



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL**

JOSÉ ELEILTON ABREU DE OLIVEIRA

SOBRE CURVAS PLANAS

FORTALEZA – CEARÁ

2021

JOSÉ ELEILTON ABREU DE OLIVEIRA

SOBRE CURVAS PLANAS

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (Profmat) do Programa de Pós-Graduação em Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática. Área de Concentração: Educação Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Nicolás Alcântara de Andrade

FORTALEZA – CEARÁ

2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Estadual do Ceará
Sistema de Bibliotecas

Oliveira, Jose Eleilton Abreu de.
Sobre Curvas Planas [recurso eletrônico] /
Jose Eleilton Abreu de Oliveira. - 2021.
65 f. : il.

Dissertação (MESTRADO PROFISSIONAL) -
Universidade Estadual do Ceará, Centro de Ciências
e Tecnologia, Curso de Mestrado Profissional Em
Matemática Rede Nacional - Profissional,
Fortaleza, 2021.

Orientação: Prof. Dr. Nicolás Alcântara de
Andrade.

1. Curvas Planas. 2. Parametrização de
Curvas. 3. Parametrização das Cônicas. 4.
Parametrização de Curvas Clássicas. I. Título.

JOSÉ ELEILTON ABREU DE OLIVEIRA

SOBRE CURVAS PLANAS

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (Profmat) do Programa de Pós-Graduação em Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática. Área de Concentração: Educação Matemática.

Aprovada em: 13 de dezembro de 2021

BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Nicolas Alcântara de Andrade (Orientador)
Universidade Estadual do Ceará (UECE)



Prof. Dr. João Montenegro de Miranda
Universidade Estadual do Ceará (UECE)



Prof. Dr. Diego de Sousa Rodrigues
Instituto de Educação Federal e Tecnologia do Ceará (IFCE)

Dedico esse trabalho à minha família.
Fonte inesgotável de felicidade, razão da
minha vida e inspiração para o meu
trabalho.

AGRADECIMENTOS

À Deus, o grande geômetra e mais exímio algebrista, por iluminar grandes mentes na miscelânea dessas áreas e cujas contribuições ao longo da história deram origem a esse trabalho.

À minha família que sempre esteve ao meu lado transformando dias cansados em noites de pura alegria.

Aos meus professores que compartilharam comigo o seu conhecimento e não desistiram de ver o meu sucesso.

Aos meus colegas, tanto de turma como de trabalho, esses pelo incentivo e pertinência e aqueles por tornar a aprendizagem mais agradável.

Ao meu orientador, pela sua amizade e dedicação, tornando possível a realização dessa pesquisa, e pela relevância em minha vida acadêmica.

“Poemas seriam perda de tempo?
E notas de rodapé?

Se ainda vale a matemática
que me ensinaram,
dois números negativos
multiplicados
resultam num número positivo.
Espero que
uma perda de tempo
ao quadrado
seja um ganho... de tempo.”

(Engenheiros do Hawaii)

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo determinar uma parametrização para curvas importantes no estudo da Geometria Diferencial, do Cálculo Vetorial e da Geometria Analítica. A busca dessas equações paramétricas é uma dificuldade recorrente entre alunos iniciantes nessas disciplinas. Baseamos este trabalho em obras conceituais de Geometria Diferencial e Cálculo e procuramos contribuições em monografias que utilizam a representação paramétrica de curvas no seu desenvolvimento. Para tanto, fizemos uma ampla pesquisa bibliográfica sobre o assunto e destacamos as curvas mais frequentes nessas obras, sejam elas citadas em exemplos ou nos exercícios propostos e buscamos determinar uma parametrização para elas.

Palavras-chave: Curvas Planas. Parametrização de Curvas. Parametrização das Cônicas; Parametrização de Curvas Clássicas.

ABSTRACT

The present work aims to determine a parameterization for important curves in the study of Differential Geometry, Vector Calculus and Analytical Geometry. The search for these parametric equations is a recurrent difficulty among beginning students in these disciplines. We based this work on conceptual works of Differential Geometry and Calculus and we look for contributions in monographs that use the parametric representation of curves in their development. To this do so, we did a broad bibliographic research on the subject and highlight the most frequent curves in these works, whether mentioned in examples or in the proposed exercises and we seek to determine a parameterization for them.

Keywords: Flat Curves. Curve's Parameterization. Parameterization of Conics; Parameterization of Classical Curves.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - Coordenadas de um ponto P.....	16
Figura 2 - Círculo centrado na origem do sistema $x'O'y'$	16
Figura 3 - Sistema $x'O'y'$ por uma rotação.	17
Figura 4 - Elipse obtida por uma rotação de 45°	18
Figura 5 - Exemplos de curvas que não são gráfico de função	19
Figura 6 - Curva gerada pelas equações paramétricas $f(t)$ e $g(t)$	20
Figura 7 - Retas que passam por (x_0, y_0) e são paralelas ao vetor (a,b)	22
Figura 8 - Tangente da curva percorrida com triplo da velocidade	23
Figura 9 - Cones gerados pela rotação de uma reta em torno de uma reta.....	28
Figura 10 - Obtenção da circunferência seccionando um cone por um plano ..	29
Figura 11 - Obtenção da parábola seccionando um cone por um plano.....	29
Figura 12 - Obtenção da elipse seccionando um cone por um plano	29
Figura 13 - Obtenção da hipérbole seccionando um cone por um plano	30
Figura 14 - Circunferência de raio r centrada em (x_0, y_0)	31
Figura 15 - Elipse centrada em (x_0, y_0) com focos nos pontos F_1 e F_2	32
Figura 16 - Elipse com as interseções com eixos principais e secundários ..	33
Figura 17 - Circunferências tangenciando a elipse interna e externamente.....	34
Figura 18 - Segmento BC rotacionando e deslocando o ponto D sobre a elipse	34
Figura 19 - Projeção do ponto D sobre a reta $y = y_0$	35
Figura 20 - Hipérbole centrada no ponto C com focos F_1 e F_2	36
Figura 21 - Representação do círculo centrado em C com raio $x_P - x_0$	37
Figura 22 - Segmento CE rotacionando à medida que o ponto E percorre o círculo.....	38
Figura 23 - Parábola	39
Figura 24 - Parábola com foco em F e diretriz d	39
Figura 25 - Indicação dos pontos A, F, P e V	40
Figura 26 - Indicação do ângulo $\theta = BVP$ para parametrizar a parábola	41
Figura 27 - Cissóide de C_1 e C_2 em relação ao ponto O	42
Figura 28 - A Cissóide de Diocles.....	43
Figura 29 - Retas $x=2a$ e circunferência centrada em $(a,0)$ que geram a Cissóide	43
Figura 30 - Cissóide de Diocles gerada pelo deslocamento do ponto P	44
Figura 31 - Indicação do ângulo θ da parametrização da Cissóide	45
Figura 32 - Deslocamento de um ponto gerando a Ciclóide	46
Figura 33 - Cissóide de uma reta tangente ao eixo x girando ao longo do mesmo	47
Figura 34 - Movimento do ponto P em função do ângulo θ	47
Figura 35 - Curvas de descida do ponto A ao B	48
Figura 36 - Deslocamento sobre uma tautócrona no mesmo tempo	50
Figura 37 - Folium de Descartes	52

Figura 38 - P descrevendo o Folium de Descartes de acordo com a variação de t	53
Figura 39 - Ovais de Cassini.....	54
Figura 40 - Lemniscata de Bernoulli.....	55
Figura 41 - Ponto P descrevendo a Epiciclóide.....	56
Figura 42 – x_P entre a origem e x_O na construção da Epiciclóide	56
Figura 43 – x_O entre a origem e x_P na construção da Epiciclóide	57
Figura 44 - Cardióide.....	58
Figura 45 - C_2 rolando sobre C_1 e o deslocamento de P gerando a Hipociclóide	59
Figura 46 - x_O entre a origem e x_P na construção da Hipociclóide.....	60
Figura 47 - x_P entre a origem e x_O na construção da Hipociclóide.....	61
Figura 48 - Astróide.....	62

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
1.1	Problemática e Justificativa	13
1.2	Objetivos	14
1.3	As Funções Estudadas no Ensino Médio	14
1.4	Transformação de Coordenadas em \mathbb{R}^2	15
2	CURVAS PARAMETRIZADAS	19
2.1	Tangente e Curvas Regulares	22
2.2	Comprimento de Arco	24
2.3	Curvatura, Torção e as Equações de Frenet	25
3	PARAMETRIZAÇÃO DAS CÔNICAS	28
3.1	Circunferência	31
3.2	Elipse	32
3.3	Hipérbole	36
3.4	Parábola	38
4	PARAMETRIZAÇÃO DE CURVAS CLÁSSICAS	42
4.1	Cissóide de Diocles	42
4.2	Ciclóide	46
4.3	Braquistócrona e Tautócrona	48
4.4	Folium de Descartes	52
4.5	Lemniscata de Bernoulli	54
4.6	Epicicloide e Cardióide	55
4.7	Hipocicloide e Astróide	59
	CONSIDERAÇÕES FINAIS	63
	REFERÊNCIAS	64

1 INTRODUÇÃO

A parametrização de curvas, sejam elas planas ou espaciais, é um tema recorrente em diversas obras, sejam livros ou monografias, que abordam Geometria Analítica, Cálculo, Equações Diferenciais, Geometria Diferencial entre outras, visto que algumas curvas são mais bem manipuladas quando as coordenadas de seus pontos são expressas em função de um parâmetro.

No ensino médio, percebemos a possibilidade de se introduzir o estudo de curvas parametrizadas aplicando essa abordagem nos conteúdos de Cinemática, em Física, e em Matemática, no estudo das cônicas no 3º ano, levando os discentes à familiaridade no tratamento de curvas.

Do ponto de vista didático, podemos notar também que representando curvas como o movimento de uma partícula e assim, por equações paramétricas, evita-se de incluir pontos que não precisam ser considerados no estudo. Fato que pode ocorrer quando se opta pela representação por meio de uma representação cartesiana ou por uma igualdade do tipo $y = f(x)$. Trabalhando com parametrizações podemos inclusive restringir o estudo da curva em torno de um único ponto.

Vale ressaltar ainda que para algumas curvas, a exemplo da Cissóide de algumas parábolas, é impossível obtermos uma representação por meio de uma função $y = f(x)$, fato que não ocorre em representações por equações paramétricas, pois a ideia central é descrever a curva como movimento de uma partícula, logo admite-se a não injetividade em alguns casos.

Vemos ainda um número considerável de dissertações do PROFMAT que trabalham sob o conceito de curvas parametrizadas para desenvolver seus respectivos temas. Dada também a essa recorrência do tema, buscaremos uma complementação para os trabalhos existentes.

Diante dessa realidade, apontamos como necessária a abordagem da busca de parametrizações para curvas importantes, como cônicas e algumas curvas clássicas e instigar o leitor a buscar complementação para esse trabalho, investigando parametrizações para curvas que não abordamos aqui e estendendo o estudo para curvas não planas e para superfícies.

1.1 Problemática e Justificativa

O presente trabalho é fruto das dificuldades encontradas no início do estudo nas disciplinas de Geometria Diferencial nos cursos de graduação e mestrado por parte de alguns alunos. As dificuldades em questão consistem em entender, visualizar, determinar e manipular equações paramétricas para curvas planas. Tal estudo é imprescindível para avançar no estudo de curvas e superfícies no espaço euclidiano.

No contexto do ensino médio, mais especificamente na Geometria Analítica, cujo foco é dar um caráter algébrico para as curvas representando-as por meio de equações cartesianas e não necessariamente funções, percebe-se a impossibilidade de se representar algumas curvas com uma expressão que utilize apenas uma variável dependente e uma variável independente. Existem também muitas curvas que não podemos nem escrever como uma única equação em termos de apenas x e y .

Tomemos, por exemplo, um círculo centrado na origem. É fácil demonstrar que a equação cartesiana dessa curva é $x^2 + y^2 = r^2$. No entanto, não é possível escrever a equação desse círculo como uma única equação seja da forma $y = f(x)$ ou da forma $y = g(x)$. Podemos escrever, resolvendo para x ou para y , as expressões $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$ ou $x = \pm\sqrt{r^2 - y^2}$. Mas, na verdade, existem duas funções em cada uma delas. Cada função fornece uma parte do círculo.

Na Geometria Diferencial, no entanto, faz-se necessário expressar as curvas por meio de funções coordenadas, para que assim suas propriedades locais e globais tais como determinação de vetores tangentes, de vetores normais, de continuidade sejam estudadas.

Na Física, no estudo da Cinemática, surge ainda a necessidade de expressar essas curvas como o movimento de uma partícula. Tal fenômeno gera uma caracterização geométrica para determinadas curvas, possibilitando expressá-las por equações paramétricas.

Para lidar com alguns desses problemas, introduziremos nesse trabalho as *equações paramétricas*. Em vez de definir y em termos de x ($y = f(x)$) ou x em termos de y ($x = g(y)$) definiremos ambas x e y em termos de uma terceira variável chamada de *parâmetro*, isto é, $x = f(t)$ e $y = g(t)$ e tentaremos determinar uma

parametrização para curvas planas importantes no estudo da Geometria Diferencial e da Geometria Analítica.

1.2 Objetivos

O objetivo geral do presente trabalho é determinar uma parametrização para curvas importantes no estudo de Geometria Diferencial e de Cálculo Vetorial, tais como as Ciclóides, a Tractriz, a Cissóide de Diocles, entre outras.

Para tanto vamos revisar os conceitos de curva parametrizadas e equações paramétricas, determinar inicialmente as equações paramétricas gerais das cônicas buscando apresentar aplicações de sua utilização. Em seguida, estabeleceremos para cada curva citada nesse trabalho, a partir da sua definição ou construção, um raciocínio que conclua na determinação de uma parametrização.

Direcionamos esse trabalho para estudantes de cursos de graduação em Matemática e outras áreas que pretendem iniciar um estudo em Geometria Diferencial de Curvas, bem como para estudantes de ensino médio interessados em aprofundar estudos em Geometria Analítica.

1.3 As Funções Estudadas no Ensino Médio

Os conteúdos de Ensino médio contemplam amplamente o estudo de funções. Com o Novo Ensino Médio, esses conteúdos passaram a serem mais abordados devido à sua aplicabilidade e relevância para os próximos conteúdos.

No presente trabalho, as funções adquirem um papel relevante. Ao determinar uma parametrização para uma curva usamos funções reais para determinar as coordenadas, num certo instante t , da trajetória de um ponto que se desloca no plano. A trajetória desse ponto dará origem à curva

As funções polinomiais, em especial, a afim e a quadrática, amplamente estudadas no Ensino Médio, têm sua relevância por darem origem a gráficos representados por retas; muito utilizadas aqui tais como assíntotas, diretrizes, suportes, projeções; e parábolas, que tem sua importância por ser uma cônica e terá uma seção dedicada à sua parametrização.

As funções modulares, nesse trabalho terão sua relevância devido serem utilizadas geometricamente para representar distâncias entre pontos de retas horizontais e verticais.

As funções exponenciais e logarítmicas, devido a seu padrão gráfico de crescimento ou decréscimo surgem nas parametrizações de algumas curvas muito importantes para a Geometria Diferencial, como no caso de algumas espirais e da tractriz, cuja revolução dá origem uma pseudoesfera, uma superfície muito estudada nesse curso.

As funções trigonométricas por sua aplicabilidade em situações de rotação, revolução e situações que envolvem ângulos adquirem protagonismo nesse trabalho tendo em vista que surgem em muitas parametrizações. Ressalta-se aqui a importância das propriedades cíclicas e periódicas dessas funções em alguns casos e o fato de algumas dessas funções terem a capacidade de associar bijetivamente um intervalo limitado a todo o conjunto dos números reais.

Em muitos dos casos, as parametrizações são dadas por produtos, quocientes, composição ou inversão dessas funções. Recomenda-se ao leitor revisar brevemente os conceitos para uma leitura mais proveitosa.

1.4 Transformação de Coordenadas em \mathbb{R}^2

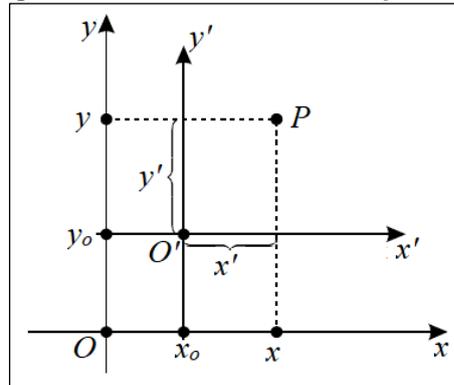
Muitos dos casos que envolvem curvas ou pontos no plano podem ter seu estudo simplificado se forem consideradas transformações de coordenadas. Uma vez conhecidas as coordenadas de um ponto ou a equação de uma curva em relação a um certo sistema de referência, tentaremos exibir as novas coordenadas do ponto ou a nova equação da curva em relação a um novo sistema de referência. Assim, a curva cuja equação é $f(x, y) = 0$ quando referida ao sistema de coordenadas cartesianas xOy , transformar-se-á numa equação do tipo $f(x', y') = 0$ quando referida a um novo sistema de coordenadas $x'O'y'$.

Esse novo sistema é obtido através movimentos rígidos no plano, ou seja, por meio de translações ou rotações, podendo inclusive ocorrer uma combinação das dessas duas transformações.

No plano cartesiano xOy considere um ponto $O' = (x_0, y_0)$. Introduza um novo sistema $x'O'y'$ tal que O' seja a nova origem e o eixo $O'x'$ tenha mesma

direção e sentido de Ox e $O'y'$ tenha a mesma direção e sentido de Oy . Dizemos que o novo sistema $x'O'y'$ foi obtido por uma translação do antigo sistema xOy . Em ambos os sistemas se conservam as unidades de medida.

Figura 1 - Coordenadas de um ponto P



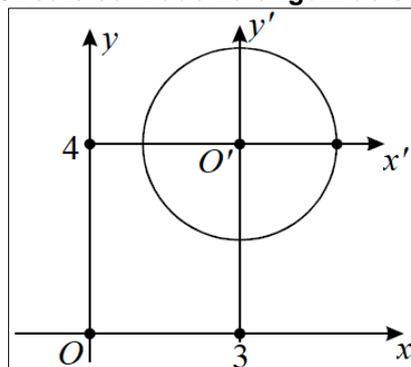
Fonte: (Adaptada) Venturi, 2003

Um ponto P do plano que tem coordenadas (x, y) em relação ao sistema xOy , terá coordenadas (x', y') em relação ao sistema $x'O'y'$. Obtemos facilmente as fórmulas de translação
$$\begin{cases} x = x_0 + x' \\ y = y_0 + y' \end{cases}$$

Considere a circunferência de equação $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 21 = 0$ em relação ao sistema xOy . Como exemplo, faremos uma translação de eixos de modo que a nova origem seja $O' = (3, 4)$ e obtemos a equação da circunferência em relação ao novo sistema $x'O'y'$.

Fazendo $\begin{cases} x = x' + 3 \\ y = y' + 4 \end{cases}$, e substituindo x e y na equação da circunferência, obteremos $(x' + 3)^2 + (y' + 4)^2 - 6(x' + 3) - 8(y' + 4) + 21 = 0$. Desenvolvendo-se, então, obtemos $x'^2 + y'^2 = 4$.

Figura 2 - Círculo centrado na origem do sistema $x'O'y'$

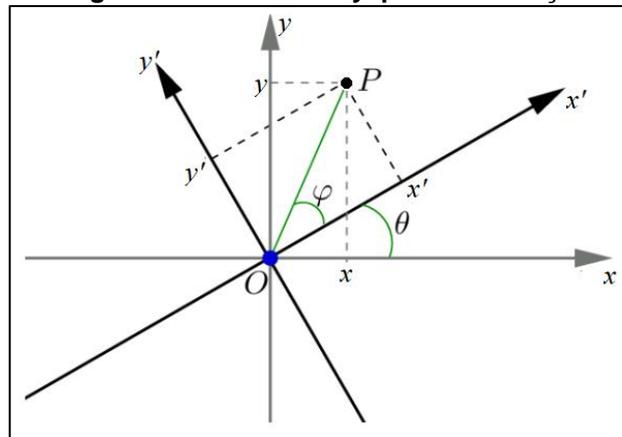


Fonte: Venturi (2003) com adaptações

A equação da circunferência $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 21 = 0$ transforma-se na equação $x'^2 + y'^2 = 4$ mediante uma translação de eixos, sendo a O' , nova origem do sistema, o seu centro e raio igual a 2.

Considere agora xOy um sistema de eixos ortogonais e seja $x'O'y'$ o sistema de eixos obtido girando os eixos Ox e Oy de um ângulo θ , $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, no sentido positivo.

Figura 3 - Sistema $x'O'y'$ por uma rotação.



