



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE BRAGANÇA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

JACKSON ROBERTO CARVALHO DE SOUZA

**UMA PROPOSTA DE ENSINO DO TEOREMA DE MORLEY NA EDUCAÇÃO
BÁSICA**

Bragança – Pará

2020



JACKSON ROBERTO CARVALHO DE SOUZA

**UMA PROPOSTA DE ENSINO DO TEOREMA DE MORLEY NA EDUCAÇÃO
BÁSICA**

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal do Pará - UFPA, como requisito parcial, para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Bragança – Pará

2020

JACKSON ROBERTO CARVALHO DE SOUZA

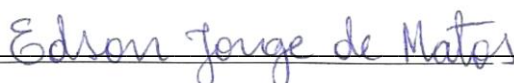
**UMA PROPOSTA DE ENSINO DO TEOREMA DE MORLEY NA EDUCAÇÃO
BÁSICA**

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal do Pará - UFPA, como requisito parcial, para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

DATA DA AVALIAÇÃO: 26 de junho de 2021

Após a apresentação do candidato a Banca Examinadora procedeu a sua argumentação oral e houve por bem considerá-lo: **aprovado**.

BANCA EXAMINADORA




Prof. Dr. Edson Jorge de Matos – PROFMAT / BRAGANÇA

Orientador



Prof. Dr. Marcos Lázaro de Souza Albuquerque – PROFMAT / BRAGANÇA

Membro da Banca



Prof. Dr. João Claudio Brandemberg Quaresma – FACMAT / ICEN / UFPA

Membro da Banca

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)**

S719p Souza, Jackson Roberto Carvalho de.
Uma Proposta de Ensino do Teorema de Morley na Educação
Básica / Jackson Roberto Carvalho de Souza. — 2021.
73 f. : il. color.

Orientador(a): Prof. Dr. Edson Jorge de Matos
Coorientação: Prof^a. Dra. Maria Augusta Raposo de Barros
Brito

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará,
Campus Universitário de Bragança, Programa de Mestrado
Profissional em Ensino da Matemática, Bragança, 2021.

1. Teorema de Morley. 2. GeoGebra. 3. Origami. 4.
Tangram de Morley. I. Título.

CDD 510

“Dedico este trabalho a minha família, avó, Izaura Rodrigues Carvalho, mãe, Francisca Ivaneth Carvalho de Souza, pai, Antônio Pereira de Souza, irmã, Jaqueline Roberta Carvalho de Souza, filha, Jamilli Victória Carvalho de Souza, e sobrinho, Heitor Carvalho”.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por ter me concedido o dom do conhecimento, e por ter me dado a paz de espírito necessária para superar obstáculos durante o curso.

Aos meus pais, Francisca Souza e Antônio Souza, por sempre incentivarem a minha carreira acadêmica.

Aos Professores do PROFMAT campus Bragança.

Ao meu orientador, professor Dr. Edson Jorge de Matos, e a minha co-orientadora, Professora Dra. Maria Augusta Raposo de Barros Brito, pelas contribuições na elaboração deste trabalho.

Ao PROFMAT/UFPA/Bragança pela oportunidade de concretizar mais um passo importante na minha vida profissional e acadêmica.

Aos amigos da turma PROFMAT/2018 campus Bragança por terem compartilhado momentos de alegria e trocas de conhecimentos.

Ao meu diretor, Professor Raimundo Barros, por diversas ajudas durante o curso.

.

RESUMO

Este trabalho objetiva a aplicação, com base nos princípios do Teorema de Morley, do programa “GeoGebra”, da técnica japonesa Origami e do jogo chinês Tangram, no ensino da matemática ao longo do regime escolar básico, sobretudo no Ensino Médio, com o intuito de evidenciar a importância da teoria por intermédio da utilização de ferramentas lúdicas em uma nova versão. Com base nessa perspectiva, o trabalho foi desenvolvido a partir de pesquisa bibliográfica, posteriormente, houve a elaboração de uma oficina, aplicada no Centro de Ensino Professor João Teixeira Sousa Anexo I, pertencente à rede escolar pública. Por conseguinte, constituiu-se uma proposta de ensino diversificada, dotada de sugestões de como o teorema pode ser trabalhado no ambiente escolar, mediante o uso de métodos tradicionais e tecnológicos - portanto, variados – com adaptações oriundas do Teorema de Morley, a saber, a criação do “Tangram de Morley” e, por meio do Origami, a trisseção dos ângulos do triângulo. A produção desta pesquisa visa à valorização do Teorema, uma vez que, mesmo sendo imprescindível para os estudos ligados à Geometria, ainda sofre pela sua ínfima popularização, inclusive no meio acadêmico.

Palavras-chave: Teorema de Morley; GeoGebra; Origami; Tangram de Morley.

ABSTRACT

This objective work is applied, based on the principles of Morley's Theorem, the “GeoGebra” program, the Japanese Origami technique and the Chinese game Tangram, in the teaching of mathematics and in the long period of the basic school regime, mainly in high school, with in order to highlight the importance of theory through the use of musical tools in a new version. Based on this perspective, the work was developed of bibliographic research, later on, it started to prepare a workshop, applied at at Teaching Center Teacher João Teixeira Sousa Annex I, belonging to the public school system. For example, a proposal for diversified teaching, with suggestions for how the student can be worked in the school environment, using the use of traditional and technological methods - therefore, varied - with adaptations from the Morley professor, namely, a creation of “ Morley Tangram ”and, through Origami, a trisection of the angles of the triangle. The production of this research aims at valuing the Theorem, since, even though it is essential for studies related to geometry, it still suffers from its popularization, even in the academic environment.

Keywords: Morley's theorem; GeoGebra; Origami; Morley Tangram.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - O ponto P (esq.), a reta r ou AB (centro) e o plano α (dir.)	14
Figura 2 - Segmento AB	14
Figura 3 - Semirreta AB de origem A	15
Figura 4 - Região angular no plano	16
Figura 5 - Ângulo Raso	16
Figura 6 - OC é a bissetriz de $A\hat{O}B$	16
Figura 7 - Triângulo ABC	17
Figura 8 - Triângulo equilátero (esq.), isósceles (centro), escaleno (dir.).....	18
Figura 9 - Dois triângulos congruentes.....	18
Figura 10 - Triângulo isósceles ABC , $AB \equiv AC$, $B \equiv C$	19
Figura 11 - Triângulos retângulos congruentes	21
Figura 12 - A bissetriz AP relativa ao vértice A e ao lado BC , $P \in BC$, $PAB \equiv PAC$	21
Figura 13 - S é o incentro do triângulo ABC , $AP \cap BQ \cap CR = \{S\}$	22
Figura 14 - BD e BE relativas ao lado AC e ao vértice B , $ABD \equiv DBE \equiv EBC$	22
Figura 15 - Ângulo central AOB , AB arco correspondente.	23
Figura 16 - A circunferência de centro O e raio $r = OA$	24
Figura 17 - Ângulo inscrito ACB à circunferência de centro O	25
Figura 18 - Circunferência λ de centro O sobre um dos lados	26
Figura 19 - Circunferência λ de centro O no interior do ângulo inscrito AVB	26
Figura 20 - Circunferência λ de centro O no exterior do ângulo inscrito AVB	27
Figura 21 - Régua não graduada (esq.) e Compasso (dir.)	28
Figura 22 - Mediatriz CD	28
Figura 23 - Reta r e circunferência λ	29
Figura 24 - Reta s	30
Figura 25 - Ângulo AOB trisseccionado por OE e OF	30
Figura 26 - Reta AB	31
Figura 27 - Números construtíveis - a , a , b e $a+b$	32
Figura 28 -Números construtíveis $1a$ e ab	32
Figura 29 - Cubo de aresta a (a esq.) e Cubo de aresta b (a dir.).....	33
Figura 30 - Círculo de centro O e raio r (esq.) e quadrado de lado l (dir.).....	33
Figura 31 - Construção do ângulo de 60°	35

Figura 32 - Ângulos internos do triângulo ABC trisseccionados.....	37
Figura 33 - Triângulo ABC	37
Figura 34 - Ponto D do triângulo ABC	38
Figura 35 - Ponto E do triângulo ABC	38
Figura 36 - Segmento FG do triângulo ABC.....	39
Figura 37 - Pontos H e I do triângulo ABC	40
Figura 38 - Ponto J do triângulo ABC	40
Figura 39 - Segmento FJ congruente ao segmento IJ	42
Figura 40 - Circunferência de centro J e raio FJ	43
Figura 41 - Triângulo ABC	44
Figura 42 - Triângulo ABC com ângulos indicados.....	45
Figura 43 - Trissetrizes AB' e AB''	46
Figura 44 - Trissetrizes do triângulo ABC	47
Figura 45 - E, F, D, pontos de intersecção das trissetrizes adjacentes	48
Figura 46 - Triângulo de Morley	49
Figura 47 - Triângulo de Morley com a indicação das medidas dos lados e dos ângulos internos	49
Figura 48 - Triângulo ABC colorido	50
Figura 49 - Tangram	51
Figura 50 - Formas geométricas	51
Figura 51 - Formas não-geométricas	52
Figura 52 – Triângulo PQR	53
Figura 53 - Tangram de Morley	53
Figura 54 - Construção do quadrado	55
Figura 55 - Triângulo BCD	55
Figura 56 - Retas EF e GH ambas paralelas a BC.....	56
Figura 57 - Trisseccção do ângulo agudo CBD	56
Figura 58 - Trisseccção do ângulo agudo BDC	57
Figura 59 - Trisseccção do ângulo reto BCD	57
Figura 60 - Triângulo (XYZ) de Morley	58
Figura 61 – Reconstrução do quadrado	64
Figura 62 – Figuras não geométricas formadas com peças do Tangram de Morley	64
Figura 63 – Trapézio formado com peças do Tangram de Morley	65
Figura 64 – Quadrado formado com peças do Tangram de Morley.....	65

Figura 65 – Paralelogramo formado com peças do Tangram de Morley	65
Figura 66 – Tangram de Morley construído no Geogebra	66
Figura 67 – Tangram de Morley construído por origami	66
Figura 68 - Construção do quadrado por dobraduras em folha de papel A4.....	67
Figura 69 - Recorte da folha para obter o quadrado	68
Figura 70 - Indicação do triângulo BCD na folha de papel A4.....	69
Figura 71 - Passos da trissecção do ângulo agudo.....	70
Figura 72 - Colaboração entre alunos.....	71
Figura 73 - Construção do Triângulo de Morley por dobraduras em folha de papel A4	72

SUMÁRIO

1.	INTRODUÇÃO	12
2.	ALGUMAS DEFINIÇÕES	14
2.1	NOÇÕES PRIMITIVAS	14
2.2	NOTAÇÃO DE PONTO, RETA E PLANO	14
2.3	SEGMENTO DE RETA	14
2.3.1	Medida de um segmento	15
2.4	SEMIRRETA	15
2.5	ÂNGULOS	16
2.5.1	Bissetriz de um ângulo	16
2.6	TRIÂNGULOS	16
2.6.1	Elementos	17
2.6.2	Classificação	17
2.7	CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS	18
2.7.1	Casos de congruências	19
2.7.2	Teorema do triângulo isóscele	19
2.7.3	Caso especial de congruência de triângulos retângulos	20
2.8	BISSETRIZ INTERNA DE UM TRIÂNGULO	21
2.8.1	Incentro	22
2.8.2	Trissetriz interna de um triângulo	22
2.9	CIRCUNFERÊNCIA	23
2.9.1	Circunferências congruentes	23
2.9.2	Ângulo central	23
2.9.3	Arcos congruentes	24
2.9.4	Media do ângulo central e do arco correspondente	24
2.9.5	Ângulo inscrito	24
2.9.6	Medida do ângulo inscrito	25
2.10	CONSTRUÇÃO COM RÉGUA E COMPASSO	27
2.11	CONSTRUÇÃO POR NEUSIS	29
3.	PROBLEMAS CLÁSSICOS DA GEOMETRIA	31
3.1	A DUPLICAÇÃO DO CUBO	32

3.2	QUADRATURA DO CIRCULO	33
3.3	TRISSECÇÃO DE UM ÂNGULO QUALQUER	34
4.	TEOREMA DE MORLEY	36
5.	GEOGEBRA.....	44
6.	TANGRAM DE MORLEY	51
7.	OFICINA ORIGAMI.....	54
8.	CONSIDERAÇÕES FINAIS	60
	REFERÊNCIAS	62
	APÊNDICE A – LISTA DE ATIVIDADES	64
	APÊNDICE B – FOTOS DA OFICINA	67

1. INTRODUÇÃO

A matemática vem, ao longo dos anos, se desenvolvendo como ciência e, tornando-se, indubitavelmente, uma ferramenta imprescindível para a sociedade moderna. Dessa forma, os seus conceitos vêm sendo apresentados, discutidos e ressignificados, a fim de atender às necessidades cotidianas e às exigências sociais de cada época.

É exatamente aqui que a nossa pesquisa se situa, pois, considerando que a Geometria é uma teoria que se estrutura a partir de axiomas, definições, termos primitivos e teoremas inerentes aos estudos matemáticos e que, diariamente, nos deparamos com as mais diversas situações nas quais precisamos, para a sua resolução, dispor de elementos da matemática, seja para contar, medir ou fazer inferências consideramos pertinente aprofundarmos os estudos sobre o Teorema de Morley e suas propriedades, bem como as suas possibilidades de aplicação na Educação Básica.

A constatação de que as ideias e os conceitos da Geometria, que mantêm relação com as retas e com os ângulos fazem parte do imagético do ser humano pode ser facilmente percebida pela mera observação do mundo real, seja por meio de objetos, de esculturas, de *design* de móveis ou, até mesmo, de peças do vestuário, da arquitetura, dentre outros.

Diante disso, a presente pesquisa justifica-se em razão da necessidade de definição de linhas de trabalho docente voltadas ao ensino da matemática, especificamente, da Geometria Euclidiana que, por meio de recursos diversificados, como o Software Geogebra, a técnica japonesa Origami e o jogo chinês Tangram, ensinam o processo de construção do triângulo de Morley, a fim de facilitar a apropriação de conceitos e procedimentos matemáticos, que são importantes para a formação integral do educando, já que englobam diversos saberes.

De modo geral, este trabalho teve como objetivo principal evidenciar, por meio de uma proposta de ensino diversificada, a importância do Teorema de Morley na Educação Básica.

Nessa perspectiva, estabelecemos os seguintes objetivos específicos: a) identificar as possibilidades de aplicação do Teorema de Morley em diferentes séries do Ensino Básico; b) desenvolver uma proposta diversificada para o ensino da Geometria; c) relacionar o Teorema de Morley a recursos didáticos com origens e características diferentes.

A presente pesquisa desenvolve-se em tópicos dispostos a apresentar uma sequência lógica e didática. No tópico 1, apresenta-se a Introdução. No tópico 2, apresentamos os pressupostos teóricos da Geometria Euclidiana, que servirão de base para a demonstração do teorema que encontram-se organizados a partir das proposições primitivas (aceitas sem demonstrações), em seguida, trazemos algumas definições e teoremas. A seguir, no tópico 3,

discorreremos sobre os três problemas clássicos da geometria: a duplicação do cubo; a quadratura do círculo e a trisseção de um ângulo qualquer. Na sequência, apresentamos, no tópico 4, a demonstração construtiva do Teorema de Morley, na qual utilizamos alguns instrumentos de construções geométricas. No tópico 5, apresenta-se o programa Geogebra. Apresentamos, no tópico 6, um quebra-cabeça, um material inédito construído a partir da ideia do Tangram Tradicional intitulado Tangram de Morley. No tópico 7 apresentamos a metodologia, os passos da construção, registros e os resultados da Oficina de Origami desenvolvida na Escola Professor João Teixeira Sousa Anexo I, *locus* da pesquisa, localizada no município de Maracaçumé, Ma. No tópico 8, apresenta-se as Considerações Finais.

2. ALGUMAS DEFINIÇÕES

2.1 NOÇÕES PRIMITIVAS

As noções (conceitos, termos, entes) geométricas são estabelecidas por meio de definição. As noções primitivas são adotadas sem definição. Adotaremos sem definir as noções de **ponto**, **reta** e **plano**.

De cada um desses entes temos conhecimento intuitivo, decorrente da experiência e da observação.

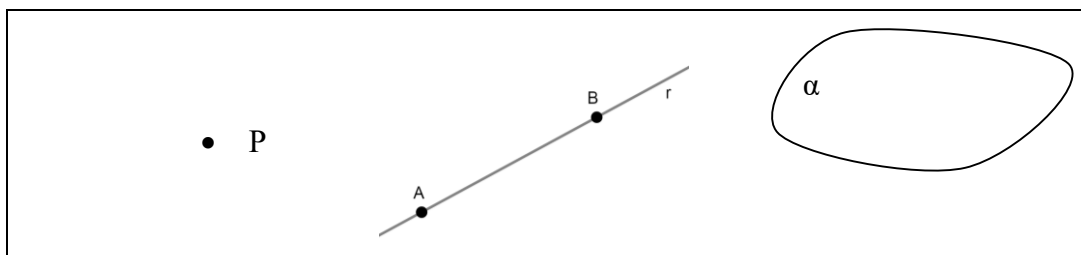
2.2 NOTAÇÃO DE PONTO, RETA E PLANO

O Ponto – São representadas por letras maiúsculas latinas: A, B, C, ...

A Reta – São representadas por letras minúsculas latinas: a, b, c, ...

O Plano – São representadas por letras gregas minúsculas: α , β , γ , ...

Figura 1 - O ponto **P** (esq.), a reta **r** ou \overline{AB} (centro) e o plano α (dir.)



Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

2.3 SEGMENTO DE RETA

Dados dois pontos distintos a reunião do conjunto desses dois pontos com o conjunto dos pontos que estão entre eles é um segmento de reta.

Assim, dados A e B, $A \neq B$, o segmento AB (indicado por \overline{AB}) é o segmento que segue:

Figura 2 - Segmento AB



Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

Os pontos A e B são as extremidades de \overline{AB} e os pontos que estão entre A e B são pontos internos de \overline{AB} . Se os pontos A e B coincidem ($A = B$) dizemos que \overline{AB} é um segmento nulo.

2.3.1 Medida de um segmento

A medida de \overline{AB} será indicada por $m(\overline{AB})$.

A medida de um segmento (não nulo) é um número real positivo associado ao segmento de tal forma que:

1º) Segmento congruentes têm medidas iguais e, reciprocamente, segmentos que têm medidas iguais são congruentes.

$$\overline{AB} \equiv \overline{CD} \leftrightarrow m(\overline{AB}) = m(\overline{CD}).$$

2º) Se um segmento é maior que outro, sua medida é maior que a deste outro.

$$\overline{AB} > \overline{CD} \leftrightarrow m(\overline{AB}) > m(\overline{CD})$$

3º) A um segmento soma está associada uma medida que é a soma das medidas dos segmentos parcelas.

$$\overline{RS} = \overline{AB} + \overline{CD} \leftrightarrow m(\overline{RS}) = m(\overline{AB}) + m(\overline{CD})$$

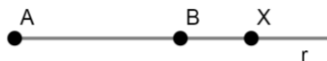
À medida de um segmento dá-se o nome de comprimento do segmento.

