m(n+p) = m.n + m.p;\ \forall m, n\ e\ p \in \mathbb{N}$:

A prova será feita por indução sobre p, tomando m, n fixos.

Demonstração: Seja X o conjunto dos $p \in \mathbb{N}$, para os quais a propriedade vale, mostraremos por indução que $X = \mathbb{N}$, temos que $1 \in X$, pois $m(n+1) = m.n + m$ (Pela definição em 3.4.2). Agora suponha que $p \in X$, isto é $P(n)$ é verdadeira para algum p, mostraremos que $p + 1 \in X$. Logo $m(n+(p+1)) = m\big((n+p)+1\big) = m(n+p) + m$, por hipótese de indução temos $m(n+p) + m = (m.n + m.p) + m = m.n + (m.p + m) = m.n + m(p+1)$. Como $1 \in X$, e $p \in X\ \to p + 1 \in X$, concluímos por indução que $X = \mathbb{N}$, ou seja, $m(n+p) = m.n + m.p;\ \forall m, n\ e\ p \in \mathbb{N}$.

b) Associativa: $P(n)$: $\{m(n.p) = (m.n).p;\ \forall m, n\ e\ p \in \mathbb{N}\}$

A prova será feita por indução sobre p, tomando m, n fixos.

Demonstração: Seja X o conjunto dos $p \in N$, para os quais a propriedade vale, mostraremos por indução que $X = \mathbb{N}$, temos que $1 \in$ X, pois $m(n.1) = m.n = (m.n).1$ (pela definição em 3.4.2). Agora suponha que $p \in X$, isto é $P(n)$ é verdadeira para algum p, mostraremos que $p + 1 \in X$. Logo $m\big(n.(p+1)\big) = m(n.p + n) = m.(n.p) + m.n\ = (m.n).p + (m.n).1 = (m.n).(p+1)$. Como $1 \in X$, e $p \in X\ \to p + 1 \in X$, concluímos por indução que $X = \mathbb{N}$, ou seja, $m(n.p) = (m.n).p;\ \forall m, n\ e\ p \in \mathbb{N}$.

c) Comutativa: $P(n)$: $\{m.n = n.m;\ \forall m, n \in \mathbb{N}\}$.

A prova será feita por indução sobre p, tomando m, n fixos.

Demonstração: Seja X o conjunto dos $n \in \mathbb{N}$, para os quais a propriedade vale, mostraremos por indução que $X = \mathbb{N}$, temos que $1 \in X$, pela definição. Suponha que $n\ \in X$, isto é, $P(n)$ é verdadeira para algum n, mostraremos que $n+1 \in X$. Logo $m(n+1) = m.n + m = n.m + 1.m = (n+1)m$. Como 1 ∈ X , e n ∈ X → n + 1 ∈ X, concluímos por indução que $X = \mathbb{N}$, ou seja, $m.n = n.m;\ \forall m, n \in \mathbb{N}$.

d) Lei do corte: $P(n)$: $\{m.p = n.p \to m = n;\ \forall m, n\ e\ p \in \mathbb{N}\}$

A prova será feita por indução sobre p, tomando m, n fixos.

Demonstração: Seja X o conjunto dos $p \in \mathbb{N}$, para os quais a propriedade vale, mostraremos por indução que $X = \mathbb{N}$, temos que $1 \in X$, pois $m.1 = n.1 \to m = n$. Suponha que $p \in X$, isto é $P(n)$ é verdadeira para algum p, mostraremos que $p+1 \in X$. Logo $m(p+1) = n(p+1) \rightarrow m.p + m. = n.p + n. \rightarrow m = n$. Como $1 \in X$, e $n \in X \rightarrow n+1 \in X$, concluímos por indução que $X = \mathbb{N}$, ou seja, $m.p = n.p \rightarrow m = n$; $\forall m, n\ e\ p \in \mathbb{N}$.

3.4.3 Ordem dos Naturais

Definiremos a ordem dos números naturais em termos da adição. Dados os números naturais m, n dizemos que m é menor do que n e escrevemos: $m < n$

Para significar que existe um $p \in \mathbb{N}$ tal que $n = m + p$. De forma análoga, podemos definir um m é maior do que n e escrevemos como $m > n$, para significar que existe um $q \in \mathbb{N}$ tal que $m = n + q$.

Temos também as notações $m \leq n\ e\ m \geq n$, que significam respectivamente m é menor do que ou igual a n , e m é maior do que ou igual a n. Ora, sendo $n \neq 1$, pelo axioma de peano significa que n é sucessor de algum número natural, ou seja, temos $s(m) = n$, então $m + 1 = n$ e $n > 1$, em outras palavras, 1 é o menor dos números naturais.

3.4.3.1 Propriedades da Ordem

a) Transitividade: se $m < n$ e $n < p$, então $m < p$.

Demonstração: Sejam $m < n\ e\ n < p$, temos pela definição de ordem que existem $r, e\ s \in \mathbb{N}$ tais que, $m + r = n$ e $p = n + s$. Fazendo as devidas substituições temos que $p = (m + r) + s = m + (r + s) \rightarrow p = m + (r + s)$. Pela definição de ordem concluímos que $m < p$.

b) Comparabilidade: Todo número natural n é comparável com qualquer número natural m.

Demonstração[5]: Isto se prova por indução. O número 1 é comparável com qualquer outro número natural pois já sabemos que $1 < m$ para todo $m \neq 1$. Suponhamos agora que o número n seja comparável com todos os números naturais. Mostremos, a partir daí, que $n + 1$ também tem essa propriedade. Sabemos que se tem $m < n,\ m = n\ ou\ n < m$. Examinemos cada uma dessas possibilidades:

[5] A demonstração foi reproduzida do texto de Lima (1988, p. 7).

1) Se for $m < n$ então $m < n + 1$ por transitividade, pois sabemos que $n < n + 1$;

2) Se for $m = n$, então $m < n + 1$;

3) Se for $n < m$ então $m = n + p$. Neste caso, há duas possibilidades. Ou se tem $p = 1$, donde $m = n + 1$, ou então $p > 1$, logo $p = 1 + p'$, e daí $m = (n + 1) + p'$ e concluímos que $n + 1 < m$. Em qualquer hipótese, vemos que $n + 1$ é comparável com qualquer número natural m. Por indução, fica provada a comparabilidade de quaisquer números naturais m, n.

c) Tricotomia: Dados $m, n \in \mathbb{N}$, qualquer das afirmações $m < n, m = n, n < m$, exclui as outras duas.

Vamos analisar as seguintes situações:

1°) se $m < n$ e $m = n$, existiria um $p \in \mathbb{N}$ tal que $n = m + p$ e $m = n$, então $n = n + p$, com isso obteremos $n + 1 = (n + p) + 1 \rightarrow n + 1 = n + (p + 1) \rightarrow 1 = p + 1 \rightarrow 1 = s(p)$. Absurdo.

2°) se $m < n$ e $m > n$, existiria um $p\ e\ q \in \mathbb{N}$, tais que $n = m + p\ e\ m = n + q \rightarrow m = (m + p) + q \rightarrow m + 1 = m + (p + q) + 1 \rightarrow 1 = (p + q) + 1 \rightarrow s(p + q) = 1$. Absurdo!

3°) $m < n$ e $m = n$, análogo a 1°.

d) Monotonicidade: Se $m < n$, então $m + p < n + p$ e $mp < np$.

Demonstração: Se $m < n$, então existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $n = m + r$. Então $n + p = (m + r) + p \rightarrow n + p = (m + p) + r \rightarrow n + p > m + p$. Se $m < n$, então existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $n = m + r$. Logo $n.p = (m + r).p \rightarrow n.p = m.p + r.p \rightarrow n.p > m.p$.

3.5 Princípio da Boa Ordenação

Outra propriedade importante referente aos números naturais é o Princípio da Boa Ordenação.

Sabendo que todo número natural é menor que seu sucessor, e que o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais é limitado inferiormente, onde seu elemento mínimo é o 1, e qualquer que seja $X \subset \mathbb{N}$, com $1 \in X$, então 1 é o menor elemento de X.

Teorema 3.5. (Princípio da Boa Ordenação). Todo subconjunto não vazio $A \subset \mathbb{N}$ possui um menor elemento.

Demonstração[6]: O menor elemento de A, cuja existência queremos provar deverá ser da forma $n+1$. Devemos procurar então, por contradição, um número natural n tal que $n+1 \in A$, e além disso todos os elementos de A são maiores do que n, logo maiores do que $1,2,3, \ldots, n$. Considere então, I_n o conjunto dos números naturais p tais que $1 \leq p \leq n$, considere também o conjunto $X \subset \mathbb{N}$, formado pelos números $n \in \mathbb{N}$ tais que $I_n \subset \mathbb{N} - A$. Dizer que $n \in X$, significa afirmar que $n \notin A$ e que todos os números naturais menores do que n também não pertence a A. Se tivermos $1 \in A$ o teorema estará demonstrado, pois 1 será o menor elemento de A, mas se $1 \notin A$ então $1 \in X$. Por outro lado temos que $X \neq \mathbb{N}$, pois $X \subset \mathbb{N} - A$ e o conjunto A não é vazio. Logo pelo axioma de indução, temos que o conjunto X não é indutivo, logo deve existir algum $n \in X$ tal que $n+1 \notin X$. Podemos então dizer que todos os elementos do conjunto A são maiores do que n, mas nem todos são maiores do que $n+1$. Como não existem números naturais entre n e $n+1$, concluímos que $n+1$ pertence ao conjunto A. Logo $n+1$ é o menor elemento de A, o que demonstra o teorema.

3.6 Problemas Clássicos com Indução Matemática

Dentre a diversidade de problemas envolvendo a indução matemática, vamos escolher um de cada tipo clássico: Demonstração de Identidades, demonstração de desigualdades, demonstração de problemas de divisibilidade.

a) Demonstração com Identidade

Conjecture uma fórmula para a soma dos n primeiros números pares e após isso demonstre com o Princípio da Indução.

Para isso, faremos uma tabela, para conseguir visualizar alguma característica comum na soma dos números pares. Onde n é a quantidade de primeiros números pares a serem somados e $S(n)$ a sua soma.

[6] Demonstração reproduzida do texto de Silva (2015, p. 29).

Tabela 1 – Características comuns na soma dos números pares

$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{S(n)}$
1	$2 = 1.2$
2	$2 + 4 = 6 = 2.3$
3	$2 + 4 + 6 = 12 = 3.4$
4	$2 + 4 + 6 + 8 = 20 = 4.5$
5	$2 + 4 + 6 + 8 + 10 = 30 = 5.6$
...	...
n	$n.(n + 1)$

Fonte: Elaborada pela autora.

Portanto, podemos conjecturar que a soma dos n primeiros números pares é dada por $S(n) = n(n + 1)$.

Agora precisamos demonstrar que para qualquer $n \in \mathbb{N}$, é válida a igualdade:$2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n(n + 1)$.

Demonstração: Seja $P(n)$: $2 + 4 + 6 + 8 + \cdots + 2n = n.(n + 1), \forall\, n \in N$ e seja X o conjunto dos $n \in \mathbb{N}$, para os quais a propriedade vale, mostraremos por indução que $X = \mathbb{N}$. Temos que 1 ∈ X, pois $1.(1 + 1) = 1.2 = 2$. Agora suponha que $n \in X$, isto é $P(n)$ é verdadeira para algum n, mostraremos que $n + 1 \in X$, ou seja que $2 + 4 + 6 + \cdots + 2.n + 2.(n + 1) = (n + 1)(n + 2)$. Sabemos que por hipótese de indução $2 + 4 + \ldots + 2.n = n.(n + 1)$, então: $2 + 4 + \ldots + 2.n + 2.(n + 1) = n.(n + 1) + 2.(n + 1) = (n + 2).(n + 1)$. Como $1 \in X$, e $n \in X \to n + 1 \in X$, concluímos por indução que $X = \mathbb{N}$, ou seja, $2 + 4 + 6 + 8 + \cdots + 2n = n.(n + 1), \forall\, n \in \mathbb{N}$.

b) Demonstração com Desigualdade

Demonstre que $3^{n-1} < 2^{n^2}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Seja X o conjunto dos $n \in \mathbb{N}$, para os quais a propriedade vale, mostraremos por indução que $X = \mathbb{N}$. Temos que $1 \in X$, pois $3^{1-1} = 3^0 = 1 < 2^{1^2} = 2$. Agora suponha que $n \in X$, isto é $P(n)$ é verdadeira para algum n, mostraremos que $n + 1 \in X$. Logo $3^{(n+1)-1} = 3^n = 3^{n-1}.3$, sabemos que por hipótese de indução $3^{n-1} < 2^{n^2}$, então: $3^{n-1}.3 < 2^{n^2}.2^{2n+1} = 2^{n^2+2n+1} = 2^{(n+1)^2}$. Como $1 \in X$, e $n \in X \to n + 1 \in X$, concluímos por indução que $X = \mathbb{N}$, ou seja, $3^{n-1} < 2^{n^2}, \forall\, n \in \mathbb{N}$.

c) Demonstração com Divisibilidade

Demonstre que $n^3 + 2.n$ é divisível por 3.

$$P(n): 3|n^3 + 2.n \; \forall \, n \; \in \mathbb{N}.$$

Demonstração: Seja $P(n): 3|n^3 + 2.n \; \forall \, n \; \in \mathbb{N}$ e X o conjunto dos $n \; \in \mathbb{N}$, para os quais a propriedade vale, mostraremos por indução que $X = \mathbb{N}$.Temos que $1 \in X$, pois $3|1^3 + 2.1 \rightarrow 3|3$. Agora suponha que $n \; \in X$, isto é $P(n)$ é verdadeira para algum n, mostraremos que $n + 1 \; \in A$, ou seja, que $3| \; (n+1) \; ^3 + 2.(n+1)$. Note que $(n+1)^3 + 2.(n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 2n + 2 = (n^3 + 2n) + (3n^2 + 3n + 3) = (n^3 + 2n) + 3(n^2 + n + 1).$ Como $3| \, n^3 + 2n$ por Hipótese de Indução e $3|3(n^2 + n + 1)$, logo $3|(n+1)^3 + 2.(n+1)$. Concluímos por indução que $X = \mathbb{N}$, ou seja, $3|n^3 + 2.n \; \forall \, n \; \in \mathbb{N}$.