Fonte: Próprio Autor

Sejam (x, y) e (x', y') as coordenadas de um ponto P nos sistemas xOy e $x'O'y'$, respectivamente, φ o ângulo que o segmento OP faz com o semieixo positivo

Ox' e $r = OP$. Temos então $\begin{cases} x' = r \cos \varphi \\ y' = r \sin \varphi \end{cases}$ e $\begin{cases} x = r \cos(\varphi + \theta) \\ y = r \sin(\varphi + \theta) \end{cases}$.

Logo, $\begin{cases} x = r \cos \theta \cos \varphi - r \sin \theta \sin \varphi \\ y = r \sin \theta \cos \varphi + r \cos \theta \sin \varphi \end{cases}$ e, portanto, $\begin{cases} x = x' \cos \theta - y' \sin \theta \\ y = x' \sin \theta + y' \cos \theta \end{cases}$.

Da mesma forma que na translação, um ponto P do plano que tem coordenadas (x, y) em relação ao sistema xOy , terá coordenadas (x', y') em relação ao sistema $x'O'y'$ pelas fórmulas de rotação obtidas acima.

A equação $5x^2 + 6xy + 5y^2 - 8 = 0$ representa uma elipse no sistema xOy . Dado o modelo de equação, o eixo principal dessa elipse não é paralelo algum dos eixos do sistema de coordenadas referido. Vamos obter a equação da mesma elipse uma vez efetuada a rotação de eixos de amplitude $\theta = 45^\circ$.

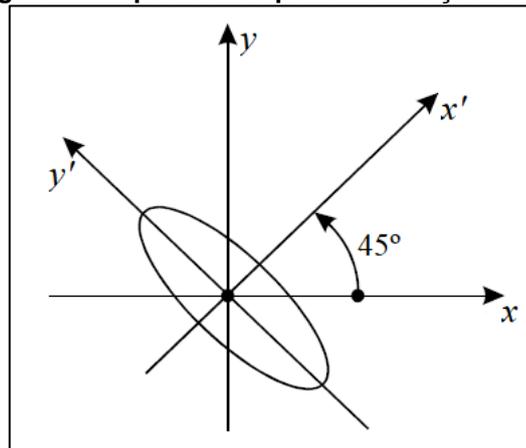
Usando as fórmulas para rotação de eixos determinadas acima, obtemos $x = x' \cos 45^\circ - y' \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y')$ e $y = x' \sin 45^\circ + y' \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y')$.

Substituindo x e y na equação da elipse dada, obteremos

$$5 \left[\frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y') \right]^2 + 6 \left[\frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y') \right] \left[\frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y') \right] + 5 \left[\frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y') \right]^2 = 0$$

Desenvolvendo e simplificando, a equação acima reduz-se a $4x'^2 + y'^2 = 4$ mediante a uma rotação de 45° . Escrevendo essa equação na forma reduzida da elipse, obtemos $\frac{x'^2}{1} + \frac{y'^2}{2^2} = 1$. Essa equação, considerando o novo sistema de coordenadas, é bem mais fácil de representar graficamente, como é mostrado na ilustração abaixo.

Figura 4 - Elipse obtida por uma rotação de 45°



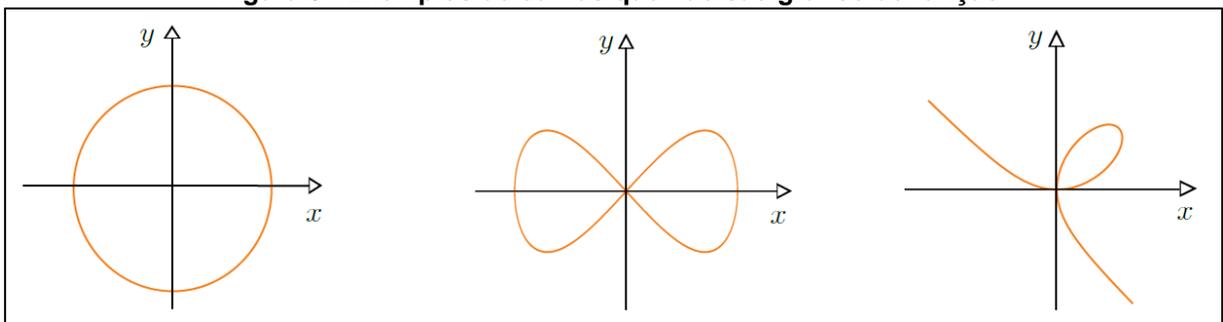
Fonte: Ventura (2003)

2 CURVAS PARAMETRIZADAS

Intuitivamente, gostaríamos de pensar em uma curva no plano como um subconjunto que tenha “dimensão igual a 1”. De forma um pouco mais precisa, uma curva é uma deformação contínua de um intervalo ou, ainda, a trajetória de um deslocamento de uma partícula no plano, sendo essa abordagem que associaremos ao conceito de curva. Nesse sentido, podemos citar como exemplo de curva o gráfico de uma função real $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Entretanto, é conveniente notar que nem sempre uma curva será o gráfico de uma função.

Abaixo citaremos alguns exemplos de curvas planas que não são gráficos de funções.

Figura 5 - Exemplos de curvas que não são gráfico de função



Fonte: Alencar (2020)

Pelos exemplos acima, podemos constatar que uma curva plana não necessariamente é o gráfico de uma função $y = f(x)$ ou $x = f(y)$. De fato, existem retas verticais que intersectam essas curvas em mais de um ponto. Logo, é impossível descrever essas curvas por meio de uma equação do tipo $y = f(x)$. Também podemos observar que, para essas curvas, existem retas horizontais que as intersectam em mais de um ponto. Logo, também é impossível descrevê-las por meio de uma equação do tipo $x = f(y)$.

Porém, se pensarmos na construção dessas curvas como o deslocamento de um ponto, podemos tentar expressar as coordenadas x e y em função do tempo de deslocamento. Assim, o ponto pode ter sua posição determinada em cada instante de tempo t por duas funções da forma $x = f(t)$ e $y = g(t)$, chamadas funções coordenadas. Cada valor de t determina um ponto (x, y) que podemos marcar em um plano coordenado. À medida em que t varia, o ponto $(x, y) = (f(t), g(t))$ também varia e traça a curva.

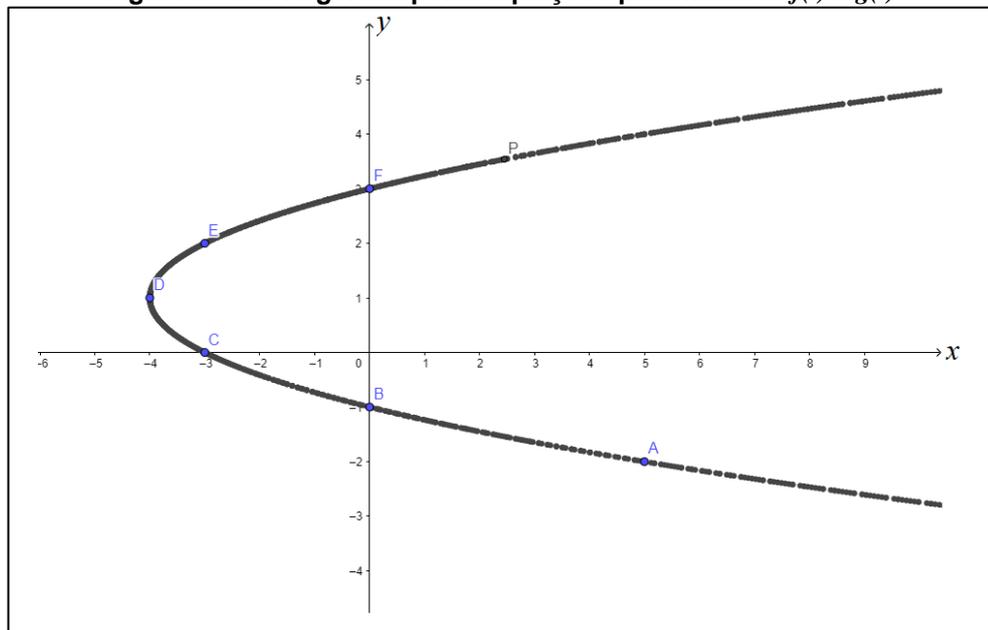
Tracemos, como exemplo, a curva determinada pelo deslocamento do ponto $(x, y) = (f(t), g(t))$ com $f(t) = t^2 - 4t$ e $g(t) = t - 1$, $t \in \mathbb{R}$.

Tabela 1 - Tabela com os pontos gerados pelas equações paramétrica $f(t)$ e $g(t)$

t	-1	0	1	2	3	4
x	5	0	-3	-4	-3	0
y	-2	-1	0	1	2	3
(x, y)	$A(5, -2)$	$B(0, -1)$	$C(-3, 0)$	$D(-4, 1)$	$E(-3, 2)$	$F(0, 3)$

Fonte: Próprio autor

Figura 6 - Curva gerada pelas equações paramétricas $f(t)$ e $g(t)$



Fonte: Próprio autor usando Geogebra

As equações $x = f(t)$ e $y = g(t)$, que determinam, em cada instante de tempo t , a posição do ponto P ao se deslocar sobre a curva são chamadas equações paramétricas e determinam uma *parametrização da curva*. A variável t é chamada *parâmetro*.

Não necessariamente o parâmetro t indicará tempo. Isso dependerá das restrições que são definidas para a construção da curva. Em geral, t percorrerá todo o conjunto \mathbb{R} dos números reais ou simplesmente um intervalo $I \subset \mathbb{R}$. O subconjunto de \mathbb{R}^2 dos pontos $(x, y) = (f(t), g(t))$, $t \in I$ é chamado o *traço da curva*.

É importante salientar que cada curva tem infinitas parametrizações. Portanto, quando definimos as equações paramétricas que geram uma curva, temos apenas uma parametrização para aquela curva.

Uma curva parametrizada em \mathbb{R}^n é uma função $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida num intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Escrevendo $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t), \dots, \alpha_n(t))$, com $I \subset \mathbb{R}$, cada uma das funções $\alpha_i(t): I \rightarrow \mathbb{R}$ são chamadas *funções coordenadas* de $\alpha(t)$. Nesse texto abordaremos apenas o caso em que $n = 2$, ou seja, *curvas parametrizadas planas*.

Uma *curva contínua* no plano \mathbb{R}^2 é uma aplicação contínua $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida num intervalo $I \subset \mathbb{R}$. A aplicação α , dada por $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, é contínua, se cada *função coordenada* $x, y: I \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua.

Seja $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. O *gráfico* da função f é o conjunto dado por $G = \{(x, y) \in I \times \mathbb{R}; y = f(x)\}$. Note que G pode ser, naturalmente, parametrizado pela curva contínua $\alpha(t): I \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por $\alpha(t) = (t, f(t))$. Assim, podemos dizer que gráficos de funções são casos particulares de curvas planas.

Uma curva plana parametrizada $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ é dita *periódica* se existe um número real $\ell > 0$ tal que $\alpha(t + \ell) = \alpha(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. O menor valor ℓ_0 para o qual temos $\alpha(t + \ell_0) = \alpha(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ é chamado de *período* de $\alpha(t)$. É claro que a curva periódica $\alpha(t)$ fica completamente determinada se restringirmos o domínio a um intervalo da forma $[t_0 + \ell_0, t_0]$.

Se a curva parametrizada $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ está definida em um intervalo fechado $I = [a, b]$, os pontos $\alpha(a)$ e $\alpha(b)$ são chamados de ponto inicial e ponto final de $\alpha(t)$, respectivamente. Se a aplicação $\alpha(t)$ está definida no intervalo $I = [a, b]$, tal que $\alpha(a) = \alpha(b)$, dizemos que $\alpha(t)$ é uma *curva fechada*.

Uma curva parametrizada $I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ é dita *simples* se a aplicação $\alpha(t)$ restrita ao intervalo aberto $I =]a, b[$, for injetiva. Dessa forma, a curva não tem auto-interseções. Uma curva $\alpha(t)$ fechada e simples é denominada *Curva de Jordan*.

Quando temos que $\alpha(t_1) = \alpha(t_2)$, com $t_1, t_2 \in I$ e $t_1 \neq t_2$, dizemos que $\alpha(t)$ possui um ponto duplo (ou múltiplo) em t_1 e t_2 .

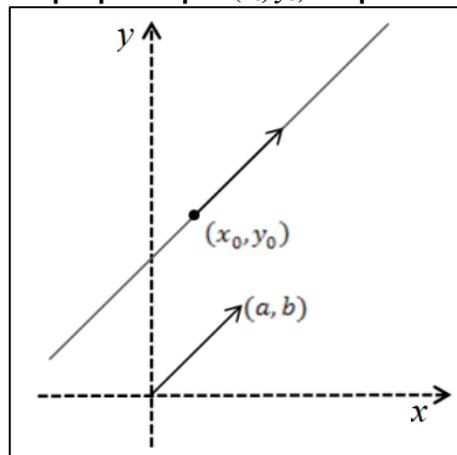
No restante do capítulo trataremos de propriedades locais de uma curva $\alpha(t): I \rightarrow \mathbb{R}^2$ no plano, isto é, fixado $t_0 \in I$, estudaremos como a curva $\alpha(t)$ se comporta para valores de t próximos de t_0 .

2.1 Tangente e Curvas Regulares

Uma curva plana parametrizada diferenciável é uma aplicação diferenciável $\alpha(t): I \rightarrow \mathbb{R}^2$ de um intervalo aberto $I = (a, b)$ da reta real \mathbb{R} em \mathbb{R}^2 . A palavra diferenciável nessa definição significa que $\alpha(t)$ é uma correspondência que leva cada $t \in I$ em um ponto $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, de tal modo que as funções reais $x(t)$ e $y(t)$ são diferenciáveis. Denotaremos nessa seção por $x'(t)$ a derivada de primeira ordem de $x(t)$ em um ponto t , e utilizamos notações análogas para a função $y(t)$.

Vejamos como exemplo a aplicação $\alpha(t) = (x_0 + at, y_0 + bt)$, com $t \in \mathbb{R}$ onde $a^2 + b^2 \neq 0$, é uma curva plana parametrizada diferenciável, pois as funções coordenadas são afins e, portanto, diferenciáveis. O traço dessa aplicação é uma linha reta que passa pelo ponto (x_0, y_0) , paralela ao vetor de coordenada (a, b) .

Figura 7 - Reta que passa por (x_0, y_0) e é paralela ao vetor (a, b)



Fonte: Próprio autor

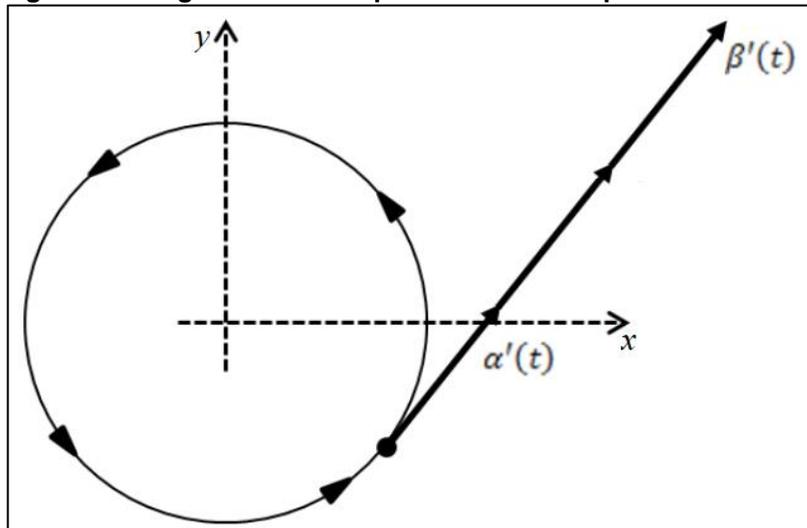
A aplicação $\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$, com $t \in \mathbb{R}$, também é uma curva plana parametrizada diferenciável, pois suas funções coordenadas são diferenciáveis. No capítulo seguinte relacionaremos o traço dessa aplicação a uma circunferência de centro na origem e raio igual a 1.

Vale ressaltar que duas curvas parametrizadas podem ter o mesmo traço. Por exemplo, o traço da aplicação dada por $\beta(t) = (\cos 3t, \sin 3t)$, com $t \in \mathbb{R}$, como veremos no capítulo seguinte, também é uma circunferência centrada na origem e raio igual a 1. O que diferencia é a velocidade em que o ponto $P = \beta(t)$ percorre ao traço à medida que t percorre um intervalo $I \subset \mathbb{R}$.

Seja $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada diferenciável, que a cada $t \in \mathbb{R}$ associa $\alpha(t) = (x(t), y(t))$. O vetor $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t))$ é chamado *vetor tangente* (ou *vetor velocidade*) a α em t .

As duas curvas parametrizadas distintas citadas $\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$, e $\beta(t) = (\cos 3t, \sin 3t)$, onde $t \in (0 - \varepsilon, 0 + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ possuem o mesmo traço, o círculo de raio 1 e centrado na origem. Porém, o vetor tangente da segunda curva é o triplo da primeira. Isso indica que, considerando o traço da curva como a trajetória de um ponto, com a parametrização $\beta(t)$, esse ponto percorre a curva com o triplo da velocidade que com a parametrização $\alpha(t)$.

Figura 8 - Tangente da curva percorrida com triplo da velocidade



Fonte: Próprio autor

Uma curva parametrizada diferenciável $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é dita *regular* se $\forall t \in I$, $\alpha'(t) \neq 0$. Essas curvas têm uma particularidade importante: é possível definir para todo $t \in I$ uma reta passando por $\alpha(t)$ e com vetor diretor $\alpha'(t)$. Essa reta será tangente à curva $\alpha(t)$ para cada valor do parâmetro t . Intuitivamente o traço de uma curva regular é suave, sem bicos, exceto por possíveis pontos de auto-interseção. Localmente, porém, α não tem auto-interseções.

No estudo de curvas diferenciáveis, é comum restringir-se a curvas regulares, ou seja, $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ tais que $\alpha'(t) \neq 0 \forall t \in I$. Porém é possível termos curvas planas $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ tais que $\alpha'(t) = 0$ para algum $t \in I$ e mesmo assim essa curva não apresentar bicos ou auto-interseções. Tomemos como exemplo a curva plana parametrizada dada por $\alpha(t) = (\cos(t^2), \sin(t^2))$, $t \in \mathbb{R}$. É fácil ver que o traço

de $\alpha(t)$ são circunferências centradas na origem, logo não possui bicos. Mas $\alpha'(t) = (-2t.\text{sen}(t^2), 2t.\text{cos}(t^2))$ e, portanto, $\alpha'(0) = (0,0)$. Assim, temos uma curva com traço regular (sem bicos ou auto-intercessões) com o vetor tangente sendo nulo em algum ponto.

2.2 Comprimento de Arco

Um dos primeiros problemas que se colocam no estudo de uma curva regular $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é como definir o seu comprimento. Para encontrar tal fórmula, notemos que se Δt é muito pequeno, a parte do traço de α entre t e $t + \Delta t$ é praticamente um segmento de reta, assim, o seu comprimento nesse trecho é dado aproximadamente por $\|\alpha(t + \Delta t) - \alpha(t)\|$. Novamente porque Δt é pequeno, temos que $\frac{\alpha(t+\Delta t) - \alpha(t)}{\Delta t}$ é aproximadamente igual a $\alpha'(t)$, e assim esse comprimento é aproximadamente $\|\alpha'(t)\|$. Notemos que do ponto de vista vetorial, observando $\alpha(t)$ como um vetor de \mathbb{R}^2 , $\|\alpha'(t)\| = \sqrt{\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle}$ pelo produto interno usual de \mathbb{R}^2 .

Se queremos calcular o comprimento de uma parte do traço de α (não necessariamente pequena), podemos dividi-la em segmentos, cada um dos quais correspondendo a um pequeno incremento Δt em t , calcular o comprimento de cada segmento usando a expressão $\|\alpha'(t)\|dt$ e adicionar tudo. Considerando Δt a tender para zero, deveremos então obter o valor exato do comprimento. Dizemos então que a *função comprimento de arco* de uma curva α a partir do ponto $\alpha(t_0)$ é a função s definida por $s(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(t)\|dt$.

Dizemos que uma curva $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ está *parametrizada pelo comprimento de arco* se $\|\alpha'(t)\| = 1$ para qualquer $t \in I$. Vejamos um exemplo.

Retomemos a aplicação $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\alpha(t) = (\text{cost}, \text{sent})$ citada anteriormente como parametrização do círculo de raio 1 centrado na origem. Assim, $\alpha'(t) = (-\text{sent}, \text{cost})$ e $\|\alpha'(t)\| = \sqrt{(-\text{sent})^2 + (\text{cost})^2} = 1$. Portanto, essa curva está parametrizada pelo comprimento de arco. Se tomarmos um círculo de raio a , essa curva será parametrizada pela aplicação dada por $\alpha(t) = (a\text{cost}, a\text{sent})$. Dessa forma, $\|\alpha'(t)\| = \sqrt{(-a\text{sent})^2 + (a\text{cost})^2} = \|\alpha'(t)\| = \sqrt{a^2(\text{sen}^2 t + \text{cos}^2 t)} = a$.