2.4 SEMIRRETA

Dados dois pontos distintos A e B, a reunião do segmento de reta AB com o conjunto dos pontos X tais que B está entre A e X é a semirreta AB (indicada por \overrightarrow{AB}).

$$\overrightarrow{AB} = \overline{AB} \cup \{X / B \text{ está entre } A \text{ e } X\}$$

Figura 3 - Semirreta AB de origem A



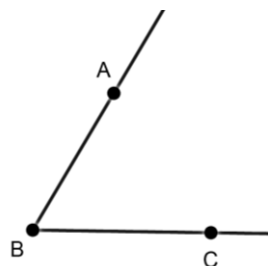
Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

Se A está entre B e C, as semirretas AB e AC são ditas semirretas opostas.

2.5 ÂNGULOS

Chamamos de ângulo a figura formada por duas semirretas com a mesma origem.

Figura 4 - Região angular no plano



Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

As semirretas são chamadas de lados do ângulo e a origem comum, de vértice do ângulo. Um ângulo formado por duas retas distintas de uma mesma reta é chamado de ângulo raso e mede 180° .

Figura 5 - Ângulo Raso



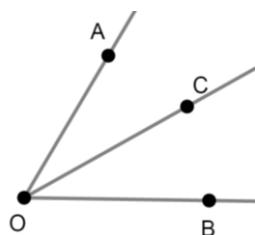
Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

2.5.1 Bissetriz de um ângulo

Uma semirreta \overrightarrow{OC} interna a um ângulo AOB é bissetriz do ângulo AOB se, e somente se, $\widehat{AOC} \equiv \widehat{BOC}$.

A bissetriz de um ângulo é uma semirreta interna ao ângulo, com origem no vértice do ângulo e que o divide em dois ângulos congruentes.

Figura 6 - \overrightarrow{OC} é a bissetriz de \widehat{AOB}



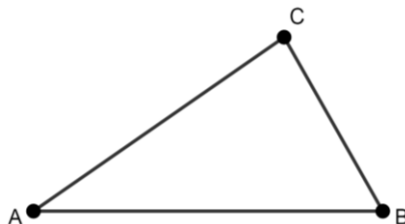
Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

2.6 TRIÂNGULOS

Dados três pontos A, B e C não colineares a reunião de \overline{AB} , \overline{AC} e \overline{BC} chama-se triângulo ABC.

Indicação: Triângulo ABC = $\Delta ABC = \overline{AB} \cup \overline{AC} \cup \overline{BC}$

Figura 7 - Triângulo ABC



Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

2.6.1 Elementos

Vértices: os pontos A, B e C são os vértices do ΔABC .

Lados: \overline{AB} , \overline{AC} e \overline{BC} são os lados do triângulo.

Ângulos: \widehat{BAC} ou \widehat{A} , \widehat{ABC} ou \widehat{B} e \widehat{ACB} ou \widehat{C} são os ângulos do ΔABC (ou ângulos internos do ΔABC).

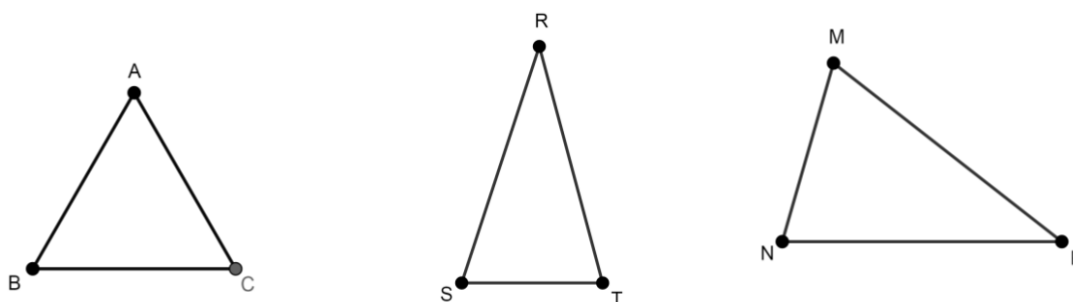
2.6.2 Classificação

Quanto aos lados, os triângulos se classificam em:

- Equiláteros se, e somente se, têm os três lados congruentes;
- Isósceles se, e somente se, têm dois lados congruentes;
- Escaleno se, e somente se, dois quaisquer lados não são congruentes.

Conforme se observa na figura a seguir:

Figura 8 - Triângulo equilátero (esq.), isósceles (centro), escaleno (dir.)



Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

Na figura 8, o lado ST do triângulo isósceles é chamado de base e o ângulo oposto à base é o ângulo do vértice.

Notemos que todo triângulo equilátero é também isósceles.

2.7 CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS

Um triângulo é congruente (símbolo \equiv) a outro triângulo se, e somente se, é possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices de modo que:

- Seus lados são ordenadamente congruentes aos lados do outro e
- Seus ângulos são ordenadamente congruentes aos ângulos do outro.

Figura 9 - Dois triângulos congruentes



Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

$$\Delta ABC \equiv \Delta MNP \leftrightarrow \begin{array}{ll} \overline{AB} \equiv \overline{MN} & \hat{A} \equiv \hat{M} \\ \overline{AC} \equiv \overline{MP} & \text{e } \hat{B} \equiv \hat{N} \\ \overline{BC} \equiv \overline{NP} & \hat{C} \equiv \hat{P} \end{array}$$

É importante frisar que a congruência entre triângulos é reflexiva, simétrica e transitiva.

2.7.1 Casos de congruências

A definição de congruência de triângulos dá todas as condições que devem ser satisfeitas para que dois triângulos sejam congruentes. Essas condições (seis congruências: três lados e três ângulos) são totais. Existem condições mínimas para que dois triângulos sejam congruentes. São os chamados casos ou critérios de congruência.

1º caso: LAL – Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes dois lados e o ângulo compreendido, então eles são congruentes.

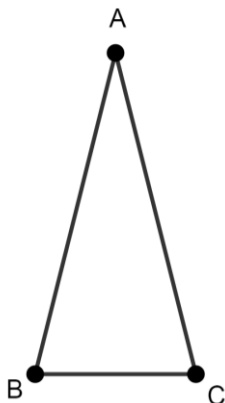
Esta proposição é um postulado e indica que, se dois triângulos têm ordenadamente congruentes dois lados e o ângulo compreendido, então o lado restante e os dois ângulos restantes também são ordenadamente congruentes.

$$\begin{array}{l} \overline{AB} \equiv \overline{MN} \\ \widehat{B} \equiv \widehat{N} \\ \overline{BC} \equiv \overline{NP} \end{array} \quad \rightarrow \Delta ABC \equiv \Delta MNP \quad \rightarrow \begin{array}{l} \widehat{C} \equiv \widehat{P} \\ \overline{AC} \equiv \overline{MP} \\ \widehat{A} \equiv \widehat{M} \end{array}$$

2.7.2 Teorema do triângulo isóscele

Se um triângulo tem dois lados congruentes, então os ângulos opostos a esses lados são congruentes.

Figura 10 - Triângulo isósceles ABC, $\overline{AB} \equiv \overline{AC}$, $\widehat{B} \equiv \widehat{C}$.



Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

2º caso: ALA – Se dois triângulos tem ordenadamente congruentes um lado e os dois ângulo a ele adjacentes, então esses triângulos são congruentes.

$$\begin{array}{lcl} \widehat{B} \equiv \widehat{N} & & \overline{AB} \equiv \overline{MN} \\ \overline{BC} \equiv \overline{NP} & \rightarrow \Delta ABC \equiv \Delta MNP & \rightarrow \widehat{A} \equiv \widehat{M} \\ \widehat{C} \equiv \widehat{P} & & \overline{AC} \equiv \overline{MP} \end{array}$$

Observação: Com base no 2º caso (ALA), pode-se provar a recíproca do teorema do triângulo isósceles, ou seja, se um triângulo possui dois ângulos congruentes, então esse triângulo é isósceles.

3º caso: LLL – Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes os três lados, então esses triângulos são congruentes.

$$\begin{array}{lcl} \overline{AB} \equiv \overline{PM} & & \widehat{A} \equiv \widehat{P} \\ \overline{BC} \equiv \overline{MN} & \rightarrow \Delta ABC \equiv \Delta PMN & \rightarrow \widehat{B} \equiv \widehat{M} \\ \overline{AC} \equiv \overline{PN} & & \widehat{C} \equiv \widehat{N} \end{array}$$

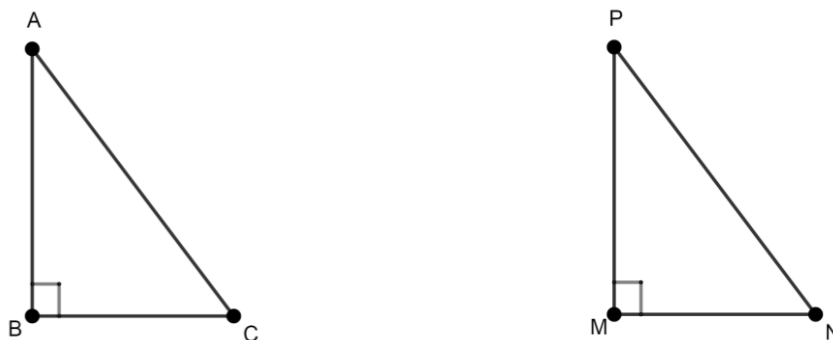
4º caso: LAA_o – Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes um lado, um ângulo adjacente e o ângulo oposto a esse lado, então esses triângulos são congruentes.

$$\begin{array}{lcl} \overline{BC} \equiv \overline{MN} & & \overline{AB} \equiv \overline{PM} \\ \widehat{B} \equiv \widehat{M} & \rightarrow \Delta ABC \equiv \Delta PMN & \rightarrow \widehat{C} \equiv \widehat{N} \\ \widehat{A} \equiv \widehat{P} & & \overline{AC} \equiv \overline{PN} \end{array}$$

2.7.3 Caso especial de congruência de triângulos retângulos

Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes um cateto e a hipotenusa, então esses triângulos são congruentes.

Figura 11 - Triângulos retângulos congruentes



Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

$$\overline{BC} \equiv \overline{MN}$$

$$\overline{AC} \equiv \overline{PN}$$

$$\triangle ABC \equiv \triangle PMN$$

$$\overline{AB} \equiv \overline{PM}$$

$$\hat{A} \equiv \hat{P}$$

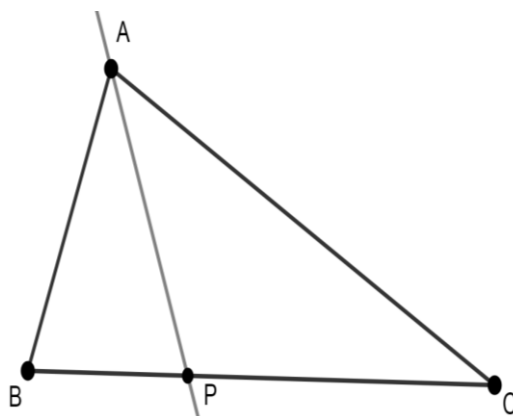
$$\hat{C} \equiv \hat{N}$$

\hat{B} e \hat{M} são retos

2.8 BISSETRIZ INTERNA DE UM TRIÂNGULO

Bissetriz interna de um triângulo é o segmento, com extremidades num vértice e no lado oposto, que divide o ângulo desse vértice em dois ângulos congruentes.

Figura 12 - A bissetriz \overline{AP} relativa ao vértice A e ao lado \overline{BC} , $P \in \overline{BC}$, $\hat{PAB} \equiv \hat{PAC}$

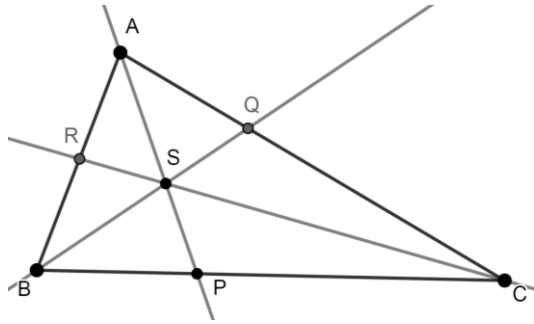


Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

2.8.1 Incentro

As três bissetrizes internas de um triângulo interceptam-se num mesmo ponto, denominado Incentro.

Figura 13 - S é o incentro do triângulo ABC, $\overline{AP} \cap \overline{BQ} \cap \overline{CR} = \{S\}$.

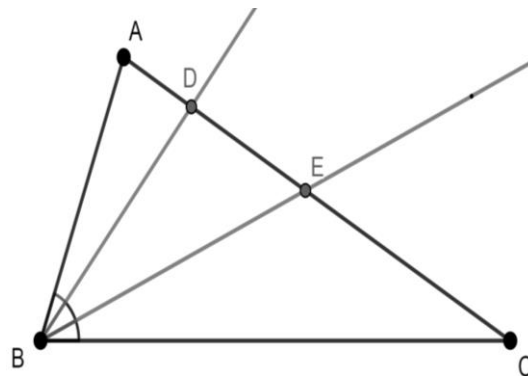


Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

2.8.2 Trissetriz interna de um triângulo

Definimos como trissetrizes, dois segmentos de retas que partem de um vértice, e vão até o lado oposto do vértice em que partiu, dividindo o seu ângulo em três ângulos congruentes.

Figura 14 - \overline{BD} e \overline{BE} relativas ao lado \overline{AC} e ao vértice B, $\widehat{ABD} \cong \widehat{DBE} \cong \widehat{EBC}$.



Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

2.9 CIRCUNFERÊNCIA

Circunferência é um conjunto dos pontos de um plano cuja distância a um ponto dado desse plano é igual a uma distância (não nula) dada. O ponto dado é o centro e a distância dada é o raio da circunferência.

Dados: um plano α , um ponto O de α e uma distância r , $\lambda(O, r) = \{P \in \alpha / d_{p,O} = r\}$, onde $\lambda(O, r)$ representa a circunferência de centro O e raio r .

2.9.1 Circunferências congruentes

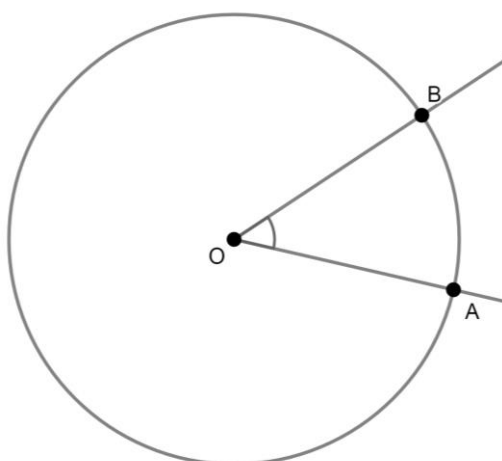
Duas circunferências são congruentes quando têm raios iguais.

2.9.2 Ângulo central

Ângulo central relativo à circunferência λ é o ângulo que tem o vértice no centro da circunferência.

Se numa circunferência de centro O um ângulo central determina um arco AB , dizemos que o arco AB é o arco correspondente ao ângulo central \widehat{AOB} .

Figura 15 - Ângulo central \widehat{AOB} , AB arco correspondente.

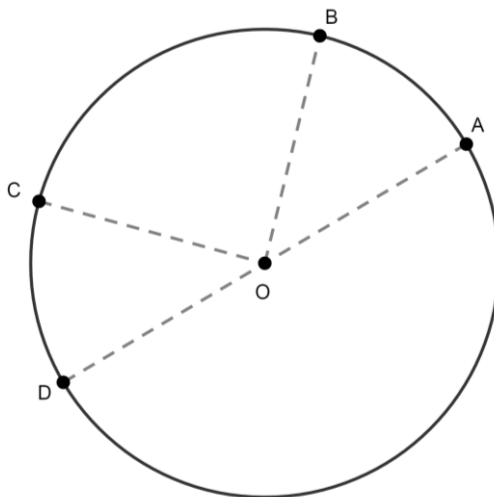


Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

2.9.3 Arcos congruentes

Dois arcos AB e CD de uma circunferência de centro O são congruentes se, e somente se, os ângulos $\widehat{AÔB}$ e $\widehat{CÔD}$.

Figura 16 - A circunferência de centro O e raio $r = OA$.



Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

2.9.4 Media do ângulo central e do arco correspondente

Tomando-se para unidade de arco (arco unitário) o arco definido na circunferência λ por um ângulo central unitário (unidade de ângulo), temos:

A medida do arco de uma circunferência λ é igual à medida do ângulo central correspondente.

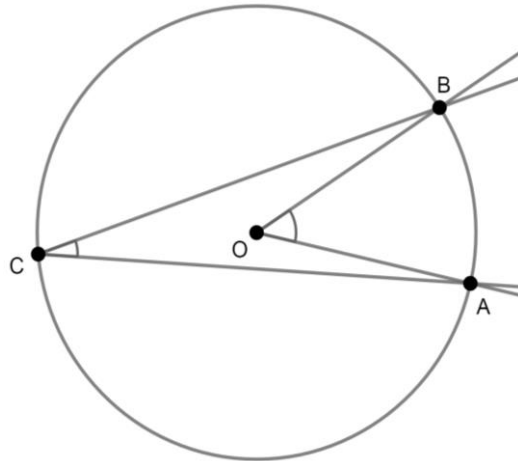
Assim, Se $m(\widehat{AÔB}) = 60^\circ$, então $m(AB) = 60^\circ$, reciprocamente, se $\widehat{AÔB} = 60^\circ$ então $AB = 60^\circ$. Analogamente, $m(\widehat{CÔD}) = 150^\circ$, então $m(CD) = 150^\circ$.

2.9.5 Ângulo inscrito

Ângulo inscrito relativo a uma circunferência λ é um ângulo que tem o vértice na circunferência e os lados são secantes a ela.

Na figura 17, $\widehat{AÔB}$ é ângulo inscrito, AB é o arco correspondente ao ângulo subtendido, $\widehat{AÔB}$ é o ângulo central correspondente ao ângulo inscrito $\widehat{AÔB}$.

Figura 17 - Ângulo inscrito \widehat{ACB} à circunferência de centro O



Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

2.9.6 Medida do ângulo inscrito

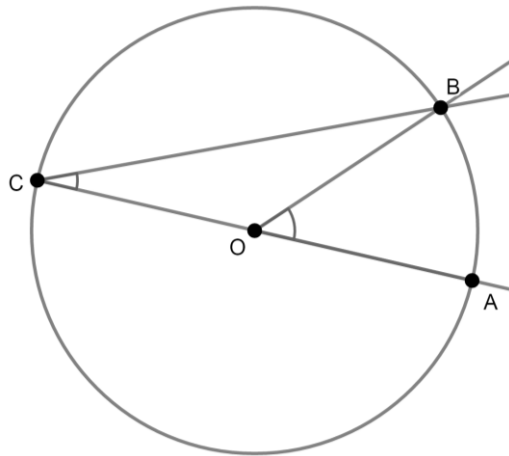
Um ângulo inscrito é metade do ângulo central correspondente ou a unidade de um inscrito é metade da medida do arco correspondente.