4 MÉTODO DA INDUÇÃO ENQUANTO OBJETO MATEMÁTICO DE ENSINO NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Ao chegar no ensino médio, o estudante já possui conhecimento matemático suficiente para se utilizar uma abordagem axiomática dedutiva, incentivando que o aluno tenha maior senso crítico, noção de investigação e descoberta da origem de importantes fórmulas matemáticas.

Um exemplo do porque entendemos que esse estudo seja tão importante, é que, se chegarmos em um aluno do ensino médio e perguntarmos sobre a fórmula da progressão aritmética

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n).n}{2}$$

Provavelmente saberão calcular alguns exercícios, porém poucos conseguirão realizar a demonstração da fórmula e provar sua veracidade. Por este motivo fica a indagação, os professores estão formando alunos com senso crítico e aptos a realizar as mais diversas operações matemática, ou os estudantes saem do ensino médio com fórmulas prontas em suas mentes, sem noção de aplicabilidade e origem.

Através de pesquisas, pôde-se constatar diversos trabalhos que tratam sobre este tema, neste capítulo será abordado algumas opiniões e abordagens sobre o método da indução enquanto objeto matemático na Educação Básica.

De acordo com Krerley e Adán (2012 apud NÓBREGA, 2013, p. 2): “Uma grande vantagem do princípio da Indução Matemática é poder provar que uma quantidade infinita de afirmações é verdadeira, simplesmente verificando que uma quantidade finita destas afirmações é verdadeira.” Trata-se de um primeiro contato mais rigoroso com a noção do infinito.

Segundo Silva (2015, p. 11) “As demonstrações têm ocupado nos últimos anos, um lugar de reduzida importância no currículo do Ensino Médio. Percebe-se que são poucos os alunos que, ao concluírem o ensino básico, tenham adquirido a capacidade de desenvolver a noção do que seja uma demonstração em matemática. Observa-se também que, atualmente, o ensino da matemática se resume praticamente à resolução de sentenças e problemas matemáticos, o que pouco ajuda no desenvolvimento do raciocínio. Diante do exposto, é importante propor, mesmo no nível médio, atividades que favoreçam o desenvolvimento do pensamento autônomo e crítico, pois do contrário, a matemática não passa de um simples amontoado de resultados interessantes, porém desconexos.”

Segundo Fossa (2009, p. 47 apud ALMEIDA, 2016, p. 1), para desenvolver o conhecimento é preciso saber o porquê dos acontecimentos e o porquê de um teorema matemático e a sua demonstração. Para Fossa, o matemático tem dois motivos para demonstrar: o primeiro é que uma proposição intuitivamente verdadeira pode ser provada como falsa com a utilização da demonstração. E o segundo é que a Matemática é um tipo de conhecimento e são necessárias razões suficientemente fortes para se acreditar nele.

Diante disso, podemos enxergar o poder que o conhecimento da demonstração pode exercer sobre a vida intelectual do estudante, sendo capaz de evidenciar as propriedades e todas suas limitações, e principalmente conseguindo compreender o que realmente está sendo provado, e relacionar diversas questões como a comunicação de ideia matemática, linguagem e formalismo, convencer e explicar, funções na prática pedagógica, situações e processos de validar critérios para refutar argumentos, entre outros.

Para realizar a missão de formar alunos com esta maturidade matemática é necessário que o educador realize um planejamento que torne possível as investigações matemáticas e realize a mediação, estimulando a criatividade e o progresso. Sendo extremamente necessário que o discente explore todas suas ideias e compartilhe aos seus colegas e ao professor, gerando um sentimento de sucesso e valorização por seu trabalho.

Contudo, um problema a ser observado é que, quando o aluno encontra uma certa regularidade em seus resultados é comum o estabelecimento de conjecturas sem sentir a necessidade de prová-las.

> Os alunos tendem a confundir conjecturas com conclusões, ou seja, não justificam ou provam as afirmações que fazem e, infelizmente, não há uma cultura docente de fazer intervenções, dessa forma, é primordial que o professor faça uma mediação capaz de promover a compreensão do caráter temporário das conjecturas. E, apesar de ser importante a insistência na realização de testes de conjecturas, e possa se ter uma “maior credibilidade” à medida que resista a diversos testes. O Processo de conjecturar por analogia, é uma ferramenta muito poderosa, mas muitas vezes perigosa e é tentador imaginar que a regularidade encontrada, numa sequência numérica, por exemplo, corresponde a uma demonstração (CARDOSO, 2019, p. 2).

Por este motivo é necessário que dominemos técnicas de provar generalizações matemáticas, como o Princípio da Indução. E através de pesquisas foi possível realizar uma síntese de quais assuntos podem ser abordados no ensino médio utilizando a técnica da indução matemática.

O tema da indução finita geralmente é introduzida quando se trabalha com números naturais. Alguns livros, como Domingues e Iezzi (2003) e Gonçalves (1979), enfocam este método logo após colocarem as propriedades dos inteiros e utilizam o Princípio da Boa Ordem para a prova do Teorema de Indução Finita.

Silva (2015) desenvolveu seu trabalho de conclusão do Mestrado Profissional PROFMAT com o tema Indução Matemática: Discussão Teórica e uma proposta de ensino, que tem como objetivo introduzir os conceitos básicos da teoria, desenvolver mecanismos de padrões, de formulações de conjecturas, reconhecimento de situações onde podem ser usadas o mecanismo de demonstração da indução e aplicação, através da metodologia da sequência didática por investigação matemática.

A sequência didática proposta por Silva (2015), conta com os seguintes passos: exploração e formulação de questões, formação de conjecturas, testes e reformulação, e justificação / avaliação. Ele ressaltou que durante esse processo é importante que o professor atue sempre mantendo um diálogo com os alunos, estimulando a comunicação entre eles e lhes oferecendo caminhos que favoreçam a aprendizagem, despertando nos alunos um senso matemático mais crítico, com relação às verdades estabelecidas neste nível de ensino, para que os alunos percebam a necessidade de justificar as afirmações através da indução matemática.

O trabalho de Silva (2015) também destacou algumas dificuldades que os alunos podem sofrer neste processo de ensino: alguns alunos não estão habituados com a prática da leitura, afetando o entendimento dos enunciados matemáticos. Pode ocorrer também de não conseguirem estabelecer relações entre os fatos opostos ou na visualização das figuras. Outra dificuldade comum, seria de o aluno não conseguir transferir o que foi compreendido para a escrita de argumentos em linguagem matemática.

Através do que foi exposto, para cumprir seu objetivo e diante das dificuldades listadas, Silva (2015) realizou o cronograma de atividades conforme figura a seguir em turma da 1ª série do Ensino Médio em três etapas.

Figura 2 – Cronograma de Atividades do Trabalho de Silva (2015)

Cronograma da Sequência				
Etapa	**Momento**	**Previsão**	**Atividade**	**Objetivos**
1	1	2 aulas de 50 min.	O Problema do Cálculo das Diagonais de um Polígono Convexo	Identificar proposições em $\mathbb{N}$, investigar casos, perceber regularidades, formular e reformular questões e elaborar conjecturas.
	2		As Proposições em $\mathbb{N}$	
	3		Problemas de Igualdade e desigualdade. .	
2	4	2 aulas de 50 min	O problema dos Infinitos Dominós enfileirados	Reconher proposições que podem vir a ser demonstradas por Indução Matemática e aplicar o Método.
	5		Solução do Problema das Diagonais	
	6		Solução dos Problemas de Igualdade e desigualdade	
3	7	2 aulas de 50 min.	Soma dos ângulos Internos de um Polígono Convexo	Realizar a avaliação e fechamento da sequêcia e apresentar as considerações finais.

Fonte: Silva (2015, p. 25).

Notamos que Silva (2015) dividiu seu cronograma de atividades em três etapas. Primeiro seu objetivo foi que os alunos criassem a habilidade de elaborar conjecturas e perceber padrões em diversas proposições, para em segundo momento realizar a demonstração dessas proposições por meio da indução matemática e por fim apresentar suas considerações finais, fazendo com que o aluno tenha o hábito de explicar com a linguagem matemática adequada e visualize todo o trabalho realizado.

A avaliação final proposta por Silva (2015), é que o docente busque considerar tanto a produtividade dos alunos em grupo, como também individualmente, feita através de análise das atividades desenvolvidas durante o processo de ensino, como também por meio de observação e anotações feitas pelos alunos. No término da sequência das 3 etapas, deve ser aplicada uma atividade avaliativa sem consulta para fechamento da sequência de ensino da indução matemática.

No trabalho de conclusão do Mestrado Profissional PROFMAT de Pereira (2013), com o tema O Princípio da Indução Finita – uma abordagem no ensino médio, ele trabalhou com o objetivo de identificar as principais dúvidas e dificuldades encontradas pelos alunos com o princípio da indução e um meio de contorná-las. Procurou também entender de que maneira este tema pode ser levado para a sala de aula, relatando breves experiências com alunos do 3º ano do ensino médio.

Pereira (2013) realizou atividades com os alunos de 3ª série da Fundação de Apoio a Escolas Técnicas Estaduais do Estado do Rio de Janeiro (FAETEC). A turma constituía-se de 28 alunos com média de idade entre 17 e 18 anos e a carga horária total despendida no processo foi de seis tempos de aula perfazendo um total de 300 minutos distribuídos em três semanas.

O plano de aula realizado por ele, contou com aulas teóricas nas duas primeiras semanas, e na terceira semana concluiu com atividades de fixação da aprendizagem, conforme Figura 3.

Figura 3 – Plano de Aula de Pereira (2013)

PLANO DE AULA TEMA: A INDUÇÃO FINITA			
	1ª SEMANA	2ª SEMANA	3ª SEMANA
ASSUNTO	*Axiomas de Peano e o 1º Princípio da Indução*	*A Generalização do 1º Princípio da Indução, a Boa Ordenação e o 2º Princípio da Indução*	*Resolução de problemas*
OBJETIVOS	*Fundamentar os Axiomas de Peano. Destacar o axioma da Indução e enunciá-lo em termos de proposições. Realizar demonstrações que empreguem o 1º princípio da Indução*	*Generalizar o 1º princípio da Indução. Enunciar o teorema da Boa Ordenação e o 2º princípio da Indução e exemplificar casos em que o 2º princípio deve ser empregado*	*Mensurar o aprendizado e identificar as principais dúvidas e dificuldades dos alunos*
METODOLOGIA	*Aula Expositiva*	*Aula Expositiva*	*Proposição de Atividades*
TEMPO	*Dois tempos de 50 minutos*	*Dois tempos de 50 minutos*	*Dois tempos de 50 minutos*

Fonte: Pereira (2013, p. 35).

Apresentaremos a seguir duas atividades realizadas no trabalho de Pereira (2013).

Atividade 1: Prove por indução que $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}, \forall\, n \in \mathbb{N}$.