Se considerarmos essa mesma curva parametrizada pela aplicação dada por $\beta(t) = (a\text{cos}\frac{t}{a}, a\text{sen}\frac{t}{a})$, teremos então:

$$\|\beta'(t)\| = \sqrt{\left(\frac{1}{a}\left(-a\operatorname{sen}\frac{t}{a}\right)\right)^2 + \left(\frac{1}{a}\left(a\operatorname{cos}\frac{t}{a}\right)\right)^2} = \sqrt{\operatorname{sen}^2\left(\frac{t}{a}\right) + \operatorname{cos}^2\left(\frac{t}{a}\right)} = 1.$$

Assim, teremos essa curva parametrizada pelo comprimento de arco.

Muitas fórmulas e resultados sobre curvas tomam uma forma mais simples quando a curva está parametrizada por comprimento de arco. Para curvas com essa propriedade por definição temos $\|\alpha'(t)\|^2 = 1$ e pelo produto interno usual do \mathbb{R}^2 temos que $\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle = 1$. Derivando essa igualdade e pela derivada do produto, mostramos que $\langle \alpha'(t), \alpha''(t) \rangle = 0$, ou seja, $\alpha'(t)$ e $\alpha''(t)$ são vetores perpendiculares em \mathbb{R}^2 para qualquer $t \in I$.

Chama-se *mudança de parâmetro* a uma bijeção $\lambda: J \rightarrow I$ entre intervalos de \mathbb{R} , que é diferenciável bem como a sua inversa λ^{-1} . Seja $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva. Chamamos de *reparametrização* de α a composição $\alpha \circ \lambda$ de α com uma mudança de parâmetro λ .

É natural esperar que mesmo aplicando uma mudança de parâmetro, o comprimento de arco seja mantido. De fato, isso ocorre. Vejamos.

Seja λ a mudança de parâmetro tal que $\beta = \alpha \circ \lambda$. O comprimento de arco, $c(\beta)$, de β no intervalo $[c, d]$ é igual a $c(\beta) = \int_c^d \|\beta'(t)\| dt$. Dessa forma, temos que $c(\beta) = \int_c^d \|\alpha'(\lambda(t))\lambda'(t)\| dt = \int_c^d \|\alpha'(\lambda(t))\| \cdot |\lambda'(t)| dt$. Se $\lambda'(t) > 0$ para qualquer t , teremos $c(\beta) = \int_c^d \|\alpha'(\lambda(t))\| \cdot \lambda'(t) dt$. Fazendo uma mudança de variáveis $u = \lambda(t)$, mostramos finalmente que $c(\beta) = \int_a^b \|\alpha'(u)\| du = c(\alpha)$. No caso de termos $\lambda'(t) < 0$ para todo t , teremos $c(\beta) = -\int_c^d \|\alpha'(\lambda(t))\| \lambda'(t) dt = \int_b^a \|\alpha'(u)\| du = c(\alpha)$. Ou seja, o comprimento de arco é invariante por reparametrizações.

O estudo de uma curva simplifica-se quando ela é parametrizada por comprimento de arco. Será, portanto, importante conhecer quais curvas admitem reparametrizações por comprimento de arco. Uma curva pode ser reparametrizada pelo comprimento de arco se, e somente se, for uma curva regular. (do Carmo, 2010).

2.3 Curvatura, Torção e as Equações de Frenet

Dado um ponto $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ sobre uma curva plana diferenciável $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$, vimos que o vetor $T(t) = \alpha'(t) = (x'(t), y'(t))$ é o vetor tangente à curva

em t . Se a curva α for parametrizada pelo comprimento de arco, o vetor $T(t)$ será unitário e assim, temos que o vetor $T'(t) = \alpha''(t)$ é perpendicular a $T(t)$. Para o restante dessa seção, consideraremos apenas curvas parametrizadas pelo comprimento de arco.

Considere agora o vetor dado por $N(t) = (-y'(t), x'(t))$. Note que dessa forma, teremos também que $N(t)$ é unitário e $\langle T(t), N(t) \rangle = 0$, ou seja é perpendicular à $T(t)$. Logo, é paralelo à $T'(t)$. Isso significa que existe uma função $k: I \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $T'(t) = k(t)N(t)$, $t \in I$. A função k é chamada a *curvatura* de α em $t \in I$. Observe que $\langle T'(t), N(t) \rangle = \langle k(t)N(t), N(t) \rangle = k(t)\langle N(t), N(t) \rangle$ e assim, como $N(t)$ é unitário, a curvatura é dada por $k(t) = \langle T'(t), N(t) \rangle$. Observe ainda que derivando a relação $\langle T(t), N(t) \rangle = 0$, obtemos $\langle T'(t), N(t) \rangle + \langle T(t), N'(t) \rangle = 0$. Substituindo a relação obtida acima, temos que $k(t) = -\langle N'(t), T(t) \rangle$.

Geometricamente, visto que $\|T(t)\| = 1$ e $|k(t)| = \|T'(t)\|$, a função curvatura é uma medida da variação da direção de T e, portanto, da mudança de direção da reta tangente a α em $\alpha(t)$. A curvatura então é uma medida de quanto uma curva deixa de ser uma reta. De fato, a curvatura de uma curva regular α é identicamente nula se, somente se, estiver contida numa reta. Vejamos a demonstração a seguir.

Suponha que $k(t) = 0$. Assim, $\|T'(t)\| = |k(t)| = 0$. Logo $T'(t) = (0,0)$. Como T está definida em um intervalo I , concluímos que $T(t)$ é um vetor constante V_0 . Isso implica que $\alpha(t) = \alpha(t_0) + \int_{t_0}^t T(s)ds = \alpha(t_0) + V_0(t - t_0)$. Portanto o traço de α está contido na reta que passa por $\alpha(t_0)$ e é paralelo ao vetor V_0 .

Reciprocamente, se o traço de α está contido em uma reta e α está parametrizada pelo comprimento de arco, temos que $\alpha(t) = P_0 + tV_0$, $\|V_0\| = 1$. Logo, $T(t) = V_0$, e, portanto, $T'(t) = (0,0)$. Assim concluímos que $k(t) = 0$.

Como o vetor tangente $\alpha'(t)$ é unitário, o módulo $\|\alpha''(t)\|$ da derivada segunda mede a taxa de variação do ângulo que as tangentes vizinhas fazem com a tangente em t . Visto a função $|k(t)| = \|T'(t)\| = \|\alpha''(t)\|$, indicam a velocidade com que as retas tangentes mudam de direção. De fato, fixemos $t_0 \in I$ e consideremos os vetores tangentes $\alpha'(t_0)$ e $\alpha'(t_0 + h)$, onde $t_0 + h \in I$. Seja $\varphi(h)$ o ângulo formado por $\alpha'(t_0)$ e $\alpha'(t_0 + h)$, isto é, $0 \leq \varphi(h) \leq \pi$ tal que $\cos \varphi(h) = \langle \alpha'(t_0), \alpha'(t_0 + h) \rangle$.

Dessa forma, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(h)}{h}$ indica a velocidade com que as retas tangentes mudam de direção. Como para todo h e os vetores tangentes são unitários, temos que $|\alpha'(t_0 + h) - \alpha'(t_0)| = 2\text{sen}\left(\frac{\varphi(h)}{2}\right)$ e concluímos que $|k(t_0)| = \|\alpha''(t_0)\| = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(h)}{h}$.

O conjunto de vetores $T(t)$ e $N(t)$ é chamado *referencial de Frenet da curva* α em t . Vimos então que se $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma curva regular, parametrizada pelo comprimento de arco, então o referencial de Frenet $\{T(t), N(t)\}$ satisfaz as equações

$$\begin{cases} T'(t) = k(t)N(t) \\ N'(t) = -k(t)T(t) \end{cases}$$

Essas são as fórmulas de Frenet de uma curva plana. O plano gerado pelos vetores $T(t)$ e $N(t)$ é denominado *plano osculador* da curva α em t .

Para curvas $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrizadas pelo comprimento de arco definidas em \mathbb{R}^3 tais que $k(t) > 0$, o produto vetorial entre vetores $T(t)$ e $N(t)$ é definido como o *vetor binormal* de uma curva α em t . Seja $B(t) = T(t) \times N(t)$. O referencial ortonormal $T(t), N(t), B(t)$ é o *triedro de Frenet* da curva α em t .

Observe que derivando a expressão $B(t) = T(t) \times N(t)$, teremos que $B'(t) = T'(t) \times N(t) + T(t) \times N'(t) = T(t) \times N'(t)$. Portanto, $B'(t)$ é ortogonal a $T(t)$. Como $\|B(t)\| = 1$, temos que $B'(t)$ é ortogonal a $B(t)$. Logo, concluímos que $B'(t)$ é paralelo a $N(t)$, isto é, $B'(t)$ é igual ao produto de $N(t)$ por um número real. Esse número real $\tau(t)$ definido por $B'(t) = \tau(t)N(t)$ é denominado *torção* da curva α em t .

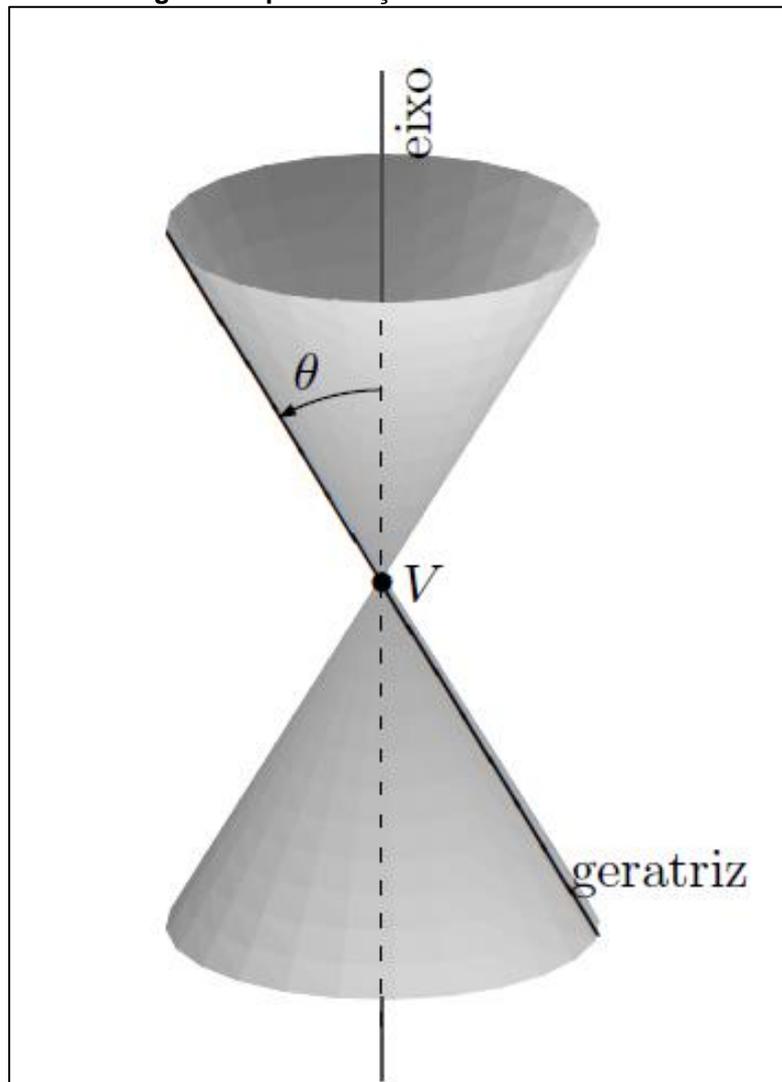
A torção mede o quanto a curva se afasta do plano osculador com a variação do parâmetro t . Porém, para curvas planas, há duas interpretações possíveis. Se temos uma curva plana em \mathbb{R}^3 , essa curva está contida no plano osculador, portanto não se afasta dele para nenhum valor de t , portanto sua torção é nula. Porém se considerarmos curvas contidas no espaço \mathbb{R}^2 , não temos a possibilidade dessas curvas se afastarem do plano osculador da curva, portanto, a torção não está definida nesse caso.

3 PARAMETRIZAÇÃO DAS CÔNICAS

As cônicas são curvas obtidas da intersecção entre um cone circular reto e um plano.

O cone circular pode ser obtido rotacionando uma reta (geratriz) em torno de outra reta (eixo de rotação), sendo que a geratriz e o eixo devem se interseccionar num ponto (vértice do cone).

Figura 9 - Cones gerados pela rotação de uma reta em torno de uma reta



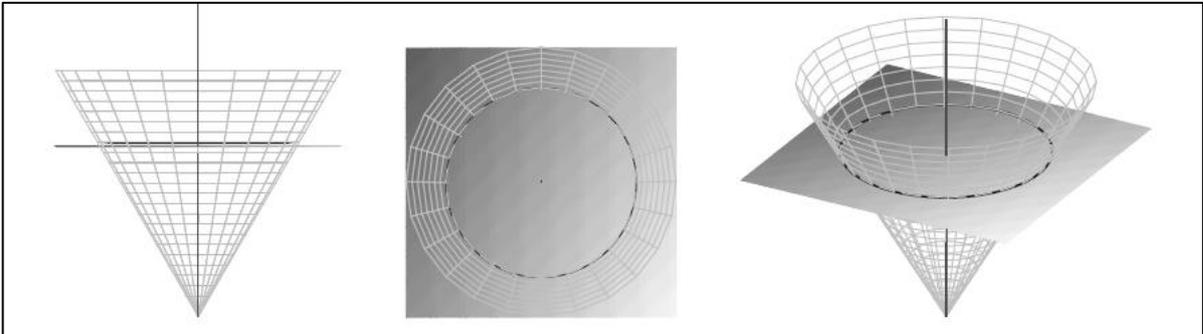
Fonte: http://www.clicmates.com.br/arquivosparadonwloads/quadricas_conicas.pdf

Consideremos um cone circular de vértice V e eixo r , cujas geratrizes formam um ângulo θ com o eixo do cone.

Seja π o plano que secciona o cone circular. Temos os seguintes casos para a intersecção do cone com o plano π :

1. Se o plano π é perpendicular ao eixo do cone, mas não passa pelo vértice V , então a secção é uma circunferência.

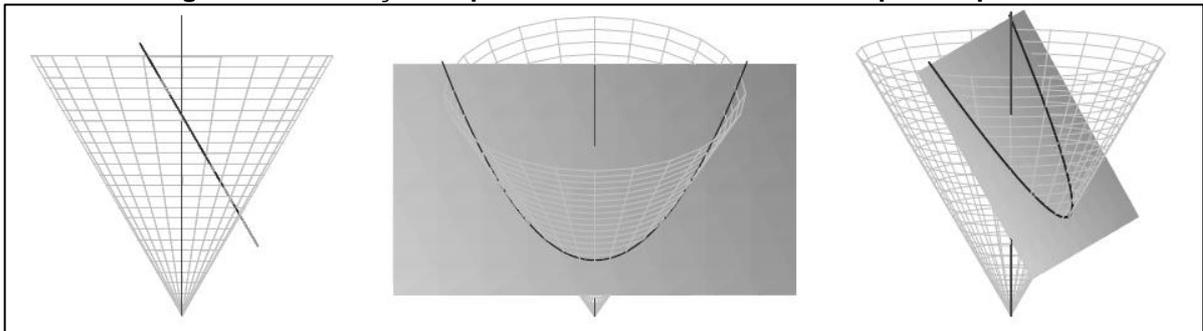
Figura 10 - Obtenção da circunferência seccionando um cone por um plano



Fonte: http://www.clicmates.com.br/arquivosparadonwloads/quadricas_conicas.pdf

2. Se π é um plano paralelo a uma geratriz do cone e não contém o vértice V , então a curva de intersecção é uma parábola.

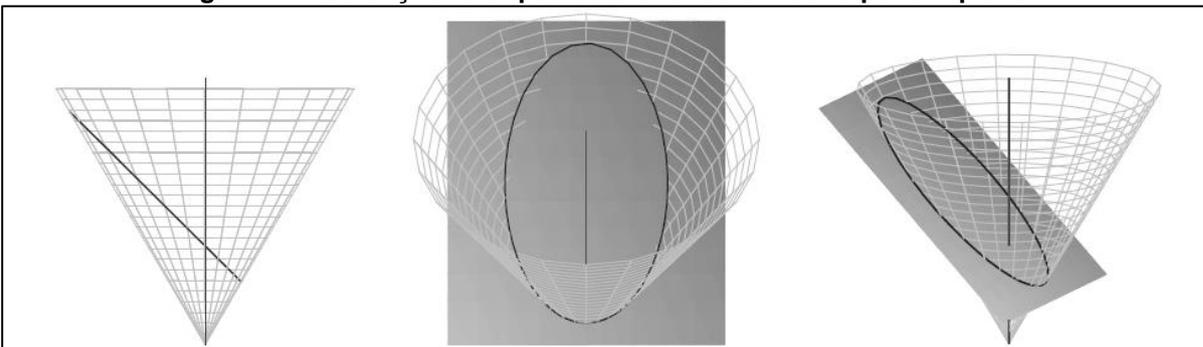
Figura 11 - Obtenção da parábola seccionando um cone por um plano



Fonte: http://www.clicmates.com.br/arquivosparadonwloads/quadricas_conicas.pdf

3. Se o ângulo entre o eixo r e o plano π é maior que o ângulo θ entre o eixo e a geratriz e π não passa pelo vértice, a intersecção é uma elipse. Excepcionalmente, quando o ângulo é reto, a elipse torna-se uma circunferência.

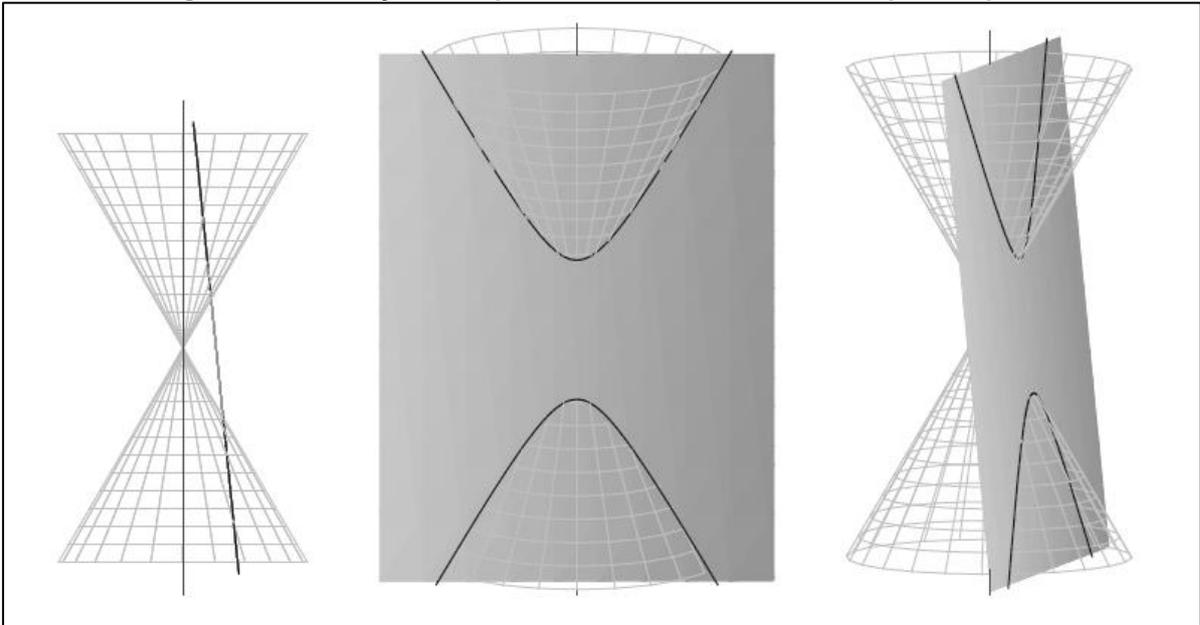
Figura 12 - Obtenção da elipse seccionando um cone por um plano



Fonte: http://www.clicmates.com.br/arquivosparadonwloads/quadricas_conicas.pdf

4. Se o ângulo entre o eixo r e o plano π é menor que o ângulo θ entre o eixo e a geratriz, e π não passa pelo vértice, então a intersecção contém pontos dos dois lados do cone em relação ao vértice e a curva resultante é conhecida como hipérbole.

Figura 13 - Obtenção da hipérbole seccionando um cone por um plano



Fonte: http://www.clicmates.com.br/arquivosparadonwloads/quadricas_conicas.pdf

5. Quando o plano π passa pelo vértice V , e o ângulo entre o plano π e o eixo r é igual a θ , a intersecção resulta em uma reta, que é a geratriz.

6. Quando o plano π passa pelo vértice V , e o ângulo entre o plano π e o eixo r é menor que θ , a intersecção resulta em um par de retas concorrentes.

7. Quando o plano π passa pelo vértice V , e o ângulo entre o plano π e r é maior que θ , a intersecção resulta em um ponto, mais precisamente, o ponto V .

As cônicas obtidas como intersecção do cone por planos passando pelo vértice V são exemplos de cônicas tidas como degeneradas.

