UNIVERSIDADE FEDERAL DOS VALES DO JEQUITINHONHA E MUCURI
INSTITUTO DE CIÊNCIA, ENGENHARIA E TECNOLOGIA
CURSO DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

A TEORIA DOS SUBCONSTRUTOS SOBRE NÚMEROS RACIONAIS: UMA PROPOSTA DE ATIVIDADE UTILIZANDO O GEOGEBRA

Alano Gomes de Oliveira

Teófilo Otoni

2021

UNIVERSIDADE FEDERAL DOS VALES DO JEQUITINHONHA E MUCURI
INSTITUTO DE CIÊNCIA, ENGENHARIA E TECNOLOGIA

A TEORIA DOS SUBCONSTRUTOS SOBRE NÚMEROS RACIONAIS: UMA PROPOSTA DE ATIVIDADE UTILIZANDO O GEOGEBRA

Alano Gomes de Oliveira

Orientador(a):

Weversson Dalmaso Sellin

Co-orientador(a):

Niusarte Virginia Pinheiro

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, como parte dos requisitos exigidos para a conclusão do curso.

Teófilo Otoni

2021

Catalogação na fonte - Sisbi/UFVJM

048 Oliveira, Alano Gomes de
2021 A teoria dos subconstrutos sobre números racionais: uma proposta de atividade utilizando o Geogebra [manuscrito] / Alano Gomes de Oliveira. -- Teófilo Otoni, 2021.
94 p. : il.

Orientador: Prof. Weversson Dalmaso Sellin.
Coorientador: Prof. Niusarte Virgínia Pinheiro.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) -- Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Teófilo Otoni, 2021.

1. Números racionais. 2. Subconstrutos. 3. Tecnologias digitais. 4. Geogebra. 5. Geogebrabook. I. Sellin, Weversson Dalmaso. II. Pinheiro, Niusarte Virgínia. III. Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri. IV. Título.

Elaborada pelo Sistema de Geração Automática de Ficha Catalográfica da UFVJM com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Bibliotecário Rodrigo Martins Cruz / CRB6-2886
Técnico em T.I. Thales Francisco Mota Carvalho

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DOS VALES DO JEQUITINHONHA E MUCURI

ALANO GOMES DE OLIVEIRA

A TEORIA DOS SUBCONSTRUTOS SOBRE NÚMEROS RACIONAIS: UMA PROPOSTA DE ATIVIDADE UTILIZANDO O GEOGEBRA

Dissertação apresentada ao programa de Pós-Graduação **em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT** da Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri, **nível de Mestrado ,** como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática.**

Orientador: **Prof. Dr. Weversson Dalmaso Sellin**

Co-orientadora: **Profa. Dra. Niusarte Virginia Pinheiro**

Data de aprovação 30/09/2021.

Prof. Dra. Deborah Faragó Jardim - (UFVJM)

Prof. Dr. Carlos Magno Martins Cosme - (CEFET/BH)

Documento assinado eletronicamente por **Weversson Dalmaso Sellin**, **Servidor**, em 01/10/2021, às 19:45, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Niusarte Virginia Pinheiro**, **Servidor**, em 01/10/2021, às 20:14, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Deborah Faragó Jardim**, **Servidor**, em 02/10/2021, às 07:55, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Carlos Magno Martins Cosme**, **Usuário Externo**, em 04/10/2021, às 15:56, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufvjm.edu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **0461678** e o código CRC **CFD4840E**.

Referência: Processo nº 23086.010952/2021-77 SEI nº 0461678

À minha esposa Soraia, às minhas filhas Anna Letíca e Anna Laura, aos meus familiares, aos meus colegas e amigos da UESB e da UFVJM e aos meus orientadores Weversson e Niusarte que me apoiaram ao longo dessa trajetória.

AGRADECIMENTO

Primeiramente a Deus, a quem devemos dar graças em todas as circunstâncias, pois esta é a vontade de Deus.(1Tessalonicenses5:18)

À minha família, pelo apoio e paciência.

Aos colegas, pela diversão, pelos lanches e (às vezes) estudo.

Aos professores Weversson Dalmaso Sellin e Niusarte Virgínia Pinheiro pela orientação, apoio, amizade, colaboração e principalmente pela paciência, sem a qual este trabalho não se realizaria.

Aos professores e funcionários do ICET, que durante esses anos contribuíram de algum modo para o nosso enriquecimento pessoal e profissional.

"Em algum momento da vida cometemos ou cometeremos atos que nós mesmos consideramos loucura".

(Frase elaborada pelo autor)

RESUMO

Este trabalho apresenta uma pesquisa bibliográfica, numa abordagem histórica acerca do uso de algumas tecnologias, principalmente as digitais, no estudo dos diversos conceitos de números racionais, denominados subconstrutos. Apresenta uma discussão sobre as expectativas pedagógicas referente ao estudo dos números racionais conforme previsão em documentos oficiais como a Base Nacional Comum Curricular e o Currículo Referência de Minas Gerais e apresenta como objetivo principal a construção de um Geogebrabook, um livro virtual na plataforma geogebra.org com atividades contemplando os subconstrutos dos números racionais sob diversas perspectivas de aprendizagem. A partir de um estudo teórico, explana contribuições de tecnologias como o quadro-negro, as calculadoras, os computadores, a internet, as planilhas eletrônicas, os softwares de geometria dinâmica e principalmente, o Geogebra, que passou de software de matemática dinâmica a plataforma digital. A partir da análise de diversos autores e numa comparação com as abordagens apresentadas em livros didáticos atuais, a pesquisa contempla os subcosntrutos parte-todo, medida, razão, quociente, classes de equivalência, operador e decimal e por fim, apresenta, como produto para a Educação Básica, um livro digital(Geogebrabook) com atividades desenvolvidas na plataforma geogebra.org acerca dos subconstrutos do números racionais que servirão para utilização como material didático na Educação Básica.

Palavras-chave: Números racionais, subconstrutos, tecnologias digitais, geogebra, Geogebrabook

ABSTRACT

This work presents a bibliographical research, in a historical approach about the use of some technologies, mainly the digital ones, in the study of the diverse concepts of rational numbers, denominated subconstructs. It presents a discussion on the pedagogical expectations regarding the study of rational numbers as foreseen in official documents such as the Common National Curriculum Base and the Reference Curriculum of Minas Gerais and presents as its main objective the construction of a Geogebrabook, a virtual book on the geogebra.org platform with activities covering the subconstructs of rational numbers from different perspectives of learning. Based on a theoretical study, it explains the contributions of technologies such as the blackboard, calculators, computers, the internet, electronic spreadsheets, dynamic geometry software and, above all, Geogebra, which changed from dynamic mathematics software to digital platform. From the analysis of several authors and in a comparison with the approaches presented in current textbooks, the research contemplates the subconstructs part-whole, measure, ratio, quotient, equivalence classes, operator and decimal and finally, presents, as a product for Basic Education, a digital book (Geogebrabook) with activities developed on the geogebra.org platform about the subconstructs of rational numbers that will be used as teaching material in Basic Education.

Keywords: Rational numbers, subconstructs, digital technologies, geogebra, Geogebrabook

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE ABREVIATURAS

Dr. - Doutor.

Me. - Mestre.

MSc. - Master of Science.

PhD. - Doctor of Philosophy.

LISTA DE SIGLAS

MEC - Ministério da Educação.

UFVJM - Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri.

PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

TDIC- Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação

BNCC - Base Nacional Comum Curricular

CRMG - Currículo Referência de Minas Gerais

RNTD - Rede Nacional de Transmissão de Dados

PNLD - Programa Nacional do Livro Didático

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Em novembro de 1999 iniciei minha experiência como professor de matemática em escolas públicas e desde então percebi constantes tentativas de mudanças no sistema de ensino. Cada governo, seja ele municipal, estadual ou federal, tenta implantar aquilo que considera mais interessante para a nossa sociedade. Para tanto promovem palestras, cursos de capacitação e, principalmente, criam leis que impactam direta ou indiretamente nas vidas dos docentes e discentes. Apesar disso, ainda temos uma certa liberdade para planejar, avaliar, criar modelos de aulas e desenvolver projetos, o que torna a educação brasileira dinâmica .

Diante dessa realidade e na busca por aperfeiçoamento profissional ingressei no PROFMAT, um programa de mestrado semipresencial na área de Matemática com atividades relevantes para a docência em matemática. O regimento do referido programa apresenta como opção para trabalho de conclusão de curso o desenvolvimento de materiais didáticos e instrucionais pertinentes ao Currículo de Matemática da Educação Básica e que tenha impacto na prática didática em sala de aula. (SBM, 2011).

Nessa perspectiva, uma nova tendência que se apresenta é o uso das Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação - TDIC, em práticas educacionais. Tais propostas têm por objetivo tornar a aula interativa e mais atraente, despertando no sujeito o interesse em aprender. Neste sentido, o objeto de estudo dessa investigação é o uso do software Geogebra no estudo dos números racionais.

Nas escolas brasileiras costumamos estudar números racionais, de forma sistemática, a partir do 4º ano do Ensino Fundamental, como podemos observar nos objetos de conhecimento em documentos oficiais como a BNCC[1] ou o CRMG[2]. Nestes documentos, o estudo dos números racionais está previsto até os anos finais do Ensino Fundamental. Nesse nível de ensino, o tema é apresentado na forma de números decimais finitos ou infinitos com parte decimal periódica e, normalmente, são representados na forma decimal ou na forma de fração $\frac{p}{q}$ com $q \neq 0$.

Na busca de melhor compreensão sobre ensino e aprendizagem dos números ra-

[1]Base Nacional Comum Curricular
[2]Currículo Referência de Minas Gerais

cionais, a partir da década de 70, estudos relacionados ao tema apresentam um consenso no sentido de que a construção do ensino e aprendizagem dos números racionais depende da compreensão deste tema dentro de várias ramificações e que chegar a uma compreensão da noção destes números depende da edificação de um elo entre estas ramificações, também denominadas subconstrutos.