A escolha desta primeira atividade, que propõe uma fórmula fechada para a soma dos n primeiros números naturais, se deu primeiramente por ser bem simples, e por se tratar de um problema inicial e clássico quando se aborda o assunto. Pereira (2013) desejava que eles pudessem aplicar o método da indução sem muitas dificuldades quanto ás questões técnicas da prova, como por exemplo, as manobras algébricas necessárias ao exercício, que neste caso são bem simples.

Após um tempo, constatou-se que a grande maioria conseguiu realizar a atividade sem muita dificuldade, uma pequena quantidade não conseguiu resolver, e outros ainda realizaram o exercício através da fórmula da Progressão Aritmética.

Observamos que para uma aprendizagem completa visando a autonomia do aluno, como temos visto neste trabalho, seria interessante que o aluno inicialmente trabalhasse formas de se conjecturar a fórmula para calcular a soma dos n primeiros números naturais, para somente depois ser provado pela indução matemática, conforme abaixo.

A conjectura pode ser realizada da seguinte forma:

Seja a soma dos n primeiros números naturais dada por $S = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n - 1) + n$. Note que é o mesmo que dizer $S = n + (n - 1) + (n - 2) + \cdots + 2 + 1$, pois os números apenas foram escritos de forma contrária. Uma das técnicas para conjectura é colocar estas expressões uma abaixo da outra e soma-las.

$$S = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n - 1) + n$$
$$\underline{+\, S = n + (n - 1) + (n - 2) + \cdots + 2 + 1}$$

Somando termo a termos encontraremos:

$$2S = (n + 1) + (n - 1 + 2) + (n - 2 + 3) + \cdots + (n - 1 + 2) + (n + 1)$$
$$2S = (n + 1) + (n + 1) + (n + 1) + \cdots + (n + 1)$$
$$2S = n(n + 1)$$
$$S = \frac{n(n + 1)}{2}$$

Após os alunos debaterem e encontrarem a solução para o problema, conforme fizemos acima, é a hora de se demonstrar através da indução matemática, isto fará com que o conteúdo faça muito mais sentido a eles.

Demonstração: Seja $P(n): 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}, \forall\, n \in \mathbb{N}$ e X o conjunto dos $n \in \mathbb{N}$, para os quais a propriedade vale, mostraremos por indução que $X = \mathbb{N}$. Temos que $1 \in X$, pois $\frac{1(1+1)}{2} = 1$. Agora suponha que $n \in X$, isto é $P(n)$ é verdadeira para algum n, mostraremos que $n + 1 \in X$, ou seja que $1 + 2 + 3 + \cdots + n + (n + 1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$. Sabemos que por hipótese de indução $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, então: $1 + 2 + 3 + \cdots + n + (n + 1) = \frac{n(n+1)}{2} +$

$(n+1) = \frac{2(n+1)+n(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$. Como $1 \in X$, e $n \in X \rightarrow n+1 \in X$, concluímos por indução que $X = \mathbb{N}$, ou seja, $1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}, \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Atividade 2: Prove por indução que $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

O motivo da escolha dessa atividade por Pereira (2013), foi de certa para complementar as técnicas utilizadas no exercício anterior, pelo fato de que para o nível médio as contas necessárias ao exercício não são tão triviais.

Este problema foi considerado bem difícil pela turma. Pouco menos da metade dos alunos conseguiu realizar a demonstração dentro do tempo previsto. Quase todos os alunos tiveram dificuldades quanto à manipulação algébrica necessária para se ajustar a expressão envolvida e concluir a tese, evidenciando-se grande dificuldade com respeito à fatoração que era requerida pelo exercício, apontando que essa pode ser uma das possíveis defasagens do aprendizado.

O autor apontou que os alunos que anteriormente utilizaram a fórmula da soma dos primeiros termos de uma progressão aritmética, na atividade anterior, puderam perceber que por vezes o conceito mais geral pode não ser o melhor para resolver determinados problemas, afinal, desta vez os termos da soma em questão não configuravam uma sequência tão familiar e, portanto, não tinham uma fórmula pronta para utilizarem.

Como na atividade anterior, também damos como sugestão ser trabalhado a conjectura da fórmula antes dos alunos demonstrarem através do método da indução, para que eles entendam que a importância da demonstração por indução é para validar algo que eles se esforçaram para encontrar.

Pereira (2013) concluiu que certas dúvidas referentes a pré-requisitos do tópico Indução Matemática, tais como, noções gerais de conjuntos, operações numéricas, produtos notáveis, fatoração e implicações lógicas acarretam numa dificuldade hereditária na hora de se realizar uma prova por indução. Mesmo apesar das dúvidas, observadas nos alunos, pôde-se constatar que a aplicação deste tema em nível de ensino médio, dentro de uma abordagem metodológica adequada, não configura nenhum delito pedagógico.

De modo geral, os alunos atribuíram significado matemático ao método indutivo sem maiores problemas e puderam notar sua importância e aplicabilidade. É relevante observar ainda, a importância que a aplicação desse estudo se faz necessária para os alunos, pois desenvolve as técnicas matemáticas que cada aluno mais possui dificuldade, gerando uma maturidade matemática essencial.

No trabalho apresentado por Martins (2015), para conclusão do Mestrado Profissional PROFMAT em São José do Rio Preto, foi desenvolvido alguns jogos com o terceiro ano do Ensino médio com os alunos da E.E. Dom Artur Horsthuis, para relacionar funções, progressões, princípio da indução finita e jogos para o ensino de matemática. Iremos fazer um breve resumo de sua aplicação do jogo Torre de Hanoi com os alunos.

A explicação do desenvolvimento do jogo, está no capítulo 4 deste trabalho, focaremos aqui nos resultados apresentados por Martins (2015). O trabalho com este envolvente jogo encaminha os alunos à construção de um método para resolver problemas a partir da análise de casos mais simples, até chegar a generalizações, mostrando a presença da progressão geométrica nas sequências encontradas (funções de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{N}$).

O material utilizado pela autora foram três hastes verticais, com uma torre de cinco ou mais anéis em cores variadas, fixadas em uma das hastes em ordem decrescente de tamanho a partir da base. O objetivo do jogo consiste em transferir uma peça por vez a torre para uma das outras duas hastes mantendo a ordenação inicial das peças, sem colocar uma peça maior sobre outra menor.

Martins (2015) dividiu os alunos em 10 grupos, alguns com quatro integrantes e outros com três. Foram necessárias quatro aulas, onde no primeiro momento, foi entregue um jogo juntamente com as regras para cada grupo. Depois de jogarem livremente, foi explicado que a jogada ideal para cinco discos seria aquela realizada com o número mínimo de 31 movimentos.

A próxima etapa foi de investigação onde o grupo preenchia uma tabela que relacionava cada valor de n, com o valor de m_n correspondente, sendo n o número de peças a serem movidas e m_n o número mínimo de movimentos para movê-las. Para isto os grupos retomaram o jogo fazendo a contagem dos movimentos. Todos os grupos conseguiram preencher corretamente a tabela e segundo Martins (2015) ficaram entusiasmados para mostrar como tinham feito. Após a conclusão foi solicitado que cada grupo fosse para a frente da sala explicar como chegaram à solução.

A próxima questão consistia em encontrar uma fórmula de recorrência para o cálculo de m_n. Mesmo tendo usado o raciocínio recursivo na questão anterior, os alunos tiveram problemas para formalizá-lo, apenas um grupo conseguiu responder a questão corretamente. Houve então a necessidade da professora intervir, buscando a participação da classe, e chegar à fórmula de recorrência.

Os alunos mostraram satisfação ao encontrar a fórmula, isto mostra a importância deste trabalho para despertar o gosto pela matemática nos jovens. Para conclusão, a última etapa do trabalho de Martins (2015) consistiu em demonstrar por indução matemática que o número mínimo de movimentos (m_n) para mover as n peças de um pino para outro seguindo as regras do jogo é $m_n = 2^n - 1$.

Com base nos fatos colocados por Martins (2015), conseguimos concluir a importância de se trabalhar demonstrações com os alunos. Isso irá dar a eles, gosto pela investigação, e satisfação em praticar a matemática, além do mais, atividades assim são necessárias para trabalhar diversos outros assuntos matemáticos que alguns alunos possam ter dificuldades, como noção de conjuntos, funções, expressões algébricas, dentre outros.

No artigo “Uma Reflexão sobre a Indução Matemática: relato de uma experiência”, Savioli (2007) diz que ao proporcionar ao aluno uma experiência matemática que o faça buscar por soluções de um problema se utilizando de exemplos para chegar a uma conjectura e a prova desta, isso leva o aluno a traçar os passos da descoberta e da investigação, servindo como arma poderosa tanto ao aluno, como ao professor.

Em sua proposta didática, Savioli (2007) propõe que a atividade seja feita em seis aulas, de forma que apresente aos alunos a indução finita de uma maneira reflexiva, utilizando investigação matemática em prática na sala de aula. Nas duas primeiras aulas, o professor deve escolher problemas conhecidos por seus alunos, pra que eles resolvam e entreguem, com o objetivo de que eles refletissem e descobrissem o porquê daquelas fórmulas. Nas duas próximas aulas, apresentar aos alunos questões que não sejam tão conhecidas, para trabalhar neles a investigação matemática, esses problemas provavelmente irão despertar neles maior interesse e disposição para tentar encontrar uma solução, dando margem pra que les reflitam e discutam sobre o tema da indução finita. E para finalizar, as duas últimas aulas servem para discussão a respeito das soluções encontradas nas questões.

Savioli (2007) relata que antes do término da atividade, após a apresentação do Teorema de Indução Finita via axiomas de Peano, os alunos seriam incentivados a provar que a soma de dois números naturais é um natural e também as fórmulas do termo geral de uma progressão aritmética e de uma progressão geométrica a partir das fórmulas de recorrência. E por fim a atividade terminaria com problemas em que uma das hipóteses do Teorema de Indução Finita não seria contemplada.

Após a apresentação das pesquisas relacionadas neste capítulo, podemos concluir que a aplicação do método da indução matemática no Ensino Médio, vai gerar diversos benefícios em sala de aula, como por exemplo verificar quais são os outros conteúdos matemáticos que os discentes vem sofrendo dificuldade e trazer ao professor a oportunidade de trabalhar em sala de aula, afinal a Indução Matemática se relaciona com diversos outros assuntos, como noção de conjuntos, funções, álgebra, dentre outros.

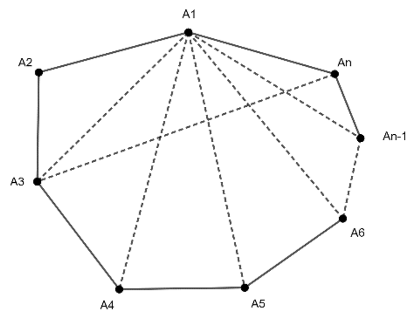
5 APLICAÇÕES DA INDUÇÃO MATEMÁTICA

Este capítulo tem como objetivo a resolução de problemas que podem ser inicialmente conjecturados e após isso demonstrados pelo Princípio da Indução no Ensino Médio, onde fará com que o aluno obtenha autonomia matemática. Alguns desses problemas são bem conhecidos e clássicos na Matemática, após alguns exemplos, colocaremos alguns exercícios da OBMEP, para exemplificar como os alunos poderão utilizar a indução matemática.

5.1 Aplicações Geométricas

5.1.1 Diagonais de um Polígono

Qual o número de diagonais de um Polígono?



Seja $A_1A_2 \dots A_{n-1}A_n$ um polígono de n lados como mostra a figura acima. Escolhendo um dos vértices do polígono, teremos $(n-3)$ diagonais, pois serão três vértices que não poderão formar diagonais, o que escolhermos e seus dois vizinhos. Como se escolhermos um vértice como extremidade temos $(n-3)$ diagonais e temos no total n vértices a serem feitos o mesmo processo, logo teremos no total $n(n-3)$ diagonais.

Porém cada uma das diagonais é contada duas vezes, pois cada diagonal possui duas extremidades, uma em cada vértice. Por exemplo as diagonais $\overline{A_1A_3}$ e $\overline{A_3A_1}$ são as mesmas, porém estão sendo contadas duas vezes. Logo teremos que dividir o total de $n(n-3)$ diagonais por dois.

Portanto o número de diagonais de um polígono convexo de n lados é $d_n = \frac{n(n-3)}{2}$, para todo $n \geq 3$.

