

Luis Paulo de Souza Alves

**Ensino de probabilidade:
uma proposta de sequência didática
com uso dos jogos Bozó e Coup**

Rondonópolis - MT

Dezembro de 2021

Luis Paulo de Souza Alves

**Ensino de probabilidade:
uma proposta de sequência didática
com uso dos jogos Bozó e Coup**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, pólo Rondonópolis, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Universidade Federal de Rondonópolis – UFR

Instituto de Ciências Exatas e Naturais – ICEN

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT

Orientadora: Prof^a Dra. Eunice Cândida Pereira Rodrigues

Rondonópolis - MT

Dezembro de 2021

Dados Internacionais de Catalogação na Fonte.

A474e Alves, Luis Paulo de Souza.
Ensino de probabilidade : uma proposta de sequência didática com uso dos jogos
Bozó e Coup / Luis Paulo de Souza Alves. -- 2021
68 f. : il. color. ; 30 cm.

Orientador: Eunice Cândida Pereira Rodrigues.
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Federal de Mato Grosso,
Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Programa de Pós-Graduação Profissional em
Matemática, Rondonópolis, 2021.
Inclui bibliografia.

1. Probabilidade. 2. Sequência didática. 3. Jogos. I. Título.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Permitida a reprodução parcial ou total, desde que citada a fonte.



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO

PRÓ-REITORIA DE ENSINO DE PÓS-GRADUAÇÃO

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

FOLHA DE APROVAÇÃO

TÍTULO: "Ensino de probabilidade: uma proposta de sequência didática com uso de jogos Bozó e Coup"

AUTOR : MESTRANDO LUIS PAULO DE SOUZA ALVES

Dissertação submetida ao programa de pós-graduação do PROFMAT, do curso de Matemática/UFR (UFMT/CUR), como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Dissertação defendida e aprovada em 06/12/2021.

COMPOSIÇÃO DA BANCA EXAMINADORA

1. **DOUTORA EUNICE CÂNDIDA PEREIRA RODRIGUES** (Presidente Banca / Orientador)

2. **DOUTOR CLAYTON EDUARDO LENTE DA SILVA** (Examinador Interno)

3. **DOUTORA IVONILDES RIBEIRO MARTINS DIAS** (Examinador Externo)

RONDONÓPOLIS, 14 DE
DEZEMBRO DE 2021.



Documento assinado eletronicamente por **EUNICE CANDIDA PEREIRA RODRIGUES, Coordenador(a) do PPG Mestrado Profis. em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT - ICEN/CUR - UFMT**, em 14/12/2021, às 08:52, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Ivonildes Ribeiro Martins Dias, Usuário Externo**, em 14/12/2021, às 11:00, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **CLAYTON EDUARDO LENTE DA SILVA, Docente da Universidade Federal de Mato Grosso**, em 23/12/2021, às 09:31, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site http://sei.ufmt.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **4259824** e o código CRC **C4588C25**.

Agradecimentos

À Deus em primeiro lugar, por cuidar de mim o tempo todo, pela vida, por ter me permitido superar todos os obstáculos durante a pandemia e finalizar essa etapa.

À minha orientadora Prof. Dra. Eunice Cândida Pereira Rodrigues, por aceitar conduzir o meu trabalho de pesquisa, por toda a paciência, competência, profissionalismo, sabedoria, e por todas as contribuições valiosas dadas em cada orientação.

Aos membros da banca examinadora, por aceitarem participar e colaborar com esta dissertação.

A todos os professores do PROFMAT da Universidade Federal de Rondonópolis (UFR), que foram muito importantes na minha formação acadêmica.

Aos meus colegas, que durante esse período do curso, dividiram as mesmas expectativas e desafios, e que por diversas vezes foram parceiros nas rotinas de estudos.

À minha namorada Giovanna, por estar ao meu lado incentivando não deixando que desanimasse, pelas vezes que colaborou com seu silêncio e abraço.

Finalmente, a toda minha família, que é e sempre será base da minha vida, os que mais torcem por mim, os que estão por mim em todos os momentos sejam eles difíceis ou não.

Por fim, a todos aqueles que contribuíram, direta ou indiretamente, para a realização desta dissertação, minha profunda gratidão.

Resumo

Sequência didática é uma importante ferramenta de organização da prática educativa, ela norteia e sistematiza tal prática. Por conta disso, faz-se necessário que tal instrumento se adapte às demandas dos alunos, e uma das demandas é que o conhecimento seja prático e pertencente a seus cotidianos. Nesse sentido, o uso de jogos se apresenta como ferramenta importante por conseguir fazer a aproximação dos conceitos matemáticos, nesse caso conceitos de probabilidade, com o dia a dia, e por se inserir de forma lúdica aguçando a curiosidade do educando. O objetivo principal dessa pesquisa é verificar se o uso dos jogos Bozó e Coup para elaboração e aplicação de uma sequência didática sobre probabilidade facilita a compreensão dos conceitos trabalhados. Para este fim foi inicialmente feito um recorte temático seguindo as diretrizes da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e mediante suas exigências estruturada e aplicada uma sequência didática com o uso dos jogos citados com alunos de uma turma de 9ºano do ensino fundamental do colégio Leibniz de Rondonópolis. Após a aplicação foi realizada uma pesquisa qualitativa utilizando a técnica chamada círculo heremenêutico-dialético de coleta de dados, através de um momento de expor oralmente sua avaliação da sequência didática e da própria aprendizagem, respondendo questionários individuais com a mesma finalidade, e por meio da análise das respostas das atividades realizadas pelos envolvidos. Verificou-se que o uso dos jogos contribuiu de forma positiva, o que pode ser verificado principalmente pelo maior envolvimento dos alunos, pela verificação prática da atividade escrita com os jogos ainda em mãos e pela desvinculação da solução dos problemas com fórmulas prontas.

Palavras-chave: Probabilidade. Sequência didática. Jogos.

Abstract

Didactic sequence is an important tool for organizing educational practice, it guides and systematizes such practice. Because of this, it is necessary that this instrument adapts at students' demands, and one of these demands is that knowledge be practical and part of their daily lives. In this regard, the use of games presents itself as an important tool to be able to make an approximation of mathematical concepts, in this case concepts of probability, daily life, and for being inserted in a playful way, sharpening student's curiosity. The main objective of this research is to verify if the use of the Bozó and Coup games for the preparation and application of a didactic sequence on probability facilitates the understanding of the worked concepts. For this purpose, a thematic approach was formulated following the guidelines of the Common National Curriculum Base (BNCC) and, according to its requirements, a didactic sequence was structured and applied using the aforementioned games with students from a 9th grade class of elementary school at Leibniz School from Rondonópolis. After the application, a qualitative research was carried out using the technique called heremeneutic-dialectic circle of data collection, through an oral presentation of their evaluation of the didactic sequence and learning itself, answering individual questionnaires with the same regards, and through the analysis of the answers of the activities carried out by those involved. It was found that the use of games contributed in a positive way, which can be verified mainly by the greater involvement of students, by verifying the practice of writing activity with games still in hand, and by the untying of problem solving with ready-made formulas.

Keywords: Probability. Didatic sequence. Games.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Resultado do IDEB de 2005 a 2019.	16
Figura 2 – Ciclo vicioso do ensino descontextualizado.	18
Figura 3 – Etapas de uma sequência didática segundo Zabala (1998).	21
Figura 4 – Etapas de uma sequência didática interativa segundo Oliveira (2013).	22
Figura 5 – Fontes do conhecimento segundo Macedo (2007).	35
Figura 6 – Síntese da relação entre conhecimento, desenvolvimento e jogos.	36
Figura 7 – Apresentação inicial do aplicador e da sequência didática.	39
Figura 8 – Apresentação da proposta da sequência didática.	39
Figura 9 – Momento de explicação das regras do jogo Bozó.	40
Figura 10 – Alunos participantes, o aplicador e a orientadora.	40
Figura 11 – Alunos jogando Bozó.	41
Figura 12 – Alunos jogando Coup.	41
Figura 13 – Momento de resolução da atividade em grupo.	42
Figura 14 – Estrutura de marcação da pontuação do Bozó no estado de Mato Grosso.	43
Figura 15 – Carta duque e carta assassino do jogo Coup.	44
Figura 16 – Carta condessa e carta capitão do jogo Coup.	45
Figura 17 – Carta embaixador e carta inquisidor do jogo Coup.	45
Figura 18 – Circulo hermenêutico-dialético.	47
Figura 19 – Respostas dadas nos itens a e b pelo grupo 1.	49
Figura 20 – Respostas dadas nos itens a e b pelo grupo 2.	49
Figura 21 – Respostas dadas nos itens a e b pelo grupo 3.	49
Figura 22 – Respostas dadas nos itens a e b pelo grupo 4.	50
Figura 23 – Respostas dadas nos itens c e d pelo grupo 1.	50
Figura 24 – Respostas dadas nos itens c e d pelo grupo 2.	50
Figura 25 – Respostas dadas nos itens c e d pelo grupo 3.	51
Figura 26 – Respostas dadas nos itens c e d pelo grupo 4.	51
Figura 27 – Respostas dadas nos itens e e f pelo grupo 1.	52
Figura 28 – Respostas dadas nos itens e e f pelo grupo 2.	52
Figura 29 – Respostas dadas nos itens e e f pelo grupo 3.	52
Figura 30 – Respostas dadas nos itens e e f pelo grupo 4.	53
Figura 31 – Resposta dada no item g pelo grupo 1.	53
Figura 32 – Resposta dada no item g pelo grupo 2.	53
Figura 33 – Resposta dada no item g pelo grupo 3.	54
Figura 34 – Resposta dada no item g pelo grupo 4.	54
Figura 35 – Resposta dada no item h pelo grupo 1.	54

Figura 36 – Resposta dada no item h pelo grupo 2.	54
Figura 37 – Resposta dada no item h pelo grupo 3.	55
Figura 38 – Resposta dada no item h pelo grupo 4.	55
Figura 39 – Compreensão dos alunos quanto aos jogos e suas regras.	56
Figura 40 – Compreensão dos alunos quanto a probabilidade e os jogos relacionados.	56
Figura 41 – Avaliação da aplicação da sequência didática e seu aplicador.	57
Figura 42 – Distribuição percentual do progresso em probabilidade dos estudantes.	57
Figura 43 – Relação entre o progresso em probabilidade e o uso de jogos.	58
Figura 44 – Frente da atividade escrita da sequência didática	64
Figura 45 – Verso da atividade escrita da sequência didática	65
Figura 46 – Ficha de avaliação da sequência didática	66
Figura 47 – Termo de Anuência de Instituição	68

Lista de tabelas

Tabela 1 – Dados dos funcionários de uma empresa fictícia	32
Tabela 2 – Compreensão sobre os jogos e suas regras.	56
Tabela 3 – Compreensão sobre probabilidade e os jogos relacionados.	56
Tabela 4 – Avaliação da aplicação da sequência didática e seu aplicador.	57

Lista de abreviaturas e siglas

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CHD	Círculo hermenêutico-dialético
IBGE	Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística
IDEB	Índice de Desenvolvimento da Educação Básica
PCNs	Parâmetros Curriculares Nacionais
SAEB	Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica
SDI	Sequência Didática Interativa
SEDUC	Secretaria de Estado de Educação
UFR	Universidade Federal de Rondonópolis

Lista de símbolos

\in	Pertence (predicado binário).
\cup	União (de conjuntos).
\cap	Interseção (de conjuntos).
\emptyset	Conjunto vazio.
\subset	Inclusão de conjunto.
\mathbb{N}	Conjunto dos números Naturais.
\mathbb{Z}	Conjunto dos números Inteiros.
\mathbb{Q}	Conjunto dos números Racionais.
\mathbb{R}	Conjunto dos números Reais.
\mathbb{C}	Conjunto dos números Complexos.

Sumário

I	PREPARAÇÃO DA PESQUISA	15
1	INTRODUÇÃO	16
1.1	Problemática	17
1.2	Objetivos	17
1.3	Estrutura do Trabalho de Dissertação	18
II	REFERENCIAIS TEÓRICOS E METODOLÓGICOS	20
2	SEQUÊNCIA DIDÁTICA	21
2.1	Estrutura de uma sequência didática	21
2.2	Base Nacional Comum Curricular	23
3	NOÇÕES BÁSICAS DE PROBABILIDADE	27
3.1	Conceitos Básicos	27
3.2	Probabilidade Condicional	32
4	MOTIVAÇÃO PARA USO DE JOGOS NA PRÁTICA EDUCATIVA	35
4.1	Desenvolvimento e aprendizagem	35
4.2	Brincadeiras e jogos	36
5	METODOLOGIA DA PESQUISA	38
5.1	A sequência didática e o objeto de pesquisa	38
5.2	Bozó	42
5.3	Coup	44
5.4	Circulo hermenêutico-dialético	46
III	RESULTADOS	48
6	ANÁLISES PRELIMINARES	49
6.1	Análise das respostas das atividades	49
6.2	Análise dos dados dos questionários	55
6.3	Análise das entrevistas e conclusões	58
7	CONCLUSÃO	60

	REFERÊNCIAS	62
	APÊNDICES	63
	APÊNDICE A – ELEMENTOS DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA . . .	64
A.1	Atividade escrita	64
A.2	Questionário	66
	ANEXOS	67
	ANEXO A – DOCUMENTOS SUPLEMENTARES	68
A.1	Termos	68

Parte I

PREPARAÇÃO DA PESQUISA

1 Introdução

O presente capítulo apresenta uma breve introdução ao panorama geral da aprendizagem em matemática no Brasil de acordo com instrumentos avaliativos oficiais, a problemática geradora da pesquisa, os objetivos e a estrutura geral da dissertação.

Os indicadores educacionais no Brasil apontam para um grave déficit de aprendizagem em matemática. Entre os diversos indicadores destacamos em especial o índice de desenvolvimento da educação básica - IDEB, que é gerado através dos resultados de uma avaliação realizada por alunos de todo o Brasil por meio do sistema nacional de avaliação da educação básica - SAEB. Veja os dados a seguir:

Figura 1 – Resultado do IDEB de 2005 a 2019.

