JULIANA ELVIRA MENDES DE OLIVEIRA

A TRIGONOMETRIA NA EDUCAÇÃO BÁSICA COM FOCO EM SUA EVOLUÇÃO HISTÓRICA E SUAS APLICAÇÕES CONTEMPORÂNEAS

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

VIÇOSA
MINAS GERAIS - BRASIL
2013

Ficha catalográfica preparada pela Seção de Catalogação e Classificação da Biblioteca Central da UFV

T

Oliveira, Juliana Elvira Mendes de, 1980-

O48t A trigonometria na educação básica com foco em sua
2013 evolução histórica e suas aplicações contemporâneas. / Juliana Elvira Mendes de Oliveira. – Viçosa, MG, 2013.

ix, 134f. : il. (algumas color.) ; 29 cm.

Inclui apêndices.

Orientador: Marinês Guerreiro.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa.

Referências bibliográficas: f.122-126.

1. Trigonometria. 2. Ensino fundamental. 3. Educação - Metodologia. I. Universidade Federal de Viçosa. Departamento de Matemática. Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. II. Título.

CDD 22.ed. 516.24

JULIANA ELVIRA MENDES DE OLIVEIRA

A TRIGONOMETRIA NA EDUCAÇÃO BÁSICA COM FOCO EM SUA EVOLUÇÃO HISTORICA E SUAS APLICAÇÕES CONTEMPORÂNEAS

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 12 de agosto de 2013.

Laércio José dos Santos

Mehran Sabeti

Marinês Guerreiro
(Orientador)

Dedico este trabalho ao meu marido Jaider pelo incentivo, à minha mãe Geralda pelo apoio e orações, ao meu sobrinho João David pelo carinho e, especialmente, à minha filha Ana Júlia, amor incondicional.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, pelas infinitas bênçãos derramadas ao longo dessa caminhada.

Aos meus irmãos, Verônica e João Rafael, que desde o início me incentivaram e encorajaram a seguir em frente nas dificuldades.

Às minhas tias, Osmira e Tânia, e ao meu primo, Matheus Henrique, pelo carinho e atenção dedicada a minha filha Ana Júlia.

À professora Marinês, pelo exemplo de profissionalismo, firmeza de caráter e fé inabalável. Agradeço pela compreensão e paciência.

A todos os colegas do mestrado, Alexandre, Antônio, Bruno, Fabrício, Jossara, Juliana Chaves, Júnior, Keyla, Marcelo, Márcio, Mônica, Patrick, Vandré, Vanessa e Vicente, pelo convívio, troca de experiências e amizades construídas.

Aos colegas e amigos das escolas “Coronel João Domingos” e “Regina Pacis” por acreditarem em mim e pelo grande incentivo durante este curso.

Aos professores pela dedicação e pelos conhecimentos compartilhados durante todo o curso.

À CAPES pelo apoio financeiro.

Enfim, a todos que acreditaram em mim e, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização deste trabalho, obrigada.

SUMÁRIO

RESUMO

OLIVEIRA, Juliana Elvira Mendes, M. Sc., Universidade Federal de Viçosa, agosto de 2013. **A Trigonometria na Educação Básica com Foco em sua Evolução Histórica e suas Aplicações Contemporâneas**. Orientadora: Marinês Guerreiro.

Esta dissertação tem o objetivo de apresentar uma proposta metodológica para o ensino dos conteúdos básicos de Trigonometria na Educação Básica com foco em sua evolução histórica e aplicações contemporâneas. Para isso apresentamos o conteúdo que julgamos básico para essa etapa de escolarização, abordando a trigonometria do triângulo retângulo, nos triângulos quaisquer e no círculo trigonométrico. Trazemos um breve relato do desenvolvimento histórico da Trigonometria, sua relação estreita com o desenvolvimento da Astronomia e também algumas de suas aplicações na atualidade. Apresentamos o que as propostas e orientações curriculares vigentes propostas pelos governos federal e estadual sugerem em termos do ensino de Trigonometria na Educação Básica e como este conteúdo é abordado nos livros didáticos. Trazemos uma sequência didática como proposta metodológica com atividades que utiliza recursos multimídia, recortes da História da Matemática e atividades práticas.

ABSTRACT

OLIVEIRA, Juliana Elvira Mendes, M. Sc., Universidade Federal de Viçosa, August 2013. **The Trigonometry in Basic Education with a Focus on Historical Evolution and Contemporary Applications**. Advisor: Marinês Guerreiro.

This dissertation aims to present a methodology for teaching the basic contents of Trigonometry in Basic Education focusing on its historical development and contemporary applications. For we present the contents that we believe to be the basic for this stage of education, addressing the trigonometry of the right-angled triangle, of an arbitrary triangle and of the trigonometric unit circle. We present a brief account of the historical development of Trigonometry, its close relationship with the development of Astronomy and also some of its applications in the present time. We introduct what the proposed and existing curriculum guidelines proposed by the federal and state governments suggest for the teaching of Trigonometry in Basic Education and how this content is covered in textbooks. We present a didactic sequence as methodological proposal with activities that use multimedia, clippings of the History of Mathematics and practical activities.

INTRODUÇÃO

A Trigonometria é um dos tópicos da Matemática cuja origem, aproximadamente 1500 a. C., está intimamente ligada a aplicações relacionadas às medidas de terras e, posteriormente, à Astronomia. Hoje vários ramos da atividade humana utilizam os conhecimentos de Trigonometria na execução de suas funções. Diante disso, acreditamos que o ensino de Trigonometria pode se apoiar em dois pilares: sua *evolução histórica* e suas *aplicações*.

Em nossa prática docente nos deparamos muitas vezes com questionamentos dos alunos sobre a utilidade dos conteúdos ensinados em sala de aula, portanto a utilização da História da Matemática pode contribuir para solucionar essa questão e ser usada como motivação para a aprendizagem escolar.

Na visão de D´Ambrosio [21], discutir educação sem recorrer aos registros históricos e às interpretações dos mesmos é praticamente impossível. E isso vale para várias disciplinas, em especial, para a Matemática, cujas raízes se confundem com as da História da humanidade. Para ele:

> "[...] um dos maiores erros que se pratica em Educação Matemática é desvincular a Matemática das outras atividades humanas."

As orientações e propostas curriculares vigentes já salientam a importância da História da Matemática como recurso pedagógico.

> "Em muitas situações, o recurso à História da Matemática pode esclarecer ideias matemáticas que estão sendo construídas pelo aluno, especialmente para das respostas a alguns 'porquês' e, desse modo, contribuir para a constituição de um olhar mais crítico sobre os objetos de conhecimentos". (PCN Matemática [11])

> "A utilização da História da Matemática em sala de aula também pode ser vista como um elemento importante no processo de atribuição de significados aos conceitos matemáticos. É

> importante, porém, que esse recurso não fique limitado à descrição de fatos ocorridos no passado ou à apresentação de biografias de matemáticos famosos. A recuperação do processo histórico de construção do conhecimento matemático pode se tornar um importante elemento de contextualização dos objetos de conhecimento que vão entrar na relação didática. A História da Matemática pode contribuir também para que o próprio professor compreenda algumas dificuldades dos alunos, que, de certa maneira, podem refletir históricas dificuldades presentes também na construção do conhecimento matemático.” (Brasil [14])

Assim ao utilizar a História da Matemática o professor contribui para consolidar algumas habilidades a serem desenvolvidas na Educação Básica, entre elas;

> “Compreender a construção do conhecimento matemática com um processo histórico, em estreita relação com as condições sociais, políticas e econômicas de uma determinada época.” (CBC Matemática [44])

Considerando a Trigonometria um dos tópicos da Matemática rico em aplicações práticas que envolvem várias áreas de atuação humana, podemos utilizar disto para enriquecer as aulas com atividades práticas que permitam ao estudante compreender a importância dos conteúdos de Trigonometria para o desenvolvimento de algumas profissões, além de proporcionar a integração de outros componentes curriculares.

> “A Matemática possui um caráter integrador e interdisciplinar: o conhecimento matemático não é propriedade privada dos matemáticos, ele tem evoluído também no contexto de outras ciências. Exemplos importantes desta interdisciplinaridade contribuições encontradas na Física, (...) e Engenharia. Isso significa que a maneira de pensar matematicamente deve ser aprendida não apenas por aqueles que irão dedicar-se à Matemática.” (CBC Matemática [44])

Desta maneira, o ensino da Trigonometria na Educação Básica tem uma série de possibilidades para tornar a prática docente rica em atividades que promovam uma aprendizagem contextualizada considerando seu desenvolvimento histórico e suas aplicações, o que contribui para despertar o interesse dos estudantes.

Nesta dissertação procuramos selecionar o conteúdo que julgamos ser importante para ser trabalhado na Educação Básica, bem como pesquisar sobre a origem e o desenvolvimento da Trigonometria e suas aplicações na atualidade. Nosso objetivo é apresentar uma proposta metodológica onde o estudante possa perceber a importância da Trigonometria também a partir de atividades práticas e utilização de recursos multimídia.

No Capítulo 1 desta dissertação expomos o conteúdo que consideramos básico de Trigonometria a ser estudado na Educação Básica. Iniciamos essa exposição pela Trigonometria no Triângulo Retângulo partindo das Relações Geométricas do Triângulo Retângulo que são importantes para a introdução deste estudo e depois apresentamos as Relações Trigonométricas Seno, Cosseno e Tangente, seguidas da Relação Fundamental, demostrada a partir do Teorema de Pitágoras. Depois apresentamos a Trigonometria dos Triângulos Quaisquer (Lei dos Cossenos e Leis dos Senos). A Seção 1.3 é dedicada ao Círculo Trigonométrico, partindo da definição do círculo trigonométrico e das unidades de medidas. Apresentamos as seis funções trigonométricas, sendo que nas funções seno, cosseno e tangente apresentamos suas principais características. As relações trigonométricas são apresentadas sem a preocupação com suas demonstrações. Para finalizar o capítulo apresentados a demonstração de algumas transformações trigonométricas.

Como o foco desta dissertação é o desenvolvimento histórico da Trigonometria, encontramos no Capítulo 2 um pouco dessa história cuja origem se deu através dos povos da Antiguidade: os egípcios, babilônios, chineses e gregos. Já no início de nossa era o desenvolvimento da Trigonometria ocorreu através dos hindus, árabes e persas. Na Seção 2.3 deste Capítulo encontramos um breve relato do desenvolvimento da Astronomia, cujas raízes se confundem com as origens da Trigonometria. Em seguida trazemos um pouco da etimologia dos termos relacionados à Trigonometria e para finalizar apresentamos as contribuições que permitiram à Trigonometria se tornar independente da Astronomia.

No Capítulo 3 apresentamos as principais propostas e orientações curriculares existentes no país e no Estado de Minas Gerais acerca do ensino de Trigonometria na Educação Básica e também como este conteúdo é abordado em alguns livros didáticos. Ressaltamos a importância de se trabalhar com resolução de problemas em sala de aula.

Algumas aplicações na atualidade da Trigonometria são exemplificadas no Capítulo 4, sem a pretensão de aprofundar neste estudo.

No último capítulo apresentamos uma sequência didática como proposta metodológica para o ensino e aprendizagem dos conteúdos básicos de Trigonometria utilizando recursos multimídia, recortes da História da Matemática e atividades práticas.

Capítulo 1

CONTEÚDO BÁSICO DE TRIGONOMETRIA

Neste capítulo apresentamos o conteúdo básico de Trigonometria nos Triângulos Retângulos, nos Triângulos Quaisquer (Lei dos Senos e Lei dos Cossenos) e no Círculo Trigonométrico, que consideramos ser essencial na Educação Básica. Para este capítulo as principais referências são [24], [25], [33], [34], [35], [38], [41], [54], [57].

1.1 Trigonometria no Triângulo Retângulo

Um *triângulo* é *retângulo* quando um de seus ângulos internos é reto. Utilizaremos a seguinte notação para os elementos de um triângulo ABC:

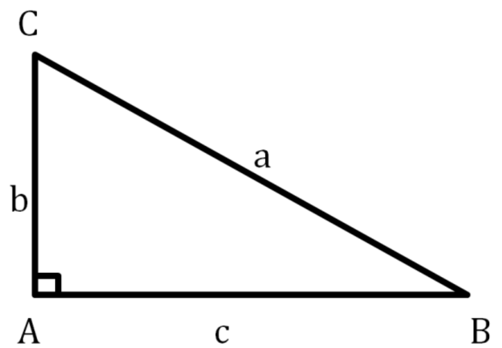


Figura 01

lados: $\overline{\mathrm{AB}}$, $\overline{\mathrm{BC}}$, $\overline{\mathrm{AC}}$

ângulos internos: $\widehat{\mathrm{A}} = \angle\mathrm{BAC}$, $\widehat{\mathrm{B}} = \angle\ \mathrm{ABC}$, $\widehat{\mathrm{C}} = \angle\mathrm{ACB}$

medidas dos lados: a = medida de $\overline{\mathrm{BC}}$

b = medida de $\overline{\mathrm{AC}}$

c = medida de $\overline{\mathrm{AB}}$

medidas dos ângulos: medida de $\angle BAC = m(\angle BAC)$

medida de $\angle ABC = m(\angle ABC)$

medida de $\angle ACB = m(\angle ACB)$

1.1.1 Relações Geométricas

Nessa seção demostraremos algumas relações métricas importantes entre segmentos determinados num triângulo retângulo.

Considere o triângulo retângulo abaixo, com $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ e $D \in \overline{BC}$.

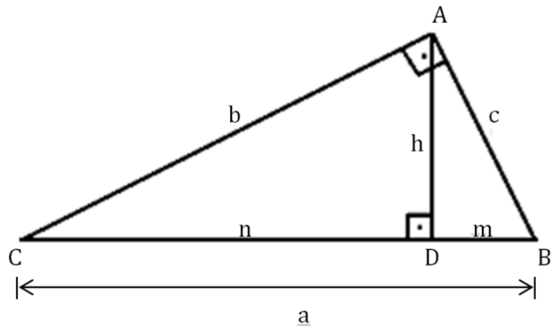


Figura 02

$\overline{AD}$ = altura relativa à hipotenusa de medida h.

$\overline{BD}$ = projeção ortogonal do cateto $\overline{AB}$ sobre a hipotenusa de medida m.

$\overline{CD}$ = projeção ortogonal do cateto $\overline{AC}$ sobre a hipotenusa de medida n.

$m(\angle D\hat{B}A) \equiv m(\angle D\hat{A}C)$ e $m(\angle D\hat{C}A) \equiv m(\angle D\hat{A}B)$, pois $\overline{AB} \perp \overline{AC}$ e $\overline{BC} \perp \overline{AD}$.

Na figura anterior, podemos observar três triângulos ΔABC, ΔDBA, ΔDAC que são semelhantes por apresentarem ângulos correspondentes congruentes.

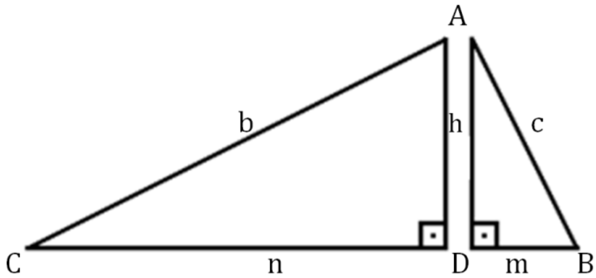


Figura 03

Temos as seguintes propriedades:

1ª) $\Delta ABC \sim \Delta DBA \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{c}{m} \Longrightarrow \boxed{c^2 = am}$

$\Delta ABC \sim \Delta DAC \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{b}{n} \Longrightarrow \boxed{b^2 = na}$

Estas igualdades nos dizem que a medida cada cateto é a média geométrica entre as medidas da hipotenusa e da projeção dele sobre ela.

2ª) $\Delta ABC \sim \Delta DBA \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{h} \Longrightarrow \boxed{bc = ah}$

Assim, o produto das medidas dos catetos é igual ao produto da medida da hipotenusa pela medida da altura relativa a ela.

3ª) $\Delta BDA \sim \Delta DAC \Rightarrow \frac{h}{n} = \frac{m}{h} \Longrightarrow \boxed{h^2 = mn}$

Assim, a altura relativa à hipotenusa é média geométrica das medidas das projeções dos catetos sobre a hipotenusa.

4ª) *Teorema de Pitágoras*

Somando membro a membro as duas primeiras relações, temos:

$$\begin{cases} c^2 = am \\ b^2 = an \end{cases} \Rightarrow b^2 + c^2 = am + an \Rightarrow b^2 + c^2 = a(m + n)$$

como $m + n = a$, temos: $\boxed{b^2 + c^2 = a^2}$,
isto é, a soma dos quadrados das medidas dos catetos é igual ao quadrado da medida da hipotenusa.

1.1.2 Relações Trigonométricas

As relações entre as medidas dos lados e as dos ângulos de um triângulo retângulo ABC são chamadas *razões trigonométricas.*

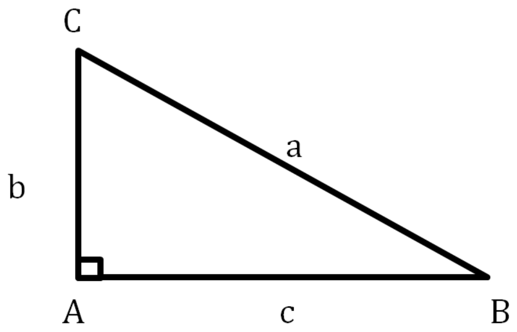


Figura 04

Por definição são elas:

1ª) ***Seno***: é razão entre a medida do cateto oposto a um ângulo e a medida da hipotenusa.

Notação: $\text{sen}\,\hat{B} = \dfrac{\text{cateto oposto a }\hat{B}}{\text{hipotenusa}}$

No caso, temos:

$\text{sen}\,\hat{B} = \dfrac{b}{a}$ e $\text{sen}\,\hat{C} = \dfrac{c}{a}$

2ª) ***Cosseno***: é razão entre a medida do cateto adjacente a um ângulo e a medida da hipotenusa.

Notação: $\cos\hat{B} = \dfrac{\text{cateto adjacente a }\hat{B}}{\text{hipotenusa}}$

No caso, temos:

$\cos\hat{B} = \dfrac{c}{a}$ e $\cos\hat{C} = \dfrac{b}{a}$

3ª) ***Tangente***: é razão entre a medida do cateto adjacente a um ângulo e medida do cateto adjacente a ele.

Notação: $\text{tg}\,\hat{B} = \dfrac{\text{cateto oposto a }\hat{B}}{\text{cateto adjacente a }\hat{B}}$

No caso, temos:

$\text{tg}\,\hat{B} = \dfrac{b}{c}$ e $\text{tg}\,\hat{C} = \dfrac{c}{b}$

Relação Fundamental

Considerando o triângulo retângulo ABC acima, pelo Teorema de Pitágoras, temos $b^2 + c^2 = a^2$.

Dividindo, membro a membro, por a^2, obtemos:

$$\frac{b^2+c^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} \Longrightarrow \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} = 1 \Longrightarrow \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 = 1 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow (\mathrm{sen}\,\hat{B})^2 + (\cos\hat{B})^2 = 1 \quad \text{ou} \quad (\mathrm{sen}\,\hat{C})^2 + (\cos\hat{C})^2 = 1$$

De maneira geral, podemos escrever, para um ângulo x qualquer:

$$\boxed{(\mathrm{sen}\,x)^2 + (\cos x)^2 = 1},$$

que é chamada *relação fundamental*.

Ângulos Complementares

No triângulo da Figura 04, $m(\angle ABC) + m(\angle ACB) = 90°$, ou seja, $\hat{B}$ e $\hat{C}$ são ângulos complementares.

Temos ainda $\mathrm{sen}\,\hat{B} = \cos\hat{C} = \frac{b}{a}$ e $\mathrm{sen}\,\hat{C} = \cos\hat{B} = \frac{c}{a}$.

Assim podemos concluir que seno e cosseno de ângulos complementares são iguais, ou seja:

$$\boxed{\mathrm{sen}\,x = \cos(90° - x)}$$

1.2 Trigonometria nos Triângulos Quaisquer

1.2.1 Lei dos Cossenos

<u>Teorema</u>: Em qualquer triângulo, o quadrado da medida de um lado é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados menos o duplo produto dessas medidas pelo cosseno do ângulo formado por eles.

Demonstração

A demonstração será feita em dois casos:

1ª) <u>Triângulos Acutângulos</u>

Seja um triângulo com $\widehat{A}$ < 90°, conforme Figura 05. Seja D o pé da altura em relação ao vértice B.

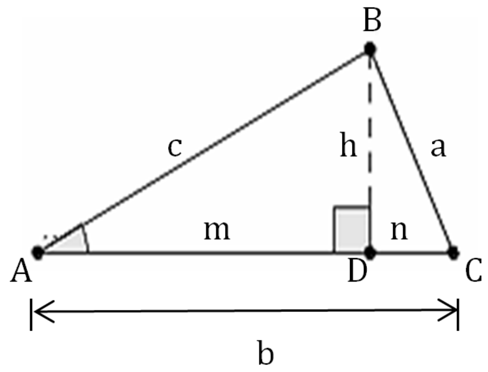


Figura 05

No ΔBCD, que é retângulo, temos:

$$a^2 = n^2 + h^2 \text{ (I)}$$

No ΔBAD, que é retângulo, temos:

$$h^2 = c^2 + m^2 \text{ (II)}$$

Temos também:

$$n = b - m \text{ (III)}$$

Substituindo (III) e (II) em (I), obtemos:

$$a^2 = (b - m)^2 + c^2 - m^2 \Longrightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bm$$

Como no triângulo BAD temos $m = c.\cos\widehat{A}$, então

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \,.\, \cos\widehat{A}}.$$

2ª) Triângulos Obtusângulos

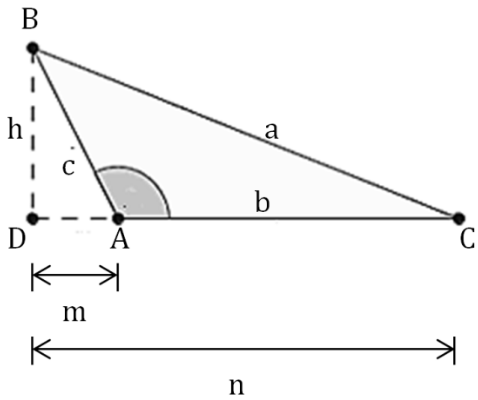


Figura 06

Seja ABC um triângulo com $90° < \hat{A} < 180°$, como o da Figura 06. Considere D o pé da altura do ΔABC em relação ao vértice B.

No ΔBCD, que é retângulo, temos

$$a^2 = n^2 + h^2. \text{ (I)}$$

No ΔBAD, que é retângulo, temos

$$h^2 = c^2 - m^2. \text{ (II)}$$

Temos ainda:

$$n = b + m. \text{ (III)}$$

Substituindo (III) e (II) em (I), obtemos:

$$a^2 = (b + m)^2 + c^2 - m^2 \Longrightarrow a^2 = b^2 + c^2 + 2bm$$

Como, no ΔBAD, $m = c \,.\, \cos(180° - \hat{A})$, temos $m = - c \,.\, \cos \hat{A}$, logo

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \,.\, \cos \hat{A}}.$$

Analogamente, podemos provar:

$$\boxed{b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \,.\, \cos \hat{B}},$$

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \,.\, \cos \hat{C}}.$$

1.2.2 Lei dos Senos

<u>Teorema</u>: Em qualquer triângulo, o quociente entre a medida cada lado e o seno do ângulo oposto é constante e igual à medida do diâmetro da circunferência circunscrita ao triângulo.

Demonstração:

Seja ABC um triângulo qualquer, inscrito numa circunferência de raio R. Por um dos vértices do triângulo (B), tracemos o diâmetro correspondente $\overline{BA'}$ e liguemos A' com C.

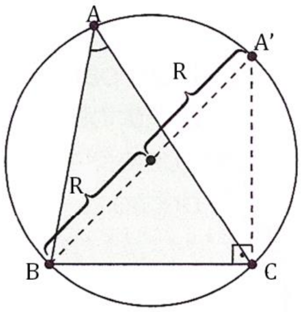


Figura 07

Sabemos que $\hat{A} = \hat{A}'$ por determinarem na circunferência a mesma corda BC. O triângulo $A'BC$ é retângulo em C por estar inscrito numa semicircunferência. Denotando por a a medida do lado $\overline{BC}$, temos
Temos:

$$\operatorname{sen} \hat{A}' = \frac{a}{2R} \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{\operatorname{sen} \hat{A}} = 2R$$

Analogamente, $\dfrac{b}{\operatorname{sen} \hat{B}} = 2R$ e $\dfrac{c}{\operatorname{sen} \hat{C}} = 2R$. Daí concluímos

$$\boxed{\frac{a}{\operatorname{sen} \hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen} \hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen} \hat{C}} = 2R} \; .$$

1.3 O Círculo Trigonométrico

Usaremos várias vezes o conceito de arco de circunferência que definimos como segue.

Dados dois pontos distintos A e B sobre uma circunferência, esta fica dividida em duas partes, assinaladas de vermelho nos círculos da Figura 08. Cada uma dessas partes, que incluem A e B, é denominada *arco de circunferência* $\widehat{AB}$.

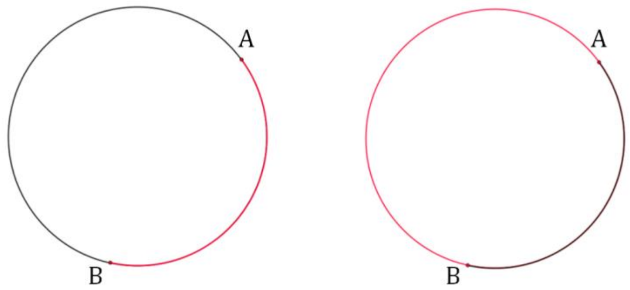


Figura 08

1.3.1 Definição de Círculo Trigonométrico

Considere, sobre um plano, um sistema cartesiano ortogonal. Denomina-se *círculo* ou *ciclo trigonométrico* a circunferência λ de centro (0,0) e raio r = 1 e na qual o sentido positivo é o sentido anti-horário. Note que o comprimento da circunferência é 2π pois o raio é unitário.

Ao círculo trigonométrico de centro O vamos associar um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, fixando o ponto A de coordenadas (1,0) como origem dos arcos (conforme Figura 09).

Os eixos x (horizontal) e y (vertical) dividem a circunferência trigonométrica em quatro partes congruentes, chamadas *quadrantes*, e contadas a partir de A, no sentido positivo.

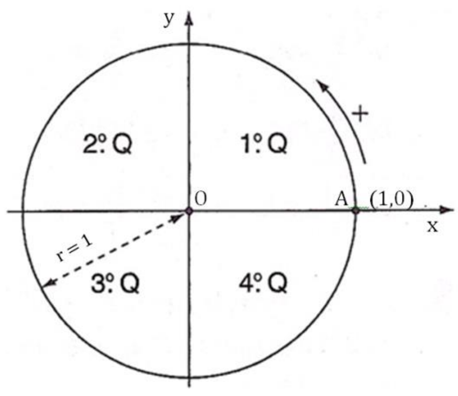


Figura 09

1.3.2 Ângulo Central

Todo ângulo com vértice no centro de uma circunferência e cujos lados a intersectam é denominado *ângulo central* relativo à circunferência.

O arco da circunferência contido no interior de um ângulo central é chamado de arco correspondente a esse ângulo.

De forma recíproca, a todo arco de circunferência corresponde um único ângulo central e a medida de um arco equivale à medida do ângulo central correspondente.

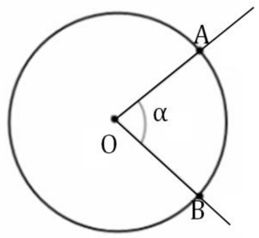


Figura 10

1.3.3 Medidas dos Arcos

As unidades para medir arcos são o grau e o radiano.

a) o *grau* (símbolo °) é um arco unitário igual a $\frac{1}{360}$ da circunferência que contém o arco a ser medido.

b) o *radiano* (símbolo rad) é um arco unitário cujo comprimento é igual ao raio da circunferência que contém o arco a ser medido.

Relação entre as Unidades de Medidas de Arcos

O comprimento C de uma circunferência de raio r é igual a $\mathrm{C} = 2\pi\mathrm{r}$, onde $\pi = 3{,}141592\ldots$

Como cada raio r corresponde a $1\ \mathrm{rad}$, podemos afirmar que o arco correspondente à circunferência mede $2\pi\mathrm{r} = 2\pi\ .\ 1\ \mathrm{rad} = 2\pi\ \mathrm{rad}$. Logo um arco de 180° mede $\pi\ \mathrm{rad}$ e, para fazer a conversão de unidades, basta usar uma regra de três simples:

Medida em grau	Medida em radiano
α	$\mathrm{x\ rad}$
$180°$	$\pi\ \mathrm{rad}$

1.3.4 Seno, Cosseno e Tangente no Círculo Trigonométrico

O conceito de seno, cosseno e tangente no círculo trigonométrico se estende para um número real α, com $0 \leq \alpha \leq 2\pi$. Para isto consideremos *medida algébrica* de um segmento orientado o número real que corresponde à diferença entre as abscissas da extremidade e da origem desse segmento.

No círculo trigonométrico abaixo, onde traçamos $\mathrm{PP''//OP'}$, vamos considerar o triângulo $\mathrm{OP''P}$.

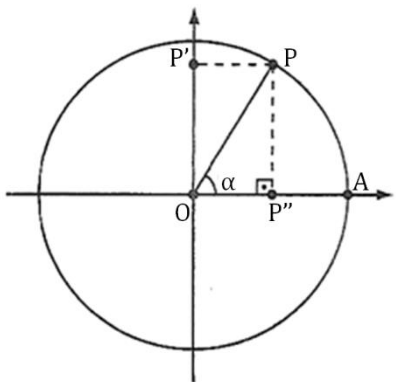


Figura 11

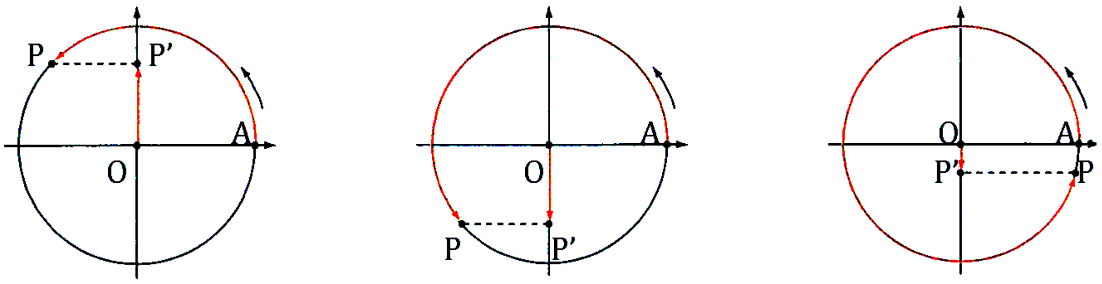
a) Seno

Da trigonometria no triângulo retângulo, temos:

$$\text{sen}\ \alpha = \frac{PP''}{OP} = \frac{PP''}{1} = PP'' = OP', \text{ pois } OP'PP'' \text{ é retângulo.}$$

Assim para encontrarmos o seno de um ângulo basta projetar ortogonalmente sua extremidade sobre o eixo vertical, denominado *eixo dos senos*. À medida algébrica do segmento $\overline{OP'}$, considerando a orientação do eixo (para cima), damos o nome de *seno de α.*

O mesmo procedimento é utilizado quando P ocupa posições nos demais quadrantes. Considerando a orientação do eixo dos senos, observamos que o sinal do seno de um número real α varia em cada quadrante à medida que varia a posição de P (P é ponto na circunferência que corresponde ao número real α).



2º Q. | 3º Q. | 4º Q.
ordenada de $P > 0$ | ordenada de $P < 0$ | ordenada de $P < 0$
sen $\alpha > 0$ | sen $\alpha < 0$ | sen $\alpha < 0$

Figura 12

Como o raio do círculo trigonométrico é unitário, então, para todo $\alpha \in [0,2\pi]$, $-1 \leq \text{sen}\ \alpha \leq 1$ uma vez que os segmentos $\overline{OP'}$ é sempre interno ao círculo qualquer que seja a posição assumida por P.

Função Seno

Denominamos *função seno* à função $\text{sen}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada real x, o número real $OP' = \text{sen}\ x$, isto é, $f(x) = \text{sen}\ x$.

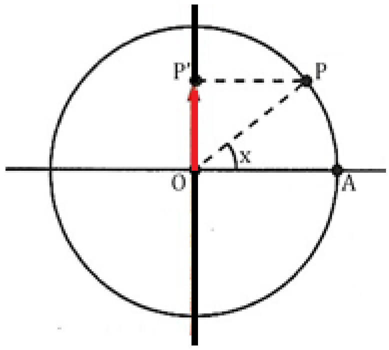


Figura 13

Algumas propriedades que são observadas diretamente no ciclo trigonométrico:

1ª) O domínio da função seno é igual a $\mathbb{R}$ e a imagem é o intervalo $[-1,1]$, isto é, $-1 \leq \text{sen } x \leq 1$, para todo x real.

