Cleder Marinho

Alguns Elementos da Geometria Projetiva no Desenho em Perspectiva

Maringá-PR, Brasil

2021

Cleder Marinho

Alguns Elementos da Geometria Projetiva no Desenho em Perspectiva

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, PROFMAT, do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática. Orientador: Prof. Dr. Marcos André Verdi.

Universidade Estadual de Maringá – UEM

Departamento de Matemática

Programa de Mestrado Profissional em Rede Nacional

Orientador: Marcos André Verdi

Maringá-PR, Brasil

2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Biblioteca Setorial BSE-DMA-UEM, Maringá, PR, Brasil)

Marinho, Cleder
M338a Alguns elementos da geometria projetiva no desenho em perspectiva / Cleder Marinho. -- Maringá, 2021.
119 f. : il., fotos, color.

Orientador: Prof. Dr. Marcos André Verdi.
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas, Departamento de Matemática, 2021.

1. Perspectiva - Desenho. 2. Geometria projetiva. I. Verdi, Marcos Andre, orient. II. Universidade Estadual de Maringá. Centro de Ciências Exatas. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT. III. Título.

CDD 22.ed. 516.5

Edilson Damasio CRB9-1.123

CLEDER MARINHO

ALGUNS ELEMENTOS DA GEOMETRIA PROJETIVA NO DESENHO EM PERSPECTIVA

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática tendo a Comissão Julgadora composta pelos membros:

COMISSÃO JULGADORA:

Marcos A. Verdi
Prof. Dr. Marcos André Verdi
UEM - Universidade Estadual de Maringá (Orientador)

Prof. Dr. Edson Carlos Licurgo Santos
UNIOESTE - Universidade Estadual do Oeste do Paraná (Toledo)

Fernanda D. M. Hernandez

Profa. Dra. Fernanda Diniz de Melo Hernandez
UEM - Universidade Estadual de Maringá

Aprovado em: 15 de setembro de 2021
Local de defesa: Videoconferência pelo link

Dedico este trabalho à todos que estiveram ao meu lado e me ajudaram ao longo desta caminhada.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer à todos que, de alguma forma, contribuíram para que este trabalho pudesse ser realizado. Em especial agradeço:

Primeiramente, à Deus, por me conceder saúde e sabedoria para seguir sempre em frente. Por ser minha força, meu guia em todos os momentos e ser meu Mestre.

Aos meus pais, Wilton e Maria, pelo apoio e incentivo em todos os momentos da minha vida. Por acreditarem em mim, e não medirem esforços para a concretização dos meus sonhos. Sem vocês, eu nada seria!

Aos meus amigos, pessoas que Deus colocou em meu caminho. Mesmo com a distância, sempre se fizeram presentes na minha vida. Obrigado pelo companheirismo, apoio e amizade incondicional.

Aos amigos que o Profmat me deu, e que vou levar para toda à vida. Obrigado pela ajuda, pela colaboração, pelos desabafos e pela mão estendida em todos os momentos. Vocês são “Incríveis”!!

A todos os professores do Programa de Pós-graduação Profissional em Matemática em Rede Nacional - Profmat, em especial, ao Professor Thiago Fanelli Ferraiol por toda dedicação e auxílio dispensados à nossa turma, sempre quando precisamos.

E também agradeço muito ao meu orientador Professor Dr. Marcos André Verdi por ter me orientado e me guiado para que pudesse terminar este trabalho.

"Quanto mais aumenta nosso conhecimento, mais evidente fica nossa ignorância".
(John F. Kennedy).

Resumo

Neste trabalho buscamos evidenciar a relação existente entre a matemática e a arte. O objetivo é refletir sobre os pontos de contato entre elas, através de uma contextualização histórica, procuramos mostrar que tanto a matemática quanto a arte são formas de conhecimento sobre a realidade, e ambas são frutos da criatividade humana. Trabalhamos mais especificamente com algumas relações entre o desenho em perspectiva e a geometria projetiva. Tais relações são obtidas aqui à partir de atividades propostas, partindo da confecção de desenhos em perspectiva e destacando os elementos de geometria projetiva envolvidos.

Palavras-chave: Perspectiva. Desenho. Geometria Projetiva.

Abstract

In this work we seek to highlight the relationship between mathematics and art. The objective is to reflect on the points of contact between them, through a historical context, we seek to show that both mathematics and art are forms of knowledge about reality, and both are the result of human creativity. We work more specifically with some relationships between perspective drawing and projective geometry. Such relationships are enabled here from proposed activities, starting from the making of perspective drawings and highlighting the elements of projective geometry involved.

Keywords: Perspective. Drawings. Projective Geometry.

Lista de ilustrações

Sumário

1 Introdução

Pensar na junção de Matemática e Arte provoca vários sentimentos inclusive a inquietação. Observando em nosso redor, conseguimos identificar facilmente relações destas duas áreas do conhecimento presentes na natureza, mas quando falamos de Arte e Matemática direcionando nosso olhar para o ambiente educativo nos parece que são áreas distintas, distantes e com pouca relação.

Um ramo da Arte que está intimamente ligada com a Matemática é o desenho em perspectiva. A própria terminologia utilizada já remete muito ao estudo da geometria: pontos de fuga, plano do observador, linha (ou reta) do horizonte. Mas a geometria que mais se adapta no estudo do desenho em perspectiva não é a geometria euclidiana. Um primeiro indicador deste fato é que em um desenho em perspectiva, segmentos de reta que são paralelas no mundo real são representados por segmentos de reta que, se prolongados, se cruzam em um ponto. Desta forma, uma geometria apropriada ao estudo deste tipo de desenho uma na qual não existem retas que não se cruzam. Esta é uma característica marcante da geometria projetiva. Aliás, os conceitos elementares que iniciaram o desenvolvimento da geometria projetiva surgem no século XV, quando artistas renascentistas buscavam ferramentas que davam mais realismo ás suas obras, introduzindo conceitos como pontos de fuga e perspectividades. Em 1639 Girard Desargues fez uma primeira formulação precisa destes conceitos, mas sua obra não foi bem aceita na época. Somente após 1822, com os trabalhos de Jean Victor Poncelet, as propriedades projetivas das figuras passaram a chamar a atenção dos matemáticos e iniciou-se o desenvolvimento propriamente da geometria projetiva.

Este trabalho está organizado da seguinte maneira: No Capítulo 1 descrevemos um panorama histórico das relações entre Matemática e Arte, em um contexto mais geral do que na geometria projetiva. No Capítulo 2, mantemos nossa atenção mais especificamente no desenho em perspectiva, dando uma retrospectiva histórica e apresentamos também alguns conceitos envolvidos neste tipo de desenho.

O Capítulo 3 contém a parte central desta dissertação. Através de algumas atividades propostas, alguns conceitos elementares da geometria projetiva passam ser introduzidos e são trabalhados com o auxílio de mais algumas atividades. Neste capítulo seguimos as ideias propostas no livro PERSPECTIVE AND PROJECTIVE GEOMETRY, (ver ((CRANNELL; FRANTZ; FUTAMURA, 2019)).

2 Contexto Histórico entre a Matemática e a Arte

Para pensarmos num ensino de Arte e Matemática sobre uma perspectiva interdisciplinar implica repensar a formação do professor, esses também necessitam andar juntos com as mudanças impostas para a vida em sociedade.

> No ensino dos conteúdos escolares, as relações interdisciplinares evidenciam, por um lado, as limitações e as insuficiências das disciplinas em suas abordagens isoladas e individuais e, por outro, as especificidades próprias de cada disciplina para a compreensão de um objeto qualquer. Desse modo, explicita-se que as disciplinas escolares não são herméticas, fechadas em si, mas, a partir de suas especialidades, chamam umas às outras e, em conjunto, ampliam a abordagem dos conteúdos de modo que se busque, cada vez mais, a totalidade, numa prática pedagógica que leve em conta as dimensões científica, filosófica e artística do conhecimento. (DIRETRIZES. . . ,).

Mas, afinal, qual o significado de cada uma dessas áreas? O que é arte? O que é a matemática?

O significado de arte no Dicionário do Google, diz que arte é:

- Habilidade ou disposição dirigida para a execução de uma finalidade prática ou teórica, realizada de forma consciente, controlada e racional;
- Conjunto de meios e procedimentos através dos quais é possível a obtenção de finalidades práticas ou a produção de objetos; técnica.

Segundo o Dicionário Priberam da Língua Portuguesa, a palavra arte vem do latin ars ou artis, que remete a maneira de ser ou agir, conduta, habilidade, ciência, talento, ofício. E nos traz alguns significados, tais como:

- Capacidade ou habilidade para a aplicação de conhecimento ou para a execução de uma ideia.
- Conjunto dos meios pelos quais é possível obter a realização prática de algo.
- Conjunto de regras e preceitos necessários para o exercício de uma atividade ou profissão
- Aptidão, jeito, dom.

Recorrendo a Wikipédia, nos deparamos que a Arte pode ser entendida como a atividade humana ligada às manifestações de ordem estética ou comunicativa, realizada por meio de uma grande variedade de linguagens, tais como: arquitetura, desenho, escultura, pintura, escrita, música, dança, teatro e cinema, em suas variadas combinações.

Para (TOLSTÓI, 2019), a arte é uma atividade humana que permite o homem comunicar-se conscientemente, por meio de sinais externos, os sentimentos internos vivenciados, e que faça os outros experimentarem e serem contaminados por esses sentimentos.

Podemos dizer então que a arte pode ser entendida como a atividade humana ligada às manifestações de ordem estética ou comunicativa, a partir de percepções, emoções e ideias, e também técnicas, com o objetivo de estimular esse interesse nos espectadores, realizada por meio de uma grande variedade de linguagens em suas variadas combinações.

E quanto a matemática? Primeiramente nas escolas vista como uma disciplina. Nos discursos escolares, é descrita como "exata", "precisa", "rigorosa", "difícil", "incompreensível", "cheia de regras".

Do mesmo modo, segundo o dicionário google, a matemática é:

- Ciência que estuda, por método dedutivo, objetos abstratos (números, figuras, funções) e as relações existentes entre eles.

- Ensino dos processos, operações e propriedades matemáticas. Ja a wikipédia diz que:

Matemática é a ciência do raciocínio lógico e abstrato, que estuda quantidades, medidas, espaços, estruturas, variações e estatísticas. Um trabalho matemático consiste em procurar por padrões, formular conjecturas e, por meio de deduções rigorosas a partir de axiomas e definições, estabelecer novos resultados.

Se viajarmos pelo mundo da história da matemática, notaremos que os matemáticos contemporâneos formulam afirmações sobre conceitos abstratos que podem ser verificadas por meio de demonstrações. De acordo com (BOYER; MERZBACH, 2019) por muitos séculos a matemática foi considerada a ciência dos numeros, grandeza e forma. E se procurarmos os primeiros exemplos de atividade matemática, a história nos apontará resquícios arqueológicos que refletem a conciência humana nas operações numéricas, contagem e formas geométricas.

Para (SANTOS; BICUDO, 2015), um fazer artístico caracterizado por um modo próprio de sentir e ordenar as experiências no mundo, favorece a articulação de distintas disciplinas, auxiliando até no desenvolvimento de estratégias para resolver um problema. Em suas especificidades, a arte, evidencia formas de criação humana que favorece a várias áreas. No que compete à Matemática, ao exercitar continuamente a imaginação em um pensamento artístico, abre possibilidades para caminhos de resolução de situações problemsa que podem envolver o raciocínio matemático.

Mas o que será que a Arte tem a ver com a Matemática? Onde poderemos identificar as relações entre essas áreas? E o que isto pode ter a ver com a Educação? Levando em consideração também à formação contínua do professor, ligar essas duas áreas de conhecimento beneficiará não somente o currículo escolar, bem como a sua influência que cada um exerce na sociedade em geral:

> À Escola, levamos o desafio de um ensino de Matemática provido de significado para o aluno, de forma a desempenhar um papel formativo - por desenvolver competências lógico-matemáticas, funcionais - por ajudar na resolução de problemas do dia-a-dia, e instrumental - por fazer conexões com outras áreas curriculares. Em Arte, trazemos à discussão a necessidade de pesquisarmos sobre as imagens, os sons, as palavras e os gestos, para aprender com eles, com os mundos que eles representam e com a vida das pessoas que se relacionaram ou que continuam a se relacionar com eles; é a importância e o direito de aprender a interpretar a cultura de seu tempo e espaço, com a amplitude de informações e conhecimentos sobre outros tempos e espaços. Nossos alunos em geral têm acesso a produções artísticas dos mais diferentes tipos, através do computador, da TV, do rádio, do vídeo, dos games, do cinema, dos outdoors das ruas, dos artesanatos das feiras populares, dos jornais, das revistas e de tantas outras fontes. Por que não nos apropriarmos desta riqueza na escola? Entendendo a arte enquanto linguagem, acreditando na aprendizagem de sua leitura e de sua produção, enquanto pensamento, expressão e comunicação, estar emos desenvolvendo eixos organizadores e estruturadores de subjetividades e de aquisição de novos saberes. Mais que isto, pretende-se desenvolver uma política educacional capaz de reconhecer, valorizar e respeitar diferenças e singularidades - aspecto fundamental para a sociedade em que vivemos . O que a arte na escola principalmente pretende é formar o conhecedor, fruidor, o decodificador da arte. Uma sociedade só é artistica mente desenvolvida quando ao lado de uma produção artística de alta qualidade há também uma alta capacidade de entendim ento pelo público. Desenvolvimento cultural, que é a alta asp iração de uma sociedade, só existe com desenvolvimento artístico neste duplo sentido. (ZABALZA, 2004)

Para entendermos um pouco melhor, vamos fazer um apanhado ao longo da história onde essas duas áreas de conhecimento se comunicam.

2.1 Pré - História

Na Pré-História o homem lutava contra as intempéries [1] do ambiente, tentava sobreviver, caçando para não ser caçado, buscando caminhos em um imenso mundo desconhecido e desprovido de tudo. Ainda assim encontrou inspiração para a pintura, deixando vestígios dos primeiros ensaios artísticos da humanidade. Para (ZABALZA, 2004) há registros de manifestações artísticas e matemáticas no comportamento do ser humano desde remota época, onde o pensamento matemático se expressava até na escolha da caverna, onde intuitivamente, a ideia de proporção entre espaço disponível e o número de habitantes.

Para (BARASUOL, 2006) as primeiras noções de número, grandeza e forma podiam estar relacionadas mais com a difrença do que com semelhança, mais com a desigualdade

[1] qualquer extremo das condições climáticas (vento forte, temporal, seca, calor tórrido, nevasca etc.)

do que com a igualdade, por exemplo o tamanho entre uma sardinha e uma baleia, a diferença entre um lobo e muitos, a forma mais arredondada da lua e a forma reta de um pinheiro.

Há 40.000 a.C, no período Paleolítico Superior, segundo (JESUS, 2011) temos o registro das mais antigas representações da arte baseadas nas pinturas ou desenhos gravados nas paredes e tetos das cavernas, as quais foram chamada de arte rupestre. Foram encontrados dois grandes grupos de pintura, o naturalismo, que eram representações de figuras humanas em cenas de caça, guerra e trabalho, e as figuras de animais, como mostra a Figura 1.

Figura 1 – Imagem de uma pintura rupestre naturalista, em Lascaux complexo de cavernas ao sudoeste de França.

Fonte: http://www.versoseuniversos.com.br

Mais tarde no período Neolítico, cerca de 10 a 5 mil anos a. C., segundo (PROENÇA, 2007) o homem começa a ficar mais acomodado, pois a produção de alimentos começou a ser feita por ele, e já não se preocupava com a mobilidade em busca de comida, originando assim sedentarismo. Houve dois grandes avanços, como o desenvolvimento da agricultura e a domesticação dos animais. Com isso uma noção de sociedade precisou ser estruturada e as tarefas passaram a serem divididas entre homens e mulheres, cuidando da segurança, caça e pesca, e plantando, colhendo e educando os filhos, respectivamente. Com tudo isso o homem do neolítico começou a tecer panos, a fabricar cerâmicas e a construir suas primeiras moradias. Além de descobrir o fogo através do atrito. Com todas essas conquistas ocorreu um grande reflexo na arte, onde o homem deixa o instinto de apenas caçador e o sua observação foi substituido pela abstração e racionalização.

No neolítico, além das pinturas de animais nas rochas, também são registrados a vida cotidiana dos habitantes, onde a figura humana torna-se o tema principal. A maneira de desenhar passou por transformações significativas. De acordo com (JESUS, 2011) foi nesse período que as formas começam a se geometrizar dando origem ao geometrismo, representado na Figura 2, através de linhas paralelas, grupos de pontos, círculos concêntricos, cruzes, espirais e triângulos.

Figura 2 – Imagem de uma pintura rupestre geometrismo, região de Serranópolis, sudoeste de Goiás.

Fonte: http://www.oarquivo.com.br

Os utensílios fabricados em argila eram frequentemente decorados com desenhos abstratos. Surge o comércio e o dinheiro, representado por sementes, que facilitava a troca de materiais. Tais peças de artesanato, roupas e outros utensílios também serviam como objetos de troca nas aldeias. O geometrismo pode ser considerado uma fase posterior ao naturalismo, fase transição do homem que vivia somente da caça para aquela que não dependia mais somente da mesma.

> A consequência imediata foi o abandono do estilo naturalista que predominava a arte do Paleolítico, e o surgimento de um estilo simplificador e geometrizante. Em lugar de representações que imitam a natureza, vamos encontrar sinais e figuras que mais sugerem do que reproduzem os seres. (PROENÇA, 2007)

Segundo (BARASUOL, 2006), o homem do Neolítico teve uma tendência para os padrões geométricos. A ornamentação neolítica através da pintura da cerâmica, o trançado de junco e a produção de cestos, desenvolveram à noção de plano e espaço, além de conhecimentos como a simetria e a semelhança.

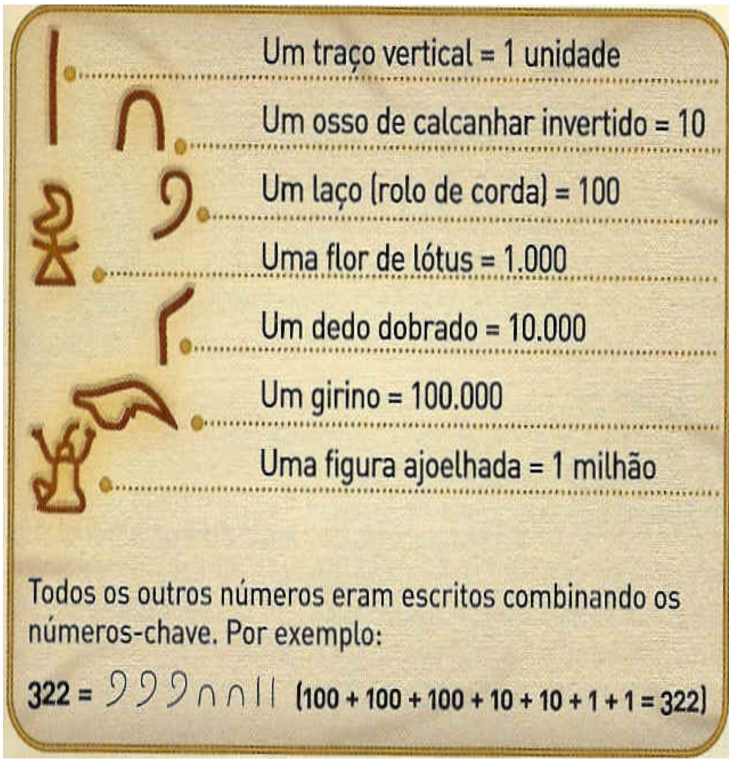
Com o desenvolvimento dessas atividades humanas, onde o homem começa a plantar, a produzir seus alimentos e a domesticar os animais, surge a necessidade de contar. Para (SILVA, 2014) pode se dizer que nesse período houve a elaboração de um processo rudimentar de contagem, com ranhuras em ossos, marcas em galhos, desenhos em cavernas e pedras, e a relação de quantidades, ou seja, para cada unidade obtida, era colocada uma pequena pedra em um saquinho.

2.2 Antiguidade

A arte antiga refere-se àquela desenvolvida pelas Antigas Civilizações, que se estende até a queda do Império Romano do Ocidente, em 476 d.C, podemos encontrar conhecimentos matemáticos nas arte egípcia, grega e romana.

Segundo (BECK, 2010) , o homem egípcio foi capaz de grandes realizações, dentre elas, a construção das pirâmides, a invenção de um calendário solar e a criação de um sistema de numeração onde utilizavam um sistema de numeração não-posicional, ou seja, a posição ocupada pelos símbolos que representavam as quantidades não era relevante. A principal desvantagem do sistema de numeração egípcio era a representar um número de valor alto, pois se tornava uma tarefa árdua devido à repetição de símbolos. Como podemos ver na Figura 3, o sistema de numeração dos egípcios era representado por meio de hieróglifos. De acordo com (SILVA, 2014), essa numeração era baseada em sete números chaves, como: 1, 10, 100, 1000, 10000, 100000 e 1000000, sendo cada um deles representado por um símbolo. Esse sistema de numeração servia para efetuar cálculos que envolviam números inteiros. Para os egípcios, a principal operação matemática era soma, da qual derivavam todas as outras operações.

Figura 3 – Imagem do sistema de numeração egípcio .



Fonte: BECK, Vinicius Carvalho: A matemática no Egito, pg 52

Hieróglifo pode ser definido como uma escrita sagrada e provavelmente a escrita organizada mais antiga do mundo, e era basicamente usada para marcações em túmulos e templos. Segundo (BECK, 2010) a escrita hieroglífica utiliza signos, no lugar de letras, o que, de certa forma, instiga e aumenta a magia dessa escrita. Pelo fato de ter sido feita em inscrições harmoniosas e em cores, se tornou a mais bela forma, já inventada, de grafar uma linguagem falada, como podemos ver na Figura 4.

Figura 4 – Imagem de Hieroglifos em parede de templo egípcio.

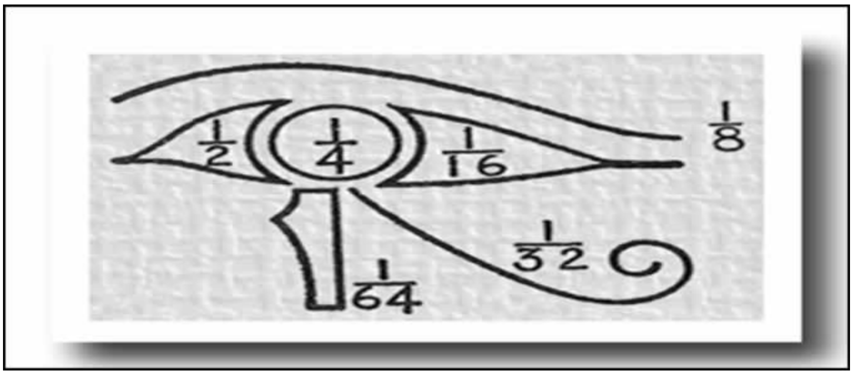
Fonte: https://www.infoescola.com/civilizacao-egipcia/hieroglifo

De acordo com (BOYER, 1996), por volta do ano de 3.000 a.C. as margens do Rio Nilo surgiu o sistema fracionário no Antigo Egito. A economia egípcia estava baseada no cultivo de terras e para que a produção ocorresse de uma forma eficaz as terras destinadas ao cultivo eram divididas entre os habitantes. Segundo (BECK, 2010) devido as enchentes era necessário periódicamente fazer o cálculo da área do terreno inundado. Essas medições eram efetuadas com cordas através de pessoas a mando do governo, conhecidos como estiradores de corda. Mesmo as medições sendo bastante precisas, dificilmente a área do terreno depois da cheia cabia um número inteiro de vezes na área do terreno antes das cheias. Para amenizar o problema, os egípcios criaram os números fracionários, que eram representados por frações.

Segundo (BAKOS, 2005), os egípcios utilizavam um sistema de frações baseado em caracteres distintos, tipo $\frac{1}{2}$ era um símbolo, $\frac{3}{4}$ era outro, etc., mas tinham alguma regra geral em especifico, as frações do tipo $\frac{1}{2n}$, originadas de divisões sucessivas, que seriam tipo $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}$ e $\frac{1}{64})$ tinham símbolos especiais, a junção desse símbolos correspondiam ao olho de Hórus, em Héat [2], como nos mostra a Figura 5.

[2] Héqat era uma medida de volume ou capacidade e empregava-se para medir o trigo e a cevada e equivalia a 4.8 litros.

Figura 5 – Imagem do olho de Hórus



Fonte: Bakos(2005, p. 60).

Segundo (BOYER, 1996), o processo de medição das terras consistia em estirar cordas e verificar o número de vezes que a unidade de medida estava contida no terreno. Havia uma unidade de medida assinada na própria corda. As pessoas encarregadas de medir esticavam a corda e verificavam quantas vezes aquela estava contida nos lados do terreno as unidades de medida. Daí, serem conhecidos como estiradores de cordas.

Outro encontro entre a matemática e arte nos povos egipcios está nas pirâmides, considerados importantes monumentos artísticos. Segundo (PROENÇA, 2007), por volta dos anos 3000 - 2200 aC, estruturas feitas de pedra calcária foram construídas para atestar a grandiosidade política e religiosa dos faraós. As grandes pirâmides revelam o domínio dos egípcios na construção, pois nao existiam nenhum tipo de argamassa entre os blocos de pedra que moldavam as imensas paredes. Para (BECK, 2010), ao construir tais monumentos dotados de grande beleza e engenhosidade revelam que os egípcios possuíam técnicas de engenharia bastante avançadas para a sua época.

Segundo (BRITO, 2007), as pirâmides são estruturas monumentais construídas em pedra com uma base retangular e quatro faces triangulares que convergem para um vértice. Para os povos egípcios, elas representavam os a luz do Sol brilhando em direção à Terra. Como podemos ver na Figura 6. De acordo com (BELUSSI; BARISON, 2016), as pirâmides foram construídas baseadas a razão áurea, onde a razão entre a altura de uma face e a metade do lado da base era igual ao número de ouro.

Na arte grega o homem era representado como centro da perfeição das obras de arte. Eram realizadas pinturas, estátuas, edificações e outros monumentos que valorizavam o ser humano em todos os aspectos. Segundo (PROENÇA, 2007), o povo grego foi na antiguidade um dos que exibiam manifestações culturais mais livres, não se rendendo às ordens de reis e sacerdotes, pois acreditavam que o ser humano era a criatura mais incrível do universo.

Os gregos se destacaram na pintura, na arquitetura e na escultura, as quais eram

Figura 6 – Imagem das Pirâmides de Quéops, Quéfren e Miquerinos, no deserto de Gizé.

Fonte: Història da Arte, Graça Proença, pag 18

concebidas à fim de serem belas e perfeitas. Para (COSTA, 2008), a beleza é algo que nos dá prazer, ficamos encantados quando estavamos executando algo que gostamos, e o espanto diante da beleza é algo contagiante. Para o mesmo autor, a matemática também tem suas belezas, seja nas formas, figuras ou sólidos geométricos, nas equações precisas, portanto, nem sempre as pessoas conseguem admirá-la, porque não se tem consciência ou conhecimento de tal beleza.

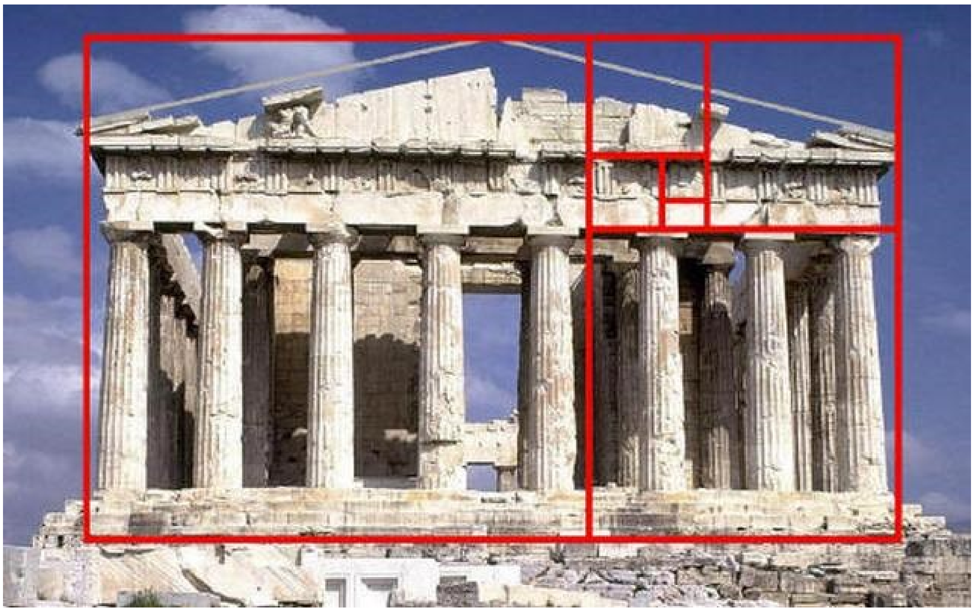
Podemos encontrar uma ligação entre matemática e arte na arquitetura grega influenciadas pelas medidas, pelas proporções, organizadas sobre uma estrutura simétrica. Para (SERENATO, 2008), a arquitetura grega seguia normas rígidas de simetria e proporcionalidade usando a matemática, na busca da harmonia das formas.

Segundo (MARTINS, 2008), para os gregos, o retângulo áureo representava a lei da beleza matemática, presente em sua arquitetura clássica e em suas esculturas.

Para (LAURO, 2005), os gregos consideravam mais harmoniosos e belos os retângulos que estivessem numa proporção conhecida como seção áurea [3]. O templo grego Partenon, construído no século V a.C., como podemos ver na Figura 7, talvez seja o exemplo mais representativo dessa proporção, que nos revela a preocupação dos gregos em realizar obras extremamentes harmônicas. O número de ouro foi representado pela letra grega Φ, em homenagem ao arquiteto e escultor Fídias, que utilizava a razão aúrea em suas obras.

[3] A seção áurea é o resultado da divisão de um segmento em média e extrema razão, isto é, a razão que resulta entre o menor e o maior segmento é igual à razão entre o segmento maior e o todo. Essa razão é também chamada de razão áurea ou divina proporção.

Figura 7 – Imagem da fachada do Partenon com o retângulo de ouro.



Fonte: https://projetobatente.com.br/regra-aurea-na-arquitetura

A Grécia Antiga passou por cinco estilos diferentes na pintura, geralmente essa pintura era realizada em cerâmicas. Segundo (SERENATO, 2008) um deles era denominado como estilo geométrico. Havia duas variaçoes, ou as peças eram decoradas apenas com figuras geométricas, ou era uma concepção geométrica com inserção de figuras humanas e de animais, como podemos ver na Figura 8.

Figura 8 – Imagem do Vaso de Dipylon, séc. VIII a.C.

Fonte: Aproximações Interdisciplinares entre Matemática e Arte, pag 59

De acordo com (FARTHING, 2011), a civilização romana ocorreu por volta 753 a.C., envolta por muitas lendas e mitos. Sua arte sofreu influencias da cultura etrusca [4] e grega, expressando o ideal de beleza, entre os séculos XII e VI a.C., e representa até hoje o legado artístico romano. Construções como anfiteatros, templos, aquedutos, muralhas, dentre outras, o que mostra a magnitude do que foi a arquitetura da civilização romana.

Noções de arcos, semicírculos, círculos, elipses e vistas tridimensionais eram características da arquitetura romana. Segundo (PROENÇA, 2007), uma das características culturais mais importantes deixadas pelos etrucos aos romanos, foi o arco e a abóbada nas construções. Esses elementos permitiram aos romanos ampliação dos espaços internos, com reduçao de colunas. Ja na arquitetura grega as construções eram repletas de colunas, o que acarretava a redução do espaço de circulação. Podemos verificar o arco etrusco presente na Figura 9.

Figura 9 – Imagem do Arco Etrusco

Fonte: http://giscreatio.blogspot.com/2010/07/arte-em-roma.html

Com o uso de arcos e abóbadas, os romanos conseguiram construir edifícios bastante amplos. Segundo (PROENÇA, 2007)), não era mais necessário um palco de frente para um auditório em semicírculo, como faziam os gregos, os romanos se caracterizava por um espaço central elíptico, onde aconteciam os espetáculo, esse espaço era circundado com um grande número de filas de assentos que formavam uma arquibancada, como podemos ver na Figura 10. A luta de gladiadores era um espetáculo muito admirado pelos romanos, com essa construção o evento podia ser visto de qualquer ângulo.

[4] representam uma das civilizações da antiguidade que habitaram a península itálica a partir do século IX a.C., antes dos Romanos. Eles desenvolveram uma cultura original, e, para a época estavam bem evoluídos em relação a sua arte (artesanato, arquitetura, escultura) e engenharia.

Figura 10 – Imagem do Anfiteatro Coliseu de Roma, séc. I, vista superior

Fonte: Google Earth.

Segundo (FARTHING, 2011), na pintura romana era aplicada o termo *Trompe L'oeil* [5], o objetivo do procedimento é, portanto, alterar a percepção de quem vê a obra, onde a imagem numa superficie bidimensional era pintada de maneira tão realista que parecia tridimensional.

Segundo (CAVALCANTE; VIEIRA,), durante a Antiguidade Clássica, gregos e os romanos usaram em suas composições a chamada perspectiva intuitiva na qual a ideia de profundidade era obtida diminuindo figuras de acordo com cada plano e o que estava em primeiros planos eram pintados mais escuros que os planos seguintes, conforme a figura Figura 11.

Figura 11 – Imagem da Pintura Murai Tumba, de Beni Hasan, Tebas

Fonte: A Relação Arte e Matemática e sua Aplicação na Sala de Aula, pg 02.

[5] Recurso técnico-artístico empregado com a finalidade de criar uma ilusão de ótica

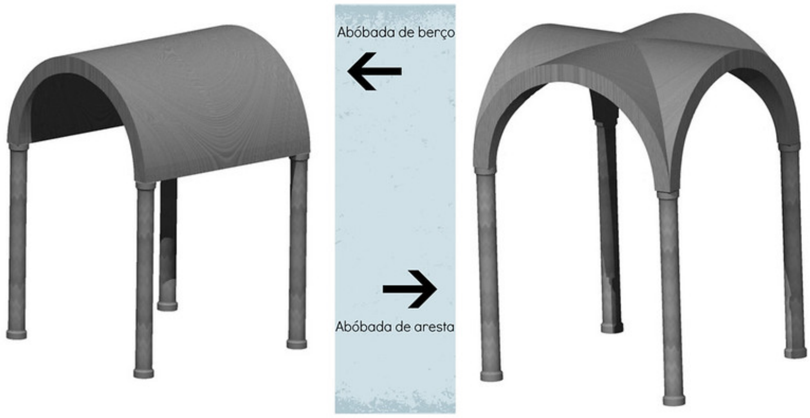
2.3 Idade Média

Segundo (PROENÇA, 2007), a Idade Média teve iniciou em 476 d.C., quando Roma foi invadida pelos bárbaros, praticamente até o século IX, causando uma decadência da cultura romana. Seus princípios eram diferentes e sua arte se baseou no decorativismo, sem nenhuma preocupação com as figuras humanas. A Igreja Católica tinha muita influência sobre na arte medieval, onde os ensinamentos da bíblia eram reproduzidos nas pinturas, nos vitrais das igrejas, em livros e esculturas. Eram criados para ensinar a religião, pois, a maioria das pessoas eram analfabetas e a educação era privilégio da nobreza.

> A figura do Diabo teve uma importante função durante a Idade Média servindo como principal referência para a propaganda da Igreja Católica. As terríveis torturas a que o homem mau seria submetido no inferno e as maravilhas do paraíso povoavam os discursos e conduziam o imaginário do período. A imagem grotesca e aterradora visava assustar as pessoas para que obedecessem as leis morais e se afastassem dos pecados. (CAPELLARI, 2011)

De acordo com (PROENÇA, 2007), uma das características mais significativas que a arquitetura românica apresenta é a utilização de abóbodas de aresta e de berço. A primeira era mais simples e consistia num semicírculo chamado arco pleno. Já a segunda consistia na intersecção, em ângulo reto, de duas abóbodas de berço apoiada sobre pilares, que exigia um plano quadrado para se apoiar. Como podemos verificar na Figura 12.