Anos Iniciais do Ensino Fundamental																
	IDEB Observado								Metas							
	2005	2007	2009	2011	2013	2015	2017	2019	2007	2009	2011	2013	2015	2017	2019	2021
Total	3.8	4.2	4.6	5.0	5.2	5.5	5.8	5.9	3.9	4.2	4.6	4.9	5.2	5.5	5.7	6.0
Dependência Administrativa																
Estadual	3.9	4.3	4.9	5.1	5.4	5.8	6.0	6.1	4.0	4.3	4.7	5.0	5.3	5.6	5.9	6.1
Municipal	3.4	4.0	4.4	4.7	4.9	5.3	5.6	5.7	3.5	3.8	4.2	4.5	4.8	5.1	5.4	5.7
Privada	5.9	6.0	6.4	6.5	6.7	6.8	7.1	7.1	6.0	6.3	6.6	6.8	7.0	7.2	7.4	7.5
Pública	3.6	4.0	4.4	4.7	4.9	5.3	5.5	5.7	3.6	4.0	4.4	4.7	5.0	5.2	5.5	5.8

Anos Finais do Ensino Fundamental																
	IDEB Observado								Metas							
	2005	2007	2009	2011	2013	2015	2017	2019	2007	2009	2011	2013	2015	2017	2019	2021
Total	3.5	3.8	4.0	4.1	4.2	4.5	4.7	4.9	3.5	3.7	3.9	4.4	4.7	5.0	5.2	5.5
Dependência Administrativa																
Estadual	3.3	3.6	3.8	3.9	4.0	4.2	4.5	4.7	3.3	3.5	3.8	4.2	4.5	4.8	5.1	5.3
Municipal	3.1	3.4	3.6	3.8	3.8	4.1	4.3	4.5	3.1	3.3	3.5	3.9	4.3	4.6	4.9	5.1
Privada	5.8	5.8	5.9	6.0	5.9	6.1	6.4	6.4	5.8	6.0	6.2	6.5	6.8	7.0	7.1	7.3
Pública	3.2	3.5	3.7	3.9	4.0	4.2	4.4	4.6	3.3	3.4	3.7	4.1	4.5	4.7	5.0	5.2

Ensino Médio																
	IDEB Observado								Metas							
	2005	2007	2009	2011	2013	2015	2017	2019	2007	2009	2011	2013	2015	2017	2019	2021
Total	3.4	3.5	3.6	3.7	3.7	3.8	4.2	4.2	3.4	3.5	3.7	3.9	4.3	4.7	5.0	5.2
Dependência Administrativa																
Estadual	3.0	3.2	3.4	3.4	3.4	3.5	3.5	3.9	3.1	3.2	3.3	3.6	3.9	4.4	4.6	4.9
Privada	5.6	5.6	5.6	5.7	5.4	5.3	5.8	6.0	5.6	5.7	5.8	6.0	6.3	6.7	6.8	7.0
Pública	3.1	3.2	3.4	3.4	3.4	3.5	3.5	3.9	3.1	3.2	3.4	3.6	4.0	4.4	4.7	4.9

Fonte: SAEB e Censo escolar

Fica claro nessa imagem que as metas em matemática estão sendo atingidas nos anos iniciais do ensino fundamental porém, ainda assim o rendimento dos alunos na perspectiva do IDEB é menor que 60% da nota máxima em todo o período avaliado até hoje. Já nos anos finais do ensino fundamental e no ensino médio a situação é mais complicada, há uma razoável queda das notas quanto mais se avança no sistema educacional e as metas não são atingidas desde 2013. A partir desses dados daremos início a apresentação de nossa problemática que se relaciona diretamente a esse déficit de aprendizagem observado.

1.1 Problemática

Embora os indicadores educacionais deem os dados de modo geral, o recorte que aqui interessa é o que se refere ao ensino de probabilidade que é intimamente ligado a análise combinatória. Para Silva (2010), em seu estudo de caso do pensamento combinatório de alunos do ensino médio, e também baseado em sua experiência escolar própria, grande parte das dificuldades encontradas pelos alunos na aprendizagem de análise combinatória vem de um ensino que prioriza o uso de fórmulas e engessadas por um livro ou um apostila, quase sempre únicos, que são fonte dessas fórmulas, exemplos, e modelos prontos. Sendo assim falta contextualização e compreensão plena dos conceitos básicos, o que posteriormente torna-se uma barreira para o aprendizado de probabilidade também.

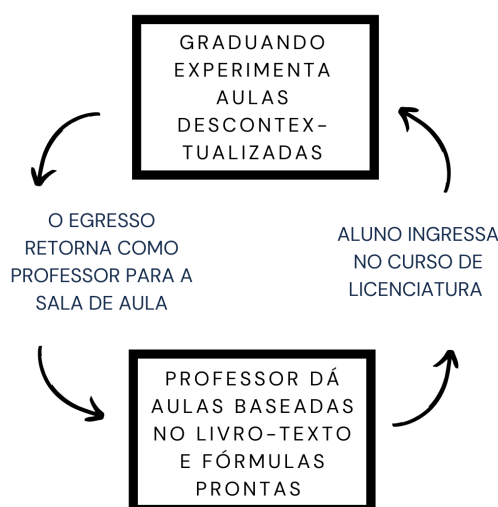
Com os estudos de Silva (2010) é possível obter uma ótica vinda dos alunos, então para que fosse complementada essa visão há as considerações de Gonzaga (2015) que realizou uma pesquisa sobre o ensino de probabilidade e análise combinatória com entrevistas de professores de matemática do ensino médio. Segundo esse estudo, os entrevistados alegaram que o conteúdo é difícil de ser aplicado e por isso limitam-se apenas a falar superficialmente sobre tal assunto. Essa postura dos entrevistados levou Gonzaga a questionar sobre a formação dos docentes e nesse momento veio a tona que a formação dos mesmos também fora centrada em um livro base e fórmulas prontas para soluções de problemas, tal como Silva (2010) apontou em seu estudo de caso.

A conclusão, que temos da união desses dois estudos, é que um ciclo vicioso se forma nesse contexto. O aluno que tem sua imersão nos estudos de probabilidade e análise combinatória de forma não contextualizada, e que futuramente em suas formações docentes recebem um ensino igualmente descontextualizado que é reproduzido em sala de aula ao fim de sua formação e inserção no mercado de trabalho.

1.2 Objetivos

O principal objetivo dessa dissertação é produzir uma sequência didática com o uso dos jogos Bozó e Coup, a fim de servir como material de pesquisa para professores dos anos finais do ensino fundamental e do ensino médio. Conforme citado na problemática muitos professores sentem dificuldade de aplicar os conceitos de modo contextualizado, então o produto final dessa dissertação teria função formativa. Outro objetivo desse trabalho é verificar se o uso de jogos provém de fato uma aprendizagem mais significativa e essa análise será feita com base em referenciais teóricos e na aplicação da sequência didática produzida com adolescentes do ensino regular.

Figura 2 – Ciclo vicioso do ensino descontextualizado.



Fonte: Imagem do autor

1.3 Estrutura do Trabalho de Dissertação

A estrutura deste trabalho de dissertação está dividido em sete capítulos.

O primeiro é destinado a preparação da pesquisa, os próximos quatro configuram os referenciais teóricos e metodológicos e os dois últimos versa sobre os resultados da pesquisa e conclusões tiradas das análises.

No primeiro capítulo, temos a **Introdução**, que resume o panorama da educação brasileira por meio de índices e aborda a problemática e os objetivos de pesquisa que são desenvolvidos ao longo do trabalho.

No segundo capítulo, **Sequência didática**, temos a descrição do que é uma sequência didática, quais são seus elementos mais importantes e quais são os parâmetros legais que limitam-na na forma de habilidades e competências a serem trabalhadas.

O terceiro capítulo, **Noções básicas de probabilidade**, trás os conceitos elementares de probabilidade que darão forma a sequência didática desenvolvida.

No capítulo quatro, discorreremos sobre aprendizagem e conhecimento buscando **Motivação para uso de jogos na prática educativa** através da relação entre jogos, brincadeiras, e aprendizagem de um ponto de vista psicossocial.

No quinto capítulo, trazemos a **Metodologia da pesquisa**, discorrendo sobre o objeto de pesquisa, a sequência didática produzida e suas etapas, uma breve descrição dos jogos utilizados, e a explicação da ferramenta de análise de dados utilizada.

O sexto e último capítulo, **Análise dos dados** trás o detalhamento dos dados colhidos através das atividades realizadas durante a sequência didática e a entrevista

posterior com aplicação de um questionário.

Por fim é apresentada a **Conclusão**, com uma síntese conclusiva no que se refere a pesquisa como um todo, seguido das **Referências**, dos **Apêndices** e dos **Anexos**.

Parte II

REFERENCIAIS TEÓRICOS E
METODOLÓGICOS

2 Sequência Didática

Neste capítulo será apresentado o conceito de sequência didática nas concepções de Zabala(1998) e Oliveira(2013), uma vez que é essencial que se entenda o que é uma sequência didática, quais seus fins, e claro, também saber quais são os norteadores legais que os professores submetem-se antes de elaborá-la. Ainda no que diz respeito à sequência didática, os autores desenvolvem definições abrangentes de modo a incluir tanto um modelo tradicional de ensino quanto um método de projetos.

2.1 Estrutura de uma sequência didática

Sequência didática é um composto de atividades que seguem uma ordem de modo a alcançar objetivos educacionais previamente conhecidos por alunos e professores. Essa ordem é definida em três estágios principais: planejamento, aplicação e avaliação. É evidente que conforme a metodologia adotada esses três estágios possam se subdividir, porém ainda se enquadram nessa disposição proposta por Zabala (1998). Em um modelo mais tradicional a avaliação seria feita por meio de provas escritas e produções textuais, enquanto em um modelo de projetos, a avaliação poderia ser traduzida em um produto final desenvolvido em grupo unido ao grau de comprometimento e contribuição individual para com o produto final, de modo que em cada um dos modelos, mesmo tendo duas ou três instâncias, continuam sendo agrupados dentro do estágio chamado de avaliação na concepção de Zabala.

Figura 3 – Etapas de uma sequência didática segundo Zabala (1998).



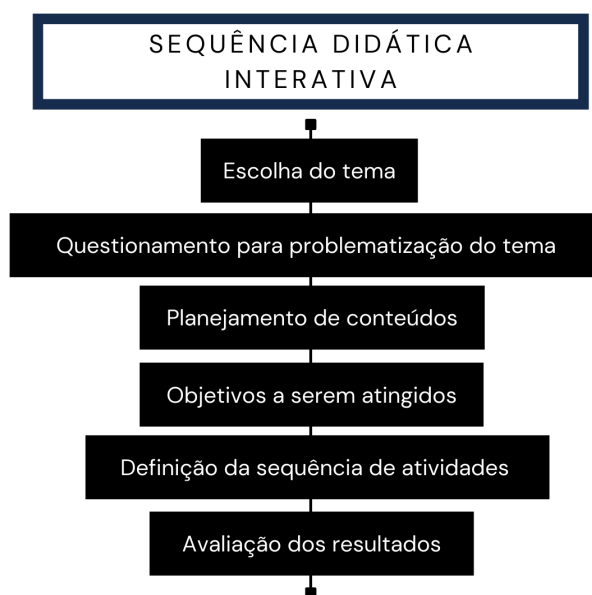
Fonte: Imagem do autor

Para Maria Marly Oliveira, o nome do instrumento anteriormente citado é sequência didática interativa e se configura como:

Uma proposta didático-metodológica que desenvolve uma série de atividades, tendo como ponto de partida a aplicação do círculo hermenêutico-dialético para identificação de conceitos/definições que subsidiam os componentes curriculares (temas), e que são associados de forma interativa com teoria(s) de aprendizagem e/ou propostas pedagógicas e metodologias, visando à construção de novos conhecimentos e saberes (OLIVEIRA, 2013 p.43).

Na perspectiva da autora as etapas dessa sequência são: escolha do tema, questionamento para problematização do tema, planejamento dos conteúdos, objetivos a serem atingidos, a definição da sequência de atividades, e avaliação de resultados. As cinco primeiras etapas estão diretamente relacionadas, uma vez que giram em torno dos objetivos a serem atingidos. É de acordo com esses objetivos que se orienta a escolha do tema e sua problematização.

Figura 4 – Etapas de uma sequência didática interativa segundo Oliveira (2013).



Fonte: Imagem do autor

Considere o exemplo de uma sequência didática que tenha como objetivo compreensão de porcentagem, a escolha do tema poderia ser impostos no Brasil, e a problematização do tema versaria de quais são os tipos de impostos, como eles são calculados, quais os fins, e como são definidas as taxas percentuais dos impostos cobrados. A partir disso se desenvolveria a escolha da sequência de atividades que seria desenvolvida em aula. Por fim, tendo o objetivo em mente seria definido como avaliar todo o processo, por parte do aluno no desenvolvimento da sequência didática, e por parte do professor como mediador desse processo.

Em pesquisa de abordagem qualitativa existe uma técnica chamada círculo hermenêutico-dialético que segundo Oliveira(2001), pode ser utilizada tanto como método de coleta de dados, como ferramenta na sequência didática interativa. O círculo hermenêutico-dialético trata-se de uma dinâmica de diálogos, questionamentos, análises, críticas, interpretações e re-interpretações feitas pelos envolvidos na pesquisa ou na sequência didática.

Considere o caso em que queira-se trabalhar uma definição matemática. O mediador da sequência didática começaria pedindo que os alunos escrevessem em uma ficha ou no próprio caderno o que eles entendiam sobre esse conceito. Em uma segunda etapa eles se uniriam em grupos de poucos alunos e fariam uma síntese do grupo. Por último haveria uma discussão coletiva com um líder de cada grupo e com o mediador para que houvesse uma última síntese que abrangesse todos os envolvidos e as peculiaridades apontadas por eles. Nesse sentido, o círculo hermenêutico-dialético, deve ser usado como ferramenta no desenvolvimento da sequência didática para que os saberes se tornem mais próximo aos alunos, uma vez que eles são atores dessa dinâmica (ALLARD,1997 apud OLIVEIRA 2010).