2ª) Se x percorre o primeiro ou o quarto quadrante, então $\text{sen } x$ é crescente.

3ª) Se x percorre o segundo ou o terceiro quadrante, então $\text{sen } x$ é decrescente.

4ª) $f(x)$ é uma função ímpar, pois, para todo $x \in \mathbb{R}$, $\text{sen }(-x) = - \text{sen }(x)$.

Dado um número real x e o ponto P no círculo trigonométrico correspondente a x, observe que o ponto Q correspondente ao valor $-x$ é o simétrico a P em relação ao eixo das abcissas. Além disso, as projeções ortogonais de P e Q sobre o eixo dos senos são simétricas em relação à origem. Desta maneira, o gráfico da função seno também é simétrico em relação à origem.

5ª) A função seno é periódica e seu período é 2π.

Com x nas abscissas e $\text{sen } x$ nas ordenadas, podemos construir o gráfico que nos indica como varia a função $f(x)= \text{sen } x$, denominado *senóide*.

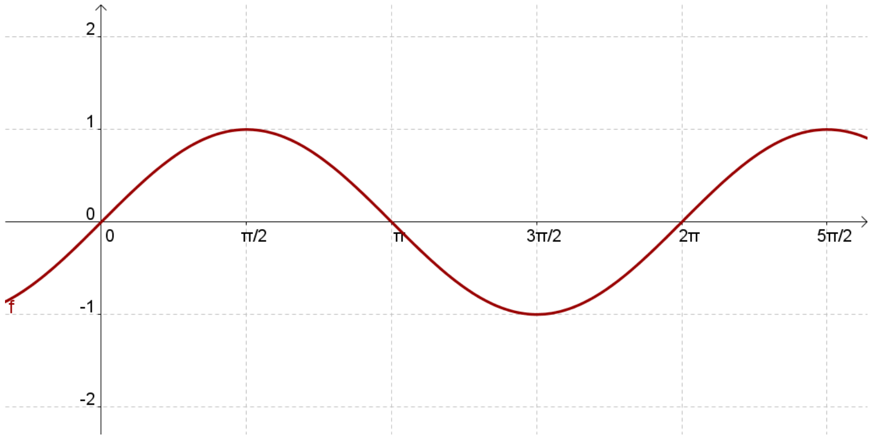


Figura 14: Senóide

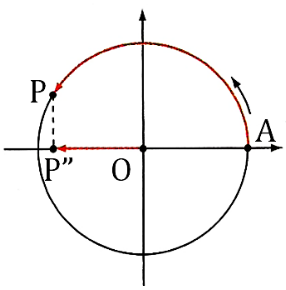
b) Cosseno

Da trigonometria no triângulo retângulo, temos:

$$\cos\alpha = \frac{OP''}{OP} = \frac{OP''}{1} = OP''.$$

Assim, para obtermos o cosseno de um ângulo basta projetar ortogonalmente sua extremidade sobre o eixo horizontal, denominado *eixo dos cossenos*. À medida algébrica do segmento $\overline{OP''}$, considerando a orientação do eixo (para direita), damos o nome de cos*seno de* α.

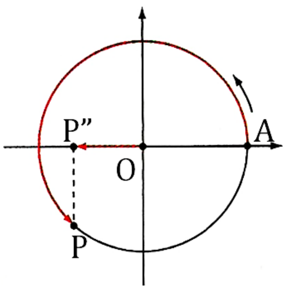
O mesmo procedimento é utilizado quando P (ponto correspondente ao número real α) ocupa posições nos demais quadrantes. Lembrando-se de que o eixo dos cossenos é orientado para direita.



2º Q.

abscissa de $P < 0$

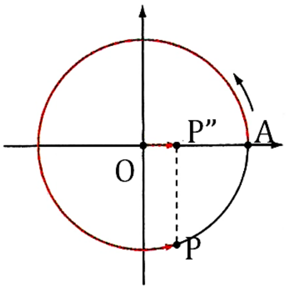
$\cos\alpha < 0$



3º Q.

abscissa de $P < 0$

$\cos\alpha < 0$



4º Q.

abscissa de $P > 0$

$\cos\alpha > 0$

Figura 15

Como o raio do círculo trigonométrico é unitário, então, para todo $\alpha \in [0,2\pi]$, $-1 \leq \cos\alpha \leq 1$ uma vez que o segmento $\overline{OP''}$ é sempre internos ao círculo qualquer que seja a posição assumida por P.

Função Cosseno

Denominamos *função cosseno* à função $\cos:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada real x, o número real $OP'' = \cos x$, isto é, $f(x) = \cos x$.

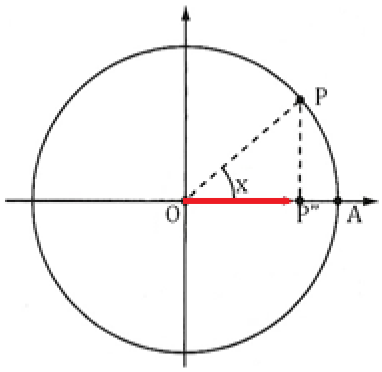


Figura 16

Algumas propriedades que são observadas diretamente no ciclo trigonométrico:

1ª) O domínio da função cosseno é igual a $\mathbb{R}$ e a imagem é o intervalo $[-1,1]$, isto é, $-1 \leq \cos x \leq 1$, para todo x real.

2ª) Se x percorre o primeiro ou o segundo quadrante, então $\cos x$ é decrescente.

3ª) Se x percorre o terceiro ou o quarto quadrante, então $\cos x$ é crescente.

4ª) $f(x)$ é uma função par, pois, para todo $x \in \mathbb{R}$, $\cos(-x) = \cos(x)$.

Dado um número real x e o ponto P no círculo trigonométrico correspondente a x, observe que o ponto Q correspondente ao valor $-x$ é o simétrico a P em relação ao eixo das abcissas. Neste caso, as projeções ortogonais de P e Q sobre o eixo dos cossenos coincidem. Desta maneira, o gráfico da função cosseno também é simétrico em relação ao eixo y.

5ª) A função cosseno é periódica e seu período é 2π.

Com x nas abscissas e $\cos x$ nas ordenadas, podemos construir o gráfico, denominado *cossenóide*, que nos indica como varia a função $f(x)= \cos x$.

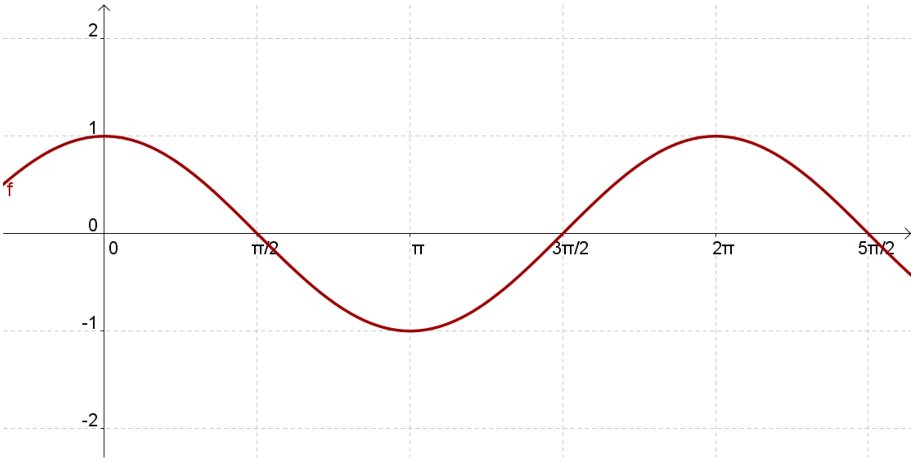


Figura 17: Cossenóide

Relação Fundamental

A relação fundamental também é válida para todo número real pertencente ao intervalo $[0,2\pi]$, observe a figura:

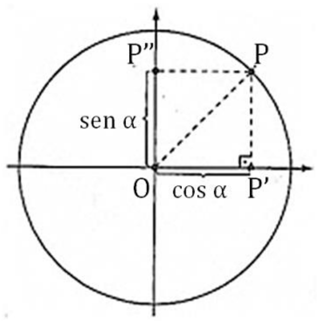


Figura 18

Seja P o ponto no ciclo trigonométrico de um número real $\alpha \in [0,2\pi]$ e se P pertence ao primeiro quadrante, então

$OP = 1$; $OP' = \cos \alpha$; $OP'' = \text{sen } \alpha$.

Aplicando o Teorema de Pitágoras no $\Delta OP'P$, temos:

$(\mathrm{OP})^2 = (\mathrm{OP'})^2 + (\mathrm{OP''})^2 \Longrightarrow 1^2 = (\cos\alpha)^2 + (\mathrm{sen}\,\alpha)^2$, isto é, $\boxed{\mathrm{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$.

Quando P pertence a algum outro quadrante, a demonstração é análoga.

Quando P coincide com algum dos pontos A, B, C ou D na figura 19, temos:

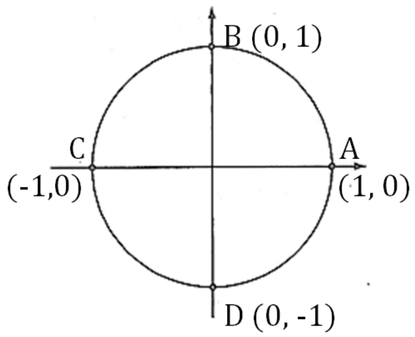


Figura 19

- P coincide com $A\,(1{,}0)$:

$\cos\alpha = 1$ e $\mathrm{sen}\,\alpha = 0$ e $\mathrm{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1^2 + 0^2 = 1$

- P coincide com $B\,(0{,}1)$:

$\cos\alpha = 0$ e $\mathrm{sen}\,\alpha = 1$ e $\mathrm{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 0^2 + 1^2 = 1$

- P coincide com $C\,(-1{,}0)$:

$\cos\alpha = -1$ e $\mathrm{sen}\,\alpha = 0$ e $\mathrm{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = (-1)^2 + 0^2 = 1$

- P coincide com $D\,(0{,}-1)$:

$\cos\alpha = 0$ e $\mathrm{sen}\,\alpha = -1$ e $\mathrm{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 0^2 + (-1)^2 = 1$

Logo a relação fundamental $\boxed{\mathrm{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$ é válida para todo número real pertencente ao intervalo $[0{,}2\pi]$.

Arcos Complementares

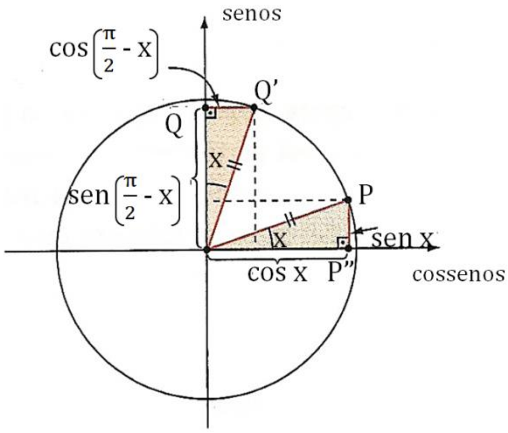


Figura 20

Pelo círculo trigonométrico podemos observar:

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \qquad \text{e} \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \text{sen } x.$$

c) Tangente

Para estabelecer a tangente de um número real α, vamos acrescentar ao círculo trigonométrico um terceiro eixo.

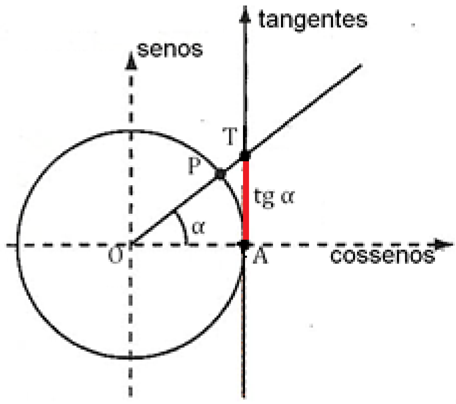


Figura 21

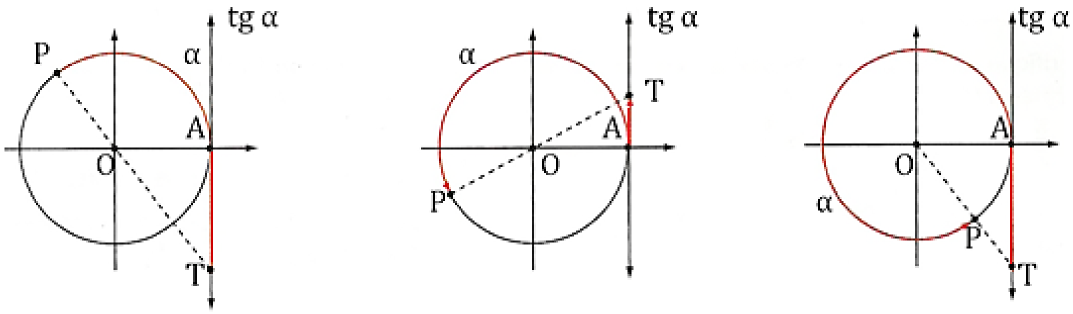
Esse eixo, denominado *eixo das tangentes*, é obtido ao se tangenciar, por uma reta vertical, o círculo no ponto A (1,0), origem de todos os arcos. O ponto A é a origem do eixo das tangentes, e sua orientação (para cima) coincide com a do eixo dos senos.

Unindo-se o centro O à extremidade P de um arco de medida α radianos (P é o ponto correspondente ao número real α no ciclo trigonométrico), construímos a reta $\overleftrightarrow{\mathrm{OP}}$, que intersecta o eixo das tangentes no ponto T.

Por definição, a medida do segmento $\overline{\mathrm{AT}}$ é a tangente do arco de α rad (ou tangente do número real α).

Considerando a orientação do eixo das tangentes, temos, para P pertencente ao primeiro quadrante $\mathrm{tg}\,\alpha > 0$.

Se P variar a posição nos demais quadrantes temos:



P é imagem de α.
T está abaixo de A.
$\mathrm{tg}\,\alpha < 0$

P é imagem de α.
T está acima de A.
$\mathrm{tg}\,\alpha > 0$

P é imagem de α.
T está abaixo de A.
$\mathrm{tg}\,\alpha < 0$

Figura 22

Note que:

- se $\alpha = \frac{\pi}{2}$, o ponto P pertence ao eixo dos senos, e a reta $\overleftrightarrow{\mathrm{OP}}$ é paralela ao eixo das tangentes. Neste caso, não se define $\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{2}$. Analogamente, não se define $\mathrm{tg}\,\frac{3\pi}{2}$.

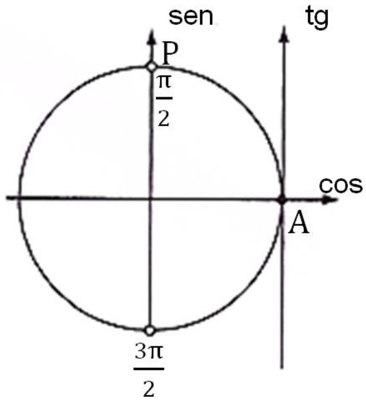


Figura 23

- se $\alpha = 0$ ou $\alpha = \pi$ ou $\alpha = 2\pi$, a reta $\overleftrightarrow{OP}$ intersecta o eixo das tangentes em sua origem A. Assim $\text{tg } 0 = 0$, $\text{tg } \pi = 0$ e $\text{tg } 2\pi = 0$.

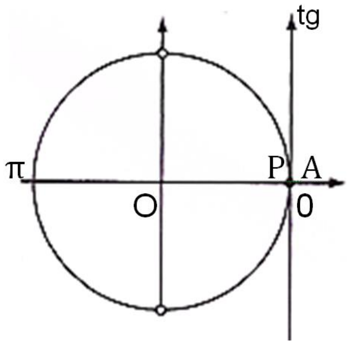


Figura 24

Função Tangente

Consideramos $D = \{ x \in \mathbb{R} / \ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Denominamos *função tangente* à função $f{:}D \longrightarrow \mathbb{R}$ que associa cada real $x \in D$, o número real $AT = \text{tg } x$, isto é, $f(x) = \text{tg } x$.

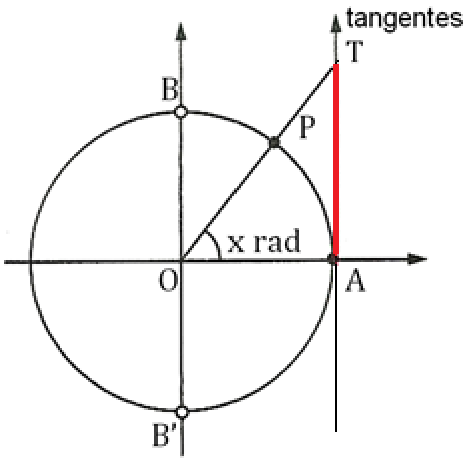


Figura 25

Algumas propriedades que são observadas diretamente no ciclo trigonométrico

1ª) O domínio da função tangente é $D = \{x \in \mathbb{R} / \ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$

2ª) Se x percorre qualquer um dos quatro quadrante, então $\text{tg } x$ é crescente.

3ª) A função tangente é periódica e seu período é 2π.

4ª) Para todo $x \in D$, $tg(-x) = -tg\, x$, isto é, a função tangente é uma função ímpar.

5ª) A imagem da função tangente é $\mathbb{R}$, isto é, para cada y real existe um x real tal que $tg\, x = y$.

Com x nas abscissas e $tg\, x$ nas ordenadas, podemos construir o gráfico, denominado *tangentóide*, que nos indica como varia a função $f(x) = tg\, x$.

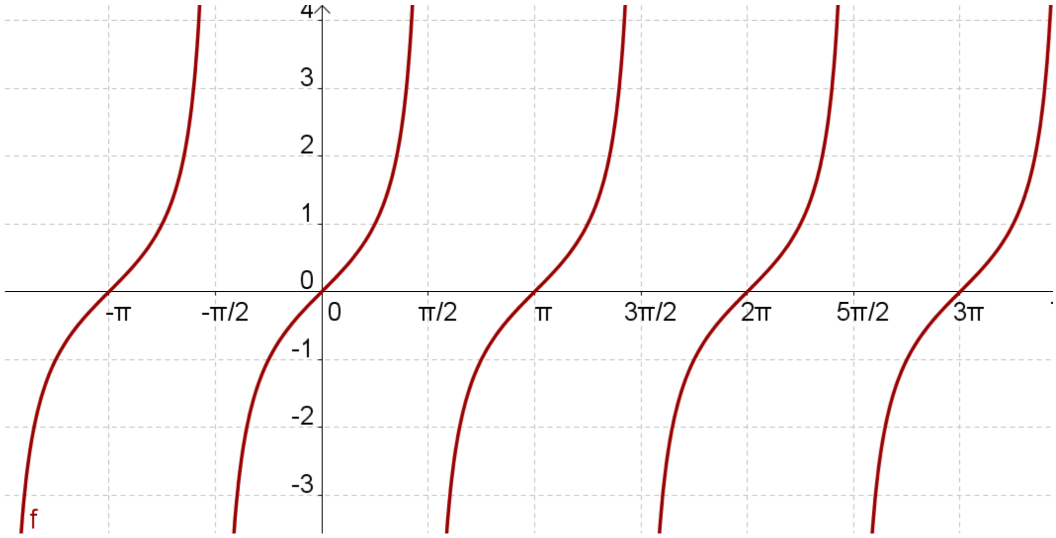


Figura 26: tangentóide

Relação entre tangente, seno e cosseno

Seja α um número real, com $0 < \alpha < 2\pi$, $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$, $\alpha \neq \frac{3\pi}{2}$ e $\alpha \neq \pi$.

Seja P o ponto correspondente a α no ciclo trigonométrico. Observando a figura abaixo, temos:

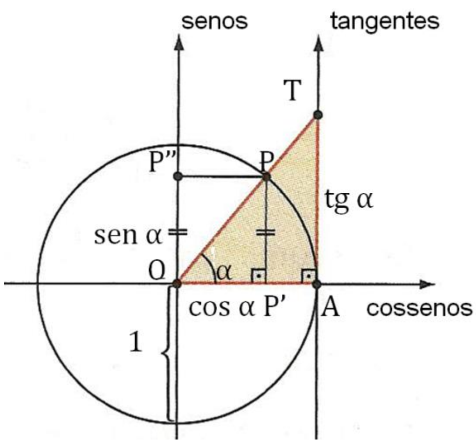


Figura 27

$OP' = \cos\alpha$

$OP'' = PP' = \text{sen}\,\alpha$

$AT = \text{tg}\,\alpha$

$OP = 1$ (raio)

Os triângulos $OP'P$ e OAT são semelhantes, pois possuem em comum, além do ângulo reto, também o ângulo de medida α. Podemos, então, estabelecer a relação:

$$\frac{OP'}{OA} = \frac{P'P}{AT} \Longrightarrow \frac{\cos\alpha}{1} = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\text{tg}\,\alpha} \Longrightarrow \text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}$$

Se o ponto *P* pertence ao 2º, 3º e 4º quadrante, chega-se à mesma relação, usando procedimento análogo.

Se $\alpha \in \{0, \pi, 2\pi\}$, temos $\text{tg}\,\alpha = 0$, $\text{sen}\,\alpha = 0$ e $\cos\alpha \neq 0$ e daí $\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = 0$.

Se $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ou $\alpha = \frac{3\pi}{2}$ não se define a tangente.

Desse modo, se $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 \leq \alpha \leq 2\pi$, $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ e $\alpha \neq \frac{3\pi}{2}$, vale a relação:

$$\boxed{\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}.}$$

1.3.5 Outras Razões Trigonométricas

No círculo trigonométrico temos outras três razões trigonométricas: *cotangente*, *cossecante* e *secante*.

a) Cotangente

Considere a Figura 28 onde traçamos uma reta tangente ao círculo trigonométrico pelo ponto B, a qual chamamos de *eixo das cotangentes*.

Damos o nome de *cotangente de* α à medida algébrica do segmento $\overline{BD}$ pertencente ao eixo das cotangentes. O ponto D é a intersecção da reta que une o centro O do círculo trigonométrico à extremidade P de um arco de medida α radianos.

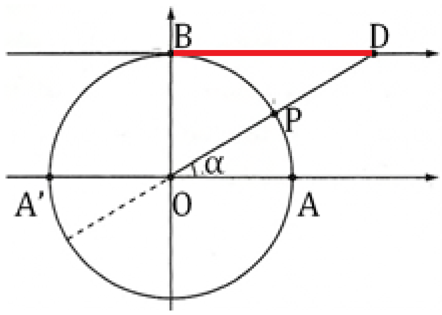


Figura 28

Quando P coincide com A ou $\mathrm{A'}$, a reta $\overleftrightarrow{\mathrm{OP}}$ é paralela ao eixo das cotangentes e, deste modo, não se definem $\operatorname{cotg} 0$, $\operatorname{cotg} \pi$ e $\operatorname{cotg} 2\pi$.

Relações envolvendo cotangente:

- $\operatorname{cotg} \alpha = \dfrac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha}$ (cuja demonstração se dá por semelhança de triângulo, análogo ao que foi feito para a tangente)
- $\operatorname{cotg} \alpha = \dfrac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$.

b) Cossecante

Por um ponto P pertencente ao círculo trigonométrico traçamos a reta s tangente ao circulo, conforme Figura 29.

Se esta reta intersecta o eixo dos senos num ponto C, dizemos que a medida algébrica do segmento $\overline{\mathrm{OC}}$ é a *cossecante de* α.

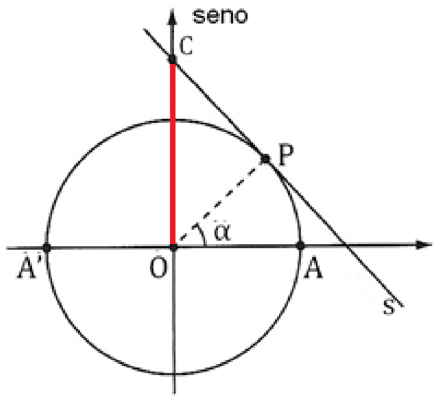


Figura 29

Quando P coincide com A ou $\mathrm{A'}$, a reta tangente ao ciclo por A (ou $\mathrm{A'}$), é paralela ao eixo dos senos e, deste modo, não se definem $\mathrm{cossec}\ 0$, $\mathrm{cossec}\ \pi$ e $\mathrm{cossec}\ 2\pi$.

Relação envolvendo cossecante:

Observe, na Figura 30, que os triângulo OPC e $\mathrm{OP'P}$ são semelhantes, pois, além de um ângulo reto, possuem em comum o ângulo destacado em vermelho.

Assim, podemos escrever:

$\frac{\mathrm{OC}}{\mathrm{OP}} = \frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{OP'}} \Longrightarrow \frac{\mathrm{cossec}\ \alpha}{1} = \frac{1}{\mathrm{sen}\ \alpha} \Longrightarrow \mathrm{cossec}\ \alpha = \frac{1}{\mathrm{sen}\ \alpha}$; válida para $\mathrm{sen}\ \alpha \neq 0$.

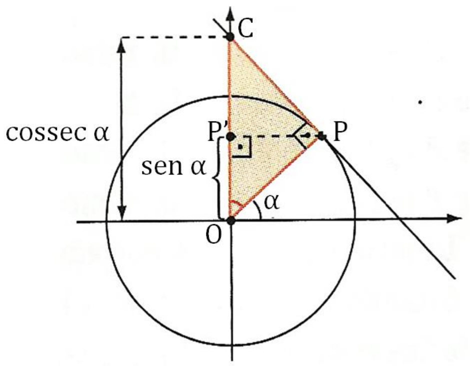


Figura 30

c) Secante

Por um ponto P pertencente ao círculo trigonométrico traçamos a reta s tangente ao circulo, conforme Figura 31.

Se esta reta intersecta o eixo dos cossenos num ponto S, dizemos que a medida algébrica do segmento $\overline{\mathrm{OS}}$ é a *secante de* α.

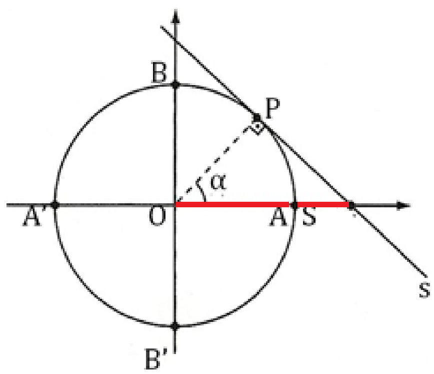


Figura 31

Quando P coincide com B ou $\mathrm{B'}$, a reta tangente ao ciclo por B (ou $\mathrm{B'}$), é paralela ao eixo dos cossenos e deste modo, não se definem $\sec\frac{\pi}{2}$ e $\sec\frac{3\pi}{2}$.

Relação envolvendo secante:

- $\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$ (cuja demonstração se dá por semelhança de triângulos, análogo que foi feito para cossecante)

Por meio das relações trigonométricas apresentadas é possível estabelecer outras relações:

1. $\boxed{\sec^2 x = 1 + \mathrm{tg}^2 x}$, válida para $x \in [0,2\pi]$ e $x \notin \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$.

De fato, da relação fundamental, $\mathrm{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$
dividindo por $\cos^2 x$ temos

$$\frac{\mathrm{sen}^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

e daí

$$\sec^2 x = 1 + \mathrm{tg}^2 x$$

Corolário:

a) $\boxed{\cos^2 x = \frac{1}{1 + \mathrm{tg}^2 x}}$, válida para $x \in [0,2\pi]$ e $x \notin \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$.

De fato, $\cos^2 x = \frac{1}{\sec^2 x} = \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2 x}$.

b) $\boxed{\mathrm{sen}^2 x = \frac{\mathrm{tg}^2 x}{1 + \mathrm{tg}^2 x}}$, válida para $x \in [0,2\pi]$ e $x \notin \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$.

De fato, $\mathrm{sen}^2 x = \cos^2 x \, . \, \frac{\mathrm{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \cos^2 x \, . \, \mathrm{tg}^2\, x = \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2 x} \, . \, \mathrm{tg}^2 x = \frac{\mathrm{tg}^2 x}{1+\mathrm{tg}^2 x}$

2. $\boxed{\text{cossec}^2x = 1 + \text{cotg}^2x}$, válida para $x \in [0,2\pi]$ e $x \notin \{0, \pi, 2\pi\}$.

De fato, da relação fundamental, $\text{sen}^2x + \cos^2x = 1$
dividindo por sen^2x temos

$$\frac{\text{sen}^2x}{\text{sen}^2x} + \frac{\cos^2x}{\text{sen}^2x} = \frac{1}{\text{sen}^2x}$$

e daí

$$\text{cossec}^2x = 1 + \text{cotg}^2x$$

1.3.6 Transformações Trigonométricas

A seguir demonstraremos como obter as fórmulas que possibilitam encontrar razões trigonométricas da soma $a + b$ e da diferença $a - b$ de dois números reais quaisquer a e b (ou de dois arcos de medidas a e b) a partir de valores conhecidos referentes às razões trigonométricas de a e de b.[1]

a) Cosseno da soma

Sejam P, Q e R as imagens dos números reais a, $a + b$ e $a - b$, respectivamente, como mostra o ciclo trigonométrico da Figura 32.

Os arcos $\overset{\frown}{APQ}$ e $\overset{\frown}{RAP}$ possuem a mesma medida $(a + b)$ e, consequentemente, as cordas $\overline{AQ}$ E $\overline{PR}$ também têm medidas iguais. Desse modo, podemos afirmar que a distância entre A e Q é igual à distância entre P e R, isto é, $d_{AQ} = d_{PR}$.

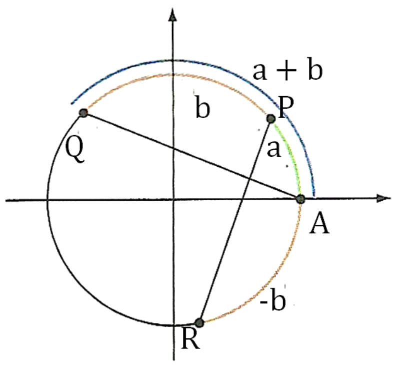


Figura 32

[1] É importante ressaltar que antes de iniciar as demonstrações com estudantes deve-se apresentar o conceito de distância entre dois pontos no plano cartesiano aplicando o Teorema de Pitágoras.

Observando a figura, podemos escrever as coordenadas dos pontos A, P, Q e R:

- $A(1,0)$;
- $P(\cos a, \operatorname{sen} a)$;
- $Q(\cos(a+b), \operatorname{sen}(a+b))$ e
- $R(\cos(-b), \operatorname{sen}(-b))$, ou melhor, $R(\cos b, -\operatorname{sen} b)$.