Nesta pesquisa apresentaremos um breve histórico do uso das tecnologias na educação e buscaremos enfatizar a potencial contribuição das tecnologias digitais no processo de ensino aprendizagem, em especial o Geogebra, um software de matemática dinâmica que se tornou uma plataforma digital onde muitas pessoas, no mundo todo, produzem e publicam materiais didáticos e boas propostas de ensino. O trabalho também discute as expectativas pedagógicas referentes ao estudo dos números racionais conforme previsão da BNCC/CRMG.

Para o ensino e aprendizagem de números racionais e seus respectivos construtos, desenvolvemos nesta investigação, como produto educacional, um Geogebrabook na plataforma geogebra.org.

Este livro digital contém atividades acerca dos subconstrutos dos números racionais. Este produto educacional ficará disponível para uso e consulta de qualquer indivíduo que tenha acesso à internet e aos dispositivos para uso da mesma. Nesta perspectiva de construir um recurso pedagógico dinâmico (o geogebrabook), esta pesquisa busca responder a seguinte questão: Como o processo de ensino e aprendizagem dos números racionais e seus subconstrutos podem ser potencializados por meio do software geogebra ?

Na sequência apresentamos os objetivos que norteiam o desenvolvimento do trabalho.

1.1 Objetivo Geral

Esta investigação tem como objetivo principal o desenvolvimento de um livro virtual (GeogebraBook) com atividades contemplando o estudo dos subconstrutos dos números racionais sob diversas perspectivas de aprendizagem.

1.2 Objetivos específicos

O desenvolvimento deste trabalho será baseado na busca dos seguintes objetivos:

1. Discutir as expectativas pedagógicas referentes ao estudo dos números racionais conforme previsão da BNCC/CRMG;

2. Refletir sobre a importância das tecnologias digitais no processo de ensino e aprendizagem da matemática;

3. Discutir as potencialidades do software Geogebra para o estudo dos números racionais;

4. Elaborar uma proposta de atividade no software Geogebra para o estudo dos subconstrutos dos números racionais.

1.3 Organização do trabalho

Neste capítulo introdutório são apresentadas as justificativas para o trabalho, bem como seus objetivos gerais e específicos. E no seguinte, tratamos dos procedimentos metodológicos que nortearam o desenvolvimento da pesquisa.

No Capítulo 3 são abordadas as expectativas de aprendizagem dos números racionais na BNCC, bem como as abordagens como objetos de conhecimento e suas habilidades exigidas.

Posteriormente, no Capítulo 4 são discutidos os conceitos matemáticos relacionados ao estudo dos números racionais e seus subconstrutos dentro da interpretação de vários pesquisadores como (KIEREN, 1976, 1980, 1993), (FREUDENTHAL, 1983), (VERGNAUD, 1983), (ROMANATTO et al., 1997) e (OHLSSON, 1988) e detalhamos os subconstrutos parte-todo, medida, razão, quociente, classes de equivalência, operador e decimal dos números racionais, definindo cada um deles e apresentando exemplos e comparações com conceitos abordados em livros didáticos do Ensino Fundamental.

Na sequência, refletimos sobre a importância das tecnologias na educação e principalmente para o estudo da matemática, destacando o uso do quadro-negro, das calculadoras e das tecnologias digitais de informação e comunicação (TDIC), nas quais destacamos o computador, a internet, o uso das planilhas eletrônicas, os softwares de geometria dinâmica e, em especial o Geogebra.

Já no Capítulo 6, apresentamos uma proposta de atividade desenvolvida na plataforma Geogebra.org para o estudo dos subconstrutos dos números racionais: a construção de um Geogebrabook com atividades contemplando o estudo dos subconstrutos dos números racionais sob diversas perspectivas de aprendizagem. As atividades podem ser acessadas pelos links disponibilizados em cada capítulo descrito do Geogebrabook e por fim, apresentamos nas considerações finais uma síntese das atividades apresentadas em cada capítulo deste trabalho, perspectivas de uso do material produzido e pesquisas futuras.

2 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Caracterizamos este estudo, quanto à abordagem, em pesquisa de natureza qualitativa e, com relação aos fins ou objetivos, em exploratória, descritiva e explicativa. Classificamos, também, como uma investigação aplicada ou prática, no que diz respeito à utilização dos seus resultados.

Optamos pela pesquisa qualitativa porque esta abordagem prioriza as descrições, comparações e interpretações. Por esta ótica, qualquer tipo de pesquisa que venha a produzir resultados que não sejam alcançados por meio de procedimentos estatísticos ou por outras formas de quantificação, pode ser considerada qualitativa. Mesmo que alguns dados possam ser quantificados, o fundamental no processo de análise é a interpretação (STRAUSS, 2008).

Tendo em vista adquirir maior familiaridade com o problema de investigação e torná-lo mais explícito, utilizamos a pesquisa exploratória porque este tipo de pesquisa realiza descrições precisas tendo em vista descobrir as relações existentes entre os diversos elementos que compõem o estudo (CERVO; BERVIAN; SILVA, 2007). Além disso, o planejamento da pesquisa exploratória é flexível e, como nesta pesquisa, na maioria dos casos assume a forma de pesquisa bibliográfica (GIL, 2007).

Como parte da pesquisa exploratória, a bibliográfica "se efetua tentando-se resolver um problema ou adquirir conhecimentos a partir do emprego predominante de informações advindas de materiais gráfico, sonoro e informatizado" (BARROS; LEHFELD, 2000, p. 70). Ainda na direção da caracterização, quanto à forma de estudo, a pesquisa descritiva se aproxima da explicativa quando identifica a natureza das variáveis e determina a natureza dessa relação. "Nesse caso, tem-se uma pesquisa descritiva que se aproxima da explicativa" (GIL, 2007, p. 42). Nesta perspectiva, a junção dessas duas pesquisas são as que habitualmente realizam os pesquisadores preocupados com a atuação prática (GIL, 2007).

Sob essa ótica, inicialmente, analisamos os documentos legais BNCC e CRMG que norteiam as organizações curriculares do Ensino Fundamental no Brasil. Na sequência, investigamos na literatura da área, os estudos sobre números racionais e seus construtos. Tomamos como referência, principalmente, as ideias dos seguintes pesquisadores, entre outros: (KIEREN, 1976, 1980, 1993); (ROMANATTO et al., 1997); (VERGNAUD, 1983); (FREUDENTHAL, 1983).

Os estudos teóricos sobre as tecnologias digitais como recursos didáticos sobre os quais fundamentamo-nos, entre outros, em (GIRALDO; CAETANO; MATTOS, 2012), (GRAVINA, 1996) e, em particular, do software Geogebra, foram fundamentais para responder ao problema de pesquisa e alcançar os objetivos propostos, ou seja, a construção da proposta de atividades, de forma dinâmica e interativa, para estudo dos números racionais.

O conhecimento científico, de acordo com (GIL, 2007, p. 42) "está assentado nos resultados oferecidos pelos estudos explicativos". Para o autor, embora mais sujeito a erros, "esse é o tipo de pesquisa que mais aprofunda o conhecimento da realidade, porque explica a razão, o porquê das coisas" (Idem). Nessa direção, utilizamos a pesquisa explicativa para identificar as características e estabelecer relações entre os construtos dos números racionais para, assim, obter subsídios para a construção das propostas de atividades práticas no Geogebra.

Por fim, motivados pelo desejo de construir uma proposta de atividades envolvendo os construtos dos números racionais por meio do Geogebra, conforme (CERVO; BERVIAN; SILVA, 2007, p. 60) "para fins práticos mais ou menos imediatos, buscando soluções para problemas concretos", ou seja, as dificuldades de aprendizagem dos estudantes do Ensino Fundamental no que diz respeito aos referidos números, usamos a pesquisa aplicada. Em síntese, utilizamos este tipo de pesquisa para construir um Geogebrabook contendo propostas de atividades práticas para o ensino e a aprendizagem dos números racionais. A escolha do Geogebra e a produção do GeogebraBook na plataforma Geogebra.org foi motivada por vários aspectos, dentre os quais elencamos os seguintes: liberdade, visto que o Geogebra é um software multiplataforma e de distribuição livre, bem como disponível de forma online na plataforma Geogebra.org; colaboratividade, pois na plataforma Geogebra.org é possível disponibilizar as construções/atividades sob a licença Creative Commons: Attribution ShareAlike, o que permite a cópia e utilização dos materiais disponíveis, além da possibilidade de se criar atividades em grupos colaborativos (possibilidade essa que utilizamos no trabalho para a produção do GeogebraBook), etc;

dinamicidade, o que permite a criação de atividades que propiciam uma interação entre o usuário e o software transformando o primeiro em indivíduo ativo na produção de conhecimento.

3 EXPECTATIVA DE APRENDIZAGEM DOS NÚMEROS RACIONAIS NA BNCC

A Base Nacional Comum Curricular é um documento obrigatório e norteador das organizações curriculares nas escolas e para a prática do professor em todo território nacional. Homologado pelo Ministério da Educação (MEC) em dezembro de 2017, este documento determina os conhecimentos essenciais (e habilidades) que os estudantes devem apropriar-se na escola. Todas as instituições educativas, sejam particulares ou públicas, são obrigadas a adotar em seus currículos a BNCC como parâmetro da educação infantil ao ensino médio.