Como ferramenta de coleta de dados, Oliveira defende que:

Por compreender ainda, que o estudo da realidade se faz de forma dialética através da análise dos movimentos e interações, defendemos a proposta de que a utilização do CHD¹ como técnica para coleta de dados facilita a construção e reconstrução da realidade, para se chegar o mais próximo possível do real contexto da realidade pesquisada. Daí porque, o que deve prevalecer é a análise da realidade, tal qual ela se apresenta e não proceder a um ajustamento e/ou conformidade de idéias, como se existisse um consenso. (OLIVEIRA, 2010 p.4-5)

Nesse caso, o círculo hermenêutico-dialético se configura na pesquisa através da coleta de dados, tal como uma entrevista, e de um momento posterior que consistirá de uma síntese coletiva dos entrevistados e por fim uma análise da realidade de toda a pesquisa feita pelo pesquisador.

2.2 Base Nacional Comum Curricular

No âmbito legal, a Base Nacional Comum Curricular - BNCC é sem dúvida uma influência importante para o desenvolvimento das sequências didáticas, já que ela estabelece diretamente os objetos do conhecimento e habilidades mínimas para o desenvolvimento do trabalho docente. Brasil (2017) divide a BNCC três partes: ensino infantil, fundamental e médio, sendo o ensino fundamental dividido em unidades temáticas, que contém os objetos de conhecimento que por sua vez contém as habilidades. Especificamente no caso do ensino em probabilidade, temática necessária que seja apresentada para desenvolvimento dessa

¹ Círculo hermenêutico dialético.

dissertação, tem-se a unidade temática probabilidade e estatística, presente tanto no ensino fundamental quanto no ensino médio. Para o ensino fundamental, espera-se que os alunos desenvolvam as seguintes habilidades:

1. EF01MA20 - Classificar eventos envolvendo o acaso, tais como, acontecerá com certeza, talvez aconteça e é impossível acontecer, em situações do cotidiano.
2. EF02MA21 - Classificar resultados de eventos cotidianos aleatórios como pouco prováveis, muito prováveis, improváveis e impossíveis.
3. EF03MA25 - Identificar, em eventos familiares aleatórios, todos os resultados possíveis, estimando os que têm maiores ou menores chances de ocorrência.
4. EF04MA26 - Identificar, entre eventos aleatórios cotidianos, aqueles que têm maior chance de ocorrência, reconhecendo características de resultados mais prováveis, sem utilizar frações.
5. EF05MA22 - Apresentar todos os possíveis resultados de um experimento aleatório, estimando se esses resultados são igualmente prováveis ou não.
6. EF05MA23 - Determinar a probabilidade de ocorrência de um resultado em eventos aleatórios, quando todos os resultados possíveis têm a mesma chance de ocorrer (equiprováveis).
7. EF06MA30 - Calcular a probabilidade de um evento aleatório, expressando-a por número racional (forma fracionária, decimal e percentual) e comparar esse número com a probabilidade obtida por meio de experimentos sucessivos.
8. EF07MA34 - Planejar e realizar experimentos aleatórios ou simulações que envolvem cálculo de probabilidades ou estimativas por meio de frequência de ocorrências.
9. EF08MA22 - Calcular a probabilidade de eventos, com base na construção do espaço amostral, utilizando o princípio multiplicativo, e reconhecer que a soma das probabilidades de todos os elementos do espaço amostral é igual a 1.
10. EF09MA20 - Reconhecer, em experimentos aleatórios, eventos independentes e dependentes e calcular a probabilidade de sua ocorrência, nos dois casos.

O ensino médio, por sua vez, não é seriado na proposta da BNCC, e ela está dividida em competências gerais, áreas e habilidades, sendo que cada área contém suas respectivas competências específicas. Na área de matemática e suas tecnologias estão presentes 43 habilidades distintas, sendo apenas 6 no caso do ensino de probabilidade:

1. EM13MAT106 - Identificar situações da vida cotidiana nas quais seja necessário fazer escolhas levando-se em conta os riscos probabilísticos (usar este ou aquele método contraceptivo, optar por um tratamento médico em detrimento de outro etc.).
2. EM13MAT310 - Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore.
3. EM13MAT311 - Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade.
4. EM13MAT312 - Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos.
5. EM13MAT510 - Investigar conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas, usando ou não tecnologias da informação, e, quando apropriado, levar em conta a variação e utilizar uma reta para descrever a relação observada.
6. EM13MAT511 - Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, e de eventos, equiprováveis ou não, e investigar implicações no cálculo de probabilidades.

A BNCC propõe também, além desses elementos já apresentados que pertencem a uma base comum, que cada unidade de ensino tenha um currículo diversificado complementando a formação do aluno no sentido de aprofundamento acadêmico, técnico, social, e cultural.

Tendo em vista esse panorama de habilidades, quando proposta uma sequência didática nesse texto, ela conterá tanto elementos que contemplem a parte comum como a parte diversificada no que diz respeito ao aprofundamento acadêmico de um possível estudante que opte seguir os estudos de nível superior em cursos que tenham probabilidade em suas grades curriculares.

É possível notar uma progressão muito natural das habilidades que visam desenvolver o conhecimento de probabilidade desde o fundamental. A habilidade EF01MA20 introduz a noção de probabilidade como um intervalo com valor mínimo e máximo tratando os de forma qualitativa.

Conhecidas a estrutura de uma sequência didática e as delimitações da BNCC, é importante que seja apresentada a teoria de probabilidade que dará conteúdo e forma para essa sequência didática. A apresentação dessa teoria se dará no próximo capítulo iniciando

dos princípios de contagem, chegando até ao Teorema de Bayes², que é muito utilizado na solução de problemas de probabilidade condicional.

² O Teorema de Bayes trata da relação entre probabilidades de dois eventos distintos.

3 Noções Básicas de Probabilidade

O uso da tomada de decisões baseado nas chances de obter o melhor resultado possível é tão antigo quanto a existência humana, e muitos autores atribuem a Pascal e a Fermat o início dos estudos de probabilidade com o problema do jogo de azar interrompido, contudo Cardano já havia anteriormente contribuído com um livro chamado *Liber De Ludo Aleae*, que era menos conhecido por ser um pouco confuso na visão de alguns matemáticos. A semelhança vista no início de produção científica em probabilidade é que em ambos casos citados o tema central são os jogos de azar que estão presentes desde o início da vida em sociedade (ALVES, 2015).

3.1 Conceitos Básicos

Para esse capítulo algumas definições consistem em conjuntos ou subconjuntos, e para todos os casos considere sempre que estes são finitos, pois o caso com conjuntos infinitos extrapola a abordagem necessária para o desenvolvimento da sequência didática, que é tema central deste texto.

Definição 3.1. O Espaço Amostral U , é o conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório. Cada subconjunto E de U é chamado de evento, e é dito que um evento ocorre quando o resultado do experimento é um elemento desse subconjunto.

Definição 3.2. Dados A e B dois eventos de U , diz-se que $A \cup B$ ocorre se e somente se pelo menos um dos dois eventos ocorre, e diz-se que $A \cap B$ ocorre, se e somente se, os dois eventos ocorrem simultaneamente.

Definição 3.3. Sejam A e B eventos de um espaço amostral, o evento complementar de um evento A , denotado por A^C , é aquele que ocorre, se e somente se, o evento A não ocorre. Define-se por fim o evento $A \setminus B$ que ocorre, se e somente se, o evento A ocorre, mas não ocorre o evento B .

Exemplo 3.1. Em um lançamento de uma moeda, a face voltada para cima é observada. O espaço amostral U desse evento aleatório é $\{cara, coroa\}$, e nesse caso há 4 eventos, sendo eles: $A = \emptyset$, $B = \{cara\}$, $C = \{coroa\}$ e U (espaço amostral). Note que o evento A nunca ocorre, o que intuitivamente leva a crer que o número que representa a probabilidade de que ele aconteça seja zero. É também possível perceber que $U = B \cup C$, $A = B \cap C$, $B = U \setminus C$ e $B = C^C$.

Definição 3.4. Uma probabilidade é uma função que associa cada evento E a um número $P(E)$ tal que:

1. Para todo evento E ; $0 \leq P(E) \leq 1$.
2. $P(U) = 1$, onde o U é o espaço amostral.
3. Se E_1 e E_2 são dois eventos que não podem ocorrer simultaneamente, ou seja, a interseção dos eventos é vazia, então $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$.

Exemplo 3.2. Analisando o experimento do lançamento de uma moeda não balanceada onde em 60% dos lançamentos obtém-se coroa podemos definir a função de probabilidade tal que:

$$P(\emptyset) = 0; P(U) = P(\{cara, coroa\}) = 1; P(\{coroa\}) = 0,6; P(\{cara\}) = 0,4.$$

Como os eventos $\{cara\}$ e $\{coroa\}$ não ocorrem simultaneamente pela Definição 3.4 é preciso ter que: $P(\{cara\} \cup \{coroa\}) = P(\{cara\}) + P(\{coroa\}) = 0,4 + 0,6 = 1$;

A probabilidade de um evento ocorrer é um número que indica a recorrência que esse resultado é obtido em um experimento aleatório, sendo assim, percebe-se um padrão claro de que em 60% das vezes que essa moeda é lançada obtém-se o resultado coroa. Claro que esse modelo não é o mais intuitivo, mas ele pode representar bem a realidade caso a moeda tenha sido fabricada de modo a facilitar que o resultado do experimento seja coroa, ou seja, o que na probabilidade é conhecido como uma moeda não honesta.

Um resultado que será utilizado sem demonstração pois fugiria dos propósitos da presente dissertação, é o Princípio da Boa Ordenação que tem o seguinte enunciado:

Um resultado de grande importância, até mesmo como método de demonstração, é o fato de que todo conjunto não-vazio de números naturais possui um menor elemento. Este fato é conhecido como Princípio da Boa Ordenação (LIMA, 2019 p.31).

A partir desse princípio segue um modelo de demonstração que será utilizado no presente capítulo, esse modelo é chamado de prova por indução ou Segundo Princípio da Indução (LIMA, 2019). Este método será utilizado para demonstrar um resultado importante de probabilidade, necessitando assim que seja enunciado e demonstrado a seguir:

Proposição 3.1. (Segundo Princípio da Indução) *Seja $X \subset \mathbb{N}$ um conjunto com a seguinte propriedade: dado n natural, se X contém todos os números naturais m tais que $m < n$, então X contém n . Nestas condições $X = \mathbb{N}$.*

Demonstração. Seja $Y = \mathbb{N} - X$, afirmamos que $Y = \emptyset$. De fato, se Y não fosse vazio, pelo Princípio da Boa Ordenação, existiria um elemento mínimo $p \in Y$. Então, para todo número natural $m < p$ teríamos $m \in X$. Pela hipótese feita sobre X teríamos $p \in X$ que seria uma contradição, logo $Y = \emptyset$ e $X = \mathbb{N}$. □

Esse princípio também pode ser enunciado de uma segunda forma:

Seja \mathcal{P} uma propriedade relativa a números naturais. Se, dado $n \in \mathbb{N}$, do fato de todo número natural $m < n$ gozar da propriedade \mathcal{P} , então todo número natural goza de \mathcal{P} (LIMA, 2019 p.27).

Essa segunda forma de enunciar será utilizada na demonstração da proposição a seguir.

Proposição 3.2. *Dados $E_1, E_2, E_3, \dots, E_n$ eventos que não ocorram simultaneamente dois a dois. Então:*

$$P(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n) = \sum_{i=1}^n P(E_i) \quad \forall n \geq 2 \text{ e } n \text{ natural.}$$

Demonstração. Para $n = 2$ a demonstração segue da Definição 3.4. Suponhamos a proposição válida para um k natural, ou seja, dados k eventos que não ocorram simultaneamente, $E_1, E_2, E_3, \dots, E_k$ então $P(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_k) = \sum_{i=1}^k P(E_i)$.

Seja E_{k+1} um evento que também não ocorra simultaneamente com $E_1, E_2, E_3, \dots, E_k$. Definimos $B = E_1 \cup E_2$, então tem-se que:

$$P(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_k \cup E_{k+1}) = P(B \cup E_3 \cup E_4 \cup \dots \cup E_k \cup E_{k+1}).$$

Como B também não ocorre simultaneamente com os demais eventos, uma vez que é a união de dois eventos que já satisfaziam isso, e $B, E_3, E_4, \dots, E_k, E_{k+1}$ são k eventos, segue da hipótese indução que:

$$P(B \cup E_3 \cup E_4 \cup \dots \cup E_k \cup E_{k+1}) = P(B) + P(E_3) + P(E_4) + \dots + P(E_k) + P(E_{k+1}).$$

Mas $P(B) = P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$ pela definição 3.4, então:

$$P(E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4 \cup \dots \cup E_k \cup E_{k+1}) = P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) + P(E_4) + \dots + P(E_k) + P(E_{k+1}).$$

Sendo assim chegamos que: $P(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k+1} P(E_i)$.

E assim a proposição é válida também para $k+1$. Pelo princípio da indução finita segue que: $P(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n) = \sum_{i=1}^n P(E_i) \quad \forall n \geq 2$ e n natural. \square

O resultado anteriormente demonstrado é base para a definição de um modelo probabilístico amplamente utilizado conhecido como modelo equiprobabilístico, ou equiprovável, que será definido a seguir.

Definição 3.5. Dado um espaço amostral U com n elementos, o modelo equiprobabilístico é aquele que a probabilidade dos eventos unitários distintos ocorrerem sejam iguais, tais eventos são então chamados equiprováveis.

Como esses eventos são unitários e distintos, todos eles são mutuamente excludentes dois a dois, então a probabilidade de um evento acontecer é $\frac{1}{n}$, e n é número de elementos desse conjunto.

Note que da Definição 3.4 tem-se que $P(U) = 1$. Sendo $E_1, E_2, E_3, \dots, E_n$ todos eventos unitários de U , segue que:

$P(E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup \dots \cup E_n) = 1$. Aplicando a proposição 3.2 obtém-se que:

$P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) + \dots + P(E_n) = 1$. Como todos eventos são equiprováveis pode-se escrever tudo em função de $P(E_1)$ e portanto:

$n.P(E_1) = 1$; assim $P(E_1) = \frac{1}{n}$, que é o valor da probabilidade para todos os eventos dados que são equiprováveis.