Utilizando a expressão da distância entre dois pontos, temos:

$$d_{AQ} = \sqrt{[1-\cos(a+b)]^2 + [0-\operatorname{sen}(a+b)]^2} =$$

$$= \sqrt{1 - 2\cos(a+b) + \underbrace{\cos^2(a+b) + \operatorname{sen}^2(a+b)}_{=1}} =$$

$$= \sqrt{2 - 2\cos(a+b)} \qquad \text{(I)}$$

$$d_{PR} = \sqrt{(\cos a - \cos b)^2 + [\operatorname{sen} a - (-\operatorname{sen} b)]^2} =$$

$$= \sqrt{(\cos a - \cos b)^2 + (\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b)^2} =$$

$$= \sqrt{\cos^2 a - 2\cos a.\cos b + \cos^2 b + \operatorname{sen}^2 a + 2\operatorname{sen} a.\operatorname{sen} b + \operatorname{sen}^2 b}$$

$$= \sqrt{2 + 2\operatorname{sen} a.\operatorname{sen} b - 2\cos a.\cos b} \qquad \text{(II)}$$

Como $d_{AQ} = d_{PR}$ temos também $d^2_{AQ} = d^2_{PR}$ em (I) e (II), isto é:

$$2 - 2\cos(a+b) = 2 + 2\operatorname{sen} a.\operatorname{sen} b - 2\cos a.\cos b \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow 2\,[1 - \cos(a+b) = 2\,[1 + \operatorname{sen} a.\operatorname{sen} b - \cos a.\cos b] \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{\cos(a+b) = \cos a.\cos b - \operatorname{sen} a.\operatorname{sen} b}$$

b) Cosseno da diferença

Para calcular $\cos(a-b)$, basta fazermos $a - b = a + (-b)$ na fórmula do cosseno da soma:

$$\cos(a-b) = \cos[a+(-b)] = \cos a.\cos(-b) - \operatorname{sen} a.\operatorname{sen}(-b)$$

Daí: $\boxed{\cos(a-b) = \cos a.\cos b + \operatorname{sen} a.\operatorname{sen} b}$

c) Seno da soma

Como $\operatorname{sen} x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, para todo $x \in \mathbb{R}$, temos:

$$\text{sen}\,(a+b) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (a+b)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - a\right) - b\right)$$
$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right).\cos b + \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - a\right).\ \text{sen}\, b$$

Finalmente, temos: $\boxed{\text{sen}\,(a+b) = \text{sen}\, a\,.\cos b + \text{sen}\, b\,.\cos a}$

d) Seno da diferença

Para calcular $\text{sen}\,(a-b)$, basta fazer novamente $a - b = a + (-b)$, desta vez na fórmula do seno da soma de dois arcos, isto é,

$$\text{sen}\,(a-b) = \text{sen}\,[a + (-b)] = \text{sen}\, a\,.\cos(-b) + \text{sen}\,(-b)\,.\cos a$$

Como $\cos(-b) = -\cos b$ e $\text{sen}\,(-b) = -\,\text{sen}\, b$, então:

$$\boxed{\text{sen}\,(a-b) = \text{sen}\, a\,.\cos b - \text{sen}\, b\,.\cos a}$$

e) Tangente da soma

Lembrando que $\text{tg}\, x = \frac{\text{sen}\, x}{\cos x}$, para todo $x \in \mathbb{R}$, com $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ (k inteiro), para calcular $\text{tg}\,(a+b)$, fazemos:

$$\text{tg}\,(a+b) = \frac{\text{sen}\,(a+b)}{\cos\,(a+b)} = \frac{\text{sen}\, a\,.\cos b + \text{sen}\, b\,.\cos a}{\cos a\,.\cos b - \text{sen}\, a\,.\text{sen}\, b}$$

Dividindo o numerador e o denominador por $\cos a\,.\cos b$, temos:

$$\text{tg}\,(a+b) = \frac{\frac{\text{sen}\, a\,.\cos b + \text{sen}\, b\,.\cos a}{\cos a\,.\cos b}}{\frac{\cos a\,.\cos b - \text{sen}\, a\,.\text{sen}\, b}{\cos a.\cos b}} = \frac{\frac{\text{sen}\, a\,.\cos b}{\cos a\,.\cos b} + \frac{\text{sen}\, b\,.\cos a}{\cos a\,.\cos b}}{\frac{\cos a\,.\cos b}{\cos a.\cos b} - \frac{\text{sen}\, a\,.\text{sen}\, b}{\cos a\,.\cos b}}$$

Finalmente, temos: $\boxed{\text{tg}\,(a+b) = \frac{\text{tg}\, a + \text{tg}\, b}{1 - \text{tg}\, a\,.\text{tg}\, b}}$,

válida para $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ e $a + b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

f) Tangente da diferença

Façamos novamente $a - b = a + (-b)$ na fórmula da tangente da soma de dois arcos, isto é,

$$\text{tg}\,(a-b) = \text{tg}\,[\,a + (-b)] = \frac{\text{tg}\, a + \text{tg}(-b)}{1 - \text{tg}\, a\,.\text{tg}(-b)} = \frac{\text{tg}\, a - \text{tg}\, b}{1 - \text{tg}\, a\ (-.\text{tg}\, b)}$$

Assim: $\boxed{\text{tg}\,(a-b) = \frac{\text{tg}\, a - \text{tg}\, b}{1 + \text{tg}\, a\,.\text{tg}\, b}}$

válida para $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ e $a + b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

A partir dessas relações é possível encontrar as razões trigonométricas do número real 2a, dadas as razões trigonométricas do número real a.

a) $\text{sen } 2a = 2 \,.\, \text{sen } a \,.\, \cos a$

b) $\cos 2a = \cos^2 a - \text{sen}^2 a \iff \cos 2a = 1 - 2\,\text{sen}^2 a \iff \cos 2a = 2\cos^2 a - 1$.

c) $\text{tg } 2a = \frac{2\,\text{tg } a}{1 - \text{tg}^2 a}$; válida para $a \neq \frac{\pi}{4} + k\pi$ e $a \neq \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

É possível também, encontrar as razões trigonométricas do arco metade a partir das relações $\cos 2a = 1 - 2\,\text{sen}^2 a$ e $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$.

Fazendo $2a = \alpha$, obtemos:

$$\cos \alpha = 2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 + \cos \alpha}{2}}.$$

$$\cos \alpha = 1 - 2\,\text{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\text{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 - \cos \alpha}{2}}.$$

Para a obtenção da $\text{tg}\frac{\alpha}{2}$, $\alpha \neq \pi + k \,.\, 2\pi, k \in \mathbb{Z}$, temos:

$$\text{tg } \frac{\alpha}{2} = \frac{\text{sen } \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \boxed{\frac{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}}$$

Observamos que as relações trigonométricas apresentadas são de fácil dedução a partir da relação fundamental e com a compreensão de suas definições via o círculo trigonométrico.

Uma vez solidificadas estas noções, o estudante poderá manipular expressões mais complexas, sem maiores dificuldades.

Salientamos que as noções apresentadas neste capítulo são a base necessária para o aprendizado da Trigonometria na Geometria Euclidiana.

É válido ressaltar que, mesmo que a matriz curricular da Educação Básica não inclua as Geometrias Não-Euclidianas, nada impede ao professor que faça uma abordagem dos conceitos elementares dessas Geometrias. Desta maneira, certos assuntos podem ser ampliados para contemplar também tópicos modernos de Matemática, onde os conceitos de trigonometria hiperbólica e esférica são utilizados.

Capítulo 2

O DESENVOLVIMENTO HISTÓRICO DA TRIGONOMETRIA

Neste capítulo apresentamos um pouco da história da Trigonometria, mostrando como sua origem na Antiguidade esta relacionada a questões mais práticas voltadas para as medidas de distância inacessíveis e a estudos astronômicos. Chamamos atenção para a Trigonometria rudimentar utilizada pelos egípcios, babilônicos, chineses e gregos.

Trazemos também um breve relato da evolução da Trigonometria no início de nossa era através dos hindus, árabes e persas.

Como a Astronomia é uma das raízes da Trigonometria, na Seção 2.3 encontramos um relato sucinto do desenvolvimento dessa ciência.

A nomenclatura utilizada atualmente em Trigonometria teve sua origem nos primeiros séculos de nossa era e se estendeu até meados do século XVII. Dedicamos algumas interpretações acerca da origem dos significados dos nomes atuais das funções trigonométricas na Seção 2.4.

Para finalizar este capítulo trazemos algumas contribuições importantes de matemáticos europeus que, a partir do século XV, permitiram que a Trigonometria se consolidasse como conhecimento independente da Astronomia.

As principais referências para este capítulo são: [6], [10], [19], [20], [25], [29], [30], [31], [37], [42], [47] [50], [52].

2.1 Vestígios da Trigonometria na Antiguidade

Segundo Boyer [10],

> “a Trigonometria, como os outros ramos da Matemática, não foi obra de um só homem ou nação. Teoremas sobre as razões entre lados de triângulos semelhantes eram conhecidos e usados pelos antigos egípcios e babilônicos”,

como descrevemos a seguir.

2.1.1 A Trigonometria no Egito

A civilização egípcia foi uma das primeiras a desenvolver e usar conhecimentos rudimentares de Trigonometria. Isto pode ser observado no Papiro Rhind, que data de aproximadamente 1650 a. C.. O Papiro Rhind é um texto matemático na forma de manual prático que contém 85 problemas copiados em escrita hierática pelo escriba Ahmes (por este motivo frequentemente também é chamada Papiro Ahmes) de um trabalho mais antigo. O papiro foi adquirido no Egito pelo egiptólogo escocês A. Henry Rhind, sendo mais tarde comprado pelo Museu Britânico. Este papiro é uma das principais fontes de informações referentes à matemática egípcia antiga. O problema de número 56 do Papiro Rhind tem especial interesse por conter rudimentos de Trigonometria e uma teoria de triângulos semelhantes [26].

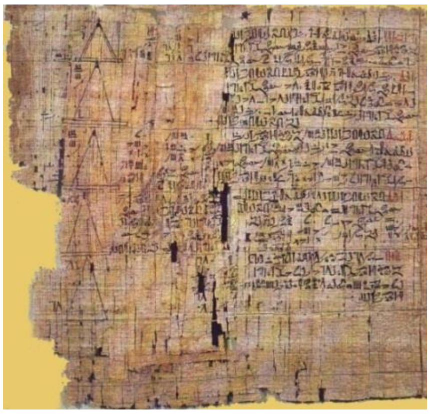


Figura 33: Papiro Rhind[2]

PROBLEMAS 56 [3]

Se uma pirâmide tem 250 cúbitos de altura e sua base
mede 360 cúbitos de lado, qual é o seu seqt?

[2] Fonte: http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/seminario/rhind/inicio.htm
[3] Fonte: http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/seminario/rhind

Seqt significa medida de inclinação, é a cotangente do ângulo entre a base da pirâmide e suas faces.

Resolução apresentada [52]:

1º Calcula-se metade de 360 que é 180.

2º Descobre-se o número que multiplicado por 250 dá 180. Esse número é $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{50}$.

3º Um cúbito são sete palmos. Multiplica-se, agora, 7 por $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{50}$, que dá $5+\frac{1}{25}$. Logo, o seqt é $5+\frac{1}{25}$ palmos por cúbitos.

Na construção de pirâmides era essencial manter uma inclinação constante das faces e foi essa preocupação que levou os egípcios a introduzir um conceito equivalente ao de cotangente de um ângulo [20].

Além da utilização da trigonometria nas medições das pirâmides, apareceu no Egito (1500 a. C. aproximadamente) a ideia de associar sombras projetadas por uma vara vertical a sequências numéricas, relacionando seus comprimentos com horas do dia (relógio de sol). Poderíamos dizer então que essas ideias estavam anunciando a chegada, séculos depois, das funções tangente e cotangente. Segundo Boyer [10], os predecessores da tangente e da cotangente, no entanto, surgiram de modestas necessidades de medição de alturas e distâncias.

Observando o desenho abaixo, entendemos como é feito o cálculo da altura da pirâmide com sombras. A vara colocada no extremo C da sombra da pirâmide forma, com sua sombra, o triângulo DCE que é semelhante ao triângulo ABC [20].

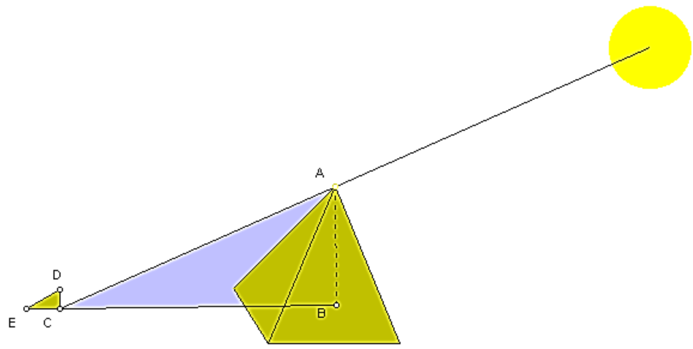


Figura 34: Procedimento utilizado para medir a altura das pirâmides por semelhança de triângulos[4]

[4] Fonte: http://www.matematica.br/historia/calpiramide.html

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DC}{CE}, \text{ onde } AB = \frac{DC\,.\,BC}{CE}$$

Medindo as duas sombras e a altura da vara, pode-se determinar então a altura da pirâmide.

2.1.2 Trigonometria na Babilônia

Como já mencionamos, os primeiros vestígios de Trigonometria surgiram não só no Egito, mas também na Babilônia. Os babilônios tinham grande interesse pela Astronomia, tanto por razões religiosas, quanto pelas conexões com o calendário e as épocas de plantio. É impossível estudar as fases da lua, os pontos cardeais e as estações do ano sem usar triângulos, um sistema de unidades de medidas e uma escala [10].

Os babilônios foram excelentes astrônomos e influenciaram os povos posteriores. Eles construíram no século 28 a.C. um calendário e elaboraram, a partir de 747 a.C, uma tábua de eclipses lunares. Este calendário e estas tábuas chegaram até nossos dias [20].

A divisão da circunferência em 360° tem sua origem um pouco controvérsia segundo alguns autores. Uma bastante aceitável e bem fundamentada é encontrada em Eves [26]:

> "Indubitavelmente devemos aos babilônios antigos a divisão da circunferência de um círculo em 360 partes iguais. Diversas explicações já foram aventadas para a razão dessa escolha, mas nenhuma é tão plausível como a que se segue, sustentada pela imensa autoridade de Otto Neugebauer[5]. Nos remotos tempos dos sumérios, existia uma unidade de medida grande, uma espécie de *milha babilônica*, igual a sete das milhas atuais. Como a milha babilônica era usada para medir distâncias longas, era natural que viesse a se transformar numa unidade de tempo, a saber, o tempo necessário para percorrer uma milhar babilônica. Mas tarde, talvez no primeiro milênio a. C., quando a astronomia babilônica atingiu o estágio de manter registros sistemáticos de fenômenos celestes, a milha-tempo babilônica foi adotada para a mensuração de espaços de tempo. Como se determinou que um dia era formado por 12 milhas-tempo, e um dia completo equivale a uma revolução do céu, dividiu-se um ciclo completo em 12 partes iguais. Mas, por conveniência, a milha-tempo babilônica fora divida em 30 partes

[5](1899-1990) Matemático e historiador da ciência austro-estadunidense. Conhecido por suas pesquisas sobre a História da Astronomia e de outras Ciências Exatas na Idade Antiga e na Idade Média. Estudando tabletes de argila, descobriu que os antigos babilônios sabiam muito mais sobre Matemática e Astronomia do que se supunha. A Academia Nacional de Ciências dos Estados Unidos a ele referiu-se como "o mais original e produtivo pesquisador da História das Ciências Exatas, talvez da História da Ciência, de nossa era".

> iguais. Dessa forma chegamos a (12)(30) = 360 partes iguais num ciclo completo."

Dos registros históricos mais importantes da matemática babilônica já analisados a tábula *Plimpton 322* talvez seja a mais notável. O nome indica que se trata da tábula da coleção G. A. Plimpton, da Universidade de Colúmbia, catalogada sob o número 322. A tabula foi escrita no período Babilônio Antigo (aproximadamente entre 1900 e 1600 a. C.) e os primeiros a descrever seu conteúdo foram Neugebauer e Sachs em 1945. [26]

Figura 35: Tábula *Plimpton 322*[6]

Na *Plimpton 322* parece evidente que os babilônicos desse remoto período tinham ciência da representação paramétrica geral dos ternos pitagóricos primitivos. O exame minucioso desta tábula concluiu que ela apresenta uma tábua de secantes para ângulos de 45° a 31°, formada por meio de triângulos retângulos de lados inteiros, em que se verifica uma variação em saltos regulares na função em vez de no ângulo correspondente.

2.1.3 A Trigonometria no Oriente

Uma trigonometria primitiva também foi encontrada no Oriente. Na China, no reino de Chou Pei Suang Ching, aproximadamente 1110 a. C., os

[6] Fonte: http://blsciblogs.baruch.cuny.edu/plimpton322/the-tablet/

triângulos retângulos eram frequentemente usados para medir distâncias, comprimentos e profundidades. Existem evidências tanto do conhecimento das relações trigonométricas quanto do conceito de ângulo e a forma de medí-lo [26].

Por dois motivos, infelizmente, não temos registros fieis de como eram feitas as medições e quais as unidades de medidas usadas. Primeiramente, temos o fato de os povos da época com certeza fazerem muitos de seus registros em bambu, um material perecível. E, para agravar, o egotista imperador Shï Huang-ti[7] ordenou em 213 a. C. uma lamentável queima de livros. Assim, apesar de muitos dos livros queimados terem sidos reconstituídos de memória, hoje há dúvidas sobre a autenticidade de grande parte do material bibliográfico que se alega ser anterior à 213 a. C. Por consequência, muito do nosso conhecimento sobre a matemática chinesa primitiva baseia-se em informações orais e interpretações posteriores de textos originais [26].

Figura 36: Shï Huang-ti[8]

2.1.4 Trigonometria na Grécia

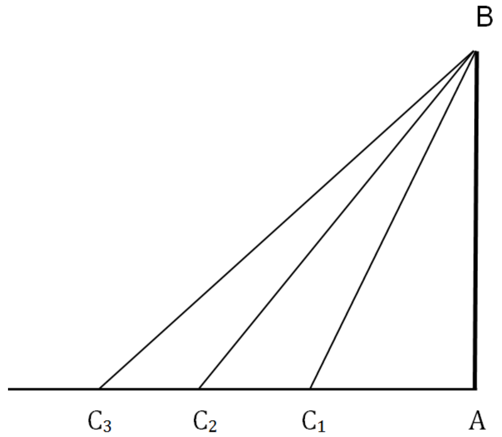
Segundo o historiador Heródoto (490 - 420 a.C.) foram os gregos que deram o nome de gnômon ao relógio de sol que chegou até eles através dos

[7](259-210 a.C.)O primeiro líder a unir a China, uma das maiores nações do mundo, e o responsável pelo projeto da Grande Muralha que protegia o país.
[8] Fonte: http://www.ahistoria.com.br/biografia-chin-shih-huang-ti/

babilônios, embora já tivesse sido utilizado pelos egípcios antes de 1500 a.C.[20]

O mais antigo gnômon de que temos conhecimento, e que chegou até os nossos dias, está no Museu de Berlim, segundo Eves [26]. Ele evidencia e reforça a hipótese de que a Trigonometria foi essencial para a observação de fenômenos astronômicos pelos povos antigos, visto que a documentação relativa a esse período é praticamente inexistente.

O gnômon era uma vareta (AB na figura abaixo) que se espetava no chão, formando com ele um ângulo reto, e o comprimento de sua sombra (AC) era observado, num horário determinado: meio dia. Uma observação dos limites atingidos pela sombra permitia medir a duração do ano e o seu movimento lateral diário permitia medir a duração do dia.



A sombra atingirá: C_1 no Solstício de verão (sombra mínima),
C_2 equinócio de primavera e outono e
C_3 no solstício de inverno (sombra máxima)

Figura 37

Como o tamanho do gnômon era constante porque usava-se sempre a mesma vareta e na mesma posição, o comprimento AC ao meio dia variava com o ângulo C. Para nós isto significa uma posição de AC, ou $\frac{AC}{AB}$ como uma "função" do ângulo A, nos dias de hoje denominada cotangente. Porém, não temos nenhum vestígio do nome nesse período [20].

O desenvolvimento da Trigonometria ao longo do tempo foi gradual e esteve intimamente ligado ao desenvolvimento da Geometria. Neste campo a Grécia produziu grandes sábios que se dedicaram ao estudo dos triângulos e à Astronomia, permitindo assim que os conhecimentos trigonométricos se consolidassem. Entre eles podemos citar Tales de Mileto, Pitágoras, Eratóstenes de Cirene, Hiparco e Ptolomeu, que veremos com mais detalhe na Seção 2.3 desde capítulo.

2.2 A Trigonometria no Início de Nossa Era

Com as transformações políticas e econômicas ocorridas na Europa Ocidental, causadas pelas invasões dos bárbaros germânicos e com a queda do Império Romano no início de nossa era, outros povos ganharam destaque no cenário intelectual: os hindus, árabes e persas [26].

No século IV de nossa era, o centro da cultura se deslocou para a Índia, que revolucionou a Trigonometria com um conjunto de textos denominados Siddhanta, que significa sistemas de Astronomia.

O que chegou até nós foi o Surya Siddhanta, que quer dizer Sistemas do Sol e é um texto épico, de aproximadamente 400 d.C, escrito em versos e em sânscrito. Os hindus diziam que o autor do texto foi Surya, o deus do Sol. Segundo Boyer [26], esta obra contém poucas explicações e nenhuma prova, pois, afinal, tendo sido escrita por um Deus, seria muita pretensão exigir provas.

A importância do Surya, para nós, é que ele abriu novas perspectivas para a Trigonometria. Nas aplicações da "função" corda, na Astronomia, era necessário dobrar o arco antes de usá-lo na tábua de cordas. Naturalmente, era mais conveniente ter uma tábua na qual o próprio arco fosse a variável independente. No Surya**,** a relação usada era entre a metade da corda e a metade do ângulo central correspondente, chamada por eles de *jiva*. Isto possibilitou a visão de um triângulo retângulo na circunferência, como na figura abaixo. Definiam o *jiva* como sendo a razão entre o cateto oposto e a hipotenusa [20].

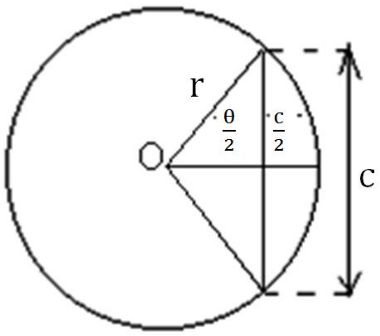


Figura 38: o “Jiva” hindu

$$\text{Jiva } \frac{\theta}{2} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} \qquad\qquad \text{Sen } \frac{\theta}{2} = \frac{\frac{c}{2}}{r}$$

A metade da corda divida pelo raio do círculo é o seno da metade do arco
(ou a metade do ângulo central corresponde a todo o arco)

Com os hindus, as principais “funções” trigonométricas foram introduzidas e os métodos de tabulação se aperfeiçoaram, particularmente os de interpolação quadrática e linear.

Por volta de 500 d.C., o matemático hindu Aryabhata já calculava semicordas e usava também o sistema decimal, desenvolvido aproximadamente em 600 d.C. Ao surgirem, os numerais hindus continham nove símbolos e não havia símbolo para o zero [20].

Quando os hindus introduziram os conceitos de semicorda e de seno, demostraram algumas identidades, e encontramos em Varahamihira, no ano 505 d.C., o equivalente verbal de $\text{sen}^2\,\theta + \cos^2\theta = 1$.

Após os hindus, foram os árabes e os persas a dar sua contribuição à Trigonometria.

O Império Muçulmano ou Árabe, além da expansão econômica, viveu extraordinário avanço nos diversos campos das artes e da ciência do fim do século VIII até o século XI, com destaque ao século IX. A expansão do saber muçulmano deveu-se, sobretudo, à difusão da língua árabe, que substituiu o grego na condição de língua internacional. O emprego do árabe permitiu a fixação e a preservação de obras antigas, que foram traduzidas e assim difundidas entre os intelectuais muçulmanos.

Podemos dizer que a influência árabe começou com a fundação da Escola de Bagdad, no século IX, e um dos seus maiores expoentes foi o príncipe da Síria Mohamed-ben-Geber, conhecido como AL Battani (aproximadamente 850 a 929 d.C.), ou Albategnius, nas traduções latinas, chamado o Ptolomeu de Bagdad [20].

Os estudos de AL Battani ficaram entre o Almagesto e Siddhanta e foi por sua influência que a trigonometria hindu foi adotada pelos árabes, principalmente a partir de sua genial ideia de introduzir o círculo de raio unitário e com isso demonstrar que a razão *jiva* é válida para qualquer triângulo retângulo, independentemente do valor da medida da hipotenusa.

Depois de Al-Battani, digno de nota entre os matemáticos árabes foi Abû'l Wêfa que, em 980, iniciou uma organização, uma sistematização de provas e teoremas de Trigonometria. Destacamos também o astrônomo Persa Nasîr ed-dên al-Tûsî autor, em 1250, do primeiro trabalho no qual a Trigonometria plana apareceu como uma ciência por ela própria, desvinculada da Astronomia. Isto seria retomado na Europa, no século XV, quando Regiomontanus estabeleceu a Trigonometria como um ramo da Matemática e a partir disto, vários matemáticos contribuíram para sua consolidação, mantendo seu aspecto prático com aplicações nos mais vários campos e também transformando-se em uma parte da Análise Matemática, expressando relações entre números complexos, sem necessidade de recorrer a arcos ou ângulos [20].

2.3 A Astronomia e suas Contribuições para o Desenvolvimento da Trigonometria

Como já mencionamos uma das ciências que permitiram que a Trigonometria se originasse foi a Astronomia, cujas raízes remontam a tempos pré-históricos.

Nesta seção, citaremos algumas descobertas e conhecimentos astronômicos do homem na Antiguidade, assim como um breve relato do trabalho de alguns astrônomos da Antiguidade que merecem destaque.

Também será apresentado o método da triangulação usado para calcular distâncias astronômicas através da paralaxe geocêntrica e a paralaxe heliocêntrica.

2.3.1 Astronomia na Antiguidade

A Astronomia, ciência que trata do universo sideral e dos corpos celeste, com o fim de situá-los no espaço e no tempo e explicar sua origem e seu movimento, é frequentemente considerada a mais antiga das ciências, pois as investigações acerca da natureza do Universo remontam aos tempos pré-históricos. Os registros mais antigos datam de aproximadamente a 3000 a. C. e se devem aos chineses, babilônios, assírios e egipcios.

Desde a pré-história, os homens sempre olharam para o céu em busca de possíveis correlações entre os fenômenos da natureza e os fenômenos cósmicos. O céu era usado como mapa, calendário e relógio. Eles relacionavam os objetos no céu (e seus movimentos) a fenômenos como a chuva, a seca, as estações do ano, as marés, prever a melhor época para o plantio e a colheita, ou com objetivos mais relacionados à astrologia, como fazer previsões do futuro já que, não tendo qualquer conhecimento das leis da natureza (Física), acreditavam que os deuses do céu tinham o poder da colheita, da chuva e mesma da vida [29].

Na Grécia, a Astronomia era uma das ciências mais importantes no período próximo ao nascimento de Cristo. Daí talvez a explicação de porquê os três reis magos seguiram uma estrela até Belém, conforme Mt 2, 1-10, afinal de contas os sábios da época estudavam Astronomia e observavam muito as estrelas. Entretanto, vários séculos antes de Cristo, os chineses sabiam a duração do ano e usavam um calendário de 365 dias. Deixaram anotações precisas de cometas, meteoros e meteoritos desde 700 a. C. Mais tarde, também observaram as estrelas que agora chamamos de novas. Os babilônios, assírios e egípcios também sabiam a duração do ano desde épocas pré-cristãs [19].

O primeiro conhecimento astronômico do homem pré-histórico consistiu essencialmente na previsão dos movimentos de objetos celestiais visíveis, como estrelas e planetas. Em algumas partes do mundo, evidências destes conhecimentos astronômico da antiguidade foram deixados na forma dos monumentos astronômicos megalíticos, como os montes de

Newgrange[9] construído em 3200 a.C. (nos solstício de inverno o sol ilumina o corredor e a câmara central), o famoso complexo de *Stonehenge*[10] que data de 3000 a 1500 a. C. sua avenida principal que parte do centro aponta para o local no horizonte em que o sol nasce no solstício, os *Menir*[11] e os vários outros edifícios projetados com a função de observar o espaço sideral. Muitos destes monumentos mostram a relação do homem pré-histórico com o céu, bem como as excelentes capacidades de precisão das observações [29].

Figura 39: Vista aérea do Newgrange, na Irlanda.[12]

Figura 40: Interior do Newgrange[13]

[9] Newgrange (Irlandês: *Dún Fhearghusa*) é uma tumba do Conjunto Arqueológico do Vale do Boyne, no Condado de Meath, na Irlanda, um dos mais famosos sítios pré-históricos do mundo e o mais famoso da Irlanda. Newgrange foi construído de modo que, ao nascer do sol do dia mais curto do ano (solstício de inverno), um fino raio de sol ilumina por pouco tempo o piso da câmara no final de um longo corredor. Foi construída originalmente entre 3300 e 2900 aC, mais de 500 anos antes da Pirâmide de Quéops no Egito. Também precede Stonehenge em mais de 1.000 anos. No período Neolítico, Newgrange continuou como um local de cerimônias.

[10] Stonehenge (do inglês arcaico "*stone*" = pedra, e "*hencg*" = eixo) é um alinhamento megalítico da Idade do Bronze, localizado na planície de Salisbury, próximo a Amesbury, no condado de Wiltshire, no Sul da Inglaterra. Constituí-se no mais visitado e conhecido círculo de pedras britânico, e até hoje é incerta a origem da sua construção, bem como da sua função, mas acredita-se que era usado para estudos astronômicos, mágicos ou religiosos.

[11] Menir, também denominado perafita, é um monumento pré-histórico de pedra, cravado verticalmente no solo (ortóstato), às vezes de tamanho bem elevado. São encontrados, na sua maior parte, na Europa, África e Ásia. São considerados monumentos pré-históricos, com finalidades não muito conhecidas, podendo ser um culto à deuses, marcos territoriais, orientadores de locais, etc.

[12] Fonte: http://www.knowth.com/newgrange.htm

[13] Fonte: http://www.mythicalireland.com/ancientsites/newgrange

Figura 41: Sol sobre o Stonehenge, durante o solstício de inverno[14]

Figura 42: Menir dos Almendres, na cidade de Évora em Portugal[15]

O auge da Astronomia antiga foi na Grécia, de 600 a. C. a 400 d. C., em níveis só ultrapassados no século XVI [29]. Vários astrônomos contribuíram para o avanço desta ciência. Dentre eles é válido mencionar:

a) Tales de Mileto (~624 - 546 a.C.) introduziu na Grécia os fundamentos da Geometria e da Astronomia, trazidos do Egito. O cálculo da altura da pirâmide através das sombras só foi possível através de seus estudos de semelhança de triângulos que embassam a Trigonometria. Ele pensava que a Terra era um disco plano em uma vasta extensão de água.

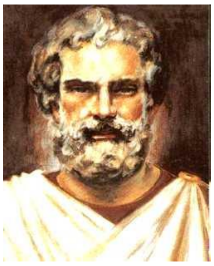


Figura 43: Tales de Mileto[16]

[14] Fonte: http://pt.wikipedia.org/wiki/Stonehenge
[15] Fonte: http://pt.wikipedia.org/wiki/Menir
[16] Fonte: http://www.portalsaofrancisco.com.br/alfa/tales-de-mileto/tales-de-mileto-1.php

b) Pitágoras de Samos (~572 - 497 a.C.) discípulo de Tales. Conjectura-se que tenha feito a primeira demonstração do teorema que leva seu nome: *"Em todo triângulo retângulo a área do quadrado construído sobre a hipotenusa é igual a soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos".* Deste teorema deriva a relação fundamental da Trigonometria.

A Escola Pitagórica, fundada no século V a. C., foi responsável por descobertas na acústica, elaborando uma lei de intervalos musicais. Essa lei relacionava os diapasões de notas emitidas por cordas distendidas, sob tensões iguais, aos comprimentos das cordas. Podemos tomar a lei dos intervalos musicais como um prenúncio do aparecimento das funções seno e cosseno no osciloscópio[17] do futuro para se estudar o som.

Pitágoras acreditava na esfericidade da Terra, da Lua e de outros corpos celestes. Achava que os planetas, o Sol, e a Lua eram transportados por esferas separadas da que carregava as estrelas. Foi o primeiro a chamar o céu de cosmos.

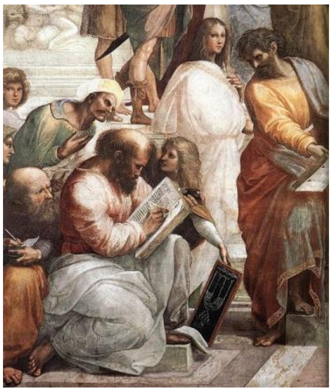


Figura 44: Pitágoras, na obra *A escola de Atenas* de Raffaello Sanzio (1509)[18]

c) Aristóteles de Estagira (384-322 a.C.) explicou que as fases da Lua dependem de quanto da parte da face da Lua iluminada pelo Sol está voltada para a Terra. Explicou, também, os eclipses: um eclipse do Sol ocorre quando a Lua passa entre a Terra e o Sol; um eclipse da Lua ocorre quando a Lua entra na sombra da Terra. Aristóteles argumentou a favor da esfericidade da Terra, já que a sombra da Terra na Lua durante um

[17] Instrumento de medida eletrônico que cria um gráfico bi-dimensional visível de uma ou mais diferenças de potencial. O eixo horizontal do ecrã (monitor) normalmente representa o tempo, tornando o instrumento útil para mostrar sinais periódicos. O eixo vertical comumente mostra a tensão. O monitor é constituído por um "ponto" que periodicamente "varre" a tela da esquerda para a direita.

[18] Fonte: http://pt.wikipedia.org/wiki/Pitágoras

eclipse lunar é sempre arredondada. Afirmava que o Universo é esférico e finito. Aperfeiçoou a teoria das esferas concêntricas de Eudoxus de Cnidus (408-355 a.C.), propondo em um de seus livros que "*o Universo é finito e esférico, ou não terá centro e não poderá se mover*."

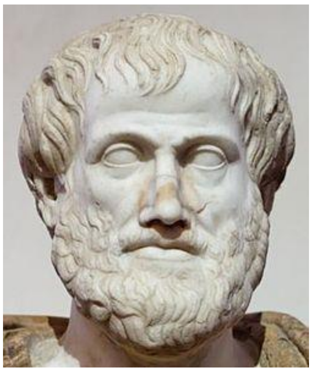


Figura 45: Estátua de Aristóteles[19]

d) Heraclides de Pontus (388-315 a.C.) propôs que a Terra gira diariamente sobre seu próprio eixo, que Vênus e Mercúrio orbitam o Sol e a existência de epiciclos.