Demonstração: Temos $P(n)$: $d_n = \frac{n(n-3)}{2}, \forall\, n \geq 3$ e seja X o conjunto dos $n \in \mathbb{N}$, para os quais a propriedade vale, mostraremos por indução que $X = \mathbb{N}$, temos que $3 \in X$, pois $n = 3 \to d_3 = \frac{3(3-3)}{2} = 0$. Essa afirmação é verdadeira, pois um triângulo não possui diagonais. Suponha que $n \in X$, isto é, $P(n)$ é verdadeira para algum n, mostraremos que $n + 1 \in X$, ou seja, que $d_{(n+1)} = \frac{(n+1)[(n+1)-3]}{2} = \frac{(n+1)(n-2)}{2}$. Quando adicionamos o vértice A_{n+1} temos que as $\frac{n(n-3)}{2}$ diagonais do polígono $A_1A_2 \ldots A_n$ continuam sendo diagonais do $A_1A_2 \ldots A_nA_{n+1}$, o lado A_1A_n se torna diagonal de $A_1A_2 \ldots A_nA_{n+1}$ e do vértice A_{n+1} partem $(n+1) - 3 = n - 2$ novas diagonais. Assim, o total de diagonais do $A_1A_2 \ldots A_nA_{n+1}$ é $\frac{n(n-3)}{2} + 1 + (n-2) = \frac{n^2-3n}{2} + n - 1 = \frac{n^2-3n+2(n-1)}{2} = \frac{n^2-n-2}{2} = \frac{n^2+n-n-n-2}{2} = \frac{n(n+1)-2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n-2)}{2} = d_{n+1}$. Como $1 \in X$, e $n \in X \ \to n + 1 \in X$, concluímos por indução que $X = \mathbb{N}$.

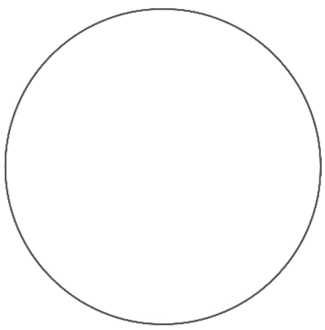
5.1.2 Pizza de Steiner

Jacob Steiner[7] propôs e resolveu, em 1826, o seguinte problema:

O maior número de partes possíveis em que se pode dividir o plano com n retas deste plano é $p_n = \frac{n(n+1)}{2} + 1$.

Pensando no plano como se fosse uma grande pizza, temos uma explicação para o nome do problema, vamos inicialmente realizar a conjectura de como chegar a esta fórmula e logo após demonstrar o problema através da indução matemática.

Figura 4 – Plano sem corte

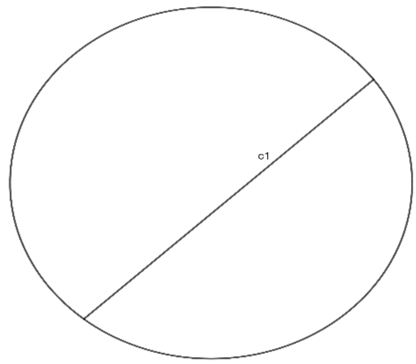


Fonte: Elaborado pela autora.

[7] Jakob Steiner (Utzenstorf, 18 de março de 1796 – Berna, 1 de abril de 1863) foi um matemático suíço que trabalhou principalmente na área de geometria.

Temos um plano conforme acima, onde o plano sem corte algum, fica com apenas uma região.

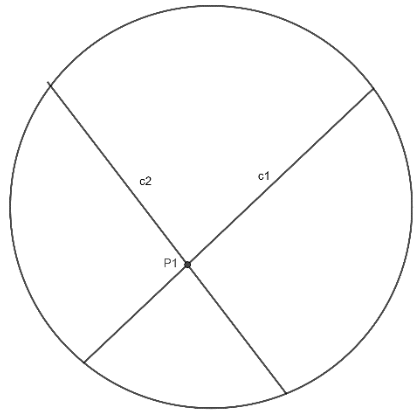
Figura 5 – Plano dividido em duas partes



Fonte: Elaborado pela autora.

Agora se fizermos um corte conforme está ilustrado acima, teremos que o plano ficará dividido no total de duas partes.

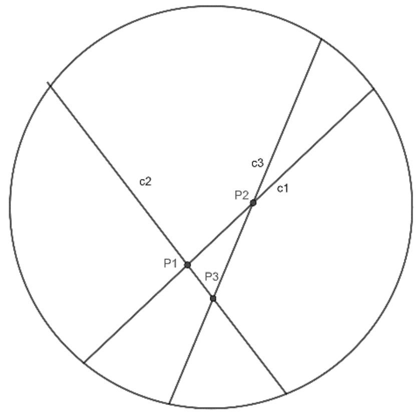
Figura 6 – Plano dividido em quatro partes



Fonte: Elaborado pela autora.

Note que ao fazer o segundo corte, passamos a ter 4 partes, conforme ilustrado acima.

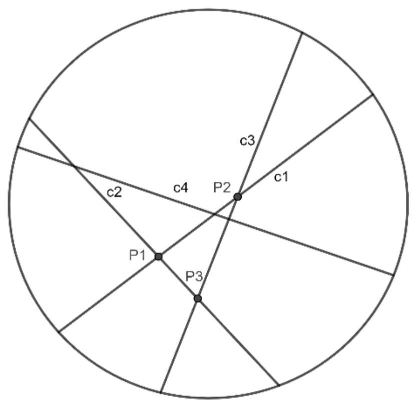
Figura 7 – Plano dividido em seis partes



Fonte: Elaborado pela autora.

Agora observe na figura acima que se fizéssemos o terceiro corte passando pelo ponto de intercessão dos outros dois cortes, teríamos um total de seis partes, mas como o problema pede para que encontremos maior número de partes possíveis, isso só irá acontecer se passarmos o terceiro corte de maneira que não passe pelo ponto de intercessão dos dois anteriores, assim obteremos 7 pedaços.

Figura 8 – Plano dividido em onze partes



Fonte: Elaborado pela autora.

Fazendo um quarto corte, de maneira que não passe por nenhuma intercessão de cortes anteriores, vamos obter um total de 11 pedaços.

Agora observe, como ficaram os resultados que encontramos na tabela a seguir:

Tabela 2 – Resultado da aplicação da Pizza de Steiner

Cortes	Pedaços
0	1
1	$2 = 1 + 1$
2	$4 = 1 + 1 + 2$
3	$7 = 1 + 1 + 2 + 3$
4	$11 = 1 + 1 + 2 + 3 + 4$
...	...
n	$1 + 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n$

Fonte: Elaborada pela autora.

Note que temos um certo padrão, pois a cada linha, escrevemos o que estava na linha anterior somado com o número de cortes. Seja então que para n cortes, teremos um número R de regiões que satisfaçam a soma $R = 1 + 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n$.

Esta soma é o mesmo que $R = 1 + (1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n) = 1 + \frac{n(n+1)}{2}$. Portanto, concluímos a conjectura da nossa fórmula, agora precisamos demonstrá-la para provar que é verdadeira.

Demonstração: Temos $P(n)$: $\frac{n(n+1)}{2} + 1$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ e seja X o conjunto dos $n \in \mathbb{N}$, para os quais a propriedade vale, mostraremos por indução que $X = \mathbb{N}$. Temos que $1 \in X$, pois $p_1 = \frac{1(1+1)}{2} + 1 = 2$, o que é claramente verdade, conforme vimos anteriormente. Suponha que $n \in X$, isto é, $P(n)$ é verdadeira para algum n, mostraremos que $n + 1 \in X$, ou seja, que traçando-se n retas obtemos, por hipótese, $\frac{n(n+1)}{2} + 1$ partes. A questão é como podemos traçar a reta de ordem $n + 1$ de modo a obter o maior número de partes? Obteremos o maior número de partes se a reta de ordem $n + 1$ encontrar cada uma das outros retas em pontos que não sejam de intersecção, como já havíamos observado na conjectura. Temos então que a reta de ordem $n + 1$ ao tocar a primeira reta divide em dois pedaços a parte em que se encontrava inicialmente. Em seguida divide, também em dois pedaços a parte seguinte, e assim sucessivamente cada reta que toca ela vai sempre dividindo em dois pedaços as partes em que passa antes de encontrar cada uma das retas. Com isso são geradas $n + 1$ partes a mais do que tinha e, portanto, o número de partes máximas obtidas com $n + 1$ retas é $\frac{n(n+1)}{2} + 1 + (n + 1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} + 1$. Como $1 \in X$, e $n \in X \rightarrow n + 1 \in X$, concluímos por indução que $X = \mathbb{N}$.

Nesta aplicação da Pizza de Steiner apresentaremos a seguir um exemplo de sequência didática que pode ser abordada em sala de aula.

Tabela 3 – Sequência Didática - Problema da Pizza de Steiner

SEQUÊNCIA DIDÁTICA PROBLEMA DA PIZZA DE STEINER	
Apresentação da proposta aos alunos	Neste momento é necessário expor aos alunos o problema da pizza de Steiner e escutar o que lhes vem à cabeça neste primeiro contato com o problema. Deixe que eles debatam sobre possíveis métodos que lhes dê condições de encontrar a solução.
Objetivos	Para que a tentativa de solução fique mais real para os alunos, pode-se pedir a um deles que se dirija ao quadro, e que o veja como um plano, então traça-se uma reta dividindo o quadro em duas regiões, após isso pede-se a um segundo aluno, que trace uma reta de modo que o quadro fique dividido no maior número de regiões possíveis. Repita essa operação com mais dois ou três alunos. Provavelmente a observação feita pelos alunos será que, para obter o número máximo de regiões, as retas deveriam intersectar-se. Com isso, será possível mensurar o aprendizado do tema e conseguir identificar as principais dúvidas e dificuldades dos aluno.
Definição da sequência	Com os dados experimentados, o professor juntamente aos alunos deve montar uma tabela com os dados encontrados e achar uma fórmula para o problema. Após isso, pedir aos alunos que a demonstrem.
Produção Final	Fazer em sala de aula a correção utilizando o método da indução matemática, e assim será possível mostrar aos alunos que o princípio da indução pode abranger diversas áreas da matemática.

Fonte; Elaborada pela autora.

Entendemos que o professor dever ter uma intencionalidade didática, a fim de proporcionar ao aluno que ele mesmo consiga administrar seus conhecimentos, por isso a importância de aplicar situações que exijam dele maior habilidade de pensamento, pois os problemas que já são aplicados rotineiramente podem ser resolvidos por eles por replicação de métodos.

5.2 Aplicações Algébricas

5.2.1 Progressão Aritmética

Aplicação 1 (Expressão do Termo Geral de uma P.A.)

Segundo Hefez (2009, p. 24) uma Progressão Aritmética (P.A.) é uma sequência de números (a_n) tal que, a partir do segundo termo, cada termo a_n é igual ao anterior a_{n-1} somado a um número fixo r chamado de razão.

Portanto, é dado o primeiro termo a_1e define-se $a_n = a_{n-1} + r$, se $n \geq 2$.

Para achar uma fórmula fechada para o termo de ordem n da sequência, observe que

$$a_2 = a_1 + r,$$

$$a_3 = a_2 + r = a_1 + r + r = a_1 + 2r$$

$$a_4 = a_3 + r = a_1 + 2r + r = a_1 + 3r$$

$$a_5 = a_4 + r = a_1 + 3r + r = a_1 + 4r$$

$$\dots$$

$$a_n = a_1 + (n-1).r$$

Portanto, através de uma conjectura encontramos que a fórmula para o termo geral de uma P.A. de primeiro termo a_1 e razão r seja $a_n = a_1 + (n-1).r$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Vamos demonstrar essa fórmula por indução.

Demonstração: Temos $P(n)$: $a_n = a_1 + (n-1)r$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ e seja X o conjunto dos $n \in \mathbb{N}$, para os quais a propriedade vale, mostraremos por indução que $X = \mathbb{N}$. Temos que $1 \in X$, pois $a_1 = a_1 + (1-1).r = a_1$. Suponha que $n \in X$, isto é, $P(n)$ é verdadeira para algum n, mostraremos que $n+1 \in X$, ou seja, que $a_{n+1} = a_1 + n.r$. Por definição de P.A., tem-se que $a_{n+1} = a_n + r$. Deste modo, pela hipótese de indução, pode-se escrever que: $a_{n+1} = a_n + r = a_1 + (n-1).r + r = a_1 + n.r - r + r = a_1 + n.r$. Como $1 \in X$, e $n \in X \rightarrow n+1 \in X$, concluímos por indução que $X = \mathbb{N}$.

Aplicação 2 (Soma dos n primeiros termos de uma P.A.)

Outro resultado matemático importante com a Progressão Aritmética é a expressão da soma dos n primeiros termos de uma P.A., onde o primeiro termo é a_1e a razão é r. Vamos conjecturar esta fórmula.

Dada uma PA. qualquer, somaremos os n primeiros termos dela. Matematicamente, teremos:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$

Se abaixo dessa soma de termos, escrevermos outra com os mesmos termos da anterior, porém no sentido decrescente, por isso ambas serão igualadas a S_n.