Tomando por base documentos curriculares brasileiros recentes, a BNCC considera que os diversos campos que compõem a Matemática aglutinam um conjunto de ideias fundamentais que se articulam, entre os quais: "equivalência, ordem, proporcionalidade, interdependência, representação, variação e aproximação" (BRASIL, 2017, p.268). De acordo com o referido documento,

> Essas ideias fundamentais são importantes para o desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos e devem se converter, na escola, em objetos de conhecimento. A proporcionalidade, por exemplo, deve estar presente no estudo de: operações com os números naturais; representação fracionária dos números racionais; áreas; funções; probabilidade etc. (BRASIL, 2017, p.268)

Analisando os conteúdos de Matemática previstos na BNCC para o Ensino Fundamental e, particularmente, a temática números racionais, cria-se a seguinte expectativa de aprendizagem para os alunos:

> Na perspectiva de que os alunos aprofundem a noção de número, é importante colocá-los diante de tarefas, como as que envolvem medições, nas quais os números naturais não são suficientes para resolvê-las, indicando a necessidade dos números racionais tanto na representação decimal quanto na fracionária. (BRASIL, 2017, p.269)

Visando contribuir para o atendimento dessa expectativa, a escolha dos números racionais como objeto de estudo se dá a partir das observações do autor enquanto professor de Matemática da rede pública de ensino levando em consideração a grande deficiência de aprendizagem dos alunos em relação a este conteúdo. Na sequência, discutiremos a presença dos números racionais na BNCC.

3.1 Números Racionais como objeto de conhecimento na BNCC

Conforme prescreve o documento BNCC, deve-se introduzir o estudo dos números racionais a partir do 4º ano do Ensino Fundamental. Nos anos iniciais, Unidade Temática Números, os objetos de conhecimento relativos a esses números são: “frações unitárias mais usuais ($\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{10}$ e $\frac{1}{100}$)”e “representação decimal para escrever valores do sistema monetário brasileiro” (BRASIL, 2017, p.290). As habilidades a serem alcançadas nesta fase são o reconhecimento destas frações como unidades de medidas menores do que uma unidade, utilizando a reta numérica como recurso e reconhecer que as regras do sistema de numeração decimal podem ser estendidas para a representação decimal de um número racional e relacionar décimos e centésimos com a representação do sistema monetário brasileiro (BRASIL, 2017).

Para o 5º ano, o objetivo é um pouco mais amplo: o estudo de números racionais expressos na forma decimal e sua representação na reta numérica; a comparação e ordenação de números racionais na representação decimal e fracionária; utilização da noção de equivalência; o cálculo de porcentagens e sua representação fracionária e a resolução de problemas envolvendo adição, subtração, multiplicação e divisão com números racionais cuja representação decimal é finita (BRASIL, 2017). As habilidades exigidas para esses conteúdos são: ler, escrever e ordenar números racionais na forma decimal com compreensão das principais características do sistema de numeração decimal, utilizando, como recursos, a composição e decomposição e a reta numérica; identificar e representar frações (menores e maiores que a unidade), associando-as ao resultado de uma divisão ou à ideia de parte de um todo, utilizando a reta numérica como recurso; identificar frações equivalentes; comparar e ordenar números racionais positivos (representações fracionária e decimal), relacionando-os a pontos na reta numérica; associar as representações 10%, 25%, 50%, 75% e 100% respectivamente à décima parte, quarta parte, metade, três quartos e um inteiro, para calcular porcentagens, utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, em contextos de educação financeira, entre outros; resolver e elaborar problemas de adição, subtração, multiplicação e divisão com números naturais e com números racionais, cuja representação decimal seja finita, utilizando estratégias diversas (BRASIL, 2017).

Dando sequência aos estudos iniciados nos anos iniciais do Ensino Fundamental, a BNCC recomenda que sejam ministrados, no 6º ano do Ensino Fundamental, os seguintes conteúdos: escrita e comparação de números racionais representados em forma decimal, bem como o estudo das frações: significados(parte/todo, quociente), equivalência, comparação, cálculo da fração de um número natural e operações de adição e subtração de frações e, por fim, as operações (adição, subtração, multiplicação e divisão) com números racionais. Neste ano espera-se alcançar habilidades como: comparação, ordenação, leitura e escrita de números racionais (cuja representação decimal é finita fazendo uso da reta numérica); compreensão, comparação e ordenação de frações associadas às ideias de partes de inteiros, identificando frações equivalentes; reconhecer que os números racionais positivos podem ser expressos nas formas fracionárias e decimal, estabelecendo relações entre essas representações, passando de uma para outra e além disso, relacioná-los a pontos na reta numérica; resolver e elaborar problemas que envolvam o cálculo da fração de uma quantidade e cujo resultado seja um número natural, com e sem uso de calculadora; resolver e elaborar problemas que envolvam adição ou subtração com números racionais positivos na representação fracionária; resolver e elaborar problemas com números racionais positivos na representação decimal, envolvendo as quatro operações fundamentais e a potenciação por meio de estratégias diversas (BRASIL, 2017).

Para o 7º ano do Ensino Fundamental, dando sequência ao estudo da unidade temática Números, a BNCC prescreve os seguintes conteúdos: o estudo da fração e seus significados - como parte de inteiros, resultado da divisão, razão e operador; cálculo de porcentagens de acréscimos e decréscimos simples e, ainda, exploração dos números racionais na representação fracionária e na decimal; usos, ordenação e associação com pontos da reta e operações. Neste ano, a ideia é alcançar algumas habilidades como resolver problemas que envolvam porcentagens, como os que lidam com acréscimo e decréscimos simples; comparar e ordenar números racionais em diferentes contextos e associá-los a pontos de uma reta numérica; compreender e utilizar a multiplicação e a divisão de números racionais, a relação entre elas e suas propriedades operatórias; resolver e elaborar problemas que envolvam as operações com números racionais (BRASIL, 2017).

Já no 8º ano, o tema "números racionais" é percebido como objeto de estudo nas porcentagens e dízimas periódicas. Nas habilidades a serem alcançadas temos a resolução e elaboração de problemas envolvendo cálculo de porcentagens e o reconhecimento e utilização de procedimentos para a obtenção de uma fração geratriz para uma dízima periódica (BRASIL, 2017).

No 9º ano, o estudo dos números racionais se faz presente em problemas que envolvem cálculo de percentuais sucessivos na busca de atingir a habilidade de resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, com a ideia de ampliação de percentuais sucessivos e a determinação das taxas percentuais, preferencialmente com o uso de tecnologias digitais, no contexto da educação financeira (BRASIL, 2017).

Cabe esclarecer que o Currículo Referência do Estado de Minas Gerais (CRMG) foi criado em consonância com a BNCC. Deste modo, observamos os mesmos objetos de conhecimento e habilidades já citados acima em relação ao estudo dos números racionais, inclusive nos mesmos anos de escolaridade (MINAS GERAIS, 2018).

Para encerrar essa seção, é importante esclarecer que, além da busca por documentos oficiais que justifiquem as expectativas pedagógicas para o ensino e aprendizagem de números racionais, precisamos dilucidar as várias interpretações sobre o conceito dos referidos números.

Neste sentido, encontramos uma literatura interessante nos últimos decênios do século XX na qual vários autores trabalharam no sentido de elucidar as diversas ramificações sobre a compreensão de números racionais. Os autores apontam que a compreensão do conceito de número racional depende da formulação de um elo entre essas ramificações (ROMANATTO et al., 1997). Essas várias ramificações de números racionais são chamadas de construtos ou subconstrutos (KIEREN, 1976), interpretações (BEHR et al., 1983) ou campo semântico (OHLSSON, 1988) e serão abordadas no próximo capítulo.

Quanto à quantidade de construtos, Kieren (1976, 1980) traz entre quatro e sete em suas obras. Outros autores apontam 4, 5 ou 6 o que indica que essa categorização das interpretações dos números racionais não são um consenso entre os pesquisadores. No entanto, todos os trabalhos consultados convergem para um denominador comum: que uma compreensão completa dos números racionais depende de entender separadamente cada uma dessas ramificações (ou construtos) e formar um elo de ligação entre as mesmas.

4 NÚMEROS RACIONAIS

Neste capítulo discutiremos os conceitos matemáticos relacionados ao estudo dos números racionais e seus construtos. Várias são as interpretações atribuídas a estes números e o conhecimento destas nos ajudará na produção de material didático para servir de apoio a professores e alunos que buscarem a apropriação desse conhecimento matemático.

No Brasil, costumamos tratar o conceito de número racional de uma maneira mais direta a partir do 4º ano do Ensino Fundamental, como podemos observar nos objetos de estudo em documentos oficias como a BNCC ou o CRMG, prosseguindo até os anos finais do Ensino Fundamental.

A partir da década de 70 surgiram estudos relacionados ao ensino e aprendizagem dos números racionais tendo em vista a busca de uma melhor compreensão sobre o conceito dos referidos números e de um consenso no sentido de que os processos de ensino e aprendizagem desses números dependem da compreensão da noção destes dentro de várias ramificações. E para chegar a uma compreensão da noção destes números depende da edificação de um elo entre estas ramificações. A seguir apresentaremos alguns destes estudos, comparando-os com abordagens realizadas em alguns livros didáticos e que serviram de base para o desenvolvimento, num ambiente informatizado, de atividades que possam auxiliar na compreensão dos números racionais.

4.1 Os subconstrutos dos números racionais

O estudo dos números racionais é tratado por autores dentro de várias perspectivas e sua interpretação com variados sentidos, também denominados subconstrutos ou simplesmente construtos. Em meados da década de 70, Kieren (1976) introduziu a ideia de que os números racionais consistem de vários construtos e que compreender a noção desses números depende de adquirir um entendimento da confluência destes construtos.

Romanatto (1997) faz uma abordagem que reúne o pensamento dos principais autores, dentro de um contexto histórico.

Kieren (1976) analisa os números racionais dentro de sete interpretações:

1. os números racionais são frações que possam ser comparadas, somadas, subtraídas,

etc;

Nessa perspectiva, o autor enfatiza que o foco são os procedimentos (ou algoritmos) e propriedades operatórias das frações. Esses algoritmos/procedimentos concentram a manipulação de frações a nível simbólico sem levar em consideração quaisquer possíveis interpretações matemáticas. Os objetivos matemáticos dessa interpretação são considerados autocontidos, ou seja, não precisam formar base conceitual para estudos futuros em outras áreas da matemática, embora podem ser considerados importantes para manipulações algébricas.