Figura 12 – Imagem de Abóbodas de Berço e de Arestas



Fonte: https://www.turomaquia.com/caracteristicas-de-uma-igreja-romanica-san-martin-de-fromista

De acordo com (CAPELLARI, 2011), como as manifestações artísticas deste período era fortemente influenciada pela fé cristã, as obras geralmente encontravam-se pintadas e esculpidas nas igrejas até mesmo a concepção arquitetônica. Dois principais estilos se destacaram nesse período: o românico e a gótico.

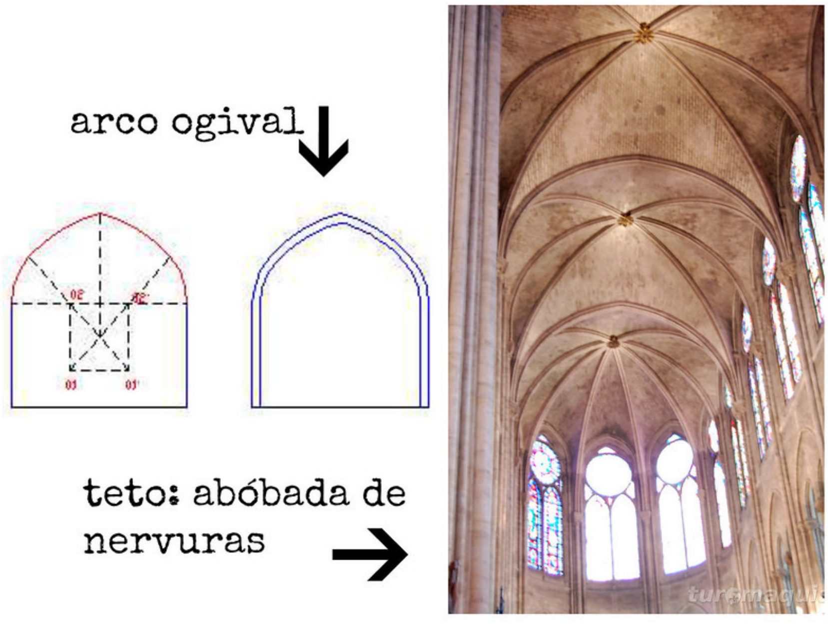
Para (SERENATO, 2008), com a ascensão do Cristianismo, se tornando a religião oficial da Idade Média, ocorreu um caracterização da arquitetura voltada para a construção de igrejas. Podemos ver aqui as nítidas contribuições da matemática na arte, com o uso mais habilidoso da construção com colunas e arcos.

De acordo com (PROENÇA, 2007), a pintura foi influenciada pela arte bizantina. Uma das principais características da pintura românica é a deformação. Onde artista fazia a interpretaçaõ de modo místico da realidade, e os sentimentos religiosos nas figuras apareciam de forma desproporcional.

Para (SERENATO, 2008), a pintura românica tinha função de propagar a crença, seus temas em geral eram religiosos, e a técnica consistia na colocação de pedras coloridas de formatos geométricos, um do lado do outro, sobre uma superfície. Em seguida os espaços eram preenchidos com uma mistura de cal, areia e óleo, proporcionando o resultado final à pintura.

Podemos encontrar características de caráter matemático na arte gótica, que nasceu em meados do século XII. Segundo (PROENÇA, 2007), a nova arquitetura foi chamada no início desdenhosamente de gótica, mais tarde perdeu esse caráter depreciativo e ficou conhecida como a arquitetura dos arcos ogivais.[6] Tais arcos deram origem a abóboda de nervuras, deixando os arcos visíveis e consequentemente possibilitando a construção de igrejas mais altas. Podemos observar os arcos ogivais e a abóboda de nervuras na Figura 13.

Figura 13 – Imagem do Arco Ogival e Abóboda de Nervuras



Fonte: https://www.flickr.com/photos/23551937@N05/32458488704

[6] São arcos formados a partir da junção de dois seguimentos de círculos.

Para (LAURO, 2005), a estabilidade das catedrais góticas, apesar da grande altura, se dá por sua geometria especial. Dada pela disposição retangular de arcos e pilares, onde os arcos ogivais são construídos sobre um pentagrama e a proporção áurea também está presente na estrutura da catedral e na espessura de seus pilares.

Segundo (PROENÇA, 2007) na fachada das altas torres de muitas igrejas há a presença de uma grande janela redonda, chamada rosácea.[7] Podemos notar isso na Figura 14. A construção da Catedral de Notre Dame, em Paris, foi iniciada por volta de 1155, sendo considerada a mais famosa das catedrais construídas seguindo a arquitetura gótica.

Figura 14 – Imagem da Catedral de Notre-Dame, em Paris.

Fonte: https://static.historiadomundo.com.br/imagens/catedral-de-notre-dame.jpg

2.4 Idade Moderna

A Idade Moderna é o período compreendido entre 1453 e 1789. Expansão marítima, reforma religiosa, renascimento, absolutismo, iluminismo, revolução francesa foram os princípais acontecimentos. Marcado por intensas mudanças de ordem econômica, científica, social e religiosa, que culminaram no surgimento de um sistema capitalista.

No campo artístico, os movimentos do Renascimento e do Barroco, apresentam algumas ligações entre a matemática e a arte. O Renascimento foi um reviver dos ideais da cultura clássica, mas não somente isso, foi um dos movimentos que mais influenciou a arte moderna. E não só a arte, mas tambem nas áreas científicas, filosóficas, literárias, urbanas e comerciais.

[7] Um elemento arquitetônico caracterisitico do estilo gótico, presente em quase todas as igrejas construidas entre os séculos XII e XIV

> Na verdade, o Renascimento foi um momento da História muito mais amplo e complexo do que um simples reviver da antiga cultura greco-romana. Ocorreram nesse período muitos progressos e incontáveis realizações no campo das artes, literatura e das ciências, que superam a herança clássica. (PROENÇA, 2007)

Contudo, foi no Renascimento que arte e ciência estiveram muito próximas. As características de caráter matemático dentro da produção artística renascentista que melhor representa esse período é o uso da seção áurea e a perspectiva [8], de acordo com (SERENATO, 2008).

A seção áurea já era utilizada pelos egípcios, na construção das pirâmides, e também pelos gregos nas construçoes arquitetônicas, como já foi citado anteriormente. Mas segundo (SERENATO, 2008), foi na arte do Renascimento que a noção de proporção fica mais consolidado, aliando arte e matemática. Leonardo da Vinci, por volta de 1490, cria o "Homem Vitruviano", Figura 15, um homem inserido nas proporções perfeitas de um quadrado e na forma ideal de um círculo. Com braços e pernas estendidos, e o umbigo como o centro do círculo, demonstrando a proporcionalidade perfeita entre as partes do corpo.

Figura 15 – Imagem da obra "O Homem Vitruviano", de Leonardo da Vinci, 1490

Fonte: http://artenarede.com.br/blog/wp-content/uploads/2014/08/da-Vinci-Homem-Vitruviano.jpg

[8] Método que consiste em criar a ilusão de objetos tridimensionais em superfícies planas.

O “Homem Vitruviano” representava o ideal clássico de beleza, equilíbrio, harmonia das formas e perfeição das proporções. Segundo (QUEIROZ, 2007), Leonardo da Vinci, se inspirou na obra “De Architectura” do arquiteto Marcus Vitruvius Pollio, que viveu no século I a.C. que apresentava um modelo ideal para o ser humano, com as proporções ideais entre as partes do corpo.

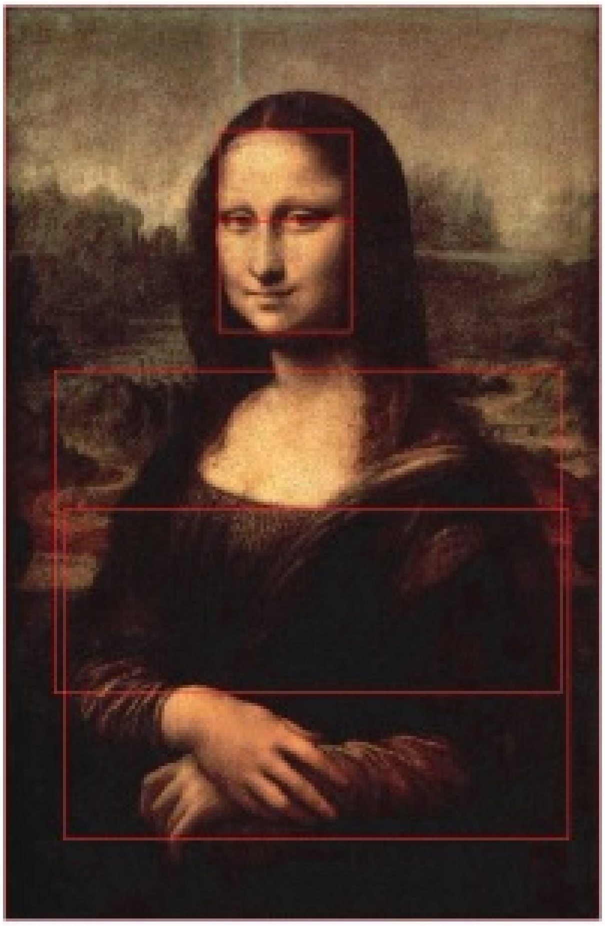
Para (OS; DA; MODA,), o “Homem Vitruviano” é considerado símbolo da simetria básica do corpo humano. Se observarmos, a área do círculo é a mesma área do quadrado e este desenho pode ser considerado um algoritmo matemático para calcular o valor do numero $\Phi(= 1,618)$. E a cabeça equivale, aproximadamente, a um oitavo da altura total.

> Os quatro dedos fazem uma palma e quatro palmas fazem um pé, seis palmas fazem um cúbito; quatro cúbitos fazem a altura de um homem. Quatro cúbitos fazem um passo e vinte e quatro palmas fazem um homem. Se abrir as pernas até termos descido um quatorze avos de altura e abrirmos os braços até os dedos estarem ao nível do topo da cabeça então o centro dos membros abertos será no umbigo. O espaço entre as pernas abertas será um triângulo eqüilátero. O comprimento dos braços abertos de um homem é igual à sua altura. Desde as raízes dos cabelos até ao fundo do queixo é um décimo da altura do homem; desde o fundo do queixo até ao topo da cabeça é um oitavo da altura do homem; desde o topo do peito até ao topo da cabeça é um sexto da altura do homem; desde o topo do peito até às raízes do cabelo é um sétimo da altura do homem; desde os mamilos até ao topo da cabeça é um quarto da altura do homem. A maior largura dos ombros contém em si própria a quarta parte do homem. Desde o cotovelo até à ponta dos dedos é um quinto da altura do homem e desde o cotovelo até ao ângulo da axila é um oitavo da altura do homem. A mão inteira será um décimo da altura do homem. O início dos órgãos genitais marca o centro do homem. O pé é um sétimo do homem. Da sola do pé até debaixo do joelho é um quarto da altura do homem. Desde debaixo do joelho até o início dos órgãos genitais é um quarto do homem. A distância entre o fundo do queixo e o nariz e entre as raízes dos cabelos e as sobrancelhas é a mesma e é como a orelha, um terço da cara. (OS; DA; MODA,)

Insistente pela busca da beleza e perfeição, Leonardo da Vinci ao criar a sua mais famosa obra, “Mona Lisa”, não poupou harmonia através do uso de retângulos áureos. Como nos afirma (FERRER, 2005), podemos observar um retângulo de ouro inserido em torno do rosto, se traçarmos uma linha horizontal nesse retângulo na altura do eixo dos olhos, vamos obter um quadrado e um retângulo áureo. Podemos perceber outra proporção áurea na altura do pescoço até o final do busto, e outra, do busto até o umbigo, além das próprias dimensões da tela, que também formam um retângulo áureo. E assim podendo encontrar várias outras dimensões da obra com proporções áureas. Como podemos ver na Figura 16.

Segundo (FERRER, 2005), Da Vinci relacionou matemática à suas obras, combinando precisão e inteligência, podemos verificar isso tambem em outras obras como: “A Anunciação” e “A Ultima Ceia”, possuindo as proporções divinas.

Figura 16 – Imagem da pintura “Mona Lisa”, com aplicação de retângulos áureos



Fonte: O Número de Ouro na Arte, Arquitetura e Natureza, pag 09.

Segundo (PROENÇA, 2007), a preocupação com o rigor científico era encontrado com facilidade nas diferentes manifestações artísticas, seja na representação do espaço, na arquitetura, na pintura, na escultura, no volume. Os artistas sempre evidenciavam a racionalidade e a dignidade do ser humano.

Para (SERENATO, 2008) a seção áurea teve uma grande influência no crescimento da arte renascentista, mas, uma revolução ainda maior ocorreu com a descoberta da perspectiva, uma construção geométrica que dá a sensação da tridimensionalidade dos objetos, e essa descoberta revolucionou tanto a arte quanto a geometria. Para ele, as formas representadas nas telas eram planejadas e calculadas, e a geometria era um componte ativo tornando a arte da pintura uma forma de descrever o mundo.

Para (MENDONÇA, 2013), a maior contribuição da pintura Renascentista foi sua nova maneira de representar a natureza, através da técnica e a perspectiva matemática, criando uma ilusão de espaço tridimensional em uma superfície plana, procurando criar um efeito de profundidade, e a matemática serviu de suporte para as projeções gráficas.

De acordo com (PROENÇA, 2007), Paollo Uccello procura compreender o mundo segundo os conhecimentos científicos e nas suas obras tenta recriar a realidade segundo os princípios matemáticos. Em sua obra “O Milagre da Hóstia”, como mostra a Figura 17, as linhas convergem para o centro da obra, o chamado ponto de fuga, criando assim a sensação de um espaço tridimensional.

Figura 17 – Imagem da obra “O Milagre da Hóstia”, Paolo Uccello

Fonte: Aproximações Interdisciplinares entre Matemática e Arte: Resgatando o lado Humano da Matemática , pag 62.

De acordo (FARTHING, 2009), Piero della Francesca foi um aprendiz de pintor desde os 15 anos, mas também um talentoso matemático, considerado o gênio da geometria, escreveu tratados matemáticos com resultados consideráveis, em seu livro Perspectiva na Pintura, descreve a nova ciência e teve uma enorme influência na arte renascentista.

Segundo (PROENÇA, 2007), para Piero della Francesca as cenas de suas obras servem como suporte para apresentar uma composição geométrica. Na sua obra “Ressurreição de Jesus”, Figura 18, as figuras humanas ali representadas compõe uma pirâmide, cujo vértice se encontra na cabeça do Cristo e a base são os soldados sentados no chão próximo ao túmulo.

Para o mesmo autor (PROENÇA, 2007), na obra “O Batismo de Jesus”, ele retrata Cristo sendo batizado por João, a composição baseia-se num quadrado e num círculo. O quadrado representa a terra, o círculo simboliza o céu. A figura de Cristo é o centro na composição. A linha central passa pelas suas mãos unidas, ao longo da água que escorre da vasilha, atravessa a pomba e segue até o topo do arco, no alto do painel, formam um eixo

Figura 18 – Imagem da obra “Ressureição de Jesus”, Piero della Francesca

Fonte: História da Arte, Graça Proença, pag 85.

que divide a pintura em duas partes simétricas. A segunda divisão é criada pela árvore à esquerda, a abertura do braço e perna de João, que formam dois ângulos do mesmo tamanho. Como podemos ver na Figura 19.

Figura 19 – Imagem da obra “Batismo de Jesus”, Piero della Francesca

Fonte: https://slideplayer.com.br/slide/1786262/

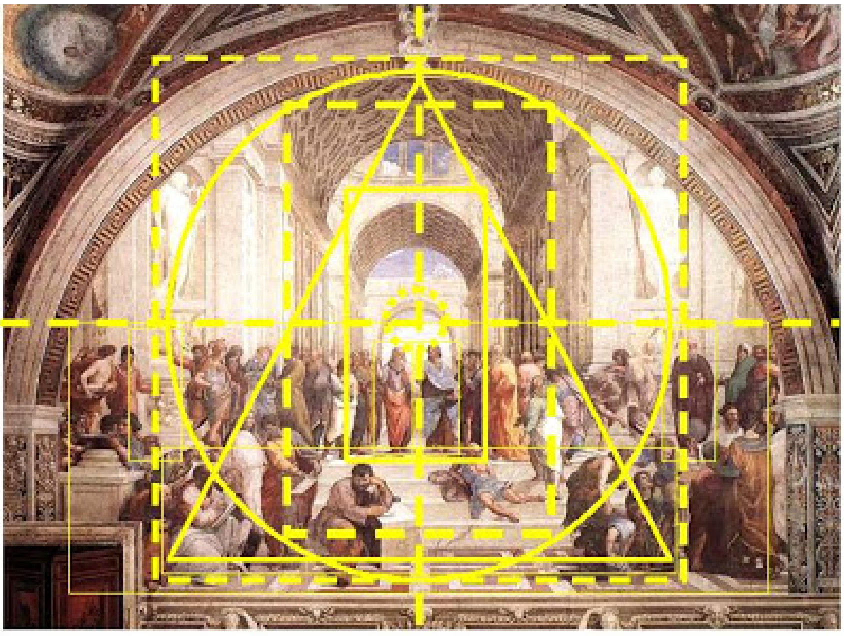
Outro grande pintor do Renascimento, segundo (MENDONÇA, 2013), foi Rafael Sanzio(1483-1520), considerado o maior pintor do período, suas obras tinha uma carga de harmonia à dramaticidade, empregando cores, formas e volumes com equilíbrio, representando a doçura, a grandeza e a perfeita harmonia. Para (PROENÇA, 2007), suas obras transmitiam ordem e segurança ao observador, eram dispostas em espaços amplos, claros e com uma simetria equilibrada. Observemos a sua obra "A Escola de Atenas", Figura 20, já na Figura 21, podemos observar a precisão da simetria geométrica, os polígonos são concêntricos, afunilando a visão para o ponto de fuga, o qual exerce considerável efeito sobre a perspectiva da sobreposição dos planos nos quais os personagens estão simétricamente dispostos: um primeiro plano, mais frontal, e abaixo da linha da metade do quadro; um segundo plano, mais elevado, onde se colocam os principais personagens do quadro no sentido da concentricidade e um terceiro plano mais elevado e mais abstrato remetendo ao infinito.

Figura 20 – Imagem da obra "A Escola de Atenas", Rafael Sanzio

Fonte: Tudo sobre Arte, pg 174

Na arquitetura, segundo (PROENÇA, 2007), o período renascentista buscava a ordem, equilíbrio e simetria, eles queriam tirar a visão da grandiosidade almejada pelas catedrais góticas. Portanto, foram estabelecidos princípios matemáticos, que faziam com que o observador enxergasse a arte de qualquer ponto que observasse. Uso de Arcos de volta Perfeita, abóbodas, cúpulas, colunas e a preocupação com a proporção eram as

Figura 21 – Imagem da obra A Escola de Atenas estudo esquemático



Fonte: http://kafenacoca.blogspot.com/2008/03/artes-perspectiva-simetria-e-ponto-de.html

características da arquitetura do Renascimento. Brunellechi (1377-1446), foi um exemplo de artista completo, era pintor, escultor e arquiteto, além de dominar conhecimentos da matemática e da geometria. Mas foi como arquiteto que desenvolveu seus mais importantes trabalhos. Entre eles a cúpula da Catedral de Florença, conforme Figura 22, que foi assentada sobre uma parede de pedra no formato octagonal, já construida. A Construção ficou tão perfeita que parecia ter sido projetada no projeto original.

Figura 22 – Imagem da Catedral de Florença

Fonte: História da Arte, Graça Proença, pag 80.

A arte barroca se desenvolveu no século XVII, num período importante da história da civilização ocidental, onde ocorreram significativas mudanças, entra elas a Reforma Protestante, apesar de ter um cunho religioso, as consequências ultrapassaram as questão da fé. De acordo com (PROENÇA, 2007), no período barroco a arte é vista como uma forma de propagar o catolecismo e ampliar sua influência, romperam o equilíbrio entre a arte e a ciência que havia no Renascimento. Na pintura barroca é possivel a percepção de alguns conhecimentos matemáticos, entre eles, é a disposição dos elementos presentes na obra, que sempre formam um composição em diagonal. Como podemos ver na Figura 23, na obra: “Cristo em Casa de Maria e Marta”, pintada por Tintoretto em 1578.

,

Figura 23 – Imagem da obra “Cristo em Casa de Maria e Marta”, Tintoretto.

Fonte: História da Arte, Graça Proença, pag 104.

A matemática era utilizada pela arte barroca, eles acreditavam que a suas fórmulas eram referenciadas pelo divino. Segundo (MELLO; LEITÃO, 2005) se interessaram pelas questões matemáticas e geométricas da projeção espacial de um plano como um instrumento de mensagem aos fiéis, era um veículo efetivo da comunicação e da representação visual. As pinturas realizadas nos tetos das igrejas dos palácios, além de efeito decorativo, impressionava pelo número de figuras e pela ilusão criada pela perspectiva, como se o teto se abrisse para o céu, de onde os anjos e santos convidam os homens para a santidade, nos reafirma (PROENÇA, 2007). Era a chamada técnica *Trompe L'Oeil*, já citada na arte romana.

Segundo (SANTOS, 2012), a técnica *Trompe L'Oeil*, foi amplamente difundida no período Barroco, que sua tradução do francês significa engana o olho, que consiste na ilusão de ótica que junta arquitetura e ilusionismo. Compostas por pinturas em tetos planos no interior da igrejas, dando a impressão que o teto seria uma extensão do céu, fazia com que o observador teria a ilusão de estar diante de uma imagem tridimensional real e não de uma imagem bidimensional. Como podemos ver na Figura 24, na obra "A Glória de Santo Inácio", pintada por Andrea Pozzo.

,

Figura 24 – Imagem da obra "A Glória de Santo Inácio", Pozzo

Fonte: História da Arte, Graça Proença, pag 106.

2.5 Idade Contemporânea

A Idade Contemporânea inicia na Revolução Francesa,(1789). Acreditava na razão do homem e não na religiosidade. Foi também nesse período que ocorreram as grandes guerras e a revolta de artistas através da arte.

Segundo (FARTHING, 2011), o Neoclassicismo se dedicou ao retorno dos princípios gregos, romanos e renascentistas. Tanto as construções civis quanto as religiosas, seguiram os modelos greco-romanos ou as edificações do Renascimento. A pintura baseada no equilíbrio, harmonia e simetria da pintura renascentista, principalmente no pintor Rafael Sanzio.

De acordo com (SERENATO, 2008), os artistas neoclássicos elegem a racionalidade. Para eles, a arte era vista como uma atividade mental, priorizam o desenho e a linha, e não a cor, pelo seu teor intelectual. De um modo geral, as obras neoclássicas apresentam, num primeiro plano, desenhos com exatidão, e o fundo geralmente incluía elementos romanos, como arcos ou colunas, como podemos observar na Figura 25. A simetria e as linhas retas eram constantes, privilegiando aspéctos racionais e objetivos na construção de uma obra. Seguindo este raciocinio, pode se dizer, que a matemática possui também um lado neoclássico, por tratar-se de uma ciência formal, racional, rigorosa e lógica.

,

Figura 25 – Imagem da obra “O Juramento de Horácios”, 1784

Fonte: Aproximações Interdisciplinares Entre Matemática E Arte: Resgatando O Lado Humano Da Matemática, pag 79.

O Impressionismo foi um importante movimento onde a pintura deu início a arte do século XX. Para (PROENÇA, 2007), o movimento se baseava na observação minuciosa da luz sobre os objetos, suas variações e como elas poderiam aparecer na tela dos pintores impressionistas. As figuras não deviam apresentar contornos nítidos, pois a linha era uma abstração criada pelo ser humano para representar as imagens. Segundo (JESUS, 2011), a técnica dos impressionistas marca o momento em que a arte recebe uma influa técnica dos impressionistas marca o momento em que a arte recebe uma influência notável da ciência. Os artistas descobrem que a cor era uma refração da luz, e assim levaram a compreensão da luz natural para seus trabalhos. Do impressionismo surge o pontilhismo, também designado por divisionismo. O Pontilhismo está centrado no modo como se produz a cor com o pincel, num modelo de natureza matemática, feita através de um sistema de pontos uniformes. Como podemos observar na Figura 26.

,

Figura 26 – Imagem da obra “Uma tarde de Domingo na Ilha da Grande Jatte”, 1884 -1886

Fonte: http://seuratvisuais.blogspot.com/2012/11/uma-tarde-de-domingo-na-ilha-da-grande.html

De acordo com (PROENÇA, 2007), o seculo XIX foi cheio de fortes mudanças, devido a Revolução Industrial e a Revolução Francesa. Na área artística se tornou mais complexa, os movimentos produziam arte seguindo diferentes concepções e tendências, esses movimentos se caracterizaram como uma reação ao Neoclassicismo. A pintura romântica ao negar a estética neoclássica, se aproxima mais da arte barroca, um aspecto matemático que podemos notar também nos quadros do romantismo, é a composção em diagonal, sugerindo instabilidade e dinamismo a quem observa. Os artistas acreditavam que uma obra de arte deveria expressar o estilo do artista.

Para (SERENATO, 2008), entre estes dois movimentos artísticos existem diferenças significantes no modo de encarar a construção de uma obra de arte. Para um, o que interessa é a razão, para outro, a intuição. Voltando para a matemática, há existência de um romantismo quando surgem matemáticos que reconhecem que a intuição também é uma componente do pensamento matemático.

O Realismo teve como principal influência a industrialização e predominou entre 1850 e 1900. Para (FARTHING, 2011), o homem que tinha aprendido a usar o conhecimento científico e a dominar a natureza se convenceu que precisava ser realista até mesmo em suas criações artísticas. Para (PROENÇA, 2007), todas as artes se adaptaram ao novo contexto social. A arquitetura respondia as necessidades urbanas criadas pela industrialização, não era necessário mais palácios e templos, mas sim, fábricas, lojas, armazéns, escolas, bibliotecas, estações ferroviárias, hospitais e moradias. Na pintura, sua função era revelar os aspectos mais característicos e expressivos da realidade tal qual ela é.

2.6 Século XX

O século XX é marcado por grandes mudanças históricas, que afetaram o comportamento político-social. Acentuando as diferenças entre a alta burguesia e o proletariado, dando maior força ao capitalismo e fazendo surgir os primeiros movimentos sindicais, como algumas consequências pós guerras. Nesse contexto complexo, cheio de contradições, se desenvolve algumas tendências artísticas.

É possivel vermos conhecimentos matemáticos no cubismo, segundo (FERRER, 2005), ele surgiu na obra de Cézanne, onde o artista simplificava as figuras que via até transformá-las em sólidas formas geométricas, como círculos, cubos, cilindros e cones.

Segundo (SILVA, 2012), Cubismo é um movimento artístico caracterizado pela decomposição e geometrização das formas naturais, possui forma, conceitos e expressões pessoais que são representadas através de imagem geométrica. A geometria é uma área do saber ligado ao conhecimento matemático e é nesse ponto que a arte e matemática se articulam.

Para (PROENÇA, 2007), os cubistas passaram a representar os objetos com todas as suas partes em um mesmo plano frontal, era como eles estivessem abertos. Essa decomposição geométrica dos objetos não tinha nem um compromisso de fidelidade com a aparencia real das coisas, aqui a ilusão da perspectiva e o tridimensional foram abandonados. A fragmentação chegou a tal ponto, que tornou-se impossivel reconhecer as figuras presentes nas pinturas cubistas, como podemos ver na Figura 27, da obra “Violino e Cântaro”, de George Braque em 1910.

,

Figura 27 – Imagem da obra “Violino e Cântaro”, Braque.

Fonte: História da Arte, Graça Proença, pag 155.

De acordo com (JESUS, 2011), a arte abstrata ou abstracionismo é a arte produzida no início do século XX, geralmente entendida como uma forma de arte que não representa objetos próprios da nossa realidade, tendo Wassili Kandinsky (1866 - 1944) como um dos precurssores dessa pintura não figurativa, muitas vezes repleta de representações matemáticas geométricas como semicírculo, círculo, triângulo, retângulo, trapézio, paralelogramo, linha reta, linha curva e paralelismo, como nos mostra Figura 28.

,

Figura 28 – Imagem da obra “Transverse line” - 1923, Kandinsky

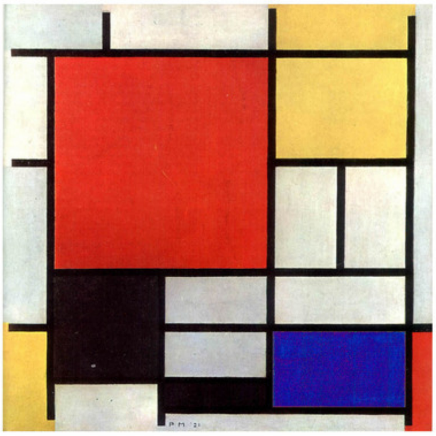
Fonte: Ponto, linha e forma: interdisciplinaridade entre matemática e arte, pag 68.

Segundo (PROENÇA, 2007), duas tendências se tornaram as principais do movimento. Uma, o abstracionismo informal, que predominava os sentimentos e emoções, onde as cores e as formas eram usadas livremente, outra, o abstracionismo geométrico, onde as cores e as formas deviam ser organizadas de modo a formar uma composição geométrica. Ao criar pinturas e gravuras, os artistas exploravam as formas geométricas, sem a preocupação de transmitir idéias e sentimentos.

As obras do pintor holandês Piet Mondrian (1872-1974), são as que mais representam o abstracionismo geométrico. Para (JESUS, 2011), Mondrian foi um artista que encontrou na matemática harmonia e beleza. Autor de uma série de composições baseadas em uma grade de linhas retas verticais e horizontais desenhadas com precisão, em contornos firmes, delimitando áreas quadradas e retangulares, que o deixou mundialmente conhecido, como vemos na Figura 29. Outro ponto tambem é que o retângulo de ouro passou a ser componente de suas obras, como podemos verificar na Figura 30.

,

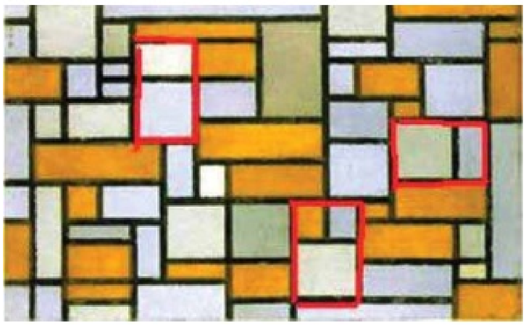
Figura 29 – Imagem da obra Imagem da obra “Composição 1921”, Mondrian



Fonte: História da Arte, Graça Proença, pag 162.

,

Figura 30 – Imagem da obra “Composition with Gray and Brown”, Piet Mondrian, 1918



Fonte: Matemática e Arte: Interdisciplinaridade, pag 32.

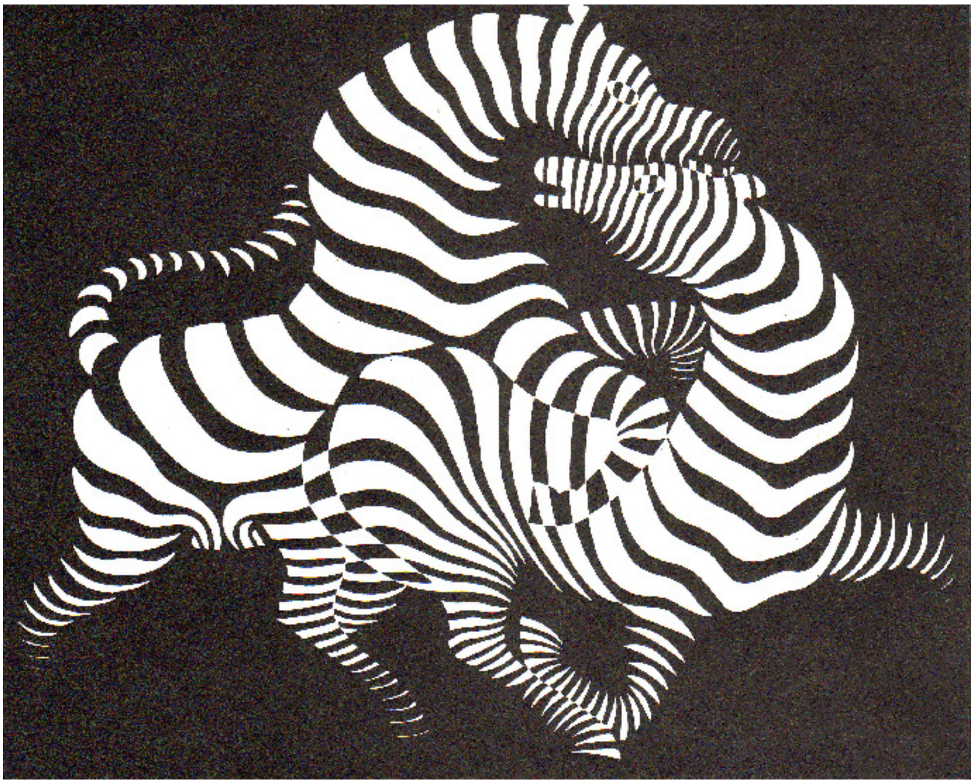
Outro movimento que faz a relação entre matemática e a arte, é o movimento *Op Art*. O termo vem do inglês *optical art* e signfica arte ótica. Segundo (PROENÇA, 2007), as obras apresentam diferentes figuras geométricas, em preto e branco ou no colorido, combinadas de tal forma que provocam no espectador sensação de movimento. Quando o observador mudar de posição, terá a impressão que a obra se modifica, os traços alteram e a figura se movimenta.

Para (FARTHING, 2011), os adeptos do movimento criam imagens que brincam com a percepção humana. O observador vê uma imagem que se movimenta, ou muda de perspectiva. Para tais efeitos os artistas utilizavam fenômenos como movimento de uma linha, perspectiva e contrastes de cor.

Segundo (FARTHING, 2009), Victor Vasarely ficou conhecido como o pai do *Op Art*. Fascinado pelas linhas, produziu obras multidimensionais através de camadas sucessivas para criar ilusão de profundidade. Fez uso também de formas geométricas e linhas coloridas para dar sensação de movimento. Como podemos observar na Figura 31. Já Bridget Riley, seu estilo é marcado por listras que se sobrepõem às curvas onduladas, discos concêntricos e quadrados ou triângulos que se repetem, suas obras tem o talento de desorientar e desestabilizar o observador. Na Figura 32, podemos observar uma de suas obras.

,

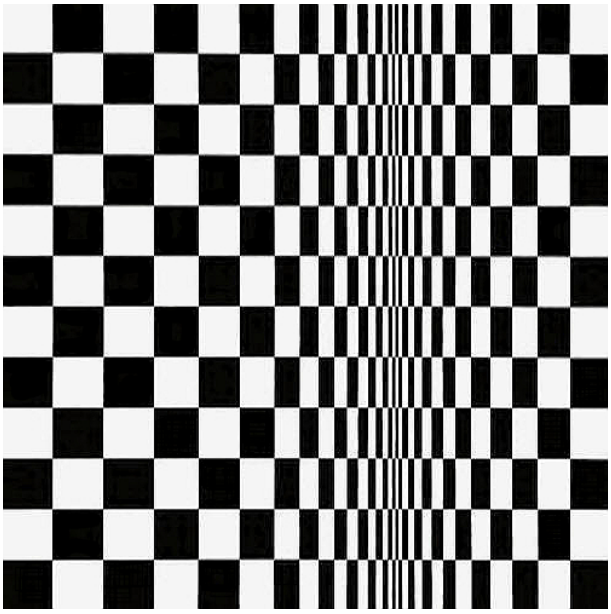
Figura 31 – Imagem da obra "A Zebra", Victor Vasarely, 1935



Fonte: http://pt.wahooart.com/a55a04/w.nsf/Opra/BRUE-6WHLWT

,

Figura 32 – Imagem da obra “Movement in Squares”, 1961



Fonte: https://www.wikiart.org/pt/bridget-riley/movement-in-squares-1961

No início do século XX, os estudos de Freud e as incertezas políticas influenciaram o desenvolvimento de uma arte que criticava a cultura européia e a condição humana que interferia de maneira fantasiosa na realidade, dando origem ao Surrealismo. Para (PROENÇA, 2007), as criações artística mais interessantes são aquelas vindas de manifestações do subconsciente, absurdas e ilógicas, como as imagens dos sonhos.