DEMONSTRAÇÃO:

Sejam A, B e C pontos distintos de uma circunferência λ de centro O. Consideremos três casos,

I - O centro O está sobre um lado do ângulo inscrito ACB (Figura 18). Note que OB e OC são raios da circunferência λ , logo o triângulo OBC é isósceles de base BC, com isso $m(\angle OBC) = m(\angle OCB) = m(\angle BCA)$. Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° , então $m(\angle BOC) = 180^\circ - 2 \cdot m(\angle BCA)$. Por outro lado, os pontos C, O, A são colineares, logo $m(\angle BOC) + m(\angle AOB) = 180^\circ$, ou seja,
 $m(\angle BOC) = 180^\circ - m(\angle AOB)$. Isso implica que, $180^\circ - 2 \cdot m(\angle BCA) = 180^\circ - m(\angle AOB)$. Portanto,
 $m(\angle BCA) = \frac{m(\angle AOB)}{2}$.

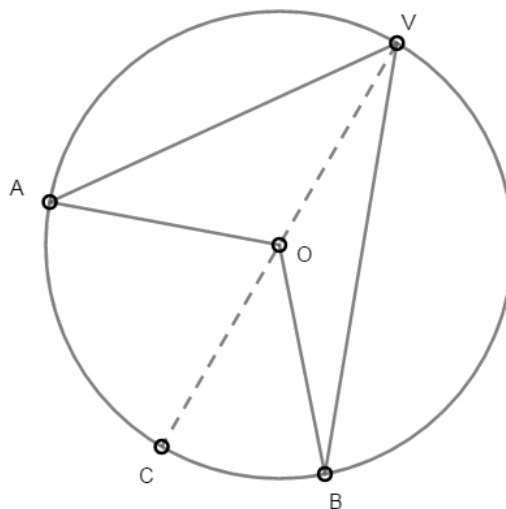
Figura 18 - Circunferência λ de centro O sobre um dos lados



Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

II - O centro O está no interior do ângulo inscrito AVB (Figura 19). Observe que o ângulo inscrito AVC e o respectivo ângulo central AOC também estão nas condições do caso anterior e, de maneira análoga, o ângulo inscrito BVC e seu respectivo ângulo central BOC. Então, $m(\text{AOC}) = 2 \cdot m(\text{AVC})$ e $m(\text{BOC}) = 2 \cdot m(\text{BVC})$. Somando, $m(\text{AOC})$ e $m(\text{BOC})$ temos, $m(\text{AOB}) = 2 \cdot m(\text{AVB})$. Portanto, $m(\text{AVB}) = \frac{m(\text{AOB})}{2}$.

Figura 19 - Circunferência λ de centro O no interior do ângulo inscrito AVB



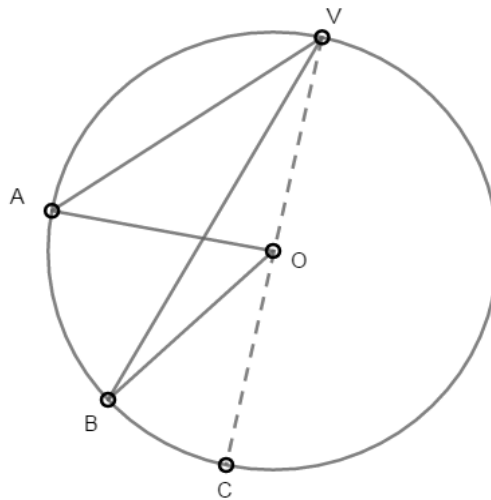
Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

III - O centro O está no exterior do ângulo inscrito AVB (Figura 20). Da mesma maneira que o caso anterior, utilizamos o Caso i para essa demonstração.

Temos, $m(\text{AOC}) = 2.m(\text{AVC})$ e $m(\text{BOC}) = 2.m(\text{BVC})$.

Note que $m(\text{AOB}) = m(\text{AOC}) - m(\text{BOC}) = 2.m(\text{AVC}) - 2.m(\text{BVC}) = 2[m(\text{AVC}) - m(\text{BVC})] = 2.m(\text{AVB})$. Portanto, $m(\text{AVB}) = \frac{m(\text{AOB})}{2}$.

Figura 20 - Circunferência λ de centro O no exterior do ângulo inscrito AVB.



Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

2.10 CONSTRUÇÃO COM RÉGUA E COMPASSO

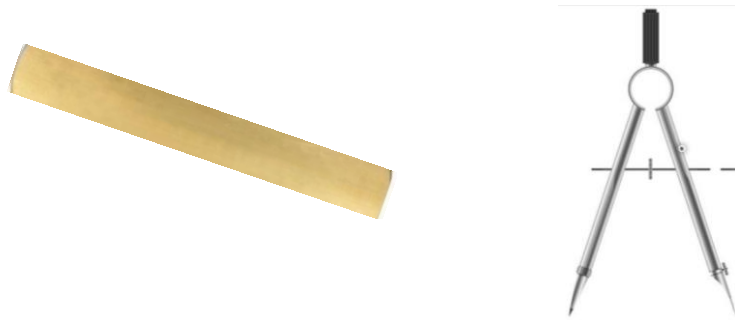
O uso de régua e compasso nas construções geométricas seguem algumas restrições tendo como base a obra “Os Elementos” de Euclides¹. A régua (não graduada) é utilizada apenas para traçar uma reta que passa por dois pontos dados e o compasso para traçar circunferência cujo raio é dado por uma distância e o centro por um determinado ponto.

Os três primeiros postulados de Euclides nos Elementos enunciam três construções possíveis em geometria. São elas:

1. Fique postulado traçar uma reta a partir de todo ponto até todo ponto; 2. Também prolongar uma reta limitada, continuamente, sobre uma reta; 3. E, com todo centro e distância, descrever um círculo. [1]

¹ Euclides de Alexandria, matemático grego do século IV e III a. C., autor de uma das obras mais importante e mais influente na história da matemática - **Os elementos**.

Figura 21 - Régua não graduada (esq.) e Compasso (dir.)



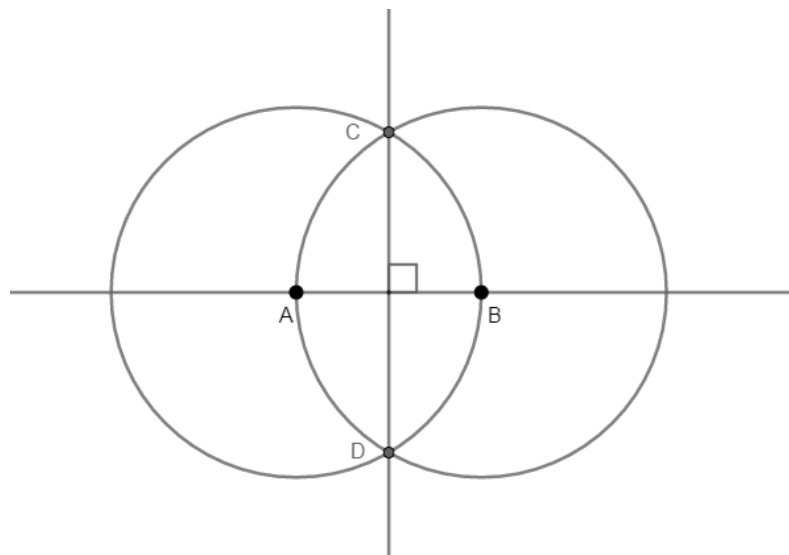
Fonte: <https://es.123rf.com/visual/search/86632867>

Como exemplo de uma construção possível com régua e compasso, a seguir a construção da mediatriz CD a um segmento AB.

Passos:

1. Traçamos duas circunferências de raios AB e centros A e B, conforme a figura 22;
2. Traça-se a reta (Mediatriz) determinada pelos pontos C e D, pontos de intersecção das duas circunferências.

Figura 22 - Mediatriz CD



Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

2.11 CONSTRUÇÃO POR NEUSIS

Outro método de construção além do com régua e compasso, descrito anteriormente, é a construção por **Neusis**. Uma técnica que difere das normas estabelecidas nos Elementos de Euclides podendo realizar ajustes (arrastos) de um dado segmento entre duas curvas dadas de modo que o segmento passe por um ponto P dado.

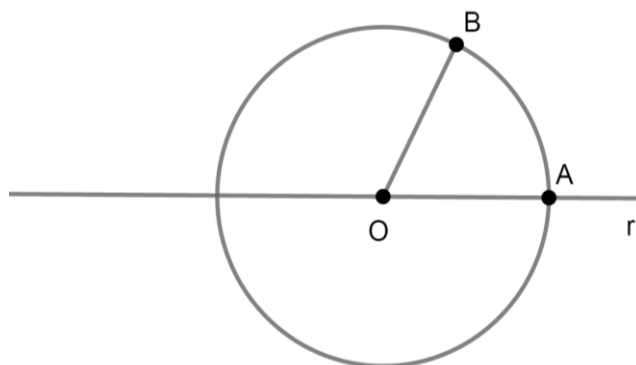
Como exemplo, utilizaremos a seguir o método Neusis para trisseccionar um ângulo. A construção é uma das soluções propostas por Arquimedes para trisseccção de um ângulo.

Seja o ângulo AOB a ser trisseccionado,

Passos:

1. Traçamos a reta r passando pelo segmento AO, e a circunferência λ de centro O e raio OA;

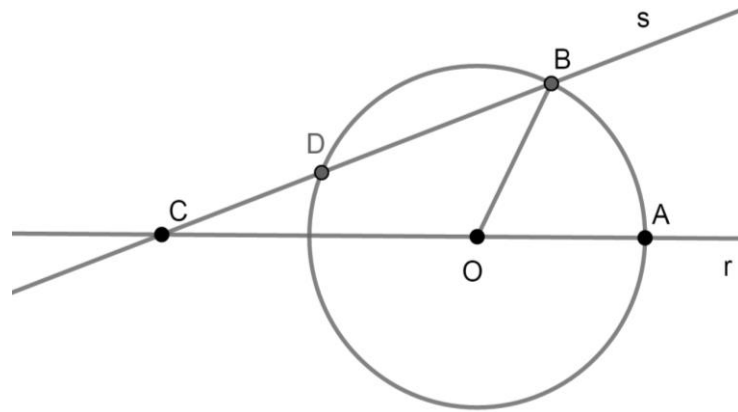
Figura 23 - Reta r e circunferência λ .



Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

2. Construimos uma reta s passando: pelo ponto B, por um ponto D (pertencente à circunferência) e pela reta r num ponto C, de modo que o segmento CD tenha o mesmo comprimento do segmento AO (que é igual ao raio da circunferência). Note que para isso, talvez seja preciso fazer alguns ajustes na reta s para obtermos o desejado;

Figura 24 - Reta s.



Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

3. Traçamos uma reta t passando por O e paralela à reta s. Marca-se o ponto E, intersecção do arco AB com a reta t (conforme a figura 25). Com isso, obtemos:

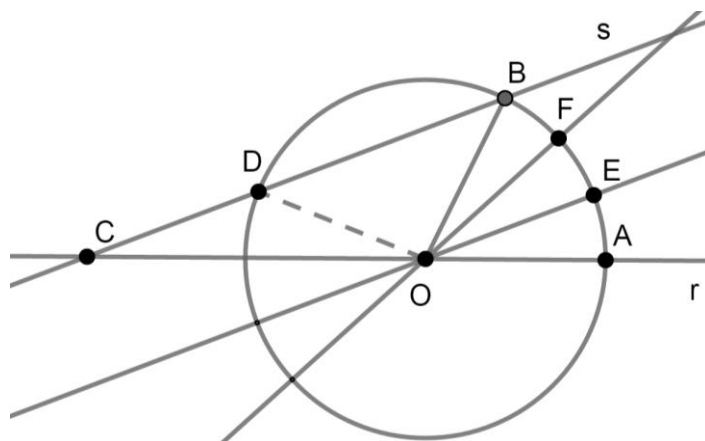
$$m(\widehat{AOE}) = m(\widehat{ACB}) \text{ e } m(\widehat{EOB}) = m(\widehat{OBD}).$$

Observe que:

Os triângulos BOD e CDO são isósceles de bases BD e OC, respectivamente. Então, $m(\widehat{ODB}) = m(\widehat{OBD}) = m(\widehat{EOB})$ e como o ângulo ODB é ângulo externo do triângulo CDO, temos $m(\widehat{ODB}) = m(\widehat{OCD}) + m(\widehat{COD}) = 2.m(\widehat{OCD})$.

Ao traçarmos a bissetriz do ângulo EOB, obtemos: $m(\widehat{EOF}) = m(\widehat{FOB}) = m(\widehat{AOE})$

Figura 25 - Ângulo AOB trisseccionado por \overrightarrow{OE} e \overrightarrow{OF} .



Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

3. PROBLEMAS CLÁSSICOS DA GEOMETRIA

Nesse tópico abordaremos os três problemas clássicos da geometria (a duplicação do cubo, a quadratura do círculo e a trissecção de um ângulo qualquer). Devido a certas restrições com o uso da régua e compasso, como vimos no primeiro tópico, os gregos, que obedeciam às regras das construções euclidianas, conviveram por muito tempo com esses três problemas. Somente cerca de 2000 anos depois é que foi demonstrado algebricamente que essas construções eram impossíveis.

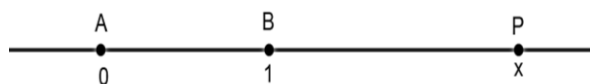
É importante ressaltar que a abordagem desses problemas será de forma superficial, pois a demonstração requer um estudo algébrico mais aprofundado sobre números algébricos, dentre outros, que fogem do tema central desse trabalho. A seguir, dois teoremas que justificam a construtibilidade de um número.

Teorema 1: Todo número construtível é raiz de uma equação polinomial da forma $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$, de coeficientes inteiros.

Teorema 2: Um número algébrico e irracional será construtível somente se ele for raiz de um polinômio irredutível cujo grau é uma potência de 2.

Tomando um segmento AB como a unidade, conforme a figura 26, então um segmento AP será construtível a partir de AB se, e somente se, o ponto P for construtível.

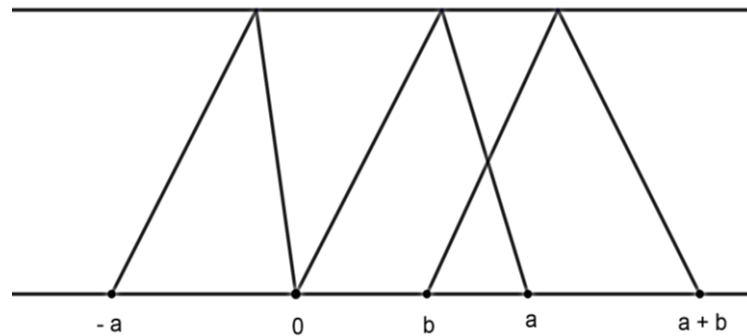
Figura 26 - Reta AB



Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

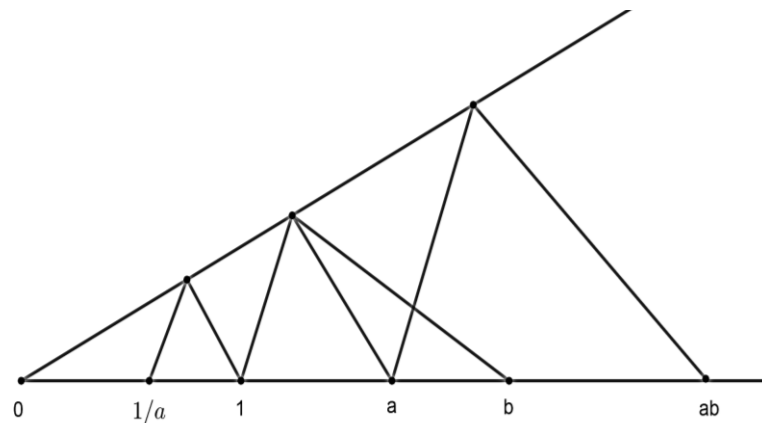
As figuras 27 e 28 são autoexplicativas. Elas mostram que se os números a e b forem construtíveis, então também serão: $-a$, $-b$, $a+b$, ab , $\frac{1}{a}$ ($a \neq 0$). Com isso, -1 , -2 , -3 , etc. e $1+1$, $1+2$, etc. são construtíveis, isto é, todos os inteiros. Portanto, todos os quocientes de inteiros (racionais) também são construtíveis.

Figura 27 - Números construtíveis - a, a, b e a+b



Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

Figura 28 -Número construtíveis $\frac{1}{a}$ e ab



Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

3.1 A DUPLICAÇÃO DO CUBO

Não se sabe exatamente em que momento da história e por quem este problema foi formulado. Contudo, existe a narrativa de que uma praga se espalhou fazendo várias vítimas em Atenas e ao procurar o Oráculo, em busca de combater a praga, a população foi orientada a dobrar o altar de Apolo que tinha a forma cubica. Porém, após várias tentativas, os geômetras falharam.

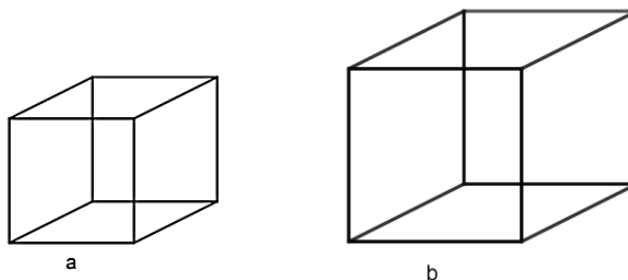
O problema da duplicação do cubo consiste em construir o lado de um cubo, cujo volume é o dobro do volume de um cubo dado.

Dado um cubo de aresta medindo a, seu volume (V_1) é dado por a^3 . Queremos construir outro cubo de aresta b com volume (V_2) duas vezes mais o volume do cubo dado, isto é,

$V_2 = 2V_1$. Então, $b^3 = 2a^3$. Isso implica que $b = \sqrt[3]{2a^3}$, portanto $b = a\sqrt[3]{2}$, um número *irracional algébrico* não construtível.

Justificativa: $\sqrt[3]{2}$ é solução do polinômio $x^3 - 2 = 0$, e, pelo **teorema 2**, o número 3 (grau do polinômio $x^3 - 2$) não pode ser escrito como uma potência de 2.

Figura 29 - Cubo de aresta a (a esq.) e Cubo de aresta b (a dir.)

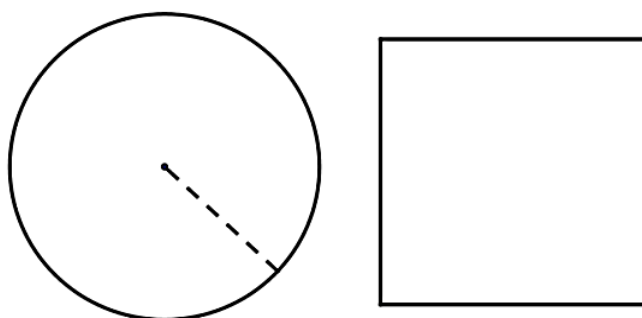


Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

3.2 QUADRATURA DO CÍRCULO

O problema da quadratura do círculo consiste em construir um quadrado cuja área seja igual à área de um círculo dado.

Figura 30 - Círculo de centro O e raio r (esq.) e quadrado de lado l (dir.)



Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

A área do círculo dada por πr^2 é igual à área do quadrado l^2 . Queremos obter $l^2 = \pi r^2$. Isso implica que $l = \sqrt{\pi r^2}$. Logo, $l = r\sqrt{\pi}$. Portanto, como $\sqrt{\pi}$ não é construtível, não podemos obter o quadrilátero desejado.

Justificativa: Os números denominados Algébricos são números reais ou complexos raízes de um polinômio de coeficientes inteiros. Os Transcendentes são os números que não são algébricos, como por exemplo, o π que não é raiz de nenhum polinômio de coeficientes inteiros.

3.3 TRISSECÇÃO DE UM ÂNGULO QUALQUER

Dentre os três problemas clássicos, talvez o que desperte mais atenção é o da trissecção de ângulos, pois apesar da impossibilidade da trissecção de certos ângulos (por construção euclidiana), alguns ângulos são possíveis dividi-los em três partes iguais, como por exemplo, o de 90° , que a demonstração encontra-se em [2].

Há várias versões em relação ao surgimento desse problema, uma delas é que houve a necessidade de trissecionar o ângulo de 60° para construir um eneágono regular. Após várias tentativas (por construção euclidiana), sem sucesso, Gauss² no século XIX provou a impossibilidade dessa construção.

Ao longo do tempo várias soluções foram apresentadas para esse problema, como por exemplo, a de Arquimedes, vista no tópico anterior, a de Hipócrates e Nicomedes. Vale ressaltar que todas essas soluções fugiam das regras estabelecidas nas construções com régua e compasso.

Os exemplos a seguir mostram que um ângulo qualquer é construtível se, e somente se, seu cosseno for um número construtível.

Exemplo 1: Construção do ângulo de 60° a partir de uma semirreta OA

Passos:

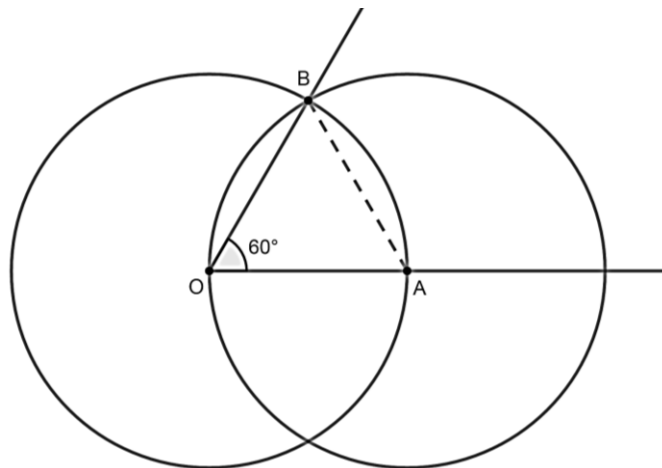
1. Traçamos duas circunferências de raios OA e centros O e A, conforme a figura 31;
2. Marcamos o ponto B, pontos de intersecção das duas circunferências.

Como o triângulo formado pelos vértices AOB é equilátero, o ângulo AOB mede 60° , e

$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ (um número racional), portanto construtível.

² Johann Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855), matemático, astrônomo e físico alemão que contribuiu muito em diversas áreas da ciência, dentre elas a teoria dos números, estatística, análise matemática, geometria diferencial, geodésia, geofísica, eletrostática, astronomia e óptica.

Figura 31 - Construção do ângulo de 60°



Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

Exemplo 2: Observe que a construção do ângulo de 20° é impossível.

Sabendo que $\cos(3\alpha) = 4 \cos^3(\alpha) - 3 \cos(\alpha)$

$$\cos(3 \cdot 20^\circ) = 4 \cos^3 20^\circ - 3 \cos 20^\circ$$

$$\cos 60^\circ = 4 \cos^3 20^\circ - 3 \cos 20^\circ$$

$$\frac{1}{2} = 4 \cos^3 20^\circ - 3 \cos 20^\circ$$

$$1 = 8 \cos^3 20^\circ - 6 \cos 20^\circ$$

Considerando $\cos 20^\circ = x$

$$8x^3 - 6x = 1$$

$$8x^3 - 6x - 1 = 0$$

Pelo teorema 2, $\cos 20^\circ$ não é um número construtível. Com isso, concluímos que o ângulo de 60° não pode ser trisseccionado, pois não podemos obter um ângulo de 20°.

Exemplo 3: Trisseção do ângulo de 90°.

Por construção euclidiana, basta construir sobre o ângulo de 90°, um ângulo de 60°. Note que a diferença (30°) é um terço de 90°. Restando apenas encontrar a bissetriz do ângulo de 60°. Segundo a história da matemática, essa construção já era conhecida pelos gregos.

Algebricamente temos que $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, um número construtível.

No tópico seguinte, discorreremos sobre o teorema de Morley.

4. TEOREMA DE MORLEY

O Teorema de Morley, descoberto no ano de 1904 pelo americano Frank Morley (1860 – 1937), mostra que ao trisseccionarmos os ângulos internos de um triângulo qualquer, as semirretas adjacentes que partem de cada vértice definem três pontos que são os vértices de um triângulo que sempre será equilátero.

O referido teorema, explanado de forma não formal por Morley a seus amigos de Cambridge, só foi divulgado 20 anos mais tarde após sua descoberta em uma revista Japonesa de educação secundária “Jornal of the Mathematical Association of Japón for the Secondary Education”.

Morley nasceu na Inglaterra, em suffolk e foi um respeitável matemático, sendo este muito notório pelos seus ensinamentos, assim como pelas suas pesquisas nas áreas da álgebra e geometria, viveu os últimos 50 anos de sua vida nos Estados Unidos, na maioria do tempo na universidade de Johns Hopkins, entretanto nunca rejeitou a sua nacionalidade britânica.

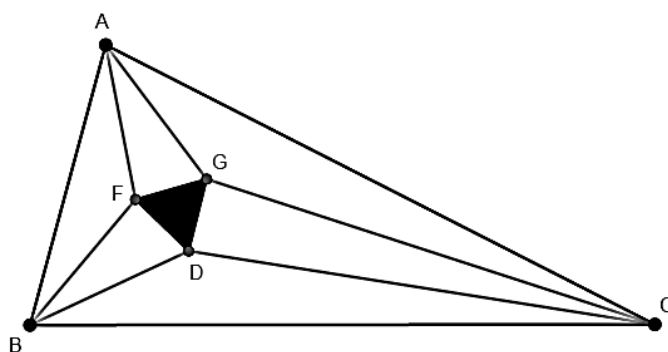
O teorema foi exposto como um problema na revista “Mathematical Questions and Their Solutions from the Educational Times”. Com o passar do tempo outras demonstrações foram apresentadas, como por exemplo, a demonstração de M.T. Naraniengar em 1909, J.M. Child, Math Gaz em 1922, e outra trigonométrica de M. Satyanarayana.

4.1 ENUNCIADO

Os três pontos de intersecção das trissetrizes adjacentes dos ângulos internos de um triângulo qualquer são vértices de um triângulo equilátero.

Na figura 32, as retas AG e AF dividem o ângulo BAC em três partes iguais. Da mesma maneira, as retas BD e BF trissectam o ângulo ABC e as retas CD e CG trissectam o ângulo ACB. O teorema de Morley estabelece que o triângulo DFG é equilátero. O triângulo equilátero obtido é conhecido como *Triângulo de Morley*.

Figura 32 - Ângulos internos do triângulo ABC trisseccionados.



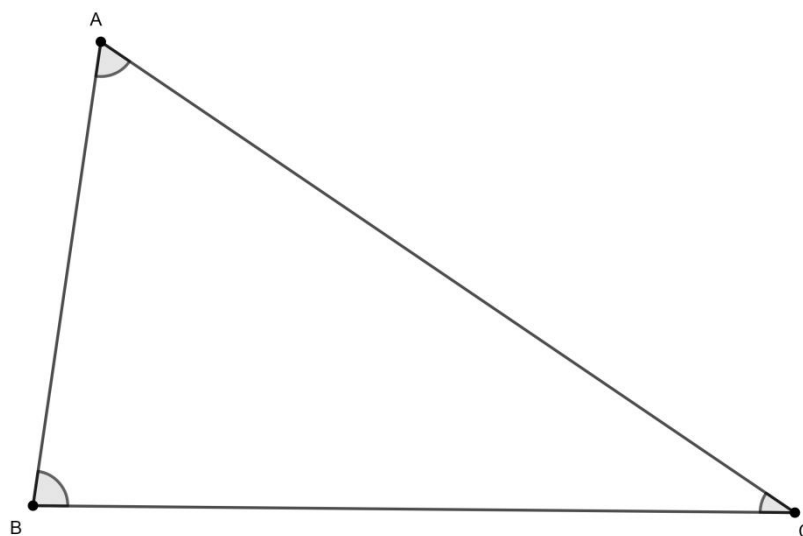
Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

4.2 DEMONSTRAÇÃO

Podemos provar o teorema de Morley da seguinte maneira. Primeiramente, a partir de um triângulo ABC, construiremos o triângulo equilátero e em seguida, verificaremos que este é, de fato, obtido pela união dos pontos de intersecção das trissetrizes adjacentes do triângulo ABC.

Seja um triângulo qualquer ABC

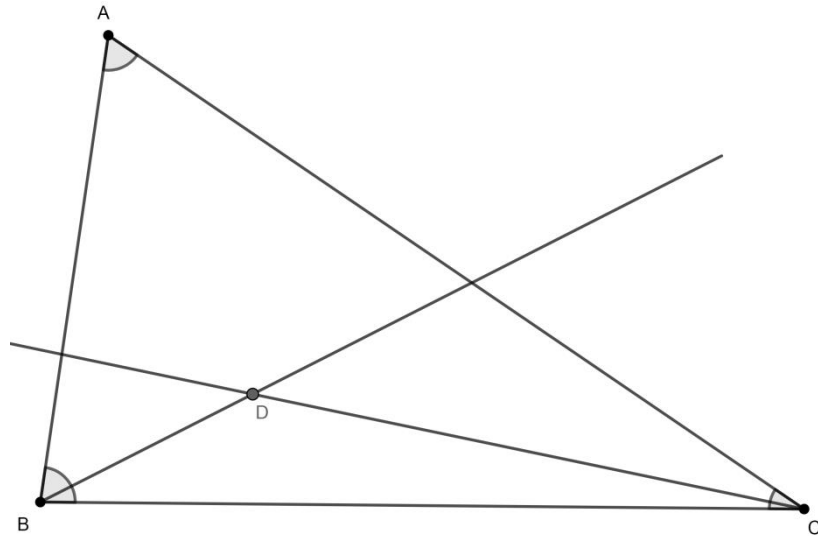
Figura 33 - Triângulo ABC



Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

Arquitetamos o ponto D, a partir do ponto de intersecção entre as trissetrizes adjacentes dos vértices B e C.

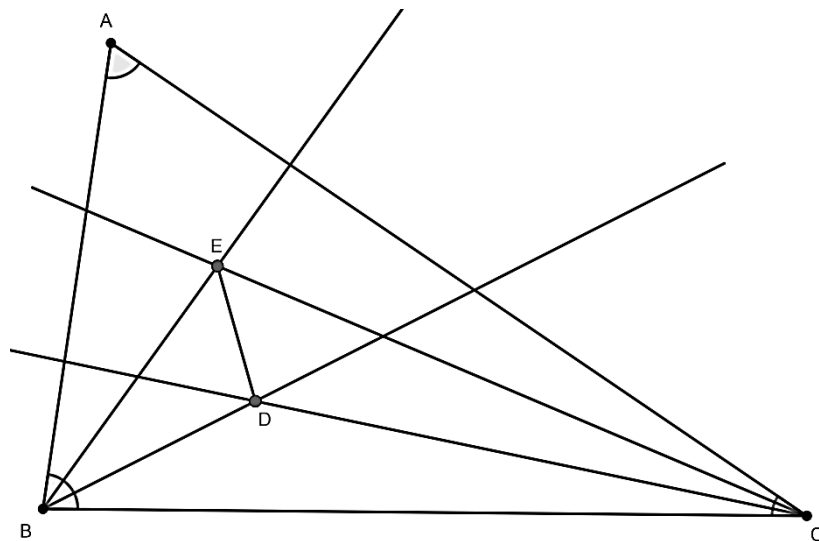
Figura 34 - Ponto D do triângulo ABC



Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

Posteriormente construímos o ponto E, ponto de intersecção entre as outras trissetrizes dos vértices B e C.

Figura 35 - Ponto E do triângulo ABC

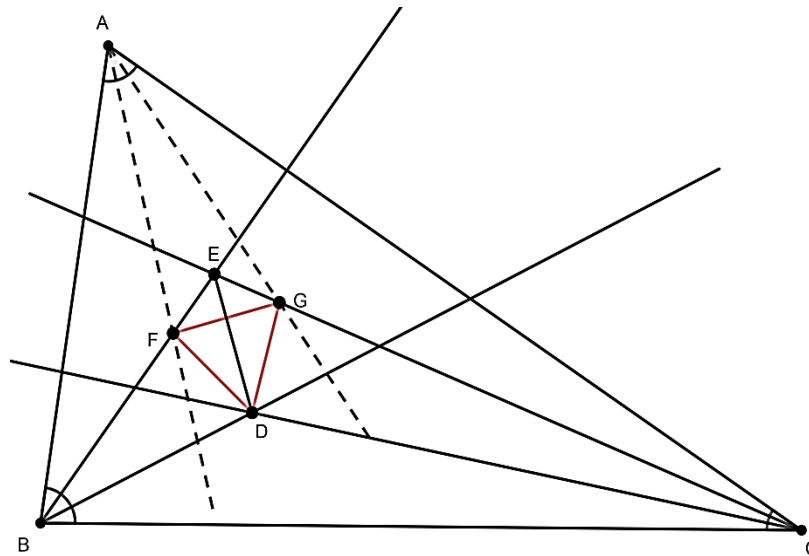


Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

Ressalta-se que D é o incentro do triângulo BCE, cujas bissetrizes são os segmentos BD, CD e ED.

Sobre o segmento BE traçamos o ponto F e construímos o segmento DF, de modo que $m(\widehat{EDF}) = 30^\circ$. Analogamente marcamos o ponto G sobre \overline{CE} , e construímos \overline{DG} , tal que $m(\widehat{EDG}) = 30^\circ$. Construímos o segmento FG.

Figura 36 - Segmento FG do triângulo ABC



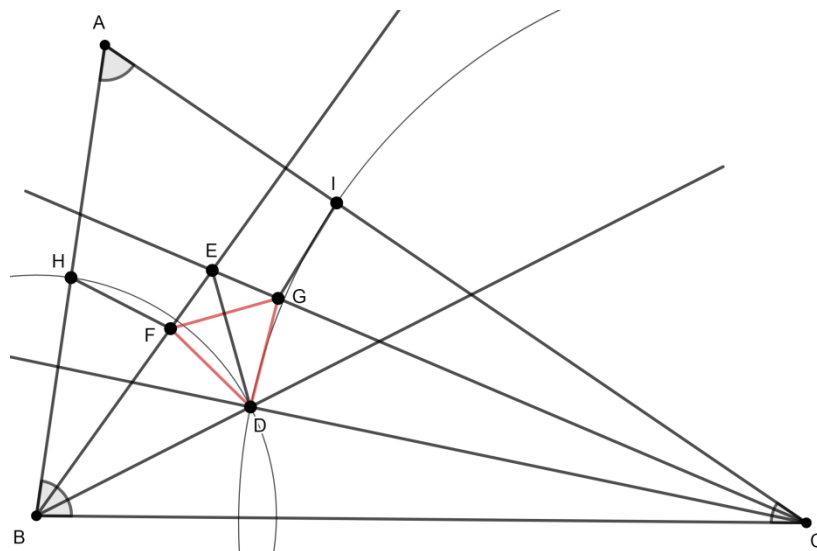
Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

Analisa-se que o $\triangle EDF \cong \triangle EDG$, pois $\widehat{DEF} \cong \widehat{DEG}$, \overline{ED} (lado comum) e $\widehat{EDF} \cong \widehat{EDG}$ (caso ALA). Segue que $\overline{DF} \cong \overline{DG}$. Daí o $\triangle FDG$ é isósceles, sendo $\widehat{DFG} \cong \widehat{DGF}$, ângulos da base, e como o ângulo FDG mede 60° (por construção), então $2.m(\widehat{DFG}) = 180^\circ - 60^\circ$, ou seja, $2.m(\widehat{DFG}) = 120^\circ$, logo $m(\widehat{DFG}) = 60^\circ$. Portanto, o $\triangle FDG$ também é equilátero.

Resta agora provar que as semirretas \overrightarrow{AF} e \overrightarrow{AG} são, de fato, as trissetrizes do ângulo \widehat{BAC} .

Sobre o segmento AB, construímos o ponto H, de modo que $\overline{BH} \cong \overline{BD}$. E o ponto I sobre o segmento AC, tal que $\overline{CI} \cong \overline{CD}$. Em seguida construímos os segmentos HF e GI.

Figura 37 - Pontos H e I do triângulo ABC



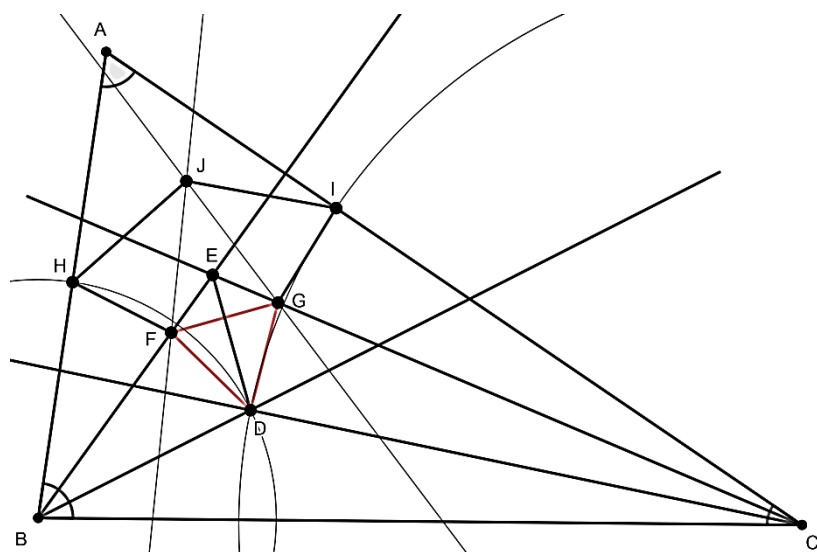
Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

Observa-se que o $\triangle HBF \cong \triangle FBD$, pois $\overline{BH} \cong \overline{BD}$, $m(\widehat{HBF}) = m(\widehat{FBD}) = m(\widehat{ABC})/3$ e \overline{BF} lado comum (caso LAL), segue que $\overline{HF} \cong \overline{FD}$. Analogamente, podemos provar a congruência entre os triângulos DCG e GCI, e teremos como consequência a congruência entre os segmentos DG e GI.

Como $\triangle FDG$ é equilátero, $\overline{FD} \cong \overline{FG} \cong \overline{DG}$. Temos então que $\overline{HF} \cong \overline{FG} \cong \overline{GI}$.

Construímos o ponto J, a partir da interseção entre as bissetrizes dos ângulos \widehat{HFG} e \widehat{FGL} .