2. os números racionais são frações decimais que formam uma extensão natural (via nosso sistema de numeração) para os números naturais;

   Do ponto de vista dessa interpretação, um número que apresenta representação decimal finita ou infinita periódica é o que se considera número racional. Os conteúdos matemáticos necessários para essa interpretação são básicos, visto que as operações necessárias são apenas extensões daquelas para números inteiros, com a divisão agora não precisando ter um "resto", no sentido da divisão euclidiana. Segundo Kieren (1976), um desenvolvimento dos números racionais exclusivamente a partir deste ponto de vista desconsidera a experiência pré-algébrica obtida a partir dos procedimentos e algoritmos referentes às operações envolvendo as frações no sentido do tópico 1 acima. No entanto, essa abordagem pode servir para a introdução do conceito de números irracionais, devido ao fato de ser relativamente simples construir exemplos de números cuja representação decimal seja infinita e não periódica. Por exemplo, se tomarmos o número 1,1234567891011121314..., obtido escrevendo após a vírgula a sequência dos números naturais, é de fato um número tendo uma representação decimal infinita e não periódica.

3. os números racionais são classes de equivalência de frações.

   Nesse contexto, um número racional é interpretado como um conjunto de pares ordenados de números inteiros, em que a equivalência de pares ordenados, identificando o par $(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ com a fração $\dfrac{a}{b}$, é dada por $\dfrac{a}{b} \simeq \dfrac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$. Assim $\{\,\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \cdots\}$ e $\{\frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{6}{9}, \frac{8}{12}, \cdots\,\}$ são exemplos de números racionais;

4. os números racionais são números da forma $\frac{p}{q}$ com $q \neq 0$ onde p e q são inteiros.

   Ao considerar um número racional com essa interpretação, também temos uma noção de equivalência e, por conseguinte, uma de classe de equivalência. Para obtermos os elementos equivalentes ao número racional $\frac{p}{q}$ multiplicamos p e q por uma mesma constante $k \in \mathbb{Z}^*$. Dessa forma, a classe de equivalência de $\frac{p}{q}$ é dada por $\{\frac{p}{q}, \frac{2p}{2q}, \frac{3p}{3q}, \cdots\}$.

5. os números racionais são operadores multiplicativos (por exemplo: ampliador, encolhedor, etc);

   Nessa abordagem os números racionais são interpretados como mapas/funções, que podem ser discretas no sentido do domínio e contradomínio serem conjuntos finitos, ou serem vistas como mapas do plano euclidiano em si próprio, etc.

6. os números racionais são elementos de um corpo quociente ordenado e infinito. Há números da forma $x = \frac{p}{q}$, *com* $q \neq 0$, onde satisfaz a equação $qx = p$;

   Nessa perspectiva os números racionais são elementos de um conjunto não vazio munido de duas operações, denominadas adição e produto e que gozam das propriedades características de um corpo, a saber: comutatividade, associatividade, elemento neutro, elemento unidade, distributividade e existência de simétricos e inversos. Dessa forma, os números racionais estão relacionados às estruturas algébricas abstratas e, geralmente, essa abordagem não é tratada na educação básica.

7. os números racionais são medidas ou pontos sobre a reta numérica;

   Os números racionais, considerados nessa interpretação, passam a ser pontos sobre a reta numérica, tendo como premissa fundamental a noção de que a unidade para a reta numérica, uma vez escolhida, pode ser dividida em qualquer número de partes congruentes, isto é, com o mesmo tamanho. Dessa forma, o número racional $\frac{a}{b}$ pode ser visto como a partes de b partes congruentes da unidade.

Posteriormente Kieren (1980) analisa os números racionais dentro de cinco ideias que considera básicas : relação de parte-todo, quociente, medida, razão e operador. Nessa abordagem ele trabalha as operações e o conceito de extensão natural para os números naturais dentro das ideias básicas citadas.

Freudenthal (1983) acrescenta quatro construtos para as frações, os quais o autor considera a fonte fenomenológica dos conceitos dos números racionais: fraturador, inteiros divididos em partes iguais, comparadores, operador. A noção de fração como fraturador se refere aos aspectos experimentais das frações que estão baseados em atividades como comparar quantidades e grandezas pela visão e tato, dobrando e pesando parte, nas mãos ou numa balança. Em relação ao conceito de fração como inteiros divididos em partes iguais o autor considera que é a forma mais concreta que estas se apresentam em atividades como partir, fatiar, cortar ou colorir. Já a noção de fração como comparadores, estende-se à noção de parte de um todo para outro em que partes de inteiros diferentes são comparadas, mas também estende à noção de fração para incluir frações maiores que a unidade e, por fim, como operador, que surge também nos três construtos anteriores.

Em 1983, Behr, Lesh, Post e Silver reestabeleceram os subconstrutos de Kieren em diferentes termos : uma comparação de parte para todo, um decimal, uma razão, uma divisão indicada (quociente),uma taxa, coordenadas lineares e um operador. Além disso, defendem que a compreensão completa dos números racionais requer não apenas uma compreensão de cada um desses subconstrutos separados, mas também como eles se inter-relacionam.

Segundo estes autores, o desenvolvimento da ideia de números racionais é visto como um contexto ideal para investigar os processos gerais de aquisição de conceitos matemáticos porque :

> 1. Muito do desenvolvimento ocorre no limiar de um período significativo de reorganização cognitiva (isto é, a transição do pensamento operacional concreto para o formal);
> 2. transições qualitativas interessantes ocorrem não apenas na estrutura dos conceitos subjacentes, mas também nos sistemas representacionais usados para descrever e modelar essas estruturas;
> 3. os papéis dos sistemas representacionais são bastante diferenciados e interagem de maneiras psicologicamente interessantes porque as características figurativas e operacionais da tarefa são críticas;
> 4. o conceito de número racional envolve um rico conjunto de subconstrutos e processos integrados, relacionados a uma ampla gama de conceitos elementares, mas profundos (por exemplo, medição, probabilidade, sistemas de coordenadas, gráficos, etc.). (BEHR et al., 1983)

Em meados da década de 80, Nesher (1985) distingue as seguintes noções de números racionais : fração como relação parte-todo, resultado da divisão de dois números, razão, operador e probabilidade. Em sua interpretação, parte-todo, divisão e razão são considerados como os esquemas mais importantes ao se pensar em frações.

Temos também, já nos anos finais da década de 80, as contribuições de Ohlsson (1988) que analisa os números racionais dentro de quatro perspectivas :

1. $\frac{a}{b}$, com $b \neq 0$, onde a e b são quantidades em que uma é descrita em relação a outra (Por exemplo, 3 homens para cada 4 mulheres);
2. considerando $b \neq 0$, $\frac{a}{b}$ é uma partição, onde a é uma quantidade e b um parâmetro. O numerador é operado num caminho que é denominado pelo denominador (Por exemplo, uma pizza dividida em 4 partes);
3. $\frac{a}{b}$, com $b \neq 0$, corresponde à ideia de operações compostas, parâmetro e quantidade. O numerador é um multiplicador e o denominador um divisor aplicados à mesma quantidade (Por exemplo, um balão é reduzido a $\frac{2}{3}$ de seu tamanho inicial);
4. o quarto caso, parâmetro/parâmetro não é interpretado.

Na sequência, tomando como base as noções de construtos estabelecidas acima, trazemos uma breve análise e comparação com o conceito de número racional presente em alguns livros didáticos de Matemática distribuído pelo PNLD[1] aos alunos da Educação Básica Brasileira. Especificamente, trataremos dos conceitos de números racionais dentro das análises dos subconstrutos parte-todo, medida, razão, quociente, classes de equivalência, operador e decimal.

4.1.1 Os números racionais como subconstruto Parte-Todo

Este subconstruto é considerado parte fundamental para todas as demais interpretações de números racionais, pois trata-se da principal característica destes números que é a capacidade de fracionar um objeto, uma quantidade contínua ou um conjunto de objetos discretos em subpartes ou conjuntos de mesmo tamanho (cardinalidade). Geralmente nesta interpretação, o símbolo $\frac{p}{q}$, com q≠0, se refere a uma parte fracionária de uma única quantidade.

Como exemplo encontramos a ilustração da Figura 4.1 que indica a quantidade de figurinhas que Ana já completou de seu álbum em relação ao total. Na Figura 4.1, Ana aparenta estar feliz por já ter 45 figurinhas de uma total de 100, ou seja, a parte(45) de um todo(100) e indica essa quantidade usando o símbolo $\frac{45}{100}$. Note que cada figurinha

[1]Programa Nacional do Livro Didático

representa uma parte do total de figurinhas.

Figura 4.1: Figura do subconstruto parte-todo

Fonte: (SILVEIRA; MARQUES, 2018, p.129)

4.1.2 Os números racionais como subconstruto Medida

A interpretação de números racionais como medida envolve uma compreensão da noção de área, contagem (no caso de conjuntos discretos), comprimento etc. Sabemos que regiões geométricas, conjuntos de objetos e a própria reta numérica são os modelos mais comuns usados para representar frações na Educação Básica. A reta numérica adiciona uma particularidade não presente em medidas com regiões geométricas ou conjuntos de objetos discretos, particularmente quando se utiliza unidades de comprimento distintas ao mesmo tempo. Alguns estudos apontam para uma facilidade maior dos estudantes quando associam frações a segmentos de reta de comprimento unitário.(BEHR et al., 1983).

De um livro didático do 6º ano do ensino fundamental, retiramos o exemplo ilustrado na Figura 4.2 de um jovem fazendo observações acerca de ”pedaços idênticos”de uma corda que, ao dividir em três pedaços, julgou ter em cada pedaço uma parte de três, ou seja, $\frac{1}{3}$. Por se tratar de uma medida podemos considerar como um exemplo deste subconstruto, mas que também poderia ser tratado como exemplo do subconstruto parte-todo.