Exemplo 3.3. Uma escola decidiu premiar aleatoriamente dois alunos com uma cesta de chocolate. A primeira cesta seria sorteada entre as 500 meninas, e a segunda entre os 350 meninos. Os dois sorteios serão feitos após imprimir os nomes em papéis idênticos que serão colocados em duas caixas, uma com os nomes das meninas e outra com os nomes dos meninos. Depois disso, a diretora da escola será vendada para que possa colocar a mão em cada caixa e retirar um papel. O sorteio de cada cesta tem apenas um ganhador, então cada evento que representa um possível resultado desse sorteio é um evento unitário, e esses eventos não podem ocorrer simultaneamente, dado que apenas um papel será sorteado. É então proposto para representar ambos sorteios, o modelo equiprobabilístico, uma vez que é razoável assumir que todas as pessoas envolvidas possuem a mesma chance de receber o prêmio, sendo assim no caso dos meninos a probabilidade de qualquer um deles ganhar é de $\frac{1}{350}$, e para as meninas $\frac{1}{500}$.

Teorema 3.1. *Sejam A e B eventos de um espaço amostral. Temos então que:*

1. $P(A^C) = 1 - P(A)$.
2. $P(\emptyset) = 0$.
3. $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$.
4. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Demonstração. 1. Note que $1 = P(A \cup A^C)$. Como os eventos A e A^C são mutuamente excludentes por definição, segue que: $1 = P(A) + P(A^C)$ portanto $P(A^C) = 1 - P(A)$.

2. Sabe-se que o evento que contém todos elementos do espaço amostral U e o vazio são mutuamente excludentes, segue então que $P(U) = P(U \cup \emptyset) = P(U) + P(\emptyset)$, assim $P(\emptyset) = 0$.

3. É necessário que se observe que os eventos $A \setminus B$ e $A \cap B$ são mutuamente excludentes, uma vez que o primeiro exige que o evento B não ocorra e o segundo exige que A e B ocorram. Daí basta observar que $P(A) = P((A \setminus B) \cup (A \cap B)) = P(A \setminus B) + P(A \cap B)$, e segue o resultado: $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$.
4. Note que os eventos $A \setminus B$ e B são mutuamente excludentes, daí segue que $P(A \cup B) = P((A \setminus B) \cup B) = P(A \setminus B) + P(B)$. Aplicando o resultado anterior nesta equação obtém-se o resultado desejado: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

□

Exemplo 3.4. No contexto dos Role playing games (RPG), jogos de criação de personagens e interpretação, é adotado um sistema de rolagem de dados para definir se uma certa ação teve sucesso ou falha. No sistema Dungeons and Dragons (DnD), são rolados dados de vinte faces que somados aos atributos do personagem que executa a ação define um número que comparado ao nível de dificuldade do desafio faz com que ação seja um sucesso ou um fracasso. Considere um personagem que tenha 4 pontos na capacidade de enganar e queira contar uma mentira em um contexto de se safar de uma acusação. O nível de dificuldade para sair dessa situação seria 20. Então rolando um dado de 20 faces e somando seus 4 pontos na capacidade de enganar caso totalize 20 ou mais a mentira é um sucesso e todos acreditam. Caso contrário a mentira falha e ninguém acredita nela. A partir dessas informações responda as perguntas abaixo.

- a) Qual é a probabilidade de o mesmo personagem passar em um teste de enganação no qual o nível dificuldade seja 25?
- b) Esse mesmo personagem em momentos posteriores ao texto adquiriu a habilidade rolar 2 dados de vinte faces e passar em qualquer teste em que ele tenha rolado 1 em ao menos um dado. Qual é a probabilidade de que ele role 1 em ao menos um dos dados e utilize dessa habilidade?

Quanto a primeira pergunta é possível notar que o espaço amostral dos valores obtidos em um teste de enganação desse personagem é $\{5, 6, 7, \dots, 24\}$ pois o dado tem os números de 1 a 20 e nesse teste ele tem um bônus de 4 pontos. Sendo assim o número 25 não pertence ao espaço amostral. Portanto segundo o Teorema 3.1 a probabilidade desse personagem passar no teste de enganação de dificuldade nível 25 é 0. A segunda questão leva em conta a rolagem de dois dados de 20 faces. O evento cuja probabilidade foi requisitada:

$$A = \{\text{Sair 1 em ao menos um dos dois dados rolados}\}.$$

Consideremos então o evento complementar de A , ou seja:

$$A^C = \{\text{Não sair 1 em nenhuma das duas rolagens}\}.$$

Esse evento complementar pode ser calculado com o princípio multiplicativo, uma vez que a probabilidade de não sair 1 em uma rolagem de dado de 20 faces é $\frac{19}{20}$. Sendo assim nos dois dados seria $\frac{19}{20} \cdot \frac{19}{20} = \frac{361}{400}$. Então pela Teorema 3.1 $P(A^C) = 1 - P(A)$, ou seja, $\frac{361}{400} = 1 - P(A)$, portanto $P(A) = \frac{39}{400}$.

3.2 Probabilidade Condicional

Probabilidade condicional, é um conceito muito recorrente pois trata de uma relação entre dois ou mais eventos. Tradicionalmente apresentar-se-ia a definição antes de qualquer exemplo, porém neste caso, a visualização do conceito é muito importante, por isso apresentaremos primeiro uma situação-problema visando ilustrar a definição.

Exemplo 3.5. Uma empresa fez uma pesquisa sobre a distribuição de seus funcionários quanto ao sexo e ao uso de cigarro que está representada pela tabela a seguir:

Tabela 1 – Dados dos funcionários de uma empresa fictícia

	Fumante	Não Fumante	Total
Homens	140	40	180
Mulheres	60	60	120
Total	200	100	300

Fonte: Tabela do autor

Escolhendo aleatoriamente um funcionário para receber um prêmio em comemoração ao superávit da empresa qual é a probabilidade de que seja sorteada uma mulher? Qual é a probabilidade de que fosse uma mulher na certeza que o sorteado seria um não fumante?

Sejam H, M, F, e N respectivamente, eventos em que se seleciona um homem, uma mulher, um fumante e um não fumante. Inicialmente, utilizando um modelo equiprovável, pode-se afirmar que a chance de ser selecionada uma mulher é de $P(M) = \frac{120}{300} = \frac{2}{5}$. Por outro lado, se inicialmente tivesse sido informado de que a pessoa selecionada era com certeza um não fumante, os casos possíveis seriam apenas 100 e os casos favoráveis apenas 60. Ou seja, a probabilidade de ser selecionada uma mulher na certeza de que foi selecionado um não fumante, denotamos por $P(M|N)$, é de $P(M|N) = \frac{60}{100} = \frac{3}{5}$.

A ideia de que uma nova informação interfere na possibilidade de um evento ocorrer é conhecida há tempos por Bayes (MORGADO, Augusto César; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto, 2015) que se dedicou especialmente a esse tipo de probabilidade. É importante ressaltar que no exemplo anterior, os casos possíveis antes da informação de que o selecionado é um não fumante é representado pelo espaço amostral enquanto depois

da informação os casos possíveis são representados pelo evento N , por outro lado os casos favoráveis ao sorteio de uma mulher inicialmente são representados pelo conjunto M e depois da informação passam a ser representados por $M \cap N$.

Definição 3.6. Sejam A e B dois eventos de um experimento aleatório, com $P(A) \neq 0$. A probabilidade condicional de B na certeza de A é: $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$.

Utilizando a Definição 3.6 calcula-se a probabilidade de selecionar uma mulher dado que se tem a certeza de ter selecionado um não fumante. $P(M \cap N) = \frac{60}{300} = \frac{1}{5}$ e $P(N) = \frac{100}{300} = \frac{1}{3}$; pela definição $P(M|N) = \frac{1}{5} : \frac{1}{3} = \frac{3}{5}$.

Teorema 3.2 (Teorema de Bayes). *Sejam A e B dois eventos de um experimento aleatório, com $P(A) \neq 0$ e $P(B) \neq 0$, obtém-se então que: $P(B|A).P(A) = P(A|B).P(B)$.*

Demonstração. Para demonstrar tal resultado considere as definições das probabilidades condicionais de A na certeza de B e de B na certeza de A reescritas da seguinte maneira:

$$(I) P(B|A)P(A) = P(A \cap B).$$

$$(II) P(A|B)P(B) = P(A \cap B).$$

Igualando as expressões (I) e (II) da probabilidade da interseção obtém-se o teorema, ou seja, $P(B|A)P(A) = P(A|B).P(B)$. \square

Exemplo 3.6. Ketellen é uma esportista de regatas. Ela é proprietária do barco Sevilla, e notou que nas suas últimas competições que ventou forte (acima de 20 nós) ela tinha 80% de chance de vencer a prova. Sobre a condição e vento fraco a taxa de vitória era de apenas 40%. Por fim ela contratou um estatístico que verificou para ela que a probabilidade dela vencer no geral, independente da velocidade do vento era de 68%. Calcule qual é a probabilidade de o vento ter sido forte em uma competição em que Ketellen tenha saído vitoriosa e a equipe de meteorologia tenha afirmado que a chance de ter ventos fortes eram de 70% naquele dia.

Para resolver o referido problema é necessário primeiramente entender que as condições climáticas influenciam no desempenho dos atletas, portanto no resultado da competição em si. Sendo assim vamos definir os eventos envolvidos nesse problema. Seja A o evento em que ocorre a vitória de Ketellen e B o evento de incidência de vento forte no dia da competição. Os eventos A e B podem ocorrer simultaneamente portanto nesse caso não se aplica a terceira parte da Definição 3.4 ou a Proposição 3.2. O aspecto central para se levar em consideração é que a questão solicita que se calcule a probabilidade $P(B|A)$, ou seja, a probabilidade de que o vento no dia da competição tenha sido forte, dado que

ela vença o evento. Como o enunciado dá os valores de $P(A|B) = 0,8$, $P(A) = 0,68$ e $P(B) = 0,7$ basta, aplicarmos o Teorema 3.2 para obtermos a informação desejada, isto é:

$$P(B|A).P(A) = P(A|B).P(B)$$

$$P(B|A).0,68 = 0,8.0,7$$

$$P(B|A) = 0,8235$$

Ou seja, uma chance de 82,35% de que tenha ventado forte na certeza de que Ketellen tenha vencido. Uma interpretação desse resultado é que Ketellen tenha ou uma habilidade natural para velejar em ventos fortes, ou que ela tenha tido uma melhor preparação para esse tipo de condição climática do que os demais velejadores, e portanto na presença de vento forte suas chances de vitória sobem. Esse fenômeno de dependência da probabilidade de um evento em relação ao outro é o que caracteriza o nome dado a esse tipo de probabilidade, ou seja, condicional.

4 Motivação para uso de jogos na prática educativa

Os jogos estão presentes no cotidiano desde muito cedo, sejam jogos digitais, de tabuleiro, ou de azar. Eles são a sistematização das brincadeiras. Esse capítulo será dedicado a discorrer sobre o que é desenvolvimento e aprendizagem, e mostrar as funções e a importância do uso de jogos como ferramenta da aprendizagem.

4.1 Desenvolvimento e aprendizagem

Segundo Macedo (2007), o desenvolvimento e a aprendizagem representam as duas fontes do conhecimento, respectivamente uma endógena e outra exógena, ou seja, uma que se manifesta interiormente em um indivíduo, grupo, ou sistema, e outra que se produz no exterior do envolvido.

Figura 5 – Fontes do conhecimento segundo Macedo (2007).



Fonte: Imagem do autor

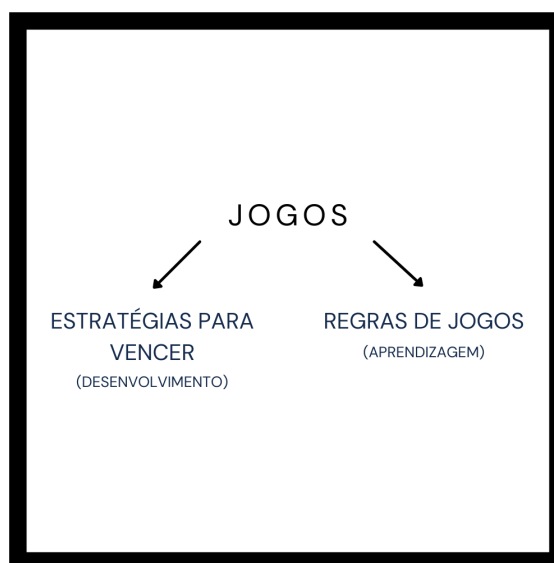
Podemos evidenciar essas duas fontes de conhecimento em um exemplo hipotético de uma turma de um ambiente escolar que esteja passando por problemas de convívio em especial com um dos alunos da turma por um preconceito étnico e estético. A comunidade escolar se une em um esforço para realizar um projeto que fale sobre as diferenças fenotípicas, que valorize todo tipo de estética questionando o padrão de beleza que seja o vigente para

essa turma, trazendo atividades de imersão em diferentes culturas e costumes em especial a geradora da situação conflitante de convívio.

Todo esse projeto e atividades são manifestações externas a esse grupo, tratando-se então da manifestação exógena, a aprendizagem, a apreensão de novos conhecimentos. Por outro lado, a turma envolvida que acolhe essa aprendizagem e que muda a partir dela, não mais excluindo o indivíduo de características físicas diferentes, tem nesse movimento de mudança interna a manifestação endógena, o desenvolvimento, nesse caso, da empatia e do respeito.

No que se refere ao desenvolvimento da sequência didática no uso de jogos, o movimento da aprendizagem é natural, uma vez que as regras dos jogos em si constituem o movimento exógeno desse processo, sendo assim uma das fontes de conhecimento constatado por Macedo (2007). Como os envolvidos na sequência terão tempo suficiente para jogar várias vezes, eles terão tempo para elaborar estratégias cada vez mais sofisticadas com o objetivo de ganhar o jogo, ou seja, passarão pelo processo endógeno, o do desenvolvimento.

Figura 6 – Síntese da relação entre conhecimento, desenvolvimento e jogos.