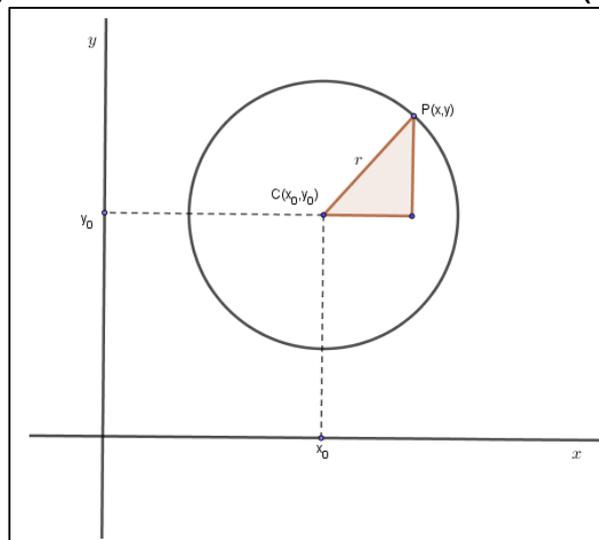
Mesmo sendo obtidas no espaço pelas intercessões de um plano com um duplo cone, podemos afirmar que essas curvas estão contidas num plano, justamente aquele intersecta o duplo cone. Logo, são exemplos de curvas planas. Nas próximas seções, buscaremos parametrizações para estas curvas tomando esse plano como sendo o espaço \mathbb{R}^2 .

3.1 Circunferência

É o lugar geométrico formado pelos pontos equidistantes a um ponto fixo. A esse ponto fixo chamaremos de centro da circunferência e a distância de qualquer ponto dela ao seu centro, chamaremos de raio.

Seja $C(x_0, y_0)$ o centro de uma circunferência de raio r . Considere $P(x, y)$ um ponto qualquer dessa circunferência. Representando essa situação no plano cartesiano, temos a seguinte representação.

Figura 14 - Circunferência de raio r centrada em (x_0, y_0)



Fonte: Próprio autor usando Geogebra.

Do Teorema de Pitágoras, temos que $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$. Obtemos assim a equação cartesiana reduzida dessa circunferência.

Considere agora como θ o ângulo entre a reta que contém o segmento CP (raio) e o a reta $y = y_0$.

Dessa forma, teremos que $\cos\theta = \frac{x-x_0}{r} \Rightarrow x = x_0 + r\cos\theta$ e $\sin\theta = \frac{y-y_0}{r} \Rightarrow y = y_0 + r\sin\theta$.

Portanto, as coordenadas de um ponto $P(x, y)$ de uma circunferência podem ser expressas usando θ como parâmetro. Assim, temos, com as equações paramétricas acima, que $\alpha(\theta) = (x(\theta), y(\theta)) = (x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta)$ é uma parametrização da circunferência.

Note que para obtermos uma parametrização a partir da equação cartesiana, basta obtermos as coordenadas do centro e o raio da circunferência.

Como exemplo, vamos obter uma parametrização da circunferência cuja equação cuja equação cartesiana é $x^2 - 4x + y^2 - 12y - 9 = 0$.

Completando quadrados obtemos $x^2 - 4x + 4 + y^2 - 12y + 36 = 49$. Fatorando e escrevendo na forma reduzida, teremos $(x - 2)^2 + (y - 6)^2 = 7^2$. Assim, vemos que essa circunferência está centrada em $(2,6)$ e tem raio 7.

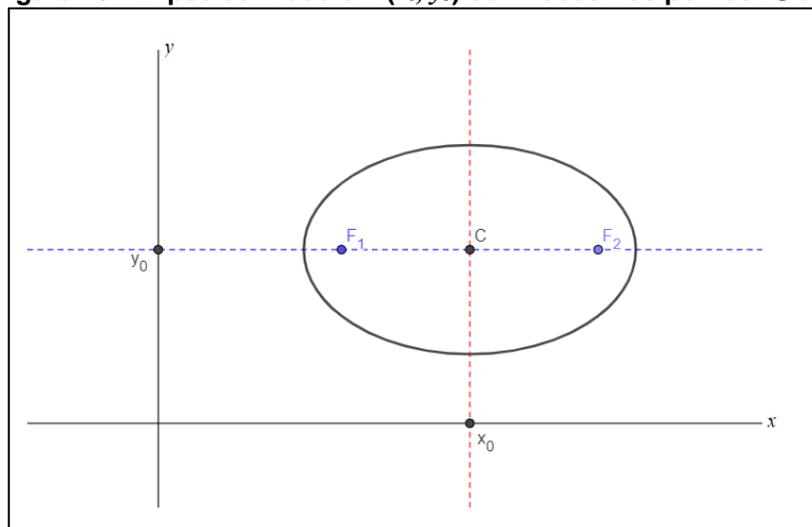
Logo, temos que as equações paramétricas dessa circunferência são dadas por $x(\theta) = 2 + 7\cos\theta$ e $y(\theta) = 6 + 7\sin\theta$.

3.2 Elipse

É o conjunto dos pontos cuja soma das distâncias a dois pontos fixos, chamados focos, é constante e maior que a distância entre os focos. O ponto médio entre os focos é o centro da elipse. À reta que contém os focos chamamos reta focal e à reta perpendicular à reta focal que passa pelo centro da elipse, chamamos de reta secundária.

Consideremos uma elipse com centro em $C(x_0, y_0)$, tendo como reta focal uma reta horizontal $y = y_0$, sendo F_1 e F_2 seus focos e tendo reta secundária $x = x_0$, como representada na figura abaixo.

Figura 15 - Elipse centrada em (x_0, y_0) com focos nos pontos F_1 e F_2



Fonte: Elaborada pelo próprio autor usando Geogebra.

Seja $P(x_p, y_p)$ um ponto da elipse e seja $PF_1 + PF_2 = 2a$. Dessa forma, o eixo maior, isto é, distância entre os pontos $A_1 = (x_0 - a, y_0)$ e $A_2 = (x_0 + a, y_0)$ é

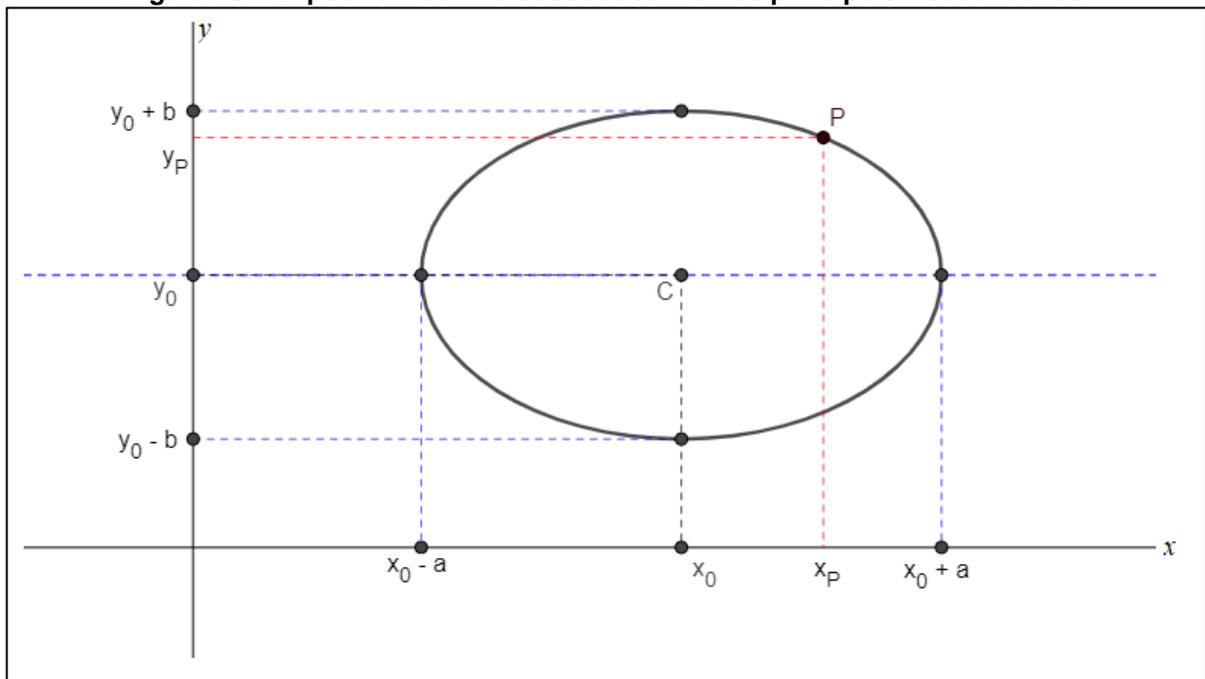
igual a $2a$. Consideremos a distância entre os pontos $B_1 = (x_0, y_0 + b)$ e $B_2 = (x_0, y_0 - b)$, ou seja, o eixo menor da elipse, igual a $2b$.

É importante perceber a distância entre os pontos F_1 e B_1 é igual à metade do eixo horizontal, ou seja, $F_1B_1 = a$. Sendo $F_1C = F_2C = c$ a distância de cada foco ao centro da elipse, é possível perceber uma importante relação pitagórica ao analisar o triângulo A_1CB_1 . Note que ele é um triângulo retângulo. Sendo assim, podemos aplicar o teorema de Pitágoras e obter a relação $a^2 = b^2 + c^2$.

Existe outra possibilidade para a elipse, que é quando o maior eixo é o eixo vertical. Nesse caso, os elementos continuam os mesmos, porém a relação pitagórica obtida é $b^2 = a^2 + c^2$.

Determinaremos agora as coordenadas do ponto $P(x_p, y_p)$ da elipse em função de um parâmetro.

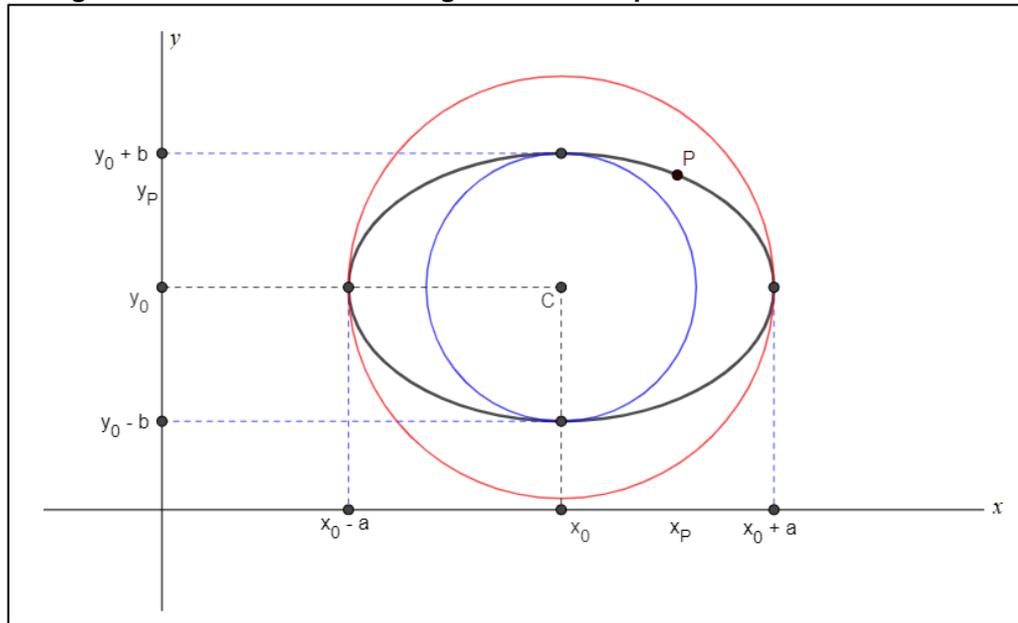
Figura 16 – Elipse com as intercessões com eixos principais e secundários



Fonte: Elaborada pelo próprio autor usando Geogebra.

Consideremos agora duas circunferências também centradas em $C(x_0, y_0)$ e com raios a , que denominaremos C_1 , e b que denominaremos C_2 . Assim, essas circunferências tangenciam a elipse C_1 , nos pontos $(x_0 - a, y_0)$ e $(x_0 + a, y_0)$, e C_2 , nos pontos $(x_0, y_0 - b)$ e $(x_0, y_0 + b)$.

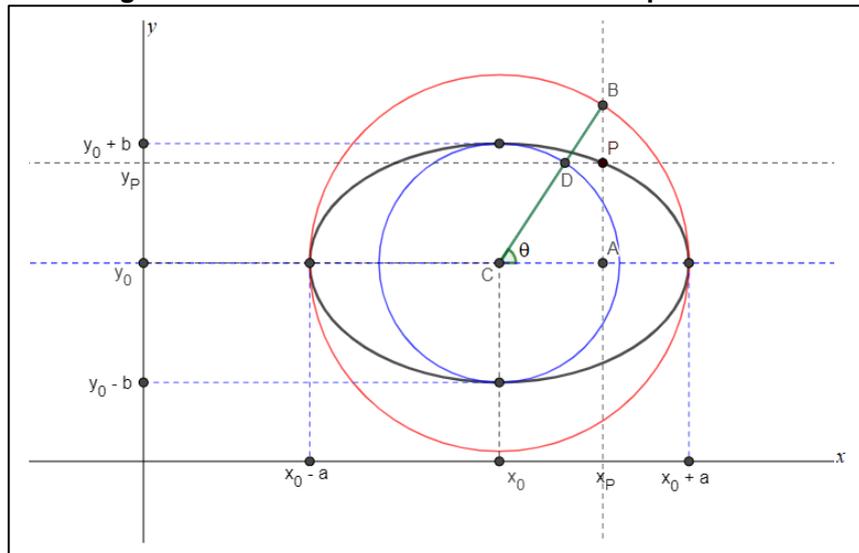
Figura 17 - Circunferências tangenciando a elipse internamente e externamente



Fonte: Elaborada pelo próprio autor usando Geogebra.

Tracemos uma reta vertical passando por P . Sejam A e B as intercessões dessa reta com a reta $y = y_0$ e a circunferência C_1 de modo que P pertença ao segmento AB . Tracemos agora o segmento BC e sejam D o ponto de intercessão entre BC e a circunferência C_2 . Como C_1 e C_2 têm o mesmo centro, da parametrização da circunferência vem que $\theta = \widehat{BCA} = \widehat{BDP}$ e assim o segmento DP está contido na reta $y = y_0$. Determinaremos as coordenadas do ponto P da elipse em função desse parâmetro θ .

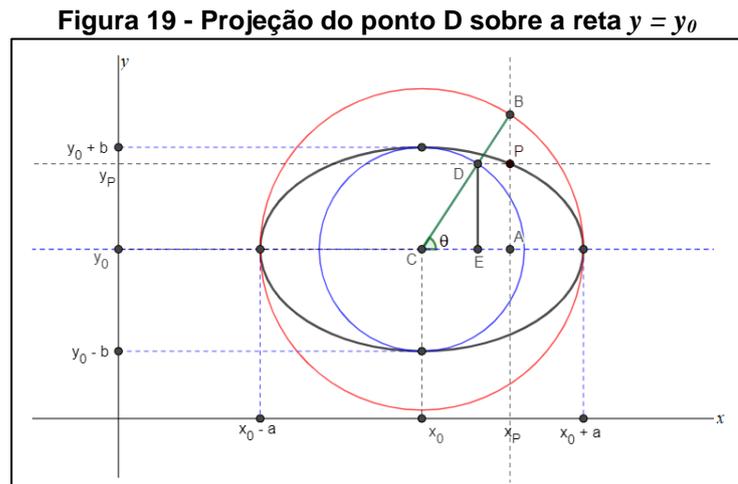
Figura 18 – Segmento BC rotacionando e deslocando o ponto D sobre a elipse



Fonte: Elaborada pelo próprio autor usando Geogebra.

Do triângulo retângulo ABC , temos que $\cos\theta = \frac{AC}{BC} = \frac{x_P - x_0}{a}$. Portanto, temos que $x_P = x_0 + a \cos\theta$.

Agora, seja E a projeção do ponto D sobre a reta $y = y_0$. Podemos ver que $DE = AP = y_P - y_0$ e que o ângulo $C\hat{E}D$ é reto, pois DE está contido em uma reta vertical. Além disso, $CD = b$.



Fonte: Elaborada pelo próprio autor usando Geogebra.

Dessa forma, temos que $\sin\theta = \frac{DE}{CD} = \frac{y_P - y_0}{b}$ e assim, $y_P = y_0 + b \sin\theta$.

Assim, temos as coordenadas do ponto P em função do parâmetro θ e, portanto, uma parametrização para a elipse com centro em $C(x_0, y_0)$ e eixo maior horizontal medindo $2a$ e eixo menor vertical medindo $2b$ dada pelas equações paramétricas obtidas acima.

Assim, teremos que $\alpha(\theta) = (x(\theta), y(\theta)) = (x_0 + a \cos\theta, y_0 + b \sin\theta)$ é uma parametrização para essa elipse.

Analogamente, podemos obter uma parametrização para a elipse cujo eixo maior esteja contido em uma reta vertical. Seguindo passos análogos, obteremos uma parametrização para a elipse com essas características dada por $\alpha(\theta) = (x(\theta), y(\theta)) = (x_0 + b \cos\theta, y_0 + a \sin\theta)$, $\theta \in \mathbb{R}$.

A partir das equações paramétricas da elipse podemos obter a equação cartesiana reduzida da elipse centrada em $C(x_0, y_0)$ com eixo maior horizontal a e eixo menor b pode ser escrita. Para isso, Fazemos $\cos\theta = \frac{x_P - x_0}{a}$ e $\sin\theta = \frac{y_P - y_0}{b}$ nas equações paramétricas e aplicando a relação fundamental da trigonometria, temos

que $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$. Assim, para obtermos uma parametrização para essa elipse, basta utilizar os valores fornecidos na equação reduzida da elipse.

Como exemplo, vamos determinar as equações paramétricas da elipse cuja equação cartesiana é $4x^2 + 9y^2 - 24x + 18y + 9 = 0$.

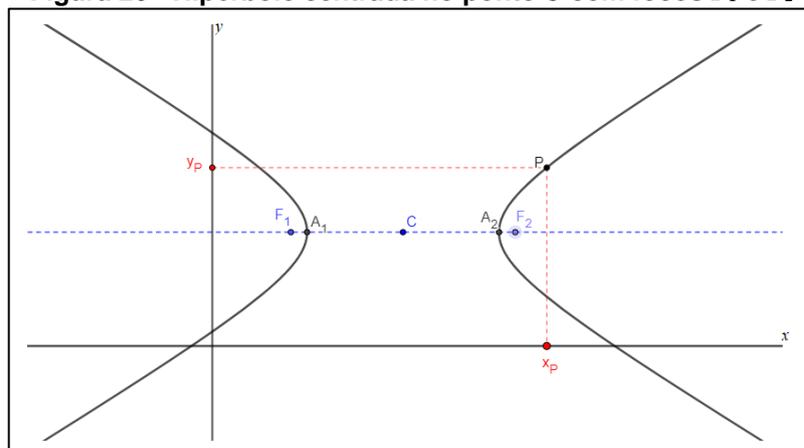
Podemos completar os quadrados da equação acima para obtermos que $4x^2 - 24x + 36 + 9y^2 + 18y + 9 = 36$. Fatorando e simplificando temos a equação reduzida da elipse dada por $\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1$. Vemos então que a elipse dada é centrada em $C(3, -1)$ e tem semieixos dados por $a = 3$ e $b = 2$. Portanto, uma parametrização para essa elipse é dada por $\alpha(\theta) = (3 + 3\cos\theta, -1 + 2\sin\theta)$, $\theta \in \mathbb{R}$.

3.3 Hipérbole

Uma hipérbole é o conjunto dos pontos $P(x, y)$ do plano tais que o módulo da diferença entre as distâncias de P a dois pontos fixos F_1 e F_2 , chamados focos, é constante. Assim, se $F_1F_2 = 2c$, então $|PF_1 - PF_2| = 2a$, em que $a < c$, e $\{a, c\} \subset \mathbb{R}$. Os pontos de intercessão da hipérbole com a reta que passa pelos focos são chamados vértices da hipérbole.

Consideremos uma hipérbole com focos F_1 e F_2 tais que $F_1F_2 = 2c$ e vértices A_1 e A_2 tais que $A_1A_2 = 2a$. Seja $C(x_0, y_0)$ o ponto médio entre os focos.

Figura 20 - Hipérbole centrada no ponto C com focos F_1 e F_2



Fonte: Elaborada pelo próprio autor usando Geogebra.