Figura 46: Heraclides de Pontus[20]

e) Aristarco de Samos (310-230 a.C.) foi o primeiro a propor que a Terra se movia em volta do Sol, antecipando Copérnico em quase 2000 anos. Entre outras coisas, desenvolveu um método para determinar as distâncias relativas do Sol e da Lua à Terra e mediu os tamanhos relativos da Terra, do Sol e da Lua.

[19] Fonte: http://pt.wikipedia.org/wiki/Aristóteles
[20] Fonte: http://www.ghtc.usp.br

Figura 47: Aristarco de Samos[21]

f) Eratóstenes de Cirênia (276-194 a.C.), bibliotecário e diretor da Biblioteca Alexandrina de 240 a.C. a 194 a.C., foi o primeiro a medir o diâmetro da Terra.

Figura 48: Eratóstenes[22]

Ele notou que, na cidade egípcia de Siena (atualmente chamada de Aswân), no primeiro dia do verão, ao meio-dia, a luz solar atingia o fundo de um grande poço, ou seja, o Sol estava incidindo perpendicularmente à Terra em Siena. Já em Alexandria, situada ao norte de Siena, isso não ocorria; medindo o tamanho da sombra de um bastão na vertical, Eratóstenes observou que em Alexandria, no mesmo dia e hora, o Sol estava aproximadamente sete graus mais ao sul. A distância entre Alexandria e Siena era conhecida como de 5000 estádios. Um estádio era uma unidade de distância usada na Grécia antiga.

[21] Fonte: http://naciencias.blogspot.com.br/2010/12/aristarco-de-samos.html
[22] Fonte: http://jornaldocarol.blogspot.com.br

Figura 49: Eratóstenes e o raio da Terra[23]

Um camelo atravessa 100 estádios em um dia e viaja a cerca de 16 km/dia. Como 7 graus corresponde a 1/50 de um círculo (360 graus), Alexandria deveria estar a 1/50 da circunferência da Terra ao norte de Siena e a circunferência da Terra deveria ser 50×5000 estádios. Infelizmente, não é possível se ter certeza do valor do estádio usado por Eratóstenes, já que os gregos usavam diferentes tipos de estádios. Se ele utilizou um estádio equivalente a 1/6 km, o valor está a 1% do valor correto de 40000 km. O diâmetro da Terra é obtido dividindo-se a circunferência por π.

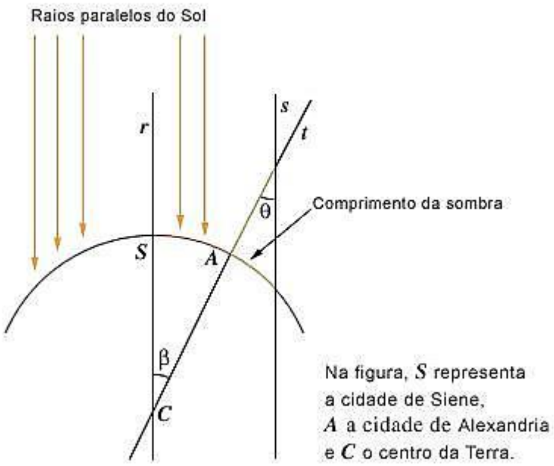


Figura 50: Diagrama de como Eratóstenes determinou o raio da Terra[24]

g) <u>Hiparco de Nicéia</u> (~180 a.C.-120 a.C.), considerado o maior astrônomo da era pré-cristã, construiu um observatório na ilha de Rodes, onde fez

[23] Fonte: http://jornaldocarol.blogspot.com.br
[24] Fonte: http://jornaldocarol.blogspot.com.br

observações durante o período de 147 a 127 a.C. Como resultado, ele compilou um catálogo com a posição no céu e a magnitude de 850 estrelas. A magnitude, que especificava o brilho da estrela, era dividida em seis categorias, de 1 a 6, sendo 1 a mais brilhante e 6 a mais fraca visível a olho nu. Hiparco deduziu corretamente a direção dos pólos celestes e até mesmo a precessão, que é a variação da direção do eixo de rotação da Terra devido à influência gravitacional da Lua e do Sol, que leva 26000 anos para completar um ciclo. Para deduzir a precessão, ele comparou as posições de várias estrelas com aquelas catalogadas por Timocharis de Alexandria e Aristyllus de Alexandria 150 anos antes (cerca de 283 a.C. 260 a.C.). Estes eram membros da Escola Alexandrina do século III a.C. e foram os primeiros a medir as distâncias das estrelas de pontos fixos no céu (coordenadas eclípticas[25]). Foram, também, dos primeiros a trabalhar na Biblioteca de Alexandria, que se chamava Museu, fundada pelo rei do Egito, Ptolémée Sóter I, em 305 a.C..

Figura 51: Hipaco[26]

Hiparco também deduziu o valor correto de 8/3 para a razão entre o tamanho da sombra da Terra e o tamanho da Lua e também que a Lua estava a 59 vezes o raio da Terra de distância, sendo que o valor correto é 60. Ele determinou a duração do ano com uma margem de erro de 6 minutos.

[25] Coordenadas eclípticas são coordenadas celestes para determinar a posição de um objeto celeste que tem como plano fundamental a eclíptica. A eclíptica é o plano da órbita da Terra ao redor do Sol, ou a órbita descrita neste plano. A razão do nome provém do fato que os eclipses somente são possíveis quando a Lua está muito próxima deste plano.

[26] Fonte: http://www.hislibris.com/foro-new/viewtopic.php?p=198360

Devido aos cálculos feitos em seus estudos da Astronomia, Hiparco escreveu na segunda metade do século II a. C. um tratado de doze livros em que se ocupou da construção do que deve ter sido a primeira tabela trigonométrica, incluindo uma tábua de cordas de uma série de ângulos de 0° a 180°, onde utilizou interpolação linear. Ele observou que num dado círculo a razão do arco para a corda diminui quando o arco diminui de 180° para 0°. Resolveu então associar a cada corda de um arco o ângulo central correspondente, o que representou um grande avanço na Astronomia, o que lhe deu o direito de ser chamado *"pai da Trigonometria".*

h) Cláudio Ptolomeu de Alexandria (85 d. C.-165). Depois de um longo intervalo de quase 300 anos sem que progresso algum acontecesse, não só na Astronomia, mas na Ciência como um todo, apareceu aquele que seria o último grande astrônomo da escola de Alexandria, Cláudio Ptolomeu de Alexandria, 85 d.C – 165 d.C., cujo nome está ligado à cidade natal, Ptolomais, situada às margens do rio Nilo.

Figura 52: Cláudio Ptolomeu[27]

Ptolomeu publicou por volta do ano 150 d. C, baseado nos estudos de Hiparco, *Syntaxis mathematica* (Coleção de Matemática), composta por treze livros relacionados à Astronomia e tendo como ferramenta básica a Trigonometria Esférica. Ali abordou a esfericidade da Terra, sistema geocêntrico por meio de epiciclos, teoria dos eclipses. Ainda encontra-se uma aproximação para π com quatro casas decimais, um catálogo com

[27] Fonte: http://www.passeiweb.com/na_ponta_lingua/sala_de_aula/fisica/mecanica/historia_da_mecanica/mecanica_hist_2_grecia_antiga

1.028 estrelas fixas, uma tábua de cordas e estudos sobre os planetas. Mais tarde, para distinguir este trabalho de outros, é associado a seu nome o superlativo *magiste* (o grande, o maior que. Quando da tradução para o árabe recebeu o prefixo *al* passando a se chamar *Almagiste* ou *Almagesto* para nós.

O Almagesto sobreviveu e por isso temos suas tabelas trigonométricas e também uma exposição dos métodos usados nas construções, o que é de grande importância para nós, visto que tanto daquela época se perdeu. Como disse Kenneky [37]:

> "Para os matemáticos o Almagesto tem interesse devido às identidades trigonométricas que Ptolomeu divisou para auxiliá-lo a reunir dados para sua tabela de cordas."

Figura 53: Reprodução de parte do Almagesto[28]

No Almagesto temos:

(a) Uma tabela mais completa que a de Hiparco, com ângulos de meio em meio grau, de 0° a 180°.

(b) O uso da base 60, com a circunferência dividida em 360° e o raio em 60 partes e frações sexagesimais, não só para expressar ângulos e sim para qualquer tipo de cálculo, com exceção dos de medida de tempo.

[28] Fonte: http://astro.if.ufrgs.br/antiga/antiga.htm

(c) O resultado que passou a ser conhecido como Teorema de Ptolomeu: *Se ABCD é um quadrilátero convexo inscrito num círculo, então a soma dos produtos dos lados opostos é igual ao produto das diagonais*.

A partir desse resultado, operando com as cordas dos arcos, Ptolomeu chegou a um equivalente das fórmulas de seno da soma e da diferença de dois arcos, isto é, $\text{sen}\ (a+b)$ e $\text{sen}\ (a\text{-}b)$. Especialmente a fórmula para a corda da diferença foi usada por ele para a construção da tabela trigonométrica.

(d) O uso, também usando cordas, do seno do arco metade:

$$\text{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}(1 - \cos\pi).$$

2.3.2 Cálculo de Distâncias Astronômicas

O método mais comum para se medir distâncias grandes e a pontos inacessíveis é a triangulação, pois sabendo um dos lados de um sistema de triângulos e seus ângulos, podemos calcular todos os lados.

Para melhor entender como é determinada a triangulação, observe o exemplo onde é representada uma das maneiras de medir a distância de uma árvore localizada do outro lado de um rio, sem atravessá-lo.

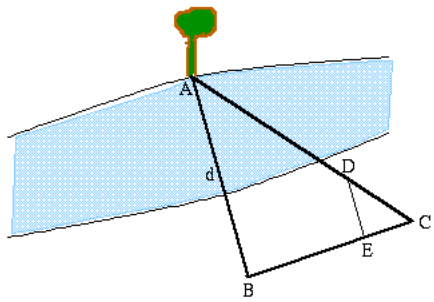


Figura 54: Diagrama com a triangulação que permite calcular a distância de uma árvore[29]

Tomando a árvore como um dos vértices, construímos os triângulos semelhantes ABC e DEC. O lado BC é a linha de base do triângulo grande, AB e AC são os lados, que são as direções do objeto (a árvore) vistas de cada extremidade da linha base. Logo:

$$\frac{\text{AB}}{\text{BC}} = \frac{\text{DE}}{\text{EC}}$$

[29] Fonte: http://astro.if.ufrgs.br

Como é possível medir BC, DE e EC, calcula-se o lado AB e, então, tem-se a distância até a árvore.

Observe que a direção da árvore vista de B é diferente da direção da árvore vista de C. Esse deslocamento aparente na direção do objeto observado devido à mudança de posição do observador chama-se *paralaxe* (do grego *paralaxis*, mudança). Quanto mais distante está o objeto, menor é a paralaxe [30].

Suponha, conforme o desenho a seguir, que o ponto O seja o objeto cuja distância eu quero medir (a árvore do exemplo acima), ou seja, $\overline{OD}$ é a medida procurada. Temos os seguintes elementos:

- ΔAOB é isósceles de vértice O.
- 2β é a medida do ângulo $A\hat{O}B$.
- AB é a linha de base do triângulo AOB.
- OD altura do triângulo AOB e, consequentemente, bissetriz do ângulo $\hat{O}$.
- D é ponto médio de AB.
- α_1 e α_2 são os ângulos entre a direção do objeto visto de cada extremidade da linha base e a direção de um objeto muito mais distante, tomado como referência (pode ser uma montanha no horizonte, no exemplo anterior).

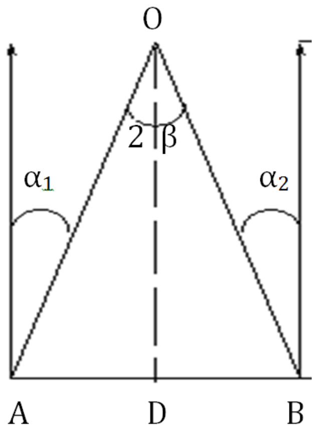


Figura 55: Representação geométrica do cálculo da distância de uma árvore

Pela trigonometria, temos,

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{AD}{OD}.$$

Como β é conhecido ($\beta = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}$), e AD também é conhecido, podemos medir a distância OD. Para ângulos pequenos, a tangente do ângulo é aproximadamente igual ao próprio ângulo medido em radianos. Se $\beta \leq 4°$, $\mathrm{tg}\,\beta \approx \beta\ (\mathrm{rad})$. Assim,

$$\mathrm{OD} = \frac{\mathrm{AD}}{\beta(\mathrm{rad})}$$

Como β é medido em radianos, β terá a mesma unidade de AD.

Para o triângulo retângulo de base AD, altura OD, hipotenusa AO,

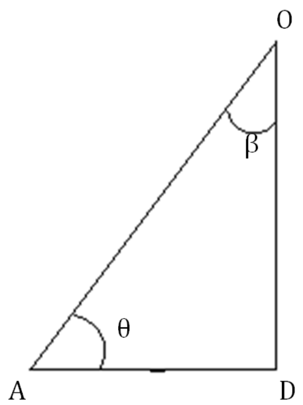


Figura 56

medimos o ângulo β entre AO e OD,

$$\mathrm{tg}\,\beta = \frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{OD}} \Longrightarrow \mathrm{OD} = \frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{tg}\,\beta} \cong \frac{\mathrm{AD}}{\beta\ (\mathrm{rad})}$$

para ângulos β menores que 4°.

O mesmo método de triangulação explicado acima é usado para medir as distâncias de objetos astronômicos. Mas como esses objetos estão muito distantes, é necessário escolher uma linha de base muito grande. Para medir a distância da Lua ou dos planetas mais próximos, por exemplo, pode-se usar o diâmetro da Terra como linha de base (paralaxe geocêntrica). Para se medir a distância de estrelas próximas, usa-se o diâmetro da órbita da Terra como linha de base [30].

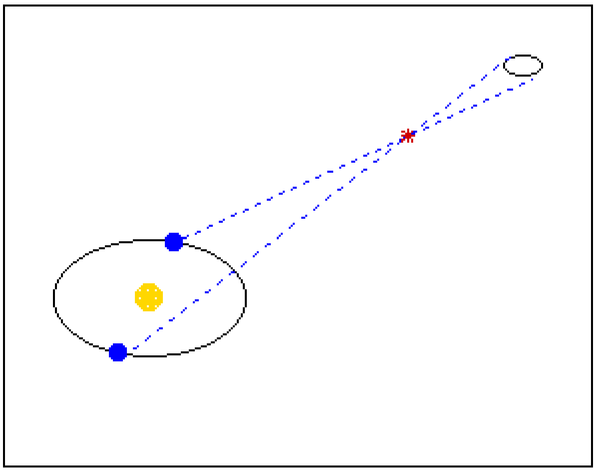


Figura 57: Triangulação tendo como linha de base a órbita da Terra[30]

2.3.2.1 Paralaxe Geocêntrica

Atualmente a determinação de distâncias de planetas é feita por radar e não mais por triangulação, mas antes da invenção do radar os astrônomos mediam as distâncias da Lua e de alguns planetas usando o diâmetro da Terra como linha de base [30]. A figura abaixo ilustra o problema para a determinação da distância da Lua.

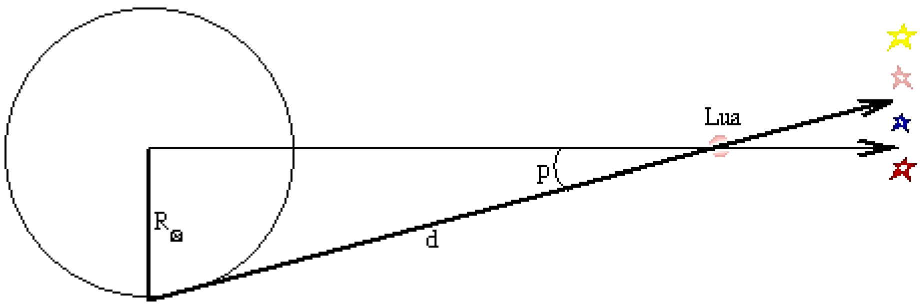


Figura 58: Triangulação tendo como linha de base a o raio da Terra[31]

[30] Fonte: http://astro.if.ufrgs.br
[31] Fonte: http://astro.if.ufrgs.br

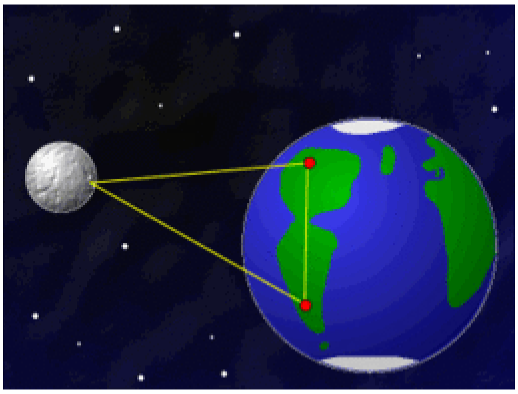


Figura 59: Triangulação para o cálculo da distância da Lua[32]

A posição da Lua em relação às estrelas distantes é medida duas vezes, em posições opostas na Terra, e a paralaxe corresponde à metade da variação total na direção observada dos dois lados opostos da Terra. Essa paralaxe é chamada *paralaxe geocêntrica* e é expressa por:

$$P\,(\mathrm{rad}) = \frac{R_{\mathrm{Terra}}}{d} \Rightarrow d = \frac{R_{\mathrm{Terra}}}{p\,(\mathrm{rad})},$$

para p sendo a paralaxe geocêntrica [27].

2.3.2.2 Paralaxe Heliocêntrica

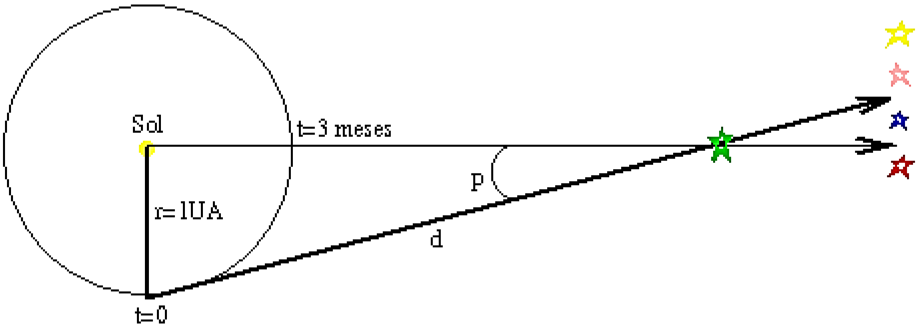


Figura 60: Triangulação usando a paralaxe heliocêntrica[33]

A paralaxe *heliocêntrica* é usada para medir a distância das estrelas mais próximas. À medida que a Terra gira em torno do Sol, podemos medir a direção de uma estrela em relação às estrelas de fundo quando a Terra está de um lado do Sol e tornamos a fazer a medida seis meses mais tarde,

[32] Fonte: http://astro.if.ufrgs.br
[33] Fonte: http://astro.if.ufrgs.br

quando a Terra está do outro lado do Sol. A metade do desvio total na posição da estrela corresponde à *paralaxe heliocêntrica*, que é expressa por:

$$\mathrm{p\ (rad)} = \frac{\text{raio da órbita da Terra}}{\mathrm{d}} \Longrightarrow \mathrm{d} = \frac{1\ \mathrm{U\ A}}{\mathrm{p\ (rad)}}$$

$\mathrm{U\ A}$: Unidade Astronômica, equivale a 1,496 x 10^8 km

para p sendo a paralaxe heliocêntrica [27].

2.4 A Etimologia das Funções Trigonométricas

Segundo Eves [26], muitos dos nomes e palavras usadas hoje em dia remontam ao período árabe. Os significados dos nomes atuais das funções trigonométricas, com exceção do *seno*, são claros a partir de sua interpretação geométrica, quando se coloca o ângulo no centro de um círculo de raio unitário. Assim, na figura abaixo, se o raio do círculo é uma unidade, os valores de $\mathrm{tg}\ \theta$ e $\sec\ \theta$ são dados pelos comprimentos do segmento *tangente* CD e pelo segmento de *secante* OD. C*otangente* significa simplesmente "*tangente do complemento*" e assim por diante. As funções tangente, cotangente, secante e cossecante foram conhecidas por vários outros nomes, surgindo esses particulares no máximo até o fim do século XVI.

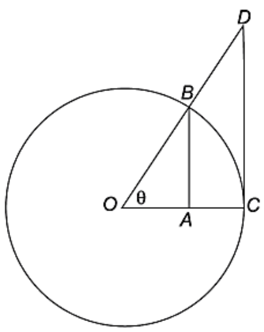


Figura 61

> "A origem da palavra *seno* é curiosa. Āryabhata usava *ardhā-jyā* ("semicorda") e também *jyā-ardhā* ("corda metade") e por brevidade escrevia apenas *jyā* ("corda"). Partindo de *jyā* os árabes foneticamente derivaram *jiba* que, devido à pratica entre eles de se omitir as vogais, se escrevia *jb*. Afora seu significado técnico, hoje *jiba* é uma palavra que não tem sentido em árabe. Posteriormente, escritores que se depararam com *jb* como abreviação da palavra sem sentido *jiba* passaram a usar *jaib* que faz parte do vocabulário árabe e que significa "enseada" ou "baia".

> Mais tarde ainda, ao fazer a tradução de *jaib*para o latim, Gerardo de Cremona empregou o equivalente latino *sinus*, de onde vem nossa palavra atual *seno*."(EVES [23])

Deve-se a Edmund Günter[34], em 1620 o termo cosseno para seno do complemento de um ângulo. Günter sugeriu combinar os termos "complemento" e "seno" em "co-sinus", que logo foi modificado para *cosinus* – em português "cosseno" [37].

Em 1626, Albert Girard[35] publicou um tratado sobre Trigonometria contendo as primeiras abreviaturas *sen*, *cos* e *tag*. Simbolizava o seno do ângulo A pelo itálico maiúsculo *A*. Embora a abreviação "sin" (em português "sen") aparece num esboço de Günter em 1626, ela só foi publicada em livro em 1634 [37].

Os conceitos de tangente e cotangente emergiram das necessidades mais modestas da medição de alturas e distâncias. Precedendo as funções tangente e cotangente havia as ideias associadas a sombras projetadas por vara vertical ou gnômon de relógio de sol, usados no Egito já em 1500 a. C. [37].

Embora os termos tangente e cotangente só tenham sido cunhados mais tarde, em 1551, o matemático autríaco Rheticus definiu explicitamente cada uma dessas duas funções como sendo uma razão. Em seu livro *"Canom Doctrinae Triangulorum"* as seis funções trigonométricas foram definidas como funções do ângulo, em vez de funções do arco, e subentendidas como razões pela primeira vez, embora ele não tenha dado nomes para seno, cosseno ou cossecante, exceto *perpendiculum*, *basis* e *hypotenusa* [20].

Tomas Fincke (1561-1656) matemático e físico dinamarquês, foi professor da Universidade de Copenhague por mais de 60 anos. Sua realização duradoura é encontrada em seu livro "*Geometria rotundi*", no qual ele apresenta os nomes modernos das funções trigonométricas tangente e secante. O nome tangente deve-se talvez porque a sombra vertical projetada por um círculo esteja situada ao longo da tangente a esse circulo [20].

---

[34] (1581-1626) Matemático inglês, fez inúmeras contribuições para a topografia, matemática e astronomia. Suas contribuições feitas à Trigonometria foram aplicadas à topografia. Foi um dos primeiros cientistas a descobrir a existência da declinação magnética da terra.

[35] (1595-1632) Era francês, mas emigrou como refugiado religioso para Holanda. Trabalhou em Álgebra, Trigonometria e Aritmética.

Em 1620 Edmund Günter estabeleceu o equivalente latino "cotangente de *A*" para "complemente tangente of *A*", que significa "tangente complementar de A". Em 1674 Jonas Moore[36] criou a abreviação "cot" para co-tangente [37].

2.5 O Renascimento da Trigonometria como Conhecimento Independente da Astronomia

Na Europa, a instituição da Trigonometria como ciência autônoma, em relação à Astronomia, é iniciada através da tradução e publicação dos manuscritos clássicos, bem como da elaboração de uma introdução completa à Trigonometria. Merece ser mencionado o mais capaz e influente matemático do século XV, Johann Müller (1436-1476), geralmente conhecido por Regiomontanus, que tomou para si a tarefa de completar a tradução do *Almagesto* de Ptolomeu. Traduziu também, do grego, trabalhos de Apolônio[37], Herão[38] e Arquimedes[39]. Seu tratado *De triangulis omnimodis,* escrito por volta de 1464, mas publicado postumamente em 1533, é a mais importante de suas obras. Trata-se da primeira exposição europeia sistemática de trigonometria plana e esférica, num tratamento independente da Astronomia que marcou o renascimento da Trigonometria na Europa [20].

Mais tarde, em meados do século XVI, François Viète[40], advogado francês dedicado à pesquisa matemática, se destacou por adicionar um tratamento analítico à Trigonometria, em 1580.

Viète iniciou o desenvolvimento sistemático do cálculo de medidas de lados e ângulos nos triângulos planos e esféricos, aproximados até minutos, e com a ajuda de todas as seis funções trigonométricas. É dele a ideia de

---

[36] (1627-1679) Nasceu na Inglaterra e foi um dos fundadores da Escola Real de Matemática no Hospital de Cristo. Escreveu as seções sobre Aritmética, Geometria, Trigonometria e Cosmografia de um trabalho matemático destino a Escola Real de Matemática, *Um novo sistema de Mathematicks*, que só foi publicado em 1681.

[37] (262 -194 a. C.) Matemático e astrônomo grego da escola de Alexandria. Apolônio nasceu em Perga, no sul da Ásia Menor. Foi um dos gigantes da matemática do século III a. C. Embora fosse um astrônomo notável, sua fama se deve principalmente ao seu tratado a *Secções cônicas*.

[38] Há controvérsia a respeito da época em exata em que ele viveu, recentemente tem sido colocado na segunda metade do século I a. C. Ele se empenhou em fornecer uma fundamentação científica para a engenharia e a agrimensura. Parte de sua obra ocupa-se amplamente de problemas de mensuração.

[39] Arquimedes é natural da cidade de Siracusa (287-212 a. C.) figura entre os maiores matemáticos de todos os tempos, talvez o maior da Antiguidade. Seus trabalhos são obras-primas de exposição matemática com grande originalidade, habilidade computacional e rigor nas demonstrações.

[40] (1540-1603) Matemático francês apaixonado por álgebra, foi responsável pela introdução da primeira notação algébrica sistematizada, além de contribuir para a teoria das equações.

decompor em triângulos retângulos os triângulos oblíquos, para determinar todas as medidas dos seus lados e ângulos. Isto está em sua obra "*Canon Mathematicus*". No livro "*Variorum de rebus mathematicis*" aparece um equivalente da nossa lei das tangentes $\frac{\mathrm{tg}\,(A+B)}{\mathrm{tg}\,(A-B)} = \frac{a+b}{a-b}$, com A e B ângulos e a e b os arcos respectivos. Na verdade esta relação só foi publicada em 1583 pelo matemático dinamarquês Thomas Fincke, no seu "*Geometria Rotundi*", em Basel, apesar de ser devida a Viète [20].

A palavra **trigonometria** aparece pela primeira vez em 1595 como título de um tratado publicado pelo matemático Pitiscus[41], no qual ele corrige as tábuas de Rhaeticus e moderniza o tratamento do assunto [6].

Vários matemáticos importantes contribuíram para a consolidação da Trigonometria como ramo da Matemática independente da Astronomia. Podemos citar: o britânico Napier que estabeleceu regras para triângulos esféricos; Jonh Newton (1622-1678) que publicou *"Trigonometria Britannica"*, em 1658, o mais completo livro de seu tempo sobre o assunto; o inglês John Wallis (1616-1703) que expressou fórmulas usando equações em vez de proporções e trabalhou com séries infinitas; Sir Issac Newton (1642-1727) que trabalhou com séries infinitas e expandiu $\mathrm{arcsen}\ x$ em séries e, por reversão, deduziu a série para $\mathrm{sen}\,x$.

Newton comunicou a Leibniz[42] a fórmula geral para $\mathrm{sen}\,(nx)$ e $\cos\,(nx)$ o que abriu a perspectiva para o $\mathrm{sen}\,x$ e $\cos x$ surgirem como números e não como grandezas.

Todo esse processo culmina com a introdução do conceito de seno, cosseno e tangente como números reais, feita por Leonhard Euler[43], no século XVIII, quando ele passa a considerar a circunferência trigonométrica de raio unitário [6].

Uma ideia genial de Euler foi criar a função $\mathcal{E}$, denominada função de Euler. Ela associa a cada número um ponto de um círculo C_1 unitário e centrado na origem do plano cartesiano. Seu domínio é o conjunto $\mathbb{R}$ e o

[41] (1561-1613) Nasceu na Alemanha, foi matemático, astrônomo e teólogo.
[42] (1M646-1716) Nasceu na Alemanha, estudou Teologia, Direito, Filosofia e Matemática na Universidade. Para muitos historiadores ele é tido como o último erudito que possui conhecimento universal. Ao lado de Newton criou o Cálculo Integral e Cálculo Diferencial. Inventou a primeira máquina de calcular.
[43] (1707-1783) Nasceu na Suíça e foi o matemático mais prolífico na história. Entre seus vários campos de atuação foi o pioneiro no campo da Topologia.

contradomínio é C_1. A função $\mathcal{E}: \mathbb{R} \rightarrow C_1$, associa cada $x \in \mathbb{R}$ um ponto $P \in C_1$, $P = (a,b)$ pertence a C_1, se e somente se, $a^2 + b^2 = 1$ [20].

O tratamento analítico das funções trigonométricas está no seu livro *"Introductio in Analysin Infinitorum"*, de 1748, considerado a obra chave da Análise Matemática. Nele, o seno deixou de ser uma grandeza e adquiriu o status de número obtido pela ordenada de um ponto de um circulo unitário ou o número definido pela série: $\text{sen}\, x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \ldots$. Ele mostrou que $\text{sen}\, x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$ e $\cos x \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$, onde i é a unidade imaginária, possibilitando definir as funções seno e cosseno a partir dessas relações, inserindo-as no campo dos números complexos [20].

A representação das relações trigonométricas na circunferência de raio unitário levou os matemáticos a estudarem seu comportamento, esboçando-as como funções, sendo Gilles Roberval (matemático francês do século XVII) o primeiro a esboçar a curva do seno. O estudo das funções trigonométricas teve seu ápice com francês Joseph Fourier (1768-1830), no século XIX, no campo dos movimentos periódicos [50].

Ao longo de sua vida Fourier demonstrou o seu interesse em Matemática e Física Matemática. Ele ficou famoso pela sua *Theorie analytique de la Chaleur* (1822), um tratamento matemático da teoria de calor. Ele estabeleceu a equação diferencial parcial administrando a difusão do calor e resolveu isto usando série infinita de funções trigonométricas. Apesar destas terem sido usadas antes, Fourier as investigou em detalhe muito maior. A pesquisa dele, inicialmente criticada por sua falta de rigor, foi mostrada ser válida posteriormente. Proveu o ímpeto para o mais recente trabalho em séries trigonométricas e a teoria de funções de uma variável real.

Os fenômenos periódicos, aqueles que se repetem em intervalos regulares, são encontrados em várias áreas, como Música (a teoria da ressonância afirma a natureza matemática nas relações harmônicas), Acústica (no estudo dos meios de propagação do som), Eletricidade (no estudo do eletromagnetismo, equações matemática preveem ondas eletromagnéticas), Mecânica (no movimento circular uniforme), e nelas as funções trigonométricas são de grande aplicação.

Muito distante de seu embrião no triângulo retângulo, agora a Trigonometria toma proporções ampliadas, constituindo-se como um ramo da Matemática independente e as funções trigonométricas expandem seu campo de aplicação.

Capítulo 3

A TRIGONOMETRIA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Neste capítulo apresentamos um apanhado geral das propostas curriculares existentes no país e no Estado de Minas Gerais para a Educação Básica tendo como ponto central as propostas e orientações acerca do ensino de Trigonometria.

Iniciamos citando alguns acontecimentos e reformas que antecederam e influenciaram a Educação no Brasil.

Na Seção 3.3 trazemos um breve resumo do conteúdo de Trigonometria presente nos livros didáticos do Ensino Fundamental e Médio.

Finalizamos este capítulo com algumas considerações sobre a importância de se trabalhar com a resolução de problemas como forma de superar as dificuldades no processo de ensino e aprendizagem e as vantagens de se trabalhar com Modelagem Matemática.

3.1 Breve Trajetória da Reforma no Ensino

No Brasil a reforma do Ensino iniciou na década de 20, os movimentos de reorganização curricular não tiveram força suficiente para mudar a prática docente dos professores para eliminar o caráter elitista desse ensino bem como melhor sua qualidade. Nesse período o Ensino de Matemática era marcado pelos altos índices de retenção, pela formalização precoce de conceitos, pela excessiva preocupação com o treino de habilidades e mecanização de processos sem compreensão [11].