Fonte: Imagem do autor

4.2 Brincadeiras e jogos

O brincar é inerente ao desenvolvimento psicológico, que segundo Vygotski (1994), tem início quando a criança possui desejos que não podem ser imediatamente satisfeitos, encontrando na imaginação uma solução para esse conflito, ou seja, a criança se submete a um universo imaginário, no qual esses desejos possam ser realizados, esse mundo é o qual

o autor citado define como brinquedo. Tal brinquedo ou brincadeira não existe sem regras, mesmo sendo parte de um universo imaginário, ele possui limitações impostas pela própria percepção da criança.

A situação imaginária de qualquer forma de brinquedo já contém regras de comportamento, embora possa não ser um jogo com regras formais estabelecidas a priori. A criança imagina-se como mãe e a boneca como criança e, dessa forma, deve obedecer as regras do comportamento maternal. (VYGOTSKI, 1994)

Nesse exemplo anterior vê-se claramente os aspectos apontados pelo autor citado, a impossibilidade de ser mãe, faz com que o brinquedo venha a tona, esse é limitado pela percepção que a criança tem do que é ser mãe, por isso quando brincam de ser mãe, as crianças atuam como tal, se colocam em uma postura de autoridade, executam tarefas que competem aos adultos fazerem, como colocar a criança para dormir e depois trabalhar, e isso muda de acordo com a relação estabelecida com a criança e sua mãe.

O brincar é levado a sério por parte da criança, uma vez que ela se concentra e coloca atenção para definir as regras de seu imaginário e segui-las fidedignamente. O processo de brincar exige também doação, já que a criança dispõe do espaço, tempo, do seu próprio corpo, conhecimento, relações com as pessoas, para uma situação em que ela cumpre o papel de protagonista. Para além da infância, o brincar continua com a mesma função, no sentido de recuperar a criança que foram um dia, que doavam sua vida pelo gosto e pelo valor que tinham em si mesmas (MACEDO, 2007).

Os jogos, possuem regras formais que não vão mudar de acordo a percepção do envolvido, e isso é o que caracteriza a diferença entre jogo e brincadeira. Existe uma conexão clara entre os jogos e as brincadeiras, uma vez que ambas se relacionam com o lúdico caracterizado pela satisfação de um prazer sendo assim motivação principal para a sequência didática que será apresentada na presente dissertação, uma vez que a matemática é estigmatizada como enfadonha, tediosa, portanto não prazerosa. A utilização dos jogos na prática educativa tem a função de superar essa barreira, propiciando uma situação de aprendizagem instigante e envolvente.

Por último, as palavras de D'Ambrósio (2006, p 31) que tão acertivamente escreveu em seu livro *Educação matemática: da teoria a prática* "interessa à criança, ao jovem e ao aprendiz em geral aquilo que tem apelo às suas percepções materiais e intelectuais mais imediatas.", e nada mais próximo a essas percepções dos estudantes do que os jogos, em especial o jogo Bozó, muito tradicional no estado do Mato Grosso.

5 Metodologia da Pesquisa

Neste capítulo apresentaremos o objeto de pesquisa, a sequência didática construída e aplicada, os jogos utilizados e a metodologia adotada para coletar e analisar os dados dessa dissertação.

5.1 A sequência didática e o objeto de pesquisa

A sequência didática se dividiu conforme o referencial teórico sugere no Capítulo 2: planejamento, aplicação e avaliação. O início do planejamento deu-se na escolha do objeto de pesquisa, que foi inicialmente uma escola da rede pública, porém a Secretaria de Educação do estado do Mato Grosso - SEDUC suspendeu as aulas de modo presencial e articulou aulas virtuais, em virtude da pandemia causada pelo vírus Covid-19. Com a impossibilidade de realizar as atividades pessoalmente em uma escola pública, foi então selecionado um colégio da rede privada, o Colégio Leibniz.

O colégio está localizado no bairro Residencial Sagrada Família na cidade de Rondonópolis. Rondonópolis é uma cidade do estado do Mato Grosso, situada na região Centro-Oeste, de acordo com o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), em censo realizado em 2020, a população é de 236.042 habitantes. Participaram da pesquisa 17 alunos regularmente matriculados no 9º ano do Ensino Fundamental dessa escola.

Tal escolha foi precedida por uma consulta ao diretor Dércio Braga Santos e ao professor José Rubens Neris Junior, funcionário da escola e professor de matemática desta turma, sendo eles responsáveis pela organização dos horários da escola para que fosse possível essa aplicação sem prejudicar o bom andamento das aulas.

Fora então definido o período de cinco aulas para aplicação, sendo quatro no período matutino e uma conclusiva no período vespertino do mesmo dia. Ainda na etapa do planejamento os jogos Bozó e Coup foram adquiridos e o autor desse texto produziu uma atividade escrita, que está no Apêndice A.1, com intuito de avaliar a efetividade da sequência didática.

A aplicação da sequência didática começou com a apresentação da proposta e exposição oral das regras dos jogos Coup de acordo com o que será apresentado na próxima seção.

Figura 7 – Apresentação inicial do aplicador e da sequência didática.



Fonte: Imagem do autor

Figura 8 – Apresentação da proposta da sequência didática.



Fonte: Imagem do autor

Figura 9 – Momento de explicação das regras do jogo Bozó.



Fonte: Imagem do autor

Figura 10 – Alunos participantes, o aplicador e a orientadora.



Fonte: Imagem do autor

Após esse momento os alunos divididos em 4 grupos tiveram 50 minutos para jogar diversas partidas do jogo de modo a criarem grande familiaridade e desenvolverem estratégias mais elaboradas para vencer. Logo após, repetiu-se o processo de exposição oral das regras conforme a próxima seção e o momento dos alunos jogarem diversas vezes, porém dessa vez com o jogo Bozó.

Após esse momento mais lúdico, houve a conexão entre elementos dos jogos e os conceitos básicos de probabilidade apresentados no Capítulo 2. Foi também nesse

Figura 11 – Alunos jogando Bozó.



Fonte: Imagem do autor

Figura 12 – Alunos jogando Coup.



Fonte: Imagem do autor

momento que os alunos debateram sobre os conhecimentos prévios de probabilidade e como eles estavam relacionados a situações que vivenciaram nos jogos.

A etapa seguinte consistiu na resolução de uma atividade escrita em grupo, conforme Apêndice A.1. Durante o momento da resolução os alunos puderam consultar o aplicador em qualquer caso de dúvida. Eles tinham acesso também a internet, para que pudessem buscar algum conceito ou recurso para solucionar as questões.

A correção foi feita oralmente com breves anotações no quadro, estimulando a pluralidade de respostas e soluções obtidas pelos alunos, isto é, conforme eles iam

Figura 13 – Momento de resolução da atividade em grupo.



Fonte: Imagem do autor

apresentando suas estratégias de solução, eu como mediador anotava no quadro e comparava com a solução formal que eu havia preparado para aquela questão. Sempre que possível, foram apresentadas formas de resolver o exercício através da análise do espaço amostral em questão.

Ao fim da sequência didática, os alunos responderam um questionário, conforme Apêndice A.2, que consistiram em perguntas objetivas sobre a qualidade da sequência didática e a aplicação, e um espaço aberto para que eles pudessem criticar e sugerir alterações que eles julgassem relevante.

Por fim, um último momento foi para que eles se expressassem oralmente respondendo quais foram os aspectos positivos e negativos do uso dos jogos para o ensino de probabilidade, quais foram as impressões que eles tiveram de uma atividade lúdica interligada ao ensino, e qual era a autoavaliação de sua participação se consideravam ter progredido, e no caso de uma possível progressão se ele considerava que o uso dos jogos havia sido determinante para melhor compreensão dos conceitos de probabilidade.

5.2 Bozó

Bozó é um jogo popular no mundo todo com diversas regras diferentes que varia conforme os costumes culturais de cada país, no caso do Brasil, mesmo entre os estados é possível verificar suas diferenças, contudo como Bozó é um jogo popular em especial no estado do Mato Grosso, utilizar-se-á as regras de conhecimento popular entre os alunos. O jogo consiste em 10 rodadas com 2 rolagens de até 5 dados para cada jogador, sendo obrigatoriamente rolados os 5 dados na primeira rolagem, e quantos dados quiser rolar

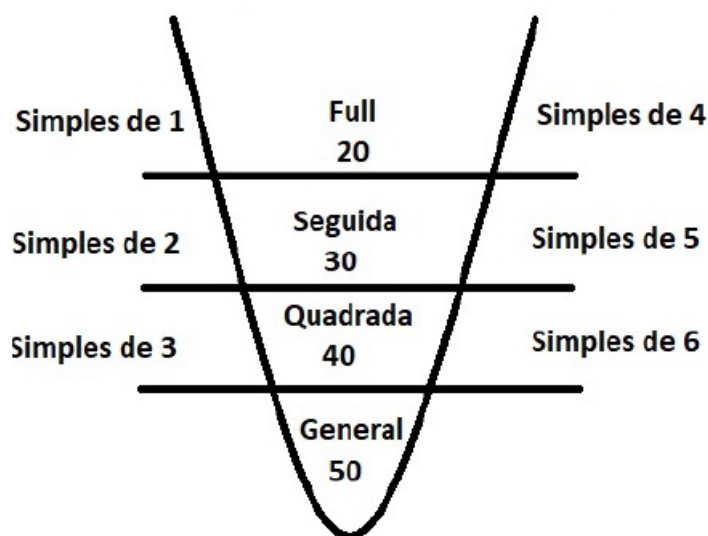
novamente na segunda rolagem. Esse dados são colocados normalmente em um recipiente fosco, geralmente um copo, de modo que o jogador não veja o resultado ao virar o recipiente de cabeça para baixo com os dados. O jogador então observa o resultado obtido e escolhe se vai rolar uma segunda vez e quantos dados utilizará para isso.

Existe ao todo 10 jogadas possíveis sendo 4 delas especiais: Simples de 1, Simples de 2, Simples de 3, Simples de 4, Simples de 5, Simples de 6, Full, Seguida, Quadrada e General. As jogadas simples de qualquer número é a soma dos números repetidos daquele número em questão, ou seja, se depois de duas rolagens você obteve 2 dados com número 2, 1 dados com número 3 e 2 dados com números 4 você pode escolher pontuar 4 pontos com a jogada Simples de 2, 3 pontos com a jogada simples de 3 ou pontuar 8 pontos com a jogada Simples de 4. Vamos as jogadas especiais:

1. Full: Um trio de dados do mesmo número e uma dupla - 20 pontos.
2. Seguida: Cinco dados formando uma sequência numérica de 1 a 5 ou de 2 a 6 - 30 pontos
3. Quadrada: Quatro dados com o mesmo número - 40 pontos
4. General: Cinco dados do mesmo número - 50 pontos.

As jogadas especiais permitem que o jogador ganhe 5 pontos a mais caso a jogada saia nos dados na primeira rolagem de seu turno, é popularmente conhecido como jogada de boca, ou seja, caso obtenha 5 dados iguais na primeira rolagem o jogador pontua 55 pontos e realizou um General de boca.

Figura 14 – Estrutura de marcação da pontuação do Bozó no estado de Mato Grosso.



Fonte: Imagem do autor

Existem outras regras opcionais do Bozó, como a possibilidade de utilizar os números das faces opostas dos dados, ou possibilitar uma terceira rolagem na última rodada, porém tais regras não serão utilizadas na execução da sequência didática

5.3 Coup

Coup é um jogo de cartas que envolve administração de recursos e capacidade de blefe. Cada jogador começa com duas cartas, chamadas influências, e duas moedas. O objetivo do jogo consiste em eliminar as influências de todos adversários. Vence aquele que se mantiver com pelo menos uma influência tendo eliminado os demais jogadores. As cartas presentes no baralho são: duque, assassino, condessa, capitão, embaixador e inquisidor.

Figura 15 – Carta duque e carta assassino do jogo Coup.



Fonte: Imagem do autor

A carta Duque permite o jogador bloquear a mecânica ajuda externa, que ainda será explicada, durante o turno do adversário, e também permite que ele colete três moedas em seu próprio turno. A carta assassino permite o jogador em seu turno pagar três moedas para eliminar uma influência.

A carta condessa permite que o jogador impeça que o assassino elimine uma influência de qualquer jogador da mesa. A carta capitão permite o jogador roubar duas moedas de um adversário e impedir o roubo de outro capitão.

Figura 16 – Carta condessa e carta capitão do jogo Coup.



Fonte: Imagem do autor

Figura 17 – Carta embaixador e carta inquisidor do jogo Coup.



Fonte: Imagem do autor

A carta embaixador permite que um jogador saque duas cartas e escolha entre essas e as da mão com quais ou qual ficará dependendo do número de influências que possui naquele momento, devolvendo as não escolhidas ao baralho. A carta inquisidor permite que o jogador faça um procedimento similar ao do embaixador porém sacando apenas uma carta. O inquisidor também pode escolher aleatoriamente uma carta da mão do adversário para olhar e decidir se o oponente troca aquela carta por outra do baralho. Por fim tanto a carta inquisidor quanto a carta embaixador podem impedir que a carta capitão realize um roubo.

Cada jogador pode tomar apenas uma ação por turno: dar um golpe, coletar recursos, ou usar uma habilidade de carta, mesmo que não possua a carta. O golpe consiste em pagar um custo de sete moedas ao banco para eliminar aleatoriamente uma das influências do adversário sem contestação. Para coletar recursos o jogador pode coletar uma moeda do banco utilizando a mecânica chamada renda, que é imbloqueável, ou coletar duas

moedas com a mecânica chamada ajuda externa, porém essa segunda pode ser bloqueada pela carta duque como dito anteriormente.

Para usar uma habilidade de carta, o jogador deve anunciar que possui aquela influência em voz alta e a ação que aquela carta permite que ele execute naquele turno. Qualquer um da mesa pode contestar a veracidade daquele jogador realmente possuir aquela carta. Caso o jogador esteja falando a verdade ele deve revelar a carta trocando por outra do baralho e aquele que duvidou perde uma influência, caso ele esteja mentindo perde uma de suas influências aleatoriamente. As cartas de influências eliminadas não retornam ao baralho.