Figura 38 - Ponto J do triângulo ABC



Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

Observe que tal fato é possível, devidos os ângulos \widehat{HFG} e \widehat{FGL} , não serem rasos e suas bissetrizes situarem ambas no semi-plano delimitado pela reta \overleftrightarrow{FG} que contém o ponto A.

De fato, temos:

$$m(\widehat{HFE}) = 180^\circ - m(\widehat{HFB}) = 180^\circ - m(\widehat{DFB}) = m(\widehat{DFE}) = 60^\circ + m(\widehat{EFG}).$$

$$\begin{aligned} m(\widehat{GEF}) &= m(\widehat{CEB}) = 180^\circ - [m(\widehat{EBC}) + m(\widehat{ECB})] = 180^\circ - m(\widehat{EBC}) - m(\widehat{ECB}) = \\ &= 180^\circ - \frac{2}{3}m(\widehat{ABC}) - \frac{2}{3}m(\widehat{ACB}) = 180^\circ - \frac{2}{3}[m(\widehat{ABC}) + m(\widehat{ACB})] = \\ &= 180^\circ - \frac{2}{3}(180^\circ - m(\widehat{BAC})).^* \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m(\widehat{HFG}) &= m(\widehat{HFE}) + m(\widehat{EFG}) = m(\widehat{EFD}) + m(\widehat{EFG}) = (60^\circ + m(\widehat{EFG})) + m(\widehat{EFG}) = \\ &= 60^\circ + [m(\widehat{EFG}) + m(\widehat{GEF})] = 60^\circ + (180^\circ - m(\widehat{GEF})).^{**} \end{aligned}$$

Temos que,

$$m(\widehat{GEF})^* = 180^\circ - \frac{2}{3}(180^\circ - m(\widehat{BAC})) = 180^\circ - 120^\circ + \frac{2}{3}m(\widehat{BAC}) = 60^\circ + \frac{2}{3}m(\widehat{BAC}).$$

Portanto,

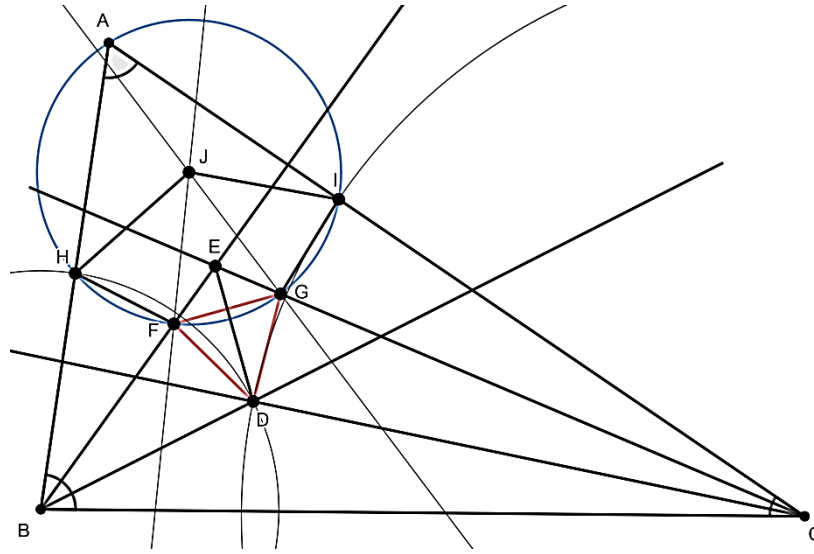
$$\begin{aligned} m(\widehat{HFG})^{**} &= 60^\circ + (180 - m(\widehat{GEF})) = 60^\circ + [180^\circ - (60^\circ + \frac{2}{3}m(\widehat{BAC}))] = \\ &= 60^\circ + 180^\circ - 60^\circ - \frac{2}{3}m(\widehat{BAC}) = 180^\circ - \frac{2}{3}m(\widehat{BAC}) < 180^\circ. \end{aligned}$$

Analogamente, $m(\widehat{FGL}) = 180^\circ - \frac{2}{3}m(\widehat{BAC}) < 180^\circ$.

Temos que o $\triangle HFG \cong \triangle GFJ$, pois $\overline{HF} \cong \overline{FG}$, $\widehat{HFJ} \cong \widehat{GFJ}$ e \overline{FJ} lado comum (caso LAL). Segue que $\overline{HJ} \cong \overline{GJ}$. De modo análogo, podemos provar a congruência entre os triângulos $\triangle GFJ$ e $\triangle GIJ$. No que resulta $\overline{FJ} \cong \overline{IJ}$.

Como $m(\widehat{JFG}) = \frac{1}{2}m(\widehat{HFG}) = \frac{1}{2}m(\widehat{FGL}) = m(\widehat{JGF})$, o triângulo $\triangle FJG$ é isósceles, com $\overline{FJ} \cong \overline{GJ}$. Portanto, $\overline{HJ} \cong \overline{FJ} \cong \overline{GJ} \cong \overline{IJ}$, ou seja, o ponto J é equidistante dos pontos H, F, G e I.

Figura 39 - Segmento FJ congruente ao segmento IJ



Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

Construímos a circunferência de centro J e raio \overline{FJ} , que passa pelos pontos H, F, G e I . Como os triângulos HFJ, GFJ e GIJ são congruentes, temos que $H\hat{J}F \equiv F\hat{J}G \equiv G\hat{J}I$.

Assim, temos:

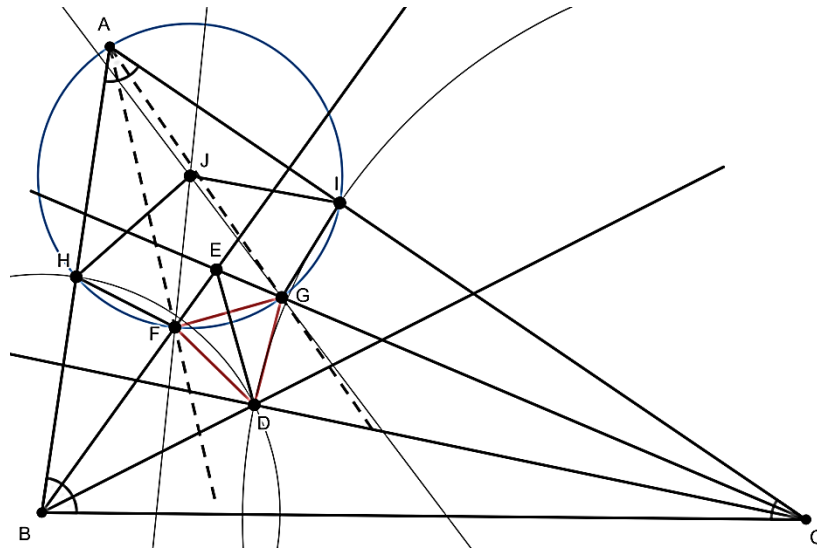
$$\begin{aligned} m(F\hat{J}G) &= 180^\circ - m(\hat{J}FG) - m(\hat{J}GF) = 180^\circ - 2.m(\hat{J}FG) = 180^\circ - m(H\hat{F}G)^{**} = \\ &= 180^\circ - (180^\circ - \frac{2}{3}m(\widehat{BAC})) = \frac{2}{3}m(\widehat{BAC}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m(H\hat{J}I) &= m(H\hat{J}F) + m(F\hat{J}G) + m(G\hat{J}I) = 3.m(F\hat{J}G) = 3.\left(\frac{2}{3}m(\widehat{BAC})\right) = 2.m(\widehat{BAC}) = \\ &= 2.m(H\hat{A}I). \end{aligned}$$

$$\text{Portanto } H\hat{A}I = \frac{1}{2}H\hat{J}I$$

Dessa forma, pode-se concluir que a circunferência passa também pelo ponto A e, uma vez que as cordas $\overline{HF}, \overline{FG}$ e \overline{GI} são congruentes, temos que os respectivos arcos também são congruentes, pelo que $H\hat{A}F \equiv F\hat{A}G \equiv G\hat{A}I$, ou seja, as semirretas \overrightarrow{AF} e \overrightarrow{AG} são, de fato, as trissetrizes do ângulo \widehat{BAC} .

Figura 40 - Circunferência de centro J e raio \overline{FJ}



Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

A seguir, como uma das propostas didáticas desse trabalho, mostraremos as etapas da construção do Triângulo de Morley com uso do programa Geogebra.

5. GEOGEBRA

O Geogebra é um programa que reúne conceitos de Geometria, Álgebra, Gráficos, Probabilidade, Estatística, etc. É de distribuição livre podendo ser instalado e utilizado em computador e celular e acessado online. O aplicativo é uma excelente ferramenta a ser utilizada na escola (ou em casa) perpassando por todos os níveis de ensino.

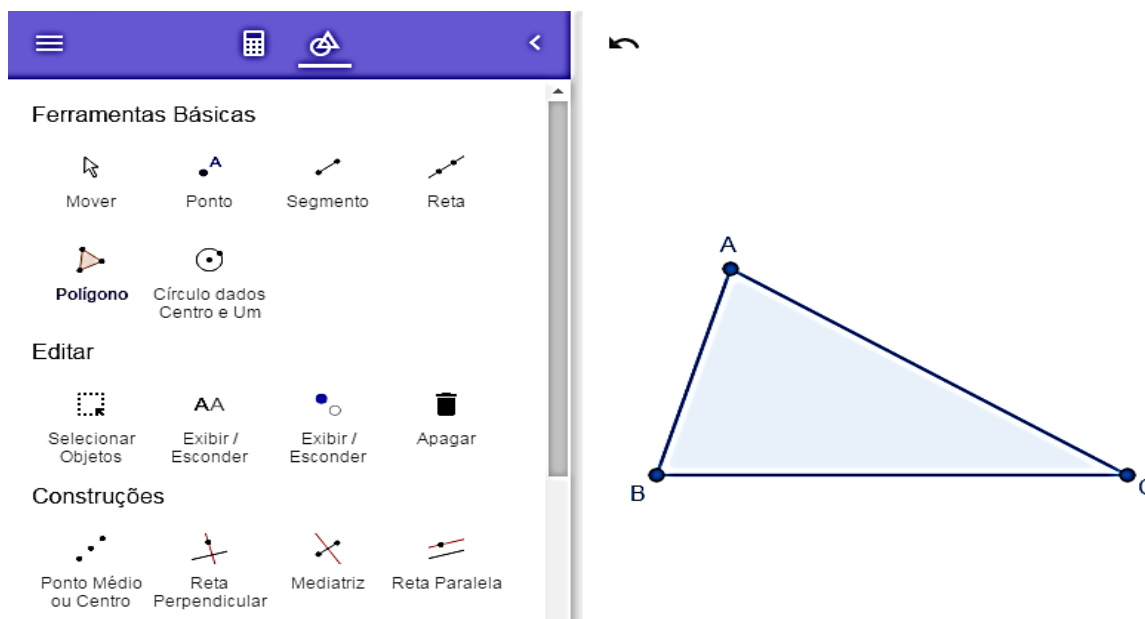
A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) recomenda a utilização de softwares de geometria dinâmica, a exemplo do Geogebra, como recurso didático para o ensino e aprendizagem de conceitos geométricos, pois o aplicativo permite que o aluno manipule os objetos e figuras geométricas construídas, dessa forma facilitando a compreensão e resolução de problemas matemáticos.

5.1 CONSTRUÇÃO DO TRIÂNGULO DE MORLEY

Passo 1: Construa um triângulo ABC.

Com a ferramenta **Polígono**, selecione os vértices A, B, C e, então, o vértice A novamente.

Figura 41 - Triângulo ABC



Fonte: Elaborada via software (2020)

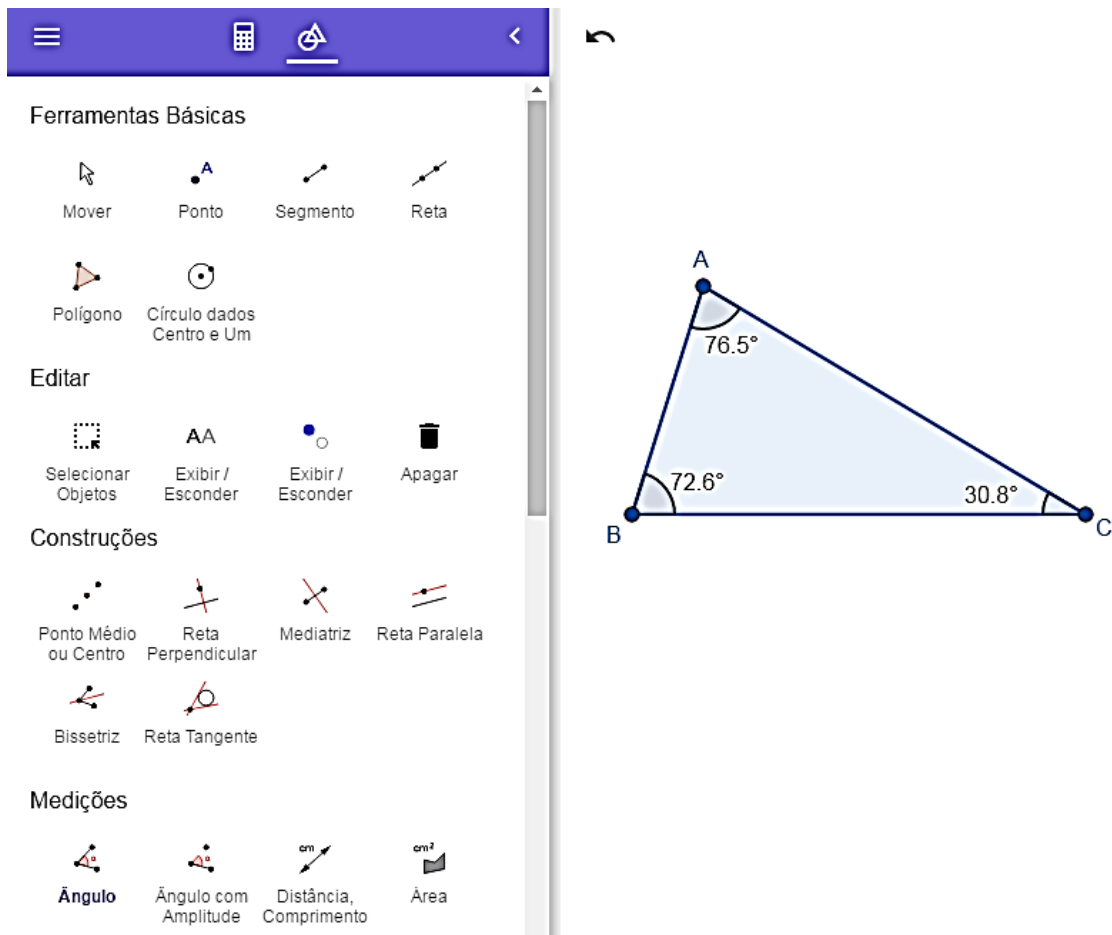
Passo 2: Indicar os ângulos internos do triângulo ABC.

Com a ferramenta **Ângulo**, selecione os pontos na seguinte ordem:

1°	B, A, C	Ângulo BAC
2°	C, B, A	Ângulo CBA
3°	A, C, B	Ângulo ACB

Ao seguir a ordem de construção acima, o programa reconhece automaticamente os ângulos BAC, CBA e ACB, respectivamente, como α , β e γ , independentemente da medida de cada ângulo.

Figura 42 - Triângulo ABC com ângulos indicados



Fonte: Elaborada via software (2020)

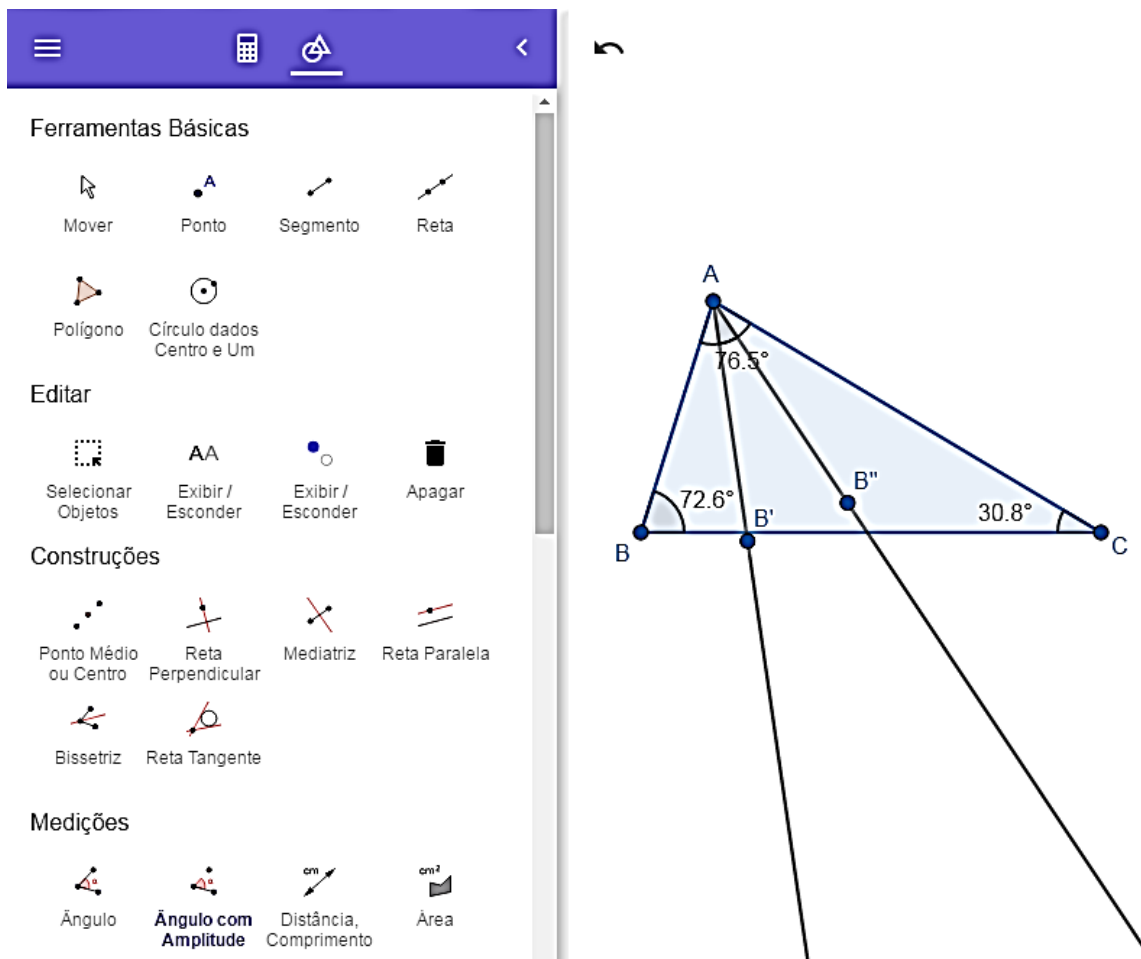
Passo 3: Trisseccionar os ângulos internos do triângulo abc.