Nas décadas de 60/70, o ensino de Matemática no Brasil, assim como em outros países, foi influenciado por um movimento de renovação que ficou conhecido como Matemática Moderna. O ensino passou a ter preocupação excessiva com formalizações, distanciando-se das questões práticas.

Em 1980, o *National Council of Teachers of Mathematics* dos Estados Unidos, apresentou um documento com recomendações sobre o Ensino de Matemática. Nele a resolução de problemas era destacada como o foco do ensino. Também a compreensão da relevância de aspectos sociais, antropológicos, linguísticos, além dos cognitivos, na aprendizagem de Matemática gerou novos rumos às discussões curriculares.

Essas ideias influenciaram as reformas que ocorreram em todo mundo, inclusive no Brasil que as incorporou nas propostas curriculares de Secretarias de Estados e Secretarias Municipais de Educação que, apesar de alcançarem alguns bons resultados, não obterem sucesso, como salienta os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática [11].

> "No entanto, é importante salientar que ainda hoje nota-se, por exemplo, a insistência no trabalho com a linguagem da teoria dos conjuntos nas séries iniciais, a formalização precoce de conceitos, o predomínio absoluto da Álgebra nas séries finais e as poucas aplicações práticas da Matemática no ensino fundamental." (PCN-Matemática [11])

Em 1996 foi aprovada a nova Lei de Diretrizes e Bases da Educação[44] – LDB (Lei 9394/96) que estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. Nesta lei, em seu Artigo 3º, dentre outros princípios, consta:

- liberdade de aprender, ensinar, pesquisar e divulgar a cultura, o pensamento, a arte e o saber;
- pluralismo de ideias e de concepções pedagógicas;
- valorização do profissional da educação escolar;
- garantia de padrão de qualidade e
- valorização da experiência extraescolar.

Outro aspecto importante garantido pela Lei 9394/96, em seu Artigo 21, foi situar o Ensino Médio como etapa final da Educação Básica,

[44] Disponível em: http://portal.mec.gov.br/arquivos/pdf/ldb.pdf

definindo-a como a conclusão de um período de escolarização de caráter geral, que tem por finalidade o desenvolvimento do indivíduo, assegurando-lhe a formação comum indispensável para o exercício da cidadania, fornecendo-lhe os meios para progredir no trabalho e em estudos posteriores.

A partir de então várias discussões sobre o ensino foram se difundindo pelo território nacional e propostas e orientações foram publicadas para nortear a educação no país, inclusive a do Ensino de Matemática.

3.2 As Propostas Curriculares Vigentes

Hoje as escolas públicas brasileiras têm como referencial curricular os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), para o Ensino Fundamental e o PCN+ Ensino Médio (Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais) para o Ensino Médio. No entanto, cada unidade federativa tem autonomia para elaborar e estabelecer suas propostas curriculares. Em Minas Gerais, as escolas públicas adotam as propostas apresentadas no documento intitulado Conteúdos Básicos Comuns (CBC).

3.2.1 Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) – Ensino Fundamental

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) é um documento elaborado pela Secretaria de Educação Fundamental do Ministério da Educação e do Desporto, publicado em 1998, contendo um referencial teórico nacional para o Ensino Fundamental.

Os PCN foram desenvolvidos com o intuito de promover uma transformação no ensino para que este atenda às demandas da sociedade atual. Tal demanda impõe uma revisão dos currículos, que orientam o trabalho cotidiano realizado pelos professores e especialistas em educação do nosso país.

O termo *parâmetro* traduz a ideia de que, ao mesmo tempo em que se pressupõem e se respeitam as diversidades regionais existentes no território nacional, se constroem referências nacionais que apontam os pontos comuns que devem fazer parte do processo educacional em todas as regiões brasileiras.

Já o termo *currículo* possui diferentes significados nos diversos contextos da Pedagogia. Por exemplo, pode significar: matérias constantes de um curso, programas de conteúdos de cada disciplina, assim como a expressão de princípios e metas do projeto educativo.

Dentre os objetivos apresentados nos PCN o eixo principal é o desenvolvimento de capacidades do estudante, de modo que ele seja capaz de ser sujeito de sua própria formação, em um complexo processo interativo em que intervêm estudantes, professores e conhecimento.

De acordo com os PCN os conteúdos de Matemática são organizados em blocos:

1º) Números e Operações – no campo da Aritmética e da Álgebra.

2º) Espaço e Forma – no campo da Geometria

3º) Grandezas e Medidas – que permite interligações entre os campos da Aritmética, Álgebra, Geometria e de outros campos do conhecimento.

4º) Tratamento da Informação – que envolve Estatística, Probabilidade e Combinatória.

Ao analisarmos os PCN de Matemática para os anos finais do Ensino Fundamental, observamos que a Trigonometria não é apresentada em nenhum de seus blocos, ou seja, as noções básicas de Trigonometria de acordo com a proposta curricular nacional não são de relevância para a formação acadêmica dos estudantes nessa fase de escolarização.

A pouca importância dada a Trigonometria é percebida pela ausência deste conteúdo na Matriz de Referência de Matemática da ANRESC – Avaliação Nacional do Rendimento Escolar (Prova Brasil)[45], que compõe o Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB), que tem como foco a resolução de problemas. A Prova Brasil, aplicada aos estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental, tem como objetivo verificar o desenvolvimento dessa fase escolar em todo o território brasileiro [17].

[45] Disponível em: http://portal.mec.gov.br/dmdocuments/prova%20brasil_matriz2.pdf

3.2.2 Propostas, Orientações e Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio

Ao longo da história da educação brasileira, o Ensino Médio apresenta o nível de maior complexidade na estruturação de política públicas capazes de superar os desafios impostos pela sociedade moderna, em consequência de sua própria natureza enquanto etapa intermediária entre Ensino Fundamental e Educação Superior, assim como a particularidade de atender adolescentes, jovens e adultos em suas diferentes expectativas frente à educação.

Em 1997, o MEC apresenta o primeiro documento contendo propostas curriculares: os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCNs Ensino Médio.

A partir daí outras publicações foram lançadas contendo propostas orientações e direcionadas ao Ensino Médio buscando contribuir para a implementação das reformas educacionais definidas pela LDB 9394/96. Dentre elas podemos citar o PCN 2000 Ensino Médio [12], contendo uma reformulação do documento original, PCN+ Ensino Médio [15], complementar às orientações do PCN, sem pretensões normativas, e as Orientações Curriculares para o Ensino Médio – PCNEM [14].

Estas propostas e orientações sugerem que sejam asseguradas as aplicações da Trigonometria na resolução de problemas que envolvem medições, em especial o cálculo de distâncias inacessíveis, e para construir modelos que correspondam a fenômenos periódicos. Dessa forma, o estudo deve se ater às funções seno, cosseno e tangente com ênfase ao seu estudo do triângulo retângulo, do triângulo qualquer, na primeira volta do círculo trigonométrico e à perspectiva histórica das aplicações das relações trigonométricas.

Outro aspecto importante do estudo deste tema, abordado nas propostas, é o fato de esse conhecimento ter sido responsável pelo avanço tecnológico em diferentes épocas, como é o caso do período das navegações ou, atualmente, na agrimensura, o que permite aos estudantes perceberem o conhecimento matemático como forma de resolver problemas que os homens se propuseram e continuam se propondo. Isto evidencia a importância de se trabalhar a História da Matemática em sala de aula.

É sugerido também que, na introdução das razões trigonométricas seno e cosseno, inicialmente para ângulos com medida entre 0° e 90°, deve-se ressaltar que são as propriedades de semelhança de triângulos que dão sentido a essas definições. A partir disto, é introduzida a definição das razões para ângulos de medida entre 90° e 180°. A partir das definições e de propriedades básicas de triângulos, devem ser justificados os valores de seno e cosseno relativos aos ângulos de medida 30°, 45° e 60°.

As propostas salientam que é preciso atenção à transição do seno e do cosseno no triângulo retângulo (em que a medida do ângulo é dada em graus), para o seno e o cosseno, definidos como as coordenadas de um ponto que percorre um arco do círculo de raio unitário com medida em radianos. As funções trigonométricas devem ser entendidas como extensões das razões trigonométricas então definidas para ângulos com medida entre 0° e 180°. Os estudantes devem ter a oportunidade de traçar gráficos referentes às funções trigonométricas, aqui se entendendo que, quando se escreve $f(x) = \text{seno}(x)$, usualmente a variável x corresponde à medida de arco de círculo tomada em radianos. As funções trigonométricas seno e cosseno também devem ser associadas aos fenômenos que apresentam comportamento periódico.

Na matriz de referência de Matemática do SAEB para o Ensino Médio[46] as habilidades necessárias ao estudante concluinte do Ensino Médio no que se refere à aprendizagem de Trigonometria são:

a) resolver problemas que envolvam razões trigonométricas no triângulo retângulo (seno, cosseno, tangente) e

b) identificar gráficos e funções trigonométricas (seno, cosseno, tangente), reconhecendo suas propriedades.

Já na Matriz de Referência de Matemática[47] do Exame Nacional do Ensino Médio - ENEM, encontramos em conhecimentos algébricos referência ao estudo de Trigonometria: relações no ciclo trigonométrico e funções trigonométricas.

---

[46] Disponível em: http://portal.mec.gov.br/dmdocuments/saeb_matriz2.pdf
[47] Disponível em: http://portal.mec.gov.br/index.php?Itemid=310+enen.br

O professor deve ter conhecimento das propostas curriculares vigentes para garantir ao seu aluno acesso ao conhecimento básico que se espera desta fase de escolarização.

No PCN+ Ensino Médio [15] é apresentado claramente uma crítica ao ensino da Trigonometria enfatizando a necessidade de se trabalhar focando nas aplicações e não no cálculo algébrico:

> “apesar de sua importância, tradicionalmente a **trigonometria** é apresentada desconectada das aplicações, investindo-se muito tempo no cálculo algébrico das identidades e equações em detrimento dos aspectos importantes das funções trigonométricas e da análise de seus gráficos.”

3.2.3 Proposta Curricular do Estado de Minas Gerais: CBC

Os Conteúdos Básicos Comuns – CBC foram desenvolvidos pela Secretaria de Estado da Educação de Minas Gerais (SEE-MG) com a participação de especialistas em ensino das diversas disciplinas. Seu conteúdo visa apoiar o professor no ensino dos tópicos e habilidades previstos nas Propostas Curriculares da Educação Básica, com uma visão operacional focada na aplicação dos mesmos em sala de aula.

O CBC é amplo e apresenta os conhecimentos, habilidades e competências a serem adquiridas e desenvolvidas por todos os estudantes matriculados nos anos finais do Ensino Fundamental e Médio das escolas públicas mineiras.

Para os anos finais do Ensino Fundamental, o conteúdo de Matemática é organizado pelo CBC em quatro Eixos Temáticos (*Números e Operações*, *Álgebra*, *Espaço e Forma* e *Tratamento de Dados*) que por sua vez são divididos em Temas e por fim em Tópicos.

Para esta etapa de escolarização observamos que o conteúdo de Trigonometria é apresentado como tópico complementar, ou seja, não-obrigatório, fazendo parte do eixo temático Espaço e Forma, dentro do tema Relações Geométricas entre Figuras Planas, no tópico Complementar VI intitulado Semelhança e Trigonometria no Triângulo Retângulo, cujas habilidades a serem desenvolvidas são:

a) Utilizar semelhança de triângulos para descrever as relações métricas no triângulo retângulo.

b) Resolver problemas que envolvam as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente.

Para o Ensino Médio, o conteúdo é organizado e estruturado da mesma forma que os conteúdos do Ensino Fundamental, tendo os seguintes eixos temáticos: *Números, Contagem e Análise de Dados*, *Funções Elementares e Modelagem* e *Geometria e Medidas*, que se repetem ao longo dos três anos do Ensino Médio. Os tópicos destinados ao primeiro ano são destinados à formação básica, os do segundo ano são destinados ao aprofundamento e os do terceiro à complementação da formação.

O conteúdo de Trigonometria é encontrado nos três anos de escolarização, distribuído da seguinte maneira:

ANO	Tópicos	Habilidades
1º	15 - Trigonometria no Triângulo Retângulo	15.1 - Reconhecer o seno, o cosseno e a tangente como razões se semelhança e as relações entre elas. 15.2 - Resolver problemas que envolvam as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente. 15.3 - Calcular o seno, cosseno e tangente de 30°, 45° e 60°.
2º	28 - Trigonometria no Círculo e Funções Trigonométricas	28.1 - Calcular o seno, o cosseno e a tangente dos arcos notáveis: 0°, 90°, 180°, 270° e 360°. 28.2 - Resolver problemas utilizando a relação entre radianos e graus. 28.3 - Reconhecer no círculo trigonométrico a variação de sinais, crescimento e decrescimento das funções seno e cosseno. 28.4 - Identificar no círculo trigonométrico o período das funções seno e cosseno
3º	42 - Funções Trigonométricas	42.1 - Identificar o gráfico das funções seno, cosseno e tangente. 42.2 - Reconhecer o período de funções trigonométricas. 42.3 - Resolver equações trigonométricas simples.
	45 – Funções Trigonométricas	45.1 – Resolver problemas que envolvam funções trigonométricas da soma e da diferença de arcos. 45.2 – Resolver problemas que envolvam a lei dos senos. 45.3 – Resolver problemas que envolvam a lei dos cossenos. 45.4 – Identificar os gráficos das funções seno e cosseno. 45.5 – Identificar o período, a frequência e a amplitude de uma onda senoidal.

Visando a melhoria da qualidade da educação no estado de Minas Gerais, a SEE-MG implantou o SIMAVE -Sistema Mineiro de Avaliação da

Educação Pública. É um programa que visa diagnosticar o desempenho dos alunos em diferentes áreas do conhecimento e níveis de escolaridade bem como subsidiar a implementação, a (re)formulação e o monitoramento de políticas educacionais.

Como parte integrante desse sistema de avaliação, temos o PROEB - Programa de Avaliação da Rede Pública de Educação Básica: avaliação em larga escala que verifica a eficiência e a qualidade do ensino no estado de Minas Gerais, a partir dos resultados do desempenho das escolas nos anos finais do Ensino Fundamental e Médio. São avaliados o 5º e o 9º anos do Ensino Fundamental e o 3º ano do Ensino Médio em Língua Portuguesa e Matemática.

A matriz de referência de Matemática do SIMAVE/PROEB[48] é apenas uma amostra representativa do CBC, ou seja, ela surge do CBC e contempla apenas aquelas habilidades consideradas fundamentais e possíveis de serem alocadas em testes de múltipla escolha.

Assim, a Trigonometria é encontrada apenas na matriz de referência do 3º ano do Ensino Médio [43], exigindo apenas as seguintes habilidades:

a) resolver situações-problemas, no plano, que envolvam razão trigonométrica no triângulo retângulo (seno, cosseno, tangente);

b) Identificar arcos no círculo trigonométrico;

c) relacionar medidas em graus e radianos e

d) aplicar relações entre as razões trigonométricas no círculo trigonométrico.

3.3 Trigonometria nos Livros Didáticos

Apesar do ensino da Trigonometria não ser obrigatório no Ensino Fundamental de acordo com os PCN e CBC, os livros didáticos destinados ao 9º ano do Ensino Fundamental trazem um capítulo ou dois destinados a ele, tendo como foco a Trigonometria no Triângulo Retângulo, definindo as razões trigonométricas a partir da semelhança de triângulos.

Já nos livros destinados ao Ensino Médio percebemos que os conteúdos referentes ao ensino da Trigonometria vão além dos sugeridos

[48] Disponível em: http://www.simave.caedufjf.net/proeb/matriz-curricular

pelas propostas e orientações curriculares. Geralmente iniciam com a retomada da Trigonometria no Triângulo Retângulo.

No Apêndice se encontra a análise do conteúdo de Trigonometria em alguns livros destinados à Educação Básica.

3.4 Resolução de Problemas na Trigonometria

Segundo dados do Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (SAEB), em 2009, da amostra dos estudantes avaliados apenas 11% apresentaram um aprendizado adequado ao terceiro ano do Ensino Médio. Esse resultado negativo reflete a situação da Educação Básica no Brasil e demonstra que algo não está funcionando no Ensino de Matemática no país [45].

> "Os obstáculos relacionados ao ensino de Matemática decorrem em parte de um ensino baseado em transmissão mecanizada dos conteúdos descontextualizados e pouco desafiadores de pensamento e à inteligência dos estudantes". (Revista SIMAVE/PROEB [45])

Ao analisarmos as propostas curriculares vigentes verificamos que a principal orientação metodológica para reverter a situação do Ensino de Matemática no Brasil em todos os níveis é a valorização da resolução de problemas focados em situações concretas dentro, sempre que possível, do contexto sociocultural dos estudantes.

Por situação-problema entendemos problemas que envolvam o processo de tradução do enunciado, seja contextualizado ou não, em linguagem matemática, e a tomada de decisão sobre quais ferramentas matemáticas serão usadas em sua resolução – *modelagem* [44].

Segundo Dante [23], a Resolução de Problemas deve ter por meta:

- fazer o aluno pensar;
- desenvolver o raciocínio lógico do aluno;
- ensinar o aluno a enfrentar situações novas;
- levar o aluno a conhecer as primeira aplicações da Matemática;
- tornar as aulas mais interessantes e motivadoras.

Para que a resolução de problema se torne eficaz no processo de aprendizagem o professor deve atuar como mediador e organizador da aprendizagem dos estudantes: encorajar a busca de soluções, valorizar os processos de pensamento, incentivar a comunicação matemática e envolver todos em tarefas ricas e significativas do ponto de vista intelectual [43].

Ao propor problemas em sala de aula o professor deve estar atento em iniciar pelos mais simples e aos poucos chegar aos mais complexos, fortalecendo assim a autoestima e a autoconfiança dos estudantes. Também deve apresentar problemas que estejam dentro de um contexto bem estruturado e objetivo, como sugere Ausubel:

> “deve-se reconhecer que soluções de problemas e experimentos não são experiências genuinamente significativas, a menos que satisfaçam duas condições. Primeiramente, devem ser construídas sob uma base de princípios e conceitos claramente compreensíveis; em segundo lugar, as operações envolvidas devem ser significativas.” [4]

O PCN de Matemática [11] ressalta que se deve estimular o aluno a questionar sua própria resposta, a questionar o problema, a transformar um dado problema numa fonte de novos problemas, a formular problemas a partir de determinadas informações, a analisar problemas abertos, os que admitem diferentes respostas em função de certas condições, evidencia uma concepção de ensino e aprendizagem não pela mera reprodução de conhecimento, mas pela via da ação reflexiva que constrói conhecimentos.

Neste sentido cabe também ao professor valorizar as tentativas que levam ao erro, pois novas ideias e diferentes caminhos são gerados a partir do momento que o estudante é encorajado a se aventurar e arriscar na resolução do problema proposto. Pois segundo Ausubel:

> “Nem a ‘descoberta’ da solução correta para problemas de matemática e ciência, sem a compreensão real das operações envolvidas, contribui para o conhecimento ou a capacidade de solucionar problemas. Os estudantes realizam esta última façanha apenas memorizando automaticamente problemas típicos e procedimentos mecânicos para a manipulação de símbolos algébricos.” [4]

A resolução de problemas tem papel central no ensino-aprendizagem e há uma ressignificação do que se considera básico em termos de ensino e aprendizagem para a disciplina. Em linhas gerais, se pode dizer que os conhecimentos matemáticos passam a ser vistos como meios para compreender e transformar a realidade, o que produz impactos sobre as dinâmicas na sala de aula: os estudantes devem fazer observações sistemáticas de aspectos qualitativos e quantitativos da realidade e ser habilitados para selecionar, organizar e produzir informações relevantes. Em suma, ganha força a ideia de que a função do ensino é valorizar a construção de competências básicas necessárias ao cidadão, em detrimento do ensino meramente propedêutico [45].

Na Educação Básica, o ensino de Trigonometria através da resolução de problemas remete às suas origens onde seu uso estava atrelado a questões de ordem prática. Nesta perspectiva propor situações onde os estudantes irão determinar alturas pela semelhança de triângulos, reproduzindo o feito de Tales ao medir a altura da pirâmide, e usando a Trigonometria, através da tangente em um triangulo retângulo, são de grande importância. Esse tipo de atividade vai ao encontro do que é proposto pelas orientações curriculares que sugerem que o ensino deve enfatizar a perspectiva histórica do assunto a ser trabalhado.

A inserção da História da Matemática como recurso didático, onde o professor traz elementos e fatos dessa História para a sala de aula e a partir daí introduz os conteúdos a serem trabalhados, ainda é um desafio para o professor. Fazer essa conexão entre o conteúdo presente nos livros didáticos e o contexto histórico em que ele desenvolveu é algo que exige muita pesquisa e, sobretudo inovação da prática docente, ir além das salas de aula e ocupar novos espaços escolares, deixando os estudantes diante de situações reais e significativas dentro de um contexto que garante a aprendizagem dos conteúdos.

Um exemplo da utilização da História da Matemática como recurso didático com essa conexão com os conteúdos dos livros é apresentado na seção 5.1.

3.5 Modelagem Matemática

O modo como a teoria e as aplicações da Matemática se relacionam é designado por matematização ou modelação matemática. Há autores que concordam em descrever a Matemática como uma atividade de modelagem.

De acordo com D´Ambrósio [22] modelagem matemática,

> *"é um processo muito rico de encarar situações e culmina com a solução efetiva do problema real e não com a simples solução formal de um problema artificial."*

Blum [7] define modelagem matemática

> *"como sendo um processo de construção de modelos que transforma uma situação real em uma situação matemática".*

Ao relacionar a Matemática escolar com a Matemática do cotidiano do aluno estamos atribuindo sentido e significado ao conteúdo estudado, contribuindo positivamente no processo de escolarização do indivíduo.

Barbosa[5] apresenta cinco argumentos para a inclusão da modelagem no currículo:

• *Motivação*: os alunos sentir-se-iam mais estimulados para o estudo de matemática, já que vislumbrariam a aplicabilidade do que estudam na escola.

• *Facilitação da aprendizagem*: os alunos teriam mais facilidade em compreender as ideias matemáticas, já que poderiam conectá-las a outros assuntos.

• *Preparação para utilizar a matemática em diferentes áreas*: os alunos teriam a oportunidade de desenvolver a capacidade de aplicar matemática em diversas situações, o que é desejável para moverem-se no dia a dia e no mundo do trabalho.

• *Desenvolvimento de habilidades gerais de exploração*: os alunos desenvolveriam habilidades gerais de investigação.

• *Compreensão do papel sociocultural da matemática*: os alunos analisariam como a matemática é usada nas práticas sociais.

Esses fatores apontam na direção da modelagem matemática como um processo rico e criativo, que deve ser valorizado pelos múltiplos aspectos favorecidos por esta prática educativa.

Na seção 5.3 propomos uma atividade envolvendo o uso da modelagem no ensino de Trigonometria.

Capítulo 4

ALGUMAS APLICAÇÕES DA TRIGONOMETRIA NA ATUALIDADE

Hoje, com o avanço da tecnologia e com uma gama de conhecimento em mãos, o homem é capaz de aplicar a Trigonometria em vários ramos da atividade humana. Muitas profissões utilizam os conhecimentos de Trigonometria para realizar tarefas inerentes ao seu campo de atuação.

As aplicações da Trigonometria na atualidade são, incontestavelmente, indispensáveis para o avanço das ciências como um todo.

4.1 A importância da Trigonometria para a Cartografia

Hoje, quando um planeta é visto de cima pelos satélites, seus contornos não têm mais segredo. Durante séculos, os astros e a Matemática foram os instrumentos que permitiram aos homens desenhar mapas para se localizarem no planeta.

Antes mesmo de começar a escrever, é provável que os homens das primeiras civilizações rabiscassem representações gráficas dos lugares por onde passavam. Segundo o professor D. R. F. Taylor, presidente da Associação Cartográfica Internacional,

> "embora não seja possível dizer quando surgiu o primeiro mapa, eles começaram a serem feitos há mais de 4000 anos por culturas antigas da Mesopotâmia, China, Egito e Grécia". [32]

Por mais de vinte séculos, os homens olharam para o céu para calcular distâncias e representá-las nos mapas. Hoje fazem o inverso: vão para o espaço e de lá conseguem imagens do planeta com uma precisão inalcançável para quem tem os pés na Terra.

No Egito, essa prática começou cedo. Os egípcios já conheciam a triangulação, uma técnica para determinar distâncias, que seria depois usada por muitos outros povos. A triangulação utiliza um princípio da Trigonometria: se um lado e dois ângulos de um triângulo são conhecidos, é possível calcular o terceiro ângulo e os outros dois lados. A medição de terras era quase vital para os faraós e sacerdotes, já que seus incontáveis gastos eram garantidos basicamente pelos impostos cobrados sobre a terra, pagos em cereais. Demarcando a terra, os faraós tinham certeza de que nenhum grão ficava de fora.

Mas quem achou o mapa do tesouro da cartografia foram os gregos. Segunda a cartógrafa Regina Vasconcelos, professora da Universidade de São Paulo e membro da Associação Cartográfica Internacional,

> “Eles foram o primeiro povo a ter uma base científica de observação (...). A princípio, os gregos acreditavam ser a Terra um disco achatado”. [32]

Seus primeiros mapas-múndi, como o de Anaximandro de Mileto (610 a. C.-546 a. C.), eram representados por um círculo onde um oceano circundava os três continentes conhecidos: Europa, Ásia e África.

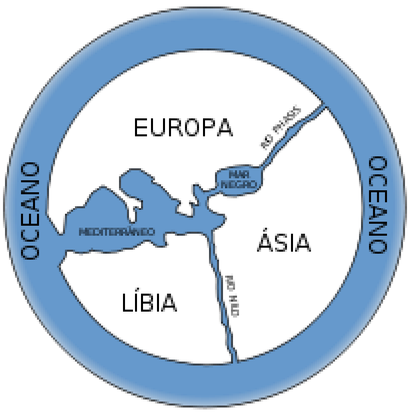


Figura 62: Representação do possível mapa múndi de Anaximandro.[49]

[49] Fonte: http://pt.wikipedia.org/wiki/Anaximandro

Ainda no século VI a. C., a Escola de Pitágoras apresentou uma Terra esférica. Essa suposição tinha base em observações práticas, como a sombra projetada por um eclipse, e considerações filosóficas, como o fato de a esfera ser a forma geométrica mais perfeita.

Coube ao filósofo e astrônomo Eratóstenes (276 a. C.-194 a. C.) a tarefa de medir a circunferência da Terra. Também conhecedor de Matemática, Eratóstenes usou a Trigonometria em seus cálculos [31]. Desenhou um mapa do mundo melhorado, incorporando informações resultantes das campanhas de Alexandre, o Grande, e dos seus sucessores. A Ásia surge maior, refletindo os novos conhecimentos da verdadeira dimensão do continente. Foi também o primeiro a incorporar paralelos e meridianos nas suas representações cartográficas [32].

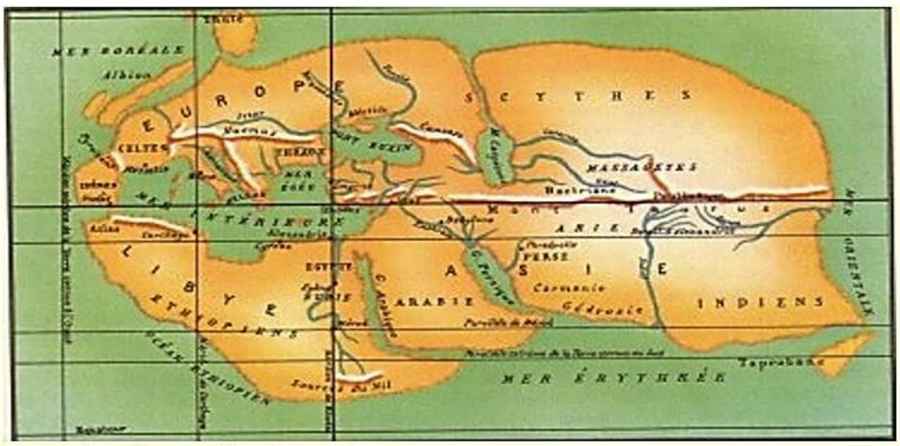


Figura 63: Mapa de Eratóstenes.[50]

Posidônio (135 a. C.-51 a. C.), um século mais tarde, utilizou a distância entre Rhodes e Alexandria e a altura da estrela Canopus para fazer o mesmo cálculo, chegando ao resultado de 44 000 quilômetros. Provavelmente, foi esse o cálculo adotado por Cristovão Colombo[51], quinze séculos mais tarde, fazendo-o acreditar, pelo tempo de viagem, que havia chegado às Índias [32].

---

[50] Fonte: http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br

[51](1451-1506) Nasceu em Gênova, cidade portuária no norte da Itália. Acreditava que o mundo era esférico e estava convencido de que poderia chegar ao Oriente, no leste, viajando para oeste. Em 1492 chegou na América acreditando ter chegado na Ásia.

O sistema de coordenadas geográficas com latitude e longitude também é um legado dos gregos, graças, mais uma vez, à Matemática, e também às observações de fenômenos celestes.

Seu idealizador foi o astrônomo Hiparco, já mencionado anteriormente. Para conhecer a distância de um ponto qualquer ao Equador (a latitude) era necessário saber o ângulo formado por este ponto, pelo Sol e pelo Equador, um triângulo em que o Sol é o vértice. Para a medição foi usado o gnômon, uma espécie de agulha fincada perpendicularmente a uma superfície horizontal. O Sol projeta a sombra da agulha no plano horizontal. A reta que vai da extremidade da sombra à extremidade superior da agulha mostra a direção do Sol. O ângulo dessa reta em relação ao plano horizontal indica sua inclinação. O cálculo foi feito sabendo se que o ângulo do Sol em relação à superfície da Terra, no Equador, era de 90° no dia do equinócio [32]. Em qualquer outro ponto do planeta, esse ângulo era inferior. Se a medida do ângulo desse 80,° por exemplo, a latitude seria 10°, pois ela é o resultado da diferença entre os dois ângulos (90°- 80°).

Figura 64: Gnômon é o cilindro do centro deste relógio de sol.[52]

Para calcular a longitude, foi necessário estabelecer a hora exata de um fenômeno celeste importante, como um eclipse, em um determinado local. Essa hora foi comparada com a que o mesmo fenômeno ocorreu em outra parte do globo. Já que a circunferência da esfera, 360°, equivale a 24 horas de duração de um dia, uma diferença de uma hora, por exemplo, levou

[52] Fonte: http://mysite.du.edu/~jcalvert/astro/gnomon.htm

à conclusão de que entre os dois pontos estudados havia uma diferença de 15°.

A partir de então até os dias atuais as técnicas de cartografia vem se desenvolvendo, seja por questões econômicas, ambientais ou até mesmo militares, sempre fundamentadas em um vasto conhecimento matemático.

4.1.1 Sistema de Posicionamento Global (GPS)

O GPS (Global Positioning System) ou Sistema de Posicionamento Global foi desenvolvido pelo Departamento de Defesa norte-americano e se destina a determinar a posição de um ponto na superfície da Terra. Para isso, é utilizado um aparelho receptor de sinais de rádio emitidos por satélites em órbita do planeta, que calcula as coordenadas da posição do ponto [3].

As aplicações civis e comerciais do GPS são vastas. Tem com aplicação, por exemplo, **localização** (determinação de alguma posição no globo terrestre), **navegação** (indo de um lugar para outro), **rastreamento** (monitoramento da movimentação de pessoas, veículos ou qualquer outro objetos), **mapeamento** (criação de mapas no mundo todo, topografia, agrimensura), e **horários** de precisão (determinação do horário preciso em todo o mundo) [49].

As coordenadas de um ponto sobre a Terra são dadas a partir de três referenciais: o equador, a partir do qual se determina a latitude, o meridiano de Greenwich, a partir do qual se determina a longitude, e o nível do mar, em relação ao qual se estabelece a altitude do ponto. Assim, para localizar um ponto sobre a Terra como, por exemplo, uma embarcação no mar, um avião, um caminhão de carga ou mesmo um aeroporto ou um acidente geográfico, basta saber a latitude, a longitude e a altitude em que se encontram.

O GPS baseia-se numa rede de estações terrestres que continuamente transmitem dados posicionais por meio de sinais de rádio para um conjunto de 24 satélites artificiais, orbitando a uma altitude de 20.200 km. Os vinte e quatro satélites que formam o segmento espacial do GPS trafegam em torno da Terra em seis órbitas estáveis e predeterminadas com quatro satélites em cada órbita. Os satélites percorrem uma órbita completa a cada 12 horas e cada satélite tem 28° de visualização sobre a Terra. Isso assegura que todo ponto da superfície terrestre, em qualquer instante, seja rastreado por pelo menos quatro satélites. Várias áreas da Terra são, por alguns momentos, são vistos por até dez satélites [3].