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$
$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_3 + a_2 + a_1$$

Note que essas duas expressões foram obtidas de uma única P.A., podemos somar as expressões para obter:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$
$$\underline{+\, S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_3 + a_2 + a_1}$$
$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \cdots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

Lembre-se de que a soma dos termos equidistantes dos extremos é igual à soma dos extremos. Por isso, cada parênteses pode ser trocado pela soma dos extremos, por exemplo, sejam:

$$S_{50} = 1 + 2 + 3 + \cdots + 48 + 49 + 50$$
$$\underline{+\, S_{50} = 50 + 49 + 48 + \cdots + 3 + 2 + 1}$$
$$2S_{50} = (50 + 1) + (49 + 2) + (48 + 3) + \cdots + (48 + 3) + (49 + 2) + (50 + 1)$$
$$2S_{50} = 51 + 51 + 51 + \cdots + 51 + 51 + 51$$

Voltando a nossa equação original teremos:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \cdots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$
$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \cdots + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n)$$
$$2S_n = n(a_1 + a_n)$$
$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

Portanto

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \frac{(a_1 + a_n).n}{2}$$

Demonstração: Temos $P(n)$: $S_n = \frac{(a_1+a_n).n}{2}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ e seja X o conjunto dos $n \in \mathbb{N}$, para os quais a propriedade vale, mostraremos por indução que $X = \mathbb{N}$. Temos que $1 \in X$, pois $S_1 = \frac{(a_1+a_1).1}{2} = \frac{2a_1}{2} = a_1$. Suponha que $n \in X$, isto é, $P(n)$ é verdadeira para algum n, mostraremos que $n + 1 \in X$, ou seja, que $S_{n+1} = \frac{(a_1+a_{n+1}).(n+1)}{2}$. Temos que :

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1} = \frac{(a_1 + a_n).n}{2} + a_1 + n.r$$
$$= \frac{(a_1 + a_n).n + 2.a_1 + 2(n.r)}{2}$$
$$= \frac{(a_1 + a_n + r).n + 2a_1 + n.r}{2}$$

$$= \frac{(a_1 + a_{n+1})n + (a_1 + a_1 + n.r)}{2}$$

$$= \frac{(a_1 + a_{n+1}).n + (a_1 + a_{n+1})}{2}$$

$$= \frac{(a_1 + a_{n+1}).(n + 1)}{2}$$

como $1 \in X$, e $n \in X \rightarrow n + 1 \in X$, concluímos por indução que $X = \mathbb{N}$.

5.2.2 Progressão Geométrica

Aplicação 1 (Expressão do Termo Geral de uma P.G.)

Segundo Hefez (2009, p.27) uma Progressão Geométrica (P.G.) é uma sequência de números a_n tal que, a partir do segundo termo, cada termo a_né igual ao anterior a_{n-1} multiplicado por um número fixo q chamado de razão. Portanto, é dado o primeiro termo a_1e define-se

$a_n = a_{n-1}.q$, se $n \geq 2$

Para achar uma fórmula fechada para o termo de ordem n da sequência, observe que

$$a_2 = a_1.q$$
$$a_3 = a_2.q = a_1.q.q = a_1.q^2$$
$$a_4 = a_3.q = a_1.q^2.q = a_1.q^3$$
$$a_5 = a_4.q = a_1.q^3.q = a_1.q^4$$
$$\ldots$$
$$a_n = a_1.q^{n-1}$$

Portanto, através de uma conjectura encontramos que a fórmula para o termo geral de uma P.G. de primeiro termo a_1 e razão q seja $a_n = a_1.q^{n-1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Vamos demonstrar essa fórmula por indução.

Demonstração: Temos $P(n)$: $a_n = a_1.q^{n-1}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ e seja X o conjunto dos $n \in \mathbb{N}$, para os quais a propriedade vale, mostraremos por indução que $X = \mathbb{N}$. Temos que $1 \in X$, pois $a_1 = a_1.q^{1-1} = a_1$. Suponha que $n \in X$, isto é, $P(n)$ é verdadeira para algum n, mostraremos que $n + 1 \in X$, ou seja, que $a_{n+1} = a_1.q^n$. Por definição de P.G., tem-se que $a_{n+1} = a_n.q$. Deste modo, pela hipótese de indução, pode-se escrever que: $a_{n+1} = a_n.q = a_1.q^{n-1}.q = a_1.q^n$. Como $1 \in X$, e $n \in X \rightarrow n + 1 \in X$, concluímos por indução que $X = \mathbb{N}$.

Aplicação 2 (Soma dos n primeiros termos de uma P.G.)

Seja uma progressão geométrica (a_n) de primeiro termo a_1 e razão q, iremos conjecturar a fórmula da soma de seus n primeiros termos:

Seja a PG $(a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n)$. Para o cálculo da soma dos n primeiros termos S_n, vamos considerar o que segue:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n$$

Multiplicando ambos os membros pela razão q, temos:

$$S_n . q = a_1 . q + a_2 . q + a_3 . q + a_4 . q + \cdots + a_n . q$$

Pela definição de PG podemos reescrever isso como:

$$S_n . q = a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n + a_n . q$$

Observe que $a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n$ é igual a $S_n - a_1$. Substituindo, teremos:

$$S_n . q = S_n - a_1 + a_n . q$$

Reorganizando a equação:

$$S_n . q - S_n = a_n . q - a_1$$

$$S_n(q-1) = a_n . q - a_1$$

$$S_n = \frac{a_n . q - a_1}{q-1}$$

Se substituirmos $a_n = a_1 . q^{n-1}$, como é definido pela PG, obteremos uma nova apresentação para fórmula da soma:

$$S_n = \frac{(a_1 . q^{n-1}) . q - a_1}{q-1}$$

$$S_n = \frac{a_1 . q^n - a_1}{q-1}$$

$$S_n = \frac{a_1 . (q^n - 1)}{q-1}$$

Portanto, $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \frac{a_1 .(q^n - 1)}{q-1}$

Demonstração: Temos P(n): $S_n = \frac{a_1 .(q^n-1)}{q-1}, \forall\, n \in \mathbb{N}$ e seja X o conjunto dos $n \in \mathbb{N}$, para os quais a propriedade vale, mostraremos por indução que $X = \mathbb{N}$. Temos que $1 \in X$, pois $S_1 = \frac{a_1(q^1-1)}{q-1} = a_1$. Suponha que $n \in X$, isto é, $P(n)$ é verdadeira para algum n, mostraremos que n+1 $\in X$, ou seja, que $S_{n+1} = \frac{a_1 .(q^{n+1}-1)}{q-1}$. Temos que

$$S_{n+1} = S_n + a_1 . q^n = \frac{a_1 . (q^n - 1)}{q - 1} + a_1 . q^n$$
$$= \frac{a_1 . (q^n - 1) + (q - 1)(a_1 . q^n)}{q - 1}$$
$$= \frac{a_1 q^n - a_1 + a_1 . q^{n+1} - a_1 . q^n}{q - 1}$$
$$= \frac{a_1 . (q^{n+1} - 1)}{q - 1}$$

como $1 \in X$, e $n \in X \ \rightarrow n + 1 \in X$, concluímos por indução que $X = \mathbb{N}$.

5.2.3 Demonstrações com Desigualdade

Aplicação 1 – Desigualdade de Bernoulli

A desigualdade de Bernoulli[8] pode ser utilizada em problemas relacionados à análise combinatória, que diz que o polinômio real $1 + x$, elevado ao número inteiro não negativo n, é maior ou igual à soma de 1 com o produto de n e x, quando x é maior que -1.

Ou seja para todo $n \in N$ e $\forall\, x \in R$ com $x \ > -1$, verifica-se a igualdade:

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx$$

Demonstração: Temos *P(n):* $(1 + x)^n \geq 1 + nx$ e seja X o conjunto dos $n \in \mathbb{N}$, para os quais a propriedade vale, mostraremos por indução que $X = \mathbb{N}$. Temos que $1 \in X$, pois $(1 + x)^1 \geq 1 + 1 * x \rightarrow (1 + x) \geq 1 + x$. Suponha que $n \ \in X$, isto é, $P(n)$ é verdadeira para algum n, mostraremos que $n + 1 \in X$, ou seja, que $(1 + x)^{n+1} \geq 1 + (n + 1)x$. Temos que $(1 + x)^{n+1} = (1 + x) * (1 + x)^n \geq (1 + x) * (1 + nx) = 1 + (n + 1)x + nx^2 \geq 1 + (n + 1)x$. Observe que $1 + (n + 1)x + nx^2 \geq 1 + (n + 1)x$, pois $nx^2 \geq 0$, logo: $(1 + x)^{n+1} \geq 1 + (n + 1)x$. Como $1 \in X$, e $n \in X \ \rightarrow n + 1 \in X$, concluímos por indução que $X = \mathbb{N}$.

Aplicação 2 – Mostre que $n! < n^n$, para todo natural n.

Demonstração: Temos $P(n)$: $n! < n^n, \forall\, n \geq 2 \in \mathbb{N}$ e seja X o conjunto dos $n \in \mathbb{N}$, para os quais a propriedade vale, mostraremos por indução que $X = \mathbb{N}$. Temos que $2 \in X$, pois $2! < 2^2 \rightarrow 2 < 4$. Suponha que $n \in X$, isto é, $P(n)$ é verdadeira para algum n, mostraremos que $n + 1 \in X$, ou seja, que $(n + 1)! < (n + 1)^{n+1}$. Temos que $(n + 1)! = n!\,(n + 1) < n^n(n + 1) <$

[8] Jacques Bernoulli (Basileia, 27 de Dezembro de 1654 – Basileia, 16 de Agosto de 1705), foi o primeiro matemático a desenvolver o cálculo infinitesimal.

$(n+1)^n(n+1) = (n+1)^{n+1}$. Logo $(n+1)! < (n+1)^{n+1}$ .Como $1 \in X$, e $n \in X \ \rightarrow n+1 \in X$, concluímos por indução que $X = \mathbb{N}$.

5.3 Aplicações com Aritmética

5.3.1 Teorema Fundamental da Aritmética

Todo número natural maior do que 1 ou é primo ou se escreve de modo único como um produto de números primos.

Demonstração: Para $n = 2$, o resultado é trivial. Suponhamos válido para todo número natural menor do que n. Resta provar que é válido para n, daí temos as seguintes possibilidades:

1) Se n é primo, nada temos a fazer.

2) Se n é composto, então existe n_1 e n_2, tal que $n = n_1.n_2$, onde $1 < n_1 < n$ e $1 < n_2 < n$. Pela hipótese de indução temos que existem primos $p_1.p_2.p_3 \ldots p_r$ e $q_1.q_2.q_3 \ldots q_s$, tais que $n_1 = p_1.p_2.p_3 \ldots p_r$ e $n_2 = q_1.q_2.q_3 \ldots q_s$, daí $n = n_1.n_2 = p_1.p_2.p_3 \ldots p_r.q_1.q_2.q_3 \ldots q_s \rightarrow n = p_1.p_2.p_3 \ldots p_r.q_1.q_2.q_3 \ldots q_s$, que é um produto de números primos.

Portanto, pelo princípio da Indução, a proposição está provada.

O mesmo Teorema pode ser demonstrado também da seguinte maneira:

Demonstração: Para $n = 2$, o resultado é trivial. Consideremos um natural n e suponhamos que para todo natural m, com $2 \leq m \leq n$, com m primo ou produto de primos. Se $n+1$ é primo então não há o que provar. Vamos supor que $n+1$ não é primo, digamos que $n+1 = a.b, com\ a, b\ \in N\ e\ a < n+1\ e\ b < n+1$, então por hipótese de indução a é primo ou produto de primos e o mesmo ocorre para b, em qualquer caso, $n+1 = a.b$ é um produto de primos. Portanto, pelo princípio da Indução, a proposição está provada.

Aplicação 1 - Será que qualquer número natural, a partir de 8, pode ser escrito na forma $3a + 5b, com\ a, b\ \in \{0\} \cup \mathbb{N}$?

Vamos realizar a prova por indução.