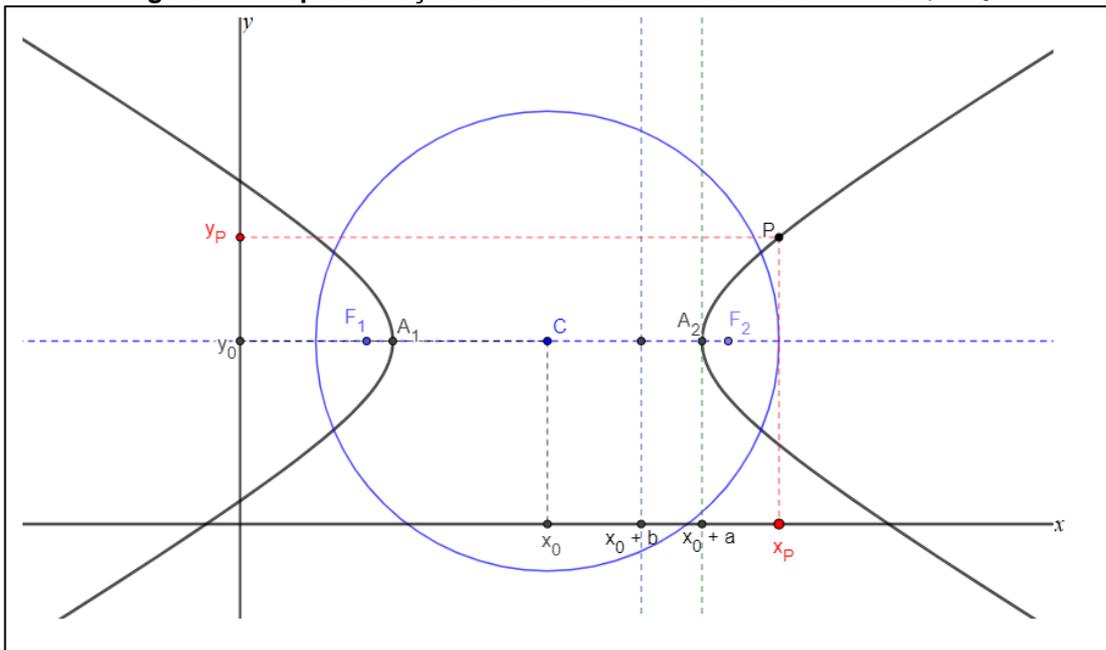
A equação cartesiana dessa hipérbole é dada por $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ com $a > b = \sqrt{c^2 - a^2}$ (Paiva, 2010).

Dividindo essa hipérbole em dois ramos, vamos, inicialmente, determinar uma parametrização para um desses ramos. Especificamente o ramo que está contido na interseção dos semiplanos $x > x_0$ e $y > y_0$. Os passos para conseguir uma parametrização para o restante da hipérbole são análogos.

Consideremos uma reta vertical r_1 passando por A_2 . Pode-se ver que essa reta tem equação $x = x_0 + a$. Considere também a reta também vertical de equação $x = x_0 + b$.

Seja então $P(x_p, y_p)$ um ponto qualquer do ramo de hipérbole citado e consideremos uma circunferência C_1 centrada em $C(x_0, y_0)$ com raio $x_p - x_0$.

Figura 21 - Representação do círculo centrado em C com raio $x_p - x_0$

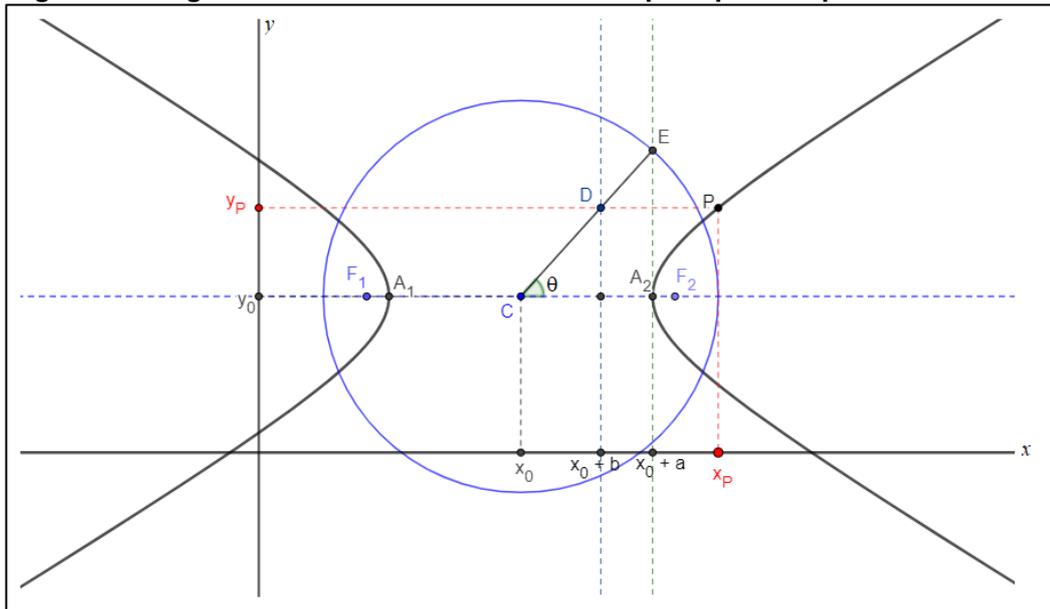


Fonte: Elaborada pelo próprio autor usando Geogebra.

Seja D o ponto de interseção entre as retas $y = y_p$ e $r: x = x_0 + b$. Trace o segmento CD , prolongando até interceptar a reta $r_1: x = x_0 + a$ no ponto E . Note que o ponto E também pertence a C_1 , logo, CE mede $x_p - x_0$, que é o raio de C_1 .

Seja agora θ o ângulo entre CE e a reta $x = x_0$. Vamos expressar as coordenadas do ponto P em função desse parâmetro θ .

Figura 22 - Segmento CE rotacionando à medida que o ponto E percorre o círculo



Fonte: Elaborada pelo próprio autor usando Geogebra.

Note que $\operatorname{tg}\theta = \frac{y_P - y_0}{b}$. Dessa forma, temos que $y_P = y_0 + b\operatorname{tg}\theta$.

Também temos que $\cos\theta = \frac{CA_2}{CE} = \frac{a}{x_P - x_0}$. Assim, temos que $\sec\theta = \frac{x_P - x_0}{a}$ e, portanto, $x_P = x_0 + a\sec\theta$.

Dessa forma, temos uma parametrização para o ramo de hipérbole que estamos considerando dada pelas equações
$$\begin{cases} x(\theta) = x_0 + a\sec\theta \\ y(\theta) = y_0 + b\operatorname{tg}\theta \end{cases}, \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

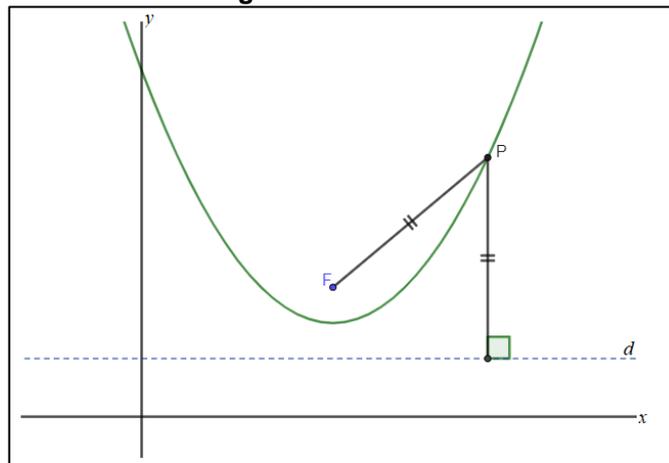
De modo análogo, conseguimos as mesmas equações paramétricas para o restante da hipérbole. Ao final teremos uma parametrização para toda a hipérbole dada por $\alpha(\theta) = (x(\theta), y(\theta)) = (x_0 + a\sec\theta, y_0 + b\operatorname{tg}\theta)$, $\theta \in \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$.

Analogamente, também conseguimos uma parametrização para a hipérbole cuja reta focal é vertical. Nesse caso, obtemos uma parametrização dada por $\alpha(\theta) = (x(\theta), y(\theta)) = (x_0 + b\operatorname{tg}\theta, y_0 + a\sec\theta)$ $\theta \in \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$.

3.4 Parábola

Dados uma reta d e um ponto F de um plano α , com $F \notin d$, chama-se parábola, de diretriz d e foco F , o conjunto dos pontos desse plano equidistantes de d e de F .

Figura 23 - Parábola

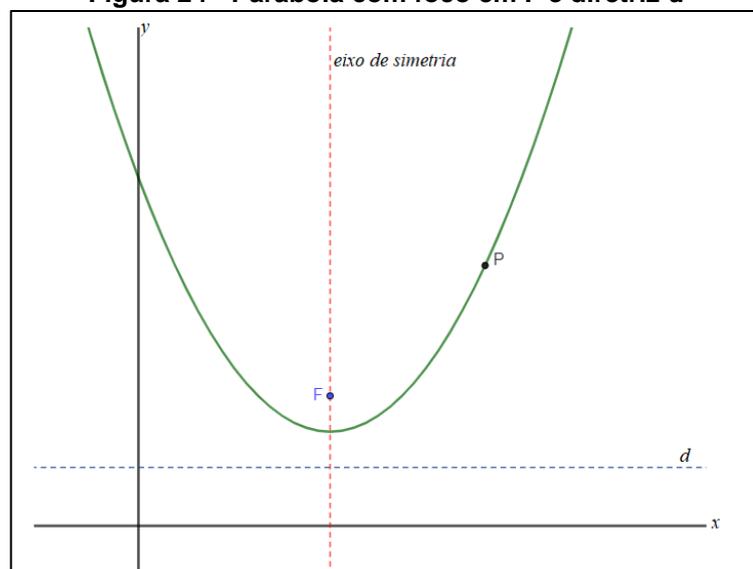


Fonte: Elaborada pelo próprio autor no Geogebra.

A parábola é uma curva côncavo-convexa, isto é, de um lado é côncava e do outro é convexa. Se observada a partir do foco, a parábola é vista como uma curva côncava; e, se observada a partir de um ponto da diretriz, é vista como uma curva convexa.

A reta que passa pelo foco F e é perpendicular à diretriz d é chamada de eixo de simetria da parábola. A parábola é composta de dois ramos simétricos em relação a esse eixo e a intersecção da parábola com seu eixo de simetria é o ponto chamado de vértice da parábola.

Determinaremos, a partir de agora, uma parametrização para uma parábola com eixo de simetria vertical, sem perda de generalidade, pois os outros casos seguem procedimentos análogos, com os devidos ajustes.

Figura 24 - Parábola com foco em F e diretriz d 

Fonte: Próprio Autor usando Geogebra

Seja então p a medida do segmento FV . Note que, por definição, a distância do ponto V à reta diretriz d também é dada por p .

Seja P um ponto qualquer dessa parábola e seja o ponto A a projeção desse ponto sobre a reta d . Dessa forma, sendo $V = (x_0, y_0)$ e $P(x_P, y_P)$ temos que $A = (x_P, y_P - p)$.

Da definição de parábola temos que $PF = PA$, logo

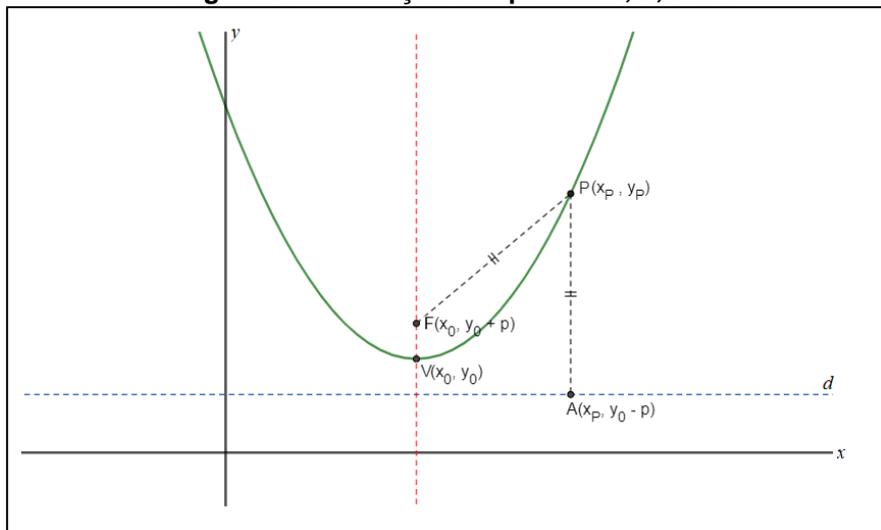
$$(x_P - x_0)^2 + (y_P - y_0 - p)^2 = (y_P - y_0 + p)^2$$

$$\therefore (x_P - x_0)^2 = (y_P - y_0 + p)^2 - (y_P - y_0 - p)^2$$

$$\therefore (x_P - x_0)^2 = 4p(y_P - y_0)$$

$$\therefore y_P - y_0 = \frac{1}{4p}(x_P - x_0)^2$$

Figura 25 - Indicação dos pontos A, F, P e V

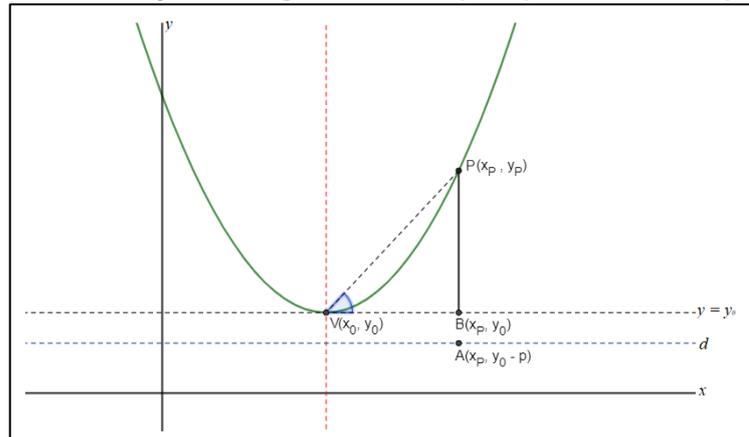


Fonte: Próprio Autor usando Geogebra

A expressão acima é chamada equação reduzida da parábola. Para determinar uma parametrização, basta fixarmos $x_P = t + x_0$, com $t \in \mathbb{R}$. Assim, teremos $y_P = \frac{t^2}{4p} + y_0$ e $\alpha(t) = (x(t), y(t)) = \left(t + x_0, \frac{t^2}{4p} + y_0\right)$ com $t \in \mathbb{R}$, é uma parametrização para a parábola dada.

Uma outra parametrização para a parábola dada pode ser obtida tomando como parâmetro o ângulo θ que o segmento PV forma com a reta $y = y_0$ que passa pelo vértice da parábola.

Figura 26 - Indicação do ângulo $\theta = \text{BVP}$ para parametrizar a parábola



Fonte: Próprio Autor usando Geogebra

Note que o ponto B (projeção do ponto P sobre a reta $y = y_0$) tem coordenadas $B(x_p, y_0)$. Assim, temos que

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\theta &= \frac{PB}{PV} = \frac{y_p - y_0}{x_p - x_0} = \frac{\frac{(x_p - x_0)^2}{4p}}{x_p - x_0} = \frac{x_p - x_0}{4p} \\ &\therefore x_p = 4p \operatorname{tg}\theta + x_0 \end{aligned}$$

$$\text{E assim, } y_p - y_0 = \frac{1}{4p} (x_p - x_0)^2 = \frac{(4p \operatorname{tg}\theta)^2}{4p} \therefore y_p = 4p \operatorname{tg}^2\theta + y_0.$$

Como a parábola está contida no semiplano $y \geq y_0$, logo, devemos ter que $\theta \in [0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ e assim temos uma parametrização em termos do parâmetro θ para a parábola dada por $\alpha(\theta) = (x(\theta), y(\theta)) = (x_0 + 4p \operatorname{tg}\theta, y_0 + 4p \operatorname{tg}^2\theta)$, com $\theta \in [0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$.

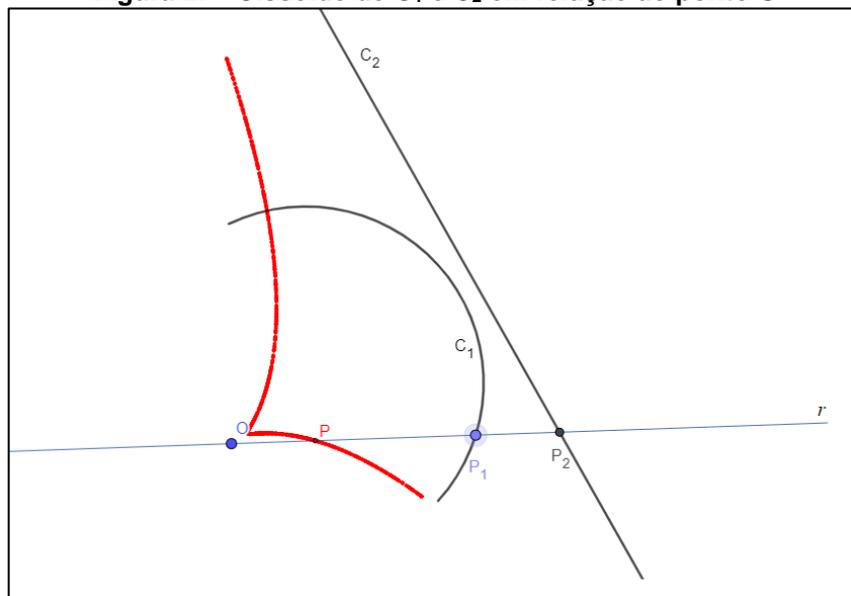
4 PARAMETRIZAÇÃO DE ALGUMAS CURVAS CLÁSSICAS EM \mathbb{R}^2

Apresentaremos nesse capítulo a demonstração dos passos para obtermos uma parametrização de algumas famosas curvas em \mathbb{R}^2 . Algumas dessas curvas, pela forma que estão definidas ou por suas propriedades geométricas, estão relacionadas ao trabalho de alguns matemáticos famosos e são citadas em diversas obras de Geometria Diferencial.

4.1 Cissóide de Diocles

Sejam C_1 e C_2 duas curvas no plano \mathbb{R}^2 e seja $O \in \mathbb{R}^2$ um ponto fixo. Sejam P_1 e P_2 as intersecções de uma reta variável r passando por O com as curvas C_1 e C_2 , respectivamente. Uma cissóide geral de C_1 e C_2 em relação ao pólo O é o lugar geométrico dos pontos $P \in r$, tais que $OP = OP_2 - OP_1 = P_1P_2$.

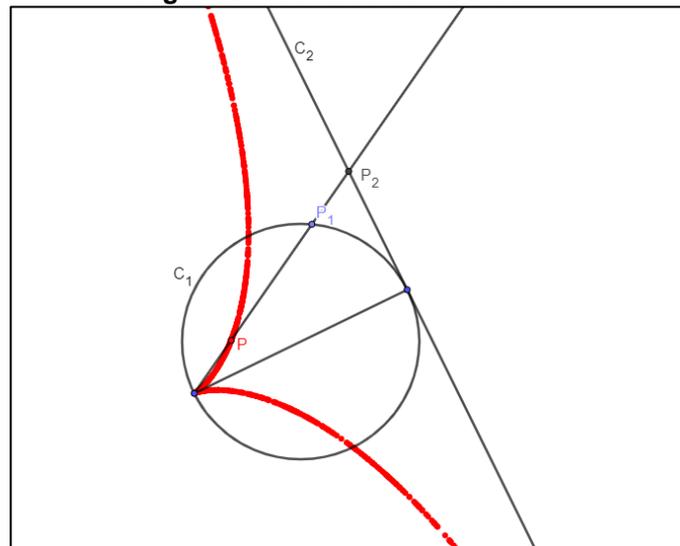
Figura 27 - Cissóide de C_1 e C_2 em relação ao ponto O



Fonte: Próprio Autor usando Geogebra

A Cissóide de Diocles é uma cissóide de uma circunferência C_1 e de uma reta C_2 tangente à circunferência C_1 , com respeito ao polo O pertencente à circunferência e diametralmente oposto ao ponto de tangência.

Figura 28 - A Cissóide de Diocles

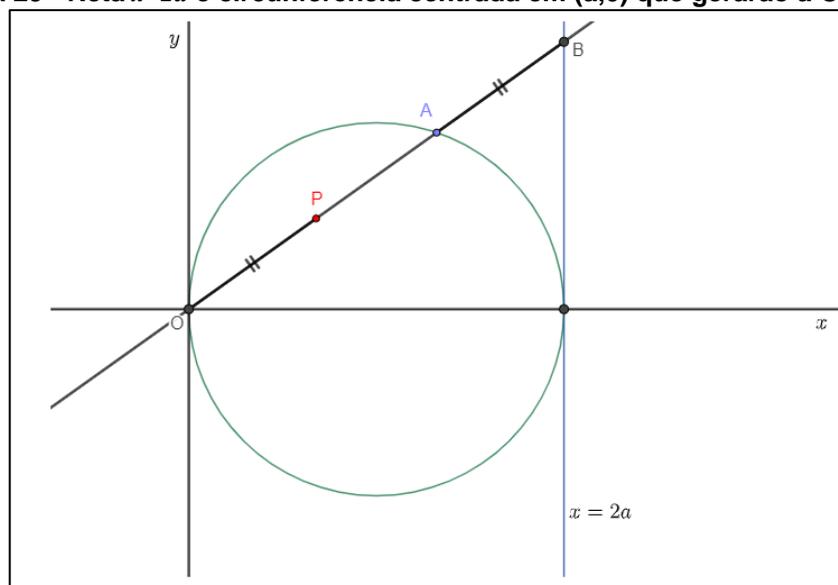


Fonte: Próprio Autor usando Geogebra

Diocles (c. 180 a.C.) inventou a cissóide a fim de resolver o problema da duplicação do cubo. (Eves, 2011). O nome *cissóide* ('forma de hera') é mencionado pela primeira vez por Geminus no séc. I a.C., cerca de um século depois da morte do inventor Diocles. É em comentários à obra de Arquimedes "*Sobre a esfera e o cilindro*" que a cissóide aparece e é atribuída a Diocles. (Lockwood, 1961).