Utiliza-se a ferramenta **Ângulo com Amplitude** para trisseccionar o ângulo BAC de medida α da seguinte forma: Clique no ponto B, depois em A. Em seguida abrirá uma tela, digite $\alpha/3$. Da mesma forma, selecione o ponto B', depois A e digite $\alpha/3$ novamente.

Obs.: deixar a opção “Sentido anti-horário” marcada.

As semirretas AB' e AB'' são as trissetrizes do ângulo BAC. Para construí-las, clique na ferramenta **Semirreta**, selecione primeiro a origem (ponto A) e, depois, o ponto B'. Em seguida A e, depois, o ponto B''.

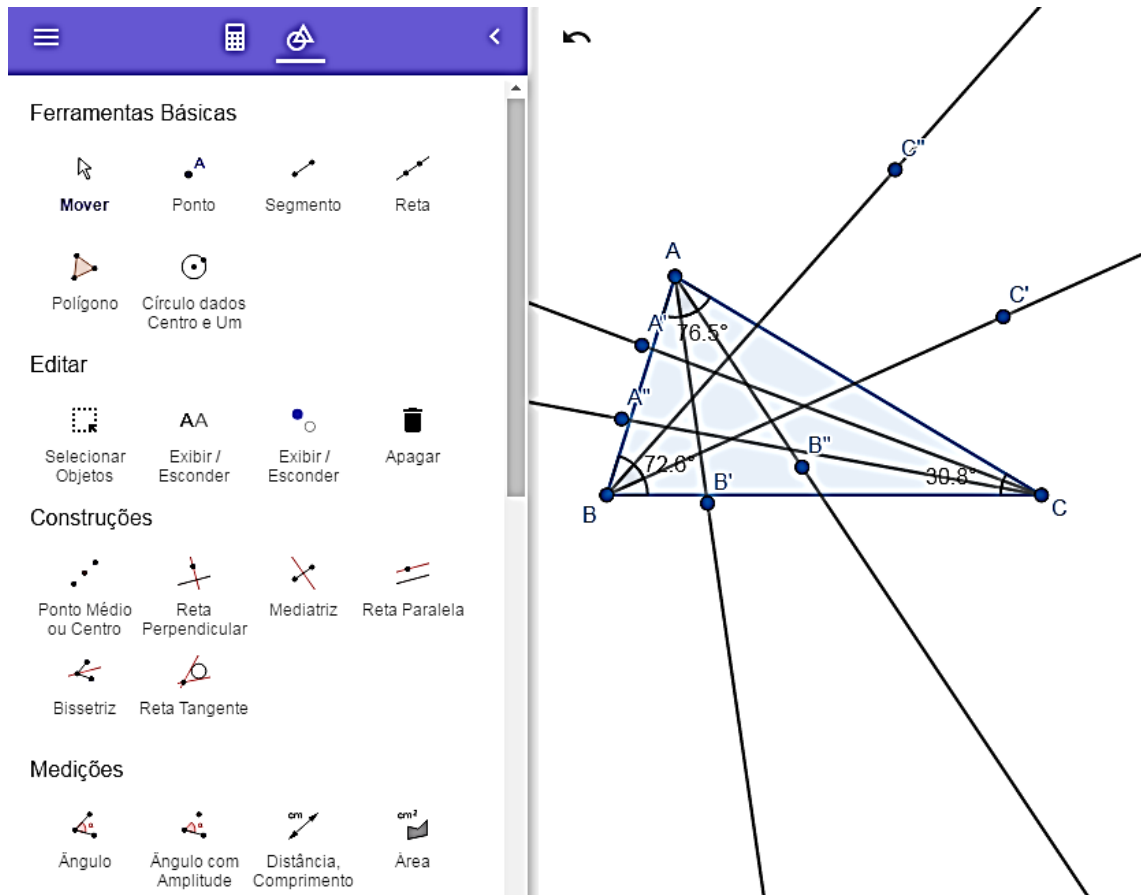
Figura 43 - Trissetrizes AB' e AB''




Fonte: Elaborada via software (2020)

Repita o mesmo procedimento acima para determinar as trissetrizes dos ângulos CBA e ACB de medidas β e γ , respectivamente.

Figura 44 - Trissetrizes do triângulo ABC



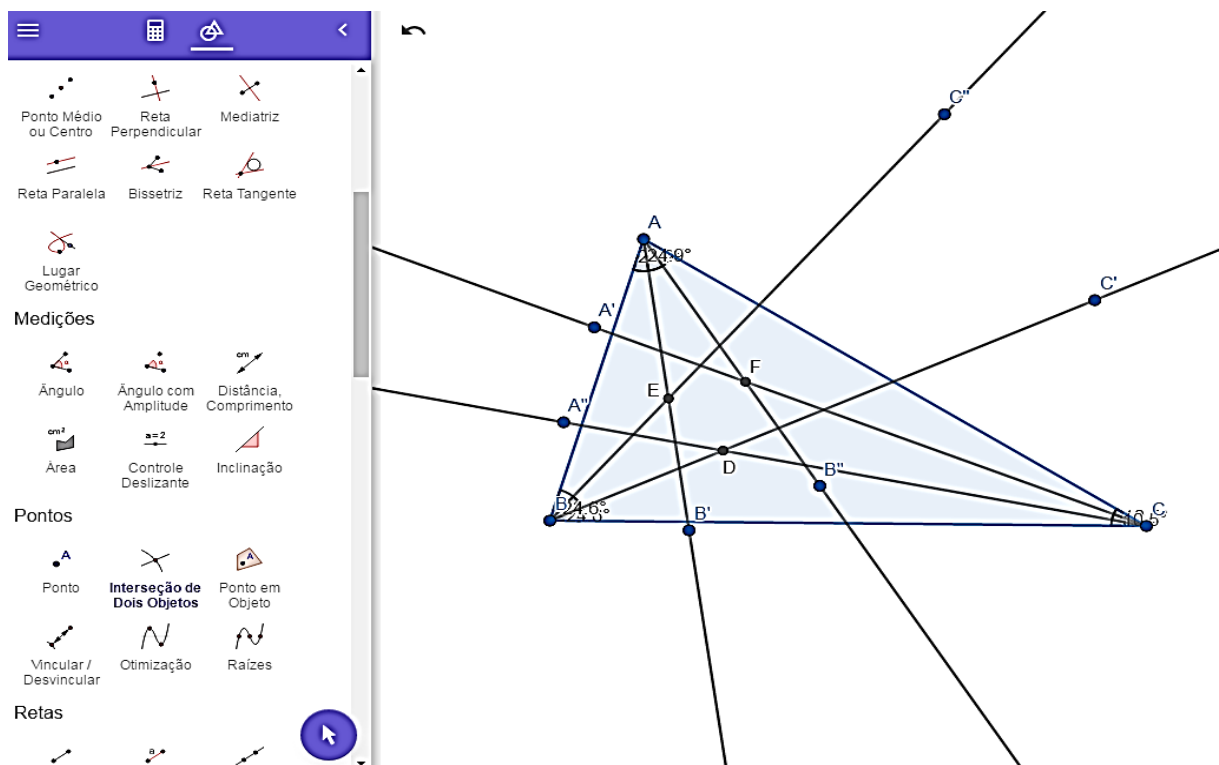
Fonte: Elaborada via software (2020)

Sugestão: Para a figura não ficar “poluída”, podemos omitir alguns itens da construção, como por exemplo, valor do ângulo, pontos, etc. Podemos ainda fazer alteração na cor, na denominação, entre outras, com o intuito de tornar a imagem mais atrativa do ponto de vista didático. Essas alterações poderão ser feitas no ícone **Álgebra** .

Passo 4: Indicar os pontos de interseção das trissetrizes adjacentes

Note que os pontos de interseção das trissetrizes adjacentes são os vértices do triângulo de Morley. Para indica-los selecione a ferramenta **Interseção de Dois Objetos** e clique nas semirretas adjacentes.

Figura 45 - E, F, D, pontos de interseção das trissetrizes adjacentes



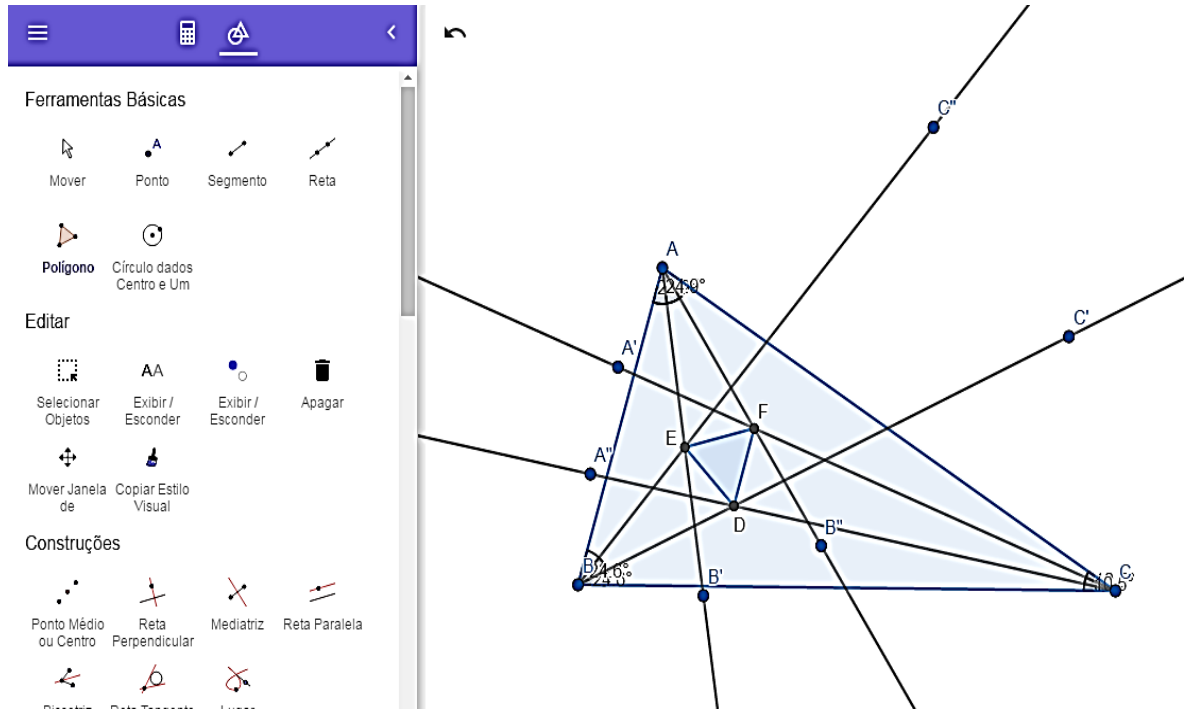
Fonte: Elaborada via software (2020)

Passo 5: Construir o triângulo DEF

Selecione a ferramenta **polígono** e em seguida clique nos pontos D, E, F e D.

Pronto, está construído o triângulo de Morley!

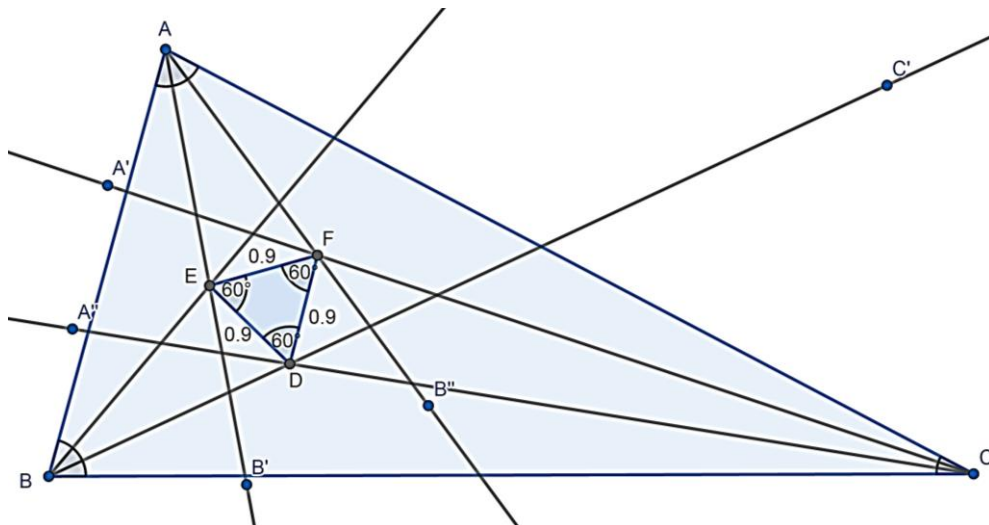
Figura 46 - Triângulo de Morley



Fonte: Elaborada via software (2020)

Para verificar se o triângulo DEF é de fato equilátero, podemos usar a ferramenta para medir ângulos ou a ferramenta **Distância, comprimento** para medir os lados.

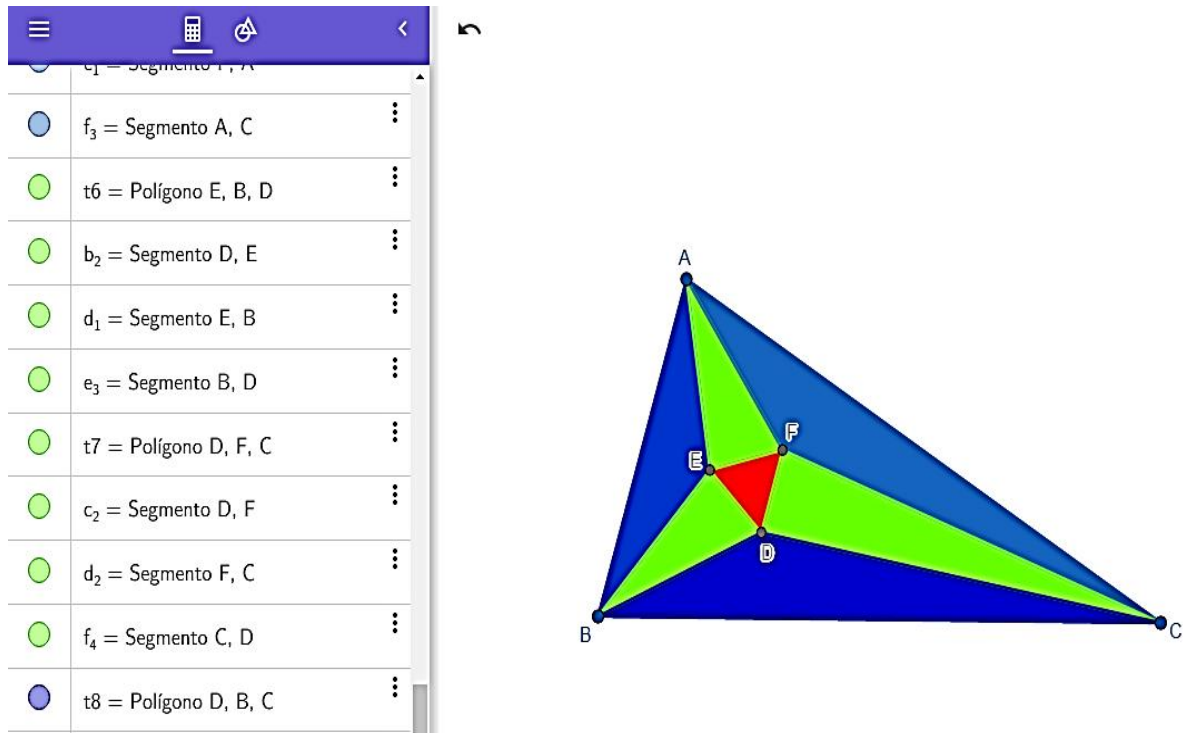
Figura 47 - Triângulo de Morley com a indicação das medidas dos lados e dos ângulos internos



Fonte: Elaborada via software (2020)

Conforme já foi mencionado anteriormente, podemos utilizar outras ferramentas a fim de tornar a figura mais atraente.

Figura 48 - Triângulo ABC colorido



Fonte: Elaborada via software (2020)

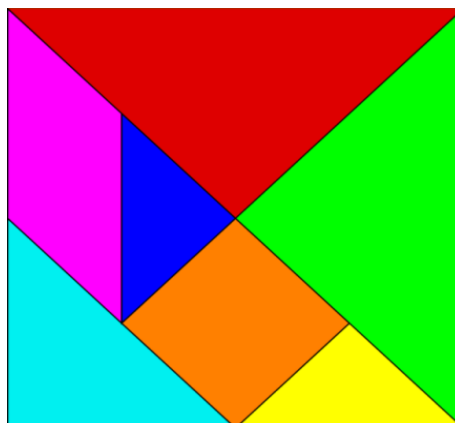
Após construir o Triângulo de Morley, podemos utilizar a ferramenta **Mover** para arrastar os vértices A, B e C, com isso, obtemos diversos triângulos ABC, porém o triângulo DEF sempre será equilátero.

Na sequência apresentamos o Tangram de Morley, uma proposta de material didático a ser trabalhado em sala de aula, a fim de facilitar a aprendizagem acerca do tema.

6. TANGRAM DE MORLEY

O **Tangram** (ou Tangram Chinês), figura 49, é um quebra-cabeça que possui sete peças chamadas de Tans. O jogo tem como objetivo formar uma figura (geométricas ou não-geométricas) usando todas as sete peças.

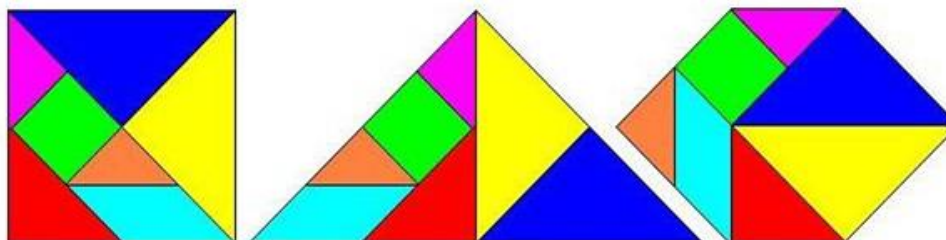
Figura 49 - Tangram



Fonte: <https://www.roboduca.com.br/blog/geometria-plana-e-o-tangram/>

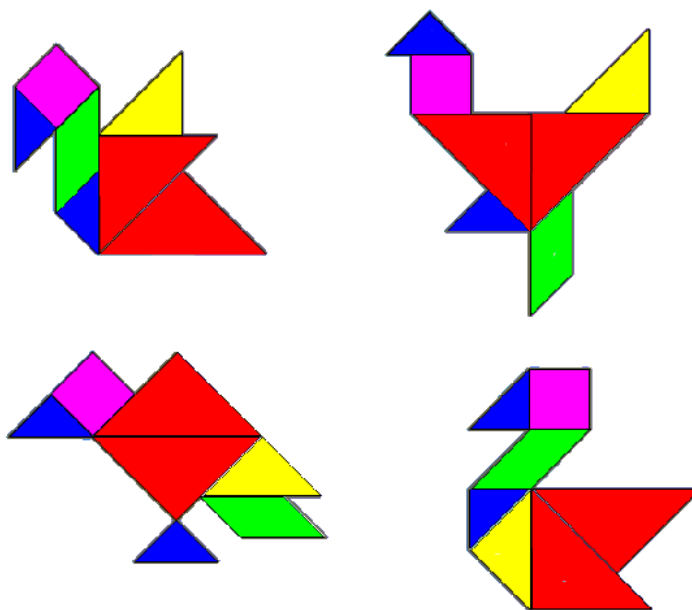
Uma das lendas de origem do jogo conta que um chinês deixou quebrar em sete partes um azulejo de formato quadrado. Ao juntar as peças e tentar montar novamente o quadrilátero, o chinês acabou dando origem a novas formas.