Para (FARTHING, 2009), as pinturas de Dali representam um mundo dos sonhos onde os objetos se transformam de maneira ilógica em meio as paisagens, como um duelo entre o conhecível e o indecifrável.

Para (SOUZA et al., 2018), as obras de Dali possui um tipo de intercomunicação entre matemática-ciência-arte, ligadas a quadridimensionalidade, ligada ao espacial e o temporal. Para ela pensar matematicamente na quadridimensionalidade requer o uso de geometrias não-euclidianas. Podemos observar isso na Figura 33 com a obra, “A Persistência da Memória” (1931), que mostra relógios derretendo em meio a uma paisagem, e tambem na Figura 34, é possivel perceber isso com a obra “Corpus Hypercubus” (1954), a impressão que tem, ao olhar para a tela, é que o Cristo está passando por Nossa Senhora.

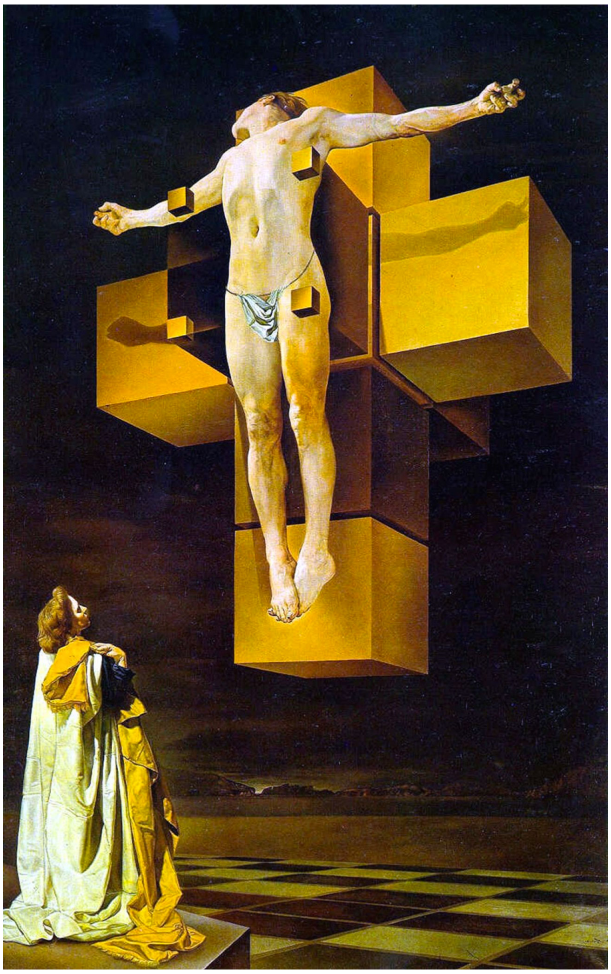
,

Figura 33 – Imagem da obra A persistência da memória 1931

Fonte: Tudo Sobre Arte, pg 430.

,

Figura 34 – Imagem da obra Corpus Hypercubus,1954



Fonte: http://www.dali-gallery.com/galleries/paintings.html

3 3 Matemática e Arte: do Desenho em Perspectiva à Geometria Projetiva

Como vimos no capítulo anterior, a arte se encontra com a matemática em algumas áreas, mas é na área da geometria sua maior contribuição. Trataremos nesse capítulo sobre a perspectiva. A invenção da perspectiva pelos artistas no Renascimento, permitiu estabelecer uma correspondência entre percepção e representação da realidade, amparados nas leis da ótica geométrica e na observação da natureza.

Segundo (SANTOS; GUEDES, 2007), na antiguidade geometras gregos ja conheciam as leis da perspectiva, e com issna antiguidade, geômetras gregos já conhe- ciam as leis da perspectiva, e com isso ajudavam os desenhistas mostrando como podiam ser empregadas para criar excelentes efeitos naturais e realísticos. Sabiam que inclinando um plano com a pintura de um círculo mudava-se a imagem do círculo para uma elípse. E ao observar uma elípse por um determinado ângulo podia ver a imagem como um círculo.

Mas foi no período histórico, conhecido por Renascimento que a perspectiva ganha conhecimentos científicos. No século XV, a Europa experimenta mudanças profundas e dolorosas, as guerras, a fome, a peste negra, a inquisição, o absolutismo monárquico, vividos nos séculos anteriores, empobreceram e oprimiram, não só a população, mas também a ciência e a arte ocidental.

Os artistas dessa época perceberam a necessidade de adequar a arte que produziam aos ideais humanistas, portanto, os personagens representados em suas obras, deveriam refletir emoções e estado de espírito, ressaltando a sua natureza, perfeitamente, humana. Segundo (ATALAY, 2007), a arte se caracterizava pela necessidade de representar a natureza tal qual ela se apresentava, e não como achava-se que ela parecia.

Para (GONÇALVES, 2013), a arte renascentista se caracterizou técnicamente pela reprodução rigorosa, tal fato, levou os artistas a adotarem técnicas que privilegiavam o uso de princípios matemáticos tais como a razão áurea, estabelecendo proporções que tornam mais próximo ao verdadeiro da aparência humana. Do mesmo modo, representações artísticas de espaço tridimensional sofreram aprimorações técnicas, empregando estudos de luminosidade e perspectiva.

De acordo (FLORES, 2002), a representação do espaço em perspectiva teve seu auge no Renascimento, onde pintores e arquitetos desejavam representar o espaço na imagem. E com o conhecimento das técnicas de desenho em perspectiva, produziam trabalhos capazes de transmitir apuradas sensações de profundidade.

Podemos fazer um comparativo entre Figura 11, como vimos no capitulo anterior, que era a ideia de perspectiva usada na antiguidade, porém, a perspectiva na arte antiga se baseava na intuição, onde fica evidente a total ausência de representações de profundidade. Ja na Figura 35, uma obra do período renascentista, podemos observar a presença clara de elementos de perspectiva que produzem uma perfeita ideia de profundidade. Podendo afirmar que os artistas do Renascimento foram os primeiros que empregaram técnicas de perspectiva de forma sistematizada, abandonando as percepções empíricas.

,

Figura 35 – Imagem da obra "A Anunciação", de Leonardo Da Vinci

Fonte: https://pt.artsdot.com/-Leonardo-Da-Vinci-anunciacao

Segundo (ATALAY, 2007), dentre os artistas do Renascimento, o que propunha um diálogo maior entre a arte e a matemática, podemos citar Leonardo Da Vinci (1452 – 1519, ele teria sido um dos maiores motores do desenvolvimento da teoria da perspectiva, pois, não limitava-se a aplicar regras conhecidas, também as descobria e incentivava.

Para (WAGNER, 2012), a pintura, nesse período, não mais se baseava nos valores sobrenaturais e nas questões divinas, passou a valorizar aspectos que envolvem o homem e o seu universo. Os artistas renascentistas ao formular técnicas que ajudavam a compreender e a representar uma cena em três dimensões, além de resolver a representação do espaço na arte, impulsionou o surgimento da geometria descritiva, tornando-se interesse também dos matemáticos. Os conceitos que antes foram criados para atender uma problemática no campo das artes, ganharam novas dimensões atingido a outras áreas.

3.1 Elementos de um Desenho em Perspectiva

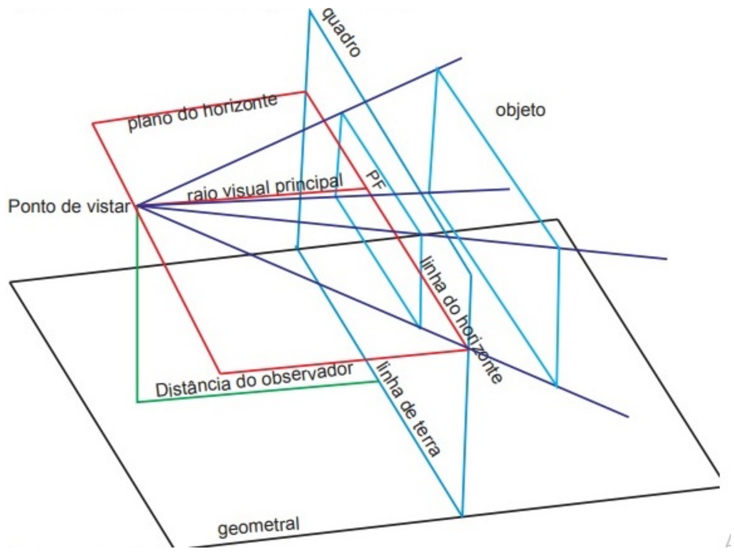
Desenho, segundo o dicionário Aurélio, é a representação de formas sobre uma superfície, por meio de linhas, pontos, manchas, com objetivo lúdico, artístico, científico ou técnico.

Independentemente da maneira como o desenho se manifesta, seu objetivo em grande parte é a comunicação, com um caráter de linguagem universal. Portanto, o desenvolvimento do conhecimento de técnicas que contribuam para a fluência dessa linguagem comunicativa é de fundamental importância.

Quando se trata de desenho em perspectiva, é indispensável interpretar corretamente a aparência de volume dos objetos, profundidade, espaço de ambientes ou paisagens, que busquem reproduzir as características tridimensionais da realidade. Para isso, é necessário conhecer alguns termos técnicos desta regra. Podemos visualizar na Figura 36, abaixo, seguido de todos os termos citados.

,

Figura 36 – Representação da perscpectiva de um objeto



Fonte:ARTE, TÉCNICA DO OLHAR E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA:O CASO DA PERSPECTIVA CENTRAL NA PINTURA CLÁSSICA, pg 89,2012.

O plano geometral de projeção, é o plano horizontal onde o observador se encontra. A intersecção entre o geometral horizontal e o plano vertical do quadro forma a linha de terra.

O ponto de vista, situado no olho do observador, num plano horizontal. É o centro de projeção que liga o olho do observador à cada ponto do objeto, corresponde à altura dos olhos do observador.

Linha do horizonte, lugar que limita o olhar do observador no espaço mais profundo da visão, encontra-se diante do observador, na altura dos seus olhos e está situada no plano do quadro. Sofrendo alterações de acordo com a altura do observador.

Altura do observador é dada pela distância entre a linha de terra e a linha do horizonte.

Ponto de fuga (PF), localizado na linha do horizonte, para onde todas as linhas paralelas convergem, quando vistas em perspectiva. Pode ser um ou mais em uma mesma imagem.

Raio principal é a perpendicular entre o ponto de vista e o plano do quadro.

De acordo com (WAGNER, 2012), tanto o matemático quanto o desenhista precisa se posicionar em um ponto fixo, escolher o espaço onde deseja representar o objeto. Este espaço, limita e define o lugar de onde o observador observa o que irá representar que irá representar.

3.2 Elementos Matemáticos envolvidos na Perspectiva: Sistemas Projetivos

Do ponto de vista da matemática a técnica da perspectiva estabeleceu regras e princípios que permitiu ter um controle do espaço. Permitindo ao homem ultrapassar a compreensão do espaço real para um espaço imaginário, modificando o modo de ver e representar o espaço ao seu redor e para isso precisou dominar conceitos matemáticos.

Mas, segundo (MONTENEGRO, 2010), a perspectiva nasceu do estudo de suas aplicações no teatro, na arquitetura, na pintura e na escultura, depois vieram os geômetras e as abstrações, porém, a perspectiva era um meio geométrico para chegar a um fim artístico. É um processo técnico que nos permite representar o espaço e os objetos não como são na realidade, mas como eles se parecem diante dos nossos olhos.

De acordo com (WAGNER, 2012), a técnica da perspectiva central trata-se da projeção das três dimensões de um objeto numa superfície plana, partindo de um único ponto(observador), de onde surgem os raios visuais, e sua intersecção com um plano de representação permite obter uma imagem plana, ou sua projeção. Podendo ser conhecida tambem como perspectiva cônica, perspectiva linear, projeção linear, perspectiva geométrica.

Segundo (COSTA et al., 2004),a perspectiva pode ser dividida em perspectiva linear, também chamada de exata ou cônica, subdividida em perspectiva frontal, oblíqua e aérea. E em perspectivas paralelas ou cilíndricas, subdivididas em isométrica e cavaleira. A diferença entre perspectivas cônicas e paralelas está relacionada ao ponto de convergência, que é o ponto de fuga, das retas projetantes. Onde nas cônicas se caracterizam como ponto próprio, pois, está a uma distância finita, enquanto que nas perspectivas paralelas o ponto é considerado impróprio, já que o mesmo está disposto a uma distância infinita.

Para (CANOTILHO, 2005), a perspectiva cônica é um tipo de projeção, quase exclusivamente aplicada ao campo da arte. Suas características impedem uma leitura rigorosa, sendo assim evitada no campo técnico, sendo raramente utilizada nos campos da engenharia ou arquitetura. Já a projeção paralela ou cilíndrica permite uma leitura rigorosa da forma que se pretende representar. Essa já não é utilizada no campo artístico.

Nesse trabalho iremos considerar somente perspectivas cônicas, que detalhamos a seguir.

3.2.1 Perspectivas Cônicas

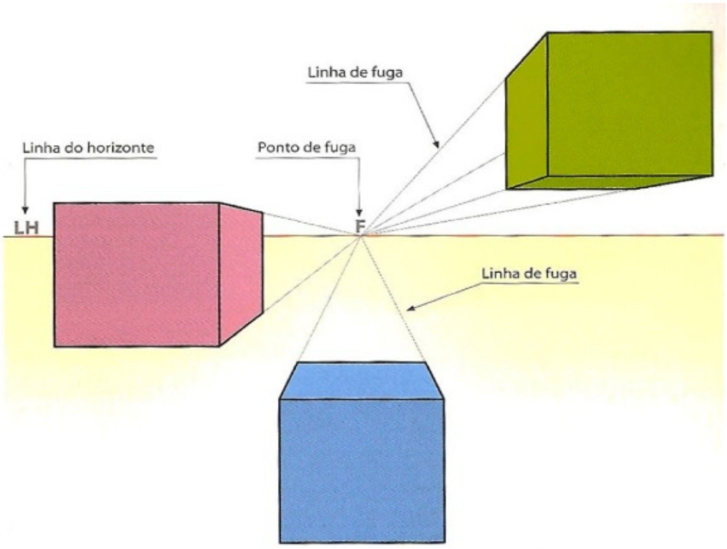
A perspectiva cônica é um método de projeção de um corpo tridimensional em um plano, através de linhas projetivas que passam por um ponto, lugar que permite ao observador prever a sensação visual que realmente se tem ao observar o objeto representado, a partir de determinado ponto de vista. As perspectivas cônicas caracterizam-se pela presença de pontos de fuga e são classificadas de acordo com o número deles.

3.2.1.1 Perspectiva Cônica com Um Ponto de Fuga

A perspectiva cônica de um único ponto de fuga, pode ser também chamada de perspectiva centralizada. É a perspectiva empregada pelos artistas da renascença, que reproduz as imagens tais como as veríamos representadas em um plano. Ao representarmos um objeto em perspectiva centralizada podemos alcançar resultados com diferentes tipos de perspectiva), isso dependerá se objeto estiver acima ou abaixo da linha do horizonte, porém, as linhas de projeção, ou linhas de fuga, convergem sempre para a linha do horizonte. Todas as linhas horizontais e verticais são mantidas e as linhas que estão em planos perpendiculares ao plano convergem para o ponto de fuga. Como podemos ver na Figura 37 abaixo.

,

Figura 37 – Representação da perspectiva cônica de um cubo com um ponto de fuga

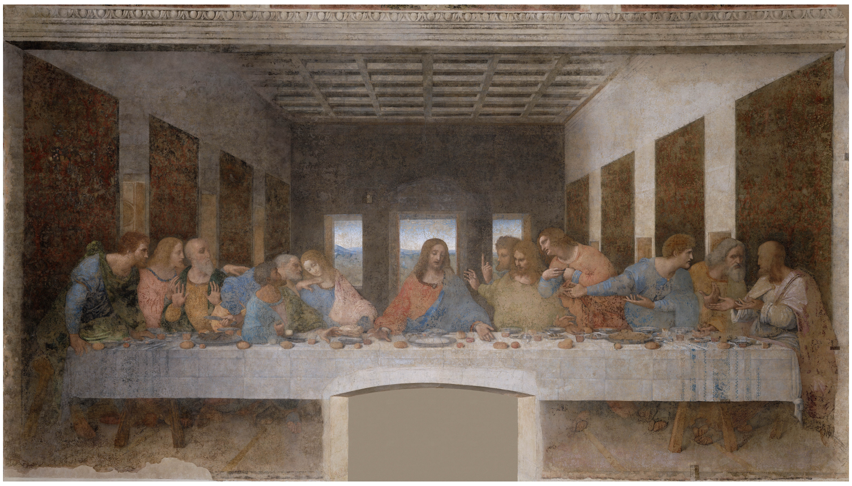


Fonte:https://ev8emcn.blogs.sapo.pt/1992.html

Segundo (GONÇALVES, 2013), a perspectiva cônica com um ponto de fuga foi muito utlizada pelos artistas do Renascimento, como Leonardo da Vinci e Rafael Sanzio. Podemos verificar isso tomando como exemplo a obra, "A Ultima Ceia" (1495-1498), de Leonardo Da Vinci, como podemos ver na Figura 38. Ao mesmo tempo podemos comparar na Figura 39. As retas paralelas contidas no chão, nas paredes, na mesa e no teto concorrem em ponto imaginário localizado na testa de Cristo, que não só cria uma representação perfeitamente realística do cenário como ainda evidencia a figura de Cristo como ícone central da obra, o que nos confirma aqui o uso de uma perspectiva cônica com um único ponto de fuga.

,

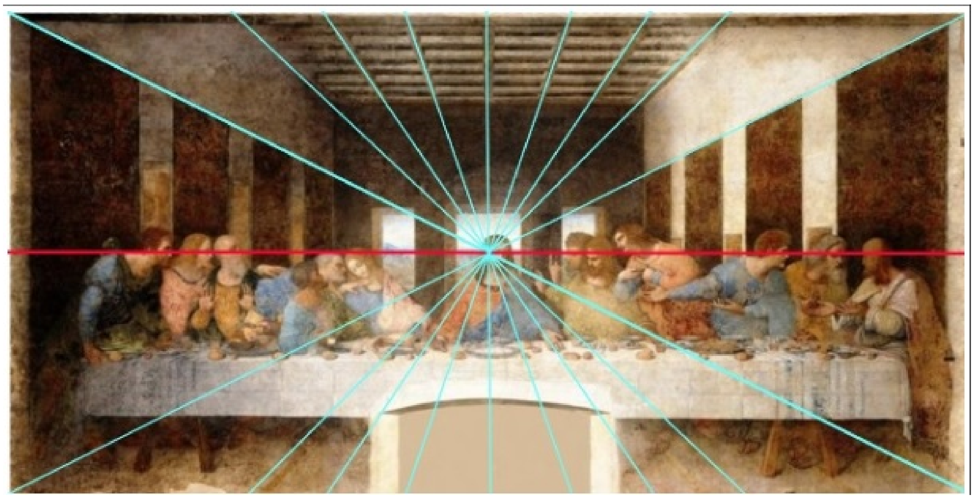
Figura 38 – Representação da perspectiva cônica com um ponto de fuga



Fonte: Uma Introdução à Geometria Projetiva para o Ensino Fundamental, pg 28, 2013

,

Figura 39 – Esquema projetivo em "A Última Ceia", Da Vinci, com um ponto de fuga



Fonte: Uma Introdução à Geometria Projetiva para o Ensino Fundamental, pg 28, 2013

3.2.1.2 Perspectiva Cônica com Dois Pontos de Fuga

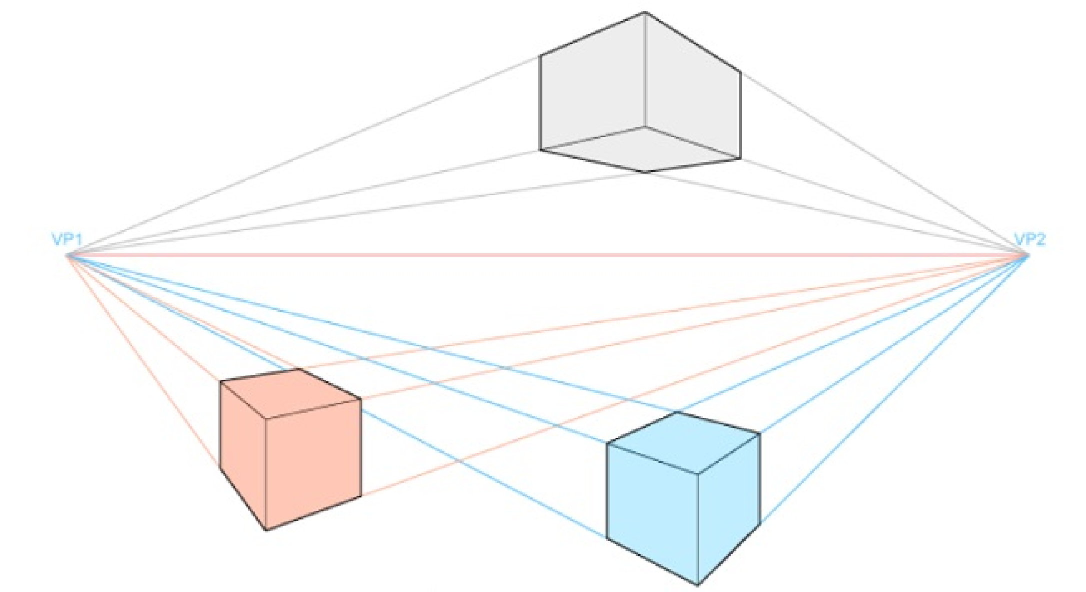
A perspectiva com dois pontos de fuga, corresponde a uma forma sistemática da perspectiva linear, que representam dois pontos de convergência de linhas de apoio, inseridas em uma linha do horizonte.

Todos os objetos que são dispostos perpendicularmente ou paralelamente um ao outro terão lados desenhados que convergem em cada ponto de fuga. A perspectiva de um ponto e de dois pontos se diferem, pelo número de pontos de fuga. A perspectiva de um ponto tem apenas um ponto de fuga e a perspectiva de dois pontos tem dois pontos de fuga.

De acordo (GONÇALVES, 2013), tal perspectiva representa a junção das projeções captadas simultaneamente por ambos os olhos. Muitas vezes o objeto apresenta uma vista de perfil. Segundo o mesmo autor, a perspectiva cônica de dois pontos de fuga não era muito conhecida pelos artistas da renascença. Podemos ver na Figura 40, um cubo sendo representado acima e abaixo da linda do horizonte apresentando dois pontos de fuga.

,

Figura 40 – Representação de um cubo em perspectiva cônica com dois pontos de fuga

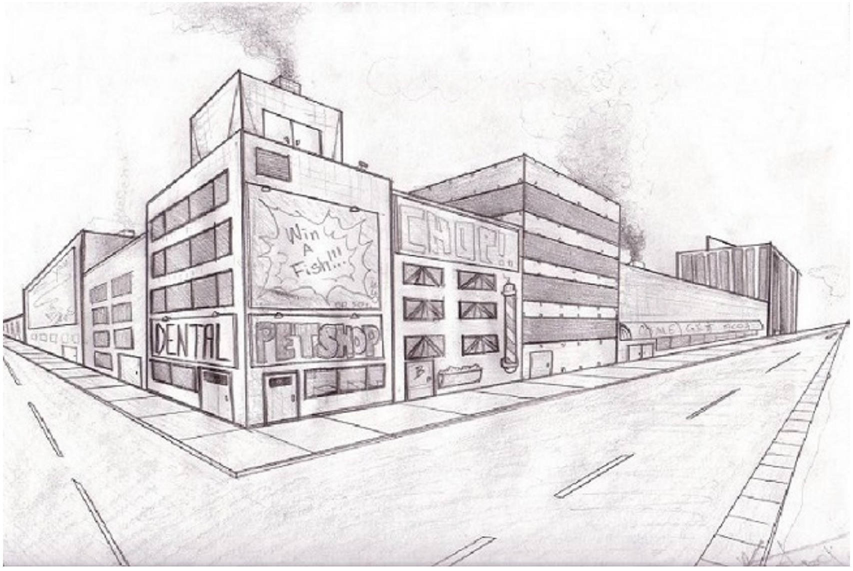


Fonte: https://comodesenharbemfeito.com.br/wp-content/uploads/2019/10/Perspectiva-Com-Dois-Pontos-de-Fuga-passo-a-passo.png

Logo abaixo na Figura 41, temos uma foto de uma costrução obtida pela mesma técnica. Segundo (ATALAY, 2007), as linhas de perspectiva que partem das arestas horizontais superiores e inferiores convergem para dois pontos de fuga sobre a mesma linha do horizonte.

,

Figura 41 – Imagem em perspectiva cônica com dois pontos de fuga



Fonte: https://comodesenharbemfeito.com.br/wp-content/uploads/2019/10/Perspectiva-Com-Dois-Pontos-de-Fuga-imagens.j

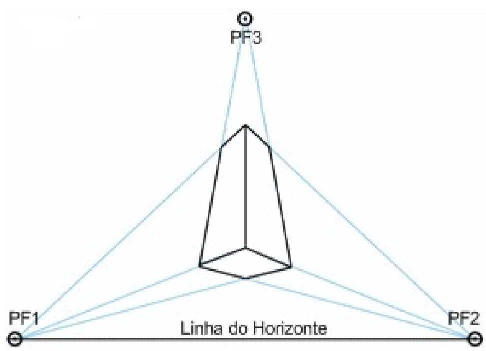
3.2.1.3 Perspectiva Cônica com Três Pontos de Fuga

A perspectiva com três pontos de fuga, surge quando o observador está localizado muito acima ou abaixo da linha do horizonte e por tanto os planos horizontais também sofrem deformação, também conhecida como perspectiva aérea. Os três pontos são usados para dar profundidade à cena e, ao mesmo tempo, evidenciar a altura.

Na Figura 42, temos a representação de um objeto em perspectiva com três pontos de fuga. Neste caso, o observador estaria abaixo e o objeto flutuando acima dele. Notemos que este terceiro ponto aparece fora da linha de fuga, e para ele convergem as retas das arestas verticais do objeto.

,

Figura 42 – Imagem em perspectiva cônica com três pontos de fuga



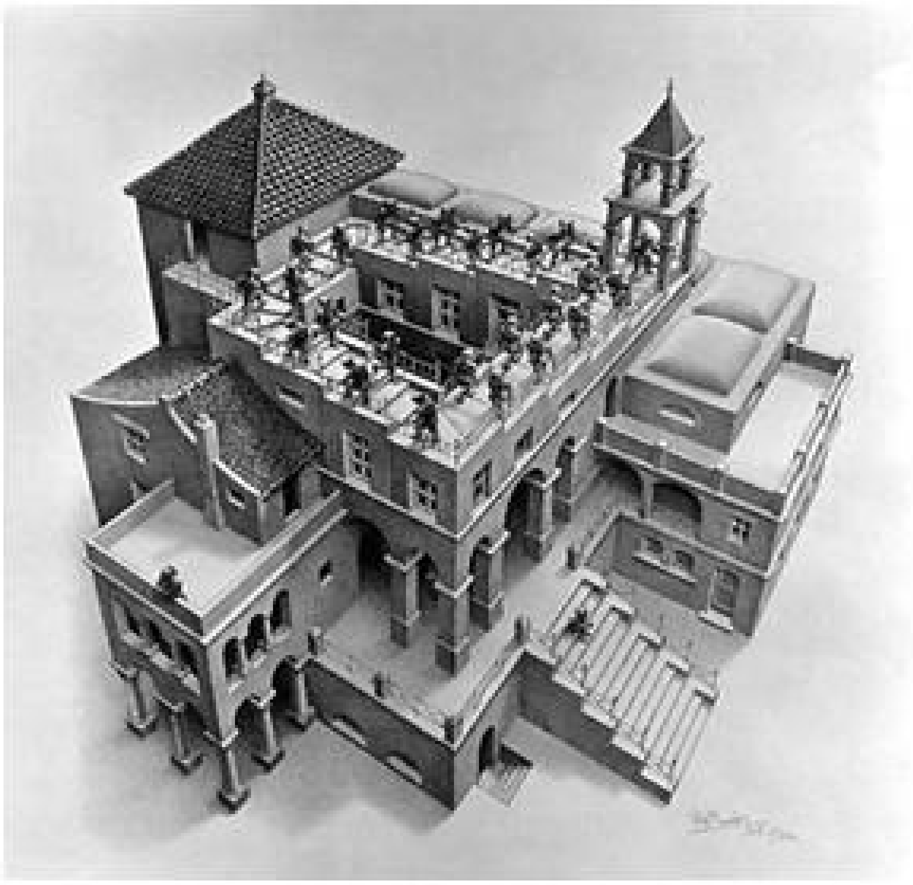
Fonte: https://www.amopintar.com/wp-content/uploads/perspectiva8.gif

De acordo com (CANOTILHO, 2005), a perspectiva de três pontos de fuga também pode ser chamada de perspectiva curva, usado nas composições deslumbrantes de Escher.

Maurits Cornelis Escher(1898-1972), artista, matemático, sobretudo geométrico, conhecido por seus trabalhos que representam obras com várias perspectivas, geradoras de ilusão de ótica no observador. Nas Figura 43 e Figura 44, podemos verificar o uso da pespectiva de três pontos de fuga, em uma de suas obras.

,

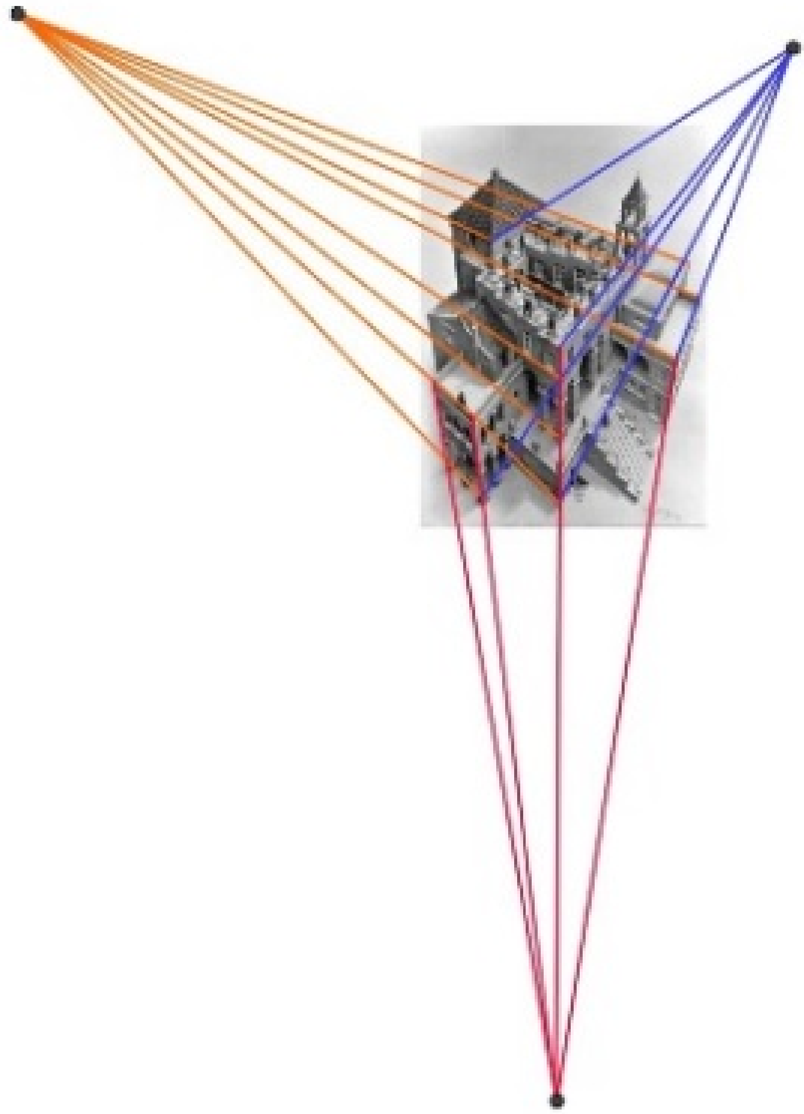
Figura 43 – Imagem da obra "Ascendente e Descendente", Escher, 1960



Fonte: https://mcescher.com/wp-content/uploads/2019/05/LW-435.jpg

,

Figura 44 – Esquema projetivo da obra “Ascendente e Descendente”, Escher, com tres pontos de fuga



Fonte: Uma Introdução à Geometria Projetiva para o Ensino Fundamental, pg 85, 2013

4 Elementos de Geometria Projetiva e Desenho em Perspectiva

Neste capítulo apresentaremos elementos introdutórios da geometria projetiva, tendo como ponto de partida o desenho em perspectiva. Seguiremos o livro PERSPECTIVE AND PROJECTIVE GEOMETRY, (Ver (CRANNELL; FRANTZ; FUTAMURA, 2019))o qual propõe um grande número de atividades que relacionam o desenho em perspectiva com a geometria projetiva. As atividades apresentadas neste trabalho são adaptadas daquele livro, sendo que as soluções apresentadas aqui são de nossa autoria. Assumiremos que o leitor tem familiaridade com os conceitos básicos da geometria euclidiana em duas e três dimensões.

De acordo com (CRANNELL; FRANTZ; FUTAMURA, 2019), o primeiro tratado sobre a arte em perspectiva - Della Pittura de Leon Battista Alberti (On Pintura) - traz a seguinte afirmação do autor:

> Agradaria-me se o pintor fosse o mais erudito possível em todas as artes liberais, mas antes de mais nada, desejo que ele saiba geometria. ... Nossa instrução na qual todos os perfeitos a arte absoluta da pintura é explicada e facilmente compreendida pelo geômetra, mas quem é ignorante em geometria não vai entender essas ou quaisquer outras regras de pintura. Portanto, afirmo que é necessário que o pintor aprenda geometria. [3, pág. 90]

A geometria que ajudou os artistas da Renascença a criar imagens realistas de tirar o fôlego, cinco ou seis séculos atrás, também ajudou essas mesmas sociedades a construir mapas que lhes permitiam navegar por todo o globo, ajudou o imunológico a suportar a guerra emergente de canhões balísticos e os ajudou a construir fortalezas que poderiam resistir a ataques balísticos. Essa mesma geometria que definiu uma era chamada de "novo nascimento" está presente nos avanços em nosso mundo moderno. Os filmes, videogames e personagens sairam dos labirintos bidimensionais e ganharam vida pixelizadas. E assim como na Renascença, o uso da geometria projetiva se espalhou pelas bordas da arte em muitas áreas de prática tecnológica, abrindo caminho para um progresso sem precedentes em outras áreas.

A palavra perspectiva vem do latin, "per" que significa ("através") e specere ("Olhe para"), de um modo geral significa "ver através de" . Portanto, a arte em perspectiva literalmente nos faz olharmos por uma janela para retratar os objetos que estão do outro lado.

A questão central no desenho em perspectiva é: "Como representar um objeto ou paisagem do nosso mundo tridimensional através de uma figura plana?"