Figura 65: Constelação de satélites do GPS[53]

Os satélites, por sua vez, processam as informações recebidas das estações terrestres e, continuamente, retransmitem sinais de rádio, que são captados e processados pelo receptor GPS, que dispõe de uma unidade de processamento capaz de decodificar em tempo real a informação enviada para cada satélite e calcular a posição. Cada satélite envia sinais de características diferentes em intervalos de 30 segundos e de 6 segundos. Uma determinação precisa de posição requer uma boa recepção dos vários tipos de sinais enviados.

O GPS utiliza técnicas de triangulação e cálculos trigonométricos que se assemelham muito aos mais tradicionais processos de localização, baseados em instrumentos convencionais com referenciais astronômicos, usados, por exemplo, por Cristóvão Colombo e outros grandes navegadores. Os grandes diferenciais são, sem dúvida, o controle da posição dos satélites a transmissão de sinais de rádio e o processamento computadorizado do receptor [56].

[53] Fonte: www.popa.com.br

Para termos noção de como o GPS determina um posição suponha que possamos medir nossa distância a um satélite, e que seja de 20.000km. Isso significa que estamos obrigatoriamente na superfície de uma esfera imaginária no universo, com 20.000km de raio, em cujo centro está o satélite considerado.

Imagine que possamos medir a distância entre nós e um segundo satélite, que seria de 21.000 km, por exemplo. Isso significa que, além de estarmos na superfície de uma esfera com 20.000 km de raio, estamos também na superfície de outra, com raio de 21.000 km, que é a esfera do segundo satélite. Assim concluímos que estamos também na superfície de um círculo, determinado pela interseção das duas esferas.

Ao fazermos a medida de nossa distância a um terceiro satélite, digamos que seja de 22.000 km, descobriremos que estamos em um de dois pontos pertencentes à interseção do disco criado pelas duas primeiras esferas, com a terceira esfera, de 22.000km.

Para sabermos em qual dos dois estamos realmente, poderíamos fazer uma quarta medição, mas normalmente um dos dois pontos está em uma posição ridícula, ou muito longe da terra, ou movendo-se a uma velocidade impossível. Assim, é fácil descartarmos um dos pontos, e descobrirmos nossa posição real [49].

Em resumo, nossa posição é calculada através da distância entre nós e alguns satélites. Matematicamente, precisamos de 4 satélites para determinar nossa posição exata, mas 3 são suficientes devido ao descarte de uma delas, usando-se lógica apenas.

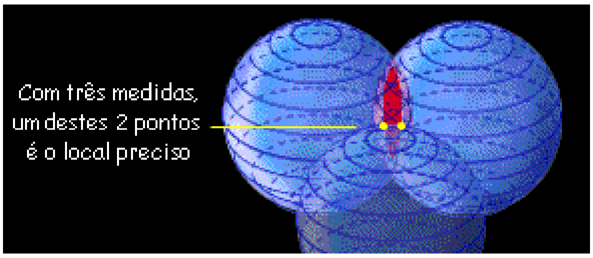


Figura 66: Possíveis localizações geradas pela intersecção de três esferas centradas em três satélites.[54]

[54] Fonte: www.popa.com.br

4.2 A Trigonometria na Medicina

Uma das aplicações da função trigonométrica na medicina é mostrada no monitoramento da frequência cardíaca, isto é, do número de batimentos cardíacos em um período de tempo, geralmente medido em bpm (batimentos cardíacos por minuto). Deste monitoramento, podemos verificar a pressão sanguínea ou arterial de uma pessoa.

Pressão sanguínea ou arterial é a força que o sangue exerce sobre as paredes das artérias ao ser bombeado pelo coração para ser transportados pelas artérias para todos os tecidos e órgãos do corpo humano.

A aferição da pressão sanguínea é dada por dois valores: a pressão sistólica, que é o valor máximo atingido quando o coração se contrai e bombeia o sangue, e a pressão diastólica, que é o valor mínimo atingido quando o coração está em repouso, ambas em um intervalo de tempo de um batimento cardíaco. Normalmente, a pressão é representada da seguinte maneira: 120/80 mm Hg, onde o primeiro valor é a pressão sistólica e o segundo valor é a pressão diastólica.

Observe o gráfico abaixo, ilustrando um monitor médico, a variação da pressão sanguínea (em mm Hg) de uma pessoa, em função do tempo (em s), é uma função trigonométrica (cíclica ou periódica) cuja lei é dada por:

$$P(t) = 100 - 20 \,.\cos\left(\frac{8\,\pi}{3}\; t\right),$$

em que o valor do argumento $\left(\frac{8\,\pi}{3}\; t\right)$ é dado em radianos.

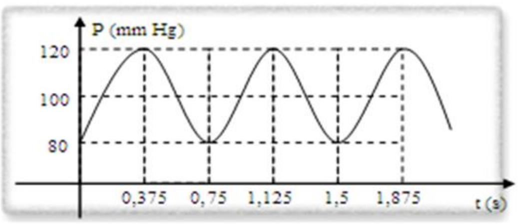


Figura 67: O intervalo de tempo de um batimento cardíaco dessa pessoa é 0,75 s, que corresponde a um ciclo completo, ou seja, o perímetro dessa função é $\frac{3}{4}$ radiano.

Assim percebemos que as Funções Trigonométricas são de vital importância na modelagem de situações envolvendo fenômenos periódicos. Neste nosso exemplo podemos perceber que o gráfico gerado por uma aferição real da pressão arterial sofre alterações conforme a situação clinica do paciente. Veja a seguir a imagem de um eletrocardiograma[55].

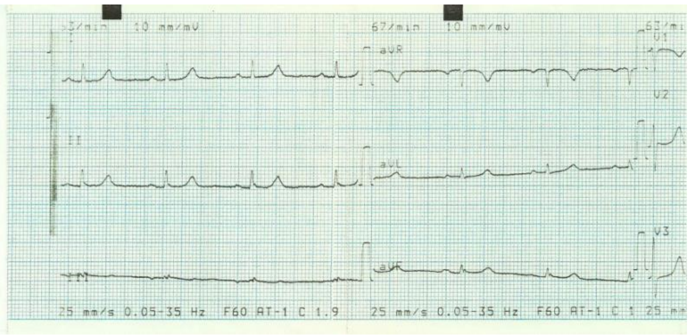


Figura 68: Eletrocardiograma

4.3 A Utilização da Trigonometria na Física

As aplicações das definições matemáticas são primordiais no estudo de muitos conceitos da Física, pois através de cálculos obtemos comprovações para as teorias relacionadas à Física. As funções trigonométricas seno, cosseno e tangente estão presentes em diversos ramos da Física, auxiliando nos cálculos relacionados à Cinemática, Dinâmica, Óptica entre outras. Dessa forma, Matemática e Física caminham juntas com o objetivo único de fornecer conhecimentos e ampliar novas pesquisas científicas.

Como exemplo, podemos mencionar a equação que nos permite calcular o Trabalho da força F no deslocamento d de um corpo.

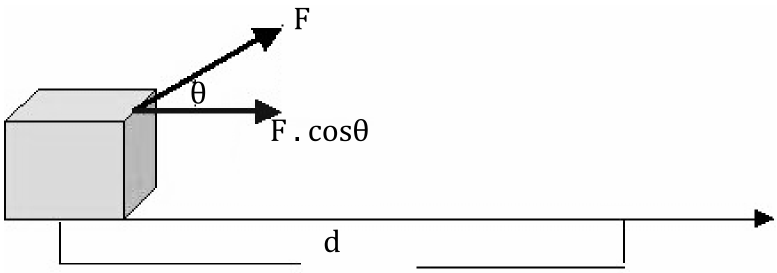


Figura 69: Representação do deslocamento de um objeto submetido a ação de uma força.[56]

---

[55] Gráfico que registra oscilações elétricas que resultam da atividade do músculo cardíaco.

Consideremos um corpo sendo arrastado sobre uma superfície horizontal, submetido à ação de uma força F (conforme figura acima). Suponha que a força F seja constante e que o corpo se desloque em uma distância d. Para θ o ângulo entre F e a direção do deslocamento do corpo, define-se trabalho, T, realizado pela força F, por:

$$\mathrm{T} = \mathrm{F} \,.\, \mathrm{d} \,.\, \cos\theta$$

De modo geral, podemos dizer que, quando o ângulo estiver compreendido entre 0° e 90°, o trabalho da força F será positivo, pois $\cos\theta$, nessas condições, é positivo. Se o ângulo θ estiver compreendido entre 90° e 180° o trabalho F será negativo, uma vez, que nesse caso, $\cos\theta$ é negativo. No primeiro caso (trabalho positivo), a força está colaborando para aumentar o valor da velocidade do corpo; no segundo (trabalho negativo), a força tende a provocar uma diminuição da velocidade e, no caso $\mathbf{T} = 0$ (θ=90°), a força não colabora nem para aumentar nem para diminuir o valor da velocidade do corpo [40].

No estudo de refração também encontramos a presença da Trigonometria. O fenômeno da refração consiste na mudança de direção de propagação de um feixe de luz ao passar de um meio para outro. Isto só pode ocorrer quando a luz se propaga com velocidades diferentes nos dois meios.

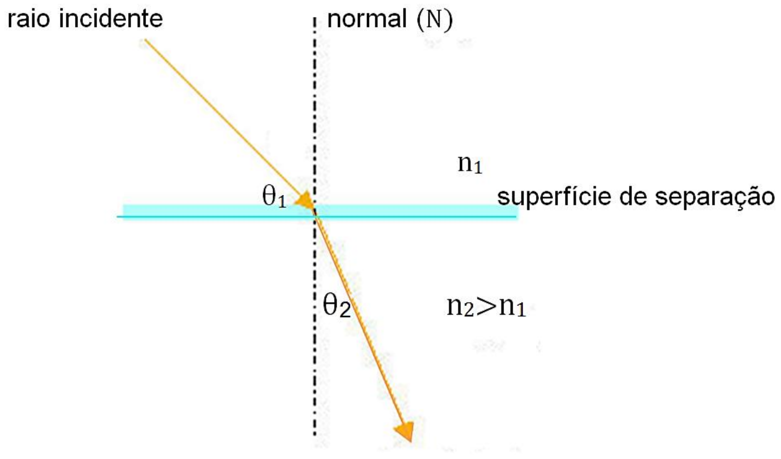


Figura 70: Refração de um raio luminoso.

[56] Fonte: http://educar.sc.usp.br/sam/energia_sam.html

Na figura acima representamos um raio luminoso refratando ao incidir na superfície de separação de dois meios (n_1) e (n_2) e a normal a esta superfície no ponto de incidência (N).

O ângulo formado pelo raio incidente e a normal é o *ângulo de incidência*, que designamos por θ_1. O ângulo θ_2, formado pela normal e o raio refratado, é denominado *ângulo de refração.*

Os ângulos θ_1 e θ_2 não são iguais e se pode verificar experimentalmente que, aumentando-se θ_1, o ângulo θ_2 também aumenta. Durante muitos séculos se tentou descobrir uma relação entre estes ângulos. Finalmente, em 1620, o matemático holandês Snell[57], analisando um grande número de medidas de ângulos de incidência e de refração, chegou à conclusão de que havia uma relação constante entre os senos destes ângulos. Em outras palavras, Snell descobriu que, quando a luz se refrata ao passar de um meio n_1 para um meio n_2, tem-se

$$\frac{\text{sen}\,\theta_1}{\text{sen}\,\theta_2} = \text{constan}te.$$

Esta constante é característica dos meios e, portanto, para cada par de meios ela tem um valor diferente, e seu valor é igual ao quociente entre as velocidades da luz nos dois meios [55].

Existem muitos outros exemplos de aplicação, como na Cinemática: no Movimento Curvilíneo no estudo de Vetores, e também no lançamento oblíquo, onde a altura máxima atingida, o tempo de subida e o alcance horizontal são alguns dos elementos calculados a partir das funções trigonométricas. De acordo com o ângulo formado entre o lançamento e a superfície, o corpo pode percorrer diferentes trajetórias. Caso o ângulo de inclinação (ou elevação) aumente, o objeto logicamente atinge uma altura mais elevada e um alcance horizontal menor; se o ângulo de inclinação diminui, a altura também diminui e o alcance horizontal se torna maior [40].

[57] Willebrord Van Roijen Snell (1591-1626) era matemático e astrônomo holandês que além de descobrir a lei da refração, desenvolveu um método para medir o raio da Terra. A Lei de Snell da refração, apesar de ter sido descoberta em 1620, só veio a ser amplamente divulgada através da obra *Dioptrica*, publicada em 1703, pelo físico, também holandês, C. Huyghens.

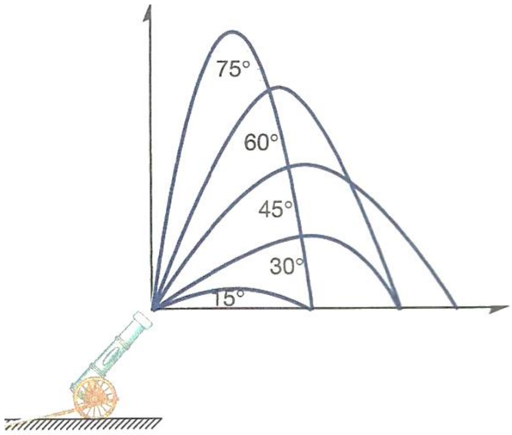


Figura 71: Lançamento oblíquo[58]

Pela figura acima podemos perceber que o maior alcance foi atingido quando o ângulo de elevação θ é igual a 45°. De fato, a expressão que nos permite determinar o alcance horizontal (A) é:

$$A = \frac{v^2{}_0 \,.\, \text{sen}\, 2\theta}{g}$$

Assim, o maior valor de A ocorrerá quando $\text{sen}\ 2\theta = 1$, pois o maior valor que o seno de um ângulo pode assumir é 1. Como esse valor ocorre quando o ângulo é igual a 90°, então:

$$2\theta = 90° \therefore \ \theta = 45°.$$

É evidente que a Trigonometria é ferramenta indispensável para o estudo da Física.

4.4 Aplicações da Trigonometria na Engenharia

A Engenharia é a ciência e a profissão de adquirir e de aplicar os conhecimentos matemáticos, técnicos e científicos na criação, aperfeiçoamento e implementação de utilidades, tais como materiais, estruturas, máquinas, aparelhos, sistemas ou processos, que realizem uma determinada função ou objetivo.

Nos processos de criação, aperfeiçoamento e implementação, a engenharia conjuga os vários conhecimentos especializados no sentido de

---

[58] Fonte: [37]

viabilizar as utilidades, tendo em conta a sociedade, a técnica, a economia e o meio ambiente.

A engenharia é uma ciência bastante abrangente que engloba uma série de ramos mais especializados, cada qual com uma ênfase mais específica em determinados campos de aplicação e em determinados tipos de tecnologia.

Seja qual for o ramo especializado da Engenharia os conhecimentos matemáticos são de suma importância para a execução das atividades inerentes ao cargo de um engenheiro. Em alguns ramos a Trigonometria se torna peça chaves na execução de projetos.

A seguir exemplificaremos o uso da Trigonometria em algumas engenharias.

4.4.1 Engenharia Aeronáutica

O profissional formado em Engenharia Aeronáutica detém conhecimentos fundamentais para a elaboração de projetos de aeronaves – aviões comerciais jatos supersônicos, helicópteros e até mesmo foguetes.

Para desenhar peças tridimensionais do motor ou da fuselagem de um avião, o engenheiro tem de entender de projeções. Para calcular a inclinação correta que as asas de uma aeronave devem ter para decolar e aterrissar de maneira segura são necessários conhecimentos de Trigonometria aliada aos modelos matemáticos que descrevem a sustentação de um avião no ar [56].

Além de participar da construção e da manutenção de peças mecânicas ou equipamentos eletrônicos na indústria aeronáutica, esse profissional tem também a alternativa de se especializar em tráfego aéreo. Seja na área que for, a Matemática faz parte constante de sua vida profissional.

4.4.2 Engenharia Civil

É o ramo da Engenharia que projeta, gerencia e executa obras como casas, edifícios, pontes, viadutos, estradas, barragens, canais e portos. O engenheiro civil projeta, gerencia e acompanha todas as etapas de uma construção ou reforma. Sua atuação inclui a análise das características do solo, o estudo da insolação[59] e da ventilação do local e a definição dos tipos de fundação. Com base nesses dados, o profissional desenvolve o projeto, especificando as redes de instalações elétricas, hidráulicas e de saneamento do edifício e definindo o material que será usado [48].

No canteiro de obras, chefia as equipes de trabalho, supervisionando prazos, custos, padrões de qualidade e de segurança. Cabe a ele garantir a estabilidade e a segurança da edificação, calculando os efeitos dos ventos e das mudanças de temperatura na resistência dos materiais usados na construção.

Esse profissional também pode dedicar-se à administração de recursos prediais, gerenciando a infraestrutura e a ocupação de um edifício.
Seja em qual área for atuar o engenheiro civil necessita de uma excelente bagagem de conhecimentos matemáticos para obter sucesso em seus projetos.

As aplicações da Trigonometria na Engenharia Civil são de vital importância. Ela é usada em todo e qualquer cálculo do projeto estrutural de construção civil, seja na simples construção de um telhado ou numa rampa de acesso, até projetos envolvendo estruturas e fundações e de infraestrutura no que compete projetar e construir obras como rodovias, ferrovias, viadutos, portos, metrôs, túneis e viadutos.

No projeto geométrico de rodovias encontramos o uso da Trigonometria em praticamente em todas as etapas, como por exemplo, o cálculo da superelevação, como veremos a seguir [28].

Quando um veículo chega a uma curva, é preciso que haja uma força na direção do centro da curva (força centrípeta), sem a qual o veículo não descreverá a curva, mas continuará em movimento retilíneo pelo princípio da inércia.

Com o objetivo de criar uma componente do veículo na direção do centra da curva que, somada à força de atrito (Fat), produzirá a força centrípeta é importante determinar a *superelevação* ou *sobrelevação* que é a inclinação transversal da pista.

---

[59] Quantidade de radiação proveniente do sol que incide sobre uma superfície.

O peso pode ser decomposto em duas forças: uma perpendicular à pista, que é neutralizada pela reação normal, e outra paralela, que irá compor a força centrípeta.

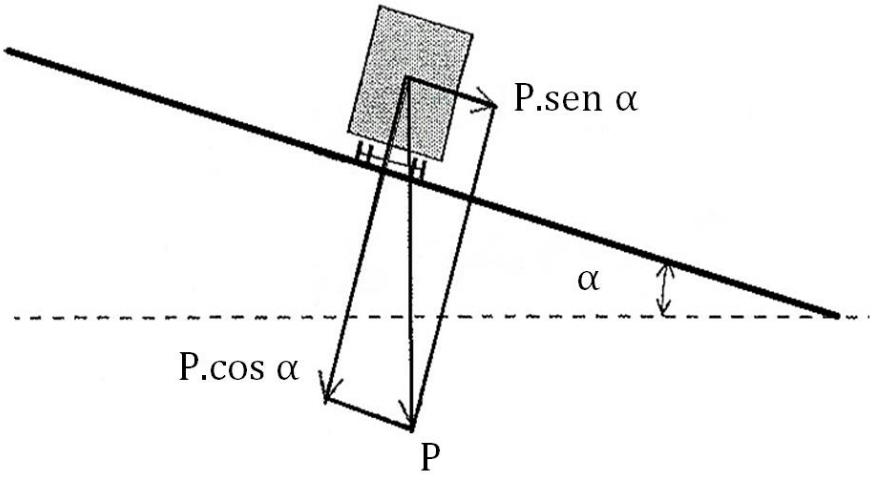


Figura 72: Decomposição da força peso.

A tangente do ângulo formado pelo plano da pista com o plano horizontal define o valor da superelevação (e na equação a seguir).

$$e = \text{tg}\ \alpha$$

Na prática, e é mostrada em porcentagem.

Quando um veículo trafega por uma curva horizontal circular de raio R com velocidade V constante, a resultante das forças atuantes será a força centrípeta Fc.

$$|\mathrm{Fc}| = \mathrm{m} \cdot \frac{\mathrm{V}^2}{\mathrm{R}}$$

A Figura 73 mostra um veículo percorrendo uma curva circular superelevada.

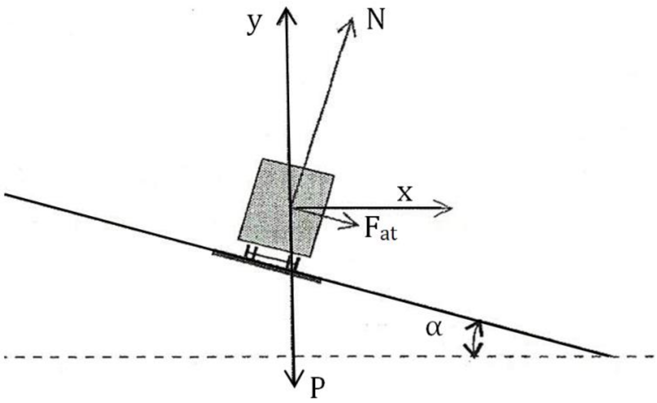


Figura 73: Forças que atuam sobre o veículo.

Supondo que as forças que atuam sobre o veículo estejam aplicadas ao centro de gravidade, temos:

na direção do eixo x: $\{N \,.\, sen\alpha + Fat \,.\, cos\alpha = \frac{m.V^2}{R}\}$

na direção do eixo y: $\{N \,.\, cos\alpha - Fat \,.\, sen\alpha \; - P = 0\}$

$$N \,.\, sen\alpha + N \,.\, f \,.\, cos\alpha = \frac{m.V^2}{R}$$

$$N \,.\, cos\alpha - N \,.\, f \,.\, sen\alpha \; = m \,.\, g$$

dividindo membro a membro e simplificando, temos: $\frac{sen\ \alpha + f\ .cos\alpha}{cos\alpha - f\ .\ sen\alpha} = \frac{V^2}{R\,.g}$

e dividindo o primeiro membro por cosα, $\frac{tg\ \alpha + f}{1 - f\ .tg\ \alpha} = \frac{V^2}{R\,.g}$

como $tg\alpha$ e f são pequenos, o produto dos dois pode ser desprezado em relação ao demais. Então,

$$g(e + f) = \frac{V^2}{R}.$$

O valor da superelevação e a ser adotado para uma determinada curva circular deve ser limitado a um valor máximo por razões de segurança.

Uma curva com superelevação excessivamente alta pode provocar deslizamento do veículo para o interior da curva ou mesmo tombamento, se a velocidade for muito baixa ou se o veículo parar por qualquer motivo.

Casos como esses podem ocorrer, por exemplo, em curvas localizadas em aclives fortes, onde caminhões pesados, com centro de gravidade alto, trafegam com baixas velocidades.

Na seção 5.3 apresentamos uma atividade de modelagem envolvendo a construção de rampas que evidencia a importância da Trigonometria para a Engenharia Civil.

4.5 Trigonometria: Ferramenta Fundamental para a Agrimensura

A Agrimensura acompanha o homem desde o Antigo Egito, quando era utilizada para medir as áreas agrícolas nas margens do Nilo. Desde então a Agrimensura vem sofrendo modificações e ajustes para mostrar, com a maior precisão possível, os espaços ocupados pelo homem. Na década de 1980, houve grandes modificações com o uso da informática e a expansão da Geodésia celeste. Essas modificações aprimoraram-se ainda mais com a introdução de equipamentos de alta tecnologia, causando uma verdadeira revolução na maneira de coletar e processar os dados de campo, bem como na confecção de mapas. Isso não inviabilizou a profissão do Técnico em Agrimensura, mas pelo contrário, contribuiu para acelerar os trabalhos, obtendo-se maior precisão com menor esforço. A Agrimensura é paradoxal, uma ciência antiga e ao mesmo tempo moderna [51].

Os avanços teóricos e tecnológicos mediante a milenária arte de conhecer e demarcar limites do território vem evoluindo junto à sociedade, e hoje se mostra como uma profissão cuja missão é prover a informação necessária para o conhecimento material e cultural do território, não foi em vão que a nave espacial destinada a viajar além de nosso sistema solar para prover a informação cultural cientifica do espaço sideral foi batizada como Surveyor (Agrimensor). A Engenharia de Agrimensura, como profissão universitária, nasceu para dotar a sociedade dos recursos humanos necessários para o conhecimento e demarcação de limites do território.

Através dos atos de levantamento territorial, o engenheiro agrimensor captura, processa e documenta a informação destinada ao conhecimento do espaço territorial e suas características, brindando desta forma a base certa e fidedigna sobre a qual se podem executar diagnósticos, propor soluções e planificar a execução de obras aptas para satisfazer as necessidades humanas e para preservar o meio ambiente.

O Agrimensor no comprimento de suas atividades tem como instrumento fundamental para fazer descrições, monitoramento e definição de espaços físicos a topografia.

Quando há necessidade de se desenvolver uma base topográfica, e por algum motivo acontecem dificuldades ou impossibilidade de obtenção das medidas por meio de processos diretos, é possível determinar a distância da base procurada por meio de soluções matemáticas, com o auxilio da Trigonometria, onde os valores lineares e angulares necessários são obtidos por meio de instrumentos e métodos topográficos [8].

Um instrumento muito utilizado pelos agrimensores é o *teodolito*, um instrumento óptico de medidas utilizado para realizar medidas de ângulos verticais e horizontais, usado em redes de triangulação, a fim de determinar distâncias inacessíveis.

Figura 74: Teodolito[60].

O primeiro teodolito foi criado pelo italiano Ignácio Porro por volta de 1835, sendo um instrumento muito pesado onde a leitura de seus limbos era muito complicada. Anos depois, por volta de 1920, Henrique Wild aprofundou os estudos e melhorou aquele teodolito, construindo círculos

60 Fonte: http://www.pazevita.com/topografia.htm

graduados sobre vidro, para conseguir menor peso, tamanho e maior precisão, tornando assim a leitura mais fácil [1].

Hoje existe uma diversidade de teodolitos para os diferentes usos, precisões e alcances, mas apenas um aparelho óptico. Alguns teodolitos automáticos disponíveis no mercado possuem dispositivos eletrônicos que fazem a leitura dos pontos e armazenam estes dados na memória, sendo possível de serem exportados por software para um computador para se fazer então os mapas com as características topográficas do local medido.

Uma das operações mais práticas e fáceis de serem exemplificadas com o teodolito é o cálculo de distâncias. O procedimento é bem simples e basicamente segue os seguintes passos:

1º passo:

Posicionar o teodolito em um ponto fixo sobre um tripé e escolher dois pontos como referência (um de fácil acesso). Deste modo será feita uma triangulação no local onde se deseja conhecer as dimensões, como a ilustração abaixo.

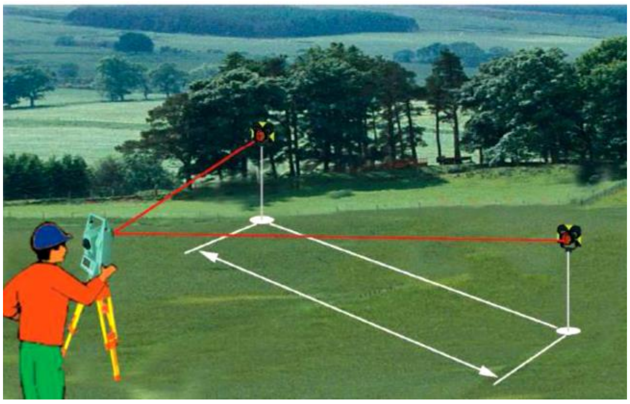


Figura 75: Representação do uso do teodolito[61].

Considere que o ponto em que se encontra o teodolito seja o ponto A, sendo este uma das extremidades da distância que se deseja calcular. O ponto B será um referencial para onde se possa transportar o teodolito e o ponto C será a outra extremidade da distância a ser calculada.

[61] Fonte: www.joinville.udesc.br/portal/professor/adriana/materiais/Aula4_InstrumentosTopograficos.pdf

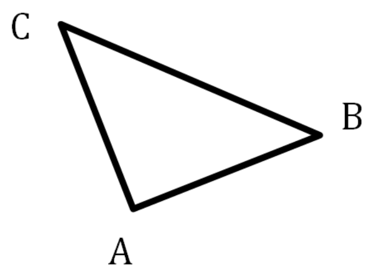


Figura 76: Triangulação feita com as observações do teodolito.

2º passo:

Com o teodolito, determinar os ângulos formados no triângulo a partir dos pontos A e B. Para isso basta mirar o teodolito para um dos pontos de referência (A ou B) e em seguida girar e mirar o outro ponto, o ângulo formado aparecerá no visor do teodolito. Fixando o teodolito no ponto B repetir a operação.

Às vezes o ângulo do vértice C é impossível de ser medido com o teodolito devido às irregularidades do terreno. Neste caso usamos a propriedade da soma dos ângulos internos de um triângulo que sempre é igual a 180°. Assim fazemos $\widehat{\mathrm{C}}$ = 180° - ($\widehat{\mathrm{A}}$ + $\widehat{\mathrm{B}}$).

3º passo:

Medir com instrumento apropriado a distância entre os pontos A e B.

4º passo:

De posse dessas informações e de uma tabela de razões trigonométrica, determinar a medida AC com cálculos trigonométricos.

Por exemplo, se quisermos construir um triângulo retângulo basta que o ponto B escolhido forme uma reta com o ponto A, perpendicular à reta AC. Assim podemos usar a definição de tangente para achar a medida AC,

$$\mathrm{tg}\,\widehat{\mathrm{B}} = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}}$$

Como temos a medida do ângulo $\widehat{\mathrm{B}}$ e a medida de AB, podemos calcular a medida procurada AC.

Agora, se não for possível construir um triângulo retângulo, basta usar a Lei dos Senos,

$$\frac{AB}{\operatorname{sen}\hat{C}} = \frac{AC}{\operatorname{sen} B}$$

Este procedimento é simples e representa uma aplicação muito clara da Trigonometria estudada na Educação Básica.

Assim, os estudantes ao conhecerem as atividades básicas de um agrimensor no que se refere ao cálculo de medidas inacessíveis compreenderão a importância da Trigonometria, seja no triângulo retângulo como no triângulo qualquer, permitindo assim que ele possa refletir sobre a fundamental relevância que os conteúdos matemáticos desempenham em situações reais que, muitas vezes, passam despercebidos.

Capítulo 5

UMA PROPOSTA METODOLÓGICA PARA O ENSINO E APRENDIZAGEM DOS CONTEÚDOS BÁSICOS DE TRIGONOMETRIA

Neste capítulo apresentaremos uma sequência didática como proposta metodológica para o ensino e aprendizagem dos conteúdos básicos de Trigonometria na Educação Básica. Esta sequência leva em consideração o contexto no qual o estudante está inserido, seu uso social e seu desenvolvimento histórico.

A proposta contém sugestões de atividade onde o uso de recursos de multimídia, recortes da História da Matemática e atividades práticas sejam mecanismos para enriquecer as aulas e despertar o interesse dos estudantes.

As atividades apresentadas foram baseadas em sugestões do Portal do Professor[62] do MEC – Ministério da Educação, do Centro de Referência Virtual do Professor de Minas Gerais – CRV[63] e da coleção M³ Matemática Multimídia[64] que contém recursos educacionais multimídia para o Ensino Médio em formatos digitais desenvolvidos pela UNICAMP – Universidade Estadual de Campinas com financiamento do FNDE[65], SED[66], MCT[67] e MEC.

[62] Disponível em: http://portaldoprofessor.mec.gov.br/index.html
[63] Disponível em: http://crv.educacao.mg.gov.br
[64] Disponível em: http://m3.ime.unicamp.br/
[65] Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação
[66] Secretaria de Educação a Distância do Ministério da Educação e Cultura
[67] Ministério da Ciência e Tecnologia

5.1 Conceitos Trigonométricos e sua Perspectiva Histórica

Sabemos que os estudos de Tales de Mileto sobre Semelhança de Triângulos embasam os conhecimentos de Trigonometria. A forma correta como ele utilizou seus conhecimentos para calcular a altura da pirâmide ainda é um mistério.

Estão disponíveis diversos relatos que descrevem a medição da altura da pirâmide feita por Tales de Mileto. A primeira e mais antiga é a citada por Diôgenes de Laêrtios (século II-III d.C.): “Hierônimos conta-nos que Tales mediu a altura das pirâmides pela sombra das mesmas, fazendo a medição na hora em que a nossa própria sombra corresponde ao nosso tamanho”. Outra versão para esse fato foi fornecida por Plutarco (século I-II d.C): colocando a prumo uma vara no final da sombra da pirâmide e fazendo dois triângulos com a linha que traça o raio do sol quando toca as duas extremidades, ele mostrou que havia uma certa proporção entre a altura da pirâmide e a da vara correspondente ao comprimento da sombra de um à sombra de outro.

Diante desses fatos é interessante que os estudantes para estudarem Semelhança de Triângulos e Teorema de Tales façam a experimentação desses teoremas.