A seguir discutiremos a ferramenta utilizada para coleta e análise de dados das entrevistas feitas com os alunos. Esse método é chamado de círculo hermenêutico-dialético, e em síntese consiste na realização de todas as entrevistas e na comparação dos discursos apresentados, verificando os pontos convergentes, de modo a se obter uma resultado mais fidedigno a realidade.

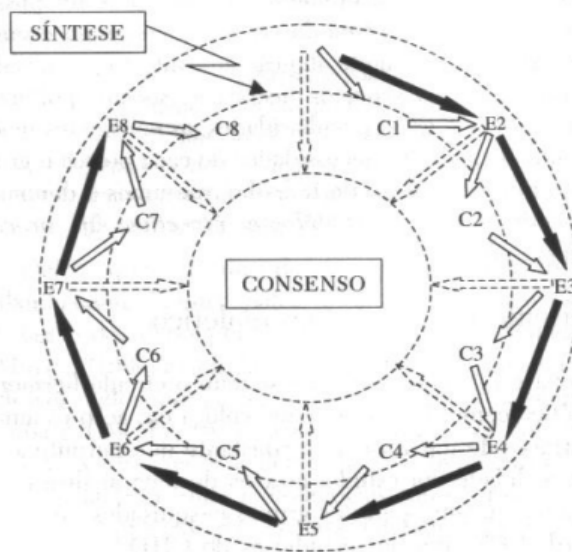
5.4 Círculo hermenêutico-dialético

O círculo hermenêutico-dialético é uma relação constante entre o pesquisador e os entrevistados, um processo de interpretações e re-interpretações das respostas dadas pelos entrevistados, de modo a aproximar-se mais da realidade, também chamada de consenso (OLIVEIRA, 2001).

Em tempo real de entrevista, o pesquisador deve interpretar a resposta pelo entrevistado formando assim sua construção teórica do relato e assim começar sua análise da realidade apresentada ali na forma de discurso, logo após deve permitir que o segundo entrevistado saiba do que foi relatado pelo primeiro para depois ouvir a resposta do segundo entrevistado, interpretá-la e unir à primeira construção teórica feita do primeiro entrevistado aproximando-se mais da realidade a cada nova análise de cada novo entrevistado. Esse processo está resumido na imagem a seguir:

A imagem anterior é referente a uma pesquisa feita por Maria Marly de Oliveira com 8 entrevistados de um dos grupos participantes de seu projeto. O primeiro círculo pontilhado representa o grupo de entrevistados enquanto o segundo ciclo ilustra as construções e reconstruções teóricas (síntese de cada entrevista e por grupos). Cada entrevistado é designado pela letra E e a síntese das entrevistas, por C. As setas brancas indicam o sentido que as construções teóricas são levadas a cada novo entrevistado.

Figura 18 – Círculo hermenêutico-dialético.



Procedimento metodológico

E = entrevistado; **C** = construção teórica

Fonte: Oliveira, Maria Marly de (2001)

Parte III

RESULTADOS

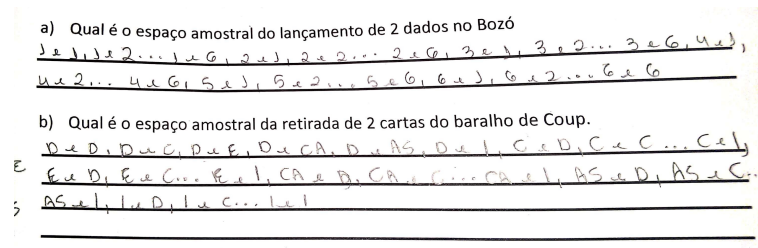
6 Análises preliminares

Este capítulo contém as análises das atividades feitas pelos alunos do Apêndice A.1, das repostas dadas aos questionários do Apêndice A.2, que têm a avaliação da sequência didática por parte dos alunos, e das entrevistas que foram feitas coletivamente.

6.1 Análise das repostas das atividades

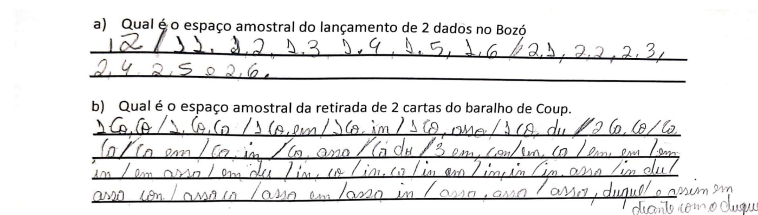
Para realizar as atividades os alunos foram divididos em grupos, que aqui serão denominados grupo 1, grupo 2, grupo 3 e grupo 4.

Figura 19 – Respostas dadas nos itens a e b pelo grupo 1.



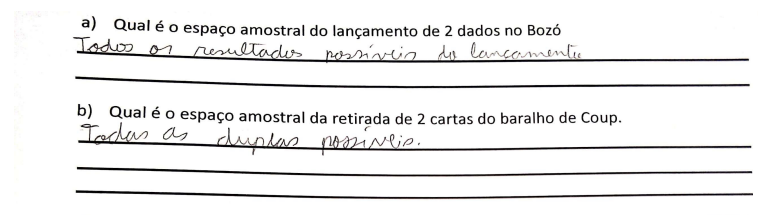
Fonte: Imagem do autor

Figura 20 – Respostas dadas nos itens a e b pelo grupo 2.



Fonte: Imagem do autor

Figura 21 – Respostas dadas nos itens a e b pelo grupo 3.



Fonte: Imagem do autor

Figura 25 – Respostas dadas nos itens c e d pelo grupo 3.

c) Qual o número de elementos do espaço amostral cada um dos itens anteriores? O número de elementos de algum item se repetiu? Caso sim, nota alguma semelhança entre as situações?

36
12.17 = 206

d) No caso de ser retirada uma carta de Assassino do Baralho, a chance de sair uma carta de Condessa em uma segunda retirada aumenta em relação a primeira? E no caso de rolar um número 1 no primeiro dado, a chance de rolar um número 2 no segundo dado aumenta? Caso a resposta seja diferente para essas duas situações, explique com suas palavras o porquê.

Sim. Não. Uma é diferente e independente no outro
NÃO.

Fonte: Imagem do autor

Figura 26 – Respostas dadas nos itens c e d pelo grupo 4.

c) Qual o número de elementos do espaço amostral cada um dos itens anteriores? O número de elementos de algum item se repetiu? Caso sim, nota alguma semelhança entre as situações?

180

d) No caso de ser retirada uma carta de Assassino do Baralho, a chance de sair uma carta de Condessa em uma segunda retirada aumenta em relação a primeira? E no caso de rolar um número 1 no primeiro dado, a chance de rolar um número 2 no segundo dado aumenta? Caso a resposta seja diferente para essas duas situações, explique com suas palavras o porquê.

Sim. Não. Porque as quantidades de dados de dado não muda, diferente das cartas.

Fonte: Imagem do autor

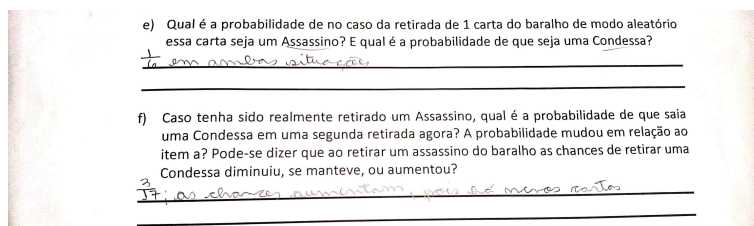
No que se refere ao item c os grupos 1, 2 e 3 deram as respostas esperadas, com destaque para o grupo 1 que apresentou uma justificativa sintética e quase completa para a resposta mesmo sem a exigência de uma no enunciado. Já o grupo 4 apresentou apenas um número que não era coerente com suas respostas dos itens anteriores que o mesmo grupo havia corretamente respondido. Além disso o grupo 4 não respondeu a todas as requisições do item.

Com relação ao item d, os quatro grupos compreendem totalmente que o evento de rolagem de um dado não interferem em uma segunda rolagem, e que o evento de uma extração de carta do baralho interfere em uma segunda extração. O grupo 1 apresenta uma justificativa bem escrita que inclui o cálculo de probabilidades de cada caso mesmo sem isso ter sido pedido. Os demais grupos mesmo que de forma mais simples apresentam de modo claro justificativas para o fenômeno observado.

É possível perceber nessas respostas uma evidência de desenvolvimento das habilidades EF03MA25, EF04MA26, EF06MA30, EF07MA34 e EF09MA20, de acordo com a BNCC apresentada no Subcapítulo 2.2 no que se refere a noção de eventos mais prováveis e menos prováveis, do cálculo básico de probabilidades como um resultado fracionário e na

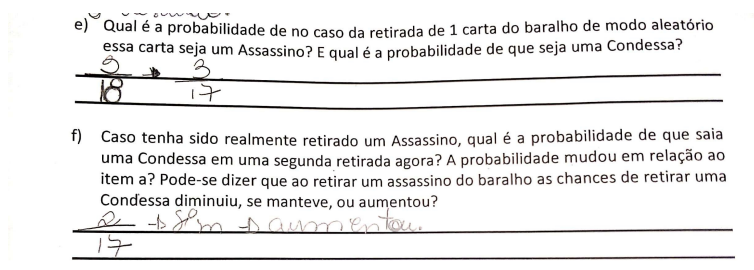
compreensão de eventos dependentes e eventos independentes.

Figura 27 – Respostas dadas nos itens e e f pelo grupo 1.



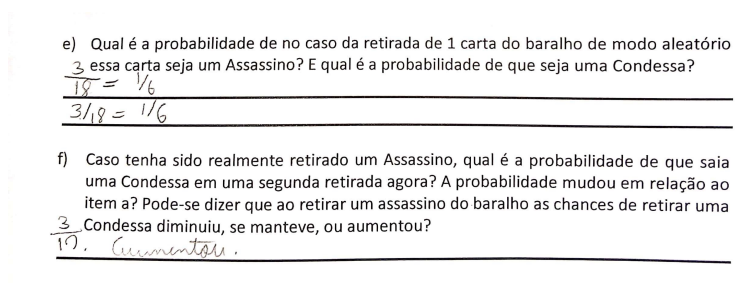
Fonte: Imagem do autor

Figura 28 – Respostas dadas nos itens e e f pelo grupo 2.



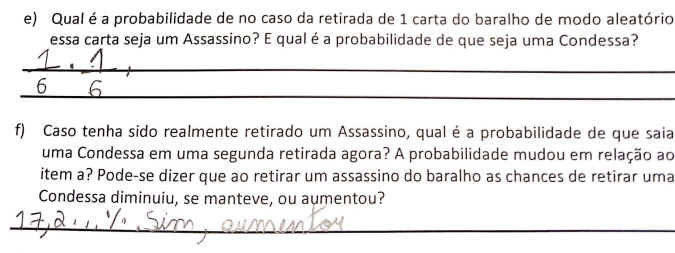
Fonte: Imagem do autor

Figura 29 – Respostas dadas nos itens e e f pelo grupo 3.



Fonte: Imagem do autor

Figura 30 – Respostas dadas nos itens e e f pelo grupo 4.

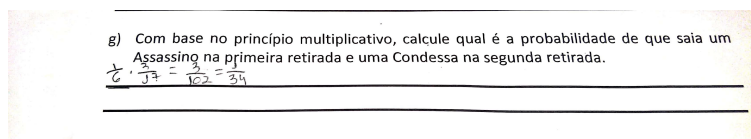


Fonte: Imagem do autor

No item e, os grupos 1, 3 e 4 demonstraram compreender como expressar a probabilidade de um evento acontecer na forma de uma fração conforme a habilidade EF05MA23 citada no Subcapítulo 2.2, já que responderam corretamente o item. O grupo 2 parece ter compreendido que a questão se tratava de duas extrações de cartas consecutivas do baralho, sendo assim responderam corretamente quanto a primeira carta retirada, e dentro da interpretação feita por eles da questão apresentaram uma resposta coerente quanto a uma possível extração consecutiva de carta do baralho evidenciando proficiência na mesma habilidade referida anteriormente.

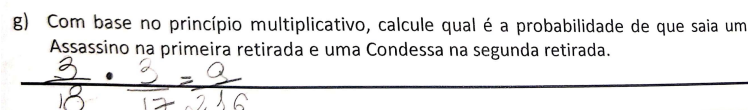
Quanto ao item f, novamente apenas o grupo 2 apresentou uma resposta diferente da esperada por conta de uma interpretação errada. Eles levaram em consideração como se fossem extraídos dois assassinos em sequência do baralho, e quando levado em conta essa interpretação a resposta do grupo é coerente. Fica evidenciado aqui o desenvolvimento da habilidade EF09MA20, explicitada no Subcapítulo 2.2, e a noção intuitiva de probabilidade condicional.

Figura 31 – Resposta dada no item g pelo grupo 1.



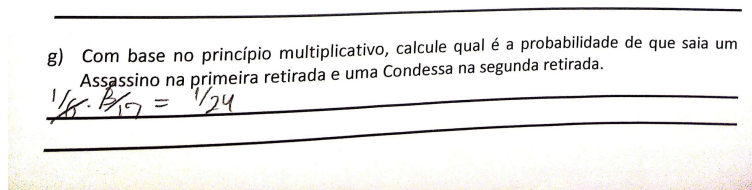
Fonte: Imagem do autor

Figura 32 – Resposta dada no item g pelo grupo 2.



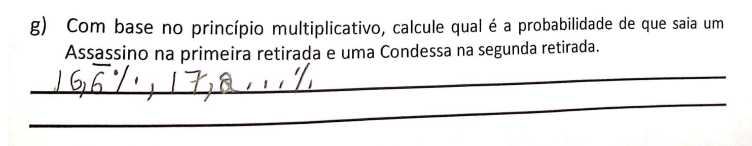
Fonte: Imagem do autor

Figura 33 – Resposta dada no item g pelo grupo 3.



Fonte: Imagem do autor

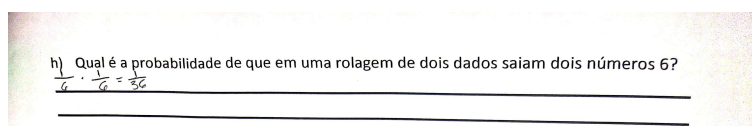
Figura 34 – Resposta dada no item g pelo grupo 4.