Figura 4.2: Figura do subconstruto medida

Fonte: (SILVEIRA; MARQUES, 2018, p.129)

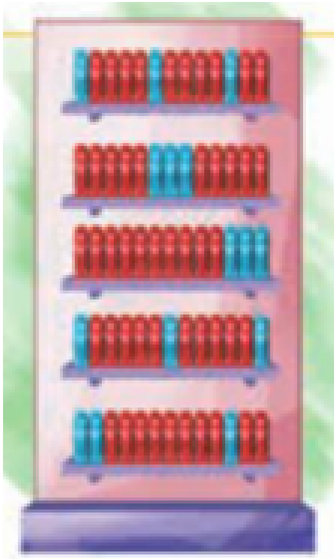
4.1.3 Os números racionais como subconstruto Razão

Nesta interpretação o símbolo $\frac{p}{q}$ (que já chamamos de fração) se refere a uma relação entre duas quantidades, que transmite a noção de magnitude relativa, uma importante ferramenta para resolver problemas pois, é mais corretamente considerado um índice comparativo do que um número e quando comparado a outra fração, nos leva ao conceito de proporcionalidade. Quando duas razões são iguais, dizemos que são proporcionais uma à outra.

No exemplo seguinte temos a exposição de produtos de higiene numa perfumaria. Em um dos expositores, representado na Figura 4.3, há desodorantes de embalagem azul e de embalagem vermelha. Nas prateleiras deste expositor, para cada 3 desodorantes de embalagem azul encontramos 10 desodorantes de embalagem vermelha, isto é, a quantidade de desodorantes de embalagem azul representa $\frac{3}{10}$ da quantidade de desodorantes de embalagem vermelha. Note que, neste caso estamos indicando um comparativo entre quantidades de produtos distintos, diferente da comparação de parte para todo. Outra fração que pode representar o resultado dessa comparação é $\frac{15}{50}$, já que, nesse expositor, há 15 desodorantes de embalagem azul e 50 desodorantes de embalagem vermelha.

Analisando a mesma situação, mas com dois expositores iguais, conforme ilustrado na Figura 4.4 podemos considerar que $\frac{3}{10}$ ou $\frac{15}{50}$ representam o resultado da comparação entre a quantidade de desodorantes de embalagem azul e a quantidade de desodorantes de embalagem vermelha, pois nos dois expositores temos 3 desodorantes de

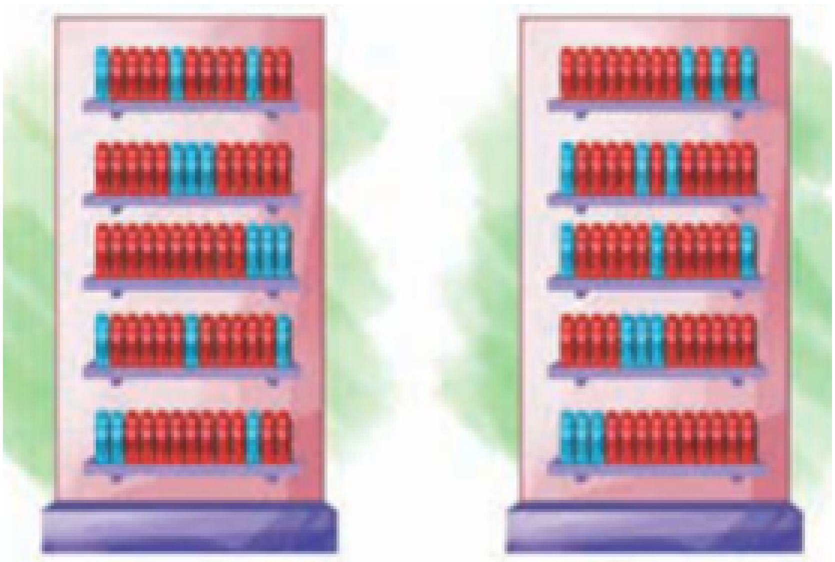
Figura 4.3: Figura do subconstruto razão



Fonte: (BIANCHINI, 2018, p.161)

embalagem azul para cada 10 desodorantes de embalagem vermelha (ou 15 para 50).

Figura 4.4: Figura do subconstruto razão



Fonte: (BIANCHINI, 2018, p.161)

4.1.4 Os números racionais como subconstruto Divisão Indicada (Quociente)

Observando as interpretações anteriores, no subconstruto parte-todo, o símbolo $\frac{p}{q}$ se refere a uma parte fracionária de uma única quantidade. Já a interpretação dos números racionais como razão aponta para uma relação entre duas quantidades. Porém, o símbolo

$\frac{p}{q}$ também pode ser usado para se referir a uma operação. Ou seja, $\frac{p}{q}$, às vezes é usado como uma forma de escrever $p \div q$. É assim que representamos a divisão indicada (ou quociente) dos números inteiros.

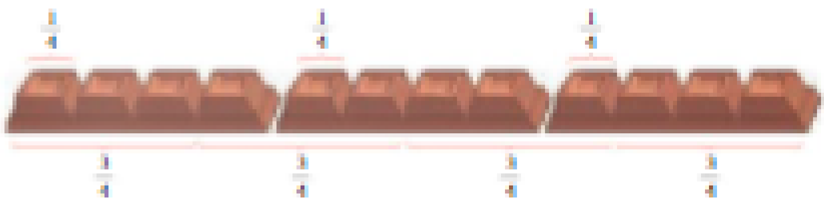
Considerando os números racionais como divisões temos dois tipos de entendimentos. Por um lado $\frac{5}{8}$ ou $\frac{6}{3}$ interpretado como quocientes resulta na relação de $\frac{5}{8}$ e 0,625 ou $\frac{6}{3}$ e 2. Existe um outro entendimento em que os números racionais podem ser considerados como elementos de um corpo quociente e assim, podem ser usados para definir equivalência, adição, multiplicação e outras propriedades de uma perspectiva puramente dedutiva, num nível de sofisticação que relaciona os números racionais a sistemas algébricos abstratos.

A situação ilustrada na Figura 4.5 na qual Luiza dividiu igualmente 9 maçãs para três pessoas, ficando cada uma com 3 maçãs, é um exemplo simples deste subconstruto. Podemos representar a situação como $9 \div 3 = \frac{9}{3} = 3$.

Figura 4.5: Figura do subconstruto quociente

Fonte: (SILVEIRA; MARQUES, 2018, p.129)

Figura 4.6: Figura do subconstruto quociente



Fonte: (SILVEIRA; MARQUES, 2018, p.157)

Já a Figura 4.6, retirada do mesmo livro didático, nos traz uma situação um pouco mais complexa, onde o conceito de fração como divisão nos leva à solução de um problema. A ideia era dividir igualmente 3 barras de chocolate para 4 pessoas. Para a solução, dividimos cada uma das barras em quatro partes e entregamos uma parte de cada barra para as pessoas envolvidas, ou seja $3 \div 4 = \frac{3}{4}$.

Mais uma vez observamos a relação entre os subconstrutos dos números racionais, onde um mesmo exemplo poderia ser usado para outras interpretações, neste caso os subconstrutos divisão e parte-todo.

4.1.5 Os números racionais como subconstruto Classes de Equivalência

Como apontado no texto, Kieren (1976) apresenta como uma das interpretações acerca dos números racionais a ideia de classes de equivalências de frações. Segundo o autor as frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ são equivalentes se $ad = bc$. Dessa forma, $\{\frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{6}{9}, \frac{8}{12}, \cdots\}$ é um exemplo de número racional.

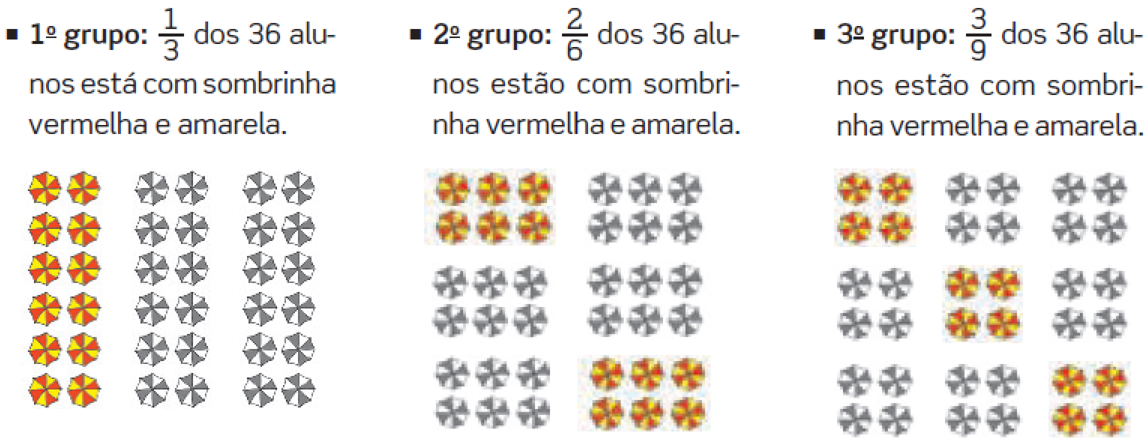
No livro didático do 6º ano do Ensino Fundamental, Bianchini (2018) traz o seguinte exemplo:

A coreografia da abertura dos jogos esportivos da escola onde Vítor estuda é feita por um grupo de 36 alunos, dos quais 12 utilizam uma sombrinha vermelha e amarela.

Em determinados momentos dessa coreografia, os alunos com sombrinha vermelha e amarela se movimentam, formando grupos diferentes em cada caso, como podemos observar na Figura 4.7.

Analisando a disposição dos alunos em cada grupo observado na Figura 4.7, a quantidade de alunos com sombrinha vermelha e amarela continua a mesma: 12 alunos. Assim, concluímos que as frações $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{6}$ e $\frac{3}{9}$ são equivalentes, pois representam a mesma parte(12 alunos) do todo (36 alunos). Neste sentido o autor considera equivalentes frações que, embora escritas de modo diferente(ou com números diferentes), representam a mesma parte de uma figura ou de um todo.