Foto 01: Experimentação do Teorema de Tales

A partir dessa verificação o professor pode iniciar o estudo da Trigonometria. Aproveitando ainda o mistério que envolve as pirâmides e a História da Matemática, os estudantes podem, a partir do problema 56 do Papiro Rhind, fazer a verificação da importância da inclinação para a construção das pirâmides.

Para isso o professor pode solicitar os alunos que construam pirâmides de base quadradas de várias alturas a partir de material modelável, porém com certa resistência. Pode ser feitas de cortes feitos em barra de sabão, de preferência sabão caseiro que pode ser produzido do tamanho que desejar.

Os estudantes, a cada corte paralelo à base feito nas pirâmides, calculam a razão entre a altura da nova pirâmide e metade da sua base. Neste caso, eles estariam calculando a tangente do ângulo formado pela base da pirâmide e suas faces.

É possível que eles percebam que as pirâmides onde as razões encontradas tinham valores bem próximos eram as mais bem construídas.

A partir daí o professor introduz os conceitos das razões trigonométricas.

Lembrando que antes de iniciar essa atividade o professor deve solicitar uma pesquisa aos estudantes sobre a História de Tales ou das construções das pirâmides ou ainda trabalhar em sala textos ou vídeos para que os alunos tenham uma noção preliminar do que seja o Papiro Rhind e conheçam um pouco sobre os mistérios que envolvem o feito de Tales e a construções das pirâmides.

Essas duas atividades são simples e mostram para os estudantes de forma prazerosa como a Matemática desde a Antiguidade é construída a partir de aplicações que atendem as necessidades do homem. Dessa forma o professor pode utilizar a História da Matemática como recurso pedagógico que fornece contexto e significado para a aprendizagem.

5.2 Trigonometria nos Triângulos

Considerando que os conceitos de Trigonometria no Triângulo Retângulo são ensinados no Ensino Fundamental e que, geralmente, é o primeiro contato que os estudantes têm com a Trigonometria, é interessante que os conceitos de razões trigonométricas (seno, cosseno e tangente) sejam introduzidos através de manipulações concretas.

Antes de iniciar as atividades é necessário que o professor se certifique que os estudantes dominem os conceitos de *Triângulo Retângulo*, *Razão e Proporção, Ângulos entre Retas, Paralelismo, Ângulo Inscrito numa Circunferência*, *Semelhança de Triângulo* e *Teorema de Pitágoras*, trabalhados previamente.

Atividade 1 - Conhecendo as Razões Trigonométricas no Triângulo Retângulo

Inicialmente o professor introduz o assunto através de uma exposição objetiva do significado de Trigonometria e um breve relato de sua importância ao longo da história da humanidade.

1º momento

O professor irá solicitar aos alunos que confeccione triângulos retângulos semelhantes (ângulos congruentes) de tamanhos diferentes. Pode ser usado cartolina, EVA ou outro material disponível que permita a manipulação pelos estudantes. Podem ser apresentados aos estudantes os triângulos já prontos de acordo com o tempo disponível.

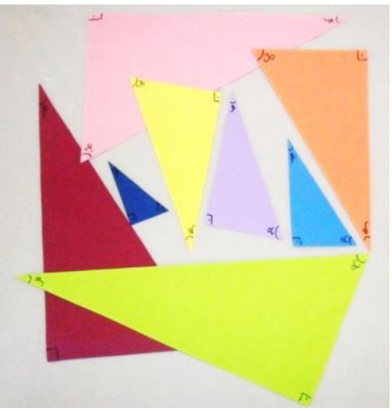


Foto 2: Triângulos Retângulos com ângulos medindo 30°, 60° e 90°, confeccionados em EVA.

Em grupos, os alunos irão medir, estabelecer as razões entre os lados dos triângulos considerando o ângulo assinalado e preencher o quadro abaixo. É interessante que cada grupo fique com triângulos de ângulos diferentes.

Triângulo Retângulo	Razões Trigonométricas (α = ______)		
	$\frac{\text{Cateto Oposto}}{\text{Hipotenusa}}$	$\frac{\text{Cateto Adjacente}}{\text{Hipotenusa}}$	$\frac{\text{Cateto Oposto}}{\text{Cateto Adjacente}}$
Rosa			
Verde			
Azul			
Amarelo			
...			

Triângulo Retângulo	Razões Trigonométricas (β = ______)		
	$\frac{\text{Cateto Oposto}}{\text{Hipotenusa}}$	$\frac{\text{Cateto Adjacente}}{\text{Hipotenusa}}$	$\frac{\text{Cateto Oposto}}{\text{Cateto Adjacente}}$
Rosa			
Verde			
Azul			
Amarelo			
...			

2º momento

Após o cálculo das razões, o professor apresenta as definições de seno, cosseno e tangente de um ângulo através de uma exposição oral clara e objetiva. Em seguida solicitar que os estudantes observem o quadro acima e respondam às seguintes questões:

a) Que razão foi calculada em cada coluna?

b) Considerando o ângulo assinalado, o que podemos afirmar de suas razões trigonométricas nos triângulos estudados?

c) Conhecendo-se uma das razões, o seno, por exemplo, e um dos lados do triângulo é possível determinar outra medida?

Espera-se que os estudantes identifiquem o seno, cosseno e tangente, respectivamente, na primeira, segunda e terceira colunas e também reconheçam que cada ângulo determina razões trigonométricas específicas, ou seja, que as razões não variam com o tamanho dos lados dos triângulos.

Depois de feitas as observações acima, é provável que os estudantes sejam capazes de resolver problemas envolvendo razões trigonométricas.

É importante que o professor estimule os alunos a fazerem a representação gráfica do problema proposto e, mesmo que seja um problema bem simples e objetivo, é fundamental que os alunos verbalizem a situação que está sendo exposta e sejam capazes de justificar oralmente suas respostas.

Não é aconselhável que sejam fornecido apenas os dados que serão necessários para a resolução do problema. A escolha do procedimento e métodos mais adequados para solucionar um problema é de fundamental importância. Isso não implica que o estudante que tenha resolvido por outros meios tenham sua resolução desprezada.

Atividade 2 - Mão na massa: Medindo Longas Distâncias

1º momento: Triângulo Retângulo

Com o objetivo de aplicar os conhecimentos de Trigonometria no cálculo de distância "*inacessíveis*", pode-se utilizar o transferidor e um canudinho para realizar medições em objetos que, com um pouquinho de esforço, seja possível verificar sua altura com o uso de uma trena, assim podendo confrontar com os resultados obtidos.

Os estudantes se organizam em grupos de 4 estudantes e munidos de fita métrica, transferidor canudinho, materiais para anotação, calculadora, tabela trigonométrica e escada, escolhem um objeto (uma grade, um muro, uma escada, um ponto no segundo pavimento, por exemplo), na área livre da escola (pátio, quadra esportiva, jardim), para determinar sua altura.

Um dos alunos observa pelo canudinho centrado no transferidor o ponto mais alto do objeto escolhido pelo grupo e um dos colegas registra o ângulo de visão.

Foto 3: Estudante observando o ponto mais alto do objeto a ser medido[68].

Outro membro do grupo, com uma trena, mede a distância do observador até o objeto observado. Depois, o grupo munido de uma tabela trigonométrica calcula a altura aproximada do objeto observado.

Foto 4: Estudante medindo a distância entre o objeto e o observador.

É importante estimular os alunos a esboçarem no caderno um desenho que represente a situação problema. Alertar os estudantes a não desprezar a altura do observador.

[68] As fotos são da atividade desenvolvida com os alunos do 9º ano da E. M. "*Coronel João Domingos*" no município de Raul Soares-MG, em agosto de 2012, sob a orientação das professoras Ângela de Oliveira, Juliana de Oliveira Chaves e Juliana Elvira Mendes de Oliveira.

Foto 5: Estudantes medido a altura do observador.

Essa atividade pode ser feita com a ajuda do professor de Educação Física para medir as alturas dos observadores e com um Auxiliar de Serviços Gerais para garantir que os alunos não se machuquem ao utilizarem a escada.

Foto 6: Medindo a altura calculada com o uso de uma trena.

Com essa atividade os estudantes tem a oportunidade de colocar em prática os conhecimentos aprendidos em classe, de forma prazerosa e significativa.

Os estudantes podem usar deste conhecimento para realizar atividades interdisciplinares como a confecção de maquetes com objetivos específicos de outros componentes curriculares. Um exemplo é a construção de maquetes de construções que compõem o Patrimônio Histórico de um município.

Com este trabalho é possível colocar em prática os conhecimentos de Trigonometria quando se calcula as dimensões das construções através da tangente e requer também conhecimentos de Razão e Proporção para determinar a escala que será construída a maquete e suas dimensões.

Foto 7: Santuário São Sebastião, em Raul Soares. Seus vitrais são tombados pelo Patrimônio Cultural do munícipio.

Foto 8: Maquete do Santuário São Sebastião, confeccionada pelos estudantes do 9º ano da Escola Municipal "Coronel João Domingos"[69].

[69] Está maquete foi exposta na XV Feira Cultural da Escola Municipal "Coronel João Domingos" cujo tema foi: "*Patrimônio – Nossa História, Nossa Vida",* em setembro de 2012

2º momento: Lei dos Cossenos

A fim de verificar e aplicar a Lei dos Cossenos, o professor pode realizar a seguinte simulação na quadra ou pátio da escola. Se ela não possuir um espaço livre que contenha obstáculos como arbustos ou pedras, pode-se marcar no chão símbolos para representar estes elementos.

Primeiramente posicione um estudante de forma que os pontos A e B estejam visíveis, conforme Figura 77. Outros dois estudantes com um barbante estabelecem os segmentos AC e BC, sendo C a posição do primeiro estudantes.

Figura 77[70]

Com uma trena os estudantes medem os segmentos AC e BC, com o transferidor eles medem o ângulo de visão do estudante pelos segmentos de barbante feito no chão.

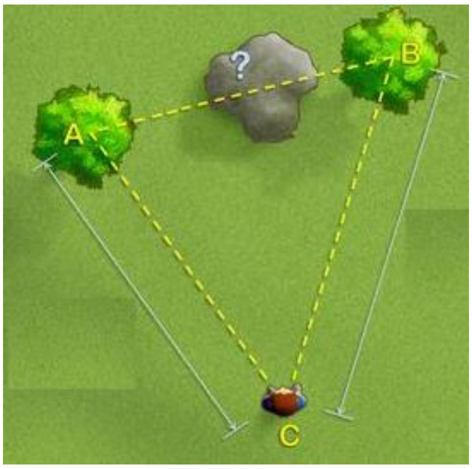


Figura 78[71]

[70] Fonte: www.portaldoprofessor.mec.br

De posse de uma tabela de razões trigonométricas, eles determinam a distância AB, no caderno, usando a Lei dos Cossenos. Se o pontos A e B escolhidos forem possíveis de ser medidos com uma trena é aconselhável que façam essa medição para confrontarem com o resultado encontrado.

Dependendo da localização dos pontos A e B escolhidos é admissível utilizar a Lei dos Senos desde que seja possível medir um dos ângulos cujo vértice seja um dos pontos (A ou B).

5.3 Resolução de Problemas e Modelagem

Essa atividade permite que os estudantes apliquem os conhecimentos de Trigonometria numa situação real encontradas em muitas escolas e estabelecimentos públicos que é a falta de rampa ou a existência de rampas inadequadas para o acesso de quem tem dificuldades de locomoção.

O tema da atividade contribui também, para levantar questões importantes sobre o papel sociocultural da Matemática.

Veja a notícia publicada no site de notícias do Maranhão:

PARAIBANO - MPMA recomenda construção ou reforma de rampas de acesso em escolas do município

Publicado em Quinta, 25 Agosto 2011 08:56
Acessos: 117

O Ministério Público do Maranhão, por meio do promotor de Justiça Moisés Caldeira Brandt, titular da Comarca de Paraibano, expediu Recomendação, no dia 9 de agosto, à Prefeitura de Paraibano, à Secretaria Municipal de Educação e à Secretaria Municipal de Obras, sugerindo a construção ou reforma de rampas de acesso em escolas públicas da rede municipal.

Fonte: http://www.mp.ma.gov.br/index.php/lista-de-noticias-gerais/3289-noticia-paraibano (acessado 14/08/2013)

[71] Fonte: www.portaldoprofessor.mec.gov.br

Rampas, uma alternativa às escadas quando se quer vencer um desnível e ao mesmo tempo assegurar o acesso de quem tem dificuldades de locomoção. Apesar de aparentemente simples, elas frequentemente acabam sendo um problema em projetos, seja por dificuldade em calcular sua inclinação ou desconhecimento das normas de acessibilidade.

O fato é que, quanto maior a altura, menor tem de ser a inclinação para que alguém com dificuldades de locomoção possa subí-la, e por isso há a necessidade de muito espaço para implantação da mesma, o que nos leva a muitas rampas incorretas.

O valor da inclinação da rampa é a relação entre a altura e o comprimento da mesma em porcentagem.

De acordo com a norma NBR 9050 da ABNT (Associação Brasileira de Normas Técnicas) para a inclinação seja apropriada para vencer um desnível é necessário que siga a tabela abaixo:

Desnível	**Inclinação Máxima**
Mais de 1 m	5%
De 80 cm a 1 m	6,25%
Até 80 cm	8,33%

De acordo com as informações acima, qual seria o espaço necessário para a construção de uma rampa de acesso a quadra esportiva de uma escola para vencer um desnível de 1,20m de acordo com as normas da ABNT para garantir a acessibilidade de pessoas com deficiência de locomoção?

5.4 O Círculo Trigonométrico

Ao iniciar o estudo do Círculo Trigonométrico é necessário que as definições de circulo e plano cartesiano estejam bem consolidadas para que ao realizarem as atividades os estudantes possam assimilar melhor os conteúdos abordados.

<u>Atividade - Conceito de Círculo Trigonométrico e Localização do Seno e Cosseno</u>

O professor juntamente com os estudantes pode construir um Círculo Trigonométrico em tamanho ampliado para que possam fazer manipulações, o que facilitará a compreensão dos conceitos que podem ser introduzidos com o auxílio do mesmo. Será necessário apenas cartolina, uma placa de isopor, transferidor, canetinhas coloridas, um percevejo, uma seta de papel resistente colorida de aproximadamente 10 cm e barbante.

Os alunos com o auxilio de um barbante ou um compasso de quadro traçam um círculo de 10 cm de raio e com o transferidor assinalam os ângulos múltiplos de 10 na extremidade do círculo. Fixam uma setinha no centro com um percevejo. Com uma régua os estudantes poderão escolher um arco e determinar o valor aproximado de seu seno e cosseno nos eixos coordenados.

5.5 Recursos Multimídia e Interdisciplinaridade

Para ilustrar e enriquecer as aulas é interessante exemplificar a importância da Trigonometria valendo-se de recursos multimídia que tornam as aulas mais atraentes.

5.5.1 Ciclo Trigonométrico e Funções Trigonométricas no Geogebra

Considerando o uso do computador uma ferramenta importante para o ensino e aprendizagem, o professor de Matemática não pode ficar alheio a esta tecnologia. Sendo assim o uso de softwares enriquece as aulas e atrai a atenção e curiosidade dos estudantes contribuindo assim para a compreensão dos conteúdos.

O Geogebra[72] é um software de matemática dinâmica desenvolvido para o ensino de Matemática em todos os níveis. Ele faz uma combinação

[72] Desenvolvido por Markus Hohenwarter, com interface amigável está disponível em: http://www.geogebra.org

de Geometria, Álgebra, Tabelas, Gráficos, Estatística e cálculo em um único sistema.

Uma atividade básica que pode ser realizada no Geogebra é o estudo dos gráficos das Funções Trigonométricas.

1º Passo: Escolha a escala apropriada para o eixo x. Para isto clique com o botão direito na "Janela de Visualização", vá em "Propriedades-Eixo x", habilite "Distância" e selecione $\frac{\pi}{2}$; clique em "Fechar".

2º Passo: Na caixa de "Entrada" digite $f(x) = sin\ (x)$ e dê <enter>.

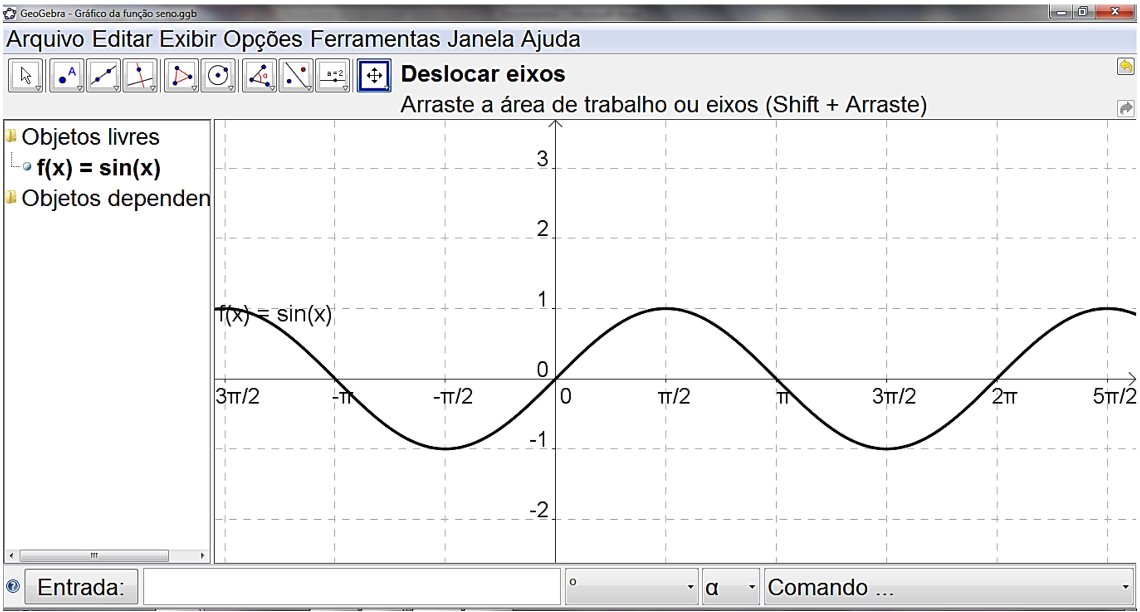


Figura 79:Gráfico da Função Seno no Geogebra.

3º Passo: Digite na caixa de "Entrada" as funções:

$g(x) = 2 + sin\ (x); h(x) = -2 + sin(x)$ e $p(x) = \frac{1}{2} + sin\ (x)$.

Escolha cores diferentes para cada um dos gráficos. Para isto clique com o botão direito em cada função na "Janela de Álgebra", vá em "Propriedades-Cor", selecione a cor desejada e clique em "Fechar".

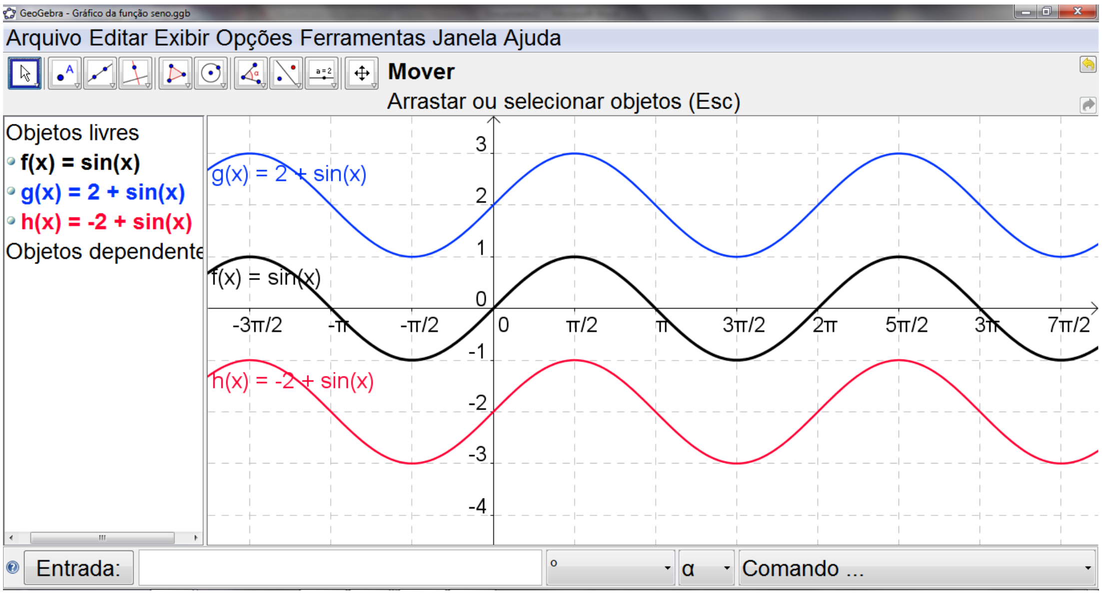


Figura 80: Gráfico de funções no Geogebra.

A partir desta simples atividade o professor pode explorar questões como domínio e período da função seno e a translação de funções no plano cartesiano.

No Geogebra também é possível desenvolver aplicativos que permitem aos estudantes visualizarem, de forma interativa, comportamento das funções trigonométricas, reconhecendo no círculo trigonométrico a variação de sinais, crescimento e decrescimento das funções, além de identificar as funções trigonométricas dos arcos notáveis. Outros assuntos podem ser explorados, como por exemplo, comprimento de um arco e relação entre suas medidas.

Alguns aplicativos podem ser baixados na internet, como o desenvolvido pelo Professor Geraldo Lopes Júnior para sua dissertação de mestrado "*Geometria Dinâmica com o Geogebra no Ensino de Algumas Funções*" [36], pelos links: http://www.geogebratube.org/student/m26611 - Ciclo Trigonométrico e http://www.geogebratube.org/student/m29548 - Funções Trigonométricas.

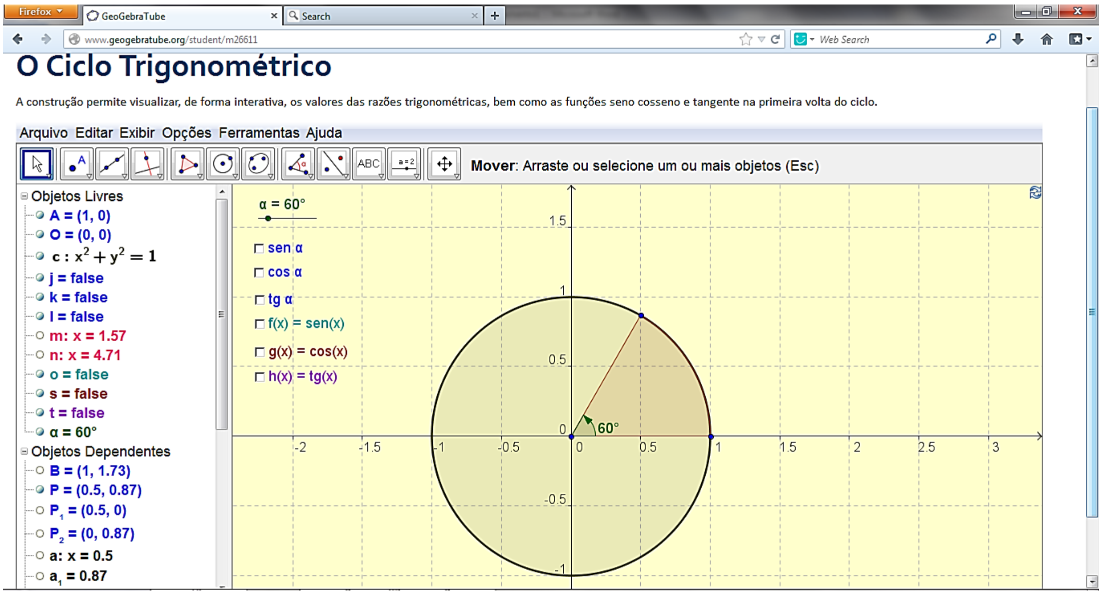


Figura 81: Figura do aplicativo: *O Ciclo Trigonométrico*.

Caso o professor tenha dificuldades em manipular o Geogebra, no site do software encontramos manuais que permitem ao usuário conhecer e se familiarizar com suas funcionalidades.

5.5.2 Usando Outras Mídias

Pode se utilizar o <u>áudio</u> “*Seno*”[73] da série “*Mátema*”, produzido pela UNICAMP. Nele os principais temas abordados são o desenvolvimento da trigonometria e suas principais aplicações ao longo dos séculos bem como a origem dos nomes usados para as funções trigonométricas.

Um <u>vídeo</u> interessante com o qual se trabalhar e que traz informações interdisciplinares é o vídeo “*Perdido no Globo*”[74], também produzido pela UNICAMP e sugerido pelo Banco Indutor de Trabalhos da plataforma moodle do PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional[75]. Neste vídeo um jovem náufrago utiliza conceitos geométricos simples para determinar sua latitude e longitude dispondo apenas de uma bússola, um relógio e uma fita métrica e assim mandar um sinal de socorro.

[73] Disponível em: http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1284
[74] Disponível em: http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1155
[75] Pós-graduação stricto-sensu para aprimoramento da formação profissional de professores da Educação Básica. Programa semipresencial para professores em exercício na rede pública.

Bem explorado e orientado pelo professor, este vídeo pode ser apresentado para os estudantes do Ensino Fundamental.

O material produzido pela UNICAMP é composto por material pedagógico multimídia e guia do professor contendo atividades e explicação do conteúdo abordado.

Outro vídeo que vale a pena ser explorado é um documentário da BBC de Londres: "*A Linguagem do Universo*"[76] contendo um relato da História da Matemática desde a Antiguidade. Esse documentário pode ser usado como forma de motivar os estudantes para o estudo da Matemática, pois nele ela é apresentada como uma ciência cujo conhecimento é construído por vários povos e em épocas diferentes e que está em constante transformação.

Para melhor explorar os conteúdos apresentado no vídeo pode se desenvolver um trabalho interdisciplinar com Geografia/História, a fim de explorar questões pertinentes ao uso da Trigonometria no desenvolvimento da Cartografia e assuntos relacionados ao desenvolvimento da tecnologia do GPS, abordando assuntos como latitude, longitude e órbita.

O professor pode solicitar uma pesquisa histórica sobre o desenvolvimento da Trigonometria onde devem ser enfatizados os conhecimentos de trigonometria utilizados pelos povos da Antiguidade e o modo de vida desses povos (cultura, economia, religião, organização social).

Os estudantes podem elaborar suas apresentações no laboratório de Informática usando slides para apresentação em projetor de multimídia.

5.6 Palestra

Os estudantes na fase final da Educação Básica vivenciam incertezas em relação ao mercado de trabalho e as dúvidas na escolha para qual curso superior devem se inscrever. Assim o contato com profissionais de várias áreas poderá influenciar positivamente nas decisões a serem tomadas por eles.

[76] Disponível em: http://www.youtube.com/watch?v=3PdEgnV9gn8&list=PLK7i9Z2thucyMA9tg60BlhmzA3JM_FtaU

Para amenizar as preocupações e evitar decisões precipitadas, as escolas podem contribuir para que o estudante entre em contato com diversos profissionais e assim conscientizarem da importância de compreenderem e assimilarem os conteúdos aprendidos na Educação Básica. A promoção de palestra é uma oportunidade de criar este contato.

No ensino de Trigonometria uma palestra com um Engenheiro de Agrimensura pode tornar claro para o estudante a aplicação deste conhecimento no ofício deste profissional.

É interessante que o profissional ao receber o convite seja orientado a levar seus instrumentos de trabalho e especificar claramente os objetivos da palestra. No nosso caso quais e como os conhecimentos de Trigonometria estão envolvidos na realização de suas funções.

Nada impede que este contato com profissionais que lidam com a Matemática em suas atribuições seja oportunizado ainda no Ensino Fundamental para que os estudantes, desde as noções básicas, tenham uma visão da importância do conteúdo e sua aplicação.

Foto 9: O agrimensor Marcelo Azevedo apresentando o teodolito aos estudantes do 7º ano[77]

Na foto acima o teodolito é apresentado aos estudantes do 7º ano do Ensino Fundamental que estudavam ângulos. Dessa forma o interesse pelo conteúdo é maior pois os estudantes tem a resposta para a velha pergunta que muitos fazem *”pra que isso serve?”.*

[77] Marcelo de Souza Azevedo também é professor de Matemática e Química da E. E. “Regina Pacis” em Raul Soares-MG.

Este contato dos estudantes pode se expandir para outras disciplinas e fazer parte de projetos que a escola pode promover. Segundo as Orientações Curriculares para o Ensino Médio [15],

> “um projeto pode favorecer a criação de estratégias de organização dos conhecimentos escolares, ao integrar os diferentes saberes disciplinares. Ele pode iniciar a partir de um problema bem particular ou de algo mais geral, de uma temática ou de um conjunto de questões inter-relacionadas.”

Assim, o trabalho através de projetos favorece a interdisciplinaridade, que entre outras contribuições, podemos citar a possibilidade de desenvolver uma aprendizagem repleta de significados capaz de apresentar o conhecimento científico como uma construção de saberes de várias áreas da atividade humana que se desenvolveu ao longo da História da Humanidade.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com este trabalho foi possível perceber como a Trigonometria é fundamental para o desenvolvimento de outras ciências. Isto reforça a importância de iniciar seu estudo na Educação Básica.

O professor que busca promover uma aprendizagem significativa, através de um processo de ensino que desperte o interesse dos estudantes, encontra na Trigonometria muitos conteúdos para desenvolver suas aulas a fim de alcançar este propósito. A Trigonometria possui, em sua evolução histórica, episódios interessantes e ricos em conteúdo e aplicações fáceis de serem reproduzidos em sala de aula.

Outro fator que contribui para as aulas de Trigonometria serem produtivas é a possibilidade de trabalhar com materiais concretos ou situações problemas que, principalmente na Educação Básica, são de grande importância pra a consolidação da aprendizagem.

Uma ferramenta valiosa para planejar e desenvolver as aulas de Matemática é o uso do computador. Hoje, através da internet, o professor tem acesso a várias sugestões de atividades e recursos multimídia disponíveis gratuitamente, basta que pesquise e escolha o que melhor se adapte ao Projeto Político Pedagógico, às condições físicas e aos recursos materiais de sua escola.

Encontramos disponíveis na internet vários softwares livres com versões para vários sistemas operacionais. Alguns são leves e podem ser transportados em dispositivos de armazenamento de dados portáteis. Além do GeoGebra, outros softwares oferecem possibilidade de trabalhar com gráficos de funções, destacam-se: *Cabri-Géomètre*, *Graphequation*, *Graphmática*, *Winplot*, *Aplusix*, *Winfun*, *Modelus*, *Régua e Compasso*, *Poly*, *Thales*, *WinMat*, *GeoGebra*, e muitos outros. Alguns têm versão em português, outros em espanhol [36].

É válido mencionar que todo trabalho docente deve ser acompanhado de um bom planejamento. O professor antes de iniciar o conteúdo deve fazer um planejamento no qual os objetivos e as estratégias de ensino estejam bem definidas, para que não haja perda de tempo e os objetivos sejam alcançados.

Devemos ressaltar que nos trabalhos interdisciplinares é necessário que todos os envolvidos participem da elaboração e desenvolvimento do projeto pedagógico, assim cada um contribuirá para que os objetivos sejam alcançados. Na realização de projetos pedagógicos o papel do pedagogo ou coordenador escolar é importante para a comunicação entre os envolvidos durante o desenvolvimento do mesmo.

Observamos que nenhuma sugestão de proposta metodológica possui garantias de bons resultados, pois cada unidade escolar possui suas características específicas de estrutura e de pessoal. Desta maneira, esperamos que este trabalho sirva para os professores refletirem sobre sua prática, mostrando como é possível desenvolver um trabalho interdisciplinar com recursos variados que contribua para a melhoria dos índices de rendimento de seus estudantes.

REFERÊNCIAS

1. ABITANTE, Lucilaine; PREUSSLER, Roberto; WEBER, Elizangela. *A Construção do Teodolito no Ensino de Trigonometria*. Disponível em: <http://www.projetos.unijui.edu.br/matematica/cnem/cnem/principal/ex/PDF/EX5.pdf>

2. ALONSO, Renata Costa de Almeida; MICHAELLO, Roberta da Silva; REZENDE, Vanussa Braga. *Utilizando o teodolito no Ensino da Trigonometria*. Disponível em: <http://www.pibid.furg.br/inscricao/xxx_20111116014844_Utilizando%20o % 20teodolito%20no%20ensino%20da%20trigonometriaa.docx>.

3. ALVES, Sérgio. *A Matemática do GPS*. Revista Professor de Matemática. SBM. n.59, 2006.

4. AUSUBEL, David P.; NOVAK, Joseph D.; HANESIAN, Helen. *Psicologia Educacional*. Tradução: Eva Nick, Heliana de Barros Conde Rodrigues, Luciana Peotta, Maria Ângela Fontes, Maria da Glória Rocha Maron. 2ª ed. Rio de Janeiro: Interamericana, 1980.