Figura 50 - Formas geométricas



Fonte: <http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=15416>

Figura 51 - Formas não-geométricas

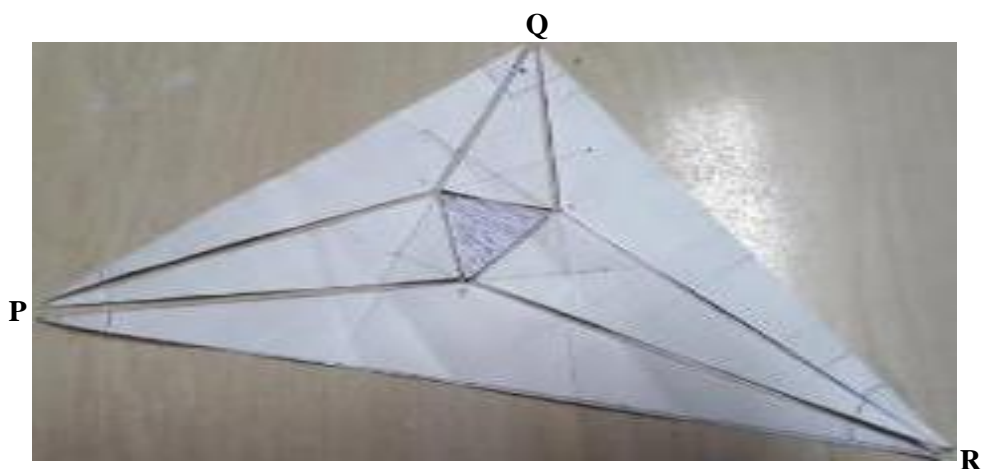


Fonte: <https://luizagosuen.blogspot.com/2016/03/>

O jogo a seguir, denominado Tangram de Morley, é um Quebra-Cabeça inspirado no Tangram Tradicional, a ideia de criar o jogo surgiu durante uma aula da disciplina TCC, na qual a Professora Maria Augusta R. de B. Brito percebeu que os recortes do triângulo PQR, conforme a figura 52, poderiam ser peças de uma espécie de quebra-cabeça. A partir disso, desenvolvemos a ideia, até chegar em uma nova versão de Tagram. O Tangram de Morley, figura 53, é formado por nove peças triangulares resultantes da decomposição de um quadrado. Esse material, além de evidenciar o Teorema de Morley, possibilita trabalhar diversos conceitos matemáticos, assim como ajuda a estimular o raciocínio lógico, a criatividade, a percepção e as habilidades.

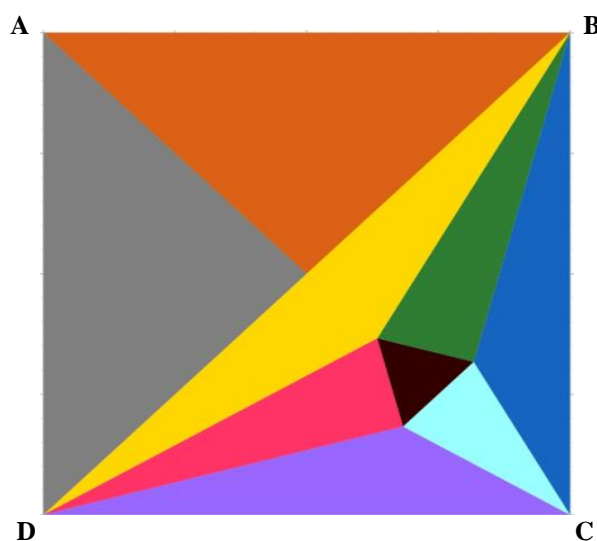
Ao final do trabalho, nos apêndices, trazemos algumas sugestões a serem trabalhadas em sala de aula a fim de auxiliar na aprendizagem do teorema. Em algumas dessas atividades constam o código alfanumérico indicando a etapa, o ano (série), o componente curricular e o número da habilidade de acordo com a BNCC.

Figura 52 – Triângulo PQR



Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

Figura 53 - Tangram de Morley



Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

Observe que o triângulo BCD da figura 53 é Isósceles e Retângulo em C, portanto o teorema de Morley foi aplicado em um caso particular. Com isso, encontramos nas peças do jogo triângulos especiais classificados de acordo com as medidas dos lados e dos ângulos. Temos:

Quatro triângulos Isósceles, sendo dois deles Retângulos e congruentes; Um triângulo Equilátero (*Triângulo de Morley*); Duas duplas de triângulos Escalenos congruentes.

A seguir, apresentamos como proposta de material didático, a Oficina de Origami, sua metodologia e os resultados.

7. OFICINA ORIGAMI

7.1 PROPOSTA DA OFICINA

Como vimos em 3.3, alguns ângulos não podem ser trisseccionados pela construção euclidiana (com régua e compasso). Contudo, com a ajuda de origami esse problema pode ser resolvido. A demonstração encontra-se em [3].

Esta oficina tem o objetivo de apresentar aos professores e alunos a possibilidade de trisseccionar os ângulos de um triângulo por meio de dobraduras e, conseqüentemente, chegar ao Triângulo de Morley.

7.2 METODOLOGIA DA OFICINA

Inicialmente, apresentamos o Origami³ e alguns objetos construídos por meio de dobraduras, a fim de despertar o interesse dos alunos partícipes. Em seguida, demonstramos a relação existente entre a Matemática e o Origami. Para isso, utilizamos, como exemplo de conceito matemático, o Triângulo de Morley. Após explicar aos alunos sobre o Triângulo de Morley, sua utilidade e especificidades, iniciamos o seu processo de construção, de acordo com os seguintes passos:

Material utilizado: Uma folha de papel A4, lápis e régua.

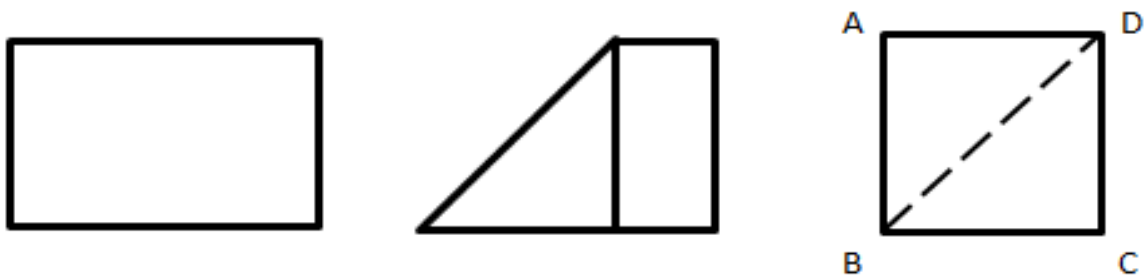
Passos:

1º) Obter um quadrado na folha A4

Pegue uma das arestas (pontas) e leve-a em direção ao seu lado oposto, alinhando os lados perpendiculares do retângulo. Observe a figura 53.

³ Podemos dizer que o origami é a arte de dobrar papel. Por meio de dobraduras em uma folha podemos obter várias figuras, como por exemplo, um pássaro, um barco, uma pirâmide, um dado (cubo), etc.

Figura 54 - Construção do quadrado



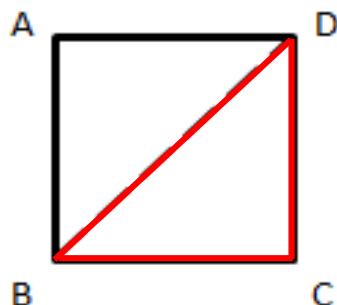
Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

Outra forma de obter um quadrado é usar duas folhas A4 (retângulos iguais) e colocá-las uma na vertical, outra na horizontal.

2º) Indicar o triângulo BCD.

Na atividade utilizamos o triângulo BCD.

Figura 55 - Triângulo BCD

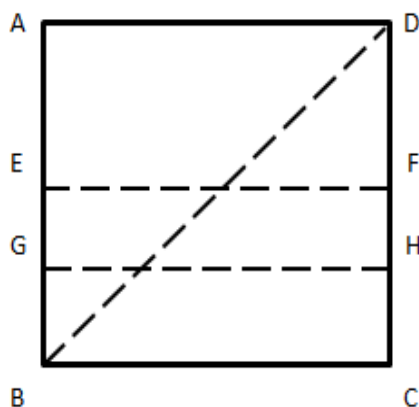


Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

3º) Trissecção dos ângulos do triângulo BCD.

- *A trissecção dos ângulos agudos (45°)*
- I. Para obter EF, dobre a folha ao meio, na horizontal, isto é, sobrepondo BC a AD. Em seguida, dobre BC sobre EF, determinando GH.

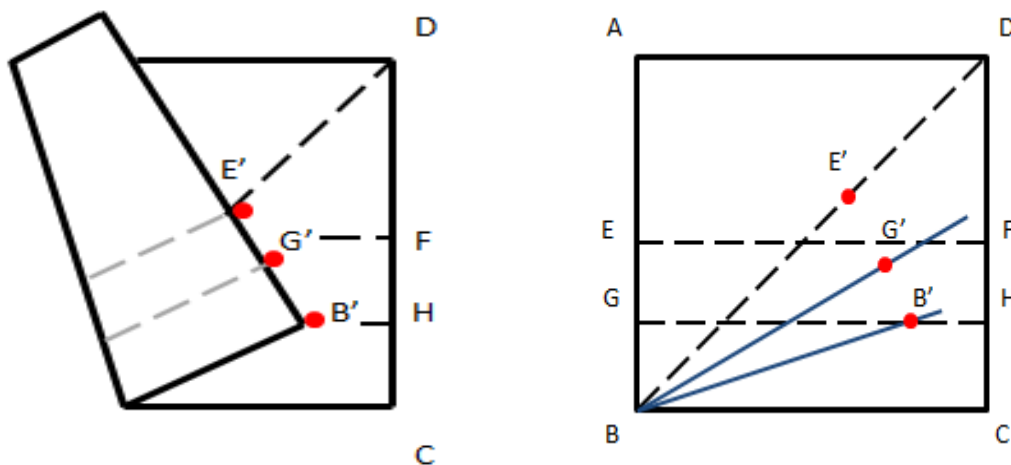
Figura 56 - Retas EF e GH ambas paralelas a BC



Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

- II. Dobre o papel de forma que o ponto B fique sobre o segmento GH e o ponto E sobre o segmento BD. Marque os pontos B', G' e E', conforme a figura 56.

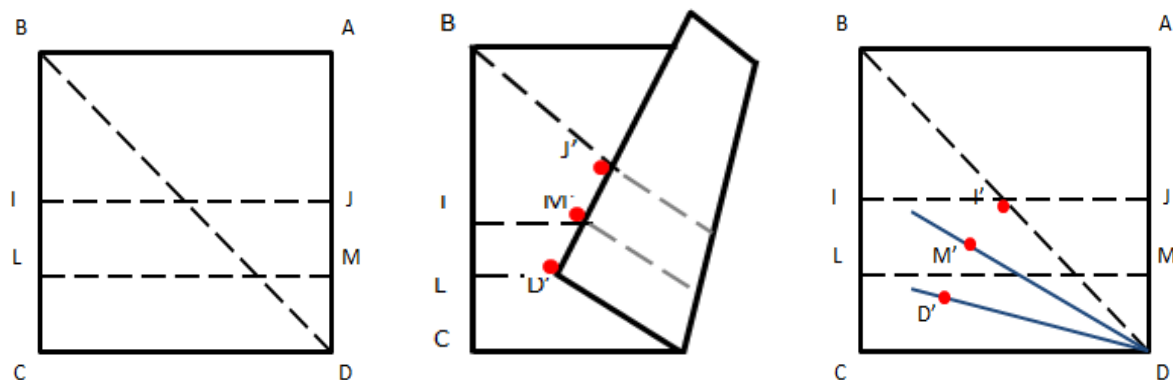
Figura 57 - Trisseção do ângulo agudo CBD



Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

- III. Para trisseccionar o outro ângulo de 45° , repita o processo na direção oposta.

Figura 58 - Trisseção do ângulo agudo BDC

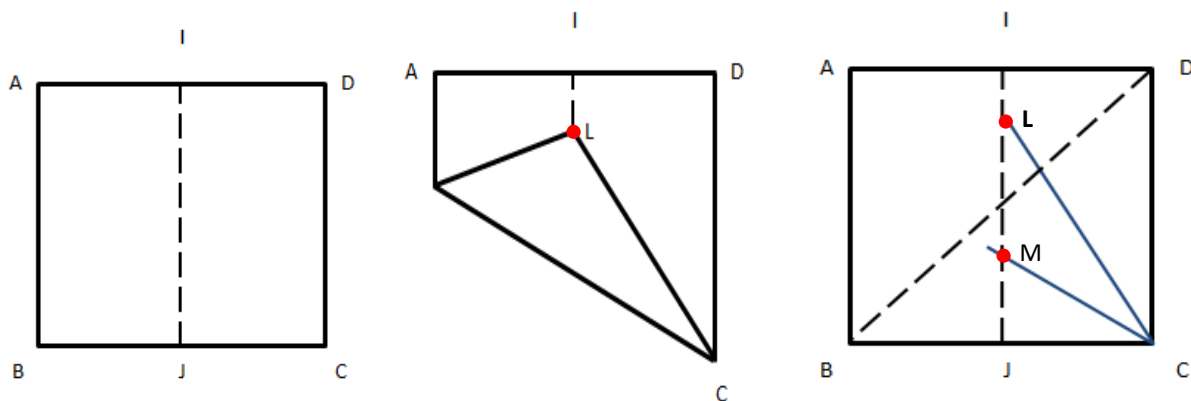


Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

- *Trisseção do ângulo de 90°*

I. Determinamos o ponto L e a reta CL levando o vértice B até IJ.

Figura 59 - Trisseção do ângulo reto BCD

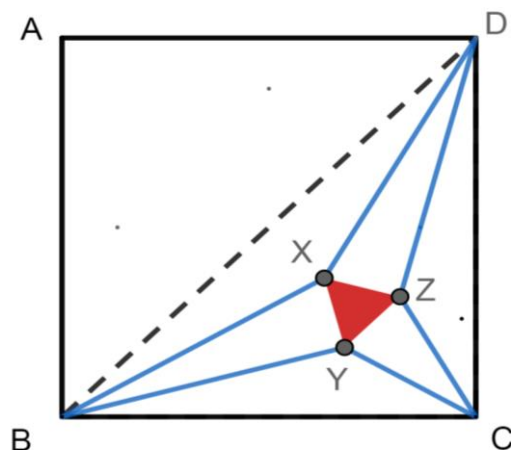


Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

Note que ao levar B até IJ, estamos sobrepondo BC em CL, com isso, encontramos a bissetriz CM do ângulo BCL. Logo, o ângulo de 90° está trisseccionado.

4º) Identificar X, Y e Z, pontos de intersecção das trissetrizes adjacentes.

Figura 60 - Triângulo (XYZ) de Morley



Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

Após a explanação sobre o Teorema de Morley, e a descrição detalhada das suas etapas de construção, demos início à oficina, conforme os registros a seguir:

7.3 REGISTROS DA OFICINA

A oficina foi desenvolvida no dia 04 de dezembro de 2019, nos dois primeiros horários de aula (13:15 às 14:45), em uma turma com 40 alunos do segundo ano (2º E) do Ensino Médio da instituição Centro de Ensino Professor João Teixeira Sousa Anexo I, situada no município de Maracatumé-Ma. Para a consecução do trabalho, utilizamos os seguintes recursos didáticos: Datashow, quadro, pincel, papel A4, lápis e régua.

Posteriormente à distribuição das folhas de papel A4 aos alunos, iniciamos a oficina. No advento, explicamos o propósito do Origami e expusemos as figuras e objetos construídos a partir de dobraduras em folhas de papel. Subsequentemente, explicitamos o vínculo entre a Matemática e o Origami, em seguida, foi salientado o Triângulo de Morley, no entanto, sem muito protocolo matemático, e posteriormente, procedemos, paulatinamente, à edificação do Triângulo de Morley por intermédio de dobraduras.

Em determinados momentos da oficina, aconteceu a conveniência do esclarecimento do passo a passo na folha de papel A4. Sendo assim, ocorreram algumas construções coletivas,

isto é, que foram empreendidas simultaneamente com os alunos, a fim de facilitar a interação, a socialização e a troca de experiências entre os participantes, além de promover a reflexão sobre a dinâmica e sobre o objeto estudado.

7.4 RESULTADOS DA OFICINA:

Após as apreciações dos conceitos e dos princípios da matemática abordados em sala, bem como da aplicabilidade da matemática nos mais diversos contextos cotidianos, suscitamos alguns questionamentos acerca da classificação do triângulo, como por exemplo, a indicação do triângulo BCD, explanada no passo 2 da metodologia. Alguns alunos conseguiram de imediato deduzir que o triângulo BCD alcançado na metade do quadrado é Isósceles adiante compreenderam também que trata-se de um triângulo retângulo.

Dos quarenta alunos participantes, vinte e dois obtiveram o resultado do Triângulo de Morley sem interferência de outrem. Dez alunos relataram ter solicitado ajuda aos colegas e, até mesmo ao professor para solucionar o problema. Já os oito alunos restantes abdicaram durante o processo de construção e, ao serem questionados sobre o porquê da desistência, alegaram dificuldades de compreensão de alguns passos, motivo pelo qual não conseguiram acompanhar no entanto, admitiram que não requereram ajuda, quiçá poderia ter sanado as dúvidas.

Ademais, existe a possibilidade de a dificuldade dos alunos que abandonaram as atividades no decorrer do processo ter ocorrido em virtude de falhas no material, tais como imagens escuras, outras sem consistência nos dados (indicação de pontos, de retas etc.) que, ao serem identificadas, foram ajustadas, a fim de dar um melhor prosseguimento ao processo de construção do teorema.

As fotos da oficina, realizada no centro de ensino professor João Teixeira Sousa anexo I, encontram-se no Apêndice B.

8. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A presente dissertação tem como pilar fundamental transladar aos discentes da Educação Básica, os princípios basilares do Teorema de Morley, que apresenta em seu alicerce o Triângulo de Morley, nome dado ao triângulo equilátero formado pelos pontos de interseção das trissetrizes adjacentes dos ângulos internos de um triângulo qualquer.

É mister enfatizar que a descoberta do triângulo supracitado é de extrema relevância para o campo da Geometria, tendo em vista que o teorema tem como conjectura múltiplos conhecimentos da matemática, tais como os três problemas clássicos da geometria (a duplicação do cubo, a quadratura do círculo e a trissecção de um ângulo qualquer).

A priori, o escopo do trabalho era, estritamente, a elaboração de um estudo sobre o teorema, suas propriedades e comprovações, bem como um breve histórico sobre a vida de Frank Morley, criador do teorema, objeto estudado. No entanto, no decorrer do desenvolvimento da pesquisa, da implicação com o contexto, e da finalidade do trabalho de conclusão do PROFMAT, houve a necessidade de produzir um material didático que, justaposto à Educação Matemática, pudesse fomentar outras pesquisas e produções relacionadas ao tema em voga.