Figura 4.7: Figura do subconstruto classe de equivalência



Fonte: (BIANCHINI, 2018, p.166)

4.1.6 Os números racionais como subconstruto Operador

Este subconstruto dá a um número racional $\frac{p}{q}$ uma interpretação algébrica, onde $\frac{p}{q}$ é pensado como uma função que transforma figuras geométricas em figuras geométricas semelhantes, $\frac{p}{q}$ vezes maiores/menores.

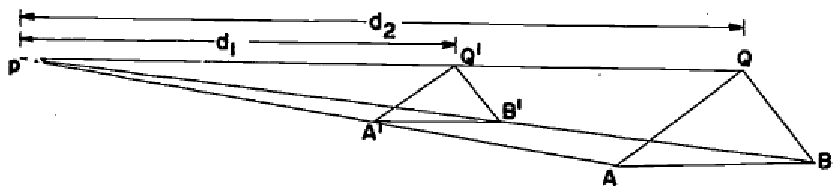
Nesta perspectiva, se multiplicarmos um segmento de reta de comprimento L pelo número racional $\frac{p}{q}$ significa dizer que o segmento será esticado p vezes e posteriormente reduzido q vezes. Pensando da mesma maneira, podemos considerar que um número racional $\frac{p}{q}$ transforma um conjunto com n elementos em um conjunto com np elementos e então esse número é reduzido para $\frac{np}{q}$.

Podemos também, na perspectiva do número racional como operador, tratar o número racional $\frac{p}{q}$ como uma função linear do tipo $f(x) = \frac{p}{q}x$ em que p pertence ao conjunto dos números inteiros e q pertence ao conjunto dos números inteiros não nulos.

Nos livros didáticos que consultamos, (SILVEIRA; MARQUES, 2018), (BIANCHINI, 2018), não encontramos nenhum exemplo explorando o conceito de número racional como operador. Por esse motivo, vamos utilizar um exemplo presente em Kieren (1976, p. 113). Quando se refere ao operador $\frac{2}{3}$ como transformação do plano no plano, ele diz que “pontos que distam 6 do ponto fixo P seriam transformados pelo operador $\frac{2}{3}$ em pontos que distam 4 de P”(Vide Figura 4.8).

Assim, o operador $\frac{4}{6}$ é o mesmo que o operador $\frac{2}{3}$, ou $\frac{4}{6}$ é equivalente a $\frac{2}{3}$. De fato,

Figura 4.8: Figura do subconstruto Operador



Fonte: (KIEREN, 1976, p.113)

existem infinitos operadores equivalentes a $\frac{2}{3}$.

Este autor trabalha as noções de produto e divisão de números racionais dentro das perspectiva deste operador. Para desenvolver sua linha de raciocínio cita que se a aplicação de um operador $\frac{a}{b}$ for seguida de outro operador $\frac{c}{d}$ equivale a aplicar o operador $\frac{ac}{bd}$, produto dos números racionais $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, ou seja, $\frac{a}{b}$ x $\frac{c}{d}$ = $\frac{ac}{bd}$. Segue daí que o operador inverso de $\frac{a}{b}$ é o operador $\frac{b}{a}$. Assim, ele conclui que "a noção de fração como operador conduz naturalmente à ideia de que os racionais formam um grupo multiplicativo" Kieren (1976, p.114). Afirma ainda que o modelo operador ilumina o conceito de divisão e para justificar diz : "para dividir $\frac{2}{3}$ por $\frac{7}{8}$ a questão é : que operador k leva $\frac{7}{8}$ em $\frac{2}{3}$ Kieren (1976, p.115) ? " . Para responder, usa a ideia de operador como função linear e argumenta que o operador $\frac{2}{3}$ leva 1 em $\frac{2}{3}$ e que o operador $\frac{8}{7}$ leva $\frac{7}{8}$ em 1. Assim

$$\frac{2}{3} \div \frac{7}{8} = \frac{2}{3} \times \frac{8}{7}.$$

4.1.7 Os números racionais como subconstruto Decimal

Essa interpretação de números racionais nos dá o resultado do subconstruto quociente numa espécie de relação de equivalência, em que $\frac{p}{q} = x$, com $q \neq 0$, implica em x sendo o resultado da divisão $p \div q$, ou seja, uma consequência da ideia de números racionais como quociente (divisão imediata). Importante destacar que o resultado desta divisão pode ser um número decimal finito ou decimal infinito e periódico, também chamados de dízima periódica.

Dado um número decimal finito, $N_n = a_0, a_1a_2a_3 \cdots a_n$, com n casas decimais, este pode ser representado com uma soma finita de frações decimais. Assim temos :

1. $N_1 = a_0 + \frac{a_1}{10^1} = \frac{p_1}{q_1}$, para números com uma casa decimal;

2. $N_2 = a_0 + \frac{a_1}{10^1} + \frac{a_2}{10^2} = \frac{p_2}{q_2}$, para números com duas casas decimais;

3. $N_3 = a_0 + \frac{a_1}{10^1} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} = \frac{p_3}{q_3}$, para números com três casas decimais;

4. $N_n = a_0 + \frac{a_1}{10^1} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} = \frac{p_n}{q_n}$, onde “n” representa o número finito de casas decimais do número “N”.

Por outro lado, seja o número decimal “N” uma dízima periódica, a sua representação fracionária é vista como o resultado de uma soma de termos de uma progressão geométrica infinita de razão maior que 0 e menor que 1. Vamos considerar algumas situações :

O número 1 é resultado da soma infinita $\frac{9}{10^1} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \cdots$ que converge para

$$\frac{\frac{9}{10^1}}{1 - \frac{1}{10^1}}.$$

O número 2 é resultado da soma infinita $\frac{9}{10^1} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \cdots + \frac{9}{10^1} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \cdots$ = $2.\{\frac{9}{10^1} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \cdots\}$ que converge para

$$\frac{\frac{18}{10^1}}{1 - \frac{1}{10^1}}.$$

Deste modo, podemos considerar todo número natural como soma dos termos de uma sequência infinita, as chamadas progressões geométricas infinitas de razão positiva menor que 1.

Na construção das dízimas periódicas positivas, vale ressaltar que todas elas seguem a ideia de resultado de uma soma de progressão geométrica infinita de razão positiva menor que 1 e que representarão números naturais quando o quociente entre o primeiro termo dessa sequência(progressão) foi divisível pela diferença entre 1 e a razão dessa sequência.

Como exemplos deste subconstruto temos, números como $\frac{6}{3}$ = 2; $\frac{15}{3}$ = 5; $\frac{12}{5}$ = 2,4; $\frac{1}{3}$ = 0,333..., entre outros.

5 AS TECNOLOGIAS DIGITAIS COMO RECURSO DIDÁTICO EM MATEMÁTICA

As tecnologias digitais avançaram significativamente na atualidade, estando presente por meio do celular, dos computadores, da internet, entre outras ferramentas, na vida das pessoas e em, praticamente, todos os lugares do planeta. Vivemos em uma época marcada pelo avanço tecnológico. E, por consequência, “grande parte das informações produzidas pela humanidade está armazenada digitalmente. Isso denota o quanto o mundo produtivo e o cotidiano estão sendo movidos por tecnologias digitais, situação que tende a se acentuar fortemente no futuro” (BRASIL, 2017, p.473).

As tecnologias avançam e não conseguimos pensar o mundo sem estas ferramentas, pois essa realidade promove mudanças nos hábitos e na cultura das pessoas. Nesse contexto,

> Há que se considerar, ainda, que a cultura digital tem promovido mudanças sociais significativas nas sociedades contemporâneas. Em decorrência do avanço e da multiplicação das tecnologias de informação e comunicação e do crescente acesso a elas pela maior disponibilidade de computadores, telefones celulares, tablets e afins, os estudantes estão dinamicamente inseridos nessa cultura, não somente como consumidores. (BRASIL, 2017, p. 61).

Como implicação direta do crescente acesso aos equipamentos tecnológicos e à rede mundial de computadores, os jovens acabam incorporando essa cultura tecnológica com maior facilidade.

> Os jovens têm se engajado cada vez mais como protagonistas da cultura digital, envolvendo-se diretamente em novas formas de interação multimidiática e multimodal e de atuação social em rede, que se realizam de modo cada vez mais ágil. Por sua vez, essa cultura também apresenta forte apelo emocional e induz ao imediatismo de respostas e à efemeridade das informações, privilegiando análises superficiais e o uso de imagens e formas de expressão mais sintéticas, diferentes dos modos de dizer e argumentar característicos da vida escolar. (BRASIL, 2017, p. 61).

Observamos, assim, a importância do uso de tecnologias digitais nas interações humanas em geral e, em particular, no ambiente educacional, conforme explicitado na BNCC:

> As experiências das crianças em seu contexto familiar, social e cultural, suas memórias, seu pertencimento a um grupo e sua interação com as mais diversas tecnologias de informação e comunicação são fontes que estimulam sua curiosidade e a formulação de perguntas. O estímulo ao pensamento criativo, lógico e crítico, por meio da construção e do fortalecimento da capacidade de fazer perguntas e de avaliar respostas, de argumentar, de interagir com diversas produções culturais, de fazer uso de tecnologias de informação e comunicação, possibilita aos alunos ampliar sua compreensão de si mesmos, do mundo natural e social, das relações dos seres humanos entre si e com a natureza. (BRASIL, 2017, p. 58).