Um ponto de partida interessante para iniciar a discussão com os alunos, proposto no livro PERSPECTIVE AND PROJECTIVE GEOMETRY é a seguinte atividade:

Atividade 1: Encontre uma superfície lisa, transparente de bom tamanho (seja o vidro de uma janela ou porta) através da qual possamos ver uma paisagem composta principalmente por elementos retos, como a parte exterior da escola, muros, ruas, postes, casas ou prédios vizinhos. Esta superfície será chamada de *plano da figura*. Forme um grupo de alunos, um dos alunos permanece imóvel, com um dos olhos fechados e vai fornecendo instruções aos demais para colarem fita crepe na superfície transparente de forma a obter os contornos da paisagem, segundo o que ele enxerga com o olho aberto.

Os alunos que irão trabalhar com a fita deverão prestar muita atenção no aluno instrutor, se necessário, use mais que um aluno para se ajudarem na hora de segurar as pontas da fita, colar e cortar sobre a imagem de forma correta. A superficie também deverá ser mantida imóvel.

Ao final do processo, tira-se uma fotografia dos contornos obtidos. Pode-se repetir o experimento, com a mesma paisagem mas trocando a posição do observador e comparar os resultados.

Uma análise das fotografias obtidas pode levar a observações interessantes: algumas retas que são paralelas no mundo real são representadas no plano por retas que, se suficientemente prolongadas, se intersectam. Por outro lado, algumas retas paralelas no mundo real continuam paralelas na representação. Segmentos que têm o mesmo tamanho no mundo real acabam sendo representados por segmentos de tamanhos diferentes no plano.

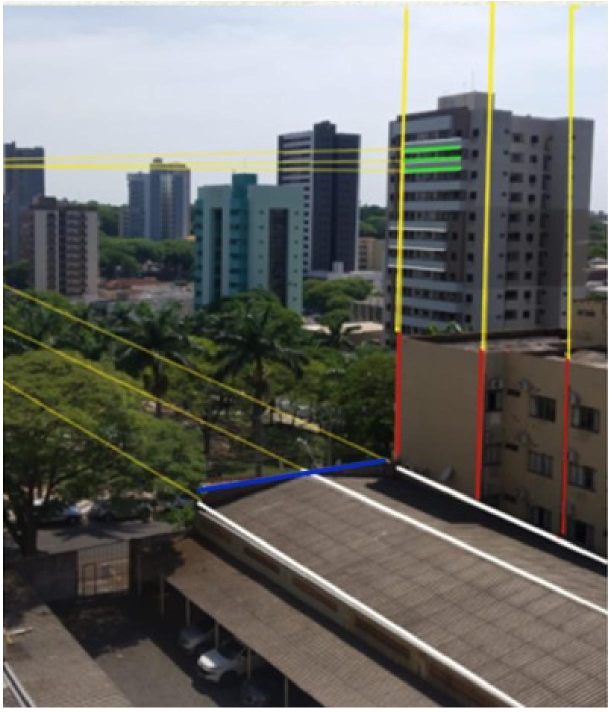
Para dar uma descrição do que ocorreu quando representamos a paisagem tridimensional no plano do vidro, vamos relembrar alguns conceitos básicos de geometria espacial. Nos exemplos que citaremos, iremos usar a expressão *retas tridimensionais* para nos referirmos às retas quando vistas na paisagem tridimensional e *retas projetadas* para nos referirmos à imagem de uma reta tridimensional obtida no vidro.

Dadas duas retas no espaço, pode existir ou não um plano que contenha ambas. No primeiro caso, dizemos que elas são coplanares. Neste caso recaímos na geometria plana, e podemos classificar as retas como paralelas, quando não se interceptam, ou concorrentes, quando se interceptam.

Na Figura 45 temos que as retas tridimensionais representadas pela fita branca são paralelas entre si, ocorrendo o mesmo com as retas tridimensionais representadas pela fita em vermelho ou pela fita em verde. Já a reta tridimensional representada pela fita em azul é concorrente com qualquer uma das retas representadas em branco. No caso em que não

,

Figura 45 – Imagem



Fonte: imagem do autor

existe um plano contendo as duas retas, elas são chamadas de retas reversas. Na Figura 45 qualquer uma das retas tridimensionais em branco é reversa com as retas em vermelho.

Vamos agora olhar para a posição relativa entre um plano e uma reta não contida neste plano. Temos duas possibilidades: a reta pode interceptar ou não o plano. No primeiro caso, essa intersecção consiste de um único ponto e dizemos que a reta é concorrente ao plano. No segundo caso, a reta é dita ser paralela ao plano. Nesse caso, existe uma reta no plano que é paralela a reta dada. Na Imagem Figura 45, as retas tridimensionais representadas em vermelho são paralelas ao plano do vidro. O mesmo ocorre com as retas tridimensionais que descrevem as quinas laterais dos demais edifícios. Por outro lado, as retas tridimensionais representadas pelas fitas em branco ou em verde são concorrentes com o plano do vidro.

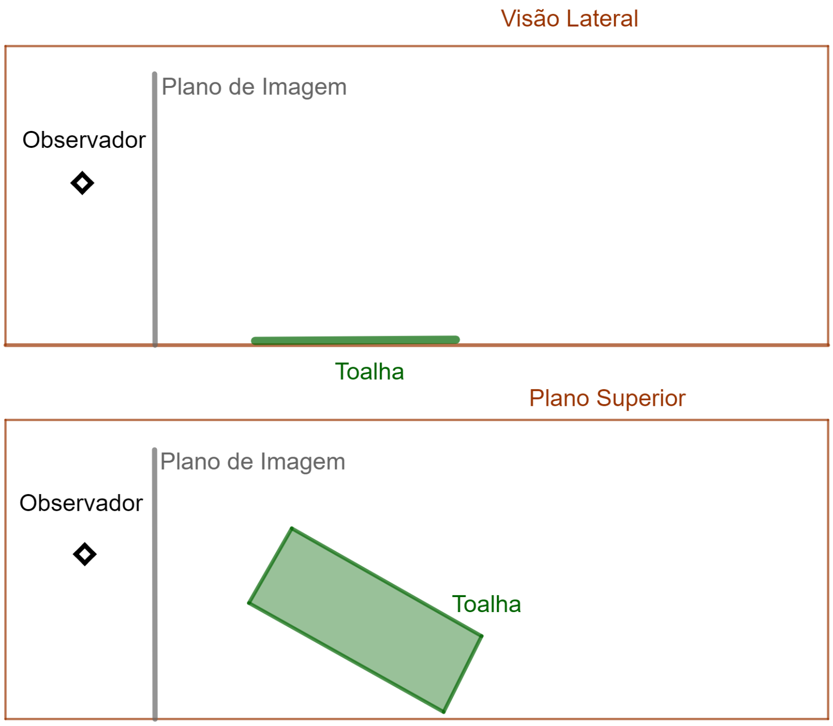
Na imagem identificamos conjuntos de retas tridimensionais que são paralelas entre si no mundo real e tal que as retas projetadas também são paralelas no plano da imagem (no caso a janela). Por exemplo as retas vermelhas, se prolongadas, não se cruzam nem no espaço tridimensional nem no plano da imagem.

Agora, vemos também conjuntos de retas tridimensionais que são paralelas entre si no mundo real e não paralelas no plano da imagem. Por exemplo, tomando o conjunto de retas brancas e as verdes, ao prolongarmos estas retas projetadas notaremos um encontro delas em algum ponto. Dessas observações concluímos, quando retas paralelas entre si são também paralelas ao plano da imagem, sua representação continua paralela. Por outro lado, se temos retas paralelas entre si que não são paralelas ao plano da imagem então suas representações no plano se interceptam.

Na discussão a seguir iremos considerar diagramas que representam uma *vista lateral* e uma *vista superior* de uma mesma situação: temos um observador, um plano da imagem (que é representado por um segmento de reta) e um objeto. Nos diagramas a seguir, o objeto é uma toalha estendida sobre um piso horizontal, como podemos verificar na Figura 46.

,

Figura 46 – Vista lateral e superior de uma mesma situação

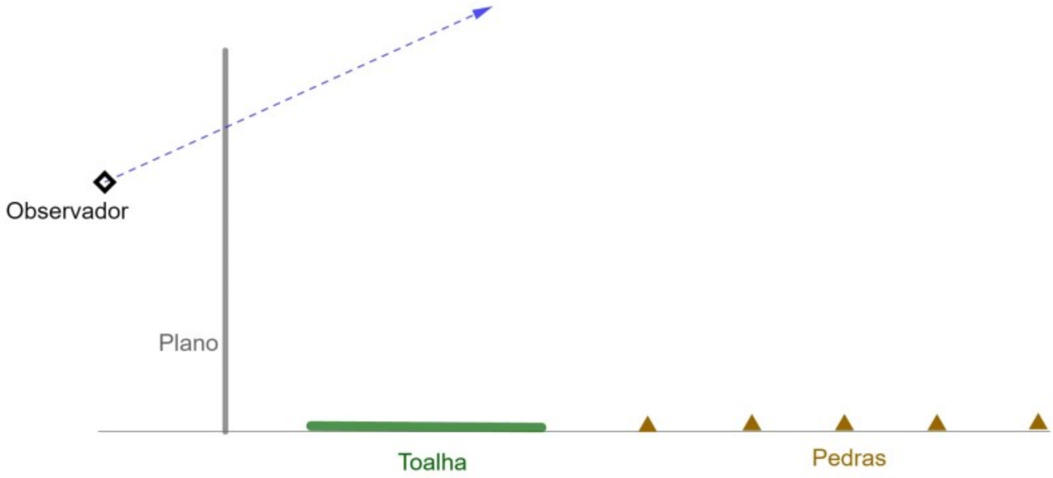


Fonte: Imagem do autor

Para simplificar os diagramas, o observador será representado por um símbolo. Pensaremos sempre que o observador enxerga objetos seguindo uma *linha de visão* (como se ele observasse através de um canudo fino e comprido, sem visão periférica). Isso dá origem à uma semirreta, cujo início será representado no centro do observador (esse centro representa o olho utilizado pelo observador). Por exemplo, quando o observador olha ligeiramente para cima, ele não visualiza a toalha e as pedras representadas no próximo diagrama representado pela Figura 47 .

,

Figura 47 – Vista lateral de um observador olhando para o céu e não para a toalha e o caminho de pedras que está no chão.



Fonte: Imagem do autor

A atividade a seguir tem como objetivo a descoberta pelo aluno do conceito de ponto de fuga.

Atividade 2: Na Figura 47, use uma régua para desenhar os raios de luz conectando o olho do observador às pedras.

(a) Conforme as pedras ficam cada vez mais longe do observador, o que você pode dizer sobre os raios de luz?

(b) Desenhe as imagens das pedras no plano da imagem. À medida que as pedras começam a ficar mais longe do observador, o que você pode dizer sobre as imagens delas?

(c) Suponha que a linha de pedras continue para sempre. Localize o ponto na imagem plano onde o observador passa de ver as pedras para não ver as pedras. Como o solo parece desaparecer neste ponto no plano da imagem, nós chamamos este ponto de *ponto de fuga* da linha das pedras.

(d) Desenhe a linha de visão do observador até o ponto de fuga. Como essa reta se relaciona com a reta das pedras?

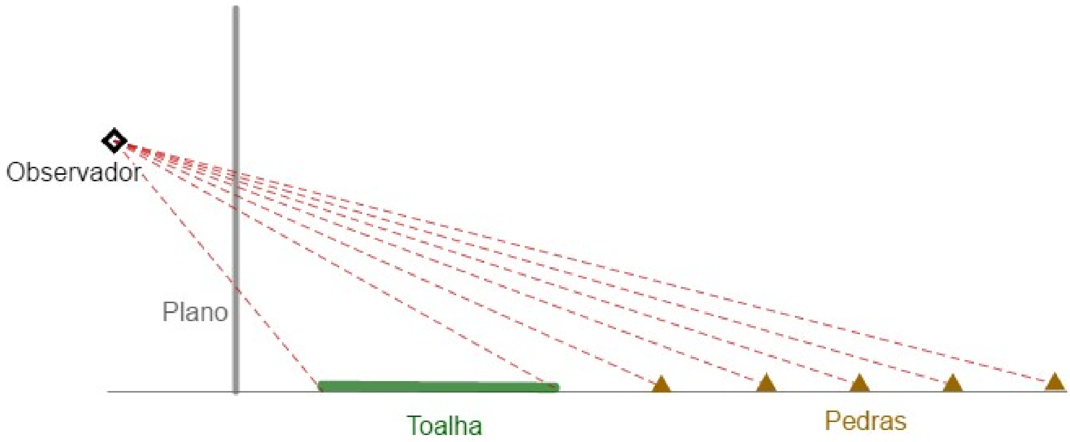
(e) Preencha os espaços em branco para completar a definição:

Dada uma reta l não paralela ao plano da imagem ω, o ponto de fuga V_l da reta é a intersecção do plano __________com a reta passando __________e paralela a __________.

Vamos agora discutir a resolução para a atividade anterior. Traçamos as retas, conectando o olho do observador a cada pedra que esta pelo caminho, como mostra a Figura 48.

,

Figura 48 – Vista lateral: observador olhando para a toalha e o caminho de pedras que está no chão.



Fonte: Imagem do autor

Se observarmos a Figura 48, podemos notar que a medida que as pedras se distanciam do observador, os raios de visão se aproximam de uma posição horizontal. Para o item (b), observamos que as imagens das pedras no plano da figura são obtidas pela interseção do raio de luz correspondente com o plano da figura. Quando as pedras vão ficando mais distantes do observador, suas imagens vão ficando mais altas. Essa altura começa a aumentar mais lentamente quando consideramos pedras bem distantes, e nunca ultrapassam a altura da posição do olho do observador. Para os itens (c) e (d), observe que o ponto de fuga está exatamente na altura do olho do observador. Desta forma, ao desenharmos a linha de visão conectando o olho do observador com o ponto de fuga, esta será paralela à linha de pedras. Assim, o ponto de fuga ocupa uma posição limite: se olharmos para uma direção ligeiramente acima da determinada pelo ponto de fuga não vemos mais o solo, ao passo que se olharmos em uma direção ligeiramente para baixo ainda o vemos. Por fim, com a experiência acumulada nos itens anteriores podemos completar a definição de ponto de fuga para uma reta não paralela ao plano da figura: as expressões para preencher as lacunas são, nesta ordem: ω, *o olho do observador* e V_l.

Atividade 3: Repitamos este procedimento com as quatro retas da Figura 49. Adicione algumas pedras sobre as retas que estendem a borda da toalha e, a seguir, desenhe suas imagens.

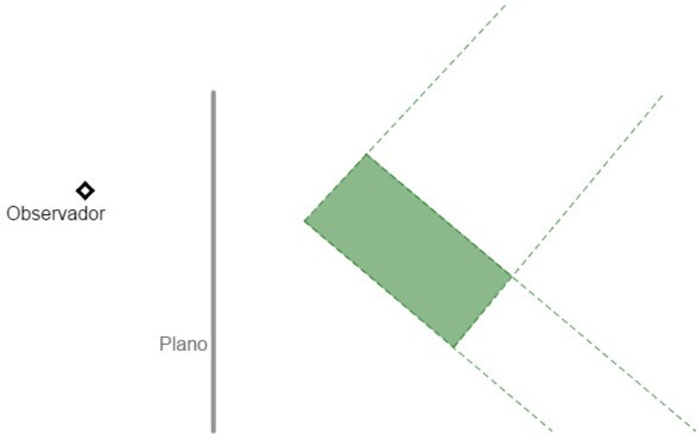
(a) Localize os pontos de fuga dessas quatro retas. Quantos pontos de fuga existem?

(b) Desenhe a(s) retas(s) que conectam o nariz do observador ao(s) ponto(s) de fuga. O que você pode dizer sobre como as retas se relacionam com as bordas da toalha?

Vamos agora discutir uma solução para a atividade anterior. Para isto, considere o diagrama a seguir visto na Figura 50. Os triângulos marrons sobre os prolongamentos dos

,

Figura 49 – Vista superior: Observador olhando para a toalha e o caminho de pedras que está no chão.

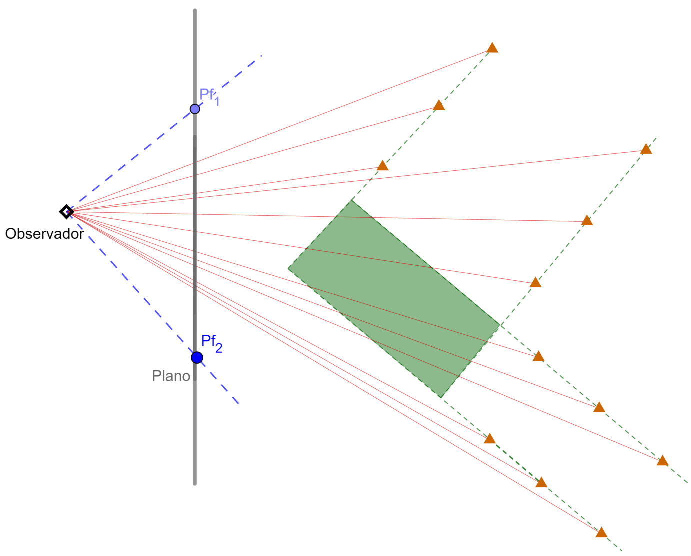


Fonte: Imagem do autor

lados da toalha representam algumas pedras. Suas imagens estão na interseção do plano da imagem com a linha de visão representada. Temos dois pontos de fuga Pf_1 e Pf_2, um para cada par de retas paralelas, representados pelos pontos sobre o plano da imagem. Por fim, as retas que ligam o ponto de fuga ao nariz do observador são, como era esperado, paralelas às retas determinadas pelo prolongamento das laterais da toalha.

,

Figura 50 – Vista superior e imagem: Observador olhando para a toalha e o caminho de pedras que está no chão.



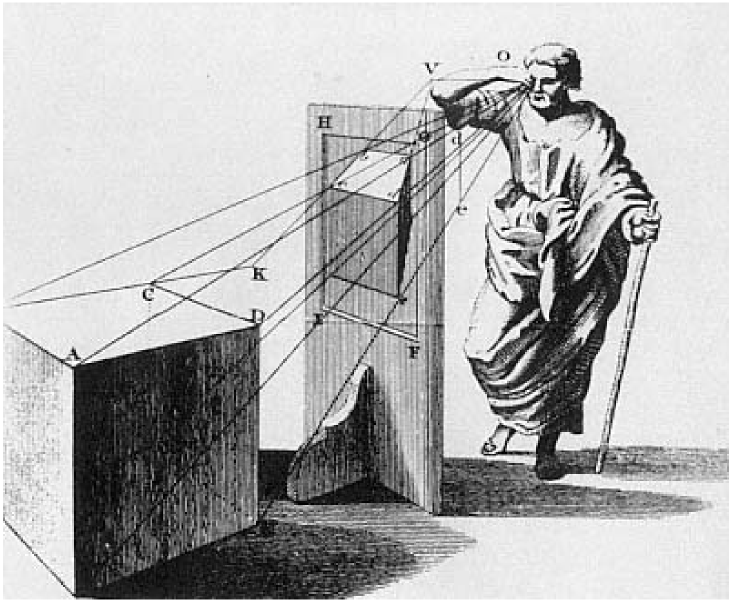
Fonte: Imagem do autor

4.1 Imagem de uma reta

Quando representamos no vidro de uma janela um objeto visto por um observador temos um tipo de projeção. Podemos ainda pensar em outros dois modelos de projeção: a sombra de um objeto localizado sob uma fonte de luz pontiforme ou ainda a imagem projetada no interior de uma câmara escura conforme as figuras a seguir. Na Figura 51 temos um cubo sendo desenhado por um artista com o auxílio de uma tela de vidro. Na Figura 52, vemos uma escultura e sua sombra.

,

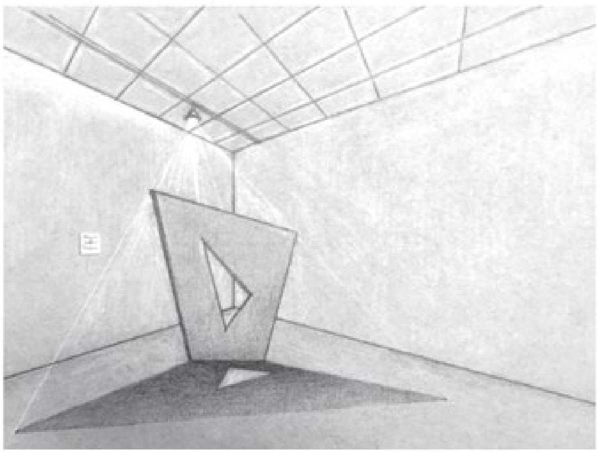
Figura 51 – Uma demonstração da perspectiva pictórica.



Fonte:Perspective And Projective Geometry, pag 33, 2019

,

Figura 52 – Imagem da escultura geométrica jorgensenense.

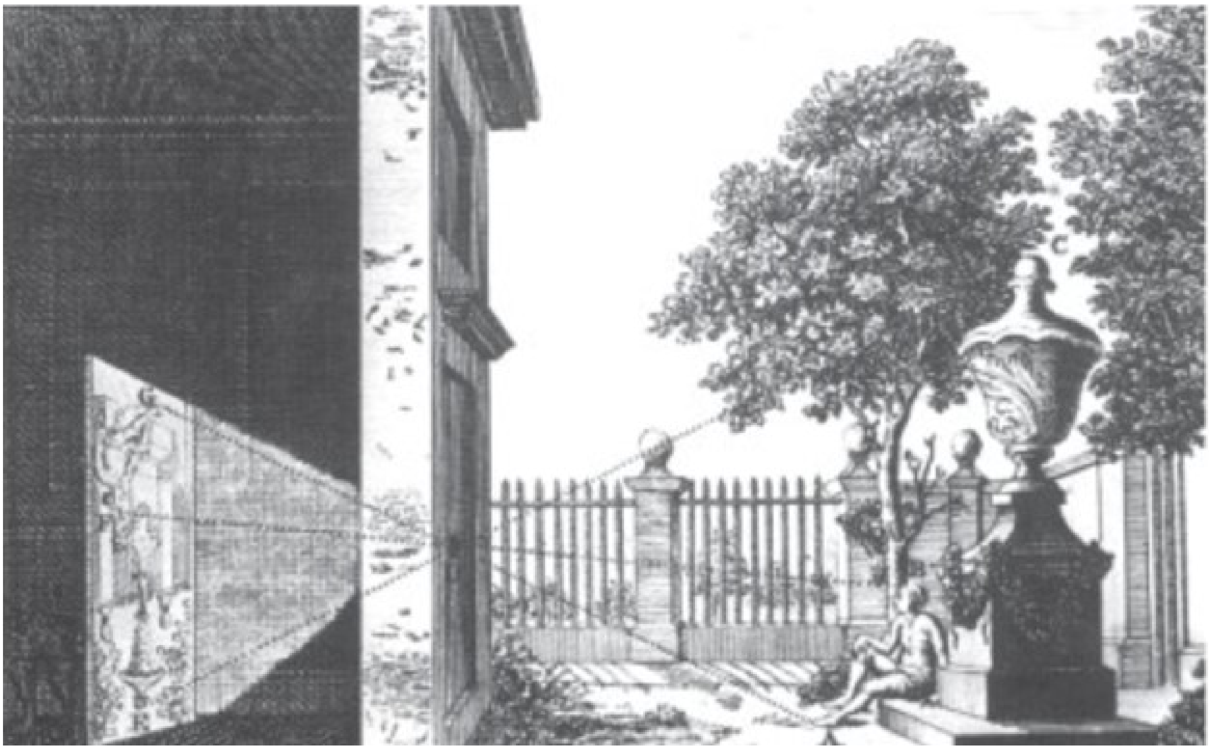


Fonte: Perspective And Projective Geometry, pag 33, 2019

Por fim, na Figura 53 a figura ilustra a imagem (invertida) obtida por uma câmara escura.

,

Figura 53 – Imagem de uma câmera escura.



Fonte: Perspective And Projective Geometry, pag 33, 2019

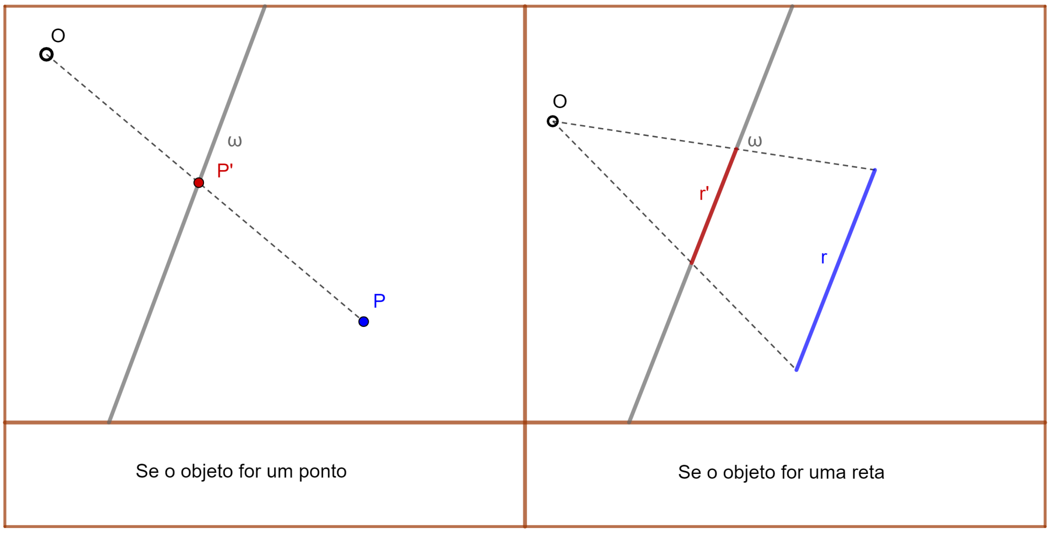
As situações acima remetem ao conceito de projeção e têm pelo menos três elementos em comum: um objeto a ser projetado, uma imagem da projeção e um ponto, chamado *centro da projeção*, que liga o objeto à sua imagem. Na primeira figura, tal ponto é o olho do observador, ao passo que na segunda o centro da projeção corresponde à fonte de luz e na última corresponde ao orifício que permite a entrada da luz na câmara escura.

O centro da projeção será denotado por O, enquanto que o plano da imagem será indicado por ω. Em geral, se X é um objeto indicaremos por X' sua projeção no plano da imagem. Posterioremente iremos formalizar o significado de projeção via O sobre o plano ω. Nas situações acima, esta projeção deve ser pensada como a interseção entre o plano da imagem e as retas que ligam o centro da projeção ao objeto. Por hora, vamos discutir como as posições relativas entre estes objetos interferem na projeção.

Na Figura 54 representamos a vista superior de uma projeção como a usada na Figura 51, que equivale a um observador olhando por uma janela um objeto P e o projetando em P' no plano ω. Desta forma, a imagem projetada se encontra entre o objeto e o centro da projeção.

,

Figura 54 – O plano da imagem fica entre o objeto e o centro de projeção

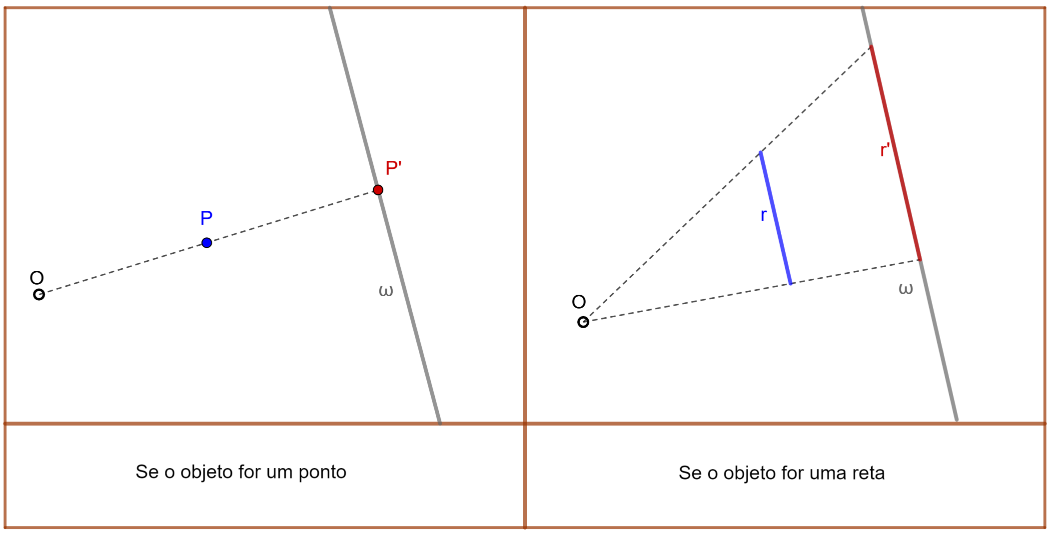


Fonte: Imagem do autor

Na Figura 55 a projeção funciona como uma sombra do objeto, como a usada na Figura 52. O objeto P fica entre o centro de projeção O e a imagem projetada P' no plano de imagem.

,

Figura 55 – O objeto fica entre o plano da imagem e o centro de projeção

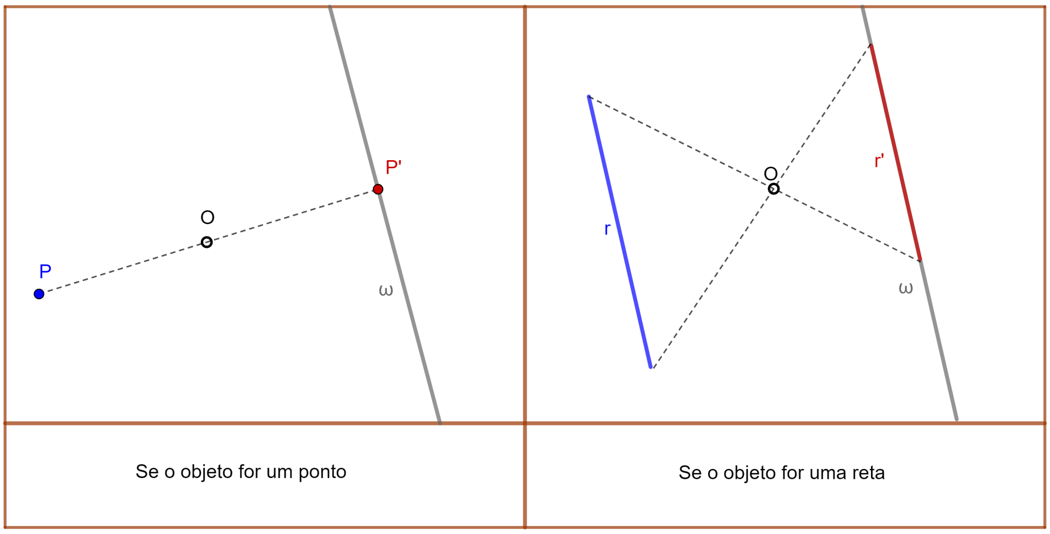


Fonte: Imagem do autor

Na Figura 56, temos o equivalente à projeção via uma câmara escura, como a usada na Figura 53. O centro da projeção fica entre ω e o objeto.

,

Figura 56 – O centro de projeção fica entre o plano da imagem e o objeto



Fonte: Imagem do autor

Na atividade a seguir o aluno é levado a descobrir que podemos ter projeções estranhas se não tomarmos cuidado na escolha das posições dos objetos considerados.

Atividade 4: Denote por P um ponto e por P' sua projeção.

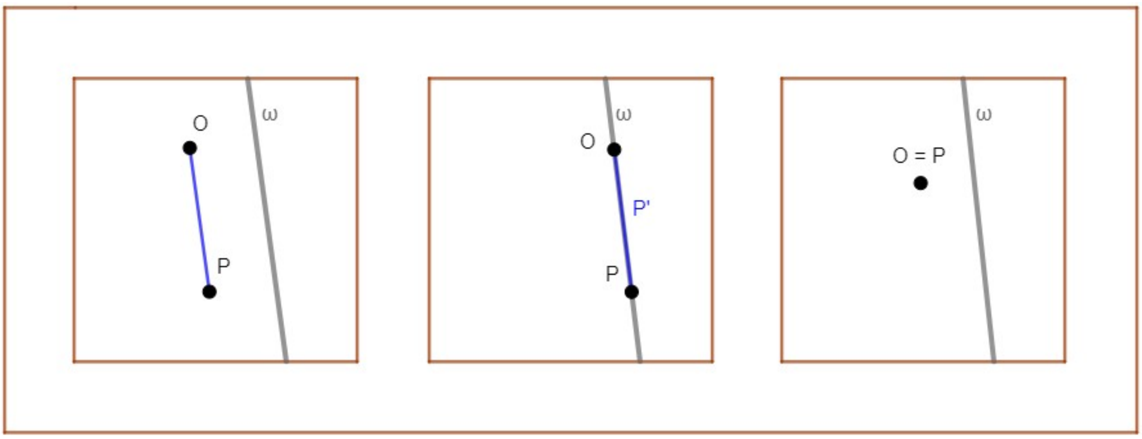
(a) Podemos ter P' como o conjunto vazio?

(b) P' pode ser uma reta?

(c) P' pode ser um plano?

,

Figura 57 – Ilustração da atividade 4



Fonte: Imagem do autor

Em todos os casos a resposta é afirmativa. Como vemos na Figura 57, no primeiro, à esquerda da imagem, basta tomar P distinto de O, ambos fora do plano da imagem de tal forma que a reta OP seja paralela a ω. Para o segundo caso, ao centro da imagem, basta tomar O e P distintos, ambos em ω. Por fim, no terceiro caso, à direita da imagem, basta tomar O=P, ambos fora de ω.

Atividade 5: Considere a Figura 58, que mostra dois planos verticais α e β que se interceptam. Ambos interceptam um plano de imagem vertical *omega* em retas paralelas l_α e l_β, respectivamente. Do centro O, projetamos objetos em R^3 para suas imagens em ω.

(a) A reta a_2 (contendo os pontos X, Y e Z) encontra-se no plano α. Localize as imagens em perspectiva X', Y' e Z' dos pontos X, Y e Z, respectivamente.

(b) Qual é a imagem em perspectiva de toda a reta a_2?

(c) A reta b_2 encontra-se no plano β. Qual é a imagem de toda a reta b_2?

(d) a_2 e b_2 são paralelos? Eles se cruzam? Como você sabe?

(e) Qual é a imagem de a_1? Qual é a imagem de b_1?

(f) As duas retas a_1 e b_1 se encontram no ponto P. Qual é a relação da reta OP com o plano da imagem ω?

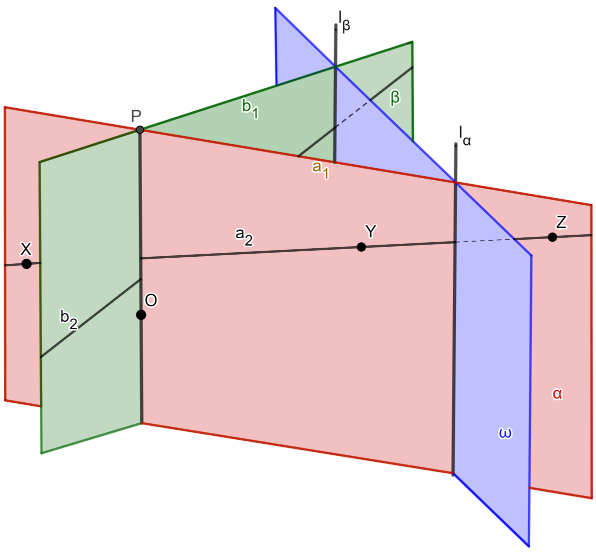
(g) Complete as lacunas:

Se uma reta está no plano α e não passa por O, sua imagem em perspectiva é __.

Se uma reta está no plano β e não passa por O, é imagem em perspectiva é ____.