Fonte: Imagem do autor

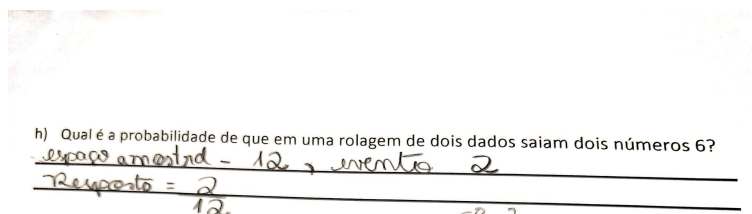
Os três primeiros grupos aplicaram corretamente o princípio multiplicativo, porém destes, o grupo 3 cometeu um erro de simplificação de fração. O grupo 4 por sua vez não compreendeu a questão totalmente apresentando duas probabilidades coerentes com os dois eventos descritos na pergunta porém não relacionados pela interseção como requerido. Nesse caso os três primeiros grupos desenvolveram as habilidades EF08MA22, EM13MAT310 e EM13MAT312 conforme o Subcapítulo 2.2.

Figura 35 – Resposta dada no item h pelo grupo 1.



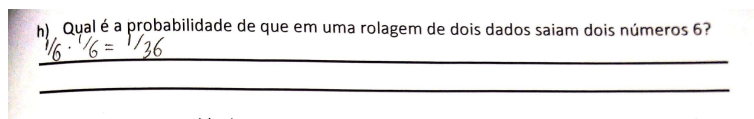
Fonte: Imagem do autor

Figura 36 – Resposta dada no item h pelo grupo 2.



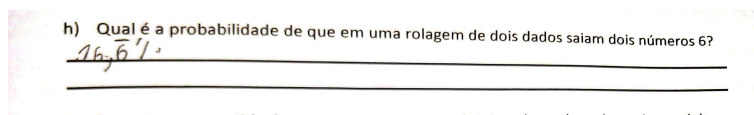
Fonte: Imagem do autor

Figura 37 – Resposta dada no item h pelo grupo 3.



Fonte: Imagem do autor

Figura 38 – Resposta dada no item h pelo grupo 4.



Fonte: Imagem do autor

No item h, os grupos 1,3 e 4 responderam corretamente aplicando devidamente o princípio multiplicativo. Em contrapartida o grupo 2 tentou utilizar-se do espaço amostral de modo indevido o que gerou um resultado não coerente. Esse erro foi debatido posteriormente na correção e o grupo 2 alegou que apenas haviam se confundido com o número de elementos do espaço amostral.

Os itens i, j e k, não foram corretamente respondidos por nenhum dos grupos, no caso, o tempo para o desenvolvimento da atividade estava chegando ao fim, e os alunos se apressaram de modo a entregar.

Durante o processo de correção das atividades ficou claro que apenas os grupos 1 e 4 compreenderam o que tinha sido pedido nos itens i, j e k, e apresentaram argumentos pouco articulados que demonstraram uma compreensão inicial sobre probabilidade condicional em contextos mais complexos. Os demais grupos demonstraram compreensão do conceito de probabilidade condicional apenas em contextos menos complexos como no item f.

6.2 Análise dos dados dos questionários

O questionário respondido, conforme Apêndice A.2, pelos participantes da pesquisa, tinha por finalidade avaliar a qualidade da sequência didática e de sua aplicação. Consiste em cinco perguntas objetivas e um espaço aberto para críticas e sugestões.

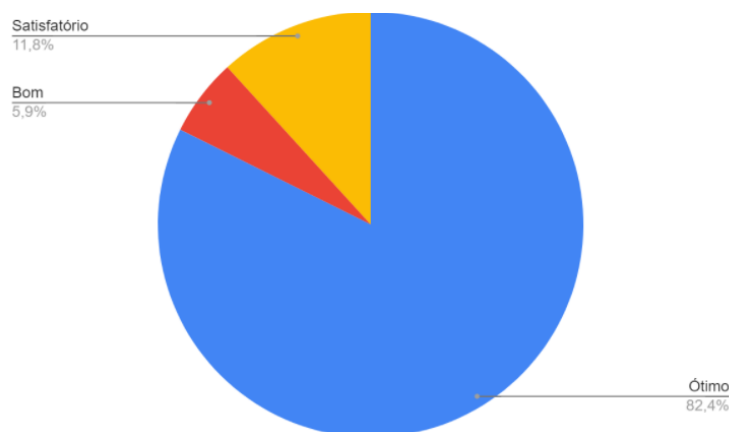
A primeira pergunta pedia para que avaliassem a compreensão sobre os jogos e as regras apresentadas. Dos 17 alunos, 14 posicionaram ter um ótimo entendimento, 1 bom, 2 satisfatório, e nenhum caso de insatisfatório.

Tabela 2 – Compreensão sobre os jogos e suas regras.

Ótimo	Bom	Satisfatório	Insatisfatório
14	1	2	0

Fonte: Tabela do autor

Figura 39 – Compreensão dos alunos quanto aos jogos e suas regras.



Fonte: Imagem do autor

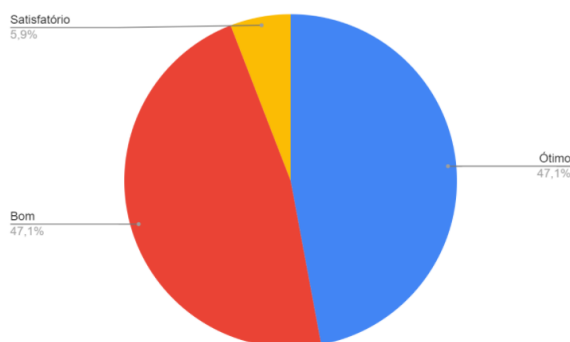
Quanto a segunda pergunta que avaliava a compreensão sobre probabilidade com os jogos utilizados, 8 deles assinalaram ótimo entendimento, 8 bom, 1 satisfatório e nenhum insatisfatório.

Tabela 3 – Compreensão sobre probabilidade e os jogos relacionados.

Ótimo	Bom	Satisfatório	Insatisfatório
8	8	1	0

Fonte: Tabela do autor

Figura 40 – Compreensão dos alunos quanto a probabilidade e os jogos relacionados.



Fonte: Imagem do autor

Já a terceira questão que avaliava a aplicação e o aplicador o posicionamento foi quase unanimemente considerado ótimo por 16 alunos e 1 deles considerou apenas bom.

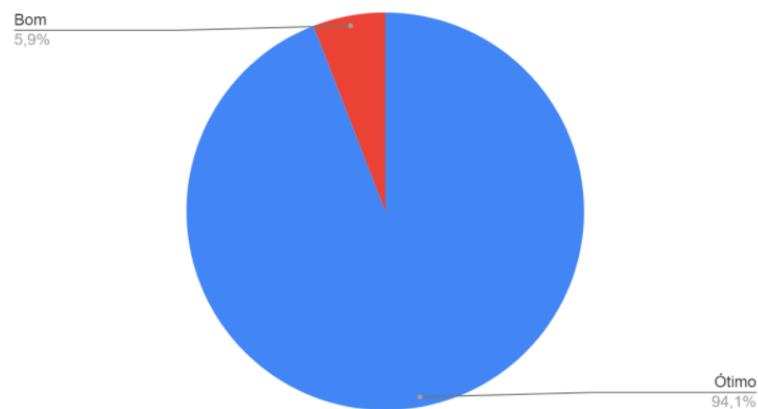
Esse dado será melhor avaliado durante a análise das entrevistas, pois lá há discursos que contrariam essa maioria de nota máxima.

Tabela 4 – Avaliação da aplicação da sequência didática e seu aplicador.

Ótimo	Bom	Satisfatório	Insatisfatório
16	1	0	0

Fonte: Tabela do autor

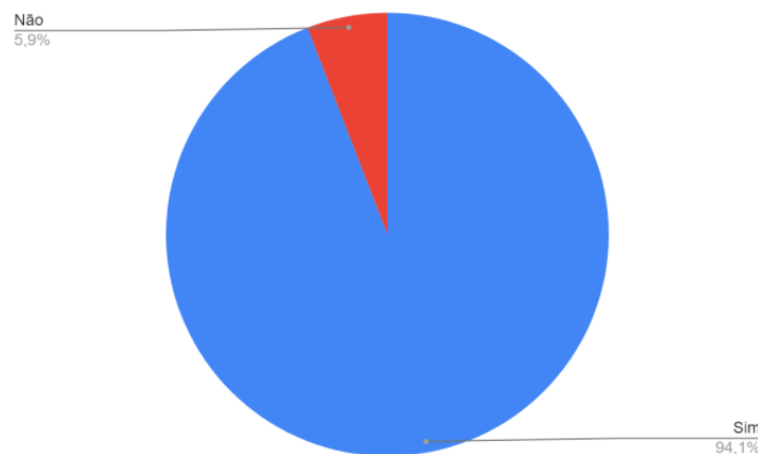
Figura 41 – Avaliação da aplicação da sequência didática e seu aplicador.



Fonte: Imagem do autor

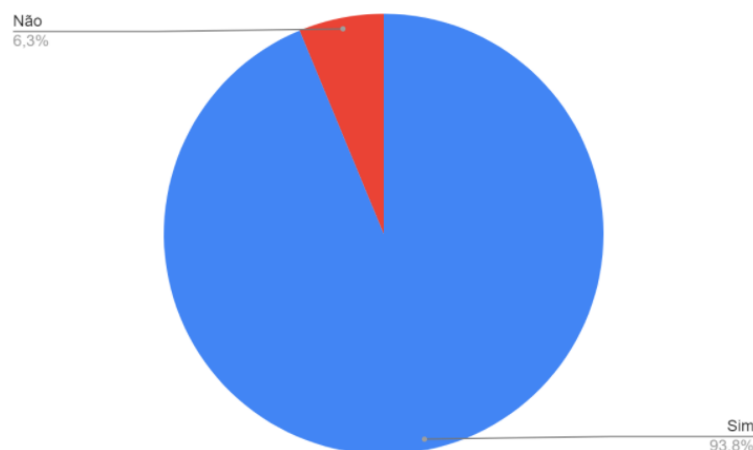
Nas duas últimas questões objetivas, 16 alunos julgam ter progredido no conhecimento de probabilidade, 1 julga não ter progredido. Desses 16, 15 deles atribuem esse progresso ao uso dos jogos, e apenas um posiciona que isso não teve relevância.

Figura 42 – Distribuição percentual do progresso em probabilidade dos estudantes.



Fonte: Imagem do autor

Figura 43 – Relação entre o progresso em probabilidade e o uso de jogos.



Fonte: Imagem do autor

No espaço destinado a críticas e sugestões, todas as quatro manifestações feitas foram positivas quanto ao uso dos jogos e a sequência didática, entretanto um dos alunos identificou a necessidade de mais tempo para desenvolvimento das atividades.

6.3 Análise das entrevistas e conclusões

As entrevistas foram feitas coletivamente, e visava buscar mais críticas e sugestões para uma melhor análise qualitativa da sequência didática produzida e aplicada. A entrevista consistia em uma pergunta: Como otimizar essa sequência didática? Depois de um entrevistado manifestar seu ponto de vista, os demais também comentaram sobre os aspectos levantados de modo a gerar um consenso a respeito do que fora sugerido.

A principal manifestação foi por mais tempo para realizar as atividades, uma vez que três dos itens da atividade escrita ficaram prejudicados. Outros alunos sugeriram diminuir o tempo de outras etapas como o da explicação das regras, ou do momento de experimentar os jogos para que assim a atividade escrita não ficasse prejudicada. Por fim, entraram em consenso de que seria importante trazer resumos das regras de modo impresso, de modo a otimizar esse tempo da etapa de explicação das regras.

O segundo apontamento foi de que deveria haver um instrumento de controle dos próprios alunos, que na concepção deles ficaram muito empolgados e acabaram dificultando o processo de explicação das regras por conta do barulho feito. Contudo foi contraposto que no caso dessa sequência didática ser aplicada por um professor já conhecido da turma, os envolvidos naturalmente colaborariam mais com a questão disciplinar em todas as etapas.

A terceira objeção, é que nem muitos não conseguiram ser atendidos em todas as ocasiões que precisaram do aplicador no momento de experimentar os jogos. Foi também

debatido que não seria possível atender em todos os momentos pelo tempo curto já citado na primeira manifestação. Nesse momento fica claro que o aplicador não teve um desempenho de total excelência como sugerido pelos questionários. Houve mais reflexão crítica nesse momento, portanto a entrevista possui maior peso na análise de modo que pode ser considerada apenas boa a aplicação e a atuação do aplicador.

Como considerações do aplicador e autor dessa dissertação, cabe dizer que a sequência didática seria melhor aproveitada pelos alunos, se as etapas fossem divididas em vários dias, e não em um único dia como foi aplicado. Dar intervalos de tempo entre uma etapa e outra permitiria que os estudantes pudessem assimilar melhor as regras, os conceitos, e as relações entre conceitos e situações práticas de jogo. Porém, só foi possível realizar essa pesquisa em um único dia para não atrapalhar o bom funcionamento do colégio colaborador.

Outro aspecto percebido é quanto a exaltação dos estudantes, que fora citada por eles em suas entrevistas como um problema. Pelo contrário, tratava-se do entusiasmo da curiosidade pelo novo e pelo desconhecido.

Por fim, unindo as informações apresentadas até aqui, pode-se concluir que o uso dos jogos Bozó e Coup foram de fato eficientes ferramentas para que o aprendizado de probabilidade fosse mais significativo para os alunos. Do ponto de vista das habilidades a serem desenvolvidas, ainda faltam adaptações e melhorias a serem implementadas de modo a que o conceito de probabilidade condicional seja compreendido com maior profundidade por parte dos envolvidos.