Abordaremos a partir de agora a cissóide de uma circunferência de raio a tangente ao eixo y e centro $(a,0)$ com relação à reta $x = 2a$. Também consideraremos o ponto fixo tratado na definição acima como sendo a origem.

Figura 29 - Reta $x=2a$ e circunferência centrada em $(a,0)$ que gerarão a Cissóide

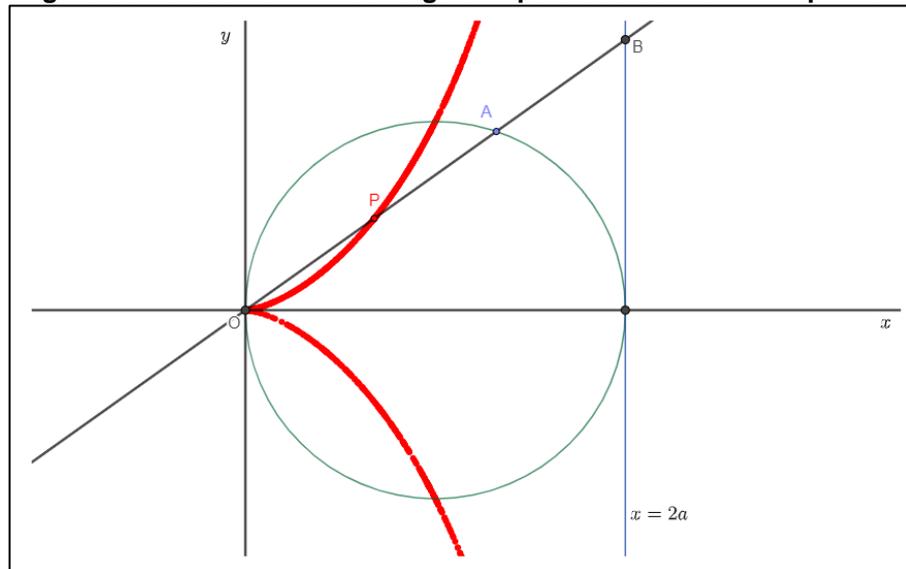


Fonte: Próprio Autor usando Geogebra

Seja então r a reta de equação $x = 2a$ uma reta vertical tangente à circunferência no ponto $C(2a, 0)$. Traçando uma reta passando pela origem interceptando a circunferência em A e a reta r em B . Marque nessa reta o ponto P de modo que $OP = AB$.

Girando essa reta em torno de O , o ponto P descreve uma curva, que é a Cissóide de Diocles.

Figura 30 - Cissóide de Diocles gerada pelo deslocamento do ponto P



Fonte: Próprio Autor usando Geogebra

Usaremos então essa construção geométrica para determinarmos uma parametrização para essa curva.

Ligando os pontos A e C e pela propriedade do triângulo retângulo inscrito numa semicircunferência, temos que o ângulo $O\hat{A}C$ é reto.

Seja θ o ângulo entre a semirreta OP e o eixo Ox , ou seja $P\hat{O}C = \theta$. Então no triângulo OAC , teremos $OA = OC \cdot \cos\theta \Rightarrow OA = 2a \cdot \cos\theta$ e no triângulo OBC , teremos $OB = OC \cdot \sec\theta \Rightarrow OB = 2a \cdot \sec\theta$.

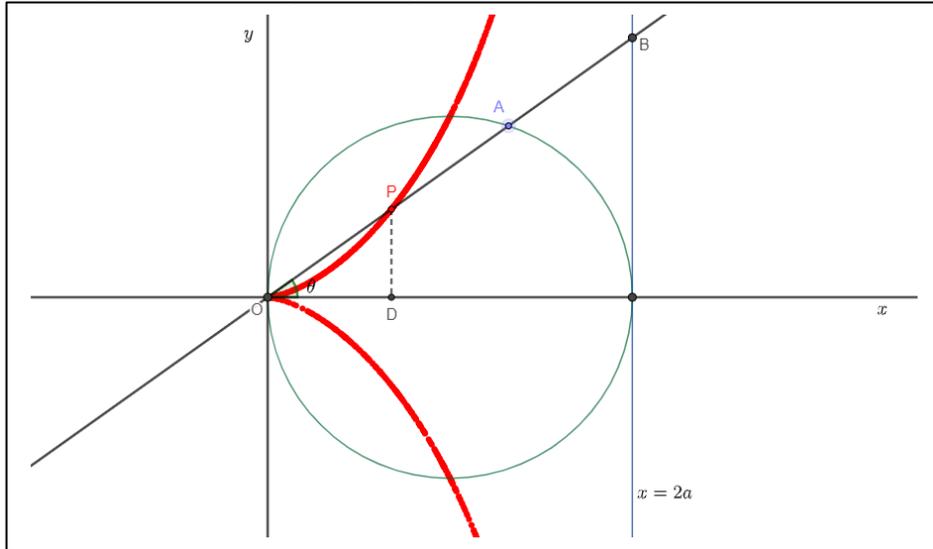
Como $AB = OB - OA$, temos que:

$$\begin{aligned}
 AB &= 2a \cdot \sec\theta - 2a \cdot \cos\theta \\
 \therefore AB &= 2a(\sec\theta - \cos\theta) = 2a \left(\frac{1}{\cos\theta} - \cos\theta \right) \\
 \therefore AB &= 2a \left(\frac{1 - \cos^2\theta}{\cos\theta} \right) = 2a \frac{\text{sen}^2\theta}{\cos\theta} \\
 \therefore AB &= 2a \cdot \text{sen}\theta \cdot \frac{\text{sen}\theta}{\cos\theta} = 2a \cdot \text{sen}\theta \cdot \text{tg}\theta
 \end{aligned}$$

Logo, $OP = 2a \cdot \text{sen}\theta \text{tg}\theta$ pois, como definimos, $OP = AB$.

Consideremos agora o ponto D como sendo a intercessão de uma reta vertical com o eixo das abcissas passando por P .

Figura 31 - Indicação do ângulo θ da parametrização da Cissóide



Fonte: Próprio Autor usando Geogebra

No triângulo OPD , temos:

$$OD = OP \cdot \cos\theta = 2a \cdot \text{sen}\theta \cdot \text{tg}\theta \cdot \cos\theta$$

$$\therefore OD = 2a \cdot \text{sen}\theta \cdot \frac{\text{sen}\theta}{\cos\theta} \cdot \cos\theta = 2a \cdot \text{sen}^2\theta$$

Também temos que $PD = OP \cdot \text{sen}\theta = 2a \cdot \text{sen}\theta \cdot \text{tg}\theta \cdot \text{sen}\theta = 2a \cdot \text{sen}^2\theta \cdot \text{tg}\theta$.

Logo, as coordenadas de um ponto P , pertencente à cissóide, são dadas por $P = (2a \cdot \text{sen}^2\theta, 2a \cdot \text{sen}^2\theta \cdot \text{tg}\theta)$.

Temos então uma parametrização para a Cissóide de Diocles dada por $\alpha(\theta) = (x(\theta), y(\theta)) = (2a \cdot \text{sen}^2\theta, 2a \cdot \text{sen}^2\theta \cdot \text{tg}\theta)$, onde $\theta = P\hat{O}C \in \mathbb{R}$.

Uma outra parametrização para a Cissóide de Diocles pode ser obtida a partir dessa. Considerando o parâmetro $t = \text{tg}\theta$.

$$\text{Assim, } \text{sen}^2\theta = \text{sen}^2\theta \cdot \frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta} = \text{tg}^2\theta \cdot \frac{1}{\sec^2\theta} = \frac{\text{tg}^2\theta}{1+\text{tg}^2\theta} = \frac{t^2}{1+t^2}. \text{ Dessa forma,}$$

teremos a parametrização para a cissóide de Diocles dada por

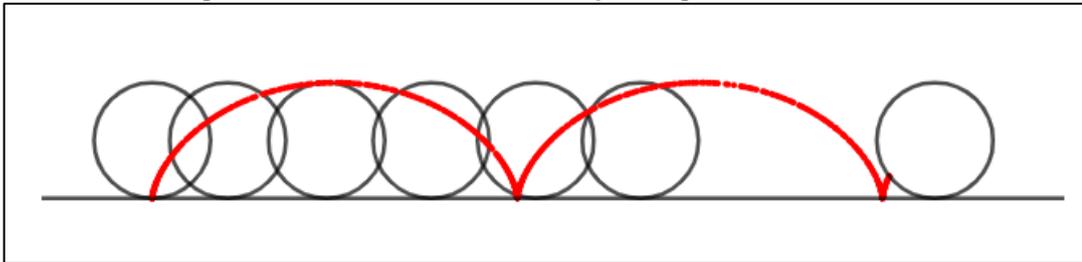
$$\alpha(t) = \left(\frac{2at^2}{1+t^2}, \frac{2at^3}{1+t^2} \right)$$

com $t = \text{tg}\theta \in \mathbb{R}$.

4.2 Ciclóide

A Ciclóide é a curva descrita pela trajetória de um ponto pertencente a uma circunferência à medida que esta gira sem escorregar ao longo de uma reta.

Figura 32 - Deslocamento de um ponto gerando a Ciclóide



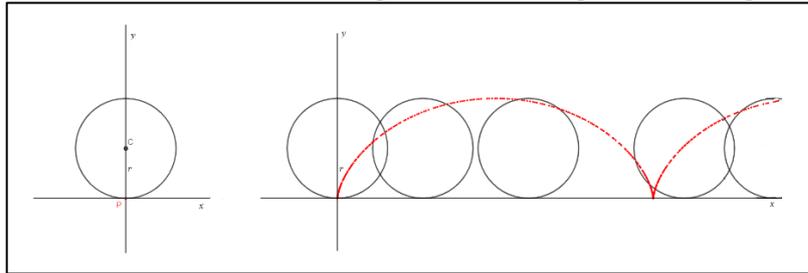
Fonte: Próprio Autor usando Geogebra

Antes da curva ser conhecida propriamente como cicloide, ela começou a ser estudada por Nicholas Cusa (1471 – 1464) e pelo teólogo matemático francês, Charles Bouvalles (1471 – 1553). O estudo de ambos não tratava da Cicloide em si, mas de algo muito similar a ela: a quadratura da circunferência. Em 1564, nasce o italiano Galileu Galilei, cientista, artista, com uma genialidade eminente. Como a história diz, Galileu um dia estava na janela, apenas observando o ambiente, quando começou a reparar no movimento da roda de uma charrete que passava. Interessado em descobrir que curva gerada por esse movimento, Galileu utilizou, primeiramente, chapas metálicas para demonstrá-la. Sem muito sucesso, Galileu sugeriu que a curva poderia formar um belo arco de uma ponte. Ele também concluiu que a área do arco da cicloide é exatamente três vezes a área do círculo que a gera. De fato, ele estava correto, o que foi demonstrado, posteriormente, por Roberval. Portanto, cabe a Galileu o batismo da curva.

Para obtermos uma parametrização para essa curva, consideremos uma circunferência de raio r inicialmente tangente ao eixo das abcissas na origem $O(0,0)$ e centrada no ponto $(0,r)$.

Fazendo essa circunferência girar ao longo do eixo das abcissas sem escorregar e, considerando a cicloide determinada pela trajetória do ponto que se encontrava na origem.

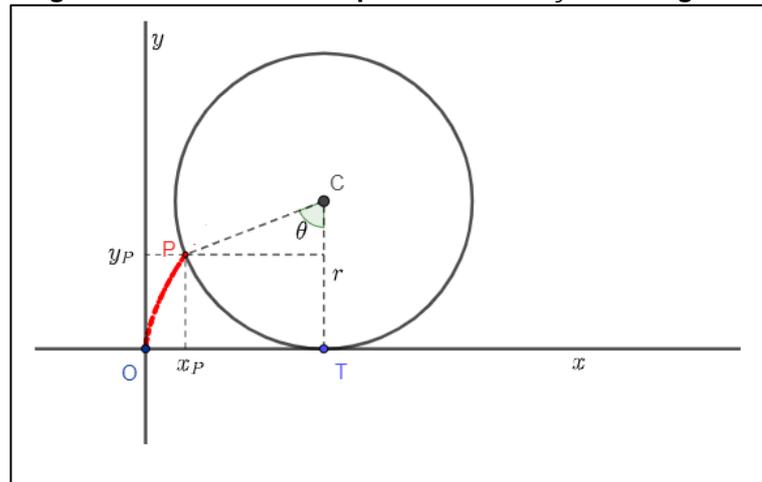
Figura 33 - Cissóide de uma reta tangente ao eixo x girando ao logo do mesmo



Fonte: Próprio Autor usando Geogebra

Seja C o centro da circunferência que estamos rotacionando e T a intercessão de uma reta vertical passando por C com o eixo das abcissas. Consideremos o ponto P um ponto qualquer pertencente ao ciclóide. Finalmente, seja $\theta = \widehat{PCT}$.

Figura 34 - Movimento do ponto P em função do ângulo θ



Fonte: Próprio Autor usando Geogebra

Note que OT tem comprimento igual ao do arco TP no sentido horário, logo temos que $OT = r\theta$.

Considerando o triângulo PCQ , com hipotenusa PC e $Q \in CT$, obteremos $PQ = r\text{sen}\theta$ e $QC = r\text{cos}\theta$.

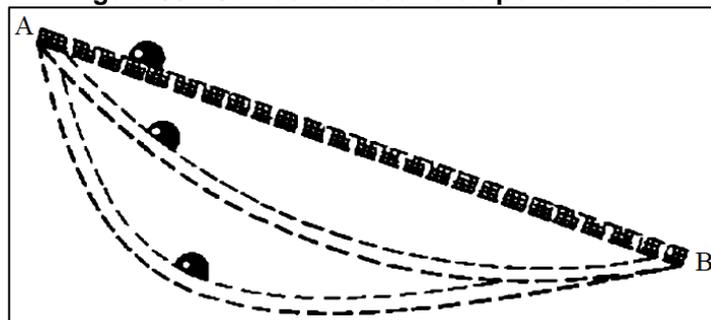
Denominando $P = (x_P, y_P)$, devemos ter $x_P = OT - PQ = r\theta - r\text{sen}\theta$ e assim, $x_P = r(\theta - \text{sen}\theta)$. Também, $y_P = TC - QC = r - r\text{cos}\theta = r(1 - \text{cos}\theta)$.

Assim, sendo $\theta \in \mathbb{R}$, obtemos uma parametrização para a Ciclóide dada por $\alpha(\theta) = (x(\theta), y(\theta)) = (r(\theta - \text{sen}\theta), r(1 - \text{cos}\theta))$.

4.3 Braquistócrona e Tautócrona

Considere a seguinte questão: que forma deve ser dada a uma calha de metal bem polido conectando dois pontos A e B de modo que uma bola de metal polido rola ao longo desta calha de ponto A ao ponto B no menor tempo possível?

Figura 35 - Curvas de descida do ponto A ao B



Fonte: Markushevich, 1980.

A princípio parece que se deve escolher uma calha reta, pois fornece o caminho mais curto de A a B . Mas estamos tentando encontrar o menor tempo e não o caminho mais curto, e o tempo depende não só do caminho em si, mas também da velocidade da bola também. Se dobrarmos a calha para baixo, a parte dela começando no ponto A será mais íngreme do que o caminho reto, e a bola rolando por tal calha terá uma velocidade maior do que no segmento equidistante da calha reta. Mas se fizermos a parte inicial muito íngreme e comparativamente longa, então a parte próxima o ponto B terá uma inclinação acentuada e será mais longa. Dessa forma, a primeira parte do caminho será percorrido pela bola muito rapidamente, mas a segunda parte será percorrida muito lentamente, o que pode atrasar a chegada da bola no ponto B . Assim, parece que a calha deve ser dobrada para baixo, mas não muito abruptamente.

Esse é o problema da braquistócrona. Foi um dos primeiros problemas colocados no cálculo das variações. Newton foi desafiado a resolver o problema em 1696, e o fez no dia seguinte. O astrônomo e físico italiano Galileo Galilei (1564-1642) pensou que o caminho de descida mais rápida deveria ser na forma de um arco de uma circunferência. Na verdade, a solução, que é um arco de um cicloide, foi encontrada por Leibniz, L'Hospital, Newton, e os dois irmãos Johann e Jakob

Bernoulli. Na verdade, Johann Bernoulli tinha originalmente encontrado uma prova incorreta de que a curva é um cicloide, e desafiou seu irmão Jakob a encontrar a curva necessária. Quando Jakob fez isso corretamente, Johann tentou substituir a prova para a sua própria.

Desde então, o cicloide também foi chamado de braquistócrona, e a prova de Bernoulli a fundação de um novo ramo da matemática, o cálculo das variações.

Considere a curva parametrizada $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ que atenda a propriedade descrita acima.

Seja S o comprimento dessa curva de A até B , o tempo necessário para o deslocamento de um ponto ao outro é dado por

$$T = \int_A^B \frac{ds}{v},$$

onde v é a velocidade desse deslocamento. Pela Lei da Conservação da Energia Mecânica, ou seja,

$$\frac{mv^2}{2} = mgy,$$

temos que $v = \sqrt{2gy}$. Substituindo, temos

$$T = \int_A^B \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{\sqrt{2gy}} = \int_A^B \sqrt{\frac{1 + y'^2}{2gy}} dy.$$

Portanto, a função que devemos minimizar é

$$f = \sqrt{\frac{1 + y'^2}{2gy}}$$

Como f não depende de x , temos que $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$. Nesse caso, a Igualdade de Beltrami

nos garante que $f - y' \frac{\partial f}{\partial y'} = C$, onde C é uma constante. Calculando, temos

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{2gy}\sqrt{1 + y'^2}}$$

Substituindo para subtrair, obtemos que

$$f - y' \frac{\partial f}{\partial y'} = \sqrt{\frac{1 + y'^2}{2gy}} - \frac{y'^2}{\sqrt{2gy}\sqrt{1 + y'^2}} = \frac{1}{\sqrt{2gy}\sqrt{1 + y'^2}} = C.$$

Assim, teremos que

$$\sqrt{y(1 + y'^2)} = \frac{1}{\sqrt{2gC}} \therefore y(1 + y'^2) = \frac{1}{2gC^2}.$$

Portanto, $y \cdot \left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right) = k^2$ onde $k^2 = \frac{1}{2gC^2}$ é uma constante positiva.

Essa igualdade é satisfeita pelas equações paramétricas da cicloide dada por $x(\theta) = \frac{k^2}{2}(\theta - \text{sen}\theta)$ e $y(\theta) = \frac{k^2}{2}(1 - \text{cos}\theta)$. Pois, para essas equações, temos que $dx = \frac{k^2}{2}(1 - \text{cos}\theta)d\theta$ e $dy = \frac{k^2}{2}\text{sen}\theta$. Assim, $\frac{dy}{dx} \cdot \frac{dy}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dx} = \frac{\text{sen}\theta}{1 - \text{cos}\theta}$.

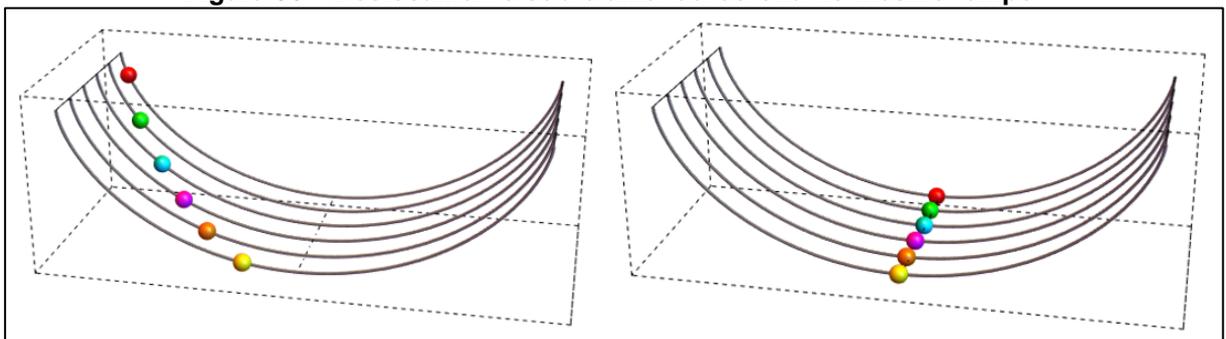
Logo, temos que

$$\begin{aligned} y \cdot \left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right) &= \frac{k^2}{2}(1 - \text{cos}\theta) \left(1 + \left(\frac{\text{sen}\theta}{1 - \text{cos}\theta}\right)^2\right) \\ &= \frac{k^2}{2} \left(\frac{(1 - \text{cos}\theta)^2 + \text{sen}^2\theta}{1 - \text{cos}\theta}\right) \\ &= \frac{k^2}{2} \left(\frac{1 - 2\text{cos}\theta + \text{cos}^2\theta + \text{sen}^2\theta}{1 - \text{cos}\theta}\right) \\ &= \frac{k^2}{2} \left(\frac{2 - 2\text{cos}\theta}{1 - \text{cos}\theta}\right) = \frac{k^2}{2} \cdot \frac{2(1 - \text{cos}\theta)}{1 - \text{cos}\theta} = k^2 \end{aligned}$$

Portanto, temos que a braquistócrona é uma cicloide invertida.