,

Figura 58 – Três Planos Verticais

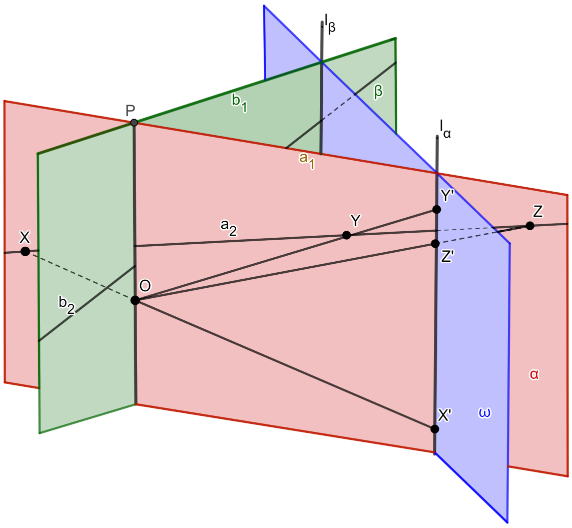


Fonte: Imagem do autor

Vamos agora discutir uma solução. Para o item (a) temos a Figura 59. Note que como os pontos X, Y, Z e O estão sobre o plano α, as retas X_O, Y_O e Z_O estão contidas em α. Como as projeções X', Y' e Z' são as interseções destas retas com o plano ω, tais pontos devem estar na interseção de α e ω, ou seja, na reta l_α.

,

Figura 59 – Imagem em perspectiva dos pontos X', Y' e Z'

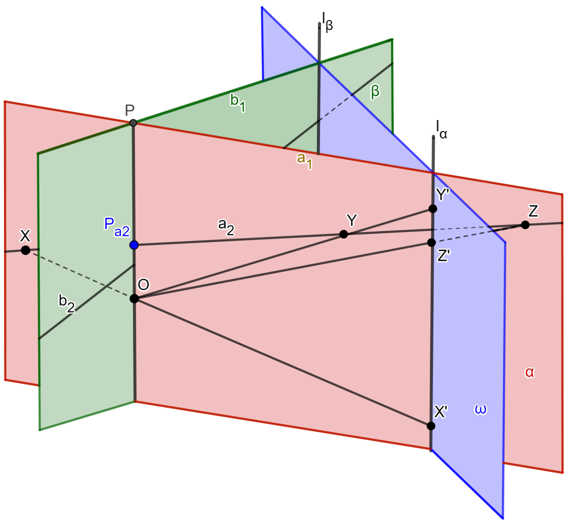


Fonte: Imagem do autor

Para o item (b), o argumento acima permite concluir que a projeção de todo ponto sobre a reta a_2 está em l_α. No entanto, existe um ponto em l_α que não é a imagem de nenhum ponto de a_2. Tal ponto é a interseção de l_α com a reta em α que passa por O e é paralela a l_α. Denotando por P_{a_2} tal ponto, temos que a projeção de a_2 é $l_\alpha - P_{a_2}$. Como podemos ver na Figura 60.

,

Figura 60 – Ponto de a_2 que não tem imagem em l_α

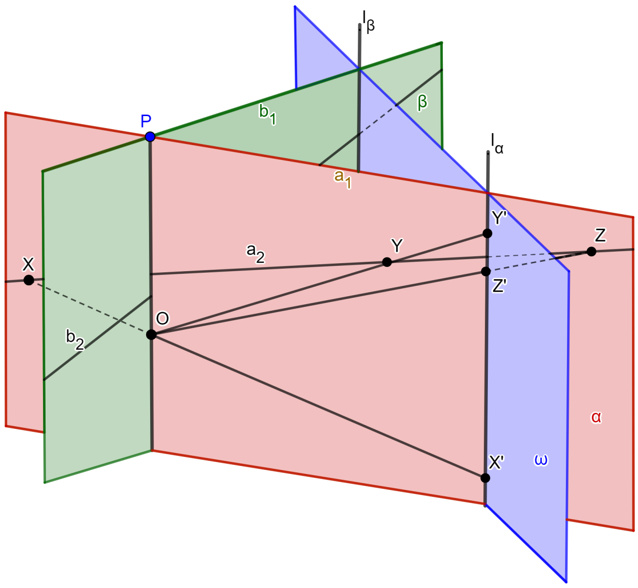


Fonte: Imagem do autor

Para o item (c), podemos aplicar um argumento semelhante ao anterior, obtendo como resposta l_β - P_{b_2}. Quanto ao item (d), vemos que as retas não são paralelas, mas também não se cruzam. Dizemos neste caso que elas são *retas reversas*. O item (e) tem uma resposta semelhante aos itens (b) e (c), exibidas na Figura 61. Denotado pelo ponto P, temos que a projeção de a_1 é l_α - P. Do mesmo modo que a projeção de b_1 é l_β - P.

,

Figura 61 – Ponto de a_1 que não tem imagem em l_α



Fonte: Imagem do autor

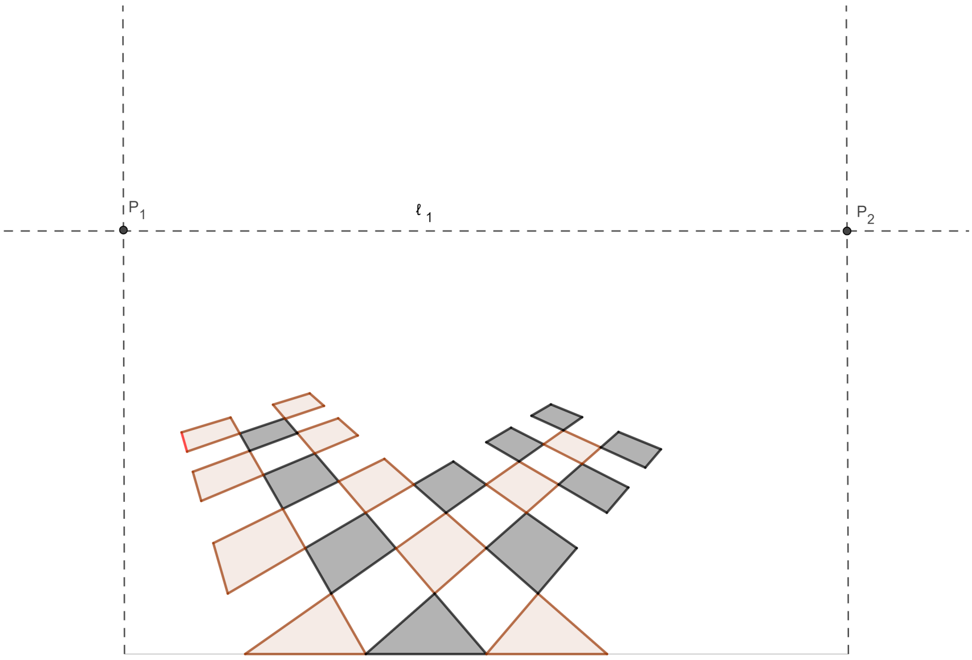
Para o item (f), observamos que OP é paralela a ω Por fim, a experiência obtida nos itens (b) e (e) nos permitem concluir que a primeira lacuna é preenchida com a sentença " l_α menos um ponto". A segunda lacuna é completada de maneira semelhante.

4.2 Espaço Euclidiano Estendido

Na representação em perspectiva de um objeto, é sempre necessária a inclusão de pontos que não fazem parte do objeto, algumas vezes somente para auxiliar a representação. Por exemplo, imagine R^2 como o plano do solo, no qual temos uma calçada ladrilhada. Quando vamos fazer uma representação em perspectiva desta calçada, precisamos também representar a sensação visual de que retas paralelas acabam se intersectando em um "ponto no infinito". Para auxiliar a representação, tal ponto deve ser adicionado ao plano onde vamos fazer a reprentação. Na Figura 62, temos um conjunto de retas paralelas que, na representação projetiva, se cruzam em um ponto P_1, enquanto que outro conjunto de retas paralelas se cruzam em P_2. Outros conjuntos de retas paralelas se cruzam em pontos sobre a reta l, chamada de *linha do horizonte*.

,

Figura 62 – Espaço Estendido - Perspectiva de dois pontos de uma calçada



Fonte: Imagem do autor

É importante ter em mente que nesta situação estamos trabalhando com dois planos distintos: um é o plano R^2, onde a calçada está sendo imaginada e no qual as retas paralelas, por definição, não se interceptam. O outro é o plano onde estamos fazendo a representação, que denotaremos por E^2, no qual as retas paralelas acabam se interceptando em um ponto "no infinito". Formalmente, podemos construir E^2 a partir de R^2 adicionando esses "pontos no infinito". Começamos com a seguinte definição:

Definição 4.2.1 *Para qualquer reta $l \subset R^2$, denotamos o conjunto de todas as retas paralelas a l pelo símbolo $[[l]]$. Vamos então definir um novo objeto, denotado por $P\ [[l]]$, que chamamos de ponto ideal de l. Condição se $[[l]] \neq [[m]]$ então $P[[l]] \neq P[[m]]$.*

Embora P $[[l]]$ seja chamado de "ponto", não é realmente um ponto em R^2. A definição acima é diferente daquela que define, por exemplo, um "ponto de fuga" de l, onde se declara qual dos pontos já existentes em R^3 está no plano ω em uma reta de vista paralela a l. Em contraste, um ponto ideal traz algo para E^2 que não existe em R^2. Definições deste tipo são chamadas de "definição formal", porque formam um novo objeto. Um exemplo mais conhecido, pelo menos por estudantes de matemática, de definição formal, é o de série numérica. Quando a série é convergente, podemos naturalmente associá-la a um número real. Mas mesmo quando a série não converge temos um objeto formal, no qual podemos fazer manipulações algébricas.

Vamos agora à definição de plano estendido.

Definição 4.2.2 *O plano estendido, E^2, consiste nos pontos do plano euclidiano R^2 junto com a coleção de pontos ideais de retas em R^2 de modo que as seguintes condições se mantêm.*

- *Elementos de E^2 são pontos; um ponto em E^2 é um ponto ordinário $P \in R^2$ ou um ponto ideal $P\,[[l]]$ para alguma reta $l \subset R^2$.*

- *Uma reta em E^2 é a reta ideal l_∞ (que definimos como a união de todos os pontos ideais em E^2) ou uma reta ordinária $l = l_0 \cup P[[l_0]]$ (obtida a partir da união dos pontos de uma reta euclidiana l_0 junto com o ponto ideal $P\,[[l_0]]$ dessa reta.)*

Atividade 6: Pense no plano do solo na Figura como E^2. Quais conjuntos de retas contêm os pontos ideais nomeados abaixo:

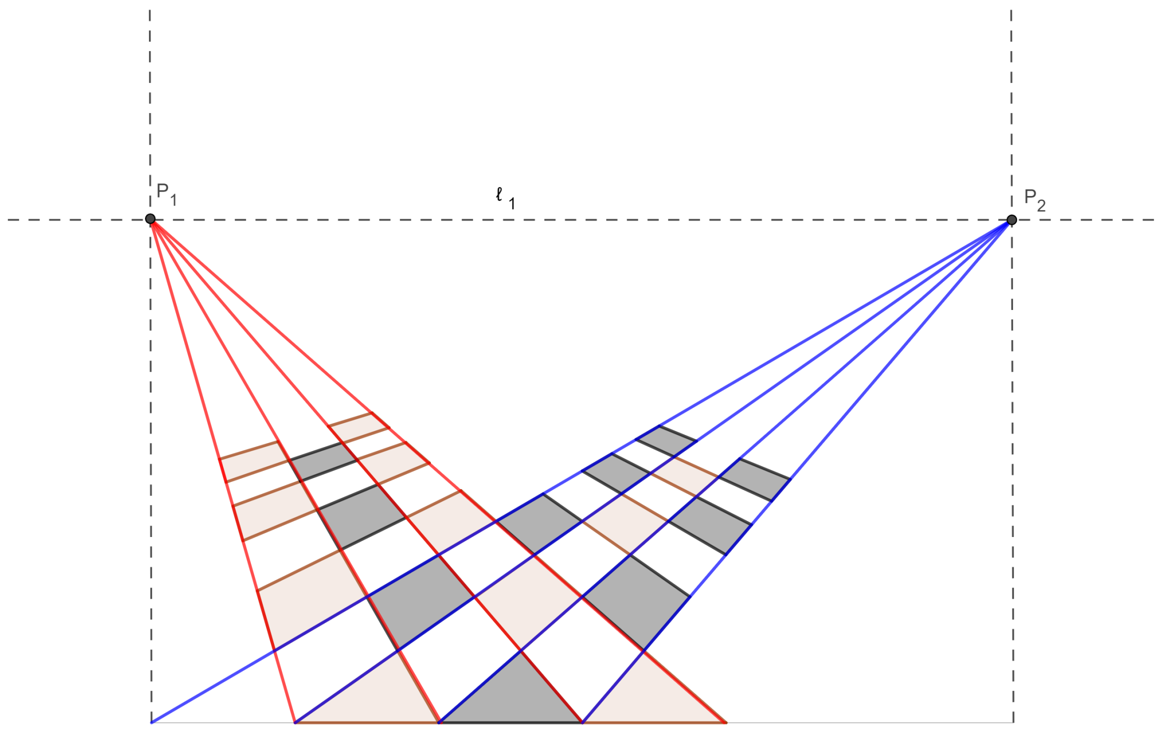
a) O ponto ideal cuja imagem em perspectiva é P_1?

b) O ponto ideal cuja imagem em perspectiva é P_2?

Observando a Figura 63 figura a seguir, podemos notar que o conjunto de retas destacadas em azul, tem como ponto ideal, cuja imagem em perspectiva é P_1, já o conjunto de retas em vermelho imagem tem como ponto ideal, cuja imagem em em perspectiva é P_2.

,

Figura 63 – Conjuntos de retas em perspectiva de dois pontos de uma calçada



Fonte: Imagem do autor

Lembramos que estamos utilizando o símbolo " $\cdot$ " para indicar a intersecão.

Atividade 7: Classifique as seguintes afirmações como verdadeiras ou falsas, dando uma breve justificativa.

a) Existe um par de retas distintas $\kappa, l \in E^2$ com $\kappa \cdot l = \emptyset$.

b) Existe um par de retas distintas $\kappa, l \in E^2$ com $\kappa \cdot \ell$ contém um único ponto.

c) É possível que um par de retas distintas em E^2 tenha dois ou mais pontos de intersecção.

d) Cada par de retas distintas em E^2 se cruza em um e apenas um ponto.

e) Se P é um ponto comum e Q é um ponto ideal, então PQ existe. ["PQ" é a reta que contém os pontos P e Q.]

f) Cada par de pontos distintos P e Q em E^2 determina exatamente uma reta.

As quatro primeiras afirmações podem ser respondidas simultaneamente com o seguinte argumento. Dadas duas retas em E^2, temos três possibilidades: Duas retas comuns $l = l_0 \cup P[[l_0]]$ e $k = k_0 \cup P[[k_0]]$ com l_0 e k_0 paralelas; duas retas comuns $l = l_0 \cup P[[l_0]]$ e $k = k_0 \cup P[[k_0]]$ com l_0 e k_0 concorrentes; uma reta ideal e uma reta comum $l = l_0 \cup P[[l_0]]$. No primeiro caso, temos que $P[[l_0]] = P[[k_0]]$ e assim l e k têm exatamente este ponto em comum. No segundo caso, como l_0 e k_0 não são paralelas, temos que os pontos ideais correspondentes são distintos, mas l_0 e k_0 possuem exatamente um ponto em comum. Consequentemente, l e k possuem exatamente um ponto em comum. Por fim, no último caso o ponto ideal de l está, por definição, na reta ideal e, como esta última é formada somente por pontos ideais, existe exatamente um ponto na interseção das retas. Em qualquer um dos casos chegamos a mesma conclusão: Duas retas disitintas em E^2 possuem exatamente um ponto em comum. Portanto, os itens (a) e (c) são falsos, ao passo que os ítem (b) e (d) são verdadeiros. Para responder o item (e), observe que $P = P[[l_0]]$ para alguma reta l_0. Se $Q \in l_0$, então PQ é a reta $l_0 \cup P[[l_0]]$. Caso contrário, denotando por k_0 a reta paralela a l_0 passando por Q temos que $P[[l_0]] = P[[k_0]]$ e que PQ é a reta $k_0 \cup P[[k_0]]$. Portanto, a afirmação é verdadeira. Para responder ao ítem (f), separamos a situação em 3 casos: P e Q são pontos ideais; P é um ponto comum e Q um ponto ideal ou P e Q são pontos comuns. No primeiro caso, existe uma única reta que contém mais de um ponto ideal, que é a reta ideal. O segundo caso foi respondido no item anterior. Por fim, se P e Q são pontos comuns então eles determinam um única reta euclidiana, a qual é extendida para uma reta no plano extendido adicionando o ponto ideal correspondente. Em quaquer um dos casos, os dois pontos determinam uma e somente uma reta, tornando a afirmação verdadeira.

Atividade 8: Os pontos P_1 e P_2 na Figura 62 encontram-se no horizonte, que é a imagem da reta ideal em E^2. Como sabemos, a partir das definições acima, que P_1 e P_2 devem, cada um, residir também nas imagens de retas comuns?

Isso segue da própria definição de retas comuns no plano estendido: tais retas são dadas pela união de uma reta euclidiana com um ponto ideal.

De maneira semelhante à feita acima, podemos também definir o espaço estendido.

Definição 4.2.3 *Para qualquer plano $\alpha \subset R^3$, denotamos o conjunto de todos os planos paralelos a α pelo símbolo $[[\alpha]]$. Vamos então definir um novo objeto, denotado por $l[[\alpha]]$, que chamamos de reta ideal de α. Esta reta ideal contém uma coleção de pontos ideais: dizemos $P\ [[\kappa]] \in l[[\alpha]]$ sempre que a reta euclidiana κ é paralela ao plano α.*

Definição 4.2.4 *O espaço estendido, E^3, consiste nos pontos do espaço euclidiano R^3 junto com a coleção de todos os pontos ideais de retas em R^3 de modo que as seguintes condições sejam mantidas.*

- *Os elementos do E^3 são pontos; um ponto em E^3 é um ponto em $P \in R^3$ (chamado de ponto comum) ou um ponto ideal $P\ [[l]]$ para alguma reta $l \subset R^3$.*
- *Uma reta em E^3 é uma reta ideal $l[[\alpha]]$ para algum plano $\alpha \subset R^3$ ou uma reta comum $l = l_0 \cup P[[l_0]]$ (obtida a partir da união dos pontos de uma reta euclidiana $l_0 \subset R^3$ junto com o ponto ideal $P\ [[l_0]]$ dessa reta.)*
- *Um plano em E^3 é o plano ideal α_∞ (que definimos como a união de todos os pontos ideais em E^3) ou um plano ordinário $\alpha = \alpha_0 \cup l[[\alpha_0]]$ (obtido a partir da união dos pontos de um Plano euclidiano $\alpha_0 \subset R^3$ junto com os pontos da reta ideal $l[[\alpha_0]]$ desse plano.)*

Na atividade a seguir exploramos as primeiras consequências matemáticas desta definição.

Atividade 9: Classifique cada afirmação a seguir como verdadeira ou falsa, fornecendo uma breve justificativa.

a) Cada par de pontos distintos em E^3 determina exatamente uma reta.

b) Quaisquer três pontos em E^3 determinam exatamente um plano.

c) Quaisquer duas retas ordinárias distintas que se cruzam determinam exatamente um plano.

d) Uma reta ordinária junto com uma reta ideal que compartilha um ponto em comum determinam exatamente um plano.

e) Quaisquer duas retas ideais distintas que se cruzam determinam exatamente um plano.

f) Quaisquer duas retas ideais distintas em E^3 se cruzam em um e apenas um ponto.

g) Quaisquer duas retas distintas em E^3 se cruzam em um e apenas um ponto.

h) Se um par de retas distintas em E^3 for coplanar, então elas se cruzam em um ponto.

i) Duas retas distintas no E^3 se cruzam em um ponto apenas se as retas forem coplanares.

j) Se a reta $l \subset E^3$ não é um subconjunto do plano $\alpha \subset E^3$, então $l \cdot \alpha$ é exatamente um ponto.

k) Quaisquer dois planos distintos no E^3 se cruzam em exatamente uma reta.

l) Quaisquer três planos no E^3 se cruzam em exatamente um ponto.

Para analisar o item (a) dividimos a situação em 3 casos: Os dois pontos são pontos ideais; um deles é um ponto ideal e o outro um ponto ordinário ou os dois são pontos ordinário. No primeiro caso, sejam $P[[k]]$ e $P[[l]]$ os pontos ideais distintos. Então k e l não são paralelas, pois caso contrário teríamos o mesmo ponto. Se k e l são reversas, podemos tomar uma l' paralela a l de tal forma que k e l' sejam concorrentes. Como l e l' determinam o mesmo ponto ideal, podemos supor que k e l são concorrentes. Seja α o plano determinado por k e l. Então $P[[k]]$ e $P[[l]]$ estão na reta ideal $m[[\alpha]]$ determinada por α, o que mostra que existe ao menos uma reta contendo os pontos dados. Se existir outro plano β $P[[k]]$ e $P[[l]]$ pertencem a reta ideal $n[[\beta]]$, então k e l são paralelas a β, o que implica que β é paralelo a α. Logo, $n[[\beta]] = m[[\alpha]]$, o que prova a unicidade da reta contendo os pontos dados. Suponha agora que temos um ponto ideal $P[[k]]$ e um ponto ordinário Q. Tomando l a reta paralela a k e passando por Q (ou $l = k$ quando $Q \in k$), temos que $l \cup P[[k]]$ é a única reta contendo Q e $P[[k]]$. Por fim, os dois pontos dados são pontos ordinários, digamos P e Q então existe uma única reta euclidiana k passando por P e Q e a reta ordinária procurada é $k \cup P[[k]]$. Em qualquer um dos três casos analisados, concluímos que a afirmação (a) é verdadeira.

O item (b) é falso. Para ver isso, basta tomar os três pontos sobre uma mesma reta.

O item (c) é verdadeiro. De fato, considere as retas $l \cup P[[l]]$ e $k \cup P[[k]]$. Temos dois casos a analisar: o ponto onde as retas se cruzam pode ser um ponto ideal ou um ponto ordinário. No primeiro caso, devemos ter $P[[l]] = P[[k]]$ e assim l e k são paralelas, determinando um único plano euclidiano α e, consequentemente, um único plano normal $\alpha \cup m[[\alpha]]$. Se o ponto no qual as retas se cruzam for um ponto ordinário, então l e k são concorrentes e também determinam um único plano. Em qualquer um dos casos, a afirmação (c) é verdadeira.

Para o item (d), suponha que a reta ordinária $k \cup P[[k]]$ intersecta a linha ideal $l[[\alpha]]$. Como $l[[\alpha]]$ é formado somente por pontos ideais, então esta interseção ocorrem em $P[[k]]$, ou seja, $P[[k]] \in l[[\alpha]]$. Por definição, segue que k é paralela a α. Tomando o único plano β que é paralelo a α e contém k, segue que $\beta \cup l[[\alpha]]$ é o plano procurado. Portanto, o item (d) é verdadeiro.

Para o item (e), observe que o único plano do espaço estendido que pode conter mais de uma reta ideal (e que no fim das contas contém todas) é o plano ideal α_∞. Logo , o a afirmação é verdadeira.

(f) Verdadeiro: Sejam $l[[\alpha]]$ e $l[[\beta]]$ retas ideais distintas. Desta forma, os planos euclidianos α e β são concorrentes e se intesectam segundo uma reta k. Assim, retas paralelas a k são também paralelas a α e a β. Portanto, o ponto ideal $P[[k]]$ está em ambas as retas $l[[\alpha]]$ e $l[[\beta]]$. Tal ponto é único, pois do contrário teríamos duas retas não paralelas entre si e ao mesmo tempo paralelas a planos não paralelos, o que não pode ocorrer.

(g) Falso: Basta tomar duas retas $k_0 \cup P[[k_0]]$ e $l_0 \cup P[[l_0]]$ tais que k_0 e l_0 sejam reversas. Elas possuem pontos ordinários em comum por não serem concorrentes. Além disso, seus pontos ideais são distintos por não serem paralelas.

(h) Verdadeiro: Observe inicialmente que como as retas são coplanares, não podem ser ambas retas ideais. Desta forma, temos duas possibilidades: uma reta ideal $l[\alpha]$ e uma reta ordinária $k_0 \cup P[[k_0]]$ ou duas retas ordinárias $k_0 \cup P[[k_0]]$ e $l_0 \cup P[[l_0]]$. No primeiro caso, $P[[k_0]] \in l[[\alpha]]$ e as retas se intersectam neste ponto. O segundo caso se subdivide em dois: se k_0 e l_0 são paralelas, então elas se interceptam no ponto ideal comum $P[[k_0]] = P[[l_0]]$. Se k_0 e l_0 são concorrentes, então elas se cruzam no ponto ordinário de interseção euclidiana.

(i) Verdadeiro: Basta juntar os itens (g) e (h).

(j) Verdadeiro: Inicialmente, observe que $\alpha = \alpha_\infty$ é o plano ideal, então l é uma reta ordinária $l_0 \cup P[[l_0]]$. Neste caso, $P[[l_0]]$ é o único ponto de interseção entre o plano e a reta. Se $\alpha = \alpha_0 \cup l[[\alpha_0]]$ é um plano ordinário, então ou $l = l[[\beta_0]]$ é uma reta ideal correspondente a um plano não paralelo a α_0 ou $l = l_0 \cup P[[l_0]]$ é uma reta ordinária. No primeiro caso, a reta $k = \alpha_0 \cdot \beta_0$ é tal que seu ponto ideal $P[[k_0]]$ está simultaneamente em $l[[\alpha_0]] \subset \alpha$ e em $l = l[[\beta_0]]$. Portanto, $l \cdot \alpha = \{P[[k_0]]\}$. Se $l = l_0 \cup P[[l_0]]$ é uma reta ordinária, então ou l_0 é paralela a α_0 e assim $P[[l_0]] \in l[[\alpha_0]]$ ou l_0 intersecta α_0 em um ponto ordinário $P_0 = \alpha \cdot l$. Em todos os casos analisados, a interseção entre l e α consiste de um único ponto.

(k) Verdadeiro: Se um dos planos é o plano ideal α_∞ e o outro é um plano ordinário $\alpha = \alpha_0 \cup l[[\alpha_0]]$, então a interseção é a reta ideal $l[[\alpha_0]]$. Por outro lado, se ambos os planos são planos ordinários $\alpha = \alpha_0 \cup l[[\alpha_0]]$ e $\beta = \beta_0 \cup l[[\beta_0]]$, então temos duas possibilidades:

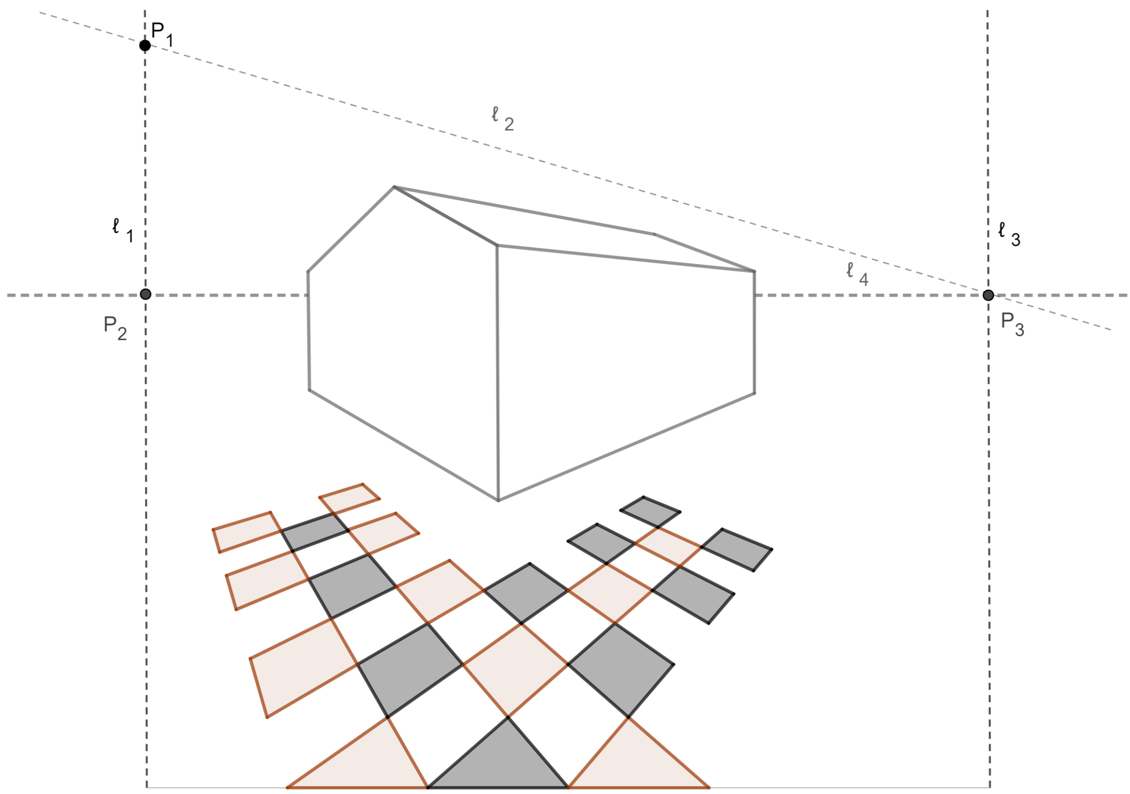
α_0 e β_0 são paralelos, o que implica em $l[[\alpha_0]] = l[[\beta_0]]$ ou α_0 e β_0 são concorrentes e assim se intersectam segundo uma reta k_0. No primeiro caso, $\alpha \cdot \beta = l[[\alpha_0]]$, enquanto que no segundo caso $\alpha \cdot \beta = k_0 \cup P[[k_0]]$.

(l) Falso: Sejam α, β e γ três planos distintos. Pelo item anterior, $\alpha \cdot \beta$ é uma reta l. No entanto, pode ocorrer de l estar contida em γ. Nesse caso, a interseção entre os planos é a reta l. De qualquer forma, combinando esta observação com o item (j) podemos estabelecer o seguinte fato: ou a interseção entre três planos distintos é uma reta ou é um ponto.

As atividades de 10–13 referem-se novamente a Figura 64.

,

Figura 64 – Pontos de perspectiva de uma casa



Fonte: Imagem do autor

Atividade 10: Na Figura 64, quais conjuntos de planos contêm as linhas ideais nomeadas abaixo:

a) A reta ideal cuja imagem em perspectiva é l_1?

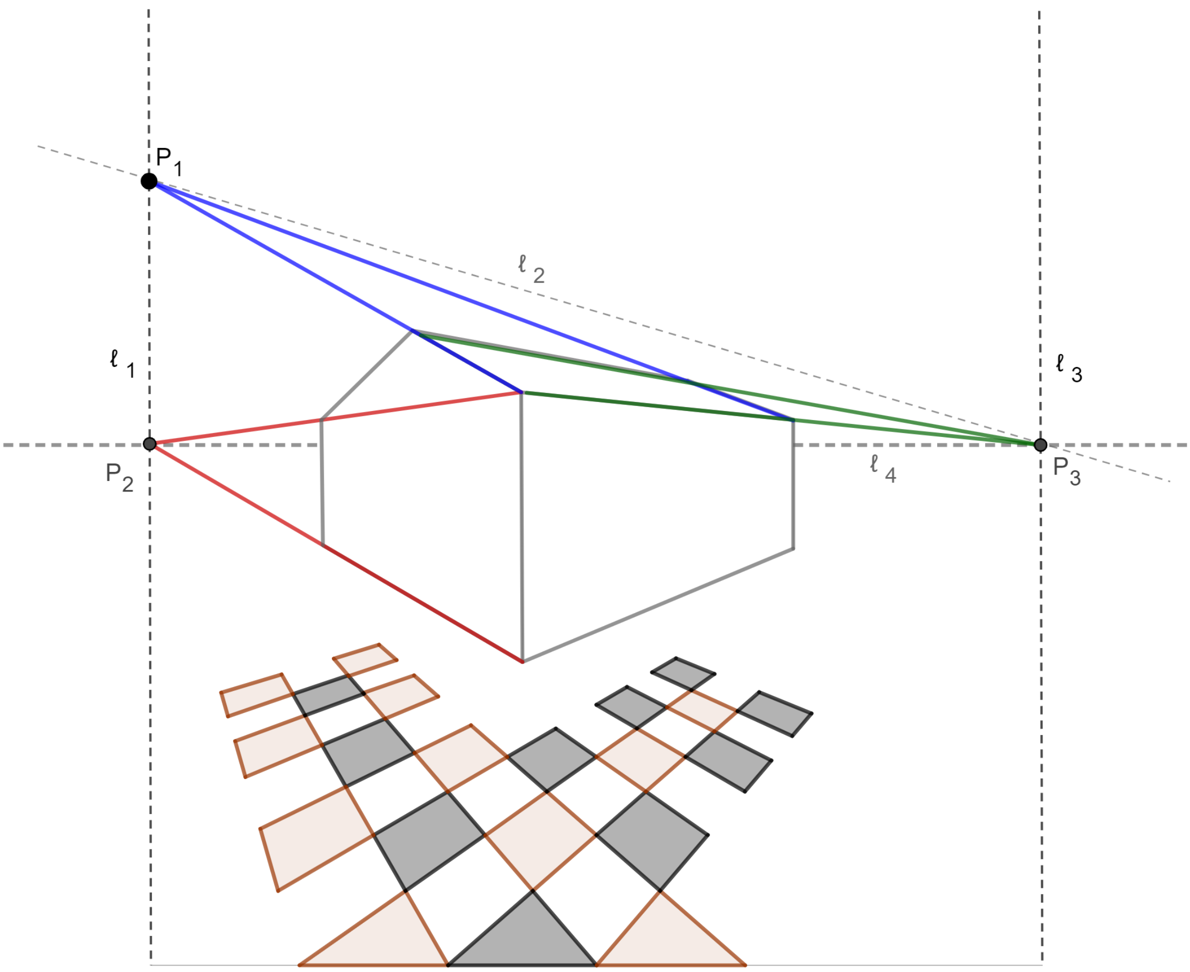
b) A reta ideal cuja imagem em perspectiva é l_2?

c) A reta ideal cuja imagem em perspectiva é l_4?

Para responder a estas questões, observe que nesta figura é mais fácil representar pontos ideais do que retas ideais, e que uma reta ideal é determinada por dois pontos ideais. Desta forma, para determinarmos os planos contêm a linha ideal cuja imagem em perspectiva é l_1, basta determinar um plano α_0 para o qual existam retas paralelas a α_0 com pontos ideais representados em perspectiva por P_1 e P_2. Olhando para a frente da casa percebemos que as retas correspondentes ao solo e à base do triângulo do telhado, destacadas em vermelho na Figura 65, têm como ponto ideal o ponto representado por P_2, enquanto que duas outras retas paralelas a este plano, destacadas em azul na figura abaixo, têm pontos ideais representados por P_1. Portanto, os planos que contêm a reta ideal cuja imagem em perspectiva é l_1 são os planos paralelos à frente da casa.