Nessa perspectiva, podemos afirmar que os objetivos previamente estabelecidos foram alcançados, se considerarmos que, ao final do processo, os educandos demonstraram um bom entendimento sobre os princípios basilares do Teorema de Morley, e certa facilidade na identificação de definições e conceitos matemáticos, presentes no teorema. De modo geral, os resultados foram satisfatórios, pois, dos quarenta alunos partícipes, vinte e dois conseguiram obter o resultado do Triângulo de Morley individualmente, sem a interferência de outrem.

Por outro lado, dez alunos relataram a necessidade de solicitar ajuda aos colegas de classe ou, até mesmo, ao professor, em virtude da dificuldade na resolução das atividades propostas. Ademais, dez alunos abdicaram durante o processo de construção do teorema, alegando dificuldade de compreensão em algumas etapas, o que inviabilizou o andamento da atividade e, por conseguinte, a sua resolução.

Percebemos com isso que, ao dificultar o entendimento das instruções, a falta de limpidez do material utilizado pode ter prejudicado o processo de construção do teorema, e por tal motivo, assim que possível, fizemos os ajustes necessários para o bom andamento do processo. Contudo, oito alunos admitiram que não requereram a ajuda de terceiros, quiçá poderiam ter sanado as inseguranças.

Ao final da pesquisa, constatamos que, por tratar-se de uma temática pouco explorada, a maior dificuldade encontrada na consecução da pesquisa reside no fato de haver pouca literatura relativa a esse objeto, e por tal motivo, os exercícios formulados, com o foco na Educação Básica são escassos. E as questões encontradas, por serem de treinamento olímpico, estão acima do nível habitual e, portanto, inadequadas para o nosso público-alvo.

Em suma, esperamos que esse trabalho promova uma reflexão mais amadurecida sobre o Teorema de Morley e sobre as suas possibilidades de aplicação no ensino da matemática na Educação Básica. Do mesmo modo, esperamos que inspire a criação de novas propostas de trabalho, para que possam enriquecer a literatura, e sirvam como novos recursos para o estudo dessa temática que ainda tem tanto para ser explorada.

REFERÊNCIAS

- [1] BICUDO, I. **Os elementos**. São Paulo, UNESP, 2009. 6000 f.
- [2] GUANABARA, L. **O Problema da Trissecção do Ângulo**. 2017. 57 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia, Rio Grande do Norte, 2019.
- [3] CARNEIRO, M. J. D.; SPIRA, M. **Oficina de Dobraduras**. Programa de Iniciação Científica OBMEP, vol.9. 2012.
- [4] BATISTA, A. F. **Construções Geométricas, Insolubilidade de Soluções dos Problemas Clássicos e Aplicações no Ensino Básico**. 2018. 59 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de Sergipe, São Cristovão, 2018.
- [5] CARVALHO, J. P. **Os Três Problemas Clássicos da Matemática Grega**. Salvador, SBM, 2004. 21 f.
- [6] CARVALHO, J. P. **Os Matemáticos Gregos e as Construções por Ajustamento (Neusis)**.
- [7] ISAACS, I. M. **Geometría Universitaria**. Cidade de México, Thomson, 2003.
- [8] BRITO, J. A. P. M. **O Teorema de Morley**. 2015. 106 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2015.
- [9] SILVA, M. A. **O Teorema de Morley**. 2015. 52 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Estadual do Ceará, Ceará, 2015.
- [10] SILVA, L. S. C. **O Teorema de Morley**. 2014. 58 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2014.
- [11] PANTOJA, L. C. R. **Números Algébricos e Números Transcendentes**. 2018. 67 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal do Pará, Belém, 2018.
- [12] SCHUBRING, G.; ROQUE, T. **O Papel da Régua e do Compasso nos Elementos de Euclides: uma prática interpretada como regra**. História Unisinos, São Leopoldo, RS, v. 18, n. 1, p. 91 – 103, jan./abr. 2014.
- [13] VIANNA, D. J. C. **A Geometria Dedutiva e Construções Geométricas com Régua e Compasso**.

[14] WAGNER, E. **Uma Introdução às Construções Geométricas**. Rio de Janeiro, IMPA, 2015. 87 f.

[15] BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília, 2018.

[16] WAGNER, E. **Construções Geométricas**. 6 ed. Rio de Janeiro, SBM, 2007. 110 f. (Coleção do Professor de Matemática; 9).

APÊNDICE A – LISTA DE ATIVIDADES

1. Identificar os triângulos congruentes nas peças que compõem o Tangram de Morley.

(EF03MA16) Reconhecer figuras congruentes, usando sobreposição e desenhos em malhas quadriculadas ou triangulares, incluindo o uso de tecnologias digitais.

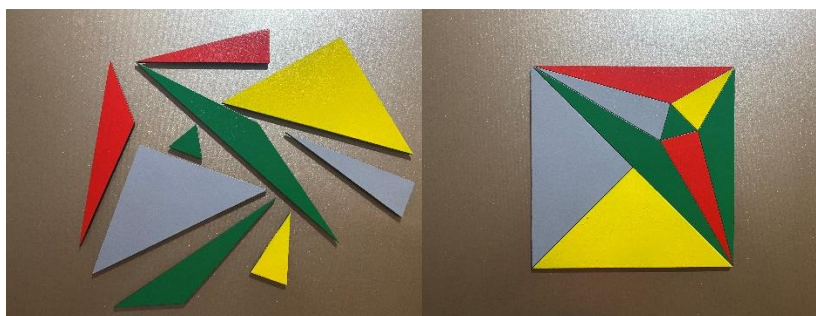
Nesta habilidade, as peças do quebra-cabeça que tem as mesmas formas e medidas ajudam os alunos a compreender, de forma intuitiva, o conceito de congruência.

2. Classificar os triângulos do Tangram de Morley quanto aos seus lados e quanto aos seus ângulos.

(EF06MA19) Identificar características dos triângulos e classificá-los em relação às medidas dos lados e dos ângulos.

3. Reconstruir o quadrado original.

Figura 61 – Reconstrução do quadrado

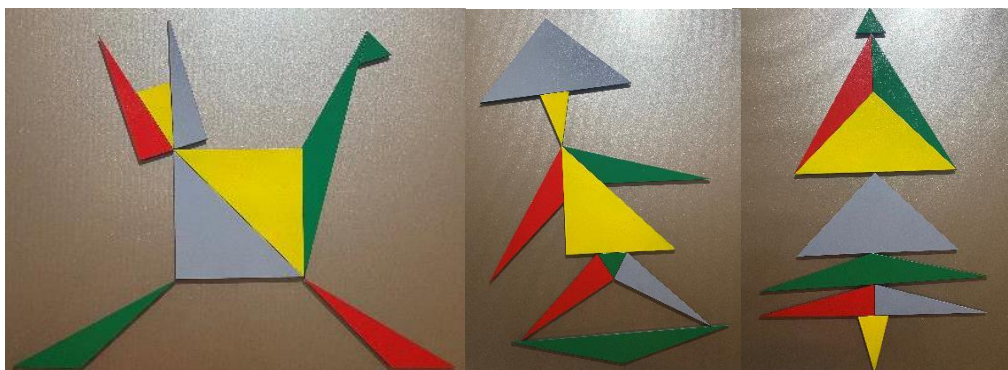


Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

4. Construir figuras geométricas e não geométricas usando peças do tangram de morley.

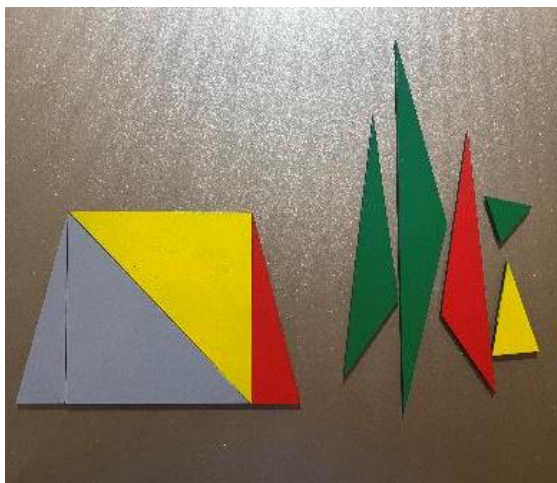
Possíveis respostas

Figura 62 – Figuras não geométricas formadas com peças do Tangram de Morley



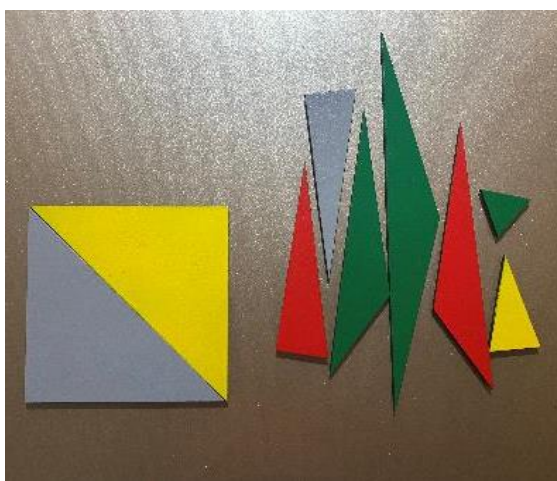
Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

Figura 63 – Trapézio formado com peças do Tangram de Morley



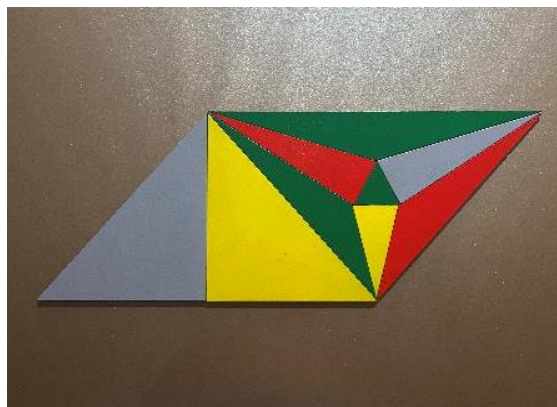
Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

Figura 64 – Quadrado formado com peças do Tangram de Morley



Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

Figura 65 – Paralelogramo formado com peças do Tangram de Morley

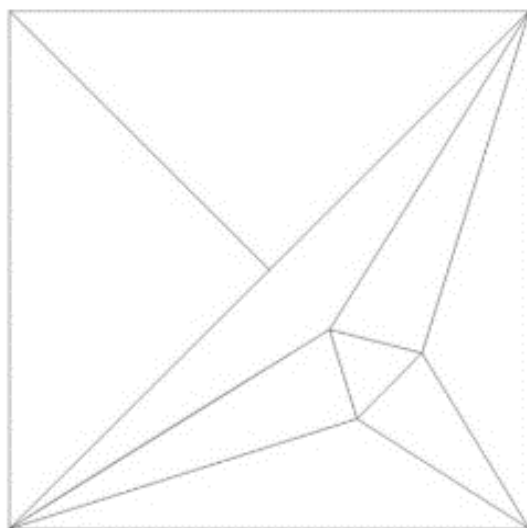


Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

5. Construir o Tangram de Morley.

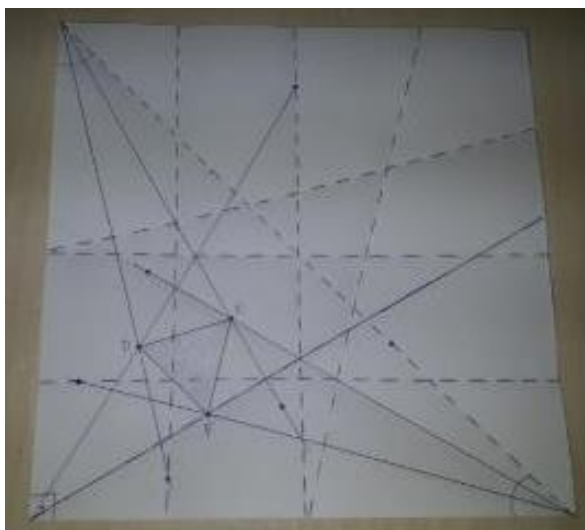
Para a construção, poderá ser utilizado o processo apresentado com o programa Geogebra ou a técnica da Oficina de Origami.

Figura 66 – Tangram de Morley construído no Geogebra



Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

Figura 67 – Tangram de Morley construído por origami



Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

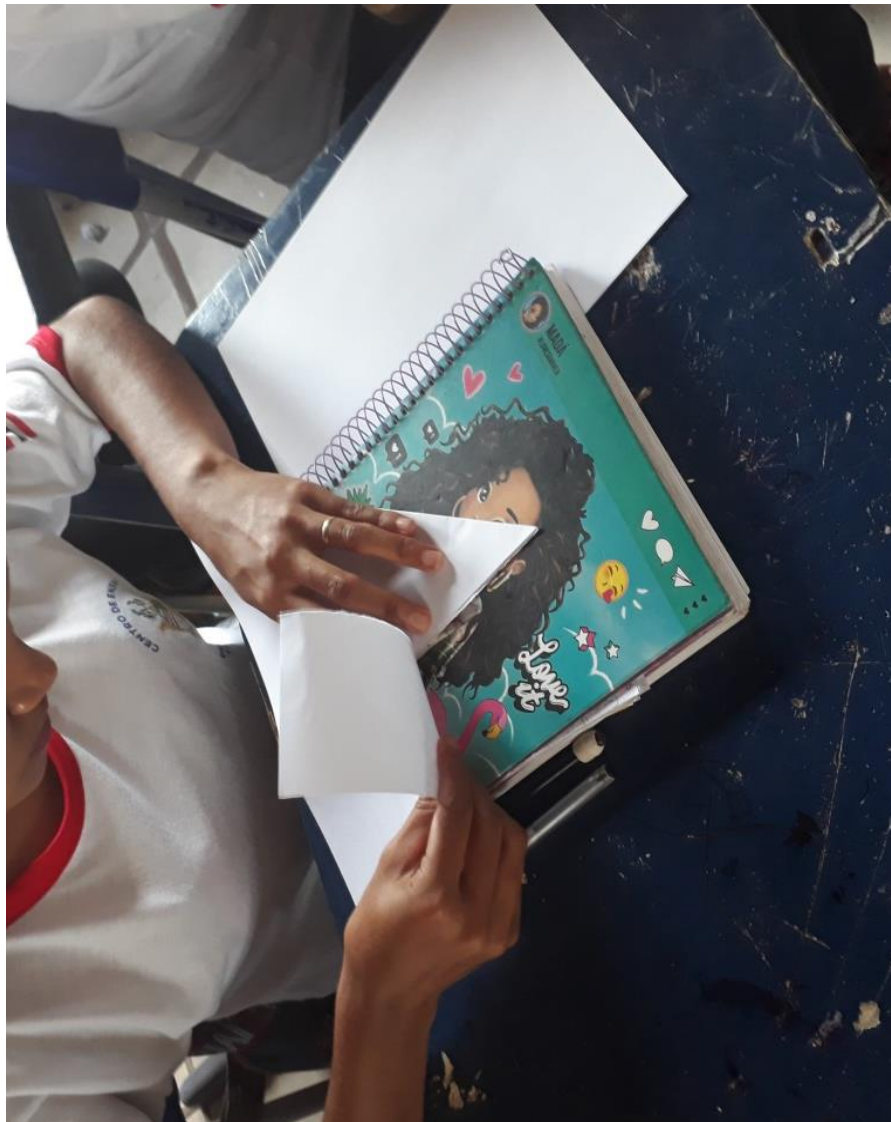
APÊNDICE B – FOTOS DA OFICINA

Figura 68 - Construção do quadrado por dobraduras em folha de papel A4



Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

Figura 69 - Recorte da folha para obter o quadrado



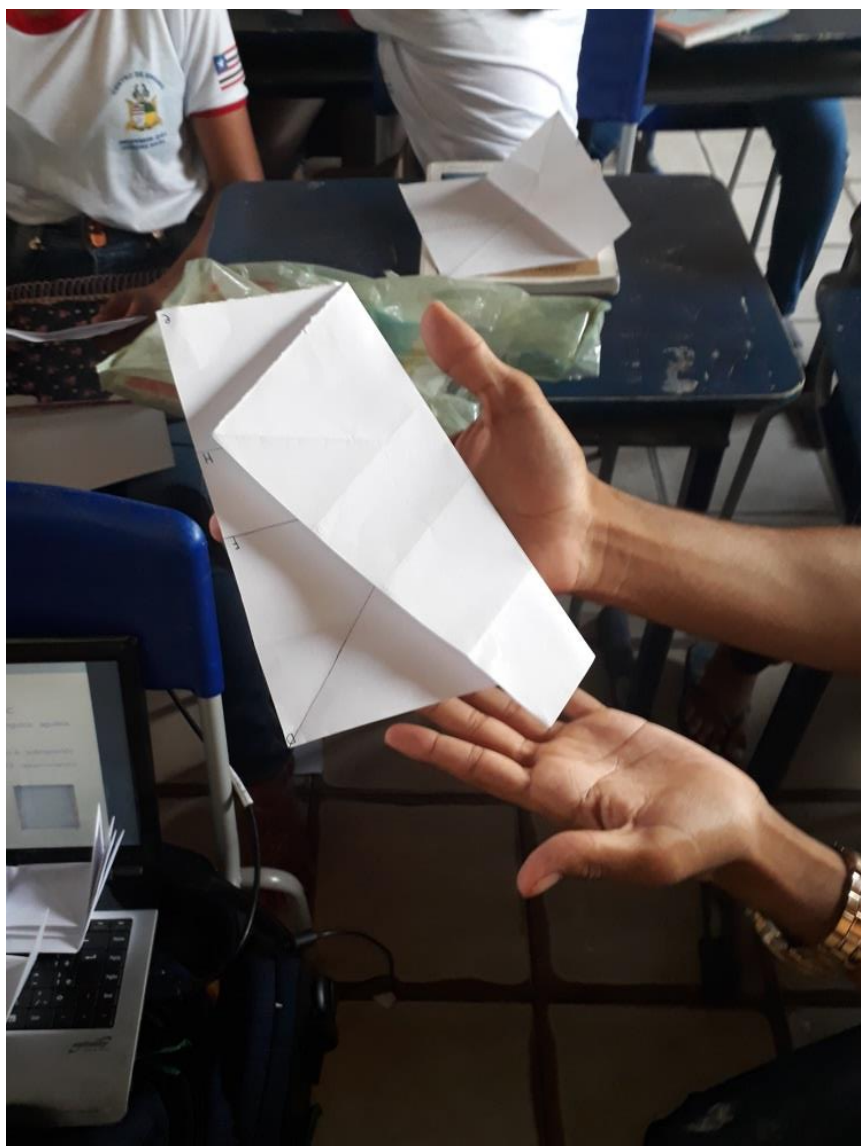
Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

Figura 70 - Indicação do triângulo BCD na folha de papel A4



Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

Figura 71 - Passos da trisseccção do ângulo agudo



Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

Figura 72 - Colaboração entre alunos



Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

Figura 73 - Construção do Triângulo de Morley por dobraduras em folha de papel A4



Fonte: Elaborada pelo autor (2020)