No caso da tautócrona, buscamos uma curva em que o tempo que um corpo leva para atingir seu ponto mínimo não depende da altura que foi lançado, mas apenas do seu raio.

Figura 36 – Deslocamento sobre uma tautócrona no mesmo tempo



Fonte: <https://demonstrations.wolfram.com/SlidingAlongATAutochronePath/>

Assim como a braquistócrona, essa curva é um cicloide invertido, fato descoberto pela primeira vez e publicado por Huygens em *Horologium oscillatorium* (1673). Huygens também construiu o primeiro relógio pêndulo com um dispositivo para garantir que o pêndulo fosse isócrona forçando o pêndulo a balançar em um arco de um cicloide (Wells 1991). Um pêndulo comum oscila para frente e para trás em um arco circular. As oscilações não são isócronas. Em outras palavras, o tempo que leva para o pêndulo (circular) ir de seu ponto inicial ao ponto mais baixo será

quase, mas não totalmente independente, da altura de onde o pêndulo é solto. Em 1680, Huygens observou dois fatos importantes: que um pêndulo que oscila para frente e para trás em um arco de cicloide invertido é isócrona, e que a involuta de um cicloide é um cicloide. Combinados, esses fatos mostram que o involuto de um arco de cicloide invertido pode ser usado para restringir um pêndulo de modo que ele se mova em um arco de cicloide. (Grey 1997). Infelizmente, o atrito ao longo dos arcos causa um erro maior do que o corrigido pelo caminho cicloidal.

Uma vez que a tautócrona é uma curva cicloide invertida, as equações paramétricas são as mesmas vistas anteriormente: $x = r(\theta - \text{sen}\theta)$ e $y = r(1 - \text{cos}\theta)$.

Para ver que a cicloide satisfaz a propriedade de ser uma tautócrona, vamos usar as derivadas $dx = r(1 - \text{cos}\theta)d\theta$ e $dy = r\text{sen}\theta d\theta$. Dessa forma, temos que $dx^2 + dy^2 = r^2(1 - 2\text{cos}\theta + \text{cos}^2\theta + \text{sen}^2\theta) = 2r^2(1 - \text{cos}\theta)d\theta$.

Aplicando a lei de conservação da energia mecânica entre o ponto mais baixo e uma altura inicial y , ou seja, $\frac{mv^2}{2} = mgy$, podemos obter a velocidade em função da altura dada por $v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{2gy}$. Logo, o tempo de queda será então dado por $dt = \frac{ds}{\sqrt{2gy}}$.

Pelo comprimento de arco, temos $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{2r^2(1 - \text{cos}\theta)}d\theta$.

Substituindo, temos que $dt = \frac{\sqrt{2r^2(1 - \text{cos}\theta)}d\theta}{\sqrt{2rg(1 - \text{cos}\theta)}} = \sqrt{\frac{r}{g}}d\theta$.

Logo, o tempo necessário para o deslocamento da partícula do topo da curva até sua parte inferior será dado por $t = \int_0^\pi dt = \pi \sqrt{\frac{r}{g}}$.

No entanto, a partir de um ponto intermediário, ou seja, para um certo valor $y = y(\theta_0)$, temos que a velocidade de descida será dada por $v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{2g(y - y_0)}$. Logo, temos

$$T = \int_0^\pi \sqrt{\frac{2r^2(1 - \text{cos}\theta)}{2rg(\text{cos}\theta_0 - \text{cos}\theta)}} d\theta = \sqrt{\frac{r}{g}} \int_0^\pi \frac{1 - \text{cos}\theta}{\text{cos}\theta_0 - \text{cos}\theta} d\theta$$

Usando fórmulas do arco-metade, ou seja $\text{cos}\theta = 2\text{cos}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1$ e $\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \text{cos}\theta}{2}}$ e substituindo, temos que

$$T = \sqrt{\frac{r}{g}} \int_0^\pi \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta}{\sqrt{\cos^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right) - \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}}$$

Para resolver essa integral, fazendo $u = \frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta_0}{2}\right)}$, temos que $du = -\frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) dt}{2\cos\left(\frac{\theta_0}{2}\right)}$.

Assim, temos $T = -2\sqrt{\frac{r}{g}} \int_1^0 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = 2\sqrt{\frac{r}{g}} [\arcsen(u)]_0^1 = \pi\sqrt{\frac{r}{g}}$, ou seja, o tempo de

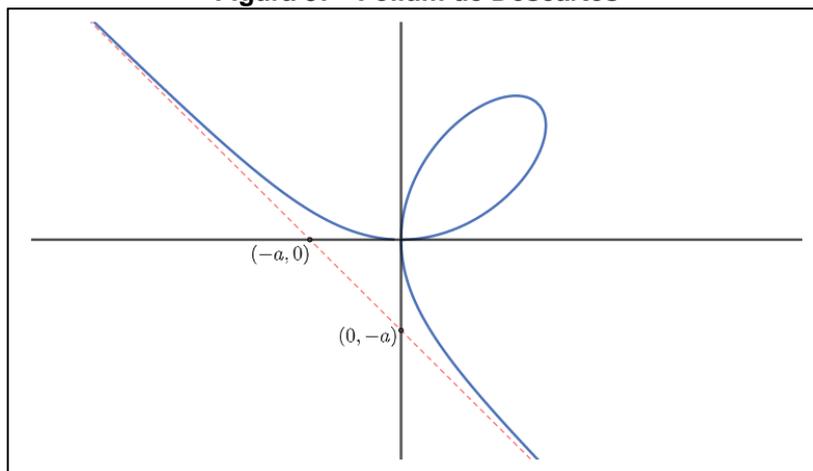
descida é mesmo independente do ponto de início do deslocamento.

Assim, mostramos que a curva tautócrona é um arco de uma cicloide invertida e, como π e g são constantes, o tempo de descida depende apenas do seu raio.

4.4 Folium de Descartes

O Folium de Descartes é uma curva algébrica plana definida pela equação cartesiana $C: x^3 + y^3 - 3axy = 0$, onde $a > 0$ e a curva tem assíntota dada pela reta $x + y + a = 0$. Pode-se mostrar que essa curva é simétrica em relação à reta $y = x$ e está contida no semiplano $x + y + a > 0$.

Figura 37 - Folium de Descartes



Fonte: Próprio autor usando Geogebra

O *Folium* foi proposto pela primeira vez por Descartes em 1638. A curva tornou-se famosa através de um incidente ocorrido durante o desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral. Descartes desafiou Fermat a encontrar a reta tangente à referida curva em um ponto arbitrário, uma vez que Fermat acabara de

descobrir um método para encontrar retas tangentes. Fermat resolveu o problema facilmente, algo que Descartes foi incapaz de fazer. Desde que o cálculo foi inventado, a inclinação de uma reta tangente pode ser facilmente encontrada através da derivação implícita.

Para determinar uma parametrização para a curva, consideraremos como parâmetro $t = \frac{y}{x}$. Com isso, se $(x, y) \in C$, temos que $x = 0 \Leftrightarrow y = 0$ e se $t = -1$, ou seja, $y = -x$, então $x^3 + (-x)^3 - 3ax(-x) = 0 \Rightarrow 3ax^2 = 0 \Rightarrow x = y = 0$. Portanto, devemos ter $t \in \mathbb{R} - \{-1\}$.

Supondo $(x, y) \neq (0, 0)$ e substituindo $y = tx$ na equação cartesiana do Folium de Descartes, teremos

$$x^3 + (tx)^3 = 3ax(tx) \Leftrightarrow (1 + t^3)x^3 = 3atx^3$$

$$\therefore x = \frac{t}{1 + t^3}$$

Como $y = tx$, teremos então que

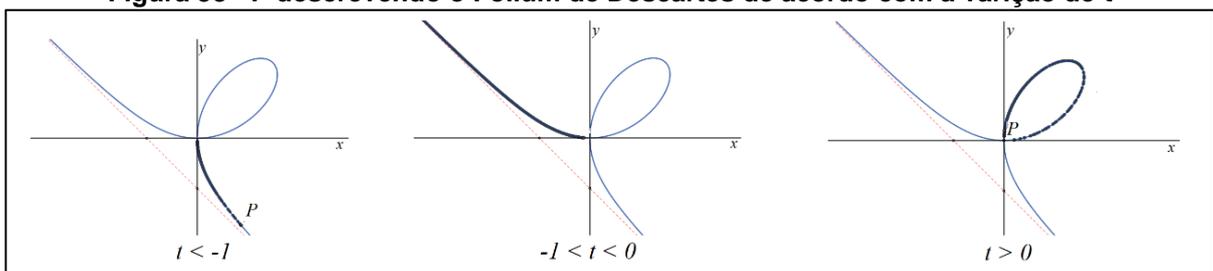
$$y = \frac{3at^2}{1 + t^3}$$

Assim, temos uma parametrização para o Folium de Descartes dada por

$$\alpha(t) = \left(\frac{3at}{1 + t^3}, \frac{3at^2}{1 + t^3} \right), \text{ com } t \in \mathbb{R} - \{-1\}$$

Pode-se notar que o parâmetro t está relacionado com o vetor posição da curva. Quando $t < -1$, $\alpha(t)$ percorre o "braço" inferior direito e à medida que $t \rightarrow -\infty$, $\alpha(t) \rightarrow (0, 0)$ pela parte da curva contida no 4º quadrante. Quando $t \rightarrow -1$, a curva $\alpha(t) \rightarrow (x, -x - a)$, ou seja, a curva se aproxima cada vez mais da sua assíntota. Quando $-1 < t < 0$, $\alpha(t)$ percorre o "braço" superior esquerdo. Quando $t \rightarrow 0$, $\alpha(t) \rightarrow (0, 0)$, sendo contínua nesse ponto. Quando $t > 0$, $\alpha(t)$ percorre o laço da curva de modo que se $t \rightarrow +\infty$, $\alpha(t) \rightarrow (0, 0)$.

Figura 38 - P descrevendo o Folium de Descartes de acordo com a variação de t



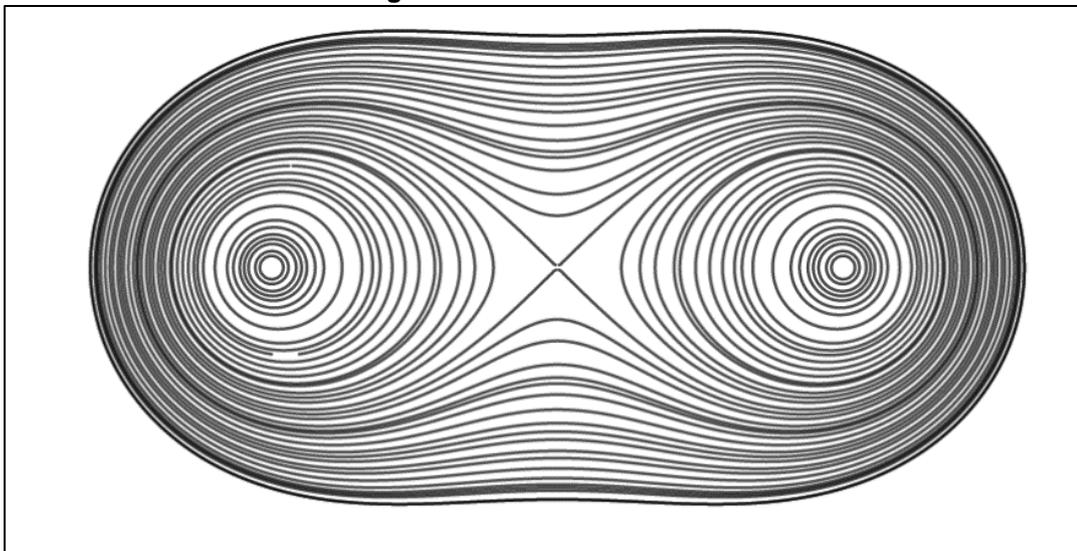
Fonte: Próprio autor usando Geogebra

4.5 Lemniscata de Bernoulli

A Lemniscata de Bernoulli é a curva plana algébrica do 4º grau de equação cartesiana $(x^2 + y^2)^2 = a(x^2 - y^2)$ tendo como focos os pontos $F_1(a, 0)$ e $F_2(-a, 0)$.

A lemniscata de Bernoulli foi descrita inicialmente em 1694 como uma elipse modificada. Posteriormente mostrou-se que é um dos casos das Ovais de Cassini onde a curva atravessa o ponto médio entre os focos.

Figura 39 - Ovais de Cassini

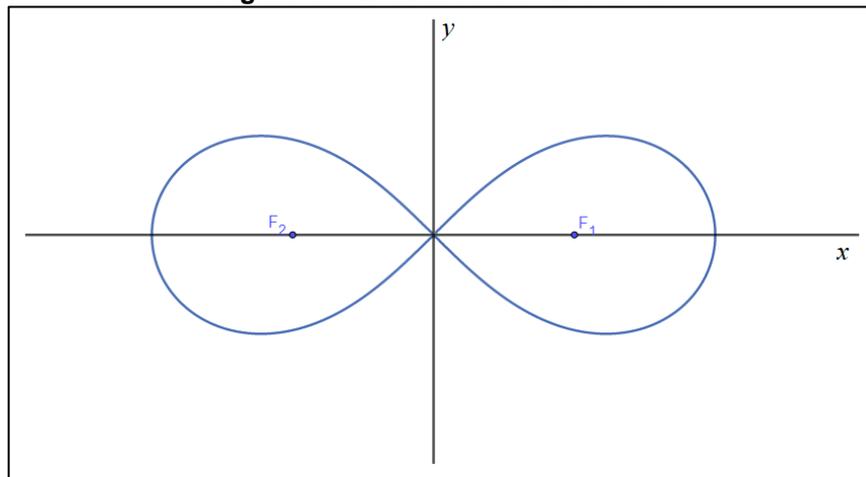


Fonte: Próprio autor usando Geogebra

Uma Oval de Cassini é o lugar geométrico dos pontos P do plano tais que o produto das distâncias a dois pontos fixos F_1 e F_2 é uma constante. As ovais de Cassini também podem ser vistas como a intersecção de um Toro com um plano paralelo ao seu eixo de revolução.

Fixando no plano os focos $F_1(a, 0)$ e $F_2(-a, 0)$. Considere os pontos P do plano tais que $PF_1 \cdot PF_2 = b^2$, sendo a e b números reais positivos. Usando a fórmula da distância entre dois pontos, temos que a equação cartesiana da Oval de Cassini é dada por $(x^2 + y^2 + a^2) - 4ax^2 = b^4$. A Lemniscata de Bernoulli é a oval de Cassini para o caso em que $a = b$.

Figura 40 - Lemniscata de Bernoulli



Fonte: Próprio autor usando Geogebra

Para determinar uma parametrização para essa curva, consideremos a reta $y = x$ contendo os focos. Para isso, faremos uma rotação de eixos $\theta = 45^\circ$ de, fazendo a curva ficar contida nos quadrantes ímpares.

Fazendo $x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x_\theta - y_\theta)$ e $y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x_\theta + y_\theta)$ e substituindo na equação $(x_\theta^2 + y_\theta^2)^2 = a(x_\theta^2 - y_\theta^2)$, obtemos $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$, que é a equação cartesiana da curva na posição desejada.

Consideremos como parâmetro $t^2 = \frac{y}{x}$ e substituindo na equação acima, temos $(x^2 + x^2t^2)^2 = 2ax^2t^2 \Rightarrow x^2(1 + t^4) = axt\sqrt{2} \Rightarrow x = \frac{at\sqrt{2}}{1+t^4}$.

Como $y = xt^2$, temos $y = \frac{at^3\sqrt{2}}{1+t^4}$.

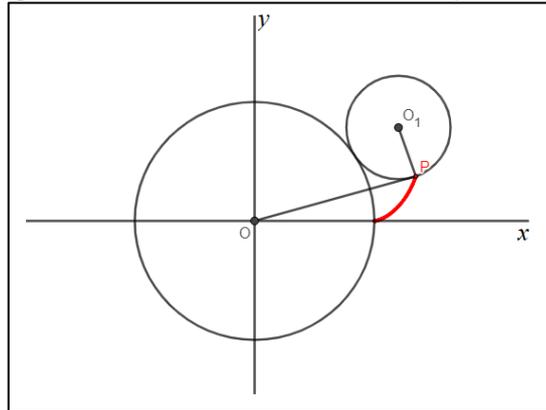
Assim, temos uma parametrização para a Lemniscata de Bernoulli dada por

$$\alpha(t) = \left(\frac{at\sqrt{2}}{1+t^4}, \frac{at^3\sqrt{2}}{1+t^4} \right), \text{ com } t \in \mathbb{R}.$$

4.6 Epiciclóide E Cardióide

Sejam C_1 e C_2 dois círculos de raios r e R respectivamente e tangentes exteriormente num ponto P . Denominamos epiciclóide o lugar geométrico descrito pelo P quando C_1 rola sobre C_2 sem deslizar.

Figura 41 - Ponto P descrevendo a Epiciclóide



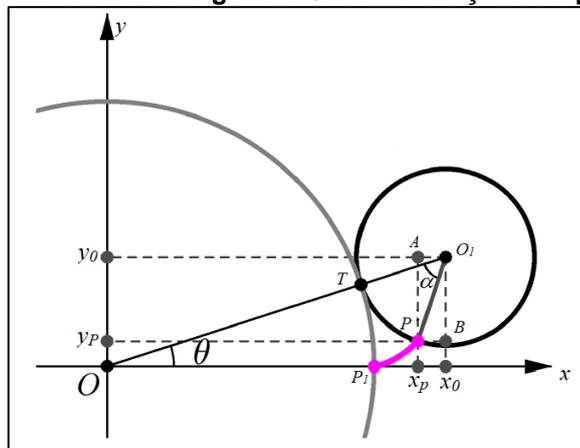
Fonte: Próprio autor usando Geogebra

Para obtermos uma parametrização para a epiciclóide, admitamos C_1 centrado na origem, C_2 com centro no ponto $O_1(R+r, 0)$ e que a posição inicial de P seja $P_1(R, 0)$. Consideramos, nessa demonstração que C_1 rola sobre C_2 no sentido anti-horário. Para o outro caso, a demonstração é análoga.

Sejam $P = (x_p, y_p)$ e considere os pontos $A = (x_p, y_0)$ e $B = (x_0, y_p)$ onde $(x_0, y_0) = O_1$. Pela figura, vemos que as posições de x_p e x_0 variam de acordo com O_1 e P , portanto de acordo com a medida do ângulo $\alpha = \widehat{O_1 P}$. Com essa variação, em determinados momentos, a coordenada x_p do ponto P , encontra-se entre a origem e a coordenada x_0 do ponto O_1 e, em outros momentos, x_0 encontra-se entre a origem e x_p .

Quando x_p está entre a origem e x_0 , podemos afirmar que $x_p = x_0 - |AO_1|$ e $y_p = y_0 - |O_1 B|$.

Figura 42 – x_p entre a origem e x_0 na construção da Epiciclóide



Fonte: <https://www.professores.uff.br> (Adaptado)

Note que, enquanto C_1 rola sobre C_2 , seu centro O_1 descreve um círculo centrado na origem e raio $R + r$. Considerando $\theta = O_1\hat{O}P_1$, obtemos $x_0 = (R + r)\cos\theta$ e $y_0 = (R + r)\sin\theta$.

Também, sendo $\beta = P\hat{O}_1B$, temos $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} - \theta$ e assim, $\beta = \frac{\pi}{2} - (\theta + \alpha)$. Dessa forma, temos $x_P - x_0 = r\cos(\theta + \alpha)$ e $y_0 - y_P = r\sin(\theta + \alpha)$.

Fazendo as substituições de x_0 e y_0 nas igualdades acima, obteremos então $x_P = (R + r)\cos\theta - r\cos(\theta + \alpha)$ e $y_P = (R + r)\sin\theta - r\sin(\theta + \alpha)$.