7 Conclusão

No início desse trabalho, a intenção era fazer uma sequência didática para ensino de probabilidade fora dos modelos tradicionais de ensino, pois de acordo com os estudos de Gonzaga (2015) e Silva (2010) esta área da matemática possui muitos professores que guiam suas aulas apenas em livro-texto e aplicação de fórmulas em modelos prontos. Como forma de natural contraposição fizemos a escolha do uso de jogos para a produção da sequência didática, pela proximidade com o lúdico, que é muitas vezes desvinculado do processo de aprendizagem conforme os estudantes vão avançando em sua vida escolar.

Fez-se então necessário embasar o uso de jogos na aprendizagem, e nesse sentido Macedo (2007) e Vygotski (1994) contribuíram muito com suas obras mostrando como a mente se relaciona com os jogos e o aprender, e como essa dinâmica é está enraizada desde a infância na vida humana.

A partir desse ponto, foram escolhidos os jogos, sendo um deles muito tradicional no estado de Mato Grosso, de modo a trazer mais familiaridade aos elementos componentes da sequência didática.

Após essas definições preliminares, foi estudado profundamente a estrutura de uma sequência didática nos referenciais teóricos e as habilidades previstas na BNCC no ensino de probabilidade de modo a harmonizar as demandas legais, a estrutura, e o uso dos jogos.

O referencial matemático formal sobre probabilidade é central uma vez que foi identificada nos indicadores educacionais um déficit de aprendizagem em matemática no geral. Por isso o estudo minucioso a respeito desse objeto de estudo na área da probabilidade foi essencial para construção da sequência didática.

Além das justificativas teóricas para o uso dos jogos, decidimos que também seria harmônico se houvesse uma variável empírica de análise, e nesse processo a sequência didática deveria ser aplicada e avaliada pelos resultados dos envolvidos e pelo relato da experiência dos envolvidos. Nesse aspecto o círculo hermenêutico-dialético se mostrou a melhor opção para coleta e análise dos dados qualitativos.

Ao longo da pesquisa pudemos concluir que o uso dos jogos Bozó e Coup para ensino de probabilidade é realmente enriquecedor da prática pedagógica, possibilitando diversas abordagens diferentes da tradicional, e reflexões mais centradas na realidade e no cotidiano dos alunos.

Tivemos é claro barreiras como o tempo limitado, e a euforia dos alunos, que demoraram para ir além do aspecto lúdico dos jogos. Contudo a participação e engajamento deles foi genuína em todo processo, ficando visível que o barulho e a leve desorganização dos

pensamentos deles vindos dessa energia, eram frutos diretos da curiosidade pelo aprender.

Por fim o material produzido por essa dissertação poderá ser utilizado por outros professores, como fonte de exemplo de sequências didáticas fora do modelo tradicional, podendo ser usado diretamente com alunos do ensino básico, ou em momentos de formação de professores.

Sendo assim, esta pesquisa poderá ajudar a dar um passo em direção a uma solução a problemática apontada no começo desse texto, que é o ciclo vicioso causado pelo ensino baseado apenas em memorizar, servindo de referência de novas maneiras de ensinar probabilidade visando qualidade educacional.

Referências

- ALVES, Marcos Monte de Oliveira. **Um estudo sobre os jogos de azar**. Dissertação de Mestrado. Instituto de Matemática Pura e Aplicada. Rio de Janeiro. 59 p. 2015.
- BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2017. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_-versaofinal_site.pdf>. Acesso em: 05 de agosto de 2020.
- D'AMBRÓSIO, Ubiratran. **Educação matemática: da teoria à prática**. 13ª ed. Campinas: Papirus, 2006.
- GONZAGA, Fábio Luis de Oliveira. **Uma investigação sobre o ensino de probabilidade e análise combinatória**. Trabalho de conclusão de curso (Licenciatura em Matemática), Instituto de Matemática, UFRGS, Porto Alegre, 2015. Disponível em: <<https://lume.ufrgs.br/handle/10183/128011>>. Acesso em: 04 de maio de 2020.
- LIMA, Elon Lages. **Curso de Análise**. 15ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2019. 192 p.
- MACEDO, Lino de. **Os jogos e o lúdico na aprendizagem escolar**. Porto Alegre : Artmed, 2007. E-book.
- MORGADO, Augusto César; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. **Matemática Discreta**. 2ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2015. 192 p. v. 2º. ISBN 9788583370154
- OLIVEIRA, Maria Marly de. **Metodologia Interativa: um processo hermenêutico dialético**. Interfaces Brasil/Canadá, v. 1, n. 1, p. 67-80, 2001.
- OLIVEIRA, Maria Marly de. **Sequência didática interativa no processo de formação de professores**. Petrópolis, RJ: Vozes, 2013.
- OLIVEIRA, Maria Marly de. **Sequência didática interativa no ensino de ciências**. In: Colóquio Internacional Educação e Contemporaneidade. Laranjeiras: Anais do IV Colóquio Internacional Educação e Contemporaneidade. Sergipe: UFS, 2010.
- SILVA, Carla Soares. **Estudo de caso sobre o pensamento combinatório de alunos do ensino médio**. Trabalho de conclusão de curso (Licenciatura em Matemática), Instituto de Matemática, UFRGS, Porto Alegre, 2010. Disponível em: <<https://lume.ufrgs.br/handle/10183/29157>>. Acesso em: 04 de maio de 2020.
- VYGOTSKY, L. S. **A formação social da mente**. São Paulo: Martins Fontes, 1994.
- ZABALA, Antoni. **A prática educativa: como ensinar**. Porto Alegre: Artmed, 1998.

Apêndices

APÊNDICE A – Elementos da sequência didática

A.1 Atividade escrita

Figura 44 – Frente da atividade escrita da sequência didática

Atividade em grupo – Bozó, Coup e probabilidade

Agora que dominaram as regras dos jogos, utilize o conhecimento adquirido para responder coletivamente as questões a seguir:

- a) Qual é o espaço amostral do lançamento de 2 dados no Bozó

- b) Qual é o espaço amostral da retirada de 2 cartas do baralho de Coup.

- c) Qual o número de elementos do espaço amostral de cada um dos itens anteriores? O número de elementos de algum item se repetiu? Caso sim, nota alguma semelhança entre as situações?

- d) No caso de ser retirada uma carta de Assassino do Baralho, a chance de sair uma carta de Condessa em uma segunda retirada aumenta em relação à primeira? E no caso de rolar um número 1 no primeiro dado, a chance de rolar um número 2 no segundo dado aumenta? Caso a resposta seja diferente para essas duas situações, explique com suas palavras o porquê.

- e) Qual é a probabilidade de no caso da retirada de 1 carta do baralho de modo aleatório essa carta seja um Assassino? E qual é a probabilidade de que seja uma Condessa?

- f) Caso tenha sido realmente retirado um Assassino, qual é a probabilidade de que saia uma Condessa em uma segunda retirada agora? A probabilidade mudou em relação ao item a? Pode-se dizer que ao retirar um assassino do baralho as chances de retirar uma Condessa diminuiu, se manteve, ou aumentou?

- g) Com base no princípio multiplicativo, calcule qual é a probabilidade de que saia um Assassino na primeira retirada e uma Condessa na segunda retirada.

Figura 45 – Verso da atividade escrita da sequência didática

h) Qual é a probabilidade de que em uma rolagem de dois dados saiam dois números 6?

i) Durante uma partida de Coup restaram apenas dois jogadores dos seis totais que tinham no início da partida. Até o momento os jogadores possuem ambas cartas, e dos oponentes eliminados foram reveladas e retiradas do jogo as seguintes cartas: 2 duques, 1 assassino, 3 condessas, 2 capitães, 3 inquisidores e 1 embaixador. O jogador 1 número tem nas mãos 1 duque e 1 assassino. Se o jogador 2 nessa rodada disse ter um assassino e está utilizando a habilidade dessa carta, qual é a probabilidade de que seja um blefe?

j) Se no caso anterior o jogador 2 tivesse se defendido de um ataque do jogador 1 dizendo que tinha uma condessa, qual é a probabilidade de que fosse um blefe?

k) A partir do visto nos itens i) e j) vale a pena contestar ações do adversário no caso do jogo iniciar com 6 jogadores e restarem apenas 2 no momento da contestação?

A.2 Questionário

Figura 46 – Ficha de avaliação da sequência didática

Ficha de avaliação da sequência didática de probabilidade com uso dos jogos Bozó e Coup

Nesta ficha, você deverá responder às questões objetivas de 1 a 3 com as seguintes alternativas a) Ótimo (equivalente a pontuação de 8 a 10), b) Bom (equivalente a pontuação de 6 a 7,9), c) Satisfatório (equivalente a pontuação de 5 a 5,9), d) Ruim (equivalente a pontuação de 0 a 4,9). Já as questões 4 e 5 possuem apenas as alternativas a) Sim, b) Não. Por fim deixe sua contribuição com críticas e sugestões na questão 6 que é dissertativa.

- 1) Avalie sua compreensão sobre os jogos e as regras:
 - a) Ótimo
 - b) Bom
 - c) Satisfatório
 - d) Ruim
- 2) Avalie sua compreensão sobre probabilidade com os jogos utilizados nessa aula:
 - a) Ótimo
 - b) Bom
 - c) Satisfatório
 - d) Ruim
- 3) Avalie a aplicação e o professor aplicador da aula:
 - a) Ótimo
 - b) Bom
 - c) Satisfatório
 - d) Ruim
- 4) Considera que progrediu em seu conhecimento sobre probabilidade?
 - a) Sim
 - b) Não
- 5) Caso tenha respondido sim na questão 4. Acredita que seu progresso esteja diretamente ligado ao uso dos jogos?
 - a) Sim
 - b) Não
- 6) Se possui sugestões ou críticas quanto a sequência didática aplicada ou qualquer um dos itens anteriormente perguntados peça que deixe nesse espaço a seguir sua contribuição:

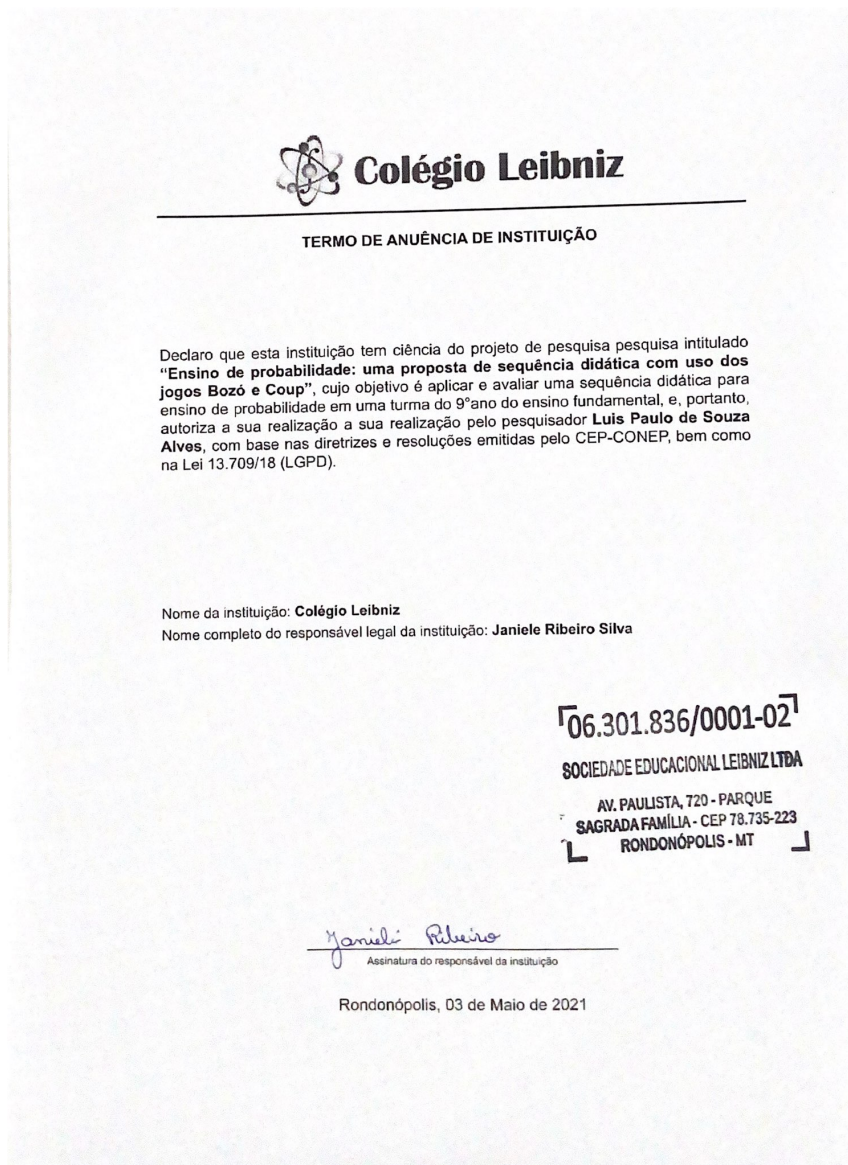
Fonte: Produção do Autor.


Anexos

ANEXO A – Documentos Suplementares

A.1 Termos

Figura 47 – Termo de Anuência de Instituição



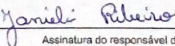
 **Colégio Leibniz**

TERMO DE ANUÊNCIA DE INSTITUIÇÃO

Declaro que esta instituição tem ciência do projeto de pesquisa intitulado **"Ensino de probabilidade: uma proposta de sequência didática com uso dos jogos Bozó e Coup"**, cujo objetivo é aplicar e avaliar uma sequência didática para ensino de probabilidade em uma turma do 9º ano do ensino fundamental, e, portanto, autoriza a sua realização a sua realização pelo pesquisador **Luis Paulo de Souza Alves**, com base nas diretrizes e resoluções emitidas pelo CEP-CONEP, bem como na Lei 13.709/18 (LGPD).

Nome da instituição: **Colégio Leibniz**
Nome completo do responsável legal da instituição: **Janiele Ribeiro Silva**

06.301.836/0001-02
SOCIEDADE EDUCACIONAL LEIBNIZ LTDA
AV. PAULISTA, 720 - PARQUE
SAGRADA FAMÍLIA - CEP 78.735-223
RONDONÓPOLIS - MT


Assinatura do responsável da instituição

Rondonópolis, 03 de Maio de 2021

Fonte: Produção do Autor