Demonstração: Seja $P(n){:}\, n = 3a + 5b, \forall\ a, b\ \in \{0\} \cup N, n\ \geq 8$ e seja X o conjunto dos $n \in \mathbb{N}$, para os quais a propriedade vale, mostraremos por indução que $X = \mathbb{N}$. Temos que $8 \in X$, pois $8 = 3.1 + 5.1$. Suponha que $n \in$ X, isto é, $P(n)$ é verdadeira para algum n, mostraremos que $n+1 \in$ X, em duas situações, para $b = 0\ e\ b \neq 0$. Se $b = 0$, por hipótese de indução temos que $n = 3a + 5b \rightarrow n+1 = (3a + 5 * 0) + 1 = 3a + 1 \rightarrow n = 3a$. Como devemos ter $n = 3a \geq 8$, concluímos que $a \geq 3$, podemos reescrever nossa equação como: $n+1 = 3a + 1 =$

$3(a-3)+3*3+1=3(a-3)+5*2$. Se $b \neq 0 \rightarrow n+1=(3a+5b)+1$, que pode ser reescrita como: $n+1=(3a+5b)+1=3a+5(b-1)+5+1=3a+5(b-1)+6=3(a+2)+5(b-1)$. Como $8 \in X$, e $n \in X \rightarrow n+1 \in X$, concluímos por indução que $X = \mathbb{N}$. Logo a afirmação que qualquer número natural, a partir de 8, pode ser escrito na forma $3a+5b, com\ a, b \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ é verdadeira.

5.3.2 Aplicações em Divisibilidade

Aplicação 1

Sejam $a, b \in Z$ e $n \in \mathbb{N}$. Temos que $a-b$ divide $a^n - b^n$.

Demonstração: Temos $P(n): a-b|a^n-b^n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ e seja X o conjunto dos $n \in \mathbb{N}$, para os quais a propriedade vale, mostraremos por indução que $X = \mathbb{N}$. Temos que $1 \in X$, pois $a-b|a^1-b^1$. Suponha que $n \in$ X, isto é, $P(n)$ é verdadeira para algum n, mostraremos que $n+1 \in$ X, ou seja, que $a-b|a^{n+1}-b^{n+1}$. Temos que:

$$a^{n+1}-b^{n+1}=a^n.a-b^n.b$$
$$=a^n.a+a.b^n-a.b^n-b^n.b$$
$$=a(a^n-b^n)+b^n(a-b)$$

Como $a-b|a-b$ e $a-b|a^n-b^n$ por hipótese de indução, portanto $a-b|a^{n+1}-b^{n+1}$. Logo $n+1 \in X$, concluímos por indução que $X = \mathbb{N}$.

Aplicação 2

Sejam $a, b \in Z$ e $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Temos que $a+b$ divide $a^{2n+1}+b^{2n+1}$.

Demonstração: Temos $P(n): a+b|a^{2n+1}+b^{2n+1}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ e seja X o conjunto dos $n \in \mathbb{N}$, para os quais a propriedade vale, mostraremos por indução que $X = \mathbb{N}$. Temos que $0 \in X$, pois $a+b|a^1+b^1$. Suponha que $n \in X$, isto é, $P(n)$ é verdadeira para algum n, mostraremos que $n+1 \in X$, ou seja, que $a+b|a^{2n+3}+b^{2n+3}$. Temos que:

$$a^{2n+3}+b^{2n+3}=a^{2n+1}.a^2+b^{2n+1}.b^2$$
$$=a^{2n+1}.a^2+b^{2n+1}.b^2+b^{2n+1}.a^2-b^{2n+1}.a^2$$
$$=a^2(a^{2n+1}+b^{2n+1})-b^{2n+1}(a^2-b^2)$$

Como $a+b|a^{2n+1}+b^{2n+1}$ por hipótese de indução, e $a+b|a^2-b^2$, pois $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$, portanto $a+b|a^{2n+3}+b^{2n+3}$. Logo n+1 $\in$ X, concluímos por indução que $X = \mathbb{N}$.

Aplicação 3

Prove que $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ é múltiplo de 3.

Demonstração: Temos $P(n): 3|n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ e seja X o conjunto dos $n \in \mathbb{N}$, para os quais a propriedade vale, mostraremos por indução que $X = \mathbb{N}$. Temos que $1 \in X$, pois $1^3 + (1+1)^3 + (1+2)^3 = 1 + 8 + 27 = 36 = 3 * 12$. Suponha que $n \in X$, isto é, $P(n)$ é verdadeira para algum n, mostraremos que $n+1 \in$ X, ou seja, que $3|(n+1)^3 + (n+2)^3 + (n+3)^3$. Temos que: $(n+1)^3 + (n+2)^3 + (n+3)^3 = (n+1)^3 + (n+2)^3 + (n^3 + 9n^2 + 27n + 27) = n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 + 3(3n^2 + 9n + 9)$. Por hipótese de indução $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 = 3k$, temos então: $(n+1)^3 + (n+2)^3 + (n+3)^3 = 3k + 3(3n^2 + 9n + 9) = 3(k + 3n^2 + 9n + 9)$, que é múltiplo de 3. Como $1 \in X$, e $n \in X \rightarrow n+1 \in X$, concluímos por indução que $X = \mathbb{N}$.

Aplicação 4

Prove que $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ é múltiplo de 133.

Demonstração: Temos $P(n): 133|11^{n+2} + 12^{2n+1}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ e seja X o conjunto dos $n \in \mathbb{N}$, para os quais a propriedade vale, mostraremos por indução que $X = \mathbb{N}$. Temos que $1 \in X$, pois $11^{1+2} + 12^{2*1+1} = 11^3 + 12^3 = 3059$, que é múltiplo de 133. Suponha que $n \in X$, isto é, $P(n)$ é verdadeira para algum n, mostraremos que $n+1 \in$ X, ou seja, que $133|11^{n+3} + 12^{2(n+1)+1}$. Temos que:

$$
\begin{aligned}
11^{n+3} + 12^{2(n+1)+1} &= 11^{n+3} + 12^{2n+3} = 11^{n+2} * 11 + 12^{2n+1} * 12^2 \\
&= 11^{n+2} * 11 + 12^{2n+1} * 12^2 + 11^{n+2} * 12^2 - 11^{n+2} * 12^2 \\
&= 12^2(11^{n+2} + 12^{2n+1}) - 11^{2n+2}(12^2 - 11) \\
&= 12^2(11^{n+2} + 12^{2n+1}) - 11^{2n+2} * 133
\end{aligned}
$$

sabendo que $133|12^2(11^{n+2} + 12^{2n+1})$ por hipótese de indução e $133|11^{2n+2} * 133$, logo $133|12^2(11^{n+2} + 12^{2n+1}) - 11^{2n+2} * 133$.Como $1 \in X$, e $n \in X \rightarrow n+1 \in X$, concluímos por indução que $X = \mathbb{N}$.

Aplicação 5

Prove por indução matemática que $2^n|3^{2^n} - 1, \forall\, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Demonstração: Temos $P(n): 2^n|3^{2^n} - 1, \forall\, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e seja X o conjunto dos $n \in \mathbb{N}$, para os quais a propriedade vale, mostraremos por indução que $X = \mathbb{N}$. Temos que $0 \in X$, pois $2^0|3^{2^0} - 1 = 1|2$. Suponha que $n \in$ X, isto é, $P(n)$ é verdadeira para algum n, mostraremos que $n+1 \in$ X, ou seja, que $2^{n+1}|3^{2^{n+1}} - 1$. Temos que: $3^{2^{n+1}} - 1 = \left(3^{2^n} - 1\right) * (3^{2^n} + 1)$.

Sabendo que $3^{2^n}+1$ é par, logo $2^{n+1}|3^{2^{n+1}}-1$. Como $1 \in X$, e $n \in X \rightarrow n+1 \in X$, concluímos por indução que $X = \mathbb{N}$.

5.4 Aplicações no Mundo Material

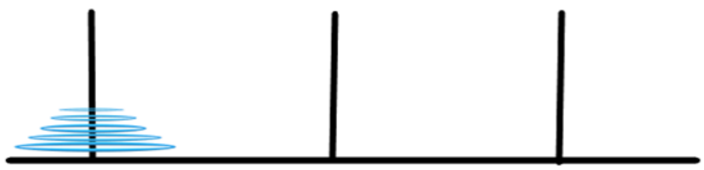
5.4.1 Torre de Hanói

A Torre de Hanói é um jogo muito conhecido, que pode ser facilmente fabricado, e é muito utilizado pelos alunos de educação física. Ele foi idealizado e publicado pelo matemático francês Edouard Lucas, em 1882, que na ocasião formulou a seguinte lenda:

Havia em um templo 3 estacas e n discos de ouro, de diâmetros diferentes. Inicialmente os discos estavam enfiados na primeira estaca em ordem crescente de diâmetros, de cima para baixo. Os sacerdotes se ocupavam em transferi-los para a terceira estaca, usando a segunda como estaca auxiliar. Nesse processo de transferência, se movia apenas um disco de cada vez. Quando todos estivessem enfiados na terceira estaca, o mundo acabaria.

Resumindo, trata-se de um jogo de n discos, de raios distintos, com um furo no seu centro e uma estrutura onde ficam três hastes. Os n discos ficam enfiados em uma das hastes, digamos a primeira, de modo que nenhum disco fique acima de um disco de raio menor. O jogo consiste em transferir os n discos de uma haste para outra, deslocando um disco de cada vez, sempre atendendo a regra acima (FREITAS, 2013, p. 86).

Figura 9 – Torre de Hanói



Fonte: Elaborado pela autora.

As perguntas a serem solucionadas são:

1. O jogo tem solução para cada $n \in \mathbb{N}$?

2. Em caso afirmativo, qual é o número mínimo M_n de movimentos para resolver o problema com n discos?

Primeiro façamos uma conjectura:

- Para $n = 1$, basta um movimento, então

$$M_1 = 1 = 2^1 - 1$$

- Para $n = 2$, o menor número de movimentos necessários para transferir os discos para outra haste são três movimentos.

$$M_2 = 3 = 2^2 - 1$$

- Para $n = 3$, o menor número de movimentos necessários para transferir os discos para outra haste são sete movimentos.

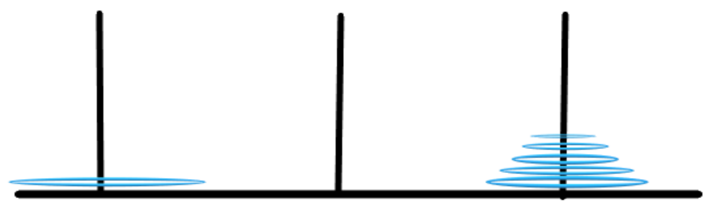
$$M_3 = 7 = 2^3 - 1$$

Verifica-se que o número mínimo M_n de movimentos para transferir n discos satisfaz a relação $M_n = 2^n - 1$.

A conjectura ficará muito mais real e concreta ao aluno realizada em sala de juntamente com o jogo da torre de Hanói.

Demonstração: Considere a sentença $P(n)$ onde o jogo com n discos tem solução. Obviamente, $P(1)$ é verdade, pois verificamos acima. Suponha que $P(n)$ seja verdadeiro, para algum n, ou seja, que o jogo com n discos tem solução. Vamos provar que o jogo com $n + 1$ discos tem solução. Para ver isso, resolva inicialmente o problema para os n discos superiores da pilha, transferindo-os para uma das hastes livre (isso é possível, pois estamos admitindo que o problema com n discos possua solução):

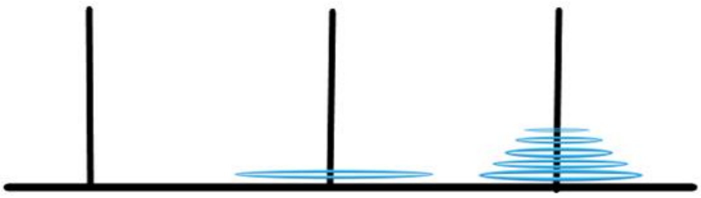
Figura 10 – Demonstração da ação do Jogo Torre de Hanói 1



Fonte: Elaborado pela autora.

em seguida, transfira o disco que restou na pilha original (o maior dos discos) para a haste vazia.:

Figura 11 – Demonstração da ação do Jogo Torre de Hanói 2



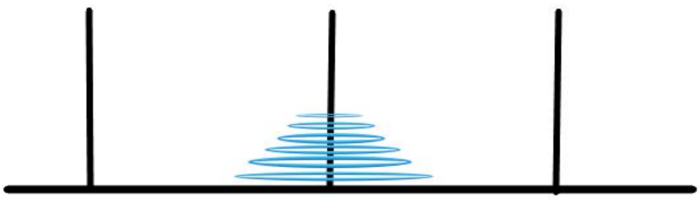
Fonte: Elaborado pela autora.

feito isto, resolva novamente o problema para os n discos que estão juntos, transferindo-os para a haste que contém o maior dos discos:
isso mostra que o problema com $n + 1$ discos também possui solução, e, portanto, por Indução Matemática, que $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

Para determinar uma fórmula para M_n, note que, para resolver o problema para $n + 1$ discos com o menor número de passos, foi necessário passar duas vezes pela solução mínima com n discos.

Logo para $M_{n+1} = 2M_n + 1$. Portanto fica provado que o número mínimo de movimentos para transferir n discos satisfaz a relação $M_n = 2^n - 1$.