Porém essa parametrização depende de duas variáveis. Precisamos que essas equações dependam de um só parâmetro.

Sendo T o ponto de tangência entre C_1 e C_2 , que varia à medida que C_1 rola sobre C_2 , observamos que a medida do arco compreendido entre T e P ao longo de C_1 é igual ao comprimento do arco de P_1 a T sobre C_2 . Assim, temos que $r\alpha$ em C_1 é igual a $R\theta$ em C_2 . Assim, temos que $\alpha = \frac{R\theta}{r}$.

Substituindo nas equivalências de x_P e acima, temos

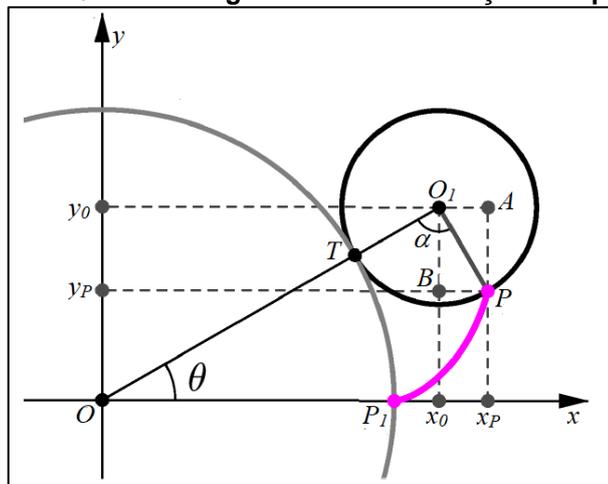
$$x_P = (R + r)\cos\theta - r\cos\left(\theta + \frac{R\theta}{r}\right) = (R + r)\cos\theta - r\cos\left(\left(\frac{R + r}{r}\right)\theta\right).$$

Para y_P temos

$$y_P = (R + r)\sin\theta - r\sin\left(\theta + \frac{R\theta}{r}\right) = (R + r)\sin\theta - r\sin\left(\left(\frac{R + r}{r}\right)\theta\right)$$

No caso em que x_0 está entre a origem e x_P , temos, no triângulo retângulo BPO_1 , sendo $\beta = B\hat{O}_1P$ que $x_P - x_0 = r\sin\beta$ e $y_0 - y_P = r\cos\beta$.

Figura 43 – x_0 entre a origem e x_P na construção da Epiciclóide



Fonte: <https://www.professores.uff.br> (Adaptado)

Como $\beta = \alpha - \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \alpha + \theta - \frac{\pi}{2}$, temos que $x_p - x_0 = r \operatorname{sen}\left(\alpha + \theta - \frac{\pi}{2}\right)$, logo, $x_p - x_0 = -r \cos(\alpha + \theta)$ e assim, $x_p = (R + r) \cos \theta - r \cos\left(\left(\frac{R+r}{r}\right) \theta\right)$. Por sua vez, $y_p = -r \cos\left(\theta + \alpha - \frac{\pi}{2}\right) + (R + r) \operatorname{sen} \theta = (R + r) \operatorname{sen} \theta - r \operatorname{sen}\left(\left(\frac{R+r}{r}\right) \theta\right)$.

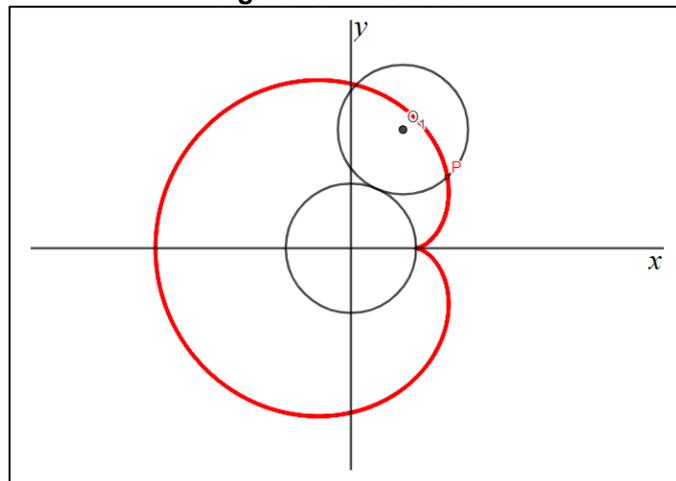
Dessa forma obtemos para este caso as mesmas equações paramétricas para o primeiro caso. Temos, portanto, uma parametrização para a epicycloide dada por $\alpha(\theta) = (x(\theta), y(\theta))$ em que

$$\begin{cases} x(\theta) = (R + r) \cos \theta - r \cos\left(\left(\frac{R+r}{r}\right) \theta\right) \\ y(\theta) = (R + r) \operatorname{sen} \theta - r \operatorname{sen}\left(\left(\frac{R+r}{r}\right) \theta\right) \end{cases}, \text{ com } \theta \in \mathbb{R}$$

Observe que quando C_1 percorre um arco de C_2 , igual a $2\pi r$, P volta a tocar C_2 . Portanto, se $\frac{r}{R} = n$, com $n \in \mathbb{N}$, então o ponto P toca C_2 n vezes e na n -ésima vez coincide com sua posição inicial, pois $2\pi R = 2\pi(nr) = n(2\pi r)$. Assim, o comprimento de C_2 contém n vezes o comprimento de C_1 .

Um caso de epicycloide muito relevante é aquele em que $R = r$, e, portanto, $\theta = \alpha$. Essa curva plana chama-se Cardióide.

Figura 44 - Cardióide



Fonte: Próprio autor usando Geogebra

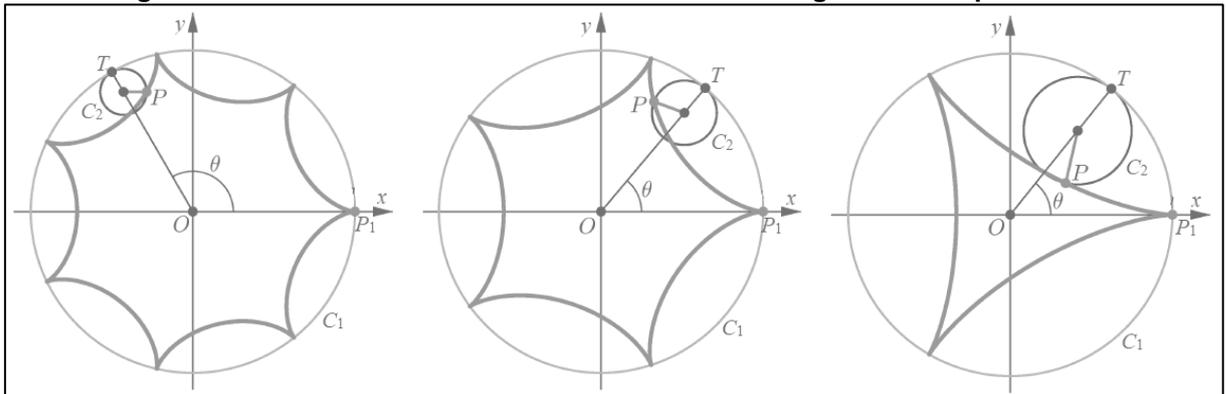
Fazendo os ajustes nas equações paramétricas obtidas para a epicycloide, temos uma parametrização para o cardióide dada por

$$\begin{cases} x(\theta) = 2r \cos \theta - r \cos(2\theta) \\ y(\theta) = 2r \operatorname{sen} \theta - r \operatorname{sen}(2\theta) \end{cases}, \text{ com } \theta \in \mathbb{R}$$

4.7 Hipociclóide E Astróide

Sejam C_1 e C_2 dois círculos de raios R e r , com $R > r$, tangentes interiormente num ponto P . Denominamos hipococlóide o lugar geométrico descrito pelo ponto P quando C_2 rola sobre C_1 sem deslizar mantendo todos os seus pontos na região limitada por C_1 .

Figura 45 - C_2 rolando sobre C_1 e o deslocamento de P gerando a Hipociclóide



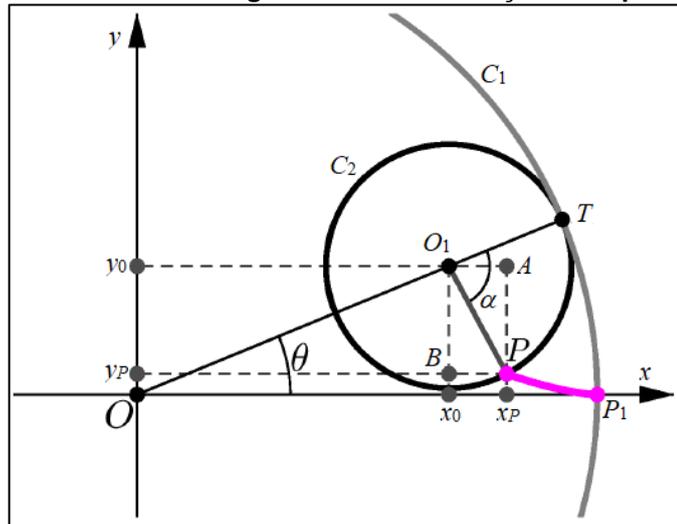
Fonte: <https://www.professores.uff.br> (Adaptado)

Determinaremos as equações paramétricas da hipociclóide admitindo C_1 centrada na origem e C_2 iniciando o movimento no ponto $(R - r, 0)$ e P com posição inicial $P_1 = (R, 0)$. Consideraremos que C_2 rola sobre C_1 no sentido anti-horário. Para o outro caso, a demonstração é análoga. Em qualquer instante, C_1 e C_2 são tangentes interiormente. Seja T o ponto de tangência entre C_1 e C_2 , com sua posição variando no movimento.

Sejam $P(x_p, y_p)$ o ponto que descreve a hipociclóide. À medida que C_2 rola sobre C_1 , seja (x_0, y_0) a posição de O_1 e considere os pontos $A(x_p, y_0)$ e $B(x_0, y_p)$. Com essa variação, em determinados momentos, a coordenada x_p do ponto P encontra-se entre a origem e a coordenada x_0 do ponto O_1 e em outros momentos, x_0 encontra-se entre a origem e x_p .

Quando x_0 está entre x_p e a origem, podemos afirmar que $x_p = x_0 + |AO_1|$ e $y_p = y_0 + |O_1B|$.

Figura 46 - x_0 entre a origem e x_P na construção da Hipociclóide



Fonte: <https://www.professores.uff.br> (Adaptado)

Como O_1 descreve um círculo de raio $R - r$, e sendo θ a medida do ângulo entre o segmento OO_1 e o eixo das abcissas no sentido anti-horário, temos então que $x_0 = (R - r)\cos\theta$ e $y_0 = (R - r)\sen\theta$.

Denotando por α a medida do ângulo entre O_1T e O_1P e no sentido anti-horário, teremos que $OO_1P = \pi - \alpha$ e $OO_1P - B\hat{O}_1P = \frac{\pi}{2} - \theta$ e portanto teremos que $B\hat{O}_1P = \pi - \alpha - \frac{\pi}{2} + \theta = (\theta - \alpha) + \frac{\pi}{2}$.

No triângulo retângulo PBO , temos que

$$|BP| = r\sen(B\hat{O}_1P) = r\sen\left(\theta - \alpha + \frac{\pi}{2}\right) = r\cos(\theta - \alpha) = r\cos(\alpha - \theta)$$

$$\text{e } |O_1B| = r\cos(B\hat{O}_1P) = r\cos\left(\theta - \alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -r\sen(\theta - \alpha) = r\sen(\alpha - \theta).$$

Note que $|BP| = x_P - x_0$ e $|O_1B| = y_0 - y_P$.

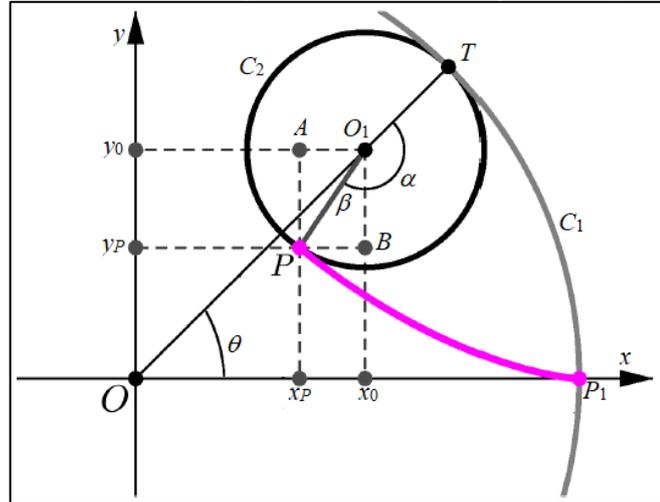
Assim, $x_P = r\cos(\alpha - \theta) + (R - r)\cos\theta$ e $y_P = r\sen(\alpha - \theta) + (R - r)\sen\theta$.

Sendo T o ponto de tangência, entre C_1 e C_2 que varia à medida que C_2 rola sobre C_1 , observamos que a medida do arco compreendido entre T e P_1 ao longo de C_1 é igual ao comprimento do arco de P a T em C_2 . Assim, temos que $R\theta$ em C_1 é igual a $r\alpha$ em C_2 . Assim, temos que $\alpha = \frac{R\theta}{r}$ e $\alpha - \theta = \left(\frac{R-r}{r}\right)\theta$.

Substituindo esses valores nas equivalências acima de x_P e y_P obteremos $x_P = (R - r)\cos\theta + r\cos\left(\left(\frac{R-r}{r}\right)\theta\right)$ e $y_P = (R - r)\sen\theta + r\sen\left(\left(\frac{R-r}{r}\right)\theta\right)$.

No caso em que x_P está entre x_0 e a origem, temos, no triângulo retângulo BPO_1 , sendo $\beta = B\hat{O}_1P$, que $x_0 - x_P = r\sen\beta$ e $y_0 - y_P = r\cos\beta$.

Figura 47 - x_P entre a origem e x_0 na construção da Hipociclóide



Fonte: <https://www.professores.uff.br> (Adaptado)

Como $\beta = \alpha - \left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \alpha - \theta - \frac{\pi}{2}$, temos que $x_0 - x_P = r \operatorname{sen}\left(\alpha - \theta - \frac{\pi}{2}\right)$, logo, $x_0 - x_P = -r \cos(\alpha - \theta)$ e assim, $x_P = (R - r) \cos \theta + r \cos\left(\left(\frac{R-r}{r}\right) \theta\right)$. De modo análogo, devemos ter $y_P = (R - r) \operatorname{sen} \theta + r \operatorname{sen}\left(\left(\frac{R-r}{r}\right) \theta\right)$. Ou seja, equações paramétricas idênticas ao primeiro caso.

Obtemos, portanto, uma parametrização para a hipociclóide dada por $\alpha(\theta) = (x(\theta), y(\theta))$ em que

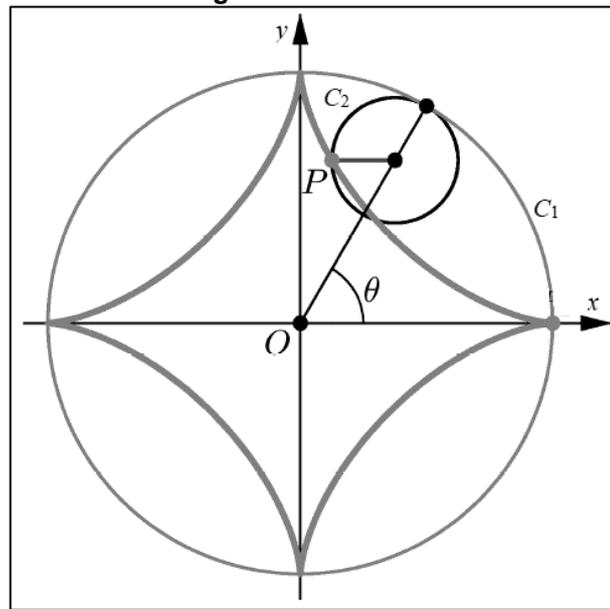
$$\begin{cases} x(\theta) = (R - r) \cos \theta + r \cos\left(\left(\frac{R-r}{r}\right) \theta\right) \\ y(\theta) = (R - r) \operatorname{sen} \theta + r \operatorname{sen}\left(\left(\frac{R-r}{r}\right) \theta\right) \end{cases}, \text{ com } \theta \in \mathbb{R}$$

Analogamente à epiciclóide, se $\frac{R}{r} = n$, com $n \in \mathbb{N}$ essa razão determina quantas vezes C_2 toca C_1 . Além disso, na n -ésima vez, volta a sua posição original.

Um caso relevante de hipociclóide é o caso em que $\frac{R}{r} = 4$. Como foi dito acima, C_2 toca C_1 4 vezes. Essa curva é denominada astróide ou tetracúspide. Substituindo $R = 4r$ nas equações da hipociclóide e fazendo as adaptações, obtemos que as equações paramétricas da astróide são dadas por

$$\begin{cases} x(\theta) = 3r \cos \theta + r \cos(3\theta) \\ y(\theta) = 3r \operatorname{sen} \theta + r \operatorname{sen}(3\theta) \end{cases}, \text{ com } \theta \in \mathbb{R}$$

Figura 48 - Astróide



Fonte: <https://www.professores.uff.br>

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Como objetivo principal do trabalho, apresentamos uma parametrização para algumas curvas planas. Abordamos curvas que julgamos mais importantes para a introdução do estudo de curvas planas.

Nota-se que elas diferem na forma de obtenção dessa parametrização. Para algumas delas, precisamos observá-las como deslocamento de um ponto no plano. Outras, precisamos aplicar suas propriedades algébricas e geométricas decorrentes de sua definição. Em outras ainda precisamos associar o deslocamento de um ponto à variação de um certo ângulo.

Alguns caminhos apresentam-se como continuação natural desse trabalho. Um deles seria a abordagem de parametrizações de curvas planas em outros sistemas de coordenadas, como as polares. Nesse sentido, pode-se adaptar a parametrização para a orientação do novo sistema considerado, o que pode simplificar as equações paramétricas de algumas curvas.

Pode-se ainda, como complementação, apresentar parametrizações de curvas que não abordamos aqui ou até mesmo estender esse trabalho para curvas não planas ou ainda iniciar a abordagem de superfícies.

REFERÊNCIAS

- LEITHOLD, Louis. **Cálculo com Geometria Analítica – volume 2**. Tradução: Cyro de Carvalho Patarra. 3 ed. São Paulo. Harbra, 1994. 544 p.
- ARAÚJO, Paulo Ventura. **Geometria Diferencial**. 2 ed. Rio de Janeiro. IMPA. 1998. 224 p.
- CARMO, Manfredo Perdigão do. **Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies**. 4 ed. Editora SBM. Rio de Janeiro, 2010.
- EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Tradução: Hygino H. Domingues. 5 ed. Campinas. Editora da Unicamp, 2011. 848 p.
- MARKUSHEVICH, A.I. **Remarkable Curves - English translation**. 1 ed. Moscou. Mir Publishers, 1980
- LOOKWOOD, E. H. **A Books of Curves**. 1 ed. Cambridge. University Press, 1961. 199 p.
- PAIVA, Manoel Rodrigues. **Matemática: Paiva. Coleção Moderna Plus – Vol. 3**. 2 ed. São Paulo. Moderna, 2010. 437 p.
- WELLS, David. **The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Geometry**. 1 ed. London. Penguin, p. 46-47, 1991.
- GRAY, Alfred. **Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica**. 2 ed. Boca Raton. 1997.
- TAUTOCHRONE Problem. **Mathworld.wolfram**, 2021. Disponível em <<https://mathworld.wolfram.com/TautochroneProblem.html>>. Acesso em 20 de nov. de 2021.
- BRACHISTOCHRONE Problem. **Mathworld.wolfram**, 2021. Disponível em <<https://mathworld.wolfram.com/BrachistochroneProblem.html>>. Acesso em 20 de nov. de 2021.
- CICLOIDE. **Wikipédia**, 2021. Disponível em <<https://pt.wikipedia.org/wiki/Cicloide>>. Acesso em 20 de nov. de 2021.
- FOLIUM de Descartes. **Wikipédia**, 2017. Disponível em <https://pt.wikipedia.org/wiki/Folium_de_Descartes>. Acesso em 20 de nov. de 2021.
- CÔNICAS e Quádricas. **Clicmates**, 2014. Disponível em: <http://www.clicmates.com.br/arquivosparadonwloads/quadricas_conicas.pdf>. Acesso em 20 de nov. de 2021.
- PARAMETRIZAÇÃO de Algumas Curvas Planas. **Professores.uff.br/katiafrensel**, 2008. Disponível em: <<https://www.professores.uff.br/katiafrensel/wp-content/uploads/sites/115/2017/08/ga2-aula3.pdf>>. Acesso em 20 de nov. de 2021.
- MORAIS FILHO, Daniel Cordeiro de. Sobre a Bela Lemniscata e outras Curvas Mais. **Revista do Professor de matemática**, 2005. Disponível em <<https://www.rpm.org.br/cdrpm/56/3.htm>>. Acesso em 20 de nov. de 2021.