5. BARBOSA, Jonei Cerqueira. *Modelagem Matemática na sala de aula*. Perspectiva, Erechim (RS), v. 27, n. 98, p. 65-74, junho/2003.

6. BERLINGHOFF, William P.; GOUVÊA, Fernando. *A Matemática através dos Tempos: Um guia fácil e prático para professores e entusiastas*. Tradução Elza F. Gomide e Helena Castro. 2ª ed. São Paulo: Blucher, 2010.

7. BLUM, W. *Aplicações e Modelação no ensino da matemática e educação matemática - alguns aspectos importantes da prática e da pesquisa*. In: SLOVER, C. et ai. Avanços e perspectivas para o ensino da matemática modelagem e aplicações. Yorklyn: Water Street Matemática, 1995.

8. BORGES, Paulo Augusto Ferreira. *Matemática e suas Aplicações à Topografia*. Relatório do PIBIC/CNPQ . Universidade Federal de Viçosa. Viçosa, 2001.

9. BORTOLI, Gladis. *Um Olhar Histórico nas Aulas de Trigonometria: Possibilidades de uma Prática Pedagógica Investigativa*. Lajeado, 2012. Disponível em: <www.univates.br/bdu/bitstream/10737/281/1/GladisBortoli.pdf>

10. BOYER, Carl Benjamin. *História da Matemática*. Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo: Edgar Blucher, Editora Da Universidade de São Paulo, 1974.

11. BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais - Matemática*. Brasília, 1998.

12. _____. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros Curriculares Nacionais – Ensino Médio*. Parte III: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília, 2000.

13. _____. Ministério da Educação. *Matriz de Referencia para o ENEM 2011.* Disponível em: <www.ceps.ufpa.br/daves/PS%202012/PS%202012%20ENEM.pd>.

14. _____. Ministério da Educação. *Orientações Curriculares para o Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*. Brasília: MEC, SEB; 2006.

15. _____. Ministério da Educação. *PCN+ Ensino Médio: Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais.* Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>.

16. _____. Ministério da Educação. *PDE : Plano de Desenvolvimento da Educação : SAEB : ensino médio : matrizes de referência, tópicos e descritores*. Brasília : MEC, SEB; Inep, 2008.

17. _____. Ministério da Educação. *PDE : Plano de Desenvolvimento da Educação : SAEB : ensino fundamental : matrizes de referência, tópicos e descritores*. Brasília : MEC, SEB; Inep, 2008.

18. CASTRUCCI, Benedicto; JÚNIOR, José Ruy Giovanni. *A Conquista da Matemática*. Vol. 1. Edição Renovada. São Paulo: FTD, 2009.

19. CONTADOR, Paulo Roberto Martins. *Matemática, uma breve História*. Vol. 2. 4ª ed. São Paulo: Livraria da Física, 2012.

20. COSTA, Nielce M. Lobo. *A História da Trigonometria*. Disponível em: <http://www6.ufrgs.br/espmat/disciplinas/geotri/modulo3/mod3_pdf/historia_triogono.pd>

21. D`AMBRÓSIO, Ubiratan. *A História da Matemática: questões historiográficas e políticas e reflexos na educação matemática*. In: BICUDO, M. A. V. (org.). Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas. São Paulo: UNESP, 1999.

22. D'AMBROSIO, Ubiratan. *Da realidade a ação: reflexões sobre educação e matemática*. 2ª edição Campinas: Unicamp; São Paulo: SUMMUS, 1986, 115p.

23. DANTE, Luiz Roberto. *Didática da Resolução de Problemas de Matemática*. São Paulo: Ática, 2002.

24. _____. *Matemática: Contexto e Aplicações*. Vol. 1, 2, 3. 1ª ed. São Paulo: Ática, 2011.

25. _____. *Tudo é Matemática*. Vol. 4. 3ª ed. São Paulo: Ática, 2009.

26. EVES, Howard. *Introdução à História da Matemática*. Tradução: Hygino H. Domingues. 5ª ed. – Campinas. SP: Editora da Unicamp, 2011.

27. FAVORS, Paul. *Como um Teodolito Funciona*. Tradução: Artur Borges. Disponível em: <http://www.ehow.com.br/teodolito-funciona-como_5769/>

28. FILHO, Glauco Pontes. *Estradas de Rodagem: Projeto Geométrico*. São Carlos: G. Pontes Filho, 1998.

29. FILHO, Kepler de Souza Oliveira; SARAIVA, Maria de Fátima Oliveira. *Astronomia Antiga*. Disponível em: < http://astro.if.ufrgs.br/antiga/antiga.htm>.

30. _____. *Determinação de Distâncias Astronômicas*. Disponível em: <http://astro.if.ufrgs.br/dist/>.

31. GUELLI, Oscar. *Dando Corta na Trigonometria*. Coleção Contando a História da Matemática. Vol. 6. 3ª ed. São Paulo: Ática, 1995.

32. HEYMANN, Gisela; LUCÍRIO, Ivonete. *Cartografia: O Mundo na Palma das Mãos.* Revista Super Interessante nº 56. Editora Abril, 1992.

33. IEZZI, Gelson. *Fundamentos da Matemática Elementar: Trigonometria*. Vol. 3. 2ª ed. São Paulo: Atual, 1978.

34. IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; DEGENSZAJN, David; PÉRIGO, Roberto; ALMEIDA, Nilze. *Matemática: Ciência e Aplicações*. Vol. 1, 2, 3. 6ª ed. São Paulo: Saraiva, 2010.

35. IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; MACHADO, Antônio. *Matemática e Realidade*. Vol. 4. 6ª ed. São Paulo: Atual, 2009.

36. JÚNIOR, Geraldo Lopes. *Geometria Dinâmica com o Geogebra no Ensino de Algumas Funções*. Dissertação da Universidade Federal de Viçosa. Viçosa, 2013.

37. KENNEDY, Edward S. *Trigonometria*. Coleção Tópicos de História da Matemática para Uso em Sala de Aula. Vol. 5. Tradução: Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1992.

38. LIMA, Elon Lages Lima; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César. *A Matemática do Ensino Médio.* Vol. 1. Coleção do Professor de Matemática. 9ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

39. MACHADO, Celiane; MENDES, Patricia Wyse; MOÇO, Priscila Pedroso; NOVELLO, Tanise Paula. *Uso de Material Concreto no Ensino de Trigonometria*. Disponível em: <http:///www.pucpr.br/eventos/educere/educere2009/anais/pdf/3164_1725.pdf>.

40. MÁXIMO, Antônio; ALVARENGA, Beatriz. *Física*. Vol. 1, 2. 1ª ed. São Paulo: Scipione, 2011.

41. MELLO, José Luiz Pastore de. *Matemática: Construção e Significado*. 1ª ed. São Paulo: Moderna, 2005.

42. MENDES, Iran Abreu. *A Trigonometria e o seu Ensino: Alguns Fragmentos dessa História*. Disponível em: <http:www.sbhe.org.br/novo/congressos/cbhe2/pdfs/Tema7/0737.pdf>.

43. MINAS GERAIS, Secretaria de Estado de Educação. *A Avaliação em Larga Escala e o Ensino de Matemática.* SIMAVE/PROEB. Revista do Sistema/2011. vol. 1. Juiz de Fora: Faculdade de Educação/CAEd, UFJF, 2011.

44. _____. Secretaria de Estado de Educação. *Conteúdo Básico Comum – Matemática*. Educação Básica, 2007.

45. _____. Secretaria de Estado de Educação. *Da Aritmética do Cotidiano ao Problema Algébrico.* SIMAVE/PROEB. Revista Pedagógica – Matemática 3º ano do Ensino Médio. vol. 3. Juiz de Fora: Faculdade de Educação/CAEd, UFJF, 2011.

46. _____. Secretaria de Estado de Educação. *Matrizes de Referência para Avaliação*. Sistema Mineiro de Avaliação da Educação Pública. Matemática (Simave). Juiz de Fora: Faculdade de Educação/CAEd, UFJF, 2009.

47. PACHECO, Edison Roberto; SIMIONATO, Ivane Marcarini. *Um Olhar Histórico à Trigonometria como Fonte de Motivação em Sala de Aula*. Disponível em: <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/700-4.pdf>.

48. PIMENTA, Carlos R. T.; OLIVEIRA, Márcio P.. *Projeto Geométrico de Rodovias*. 2ª ed. São Carlos: RiMa, 2004.

49. RIBEIRO, Danilo Chagas. *Como Funciona o Sistema GPS? Curiosidades, técnicas, porquês, histórias e outros aspectos*. Disponível em: <www.popa.com.br>.

50. ROQUE, Tatiana. *História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas*. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

51. SACRAMENTO, José Maria Cardoso. *Técnico em Agrimensura*. 2009. Disponível em:<http:///www.conceicaodoaraguaia.ifpa.edu.br/index.php?option=com_content&view=category&layout=blog&id=80&Itemid=173>.

52. SANTOS, Rui; VEIGA, Ana. *Papiro de Rhind*. 2002. Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/seminario/rhind>.

53. SILVA, Célia Maria da. *Concepções de Professores de Matemática sobre a Utilização da História da Matemática no Processo de Ensino Aprendizagem*. 2008. Disponível em: <http://limc.ufrj.br/htem4/papers/15.pdf>.

54. SMOLE, Kátia Stocco; DINIZ, Maria Ignez. *Matemática Ensino Médio*. Vol. 1, 2, 3. 6ª ed. São Paulo: Saraiva, 2010.

55. TIPLER, Paul A.; MOSCA, Gene. *Física para Cientistas e Engenheiros*. Vol. 2: Eletricidade e Magnetismo, Óptica. Rio de Janeiro: LTC, 2009.

56. YOUSSEF, Antonio Nicolau; SOARES, Elizabeth; FERNANDEZ, Vicente Paz. *Matemática*. 1ª ed. São Paulo: Scipione, 2008.

APÊNDICE

TRIGONOMETRIA NOS LIVROS DIDÁTICOS

Apesar do ensino da Trigonometria não se obrigatório no Ensino Fundamental de acordo com os PCN e CBC, os livros didáticos destinados ao 9º ano do Ensino Fundamental trazem um capítulo ou dois destinados a ele, tendo como foco a Trigonometria no Triângulo Retângulo.

Já nos livros destinados ao Ensino Médio percebemos que os conteúdos referentes ao ensino da Trigonometria vão além dos sugeridos pelas propostas e orientações curriculares.

A seguir faremos uma análise geral de como é abordado o ensino da Trigonometria em três coleções de livros didáticos de cada nível de ensino.

No Ensino Fundamental, os livros escolhidos são os livros adotados pelas escolas públicas do município de Raul Soares:

a) *Tudo é Matemática*, de Luiz Roberto Dante, Editora Ática, 2011.

b) *A conquista da Matemática*, de José Ruy Giovanni Júnior e Benedicto Castrucci, Editora FTD, 2009.

c) *Matemática e Realidade*, de Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce e Antônio Machado, Editora Saraiva, 2009.

Já os livros escolhidos do Ensino Médio são os livros enviados pelo PNLD para a única escola pública da sede do município que oferta este nível de ensino:

a) *Matemática Ciência e Aplicações*, de Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, David Degenszajn, Roberto Périgo e Nilze de Almeida, Editora Saraiva, 2010.

b) *Matemática Contexto e Aplicações*, de Luiz Roberto Dante, Editora Ática, 2011.

c) *Matemática Ensino Médio*, de Kátia Stocco Smole e Maria Ignez Diniz, Editora Saraiva, 2010.

1 Abordagem da Trigonometria nos Livros Didáticos do Ensino Fundamental

Ao analisarmos os livros didáticos do 9º ano de cada coleção percebemos que nos livros *Tudo é Matemática* e *A Conquista da Matemática* introduzem o capítulo destinado ao estudo da Trigonometria com referência à História da Matemática e a etimologia da palavra Trigonometria, ao passo que no livro *Matemática e Realidade* o assunto é introduzido direto com exemplos envolvendo semelhança de triângulos retângulos semelhantes.

ESTUDANDO AS RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS NOS TRIÂNGULOS

A palavra **Trigonometria** significa medida das partes de um triângulo.

A necessidade de se calcular grandes distâncias, aliada à falta de instrumentos adequados para esse fim, era um grande problema para os estudos de Astronomia, para a navegação e para a agrimensura.

Desde a Antiguidade, o céu vem sendo usado como mapa, calendário e relógio.

Trigonometria do grego trigono (triangular) e metria (medida).

266

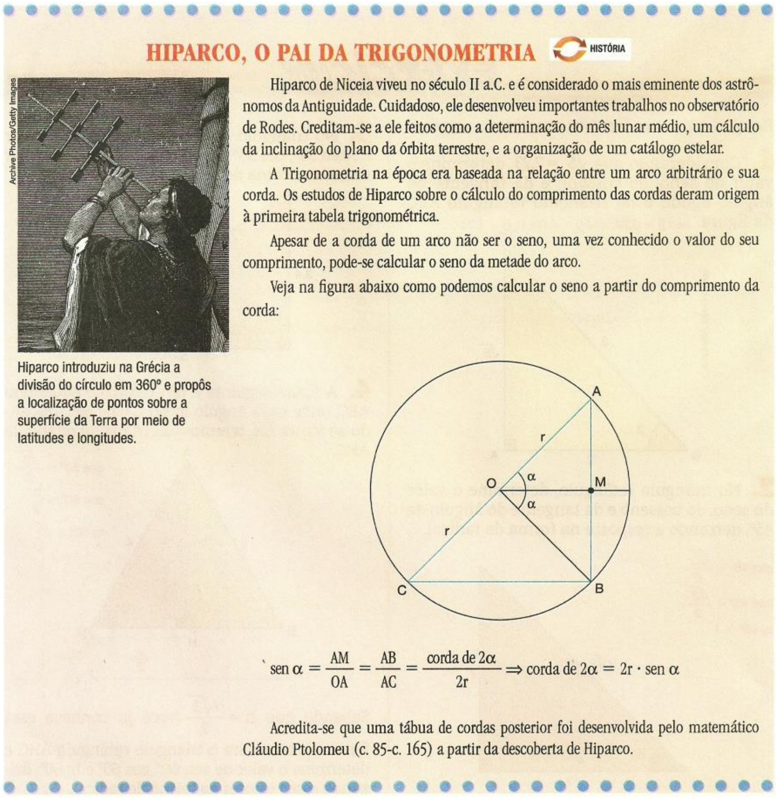
QUEM INVENTOU A TRIGONOMETRIA?

Há indícios de que os babilônios (habitantes da antiga Mesopotâmia, atual Iraque) efetuaram estudos rudimentares de Trigonometria.
Mais tarde, os estudos de Astronomia feitos por egípcios e gregos deram grande impulso no desenvolvimento da Trigonometria.
A partir desses estudos, grandes distâncias puderam ser calculadas considerando as relações entre as medidas dos lados e dos ângulos de um triângulo.
A Trigonometria possui aplicações na Engenharia, na Eletrônica, na Medicina, na Aeronáutica e também na Música.

267

Introdução do capítulo de Trigonometria do livro
A Conquista da Matemática (Castrucci; Júnior, 2009).

No livro *A Conquista da Matemática* também encontramos um pequeno texto intitulado “*Hiparco, o Pai da Trigonometria”*. Todos os textos ou fragmentos de textos sobre a História da Matemática são apenas ilustrativos. A proposta pedagógica apresentada pelos livros não demonstram valorizá-la como recurso didático.



HIPARCO, O PAI DA TRIGONOMETRIA

HISTÓRIA

Hiparco de Niceia viveu no século II a.C. e é considerado o mais eminente dos astrônomos da Antiguidade. Cuidadoso, ele desenvolveu importantes trabalhos no observatório de Rodes. Creditam-se a ele feitos como a determinação do mês lunar médio, um cálculo da inclinação do plano da órbita terrestre, e a organização de um catálogo estelar.

A Trigonometria na época era baseada na relação entre um arco arbitrário e sua corda. Os estudos de Hiparco sobre o cálculo do comprimento das cordas deram origem à primeira tabela trigonométrica.

Apesar de a corda de um arco não ser o seno, uma vez conhecido o valor do seu comprimento, pode-se calcular o seno da metade do arco.

Veja na figura abaixo como podemos calcular o seno a partir do comprimento da corda:

Archive Photos/Getty Images

Hiparco introduziu na Grécia a divisão do círculo em 360° e propôs a localização de pontos sobre a superfície da Terra por meio de latitudes e longitudes.

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{AM}{OA} = \frac{AB}{AC} = \frac{\text{corda de } 2\alpha}{2r} \Rightarrow \text{corda de } 2\alpha = 2r \cdot \text{sen}\,\alpha$$

Acredita-se que uma tábua de cordas posterior foi desenvolvida pelo matemático Cláudio Ptolomeu (c. 85-c. 165) a partir da descoberta de Hiparco.

Texto do livro *A Conquista da Matemática* (Castrucci; Júnior, 2009).

Basicamente as três obras apresentam as definições das razões trigonométricas por meio da semelhança de triângulos.

As demonstrações das relações entre as razões trigonométricas: relação fundamental ($sen\,\alpha + cos\alpha = 1$), feita pelo Teorema de Pitágoras, e tangente como razão entre seno e cosseno são apresentadas nos livros *Matemática e Realidade* e *Tudo é Matemática*. Nesse último livro vemos a relação entre as razões trigonométrica de ângulos complementares.

Somente no livro *Matemática e Realidade* o cálculo para os valores das razões trigonométricas dos ângulos notáveis (30°, 45° e 60°) são demonstradas completamente.

No livro *Tudo é Matemática* encontramos uma página dedicada ao seno e cosseno de ângulos obtuso de forma evasiva e descontextualizada e o próprio texto do livro explica que a parte teórica que fundamenta estes cálculos será estudada no Ensino Médio.

O estudo das Relações Trigonométricas em um Triângulo Qualquer é apresentado pelos livros *A Conquista da Matemática* e *Tudo é Matemática*.

Esse último aproveita para demostrar o uso das relações trigonométricas em polígonos regulares inscritos em uma circunferência.

A quantidade de atividades é satisfatória sempre focada na resolução de problemas. Portanto, cabe ao professor utilizar a estratégia de resolução de problemas para promover uma aprendizagem significativa e não colaborar para mera memorização de fórmulas.

A atividade mais interessante é apresentada no livro *Tudo é Matemática* na seção Projeto em Equipe - Trabalhando a Trigonometria:

63 PROJETO EM EQUIPE: TRABALHANDO COM A TRIGONOMETRIA

Reúna-se com seus colegas e procurem:

- pesquisar a história da trigonometria. Com essa pesquisa é possível descobrir novos fatos interessantes, como, por exemplo, que ela já era conhecida por volta de 140 a.C. graças aos estudos do astrônomo grego Hiparco de Niceia (190 a.C.-125 a.C.).
- usar a trigonometria para resolver algum problema de ordem prática, como medir a altura de uma árvore bem alta nas proximidades de sua escola.

Atividade do livro *Tudo é Matemática* (Dante, 2011).

Analisando o Manual do Professor, presente nos livros, encontramos apenas no livro *A Conquista da Matemática*, página 89, uma sugestão criativa que coloca o estudante diante de uma situação real de aplicação da Trigonometria.

Esse Manual sugere: "*oriente seus alunos a se reunir em duplas e pesquisar em um Atlas Geométrico (ou guia de ruas) três cidades (ou bairros). Peça que primeiro determinem duas distâncias e o ângulo formado entre elas. Ressalte a importância de utilizarem a escala indicada no mapa para realizar os cálculos e encontrar as distâncias reais entre os dois lugares selecionados. Depois, proponha a determinação da 3ª distância em relação aos dois lugares antes indicados*."

2 Abordagem da Trigonometria nos Livros Didáticos do Ensino Médio

Ao fazer uma breve análise dos livros didáticos destinados ao Ensino Médio é possível verificar que em todos a Trigonometria no Triângulo

Retângulo está presente no primeiro volume de cada coleção, introduzindo o capítulo com textos contendo fragmentos da História da Trigonometria, entretanto sem intenção de desenvolver um trabalho pedagógico levando em consideração esses os textos presentes nas obras.

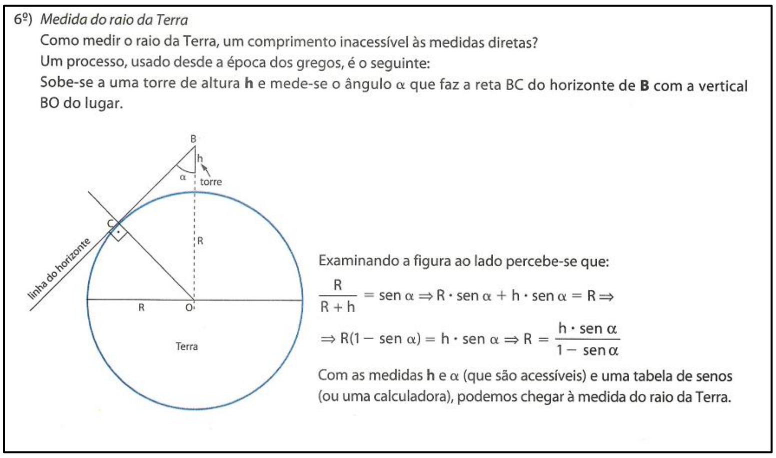
No livro *Matemática Ensino Médio* há uma rápida revisão sobre Triângulos Retângulos, Teorema de Pitágoras e Teorema de Tales, o que proporciona ao estudante rever assuntos abordados no Ensino Fundamental e iniciar o estudo da Trigonometria com os conhecimentos prévios necessários.

A Semelhança de Triângulos é o recurso utilizado para a introdução das definições das razões trigonométricas. Os valores das razões trigonométricas dos ângulos notáveis (30°, 45° e 60°) são demonstrados pela aplicação do Teorema de Pitágoras no cálculo da altura do triângulo equilátero e na diagonal de um quadrado.

Encontramos também no primeiro volume de cada obra demonstrações para algumas relações entre seno, cosseno e tangente. A quantidade de exercícios é satisfatória e priorizam a resolução de problemas.

Duas atividades merecem ser mencionadas:

1ª) *Medindo o raio da Terra*, presente no livro *Matemática Contexto e Aplicações*, que explora o processo usado desde a época dos gregos para medir o raio da Terra.



6º) *Medida do raio da Terra*

Como medir o raio da Terra, um comprimento inacessível às medidas diretas?

Um processo, usado desde a época dos gregos, é o seguinte:

Sobe-se a uma torre de altura **h** e mede-se o ângulo α que faz a reta BC do horizonte de **B** com a vertical BO do lugar.

Examinando a figura ao lado percebe-se que:

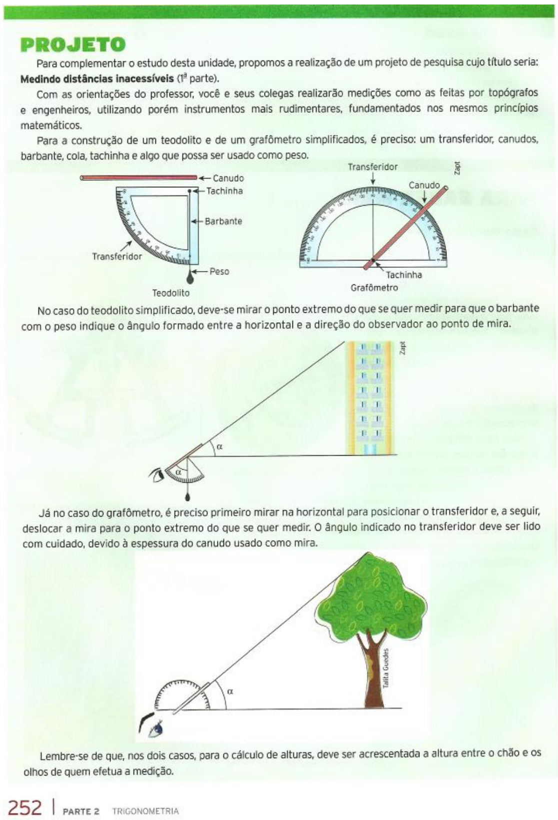
$$\frac{R}{R+h} = \text{sen}\,\alpha \Rightarrow R \cdot \text{sen}\,\alpha + h \cdot \text{sen}\,\alpha = R \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R(1 - \text{sen}\,\alpha) = h \cdot \text{sen}\,\alpha \Rightarrow R = \frac{h \cdot \text{sen}\,\alpha}{1 - \text{sen}\,\alpha}$$

Com as medidas **h** e α (que são acessíveis) e uma tabela de senos (ou uma calculadora), podemos chegar à medida do raio da Terra.

Atividade do livro *Matemática Contexto e Aplicações (Dante, 2011).*

2ª) Um Projeto presente no livro *Matemática Ensino Médio*, com o título "*Medindo Distâncias Inacessíveis*", onde os alunos são convidados a realizar medições como as feitas por topógrafos e engenheiros utilizando instrumentos rudimentares, como teodolitos e grafômetro simplificados, fundamentados nos mesmos princípios matemáticos.



PROJETO

Para complementar o estudo desta unidade, propomos a realização de um projeto de pesquisa cujo título seria: **Medindo distâncias inacessíveis** (1ª parte).

Com as orientações do professor, você e seus colegas realizarão medições como as feitas por topógrafos e engenheiros, utilizando porém instrumentos mais rudimentares, fundamentados nos mesmos princípios matemáticos.

Para a construção de um teodolito e de um grafômetro simplificados, é preciso: um transferidor, canudos, barbante, cola, tachinha e algo que possa ser usado como peso.

No caso do teodolito simplificado, deve-se mirar o ponto extremo do que se quer medir para que o barbante com o peso indique o ângulo formado entre a horizontal e a direção do observador ao ponto de mira.

Já no caso do grafômetro, é preciso primeiro mirar na horizontal para posicionar o transferidor e, a seguir, deslocar a mira para o ponto extremo do que se quer medir. O ângulo indicado no transferidor deve ser lido com cuidado, devido à espessura do canudo usado como mira.

Lembre-se de que, nos dois casos, para o cálculo de alturas, deve ser acrescentada a altura entre o chão e os olhos de quem efetua a medição.

252 | PARTE 2 TRIGONOMETRIA

Atividade do Projeto do Livro *Matemática Ensino Médio* (Smole, Diniz, 2009)

Neste último livro também encontramos também um capítulo destinado às Relações Trigonométricas em um Triângulo Qualquer, com a demonstração da Lei dos Senos e Lei dos Cossenos, esta última demonstração é utilizada para provar o teorema da área de um triângulo qualquer ($S = \frac{1}{2}\, b.c.sen\, \hat{A}$).

Nos outros dois livros esse assunto é tratado no 2º volume, com demonstração seguida de resolução de problemas.

O estudo do Círculo Trigonométrico nas obras analisadas, presente a partir do 2º volume das obras, é basicamente iniciado com a definição do mesmo, a relação entre as unidades de medidas (graus e radianos), ângulo central e comprimento de um arco.

Em seguida são apresentadas as Funções Trigonométricas, com seus respectivos período, domínio e imagem.

A demonstração da Relação Fundamental é feita pelo Teorema de Pitágoras e a tangente como razão de seno e cosseno, pelo Teorema de Tales.

Os gráficos são esboçados a partir de funções simples, fora de uma situação problema contextualizada. As equações e inequações são apresentadas de forma rápida e simples.

Nos livros *Matemática Ensino Médio* e *Matemática Ciência e Aplicações*, as funções trigonométricas da soma ou da diferença de dois arcos são demostrados a partir da fórmula do cosseno da diferença de dois arcos que é feita usando a distância entre dois pontos. As funções trigonométricas do arco duplo são deduzidas a partir da soma de dois arcos. Somente no livro *Matemática Ensino Médio* encontramos dedução das funções do arco metade, feita a partir do cosseno do arco duplo.

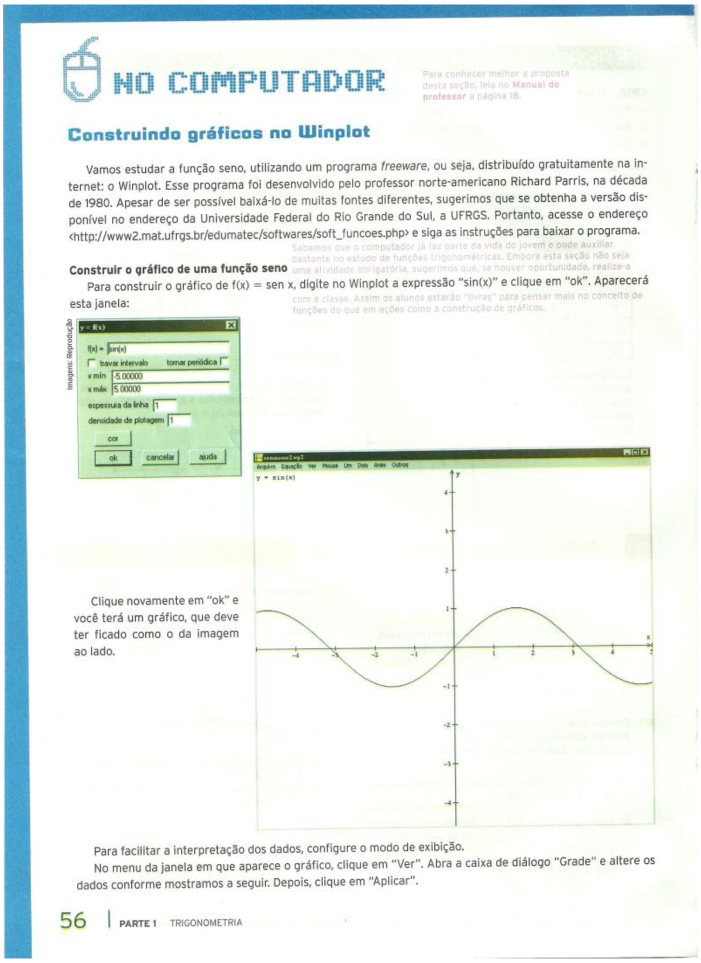
No livro *Matemática Contexto e Aplicações* não há demonstrações das fórmulas de adição e subtração de arcos e as fórmulas do arco duplo e transformação em produto recorrem à fórmula da adição de arcos.

Somente no livro *Matemática Ciência e Aplicações* encontramos a definição das razões cotangente, cossecante e secante demonstradas através da semelhança de triângulos.

Na coleção *Matemática Ensino Médio* encontramos duas seções interessantes: a "*Calculadora*", que orienta o estudante a manusear a calculadora científica e "*No Computador*" com sugestões de atividade a serem desenvolvida com recursos computacionais. Na seção "*No Computador*" presente nos capítulos destinados ao estudo da Trigonometria a atividade sugerida e a construção de gráficos no Winplot[78].

---

[78]Software gratuito, distribuído pela internet e desenvolvido pelo professor norte-americano Richard Parris na década de 80. Este software oferece a possiblidade de trabalhar com gráficos de funções.



NO COMPUTADOR

Para conhecer melhor a proposta desta seção, leia no **Manual do professor** a página 18.

Construindo gráficos no Winplot

Vamos estudar a função seno, utilizando um programa *freeware*, ou seja, distribuído gratuitamente na internet: o Winplot. Esse programa foi desenvolvido pelo professor norte-americano Richard Parris, na década de 1980. Apesar de ser possível baixá-lo de muitas fontes diferentes, sugerimos que se obtenha a versão disponível no endereço da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, a UFRGS. Portanto, acesse o endereço <http://www2.mat.ufrgs.br/edumatec/softwares/soft_funcoes.php> e siga as instruções para baixar o programa.

Sabemos que o computador já faz parte da vida do jovem e pode auxiliar bastante no estudo de funções trigonométricas. Embora esta seção não seja uma atividade obrigatória, sugerimos que, se houver oportunidade, realize-a com a classe. Assim os alunos estarão "livres" para pensar mais no conceito de funções do que em ações como a construção de gráficos.

Construir o gráfico de uma função seno

Para construir o gráfico de f(x) = sen x, digite no Winplot a expressão "sin(x)" e clique em "ok". Aparecerá esta janela:

Clique novamente em "ok" e você terá um gráfico, que deve ter ficado como o da imagem ao lado.

Para facilitar a interpretação dos dados, configure o modo de exibição.

No menu da janela em que aparece o gráfico, clique em "Ver". Abra a caixa de diálogo "Grade" e altere os dados conforme mostramos a seguir. Depois, clique em "Aplicar".

56 | PARTE 1 TRIGONOMETRIA

Atividade da seção *No Computador* do livro

Matemática Ensino Médio (Smole; Diniz, 2009)

A partir dessa rápida análise das três coleções dos livros didáticos percebemos que o estudo da Trigonometria de acordo com as proposta curriculares nacionais e estaduais vigentes é amplamente explorado, indo além do conteúdo básico exigido.

Entretanto as propostas pedagógicas não permitem ao professor atuar conforme as orientações pedagógicas presentes nestas propostas, visto que não são explorados tópicos da História da Matemática com recurso pedagógico, pois os textos são meramente ilustrativos. Não há também nos livros sugestão de trabalhos interdisciplinares, são apresentadas apenas algumas conexões com outras áreas em textos apresentados ao longo dos capítulos.