Figura 12 – Demonstração da ação do Jogo Torre de Hanói 3



Fonte: Elaborado pela autora.

5.4.2 Problema da Moeda Falsa

Uma das 3^n moedas de ouro de um Rei é falsa e pesa menos que as verdadeiras que tem todas o mesmo peso. Essa diferença de peso é quase imperceptível e não se pode determinar a moeda falsa sem o uso de uma balança de dois pratos. Mostre que com n pesagens o Rei pode descobrir qual é a moeda falsa.

Demonstração[9]*:* Seja $P(n)$: Dadas 3^n moedas, pode-se encontrar, nas condições dadas, a moeda falsa com apenas n pesagens. Para $n = 1$, temos três moedas. Coloca-se uma em cada prato e deixa-se a outra de fora. Assim, descobre-se sem maiores problemas a falsa, uma vez que se os pratos ficarem equilibrados, a de fora será a falsa, e caso isto não ocorra, a falsa será, naturalmente, a que estiver no prato mais alto. Agora admite-se que $\underline{P(n)}$ é verdadeira, isto é, que: dadas 3^n moedas, podemos encontrar, nas condições dadas, a moeda falsa com apenas n pesagens. Deve-se mostrar que $P(n+1)$ também é verdadeira. Para isto, divide-se as 3^{n+1} moedas em 3 partes de 3^n moedas cada. Escolhendo duas partes para colocar na balança. Se a balança equilibrar, então a moeda falsa está na parte que não foi escolhida. Por outro lado, se a balança desequilibrar, então a moeda falsa é uma das 3^n moedas presentes no prato mais alto. De qualquer modo, com uma pesagem podemos identificar em qual das três partes está a moeda falsa, ficando apenas 3^n para pesquisar. Como por hipótese de indução, se tivermos 3^n moedas pode-se encontrar a moeda falsa com apenas n pesagens, então para 3^{n+1} moedas basta $n + 1$ pesagens para se descobrir a moeda falsa. Logo, $P(n+1)$ também é válida. Pelo princípio de indução matemática, tem-se que $P(n)$ é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

5.4.3 Os Coelhos de Fibonacci

Trata-se do seguinte problema proposto e resolvido pelo matemático italiano Leonardo[10] de Pisa em seu livro Liber Abacci, de 1202: um casal de coelhos recém-nascidos foi posto num lugar cercado. Como determinar quantos casais de coelhos terá após um ano, supondo que, a cada mês, um casal de coelhos produz outro casal e que um casal começa a procriar dois meses após o seu nascimento.

O resultado foi resolvido conforme tabela abaixo:

Tabela 4 – Esquema de reprodução dos coelhos de Fibonacci

Mês	**Número de casais do mês anterior**	**Número de casais recém nascidos**	**Total**
1º	0	1	1
2º	1	0	1
3º	1	1	2

[9] Esta demonstração foi reproduzida do texto de Freitas (2013, p. 89).

[10] **Leonardo Pisano**, nasceu em 1170, e morreu depois de 1240, também conhecido como Leonardo de Pisa ou **Leonardo Fibonacci**, foi o primeiro grande matemático da Europa Cristã medieval.

4º	2	1	3
5º	3	2	5
6º	5	3	8
7º	8	5	13
8º	13	8	21
9º	21	13	34
10º	34	21	55
11º	55	34	89
12º	89	55	144

Fonte: Elaborado pela autora.

Seguindo esta lógica obtém-se a famosa Sequência de Fibonacci, cujos primeiros termos são: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144,... onde o número de casais de coelhos num determinado mês é igual ao número total de casais do mês anterior acrescido do número de casais nascidos no mês em curso, que é igual ao número total de casais do mês anterior ao anterior.

Logo a sequência é dada por $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, com $F_1 = F_2 = 1$. Como a sequência de Fibonacci é uma Recorrência homogênea de 2° ordem, onde após resolvida encontramos a fórmula de Binet, que apresentamos abaixo:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

A demonstração pode ser realizado por indução sobre n.

Demonstração: Seja $P(n)$: $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ e seja X o conjunto dos $n \in \mathbb{N}$, para os quais a propriedade vale, mostraremos por indução que $X = \mathbb{N}$. Temos que $1 \in X$, pois $F_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1 = \frac{1+\sqrt{5}-1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = 1$. Suponha que $n \in$ X, isto é, $P(n)$ é verdadeira para algum n, mostraremos que $n+1 \in$ X. Como $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, logo, por hipótese de indução temos:

$$F_{n+1} = \left[\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] + \left[\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \left[1 + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{-1}\right] - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \left[1 + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{-1}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$$

como $1 \in X$, e $n \in X \ \rightarrow n+1 \in X$, concluímos por indução que $X = \mathbb{N}$.

5.5 Questões da OBMEP

A OBMEP trabalha fazendo a conexão entre o Ensino Básico e o Ensino Superior, e iremos realizar quatro questões que podem ser solucionadas com o método da Indução Matemática.

Questão 1: (OBMEP Banco de Questões 2017, p. 154) Uma sequência de números reais x_n é uma lista ordenada de reais em que o primeiro número da lista é o termo x_1, o segundo é o termo x_2 e assim por diante. Por exemplo, a sequência usual dos números inteiros positivos pode ser descrita como $x_n = n$ para todo inteiro positivo n. Algumas sequências podem ser definidas por equações de recorrências, em que um termo é definido em função dos seus anteriores.

Por exemplo, a sequência de inteiros positivos poderia ser definida por $x_1 = 1 \; e \; x_n = x_{n-1} + 1$ para todo inteiro positivo $n \geq 2$. Desse modo, poderíamos calcular $x_2 = 1 + 1 = 2, x_3 = 2 + 1 = 3$ e assim por diante.

Considere uma sequência de números reais definida por $x_1 = 1 \; e \; x_n = x_{n-1} + \frac{1}{{x_{n-1}}^2}$ para todo inteiro positivo $n \geq 2$.

a) Calcule $x_2, x_3 \; e \; x_4$.

b) Verifique que a sequência é estritamente crescente, ou seja, que $x_n > x_{n-1}$ para todo inteiro positivo n.

c) Perceba que a sequência parece crescer muito pouco. Após calcular alguns termos iniciais, poderíamos suspeitar que nenhum termo excede 2016, mas de fato vamos provar que existem termos maiores que 2016. Para isso, vamos usar a sequência auxiliar $y_n = {x_n}^3$. Prove que $y_n > y_{n-1} + 3$ para todo $n \geq 2$.

Solução

a) Seja $x_n = x_{n-1} + \frac{1}{{x_{n-1}}^2}$ e $x_1 = 1$, então:

$$x_2 = x_1 + \frac{1}{{x_1}^2} = 1 + \frac{1}{1} = 2$$

$$x_3 = x_2 + \frac{1}{{x_2}^2} = 2 + \frac{1}{2^2} = \frac{9}{4}$$

$$x_4 = x_3 + \frac{1}{{x_3}^2} = \frac{9}{4} + \frac{1}{\left(\frac{9}{4}\right)^2} = \frac{793}{324}$$

b) Para qualquer n, se $x_{n-1} \neq 0$, então ${x_{n-1}}^2 > 0$ e $\frac{1}{{x_{n-1}}^2} > 0$ pois todo quadrado de um número real não nulo é positivo. Assim,

$$x_n = x_{n-1} + \frac{1}{{x_{n-1}}^2} > x_{n-1}$$

Como $x_1 = 1 > 0$, pelo argumento anterior, temos $x_2 > x_1 > 0$. Agora, usando x_2 no papel de x_1 no argumento anterior, temos $x_3 > x_2 > 0$. Veja que podemos continuar repetindo o argumento, agora com $x_3$no papel dex_2. Esse processo indutivo nos permite concluir que a sequência é estritamente crescente.

c) Faremos essa prova por indução matemática.

Seja $y_n = {x_n}^3$ e $x_n = x_{n-1} + \frac{1}{{x_{n-1}}^2}$

Temos $P(n)$: $y_n > y_{n-1} + 3, \forall\, n \in \mathbb{N}\; e\; n \geq 2$.

Demonstração: Seja X o conjunto dos $n \in \mathbb{N}$, para os quais a propriedade vale, mostraremos por indução que $X = \mathbb{N}$. Temos que $2 \in X$, pois como $y_2 = {x_2}^3 = \left(x_1 + \frac{1}{{x_1}^2}\right)^3 = 2^3 = 8$ e $y_1 = {x_1}^3 = 1^3 = 1$. Então $y_2 > y_1 + 3 \rightarrow 8 > 1 + 3 = 4$. Suponha que $n \in X$, isto é, $P(n)$ é verdadeira para algum n, mostraremos que $n + 1 \in X$, ou seja, que $y_{n+1} > y_n + 3$. Temos que $y_{n+1} = {x_{n+1}}^3 = \left(x_n + \frac{1}{{x_n}^2}\right)^3 = {x_n}^3 + 3 * {x_n}^2 * \frac{1}{{x_n}^2} + 3 * x_n * \frac{1}{{x_n}^4} + \frac{1}{{x_n}^6} > {x_n}^3 + 3 = y_n + 3$. Logo $y_{n+1} > y_n + 3$. Como $1 \in X$, e $n \in X \rightarrow n + 1 \in X$, concluímos por indução que $X = \mathbb{N}$.

Questão 2: (OBMEP Banco de Questões 2013, p. 72) Sergio pediu para Ivan pensar em um número inteiro positivo. Depois, pediu para Ivan calcular a soma de seus algarismos e, finalmente, elevar ao quadrado o resultado. Sem falar o número em que pensou inicialmente, Ivan contou que obteve como resultado final x. Mostre a Sergio como chegar às seguintes conclusões:

a) Se Ivan tivesse pensado em um número com 3 ou menos algarismos, então x seria menor do que 730.

b) Se Ivan tivesse pensado em um número com 4 algarismos, então x seria menor do que o número no qual Ivan pensou.

c) Se Ivan tivesse pensado em um número com 5 ou mais algarismos, então x seria menor do que o número que Ivan pensou.

Sergio fez depois o seguinte: Considerou o número x que Ivan disse, calculou a soma dos seus algarismos e elevou ao quadrado o resultado. Quando Sergio falou para Ivan o número que obteve, Ivan disse com surpresa que esse foi o número que havia pensado.

Solução:

a) Se Ivan tivesse pensado em um número com 3 ou menos algarismos, a soma de seus algarismos seria no máximo $9 + 9 + 9 = 27$. Então o número final de Ivan x seria no máximo $27^2 = 729$.

b) Se Ivan tivesse pensado em um número com 4 algarismos, digamos $abcd$, então $x = (a + b + c + d)^2$. Distinguimos duas possibilidades. Primeiro se $a = 1$, então:

$$x \leq (1 + 9 + 9 + 9)^2 = 784 < abcd$$

Agora se $a \geq 2$, então:

$x \leq (9 + 9 + 9 + 9)^2 = 1296 < abcd$.

Em qualquer um dos casos, $x < abcd$.

c) Suponhamos que Ivan pensou em um número com $n \geq 5$ algarismos, digamos $a_1 a_2 \ldots a_n$. Então $x = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2$. Logo

$$x \leq (9n)^2 = 81n^2$$

Observe que

$$10^{n-1} = a_1 a_2 \ldots a_n$$

Então para mostrar que $x < a_1 a_2 \ldots a_n$, basta mostrar que $81n^2 < 10^{n-1}$, para todo inteiro $n \geq 5$. Faremos então a prova por indução matemática.

Temos $P(n)$: $81n^2 < 10^{n-1}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}\ e\, n \geq 5$.

Demonstração: Seja X o conjunto dos $n \in \mathbb{N}$, para os quais a propriedade vale, mostraremos por indução que $X = \mathbb{N}$. Temos que $5 \in X$, pois $81 * 5^2 = 2025 < 10^4 = 10000$. Suponha que $n \in X$, isto é, $P(n)$ é verdadeira para algum n, mostraremos que $n + 1 \in$ X, ou seja, que $81(n+1)^2 < 10^n$. Temos que $81(n+1)^2 < 81(2n)^2 = 4(81n^2)$. Mas por hipótese de indução $4(81n^2) < 4(10^{n-1}) < 4(10^n)$. Logo $81(n+1)^2 < 10^n$. Como $1 \in X$, e $n \in X \rightarrow n + 1 \in X$, concluímos por indução que $X = \mathbb{N}$.

Questão 3: (OBMEP Caderno de Exercícios – Indução Matemática, p.1) Considere todos os subconjuntos não vazios do conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$, dos n primeiros números naturais. Para cada um desses subconjuntos calculamos o produto de seus elementos. Encontre a soma de todos os produtos obtidos. (Obs.: Se um subconjunto tem um único elemento, esse elemento é o produto).