,

Figura 65 – Retas ideais com imagens em perspectiva de uma casa



Fonte: Imagem do autor

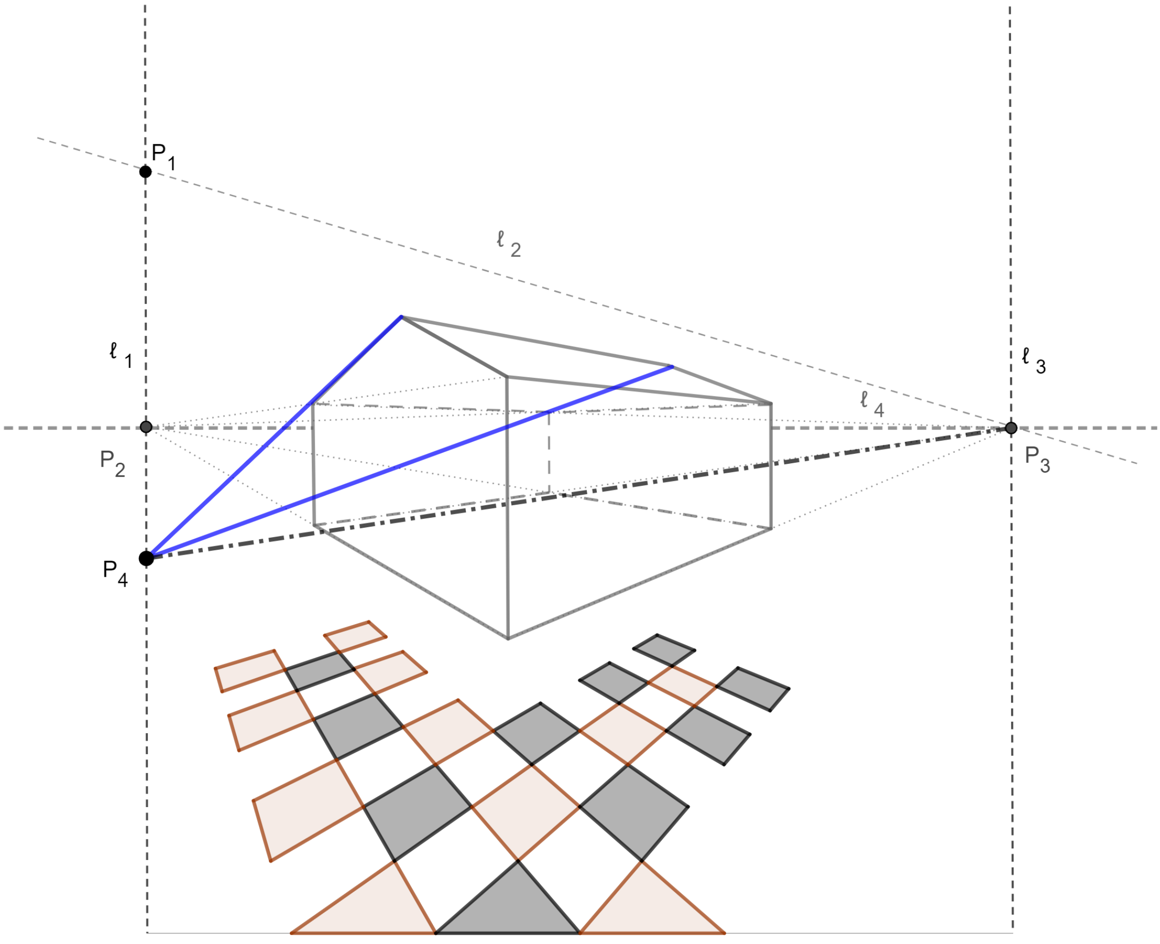
Além disso, observando na Figura 65 vemos que temos retas paralelas à parte visível do telhado que correspondem a P_1 e a P_3. Portanto, planos paralelos ao telhado contém a reta ideal cuja imagem em perspectiva é l_2. Argumentos análogos permitem concluir que planos paralelos ao solo estão relacionado com l_4.

Atividade 11: Localize a imagem da reta ideal para a face inclinada posterior do telhado.

Observe que como as retas em verde na Figura 65 são paralelas a esta parte do telhado, temos que o ponto P_3 pertence à reta ideal procurada. Para encontrar outro ponto, podemos completar a figura para obter a parte triângular do telhado que fica "escondida". Feito isto, obtemos as retas em azul na Figura 66, obtendo o ponto P_4. Assim, a reta ideal procurada é a reta que passa pelos pontos P_3 e P_4.

,

Figura 66 – Retas ideais com imagens em perspectiva de uma casa



Fonte: Imagem do autor

Atividade 12: adicione detalhes adicionais à imagem da casa na Figura 64. Como:

a) Uma porta na frente da casa, incluindo uma ombreira horizontal;

b) Uma janela no lado mais próximo da casa, incluindo um peitoril;

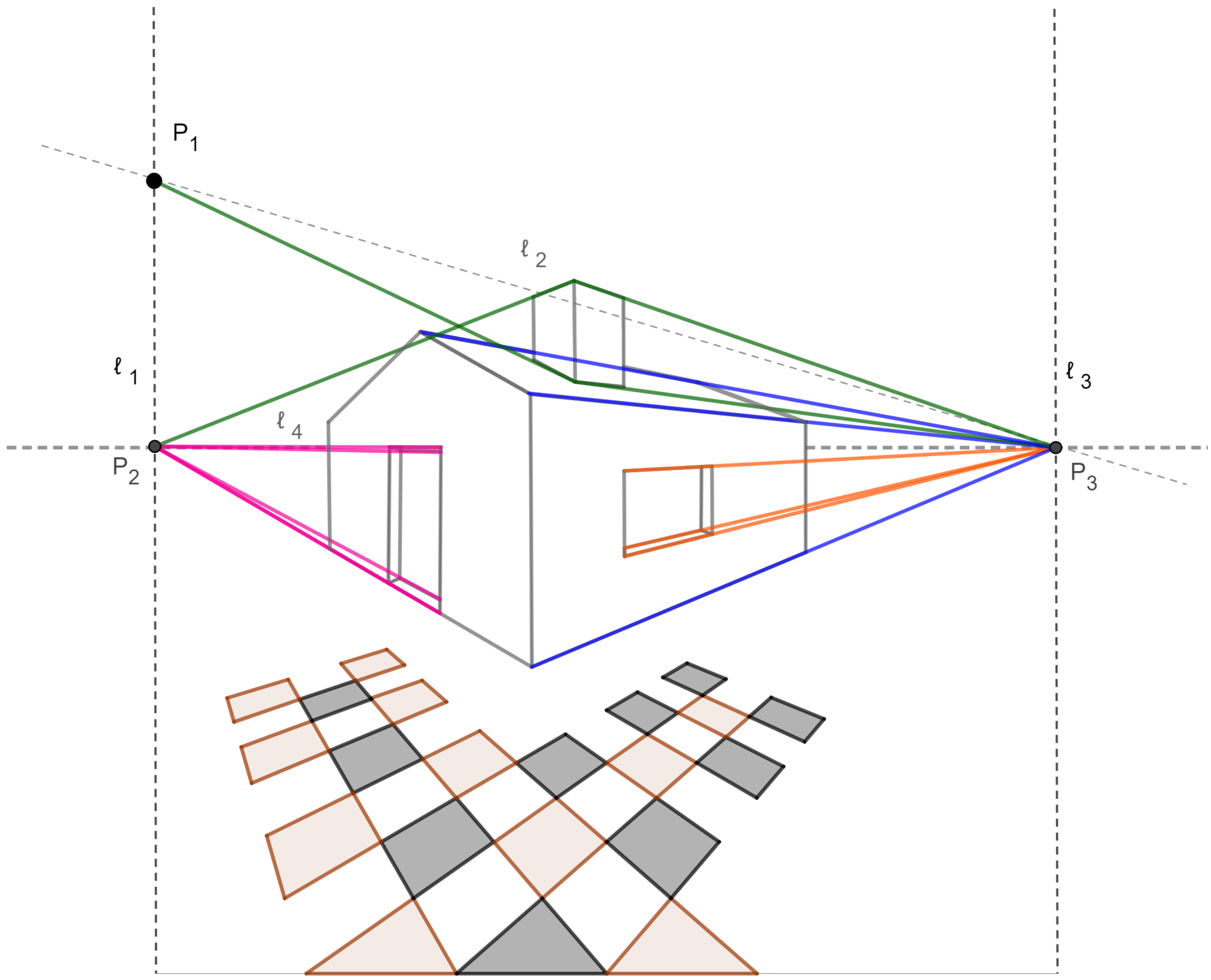
c) Uma chaminé no lado próximo do telhado, cuja base é paralela ao telhado e cujo topo é horizontal.

Quais pontos de fuga usamos para desenhar esses objetos?

Foi adicionado a Figura 64 uma porta (com batentes), uma janela (com peitoril) e uma chaminé. Como podemos ver na Figura 67.

,

Figura 67 – Pontos de perspectiva de uma casa com: porta, janela e chaminé



Fonte: Imagem do autor

Atividade 13: Cada um dos objetos desenhados na atividade anterior tem várias faces visíveis. (Uma "face" é um subconjunto limitado de um plano).

a) Seu desenho deve ter pelo menos quatro faces visíveis que desaparecem na reta l_1. Identifique essas faces.

Resposta: Porta, lado da casa que tem a porta, um lado da chaminé, lateral da janela.

b) Seu desenho deve ter pelo menos uma face visível que desaparece na reta l_2. Identifique esse face (ou essas faces).

Resposta: Parte visível do telhado.

c) Seu desenho deve ter pelo menos quatro faces que desaparecem na reta l_3. Identifique essas faces.

Resposta: Lado da casa que tem a janela, janela, lado frontal da chamine, batente da porta.

d) Seu desenho deve ter pelo menos duas faces que desaparecem na linha l_4 . Identifique essas faces.

Resposta: Soleira da porta e a base da janela.

4.3 Aplicação de Malhas

Na Seção 4.2 apresentamos de forma mais intuitiva o conceito de projeção. Agora iremos formalizar as ideias envolvidas neste processo. O ponto de partida para fazer isto ao mesmo tempo em que relacionamos com o desenho em perspectiva é descrever o que entenderemos como "objetos desenháveis".

Na maioria das vezes na matemática, os pontos são os objetos fundamentais no espaço, e assim se define as retas como um tipo especial de coleção de pontos. Mas quando é traçado uma imagem perspectiva, é claro que as retas são objetos fundamentais por si só. Afinal, não se desenha cada pequeno ponto ao longo dessa reta: apenas traça-se a reta. Além disso, ao desenhar uma imagem, não se desenha cada ponto e cada reta que existe no mundo: desenha-se um subconjunto especial de pontos e retas que parecem ser importantes, como as bordas e cantos da casa, os cantos e bordas do 'T', etc.

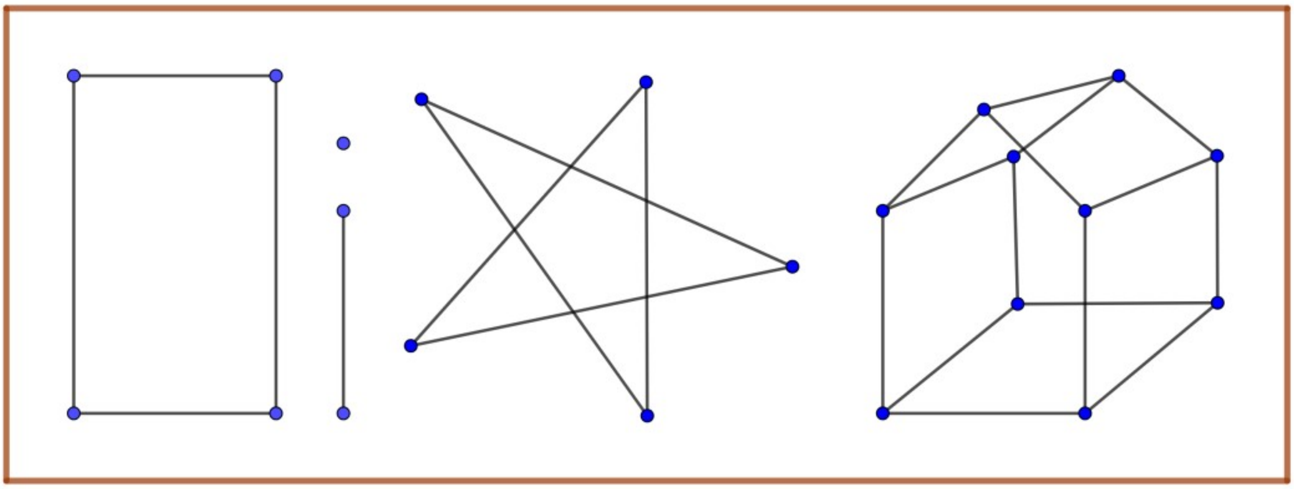
A definição a seguir formaliza a noção de um objeto desenhável, que tem um conjunto de pontos e retas que se relacionam entre si de uma forma natural.

Definição 4.3.1 *Uma malha $\mathcal{M} = P_1, ..., P_\kappa, l_1, ..., l_n$ é uma coleção de pontos e retas em E^3 tal que todo ponto em $\mathcal{M}$ é incidente com pelo menos duas retas em $\mathcal{M}$ e toda reta em $\mathcal{M}$ é incidente com ao menos dois pontos em $\mathcal{M}$.*

Observe que como pontos são *elementos* de E^3 e retas são *subconjuntos*, não é correto escrever $\mathcal{M} \subset E^3$ Apesar disto, eventualmente usaremos este abuso de notação. Além disso, quando representarmos graficamente uma malha, desenharemos somente segmentos de reta ao invés da representação das retas. Por exemplo, na Figura 68 a seguir a casa e estrela representam malhas, ao passo que a palavra "Oi" não, pois temos um ponto que não pertence a uma reta e vários pontos que pertencem a um única reta. Observe também que o ponto de interseção entre duas retas de uma malha não é necessariamente um ponto da malha, como vemos na figura da estrela.

,

Figura 68 – Três coleções de pontos e retas



Fonte: Imagem do autor

Observe que a definição impõe restrições quanto às quantidades de pontos e retas possíveis em uma malha. Algumas destas são exploradas na seguinte atividade:

Atividade 14: É possível criar uma malha com:

a) Exatamente um ponto?

b) Exatamente dois pontos?

c) Exatamente três pontos?

d) Exatamente três pontos colineares?

e) Exatamente quatro pontos?

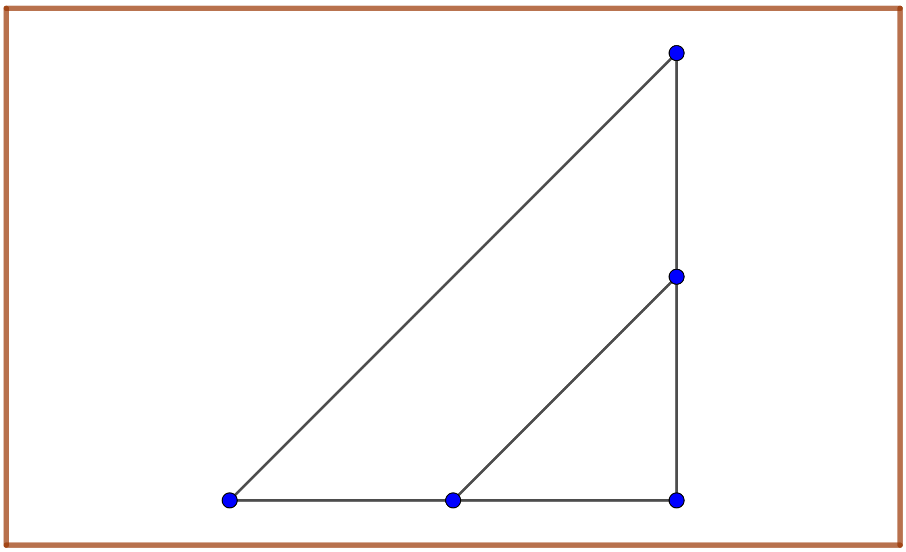
f) Com menos pontos do que retas?

g) Com menos retas do que pontos?

Uma possível solução é a seguinte: O item (a) é claramente impossível, pois exige-se um mínimo de dois pontos em cada reta de uma malha. Também é impossível o item (b), pois dois pontos determinam uma única reta. As únicas malhas possíveis de serem formadas com três pontos são aquelas que são representadas por triângulos, como qualquer reta adicionada a malha deverá conter ao menos dois dos pontos conterá um dos lados do triângulo. Assim, o item (c) é verdadeiro, ao passo que o (d) é falso. O item (e) é verdadeiro, e aqui temos bem mais opções que nos anteriores: podemos representar a malha através de um quadrilátero, ou de um quadrilátero e uma ou as duas diagonais. No último caso, ainda é possível remover alguns lados do quadrilátero e ainda assim obter uma malha. Além disso, uma malha representada por um quadrilátero e suas diagonais mostra que a construção da malha proposta no item (f) é possível: tal malha possui 4 pontos e 6 retas, tendo portanto menos pontos do que retas. Outro exemplo é o "esqueleto" de casa representado na figura anterior: temos 10 pontos e 15 retas. Também é possível construir uma malha com menos retas do que pontos. Para tal construção, podemos pensar em conjuntos de pontos que contenham algumas ternas de pontos colineares, para minimizar a quantidade de retas necessárias. Por exemplo, na Figura 69 a seguir temos um malha com 4 retas e 5 pontos.

,

Figura 69 – Menos retas do que pontos



Fonte: Imagem do autor

Agora podemos definir formalmente o que se entende por um projeção no contexto de malhas.

Definição 4.3.2 *Dada uma malha $\mathcal{M}$ em E^3, um plano $\omega' \subset E^3$ e um ponto $O \in E^3$ não incidente com $\mathcal{M}$ ou ω', definimos a aplicação de malha com centro em O como a* *aplicação*

$$' : \mathcal{M} \to \mathcal{M}' \subset \omega'$$

que leva pontos em pontos e retas em retas de tal forma que

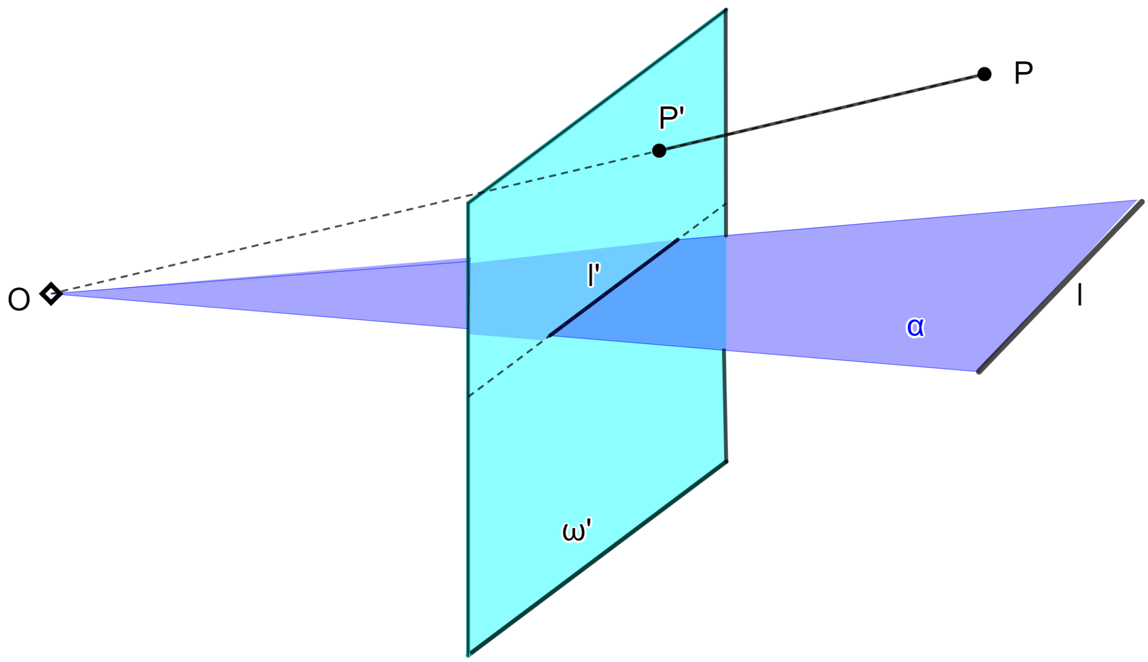
1. *O, P e P' são colineares para cada ponto $P \in \mathcal{M}$;*

2. *O, l e l' são coplanares para cada reta $l \in \mathcal{M}$.*

Na Figura 70 abaixo temos uma ilustração, em uma situação euclidiana, de como uma aplicação de malha projeta o ponto P e a reta l no plano ω'.

,

Figura 70 – Aplicação de Malha 01



Fonte: Imagem do autor

É importante observar que como estamos trabalhando em E^3, mesmo no caso que a reta que passa por O e por P seja paralela a ω', temos bem definido um ponto P' em ω', que neste caso é o ponto ideal relativo à reta OP. Situação semelhante ocorre no caso em que a reta determinada por O e l é paralela a ω'. Neste caso, l' é a reta ideal do plano ω'. É possível caracterizar P' e l' da seguinte maneira: Como O e P são pontos distintos e $O \notin \omega'$, temos uma reta bem determinada OP que intersecta ω' em um único ponto (lembramos novamente que estamos em E^3 e assim uma reta sempre cruza um plano, eventualmente em um ponto ideal). Tal ponto de interseção é exatamente P'. De maneira semelhante, O e l determinam um único plano, o qual intersecta ω' segundo uma reta, que é exatamente l'.

No exemplo a seguir exploramos a razão pela qual impomos condições sobre a posição do ponto O.

Atividade 15:

a) Por que a aplicação de malha não está bem definida se O é um ponto de $\mathcal{M}$?

b) Por que a aplicação de malha não está bem definida se O está em uma reta l de $\mathcal{M}$?

c) Por que a aplicação de malha não está bem definida se O está em ω'?

No primeiro caso, a imagem do ponto $O \in \mathcal{M}$ não estaria bem definida, pois para qualquer ponto Q em ω' teríamos O, $P = O$ e Q colineares. No segundo caso a imagem da reta l contendo O não estaria bem definida. Já no terceiro caso a imagem de todo ponto P fora de ω' seria igual a O, enquanto que a imagem de pontos P em ω' não estaria bem definida, já que P' poderia ser qualquer ponto na reta OP. Teríamos também ambiguidade na projeção de uma reta l de ω'.

Algumas questões que ajudam a aprofundar o conhecimento sobre aplicações de malha são dadas no próximo exemplo.

Atividade 16: Classifique cada afirmação a seguir como verdadeira ou falsa, dando uma breve justificativa.

a) Se P e S são pontos distintos em $\mathcal{M}$, então P' e S' são pontos distintos em ω'.

b) Se $Q \in l$ e tanto Q quanto l são elementos de $\mathcal{M}$, então $Q' \in l'$.

c) Se P e Q são pontos distintos em $\mathcal{M}$ e $PQ \in \mathcal{M}$, então $P'Q' = (PQ)'$.

d) Se P e Q são pontos distintos em $\mathcal{M}$ e $P'Q' \in \mathcal{M}'$, então $PQ \in \mathcal{M}$.

e) Se k e l são retas distintas em $\mathcal{M}$ e $k \cdot l \in \mathcal{M}$, então $k' \cdot l' = (k \cdot l)'$.

f) Se k e l são retas distintas em $\mathcal{M}$ e $k' \cdot l' \in \mathcal{M}'$, então $k \cdot l \in \mathcal{M}$.

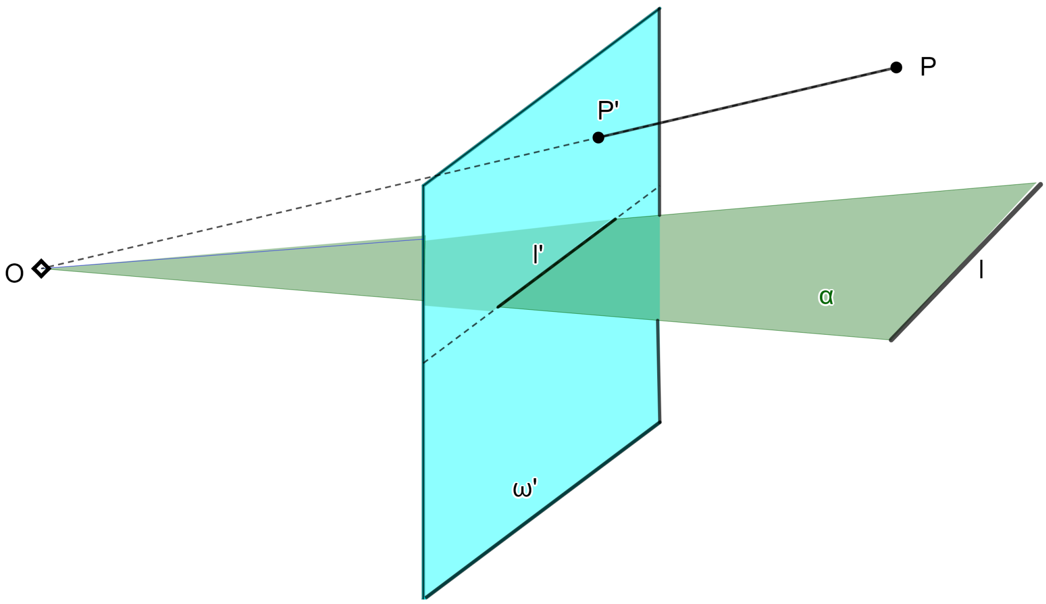
Uma possível solução é dada a seguir:

a) Falsa. Se S está na reta OP, então $P' = S'$.

b) Verdadeira. Observe que a reta OP está contida no plano α determinado por O e l. Assim, a interseção de OP com ω' está contida em $l' = \alpha \cdot \omega'$. Veja Figura 71:

,

Figura 71 – Aplicação de Malha 02

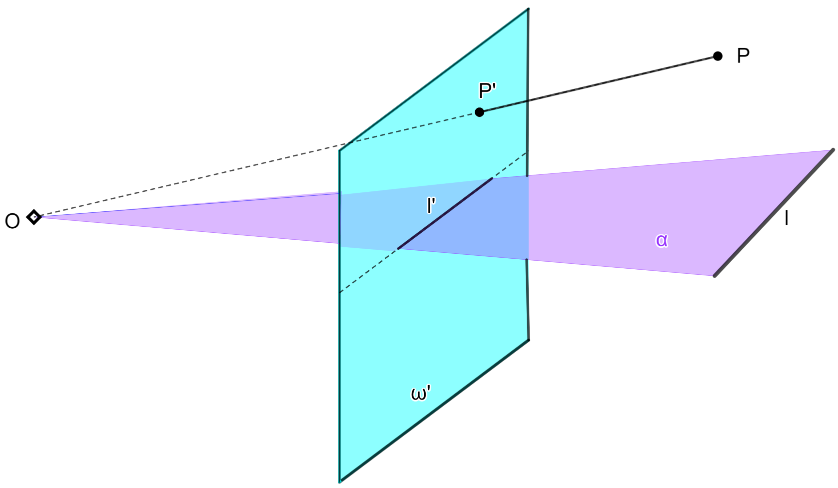


Fonte: Imagem do autor

c) Verdadeira. Observe que P, Q e O não podem ser colineares, pois do contrário O iria pertencer à reta $PQ \in \mathcal{M}$. Assim, P' e Q' são pontos distintos em ω' e a reta $P'Q'$ está bem determinada. Além disso, pelo item anterior, as imagens de P e Q estão na imagem $(PQ)'$ de PQ. Portanto, $(PQ)'$ e $P'Q'$ coincidem.Veja Figura 72:

,

Figura 72 – Aplicação de Malha 03

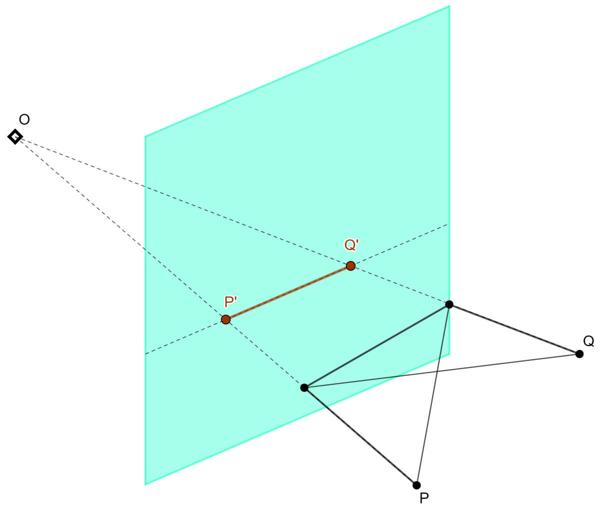


Fonte: Imagem do autor

d) Falsa. A reta $P'Q'$ pode ser a imagem de uma reta paralela a PQ, mas PQ pode não pertencer a $\mathcal{M}$. Veja Figura 73 a seguir.

,

Figura 73 – Aplicação de Malha 04



Fonte: Imagem do autor

e) Verdadeira. Pelo item (2), a imagem do ponto de interseção pertence a imagem de cada uma das retas. Assim, tal imagem está na interseção das imagens das retas. (aqui acho que não precisa da figura).

f) Falsa. O ponto $k \cdot l$ pode não pertencer a $\mathcal{M}$ e ponto $k' \cdot l'$ pode ser a imagem de outro ponto sobre a reta $O(k' \cdot l')$ em $\mathcal{M}$.

Os itens (a), (d) e (f) acima mostram que aplicações de malha em geral podem não ter um bom comportamento, no sentido em que a imagem da malha acaba tendo um aspecto muito distinto da malha original. Por exemplo, as retas da malha ilustrada no item (d) acima são levadas em uma única reta pela aplicação. O comportamento pode ser melhorado com algumas hipóteses adicionais, conforme vemos no exemplo a seguir.

Atividade 17: Suponha que temos uma malha plana $\mathcal{M} \subset \omega$, um ponto O que não está em ω nem em ω' e uma aplicação de malha $' : \mathcal{M} \to \omega'$.

Classifique cada afirmação a seguir em verdadeira ou falsa, fornecendo uma breve justificativa.

a) Se P e S são pontos distintos em $\mathcal{M}$, então P' e S' são também distintos.

b) Se P e Q são pontos distintos em $\mathcal{M}$ e $P'Q' \in \mathcal{M}'$, então $PQ \in M$.

c) Se k e l são retas distintas em M e $k' \cdot l' \in \mathcal{M}'$, então $k \cdot l \in \mathcal{M}$.

Uma possível solução é dada a seguir:

a) Verdadeira. Observe que P' e S' coincidem somente se os pontos O, P e S são colineares. Mas se O está na reta PS, então O está no plano ω, o que não ocorre por hipótese.

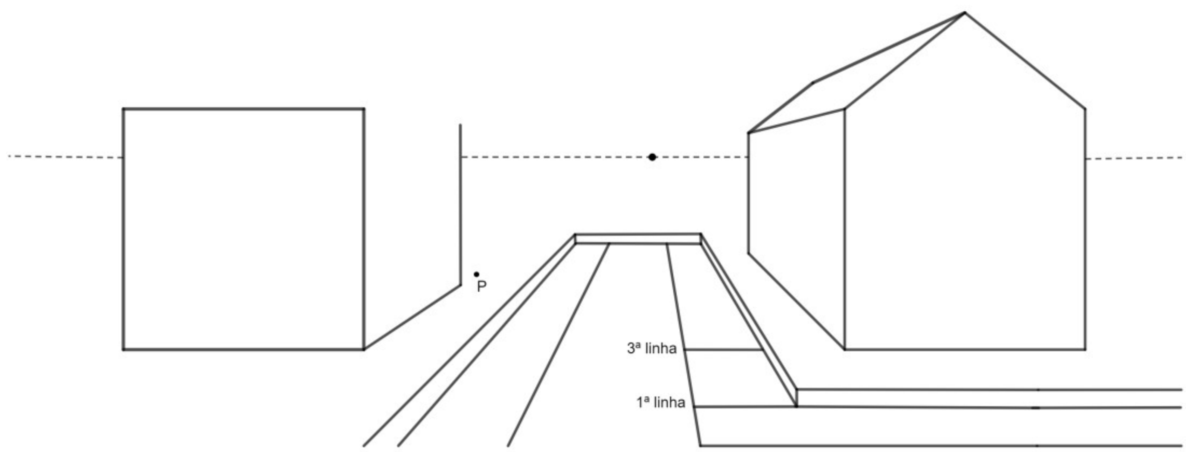
b) Verdadeira. Nas condições dadas, a aplicação de malha leva retas distintas em retas distintas. De fato, suponha por absurdo que k e l são retas distintas em ω e que $k' = l'$. Então o plano contendo O e $k' = l'$ contém ambas as retas k e l. Mas existe um único plano contendo k e l, que é o próprio ω. Isto implica que $O \in \omega$, o que contraria a hipótese.

c) Verdadeira. Como $k' \cdot l' \in \mathcal{M}'$, então ele é a imagem de um ponto P da malha. Mas como no item (1), se P e $k \cdot l$ têm a mesma imagem, então estes pontos coincidem. Portanto, $P = k \cdot l \in \mathcal{M}$.

Atividade 18: A Figura 74 mostra o início de um esboço de três casas e uma calçada em perspectiva de um ponto. A casa da direita está quase concluída; a primeira casa à esquerda tem algumas paredes mas ainda precisa de telhado; a segunda casa à esquerda tem apenas um canto até agora (o canto inferior mais próximo da primeira casa e da calçada está no ponto P). O próximo conjunto de perguntas o levará a concluir o esboço. A face que contém o pico da casa à direita fica perpendicular à calçada. Para as duas casas à esquerda, queremos que o pico seja paralelo à calçada. Isso significa que precisaremos descobrir como determinar onde desenhar o meio da casa.

,

Figura 74 – Esboço em perspectiva de um ponto



Fonte: Imagem do autor

1. Comecemos com uma pergunta mais simples, começando pelo terreno. Desenhamos a primeira e a terceira retas da calçada. Como dividimos esta imagem de um retângulo ao meio para obtermos a segunda reta da calçada?

2. Utilize a construção da questão anterior para determinar uma reta vertical contendo o pico do telhado da casa à esquerda. Depois, termine de desenhar as bordas visíveis desta casa. A escolha da altura do telhado é livre, mas faça de tal maneira que os pontos de fuga das bordas do telhado estejam ainda no papel, pois isto ajudará no último item.

3. Para ambas as construções dos itens anteriores, estamos implicitamente utilizando duas propriedades importantes da aplicação de malhas. Quais são estas propriedades?

4. Em relação à construção do item (1), responda às seguintes questões:

   a) O que a malha $\mathcal{M}$ representa?
   b) O que o plano ω' representa?
   c) O que $\mathcal{M}'$ representa?
   d) O ponto de fuga tem uma pré-imagem sob esta aplicação de malha?

5. Suponha que a casa à direita seja uma casa de vidro, de modo que todas as quatro arestas do piso, bem como todas as arestas e cantos da casa e do telhado, sejam visíveis.

   a) Desenhe essas arestas e pontos ocultos que representam a malha tridimensional da casa.

   Os dois primeiros itens deste exemplo levaram a divisão de objetos na imagem da aplicação de malha. Nos próximos dois, o conceito envolvido é a duplicação de objetos.

6. Continue o desenho da calçada do item (1). Já temos as três primeiras retas da calçada, agora desenhe a quarta. Depois, continue com mais alguns ladrilhos.

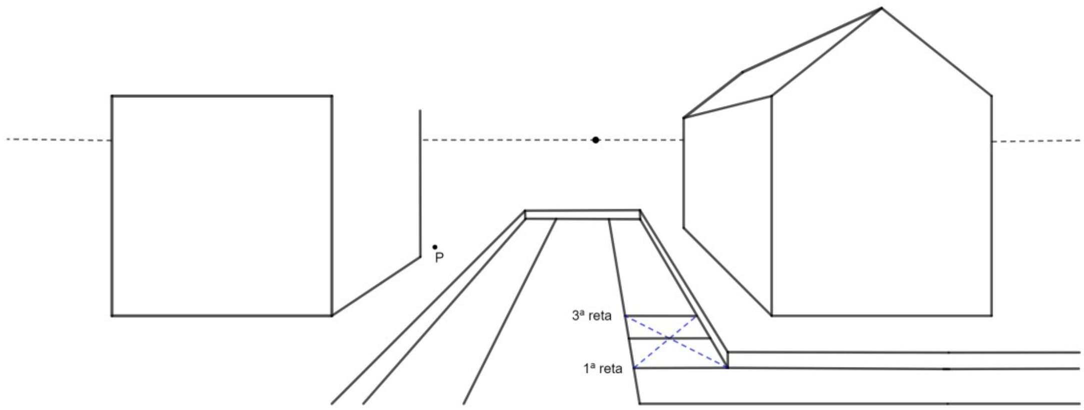
7. Desenhe a segunda casa à esquerda, de forma que seja a imagem de uma casa idêntica à primeira casa à esquerda.