As diversas dimensões que caracterizam as tecnologias digitais estão presentes na BNCC, tanto no que diz respeito aos conhecimentos e às habilidades quanto às atitudes e aos valores :

> 1. pensamento computacional: envolve as capacidades de compreender, analisar, definir, modelar, resolver, comparar e automatizar problemas e suas soluções, de forma metódica e sistemática, por meio do desenvolvimento de algoritmos;
> 2. mundo digital: envolve as aprendizagens relativas às formas de processar, transmitir e distribuir a informação de maneira segura e confiável em diferentes artefatos digitais – tanto físicos (computadores, celulares, tablets etc.) como virtuais (internet, redes sociais e nuvens de dados, entre outros) –, compreendendo a importância contemporânea de codificar, armazenar e proteger a informação;
> 3. cultura digital: envolve aprendizagens voltadas a uma participação mais consciente e democrática por meio das tecnologias digitais, o que supõe a compreensão dos impactos da revolução digital e dos avanços do mundo digital na sociedade contemporânea, a construção de uma atitude crítica, ética e responsável em relação à multiplicidade de ofertas midiáticas e digitais, aos usos possíveis das diferentes tecnologias e aos conteúdos por elas veiculados, e, também, à fluência no uso da tecnologia digital para expressão de soluções e manifestações culturais de forma contextualizada e crítica. (BRASIL, 2017, p. 474).

Assim, no texto da BNCC encontramos o reconhecimento das potencialidades das tecnologias digitais e as competências e habilidades previstas para as diversas áreas do conhecimento, que permitem aos estudantes:

> 1. buscar dados e informações de forma crítica nas diferentes mídias, inclusive as sociais, analisando as vantagens do uso e da evolução da tecnologia na sociedade atual, como também seus riscos potenciais;
> 2. apropriar-se das linguagens da cultura digital, dos novos letramentos e dos multiletramentos para explorar e produzir conteúdos em diversas mídias, ampliando as possibilidades de acesso à ciência, à tecnologia, à cultura e ao trabalho;
> 3. usar diversas ferramentas de software e aplicativos para compreender e produzir conteúdos em diversas mídias, simular fenômenos e processos das diferentes áreas do conhecimento, e elaborar e explorar diversos registros de representação matemática; e
> 4. utilizar, propor e/ou implementar soluções (processos e produtos) envolvendo diferentes tecnologias, para identificar, analisar, modelar e solucionar problemas complexos em diversas áreas da vida cotidiana, explorando de forma efetiva o raciocínio lógico, o pensamento computacional, o espírito de investigação e a criatividade. (BRASIL, 2017, p. 475).

A inclusão das tecnologias digitais como ferramenta auxiliar para os processos de ensino e aprendizagem está presente em todas as áreas do conhecimento na BNCC, colocando-a como uma competência a ser adquirida pelos estudantes da Educação Básica.

> Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva. (BRASIL, 2017, p.9)

Para a área de Matemática, conforme a BNCC, as tecnologias digitais são apresentadas como uma competência específica a ser adquirida no Ensino Fundamental: "Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive **tecnologias digitais disponíveis**, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados". (BRASIL, 2017, p.267).(Grifo nosso).

Assim, acreditamos que a utilização de metodologias digitais de forma interativa e dinâmica para o ensino e a aprendizagem de números racionais pode contribuir para a melhoria dos resultados na Educação Básica. Nessa perspectiva, o Currículo Referência do Estado de Minas Gerais elaborado em consonância com a BNCC, referenda - dentre as competências específicas para a área de Matemática no Ensino Fundamental - literalmente, a mesma competência. (MINAS GERAIS, 2018).

Diante dessas normatizações legais do sistema educacional por meio da BNCC e da CRMG e, considerando a relevância da inserção das tecnologias digitais como recurso facilitador da aprendizagem dos alunos, a seguir discutiremos brevemente aspectos históricos das tecnologias no âmbito educacional e, em particular, no ensino de Matemática.

5.1 A inserção das tecnologias digitais no ensino e aprendizagem da Matemática

Pensando em tecnologias para o ensino e a aprendizagem da matemática, discutiremos a seguir, algumas possibilidades de recursos digitais que poderão ser utilizados para mediar e facilitar a apropriação do conhecimento matemático por parte dos estudantes. Para iniciar discutiremos brevemente a importância do quadro negro e da calculadora.

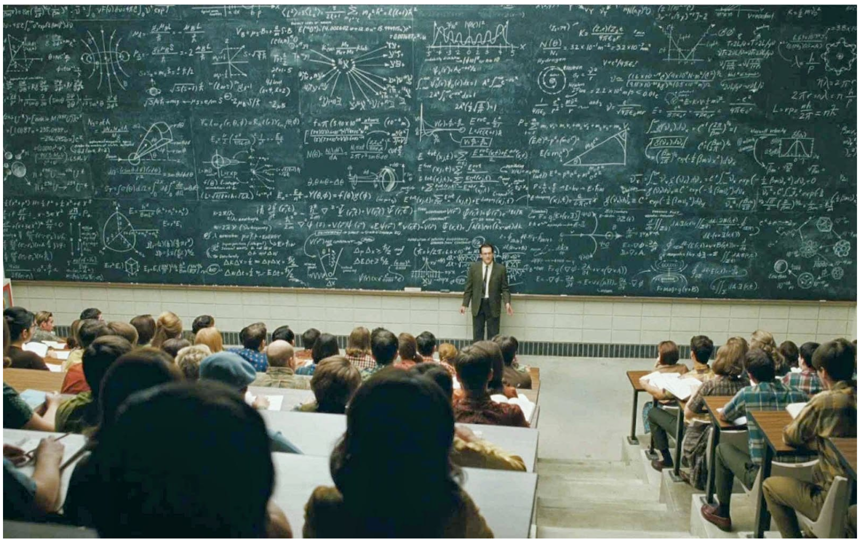
5.1.1 O quadro-negro

Apesar do título deste capítulo, optamos por começar discutindo o uso de alguns recursos que, ao nosso ver, contribuíram positivamente para o avanço do processo de ensino e aprendizagem. Neste sentido percebemos a importância do quadro-negro.

Apesar de não poder precisar de quando começou a ser utilizado, acredita-se que os primeiros quadros-negros surgiram na Escócia, no princípio do Século XIX e que, a partir de então, teriam se espalhado pelo mundo. Mas em algumas literaturas que tratam do assunto há relatos de que no final do Século XIX, este recurso visual foi considerado peça essencial do mobiliário escolar(NEVES, 2010).

A importância desse recurso didático começa a se tornar mais evidente a partir do momento que são usados quadros-negros com dimensões maiores, afixados nas paredes das salas de aula. A partir desse momento os professores puderam ministrar suas aulas com recursos visuais para turmas inteiras, em que todos os alunos podiam enxergar o quadro.

Figura 5.1: Quadro Negro



Fonte: (R7.COM, 2021, acesso em 08 de setembro de 2021)

.

Na Figura 5.1 podemos perceber um professor no exercício de sua função. Os alunos prestam atenção em sua aula e observam o quadro-negro, um importante recurso visual, que representou um grande avanço no processo de ensino e aprendizagem.

Originalmente, o quadro-negro foi construído com ardósia, em cor escura. Com o passar do tempo, sofreu algumas modificações, desde a sua estrutura física até a sua cor. Atualmente, muitas escolas utilizam quadros na cor branca, principalmente para tentar resolver problemas causados pelas reações alérgicas ao pó de giz.

5.1.2 A calculadora

"As calculadoras são certamente as tecnologias digitais mais simples, baratas e de fácil uso". (GIRALDO; CAETANO; MATTOS, 2012). Permitem agilizar cálculos aritméticos e por isso mesmo, podem ser usadas como um importante recurso didático.

As primeiras calculadoras não tiveram muitas funcionalidades, como as atuais, mas representaram um grande avanço para facilitar cálculos matemáticos, especialmente na aritmética.

Qual foi a primeira calculadora? Há notícias de dispositivos de cálculo no século XVI. (ARAÚJO; SOARES, 2002). As máquinas de calcular de Pascal e Schickard, do século XVII foram notoriamente um grande marco para a evolução desses dispositivos.

Figura 5.2: La Pascaline

Fonte: (WIKIPéDIA, 2007, acesso em 09/09/2021)

Na Figura 5.2 temos a imagem de umas das primeiras calculadoras, construída pelo matemático francês Blaise Pascal. Originalmente, o inventor pretendia construir uma máquina que realizasse as quatro operações fundamentais, mas conseguiu construir uma máquina que fazia diretamente operações de adição e subtração.

Não temos a intenção de mostrar toda a evolução tecnológica das calculadoras, mas apresentar como um importante recurso educacional, que pode e deve ser usado no processo de ensino e aprendizagem da matemática. Existem argumentos de alguns pesquisadores contrários à ideia, como apresentados no artigo Calculadoras e Outras Geringonças na Escola, de Araújo e Soares :

> [...]Se as crianças aprenderem a calcular com as máquinas, não saberão fazê-lo sem elas, passando a depender de aparatos que podem se danificar. [...]O uso de calculadoras faz com que os alunos se acostumem a calcular mecanicamente, sem pensar no que fazem. (ARAÚJO; SOARES, 2002, p.18).

Porém, os documentos oficiais como a BNCC e o CRMG recomendam o uso dessas máquinas na Educação Básica, desde anos iniciais do Ensino fundamental. Destacam este recurso como uma tecnologia capaz de avaliar e comparar resultados. Recomendam que o uso desse tipo de material precisa estar integrado a situações que propiciem a reflexão. Conforme a BNCC, promover a reflexão sobre a utilização de tecnologias desde os anos iniciais pode possibilitar aos alunos que, ao chegarem aos anos finais, possam ser estimulados a desenvolver o pensamento computacional. (BRASIL, 2017).

Além disso, em literaturas como em Giraldo (2012), traz reflexões no sentido de que o uso de tecnologias como a calculadora no processo de ensino e aprendizagem deve estar em sintonia com a vida exterior, fora dos muros de uma escola. Neste sentido o debate se faz importante a fim de promover o uso racional das tecnologias disponíveis.

Com o advento da internet, outras possibilidades surgiram para auxiliar no processo de aprendizagem dos alunos. Neste estudo destacaremos: as planilhas eletrônicas e os softwares, com destaque para o Geogebra e ambientes de geometria dinâmica.