Solução:

Faremos primeiro uma análise com os primeiros números:

Seja $n = 1$, temos que o único subconjunto não vazio é $\{1\}$. Então para $n = 1$, temos $S(1) = 1$.

Seja $n = 2$, os subconjuntos não vazios formados são $\{1,2\}, \{1\}, \{2\}$, o produto de cada subconjunto é 2,1 e 2. Portanto $S(2) = 2 + 1 + 2 = 5$.

Seja $n = 3$ os subconjuntos não vazios formados são $\{1,2,3\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}$, e o produto de cada subconjunto é $6, 1, 2, 3, 2, 3\ e\ 6$. Portanto $S(3) = 6 + 1 + 2 + 3 + 2 + 3 + 6 = 23$.

Observe a conjectura abaixo:

N	1	2	3	4
$\boldsymbol{S(n)}$	$1 = (1 + 1)! - 1$	$5 = (2 + 1)! - 1$	$23 = (3 + 1)! - 1$	$119 = (4 + 1)! - 1$

Assim, podemos conjecturar que $S(n) = (n + 1)! - 1$. Vamos conjecturar essa proposição através do método da indução matemática.

Temos $P(n)$: $S(n) = (n + 1)! - 1, \forall\, n \in N$.

Demonstração: Seja X o conjunto dos $n \in \mathbb{N}$, para os quais a propriedade vale, mostraremos por indução que $X = \mathbb{N}$. Temos que $1 \in X$, pois fizemos a prova logo acima. Suponha que $n \in X$, isto é, $P(n)$ é verdadeira para algum n, mostraremos que $n + 1 \in$ X, ou seja, que $S(n + 1) = (n + 2)! - 1$. Podemos separar os subconjuntos de $\{1,2,3, \ldots, n + 1\}$ em dois grupos: os que contém o elemento $n + 1$ e os que não o contém. A soma dos produtos dos subconjuntos que não contém o elemento $n + 1$, pela hipótese de indução, é dada por $(n + 1)! - 1$. Todos os subconjuntos que contém o elemento $n + 1$, são obtidos de subconjuntos de $\{1,2,3, \ldots, n\}$ com acréscimo de tal elemento. Assim, fatorando o $n + 1$ nas somas dos produtos dos elementos destes subconjuntos, obtemos a soma $(n + 1)[(n + 1)! - 1 + n + 1]$. Precisamos acrescentar a ultima parcela, pois ela não foi contabilizada na soma anterior. Portanto, a soma do produto dos elementos de todos os subconjuntos de $\{1,2,3, \ldots, n + 1\}$ é $(n + 1)[(n + 1)! - 1] + (n + 1) + (n + 1)! - 1 = (n + 1)!\,[(n + 1) + 1] - 1$. Como $1 \in$ X , e n $\in$ X $\rightarrow$ n + 1 $\in$ X, concluímos por indução que $X = \mathbb{N}$.

Questão 4: (OBMEP Caderno de Exercícios – Indução Matemática, p.1) Mostre que

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Solução:

Temos $P(n)$: $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Seja X o conjunto dos $n \in \mathbb{N}$, para os quais a propriedade vale, mostraremos por indução que $X = \mathbb{N}$. Temos que $1 \in X$, pois $1 = \frac{1(1+1)(2*1+1)}{6} = 1$. Suponha que $n \in X$, isto é, $P(n)$ é verdadeira para algum n, mostraremos que $n + 1 \in$ X, ou seja, que $\sum_{i=1}^{n+1} i^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$. Temos que $\sum_{i=1}^{n+1} i^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2 + (n+1)^2$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$

$$\frac{= (n+1)[2n^2 + n + 6(n+1)]}{6}$$

$$= \frac{(n+1)[(n+1)+1][2(n+1)+1]}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

como $1 \in X$, e $n \in X \rightarrow n + 1 \in X$, concluímos por indução que $X = \mathbb{N}$.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O trabalho apresentou um conjunto de sequências didáticas que certamente poderão contribuir com a inserção do método da Indução em sala de aula, servindo como suporte didático ao fazer docente do professor.

Os estudos realizados mostraram que a utilização do método da indução enquanto ferramenta didática para o desenvolvimento de competências como conceder habilidade ao aluno de raciocinar logicamente para compreender conceitos e elaborar argumentos de intervenção em situações problemas, está plenamente justificada do ponto de vista teórico, pois atentem aos norteamentos dos Parâmetros Curriculares Nacionais e pelas diretrizes da Base Nacional Comum Curricular.

Além disso foram apresentados estudos de alguns autores desta área, para fundamentar a importância do uso de demonstrações em sala de aula, onde podemos concluir que esta prática proporciona ao aluno a aquisição de significados matemáticos mais sólidos. Após isso, realizamos um estudo descritivo dos fundamentos teóricos do Método da Indução Matemática apoiados num levantamento bibliográfico, seguido de diversas situações de aplicabilidade da indução matemática.

O trabalho também apresenta vários problemas práticos que podem ser solucionados através do método da indução, como por exemplo o problema da Torre de Hanói e dos Coelhos de Fibonacci, visando fazer com que os alunos se interessem pelo tema, e que passem a buscar resultados através da elaboração de conjecturas, concluindo com a prova através do método da indução. Entendemos que será no momento após a conjectura que o Princípio de Indução Matemática pode se mostrar uma ferramenta muito poderosa, pois fará com que o estudante compreenda o verdadeiro significado da importância da demonstração e dê a eles a capacidade de argumentação e interpretação.

Por todo o exposto, infere-se que de fato o Método da Indução Matemática é uma ferramenta importante para o desenvolvimento de algumas competências relevantes na vida do estudante, onde esse conhecimento irá estimular a autonomia e capacidade dos alunos, os tornando confiantes em seus conhecimentos, e que pode ser usado como instrumento didático aos docentes em sala de aula.

REFRERÊNCIAS

ALMEIDA, T.A.S. **A Demonstração no Ensino de Geometria**. Orientador: Rudimar Luiz Nós. 2016. 97 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 2016.

ANTUNES, Simone Fraga Freitas; JUNGBLUT, César Augusto. O Papel do Professor e as Dificuldades de Ensinagem. **Revista Gestão Universitária**, 2008.

BOERO, Paolo... et al. Challenging the traditional school approach to theorems: a hypothesis about the cognitive unity of theorems. *In*: INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 20., 1996, Valencia. **Proceedings of the 20th PME Conference...** Valencia: University of Valencia, 1996. v. 2, p. 113-120.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**: Ensino Médio. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2018.

BRASIL. **Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+)**. Ciências da Natureza e Matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC, 2006.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática**. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC /SEF, 1998.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências da Natureza e Matemática e suas tecnologias**. Brasília: MEC, 2000.

CARDOSO, G.R.B. A **Apreensão de Generalizações de Sequências Matemáticas no Ensino Médio, Promovida pelo Estudo Teórico-Prático das Recorrências Lineares e do Princípio de Indução Matemática**. Orientador: Antônio José da Silva. 2019. 74 f. Dissertação (Mestrado Matemática) – Universidade Federal do Maranhão, São Luís-MA, 2019.

CONCEIÇÃO, F.H.G *et al*. A importância da aplicabilidade da matemática no cotidiano: Perspectiva do aluno Jovem e Adulto. **Qualificação profissional e inserção no mercado de trabalho**, Aracaju -SE, p. 95-104, maio 2016.

CORCHO, A.J *et al*. **Olimpíadas de Matemática**: Uma introdução. [*S. l.*]: SBM, 2006. 146 p.

CORREIA, J.C.C. **Argumentação, prova e demonstração**: uma investigação sobre as concepções de ingressantes no curso de licenciatura em matemática. Orientador: Lilian Nasser. 2018. 209 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2018.

D’AMBROSIO, B. S. Como Ensinar Matemática Hoje? **SBEM**, Brasília, ano 2, n.2, p.15-19, 1989.

DANTE, L. R. **Formulação e resolução de problemas de matemática**: teoria e prática. São Paulo: Ática, 2009

DAVIS, F. J.; HERSH, R. **A experiência matemática**. Tradução de João Bosco Pitombeira. Rio de Janeiro: F. Alves, 1985.

DE VILLIERS, M. **Para uma compreensão dos diferentes papéis da demonstração no ensino em geometria dinâmica**. Lisboa: APM, 2002. p. 65-72. (Actas do ProfMat).
DOMINGUES, H. H.; IEZZI, G. **Álgebra moderna**. São Paulo: Atual, 2003.

FÉLIX, H.S. **Princípio da indução matemática**: fundamentação teórica e aplicações. Orientador: Marcos Ferreira de Melo. 2015. 39 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2015.

FREITAS, N.C.B. **Princípio da Indução Matemática**: Fundamento Teórico e aplicações na educação básica. Orientador: Guilherme Lincoln Aguiar Ellery. 2013. 97 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Estadual do Ceará, Fortaleza - CE, 2013.

GIRALDO, Victor; RIPOLL, Cydara; RANGEL, Leticia. **Companheiro do Professor de Matemática.** Volume I – Números. . [S. l.]: SBM, 2014.

GONÇALVES, A. **Introdução à álgebra**. Rio de Janeiro: IMPA, 1979.

HEFEZ, A. **Indução matemática**. Rio de Janeiro: SBM, 2009. Disponível em: http://www.obmep.org.br/docs/Apostila4-Inducao.pdf. Acesso em: 23 out. 2020.

LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César. **A matemática do ensino médio**. 9. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006. v.1. (Coleção do Professor de Matemática).

LIMA, Elon Lages. O Princípio da indução. Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM), **Revista Eureka**, n. 3, p. 26-41, 2 maio 1988.

MACHADO, G.M. **A construção dos números**. Orientador: Luiz Hartmann. 2014. 102 f. Trabalho de Conclusão do Curso (Licenciatura em Matemática) – Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2014.

MARTINS, Rosilaine Sanches. **O princípio da Indução Finita e jogos para o ensino de funções**. Orientadora: Tatiana Miguel Rodrigues.2015. 117 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, São José do Rio Preto, 2015.

NÓBREGA, L.X.G. **Princípio da Indução Matemática no Ensino Médio**. Orientador: Fagner Lemos de Santana. 2013. 61 f. Dissertação (Mestrado Matemática) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal-RN, 2013.

NÓVOA, A. Formação de professores. *In*: NÓVOA. A. (org.). **Vidas de professores**. Lisboa: Dom Quixote, 1992.

OBMEP**. Caderno de Exercícios – Indução Matemática**. Disponível em: p.1**.**https://cdnportaldaobmep.impa.br/portaldaobmep/uploads/material/wdjtvu7tk5wow.pdf. Acesso em: 24 out. 2020.

OBMEP. **Banco de questões 2017**. Rio de Janeiro: IMPA, 2017.

OBMEP. **Banco de questões 2013**. Rio de Janeiro: IMPA, 2013.

ONUCHIC, L. De La R. Ensino-aprendizagem de matemática através de resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V.(org.). **Pesquisa em educação matemática**: concepções e perspectivas. São Paulo: Editora UNESP, 1999. p. 199-218.

PEREIRA, P.C.A. **O Princípio da indução finita**: uma abordagem no ensino médio. Orientador: Roberto Imbuzeiro Oliveira. 2013. 46 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2013.

PÓLYA, G. Como resolver um problema. *In*: POLYA, J. A Arte de resolver problemas. Rio de Janeiro: Interciência, 1977. cap. Parte II.

RIPOLL, Cydara; RANGEL, Leticia; GIRALDO, Victor. **Números Naturais**: Livro do Professor de Matemática da Educação Básica. [*S. l.*]: SBM, 2016. v. 1, 166 p.

SAVIOLI, A. M. P. D. Uma reflexão sobre a indução finita: relato de uma experiência. **BOLEMA**, Rio Claro, ano 20, n. 27, 2007.

SILVA, E.L. **Aplicação do Método de Indução Matemática no Ensino Médio**. Orientador: Fabrício Siqueira Benevides. 2015. 49 f. Dissertação (Mestrado Matemática) – Universidade Federal do Ceará, Fortaleza-CE, 2015.

SILVA, L. A. Ensino-aprendizagem da matemática através da resolução de problemas no ensino fundamental II. **Revista Rios Eletrônica** – Revista Científica da FASETE. Ano 6, n. 6, p. 49-55, dez. 2012.

SOARES, L.H *et al*. **Demonstrações matemáticas na educação básica**: com a palavra os professores de matemática. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba · Educação, Campina Grande, p. 2-13, 15 set. 2015.

VITTI, C. M. **Matemática com prazer, a partir da história e da geometria**. 2. ed. Piracicaba-São Paulo: Editora UNIMEP, 1999. 103 p.