Uma solução para as questões anteriores é dada a seguir.

1. A figura geométrica formada pelas retas 1 e 3 mais as laterais da calçada é um trapézio. Trace as diagonais desse trapézio. Traçando agora uma reta paralela a 1ª reta passando pelo ponto de intersecção das duas diagonais teremos a 2ª reta em perspectiva, como mostra a Figura 75 abaixo. Uma justificativa para este procedimento, utilizando aplicações de malha, será dada no item (3).

,

Figura 75 – Construção da 2ª reta em perspectiva de um ponto

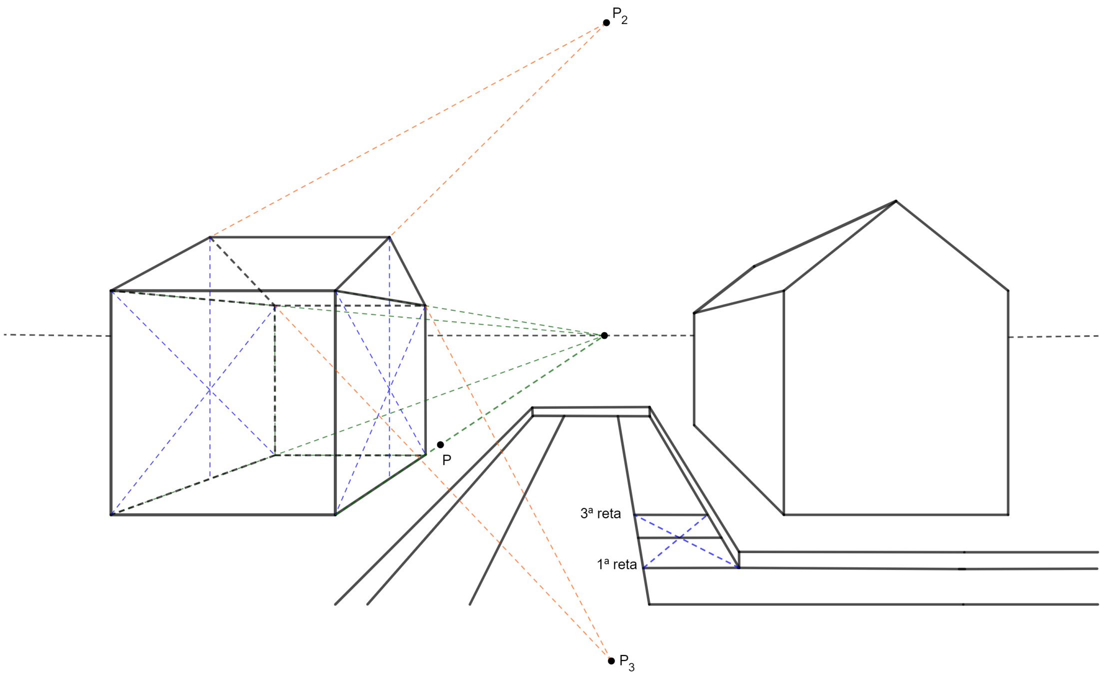


Fonte: Imagem do autor

2. Primeiro, utilizamos o ponto de fuga para completar o contorno da face a ser dividida. Depois, seguimos o procedimento do item anterior para desenhar a reta vertical solicitada. Para completar o desenho, podemos determinar o vértice escondido do forro da casa tracejando os contornos ocultos do chão, do forro e da quarta quina da casa. Depois, escolhemos uma altura para o telhado e completamos a Figura 76.

,

Figura 76 – Completando o telhado



Fonte: Imagem do autor

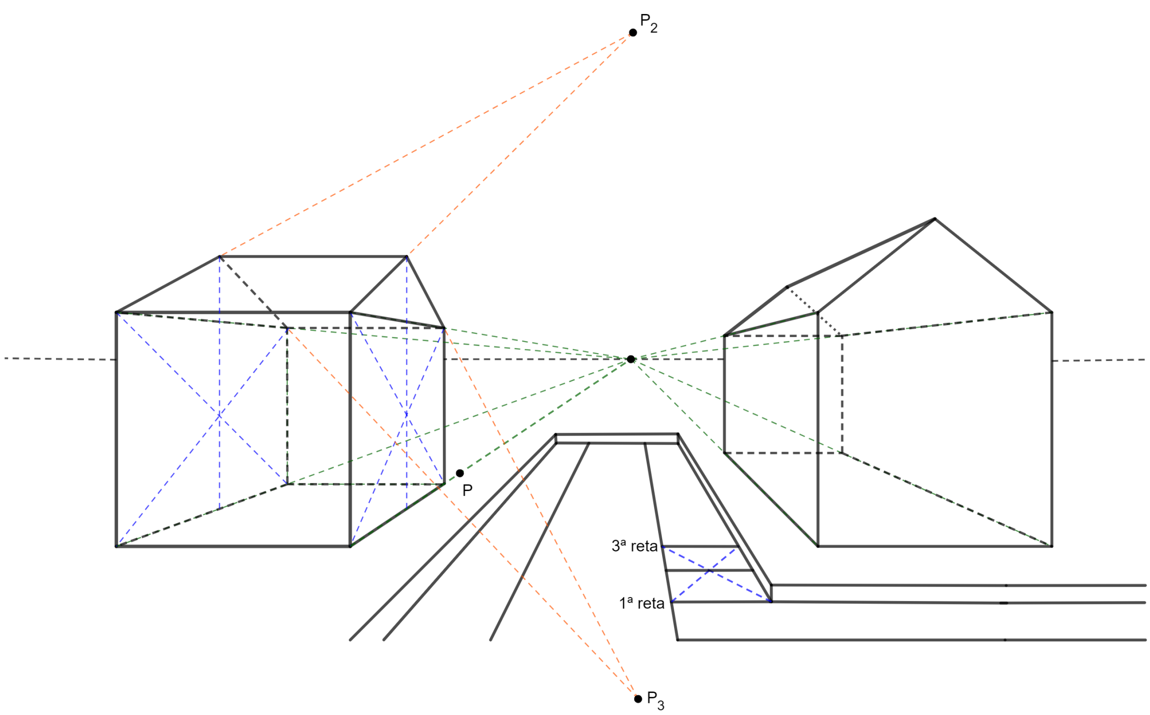
3. A ideia da construção feita no item (1) é que as retas 1 e 3, juntamente com as laterais da calçada são as imagens dos contornos de dois ladrilhos consecutivos, que formam um retângulo no mundo real. A linha que divide estes dois ladrilhos é paralela às retas 1 e 3 e divide o retângulo considerado ao meio. Desta forma, esta linha passa pela interseção das diagonais do retângulo. Uma construção parecida foi feita no item (2). Em ambos os casos, usamos os fatos sobre a aplicação de malhas: a imagem da interseção de duas retas é a interseção das imagens e que a imagem da reta que liga dois pontos é reta que liga as imagens dos pontos.

4. A malha $\mathcal{M}$ é o ladrilho no mundo real. O plano ω' é o plano do papel onde o desenho em perspectiva foi feito, enquanto que $\mathcal{M}'$ é o próprio desenho. Por fim, o ponto de fuga não possui pré-imagem pela aplicação de malha, pois por mais que continuemos a estender os ladrilhos, estes nunca atingirão o ponto de fuga. Na verdade este ponto é uma representação no papel do ponto ideal determinado pelas retas paralelas às laterais da calçada.

5. a) Na Figura 77, temos a construção das arestas internas da casa à direita.

,

Figura 77 – Arestas internas da casa à direita

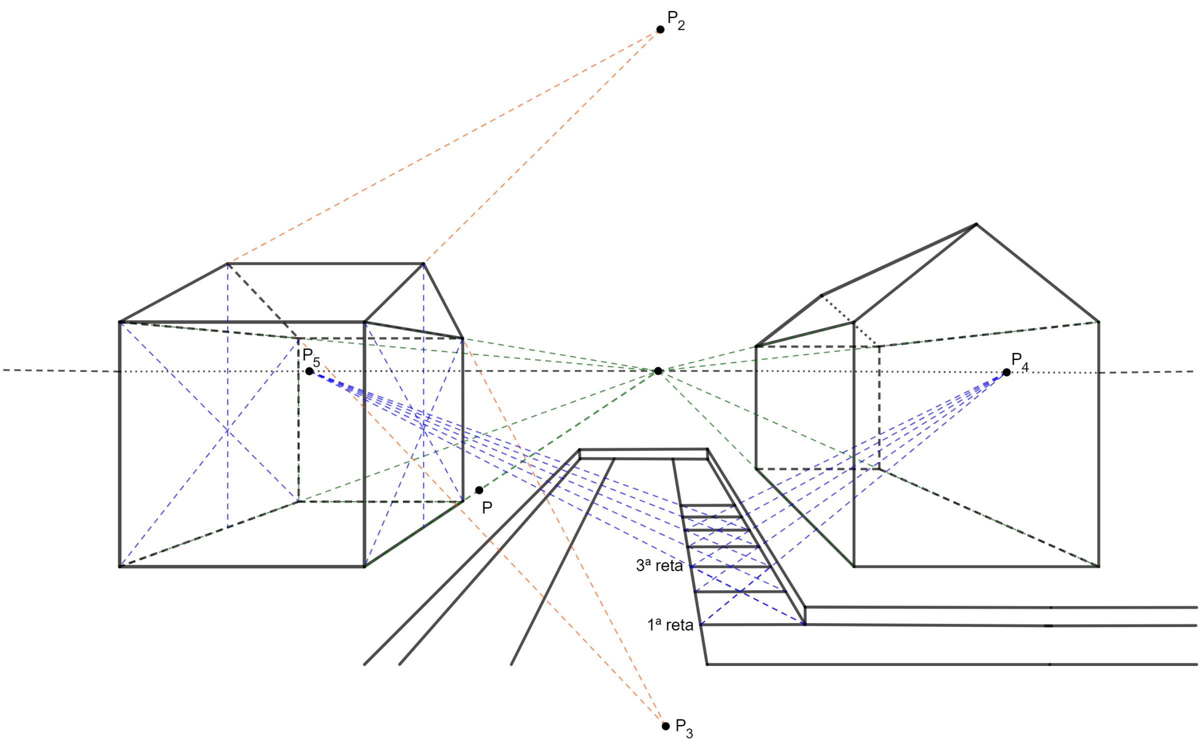


Fonte: Imagem do autor

6. Uma ideia que pode ser utilizada é a seguinte: o conjunto das diagonais de pares de ladrilhos se divide em dois subconjuntos de retas paralelas, sendo portanto relacionadas com dois pontos ideais, que são representados por pontos de fuga no papel. Para identificar tais pontos, prolongue as diagonais feitas no item (1) até que elas intersectem a linha do horizonte (que representa a reta ideal do plano do chão). Depois, representa as diagonais do próximo par de ladrilhos, que "terminam" nos pontos de fuga encontrados. Pelo ponto de interseção das diagonais trace uma paralela à primeira reta da figura: isto determina a quarta reta. A quinta reta liga os pontos onde as diagonais cruzam as laterais da calçada. À partir daí basta repetir o procedimento para obter mais ladrilhos. Como mostra a Figura 78.

,

Figura 78 – Construção de mais ladrilhos na calçada

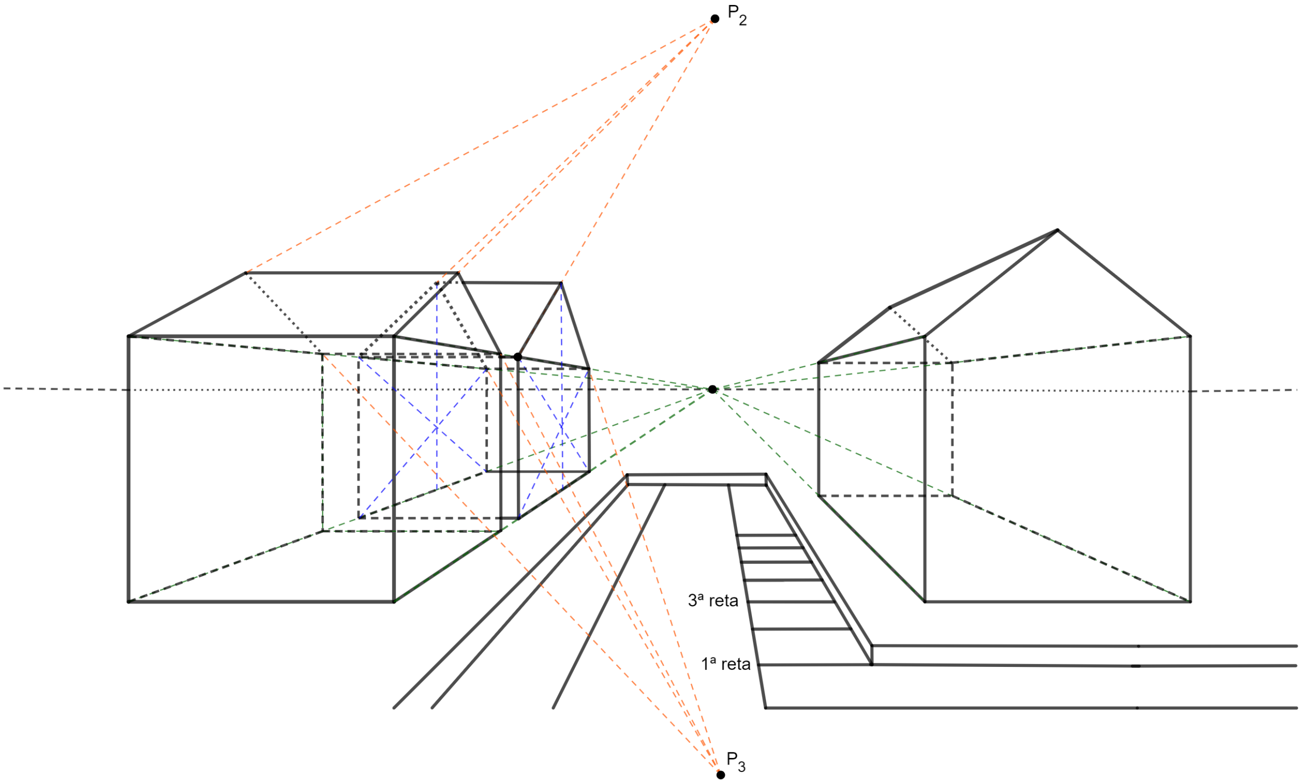


Fonte: Imagem do autor

7. Podemos utilizar o ponto de fuga dado para identificar as retas que contenham as retas que contêm as bordas relativas ao chão e ao forro da face mais próxima da calçada, bem como a reta que contem o pico do telhado. Depois, traçamos uma reta vertical passando por P para determinar uma quina da casa. Por fim, usamos os pontos de fuga das bordas do telhado da primeira casa para desenhar as bordas do telhado da casa desejada, o que permite identificar a posição da última quina visível da casa. Como mostra a Figura 79.

,

Figura 79 – Construção da terceira casa



Fonte: Imagem do autor

4.4 Teorema de Desargues

Nesta seção iremos apresentar um dos mais famosos resultados da geometria projetiva: o Teorema de Desargues. Este resultado relaciona conceitos que são próprios da geometria projetiva: os conceitos de perspectividade em relação a um ponto e perspectividade em relação a uma reta. As definições são dadas a seguir.

Definição 4.4.1 *Suponha que $\mathcal{M}_1$ e $\mathcal{M}_2$ são dois conjuntos de pontos e retas em E^3, ambos planares.*

1. *Dizemos que $\mathcal{M}_1$ e $\mathcal{M}_2$ estão em* ***perspectiva a partir de um ponto*** *se existe um ponto O (chamado* ***centro****) e uma correspondência bijetora entre os pontos de $\mathcal{M}_1$ e $\mathcal{M}_2$ tal que cada uma das retas através dos pontos correspondentes é incidente com o ponto O.*

2. *Dizemos que $\mathcal{M}_1$ e $\mathcal{M}_2$ estão em* ***perspectiva a partir de uma reta*** *se existe uma reta o (chamada* ***eixo****) e uma correspondência bijetora entre as retas de $\mathcal{M}_1$ e*

$\mathcal{M}_2$ *tal que cada uma das interseções das correspondentes retas é incidente com a reta* o*.*

Um triângulo em E^3 é uma malha formada por exatamente 3 pontos (e consequentemente, exatamente 3 retas). Em 1648, O matemático, arquiteto e engenheiro militar francês Girard Desargues estabeleceu o seguinte resultado:

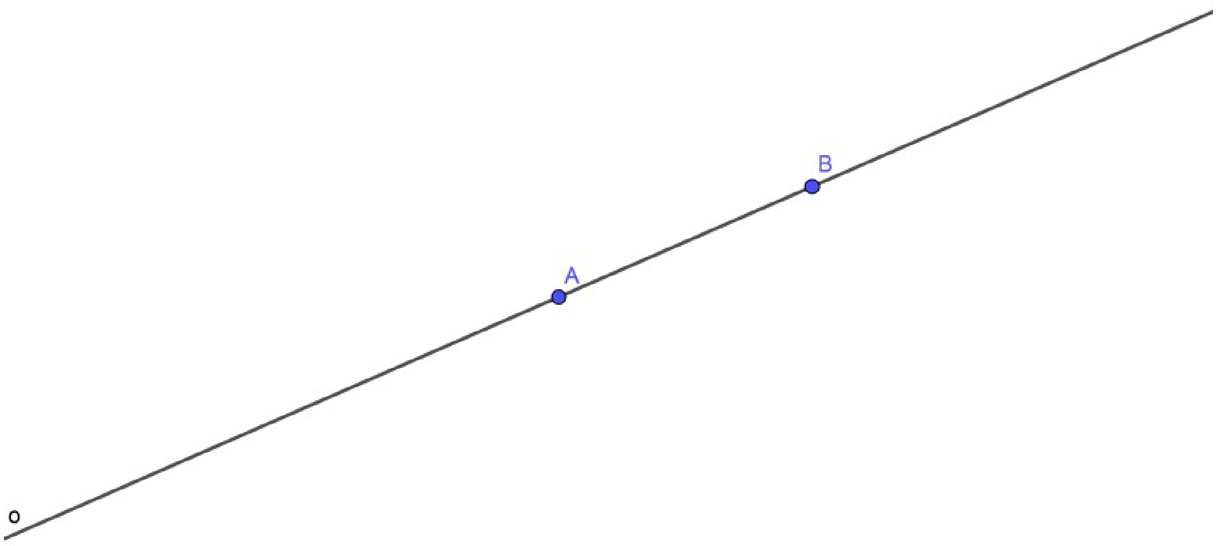
Teorema 4.4.1 (Teorema de Desargues) *Se dois triângulos estão em perspectiva à partir de um ponto, então eles estão em perspectiva à partir de uma reta.*

A seguinte construção, utilizando o GeoGebra, auxilia a compreensão da definição anterior, bem como do Teorema de Desargues e sua recíproca:

1. Em uma janela "Gráfico" do GeoGebra, crie dois pontos A e B e a reta o que liga este pontos.

,

Figura 80 – Crie os pontos A e B

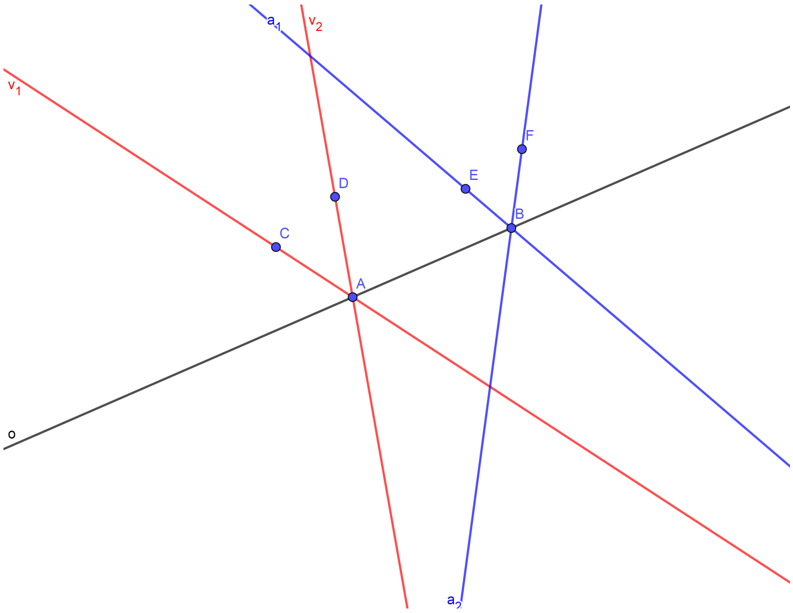


Fonte: Imagem do autor

2. Próximo ao ponto A, crie os pontos C e D e próximo do ponto B crie os pontos E e F, de forma que nenhum destes esteja em o. Depois, construa as retas ligando os pontos A e C, A e D, B e E e B e F, nomeadas respectivamente por v_1, v_2, a_1 e a_2. Selecione a cor vermelho para as duas primeiras e azul para as outras duas.

,

Figura 81 – Crie os pontos C , D, E e F

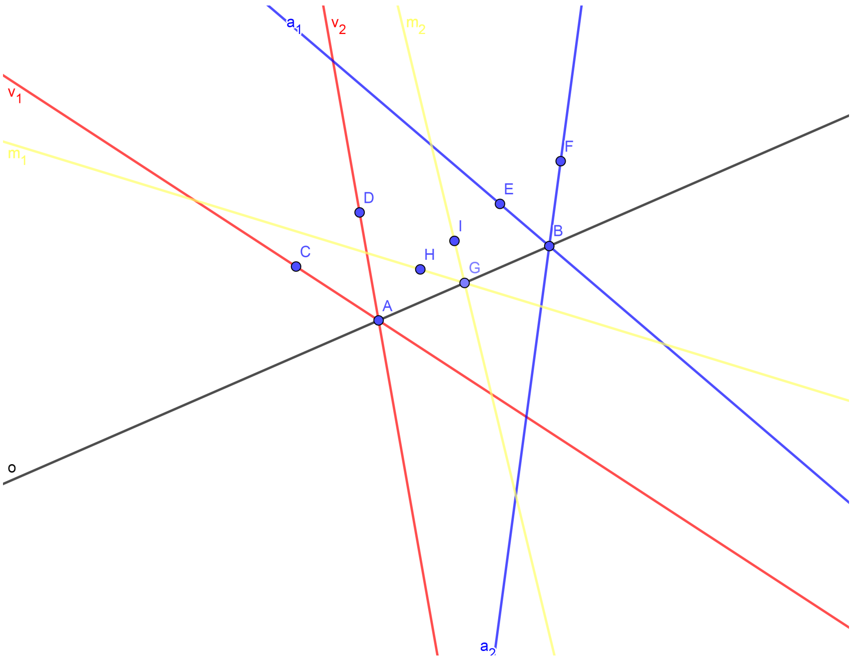


Fonte: Imagem do autor

3. Selecione um ponto G entre A e B, dois pontos H e I próximos, ambos não em o e construa as retas GH e GI, nomeadas respectivamente de m_1 e m_2, escolhendo a cor amarela para elas.

,

Figura 82 – Crie as retas m_1 e m_2

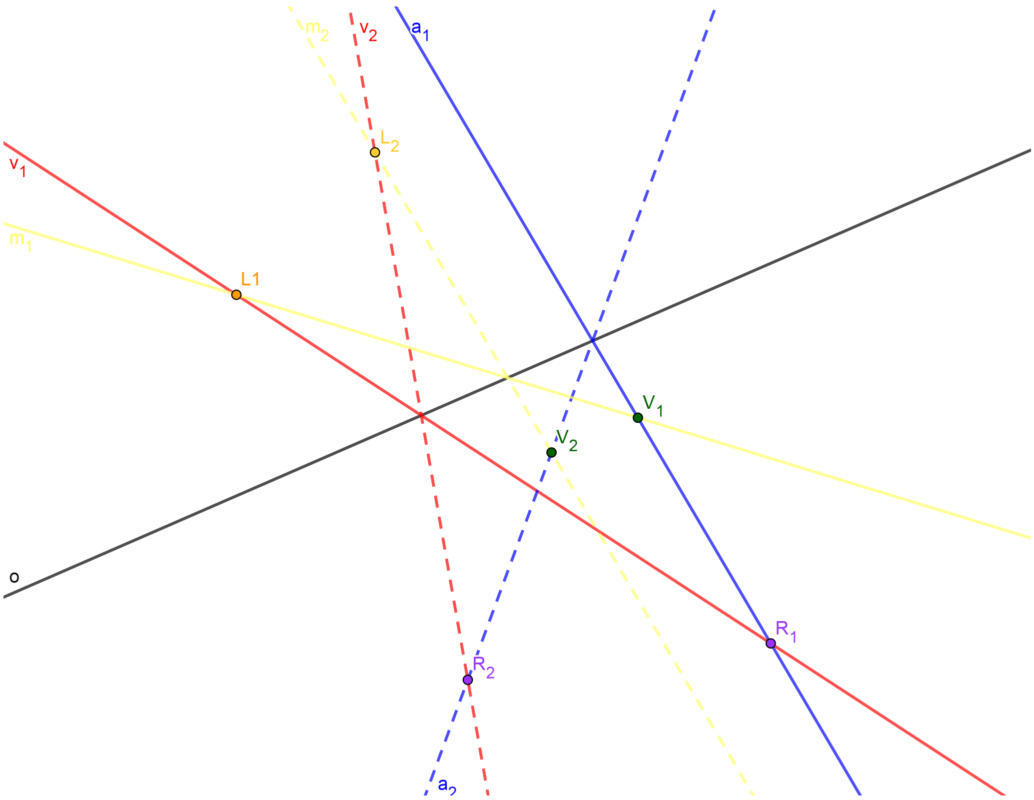


Fonte: Imagem do autor

4. Escolha o estilo tracejado para as retas v_2, a_2 e m_2. Determine os pontos onde cada reta em "linha cheia" intersecta outra reta em "linha cheia" e cada reta tracejada encontre outra reta tracejada. Talvez seja necessário movimentar os pontos C, D, E, F, H ou I, ou ainda diminuir o zoom da janela de inspeção, para que os pontos de interseção sejam visíveis na tela (na Figura 83 a seguir, mudamos as posições dos pontos E, F e I em relação às figuras anteriores). Escolha os nomes L_1, R_1 e V_1 (que são as iniciais de *laranja*, *roxo* e *verde*, as cores das interseções) para os pontos de interseção das retas em linha cheia, respectivamente vermelho com amarelo, vermelho com azul e azul com amarelo. Faça algo análogo para as interseções entre as retas tracejadas. Para que o desenho não fique muito poluído, oculte os pontos de A até I.

,

Figura 83 – Pontos de intersecção

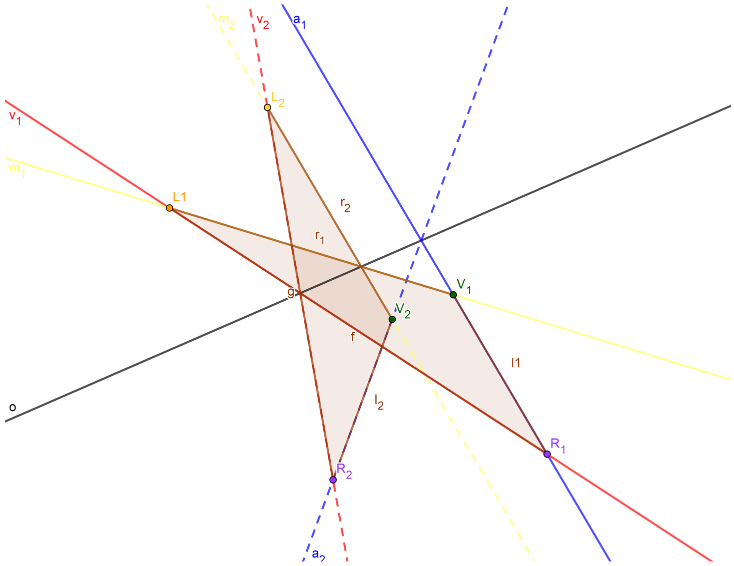


Fonte: Imagem do autor

5. Usando a ferramenta "Polígono" do GeoGebra, construa os triângulos $L_1R_1V_1$ e $L_2R_2V_2$. Pela própria construção estes triângulos estão em perspectiva à partir de uma reta. Nesse caso, o eixo é a reta o. Isto pode ser visto em termos de malhas considerando as malhas $\mathcal{M}_1 = \{L_1, R_1, V_1, v_1, a_1, m_1\}$ e $\mathcal{M}_2 = \{L_2, R_2, V_2, v_2, a_2, m_2, \}$. A bijeção considerada é claramente aquela que relaciona v_1 com v_2, a_1 com a_2 e m_1 com m_2, visto que estes pares de retas foram construídos para se intersectar sobre o eixo o.

,

Figura 84 – Construa triângulos

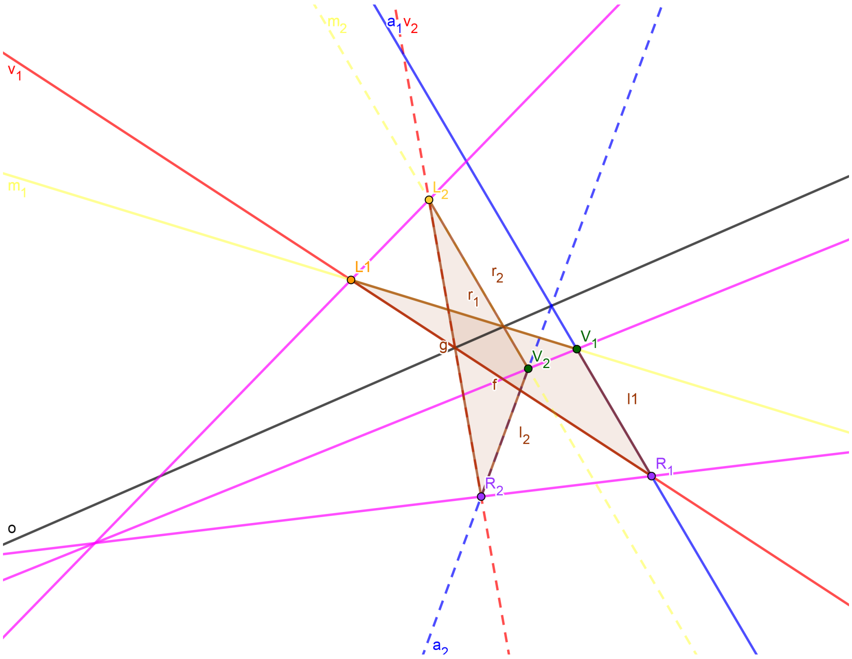


Fonte: Imagem do autor

6. A pergunta que surge é: estes triângulos estão em perspectiva à partir de um ponto? Para ver isto, construa as retas L_1L_2, R_1R_2 e V_1V_2. Talvez seja necessário diminuir o zoom para ver que estas três retas se intersectam em um mesmo ponto, como na Figura 85 abaixo. Desta forma, os triângulos estão também em perspectiva à partir de um ponto.

,

Figura 85 – Triângulos em Perspectiva de um Ponto

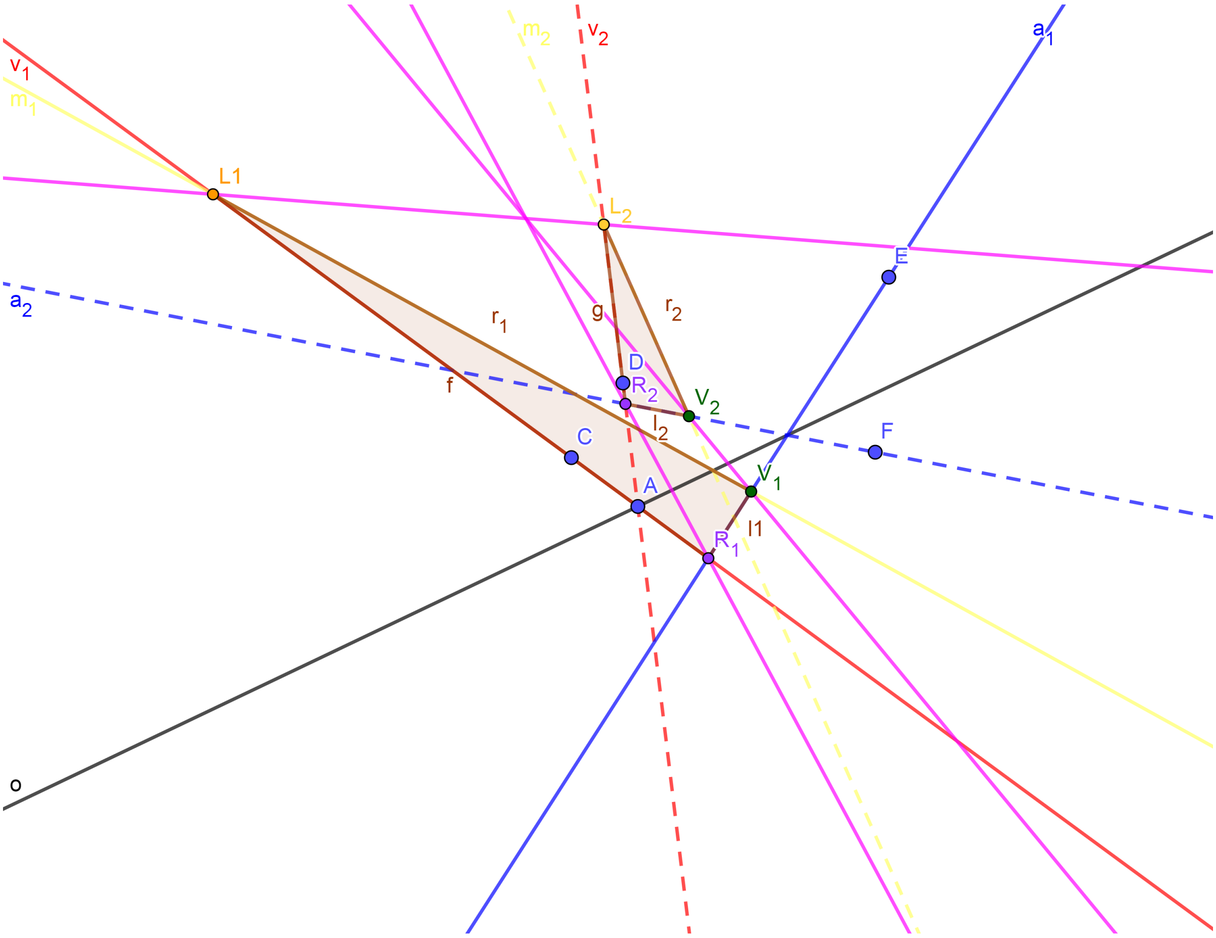


Fonte: Imagem do autor

7. Feita esta construção, podemos movimentar algum(s) do(s) ponto(s) de $A, B, C, \ldots I$, percebendo que o que ocorreu no item anterior continua ocorrendo. Isto leva a conjecturar que a recíproca do teorema estabelecido por Desargues seja também verdadeira.

,

Figura 86 – Construção feita



Fonte: Imagem do autor

Vamos agora enunciar e provar o Teorema de Desargues e sua recíproca:

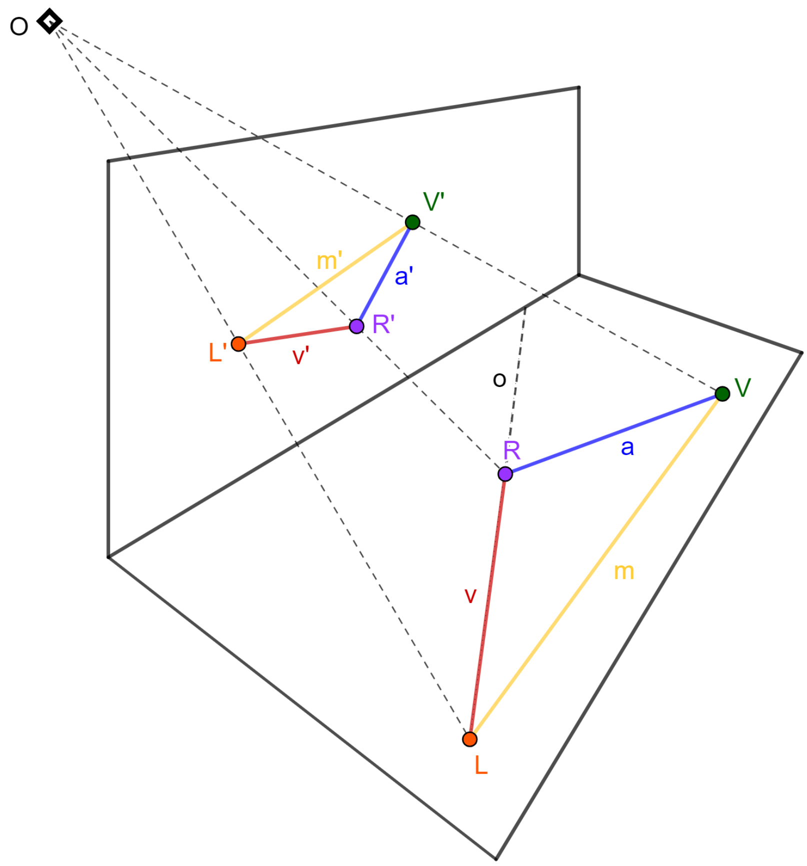
Teorema 4.4.2 *Dois triângulos em E^3 estão em perspectiva à partir de uma reta se e somente se estão em perspectiva à partir de um ponto.*

Demonstração: Vamos dividir a demonstração em dois casos: quando os triângulos estão em planos distintos e quando estão no mesmo plano. Considere primeiramente os triângulos $\mathcal{T} = \{L, R, V, v, a, m\} \subset \omega$ e $\mathcal{T}' = \{L', R', V', v', a', m'\} \subset \omega'$, com $L = v \cdot m$, $L' = v' \cdot m'$, $R = v \cdot a$, $R' = v' \cdot a'$, $V = a \cdot m$, $V' = a' \cdot m'$ e ω, ω' planos distintos em E^3.

Suponha que $\mathcal{T}$ e $\mathcal{T}'$ estão em perspectiva à partir de um ponto O. Como podemos ver na Figura 87.

,

Figura 87 – Triângulos em planos distintos em perspectiva de um ponto



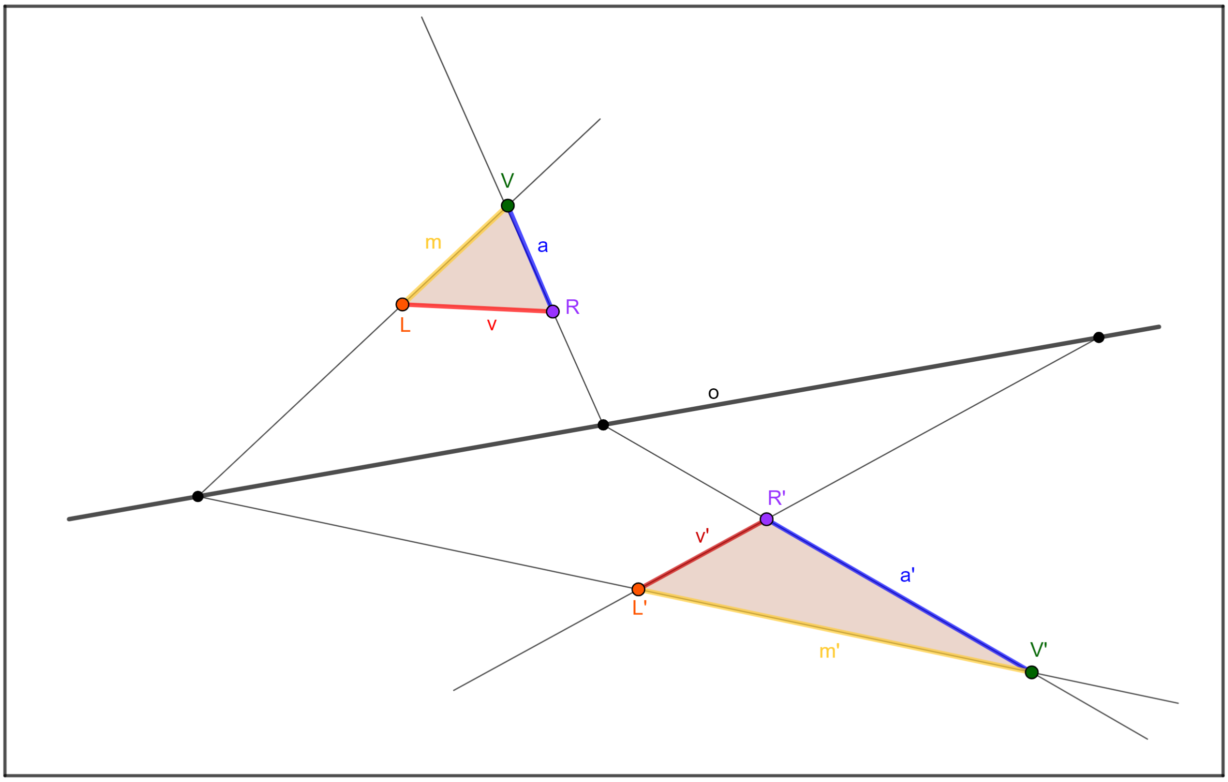
Fonte: Imagem do autor

Denote por o a reta de interseção entre os planos ω e ω'. As retas $v = LR$ e OL', que são concorrentes em L, determinam um plano ω_v. Observe que $\omega_v \neq \omega$, pois do contrário O estaria em ω, o que implicaria em OL, OR e OV estarem contidas em ω, implicando que L', R' e V' estão em ω, o que não ocorre por hipótese. Da mesma maneira, $\omega_v \neq \omega'$. Como $R' \in OR \subset \omega_v$ e $L' \in \omega_v$, segue que a reta $v' = L'R'$ está contida em ω_v. Consequentemente, as retas LR e $L'R'$ se intersectam em um ponto X. Como $X \in LR \subset \omega$ e $X \in L'R' \subset \omega'$, segue que $X \in \omega \cdot \omega' = o$. Com um argumento análogo mostra-se que $Y = (LV) \cdot (L'V')$ e $Z = (RV) \cdot (R'V')$ são também pontos de o. Portanto, os triângulos estão em perspectiva à partir da reta o. Reciprocamente, suponha que $\mathcal{T}$ e $\mathcal{T}'$ estão em perspectiva à partir de uma reta o.

Sejam $X = v \cdot v'$, $Y = a \cdot a'$ e $Z = m \cdot m'$. Estes pontos estão em o, que é necessariamente a interseção $\omega \cdot \omega'$. Os pares de retas concorrentes v e v', a e a', m e m'

,

Figura 88 – Triângulos em planos distintos em perspectiva de uma reta



Fonte: Imagem do autor

determinam três planos nomeados, respectivamente, ω_v, ω_a e ω_m. Como os pontos $V \in m$ e $V' \in m'$ estão no plano ω_m, segue que a reta VV' está contida em ω_m. Além disto, $V \in a$ e $V' \in a'$, o que implica em $VV' \subset \omega_a$. Portanto, $VV' = \omega_m \cdot \omega_a$. Analogamente, $LL' = \omega_v \cdot \omega_m$. Portanto, VV' e LL' estão contidas em ω_m e assim se cruzam em um ponto, que é o ponto comum aos planos ω_v, ω_a e ω_m. De maneira semelhante, LL' e RR' se cruzam neste ponto. Portanto, as retas VV', LL' e RR' se intersectam em um mesmo ponto O, o que implica que $\mathcal{T}$ e $\mathcal{T}'$ estão em perspectiva à partir do ponto O.

Vamos agora considerar o caso em que os triângulos $\mathcal{T}$ e $\mathcal{T}'$ estão em um mesmo plano ω. Suponha primeiramente que $\mathcal{T}$ e $\mathcal{T}'$ estejam em perspectiva à partir de um ponto O. Considere uma reta s passando por O e que não esteja contida em ω e tome dois pontos $S, S' \in s$. Desta forma, as retas LL', RR', VV' e SS' passam todas por O. Como os pontos L, L', S e S' estão no plano OLS, segue que as retas LS e $L'S'$ se intersectam em um ponto L_1. De maneira semelhante, determinamos pontos $R_1 = (RS) \cdot (R'S')$ e $V_1 = (VR) \cdot (V'S')$. Agora, os triângulos determinados pelos pontos R, V e S e R', V' e S' estão em pontos distintos e em perspectiva à partir do ponto O. Pelo caso anterior, temos que os pontos

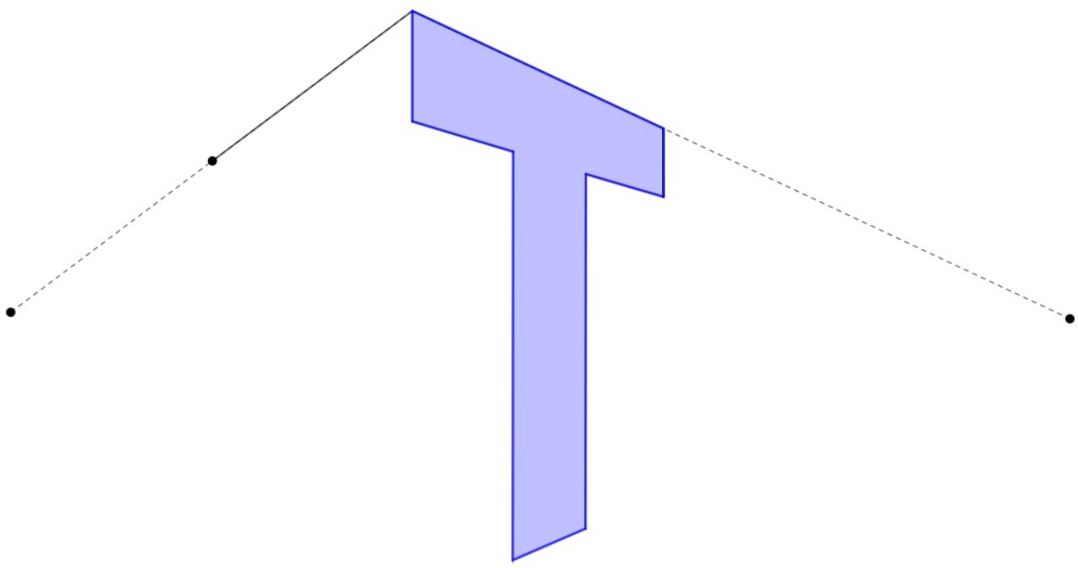
$$V_1 = (VR) \cdot (V'S'), \quad R_1 = (RS) \cdot (R'S'), \quad Y = (RV) \cdot (R'V')$$

são colineares. Portanto, $Y \in R_1V_1$. De forma análoga mostra-se que $Z = LV \cdot L'V' \in L_1V_1$ e $X = LR \cdot L'R' \in L_1R_1$. Portanto, X, Y, e Z estão na interseção entre o plano ω e o plano determinado por L_1, R_1 e V_1, o que implica que tais pontos são colineares. Por fim, suponha que $\mathcal{T}$ e $\mathcal{T}'$ são triângulos coplanares que estão em perspectiva à partir de uma reta o. Sejam $X = LR \cdot L'R'$, $Y = (RV) \cdot (R'V')$ e $Z = LV \cdot L'V'$. Considere um plano α distinto de ω e que contenha a reta o. Tome em α um triângulo $\mathcal{U} = \{L_1, R_1, V_1, v_1, a_1, m_1\}$ de tal forma que L_1R_1 passe por X, R_1V_1 passe por Y e L_1V_1 passe por Z. Desta forma, pares de triângulos não coplanares $\mathcal{T}$ e $\mathcal{U}$, $\mathcal{T}'$ e $\mathcal{U}$ estão em perspectiva em relação à reta o, o que implica que estão em perspectiva em relação à pontos S' e S''. Como $L_1 \in LS' \cdot L'S''$, segue que os pontos L, L', S' e S'' são coplanares e assim as retas LL' e $S'S''$ se intersectam. De maneira semelhante, as retas RR' e VV' também intersectam $S'S''$. Como LL', RR' e VV' estão em ω, esses pontos de interseção permanecem em ω. Além disso, uma vez que $S'S''$ intersecta ω em um único ponto, segue que os pontos de interseção citados anteriormente coincidem. Portanto, LL', RR' e VV' concorrem em um mesmo ponto O, o que significa que os triângulos $\mathcal{T}$ e $\mathcal{T}'$ estão em perspectiva em relação ao ponto O. ■

Atividade 19: A Figura 89 a seguir mostra o início de um desenho da letra "T" em perspectiva de dois pontos.

,

Figura 89 – T em perspectiva



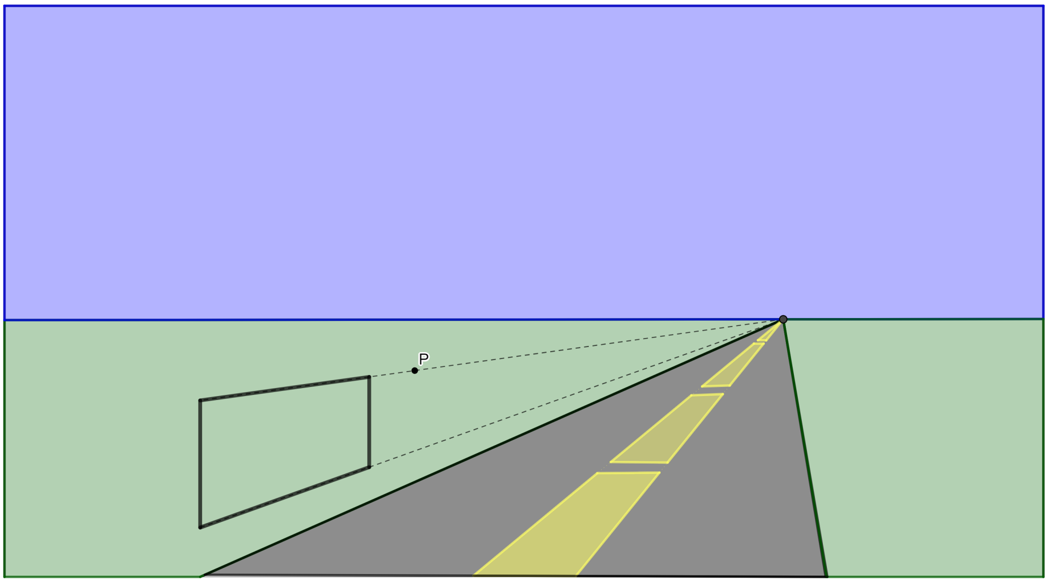
Fonte: Imagem do autor

1. Complete o desenho, assumindo que as arestas são sólidas e as faces transparentes, de forma que possamos visualizar todas as arestas.

2. A Figura 90 a seguir mostra um painel retangular na beira de uma estrada. Desenhe outro painel de mesma forma e tamanho (em perspectiva) com uma das quinas mais próximas do observador no ponto P.

,

Figura 90 – Painel na estrada em perspectiva



Fonte: Imagem do autor

3. Em cada uma das figuras a seguir, crie um retângulo e a sua imagem. Por exemplo, para a letra "T" você pode criar um triângulo na face da frente, considerando o ponto superior mais próximo do observador e os dois pontos mais distantes do observador na mesma face. Depois faça a sua imagem usando os pontos correspondentes na face de trás.

4. Seus triângulos na letra T estão em perspectiva à partir de um ponto? Qual? E em relação à uma reta? Qual?

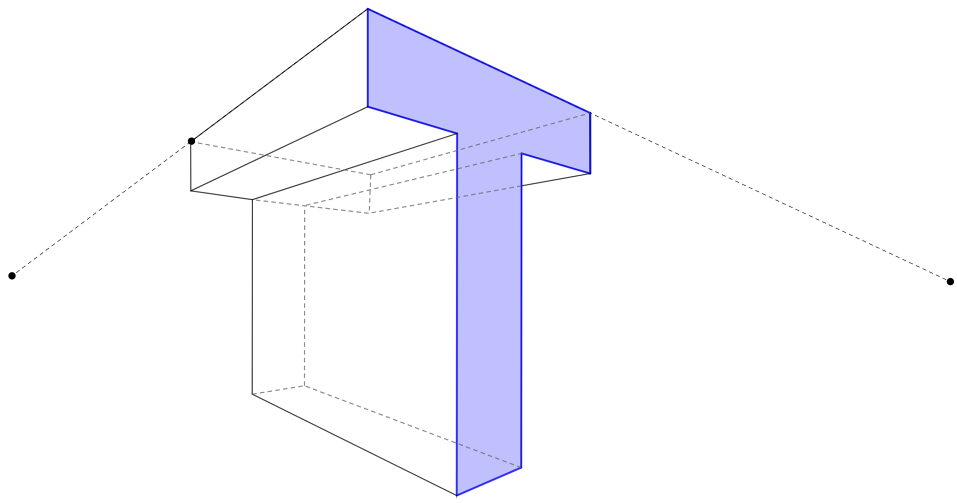
5. Seus triângulos no painel estão em perspectiva à partir de um ponto? Qual? E em relação à uma reta? Qual?

Uma possível solução é dada a seguir:

1. Para completar o desenho trace retas unindo cada um dos cantos da letra aos referidos pontos de fuga, de maneira que as interseções dessas retas formem o fomato da letra ao fundo, permitindo calcular exatamente onde a linha vertical da base inferior deve ser, como podemos ver na Figura 91.

,

Figura 91 – T em perspectiva de dois pontos

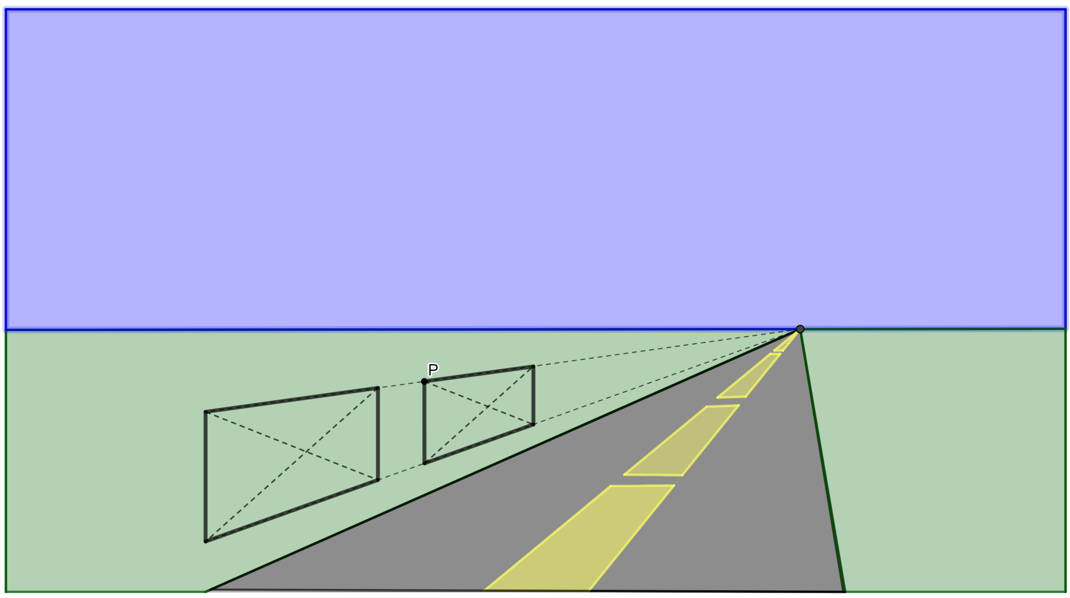


Fonte: Imagem do autor

2. A figura formada pelo painel é um trapézio. Determine as diagonais desse trapézio, traçando uma paralela da borda mais próxima do observador do 1º painel até o ponto P encontrando assim primeira borda do 2º painel. Do mesmo modo traçando paralelas as diagonais do 1º painel com interseção do ponto P e o outro canto inferior, teremos as diagonais no 2º painel, e a interseçao dessas com as retas do ponto de fuga determinaram a ultima borda do painel a ser desenhado. Visto na Figura 92.

,

Figura 92 – Painel na estrada em perspectiva

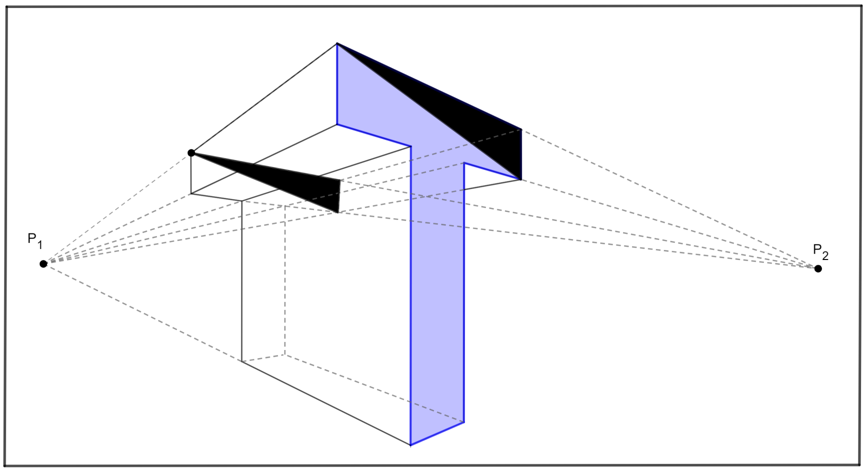


Fonte: Imagem do autor

3. Podemos verificar nas Figura 93 e na Figura 94.

,

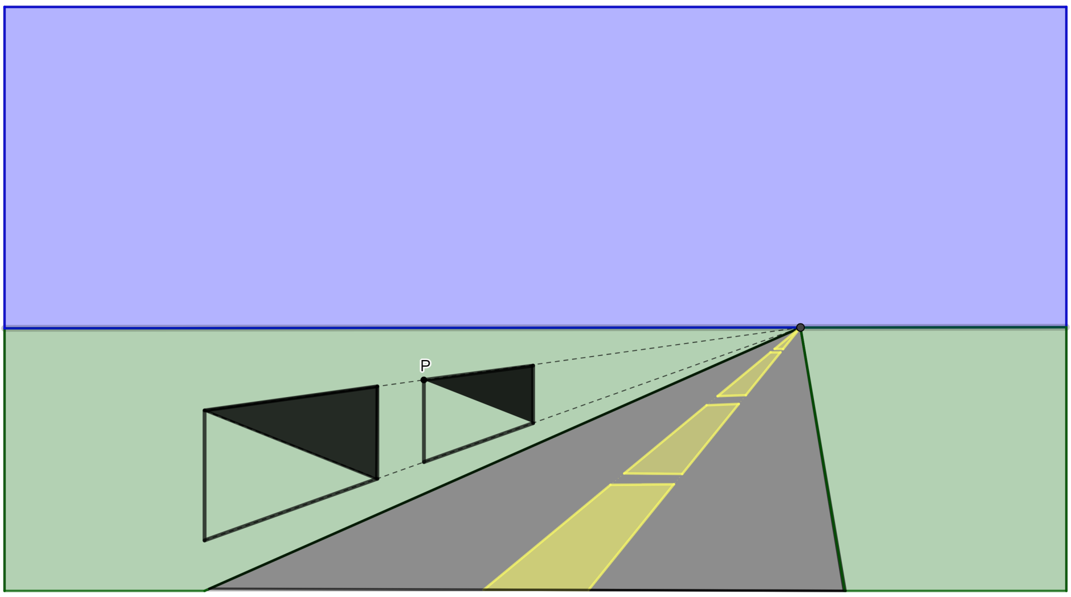
Figura 93 – T em perspectiva de dois pontos



Fonte: Imagem do autor

,

Figura 94 – Painel na estrada em perspectiva



Fonte: Imagem do autor

4. Os triângulos estão em perspectiva em relação ao ponto ideal representado pelo ponto de fuga P_1. Também estão em perspectiva em relação à reta ideal correspondente aos planos das faces da frente e de trás do T .

5. Os triângulos estão em perspectiva em relação ao ponto ideal representado pelo ponto de fuga, e também estão em perspectiva em relação 'a reta ideal do plano que contém os painéis.

Definição 4.4.2 *Uma colineação perspectiva é uma função $h : \omega \to \omega'$ entre planos $\omega, \omega' \subset R^3$ (possivelmente o mesmo plano) que leva pontos em pontos e retas em retas satisfazendo as seguintes condições:*

1. *Existe um ponto $O \in E^3$ (chamado **centro**) tal que O, P e $h(P)$ são colineares para todo ponto $P \in \omega$;*

2. *Existe uma reta $o \subset \omega \cdot \omega'$ (chamado **eixo**) tal que o, l e $h(l)$ concorrem em um mesmo ponto para toda reta $l \subset \omega$.*

*Se $h(O) \in o$, então h é chamada uma **elação**; caso contrário, h é uma **homologia**. Diremos que uma colineação fixa um ponto P ou uma reta l (ou que P ou l é fixado) se $h(P) = P$ ou $h(l) = l$.*

Atividade 20: No exemplo anterior, a aplicação que leva a face mais a frente da letra T na face posterior é uma homologia. Neste caso, o centro da colineação perspectiva é o ponto de fuga P_1, enquanto que o eixo é a reta ideal dos planos paralelos às faces consideradas. No caso dos painéis retangulares, temos uma elação. O centro é representado pelo ponto de fuga, enquanto que o eixo é a reta ideal do plano que contém os painéis. Neste caso, temos $\omega = \omega'$.

Os resultados abaixo fornecem as quantidades mínimas de informação para determinar uma colineação perspectiva.

Teorema 4.4.3 *Uma colineação perspectiva é determinada por três pontos não colineares e suas imagens.*

Demonstração: Considere três pontos A, B e C não colineares e suas imagens A', B' e C'. Pela definição, o ponto O é tal que as ternas de pontos O, A, A', O, B, B' e O, C, C' são colineares. Desta forma, as retas AA', BB' e CC' devem se intersectar em um mesmo ponto, o qual é o centro O. Para determinar o eixo, observe que a colineação perspectiva leva a reta AB na reta $A'B'$ e a reta BC na reta $B'C'$. Como os pontos de interseção $AB \cdot A'B'$ e $BC \cdot B'C'$ são fixados e estão no eixo, temos que o eixo o é a reta que une estes pontos. Desta forma, determinamos o centro e o eixo. Por fim, dado um ponto P no plano contendo A, B e C, temos que sua imagem P' pela colineação está na reta OP. Além disso, a imagem a reta AP é a reta $A'P'$. Seja $X = AP \cdot o$. Temos que X está na reta $A'P'$. Portanto, P' é a interseção das retas OP e XA. Como temos o centro, o eixo e uma maneira de determinar unicamente a imagem de um ponto P arbitrário, temos que a colineação perspectiva está determinada. ∎

Procedendo como na demonstração anterior, podemos provar também o seguinte resultado.

Teorema 4.4.4 *Uma colineação perspectiva é determinada pelo seu centro, pelo eixo e por um ponto fora do eixo juntamente com sua imagem.*

5 Conclusão

No decorrer deste trabalho vimos um contexto histórico entre a matemática e a arte fazendo uma correlação entre os conhecimentos matemáticos passando por todos os movimentos e períodos da arte, desde a pré-história até a arte contemporãnea. Destacando desde uma simples noção de contagem, uma representação numérica até conhecimentos mais elaborados como a perspectiva.

A divisão do conhecimento por áreas distintas é um processo não muito antigo na história da humanidade. Durante muito tempo era uma coisa só, onde um homem do conhecimento procurava conhecer um pouco de tudo. Por isso era muito comum, ser matemático, pintor, arquiteto, escultor, filósofo, etc.

A Geometria Projetiva é o ramo da matemática que estuda as propriedades geométricas de uma projeção. Surgiu no século XVII da tentativa de compreender de forma matemática as técnicas de desenho em perspectiva empregadas pelos artistas do Renascimento. Tal invenção permitiu estabelecer uma correspondência entre percepção e representação da realidade. A técnica da perspectiva, além de ser suporte e efeito para a realização de desenhos visuais mais realistas, nos faz compreender que nossa visão é construída por meio de práticas visuais, e que tal prática influencia na concepção de conhecimentos matemáticos.

Tanto a matemática quanto a arte são formas de conhecimento sobre a realidade, e ambas são frutos da criatividade humana, usando o senso estético. Vimos que ao longo de toda história a matemática e a arte estiveram juntas: o homem fez arte usando a matemática e construiu conhecimentos matemáticos observando as artes. A Matemática tem um certo tipo de beleza, diferentes da beleza da música e da pintura mas a beleza da estética do raciocínio.

Referências

ATALAY, B. A matemática e a mona lisa: a confluência da arte com a ciência. *São Paulo: Mercuryo*, 2007. Citado 3 vezes nas páginas 55, 56 e 61.

BAKOS, M. M. O imperador na terra dos faraós". *Nossa História*, n. 15, p. 60–65, 2005. Citado na página 29.

BARASUOL, F. F. A matemática da pré-história ao antigo egito. *Unirevista, São Leopoldo*, v. 1, n. 2, 2006. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 27.

BECK, V. C. *A matemática no Egito Antigo*. [S.l.]: PUCRS, 2010. Citado 3 vezes nas páginas 28, 29 e 30.

BELUSSI, G. M.; BARISON, M. M. B. Número de ouro. *Londrina: Universidade Estadual de Londrina, S/D. Disponível em: http://www. mat. uel. br/geometrica/artigos/st-15-tc. pdf. Acesso em*, v. 5, n. 02, 2016. Citado na página 30.

BOYER, C. B. História da matemática. 2ª edição. *Editora Edgard Blucher Ltda, Brasil*, 1996. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 30.

BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. *História da matemática*. [S.l.]: Editora Blucher, 2019. Citado na página 24.

BRITO, I. D. J. D. R. *Das pirâmides do Egipto para a Matemática*. Dissertação (B.S. thesis), 2007. Citado na página 30.

CANOTILHO, L. M. L. *75-Perspectiva pictórica*. [S.l.]: Instituto Politécnico de Bragança, 2005. Citado 2 vezes nas páginas 58 e 62.

CAPELLARI, M. S. V. A arte da idade média como construtora de um conceito visual de mal. *Mirabilia: Revista Eletrônica de História Antiga e Medieval*, Ricardo da Costa, n. 12, p. 11, 2011. Citado na página 35.

CAVALCANTE, P. D. P.; VIEIRA, T. da S. A relação arte e matemática e sua aplicação na sala de aula. Citado na página 34.

COSTA, C. O. d. A. et al. A perspectiva no olhar: ciência e arte do renascimento. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2004. Citado na página 58.

COSTA, E. A. dA. A beleza pela (na) matemática. *Revista EVS-Revista de Ciências Ambientais e Saúde*, v. 35, n. 2, p. 187–199, 2008. Citado na página 30.

CRANNELL, A.; FRANTZ, M.; FUTAMURA, F. *Perspective and Projective Geometry*. [S.l.]: Princeton University Press, 2019. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 65.

DIRETRIZES CURRICULARES DA EDUCAÇÃO BÁSICA ARTE, PARANÁ, GOVERNO, 2008. Citado na página 23.

FARTHING, S. *501 grandes artistas*. [S.l.]: Random House Mondadori, SA, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 40 e 52.

FARTHING, S. Tudo sobre arte. *Rio de Janeiro: Sextante*, p. 212, 2011. Citado 5 vezes nas páginas 32, 33, 44, 47 e 51.

FERRER, J. V. *O número de ouro na arte, arquitetura e natureza: beleza e harmonia.* [S.l.]: Disponıvel em< http://www. cienciaengalego. org/drupal6/sites/default/files . . . , 2005. Citado 2 vezes nas páginas 39 e 48.

FLORES, C. R. Abordagem histórica no ensino de matemática: o caso da representação em perspectiva. 2002. Citado na página 55.

GONÇALVES, T. d. S. *Uma introdução à geometria projetiva para o ensino fundamental.* Dissertação (Mestrado), 2013. Citado 3 vezes nas páginas 55, 59 e 61.

JESUS, R. d. O. Matemática e arte: interdisciplinaridade. Universidade Estadual Paulista (UNESP), 2011. Citado 4 vezes nas páginas 26, 46, 49 e 50.

KODAMA, Y. et al. O estudo da perspectiva cavaleira: uma experiência no ensino médio. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2006. Nenhuma citação no texto.

LAURO, M. M. A razão áurea e os padrões harmônicos na natureza, artes e arquitetura. *Exacta*, Universidade Nove de Julho, n. 3, p. 35–48, 2005. Citado 2 vezes nas páginas 31 e 36.

MARTINS, P. C. o número de ouro e a divina proporção. *Índice*, p. 104, 2008. Citado na página 31.

MELLO, M.; LEITÃO, H. A pintura barroca e a cultura matemática dos jesuítas: o tractado de prospectiva de inácio vieira, sj (1715). Edições Colibri/Instituto de História da Arte-Faculdade de Ciências Sociais . . . , 2005. Citado na página 43.

MENDONÇA, A. N. F. de. Design e expressão gráfica na arte de rafael sanzio. 2013. Citado 2 vezes nas páginas 40 e 41.

MONTENEGRO, G. A. *A perspectiva dos profissionais: Sombras, insolação, axonometria.* [S.l.]: Editora Blucher, 2010. Citado na página 58.

OS, A. P. D. C. E.; DA, I. D. B. D. L.; MODA, V. N. D. D. O homem vitruviano e o desenho da figura humana. Citado na página 39.

PROENÇA, G. *História da arte.* [S.l.]: Ática, 2007. v. 1. Citado 19 vezes nas páginas 26, 27, 30, 33, 34, 35, 36, 37, 39, 40, 41, 42, 43, 45, 46, 48, 49, 51 e 52.

QUEIROZ, R. M. Razão áurea: a beleza de uma razão surpreendente. *Londrina: UEL*, 2007. Citado na página 38.

SANTOS, L. T. d. Anamorfose no ensino de matemática. 2012. Citado na página 43.

SANTOS, M. M.; GUEDES, N. L. d. S. A teoria da perspectiva fundamentada pela geometria projetiva. In: GRAPHICA CURITIBAˆ EUFPR UFPR. *VII International Conference on Graphics Engineering for Arts and Design.* [S.l.], 2007. Citado na página 55.

SANTOS, M. R. D.; BICUDO, M. A. V. Uma experiência de formação continuada com professores de arte e matemática no ensino de geometria. *Bolema-Boletim de Educação Matemática*, v. 29, n. 53, p. 1329–1347, 2015. Citado na página 24.

SERENATO, L. J. Aproximações interdisciplinares entre matemática e arte: resgatando o lado humano da matemática. *Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade Federal do Paraná. Curitiba. Brasil.*, 2008. Citado 7 vezes nas páginas 31, 35, 36, 38, 39, 44 e 47.

SILVA, J. M. d. A interdisciplinaridade no ensino de arte: o cubismo e suas técnicas dialogando com conhecimentos matemáticos. 2012. Citado na página 48.

SILVA, K. I. d. História da matemática: os primeiros indícios dos números. 2014. Citado 2 vezes nas páginas 27 e 28.

SOUZA, J. J. L. d. et al. Traços surreais no encontro com salvador dalí. Florianópolis, SC, 2018. Citado na página 52.

TOLSTÓI, L. *O que é arte?* [S.l.]: Nova Fronteira, 2019. Citado na página 24.

WAGNER, D. R. *Arte, técnica do olhar e educação matemática: o caso da perspectiva central na pintura clássica*. Dissertação (Mestrado), 2012. Citado 2 vezes nas páginas 56 e 58.

ZABALZA, M. A. *O ensino universitário: seus cenários e seus protagonistas*. [S.l.]: artmmed, 2004. Citado na página 25.