5.1.3 A internet

A importância do uso de tecnologias digitais na educação e, em especial, na utilização de um software de matemática dinâmica (o Geogebra) no ensino e aprendizagem dos números racionais torna-se um aspecto relevante diante dos avanços tecnológicos da atualidade. É um tema bastante amplo e, por isso, sentimos a necessidade de explanar sobre o ambiente onde isso se tornou possível: a internet.

Definimos internet como um sistema global de redes de computadores interligadas que utilizam um conjunto próprio de protocolos com o propósito de servir progressivamente usuários no mundo inteiro. (WIKIPéDIA, 2007).

O surgimento, desenvolvimento e propagação da internet foi um fenômeno importante para o desenvolvimento da educação em geral e, em particular, para a matemática. De acordo com Wertheim (2001, p.164), a nível mundial, a internet (ciberespaço) surgiu na Califórnia em 1969. Neste ano foi criada a primeira rede de computadores a longa distância, denominada ASPANET, fundada pelo Departamento de Defesa dos Estados Unidos.

No Brasil, começamos a engatinhar na década de 80 como uma grande novidade, mas que não era acessível aos nossos lares. A tecnologia foi comercializada e hoje vivemos num mundo interligado aos ambientes virtuais. A seguir faremos um breve histórico da história do uso popular dos computadores, bem como, do uso desses equipamentos em ambiente escolar .

No Brasil, segundo Carvalho (2006), tivemos em caráter experimental, entre o Rio de Janeiro e São Paulo, as primeiras linhas específicas para transmissão digital instaladas pela Empresa Brasileira de Telecomunicações - Embratel. Esse serviço marcou a etapa inicial da RNTD (Rede Nacional de Transmissão de Dados), que foi inaugurada oficialmente em 1980 através do Decreto nº104, de maio de 1980. Inicialmente, a internet não se tornou muito popular, fenômeno que ocorreu posteriormente. Mas o que queremos destacar é a oferta desta importante ferramenta, que atualmente permite acessar inúmeros sites, softwares e se tornou um importante instrumento de pesquisa.

5.1.4 O computador

Até o final dos anos 70, o acesso a computadores era muito difícil devido ao alto custo, dimensão e disponibilidade no mercado. Eram grandes máquinas utilizadas por bancos e grandes empresas, que funcionavam em salas refrigeradas. Em 1977 foi criado o primeiro microcomputador como conhecemos hoje - o Apple II.

Na Figura 5.3, destaca-se o Apple II, um microcomputador com teclado integrado, monitor e duas entradas para disquetes.

A popularização dos computadores começou a se tornar possível com a criação de algumas empresas de informática muito famosas até hoje : a Microsoft e a Apple. As máquinas se tornaram menores e mais acessíveis.

Figura 5.3: Apple II

Fonte: (WIKIPéDIA, 2007)

5.1.5 As planilhas eletrônicas

Após destacarmos a relevância da calculadora, do computador e da internet, discutiremos a importância do uso das planilhas eletrônicas no ensino da Matemática. Elas oferecem mais recursos que uma calculadora comum e possibilitam:

> - visualizar e tratar dados numéricos com mais casas decimais;
> - manusear os dados de uma atividade com maior dinamismo, uma vez que é possível, por exemplo, usar o recurso arrastar para usar fórmulas e dados digitados numa célula ou planilha;
> - registrar dados numéricos, operações e fórmulas matemáticas na planilha, não sendo necessário anotar numa folha de papel e fazer controle paralelo normalmente usado quando trabalhamos com calculadoras comuns;
> - usar uma quantidade de símbolos e funcionalidades matemáticas bem maior que o de uma calculadora. (GIRALDO; CAETANO; MATTOS, 2012).

As planilhas eletrônicas são um um tipo de recurso muito importante para a construção de gráficos, estudo da estatística e educação financeira em geral. Está dentro das habilidades previstas para os estudantes da Educação Básica desde os anos iniciais do Ensino Fundamental. Assim sendo, consideramos importante melhorar a utilização desses recursos nas escolas.

Assim, cabe salientar a importância das planilhas eletrônicas. No livro Recursos Computacionais no Ensino de Matemática, os autores discorrem sobre os recursos disponíveis nas planilhas eletrônicas, destacando os abaixo discriminados:

> 1. manipulação e operações com grandes quantidades de dados numéricos;
> 2. articulação entre diversas formas de representação;
> 3. ferramentas lógicas;
> 4. ferramentas estatísticas. (GIRALDO; CAETANO; MATTOS, 2012, p.26)

Ainda sobre os recursos computacionais e, particularmente, em relação às planilhas eletrônicas, defendemos que o uso de softwares livres deve ser incentivado pois, além de gratuito, segundo Maia (2011), permite ao usuário utilizar, copiar, distribuir, modificar e estudar .

5.1.6 Softwares de geometria dinâmica

Uma outra opção tecnológica, um recurso computacional de grande valia para o ensino e aprendizagem da matemática é o uso de ambientes de geometria dinâmica. De acordo com Giraldo, Caetano e Mattos (2012, p. 114):

> [...] As ferramentas de geometria dinâmica permitem a construção de objetos geométricos de acordo com propriedades ou relações estabelecidas. Estes podem ser manipulados dinamicamente, de tal maneira que as propriedades e relações sejam preservadas. Em modo particular de construção geométrica apresenta características especiais, que podem ter consequências importantes para a aprendizagem. [...] a garantia de validade das propriedades e relações matemáticas do objeto representado é incorporada concretamente no próprio processo de construção da representação. (GIRALDO; CAETANO; MATTOS, 2012, p.114).

Esse dinamismo na manipulação de objetos permite ao usuário estabelecer relações entre objetos geométricos e suas propriedades auxiliando a contornar dificuldades de aprendizagem.

De acordo com Gravina (1996):

> [...] Na formação da imagem mental, o desenho associado ao objeto geométrico desempenha papel fundamental. Para o aluno nem sempre é de todo claro que o desenho é apenas uma instância física de representação do objeto. Se por um lado o desenho é um suporte concreto de expressão e entendimento do objeto geométrico - o que fica transparente na nossa atitude frente a um problema: a primeira coisa que fazemos é desenhar a situação, quer numa folha de papel ou quer na tela de um computador - por outro lado, pode ser um obstáculo a este entendimento. E isto porque guarda características particulares que não pertencem ao conjunto das condições geométricas que definem o objeto. (GRAVINA, 1996, p.3).

Os softwares de geometria dinâmica permitem aos alunos uma melhor compreensão e noções matemáticas. Como o próprio nome diz, é um recurso para ser utilizado no estudo da geometria (BRASIL, 2017) e seu uso está previsto em documentos oficiais como a BNCC e O CRMG.

A manipulação de objetos geométricos de forma dinâmica e a preservação de suas propriedades constituem uma importante ferramenta no processo de ensino e aprendizagem. Assim como as planilhas eletrônicas, trazem contribuições mais abrangentes que as calculadoras comuns.

Os ambientes de geometria dinâmica apresentam uma evidente vantagem sobre as construções geométricas realizadas com um lápis num papel ou com régua e compasso. Quando desenhamos um triângulo equilátero numa folha de papel, comumente marcamos pequenos traços sobre os lados do triângulo para indicar a congruência entre seus lados (GIRALDO; CAETANO; MATTOS, 2012).

Porém, para desenhar um triângulo equilátero em softwares deste tipo, precisamos indicar as propriedades da figura no processo de construção, o que permite uma manipulação do objeto geométrico com a garantia de preservação de suas propriedades (no caso do triângulo equilátero podemos ampliar ou diminuir as dimensões de seus lados, ou arrastar o triângulo para outra posição e os lados permanecerão congruentes) o que é, de acordo com Gravina (1996), fundamental para uma melhor formação da imagem mental acerca da propriedade em estudo. Para realizar a mesma atividade em desenhos convencionais numa folha de papel, o tempo gasto na execução da tarefa seria maior, e a propriedade(lados congruentes) seria visualizada em poucas figuras desenhadas.

Não temos a intenção de trabalhar todas as tecnologias digitais ou todos os softwares de geometria dinâmica, mesmo porque existem muitos deles, como o Geogebra, o Régua e Compasso, o Tabulae, Cabri, dentre outros.

A seguir apresentaremos uma breve abordagem histórica acerca do Geogebra, software que vamos utilizar como opção metodológica para construir a proposta de atividades relacionadas ao estudo dos subconstrutos dos Números Racionais.

5.1.7 O Geogebra

O Geogebra é um software de geometria dinâmica que será utilizado na realização de atividades que irão compor o produto desta pesquisa.

Analisando informações do site geogebra.org e do Instituto Geogebra da PUC-SP, o Geogebra é um software de matemática dinâmica para todos os níveis de ensino que combina geometria, álgebra, planilha de cálculo, gráficos, probabilidade, estatística e cálculos simbólicos num pacote fácil de usar. (HOHENWARTER et al., 2018).

Criado em 2001, como resultado da tese de Markus Hohenwarter, na Universidade de Salzburg, na Áustria, o Geogebra já é usado em pelo menos 190 países, traduzido para 55 idiomas. São mais de 300.000 downloads mensais e 62 Institutos Geogebra em 44 países para dar suporte ao seu uso.

Esse software possui algumas características importantes como:

1. Gráficos, álgebra e tabelas estão interligados e possuem características dinâmicas;
2. Interface amigável, com vários recursos sofisticados;
3. Ferramenta de produção de aplicativos interativos em páginas WEB;
4. Disponível em vários idiomas para milhões de usuários em torno do mundo;
5. Software gratuito e de código aberto. (CELINA et al., 2010).

O software Geogebra, por ser livre e dinâmico, foi sendo atualizado, desde a sua criação. Não vamos mostrar todas as suas funcionalidades, e não temos a intenção de discriminar as atribuições de cada versão.

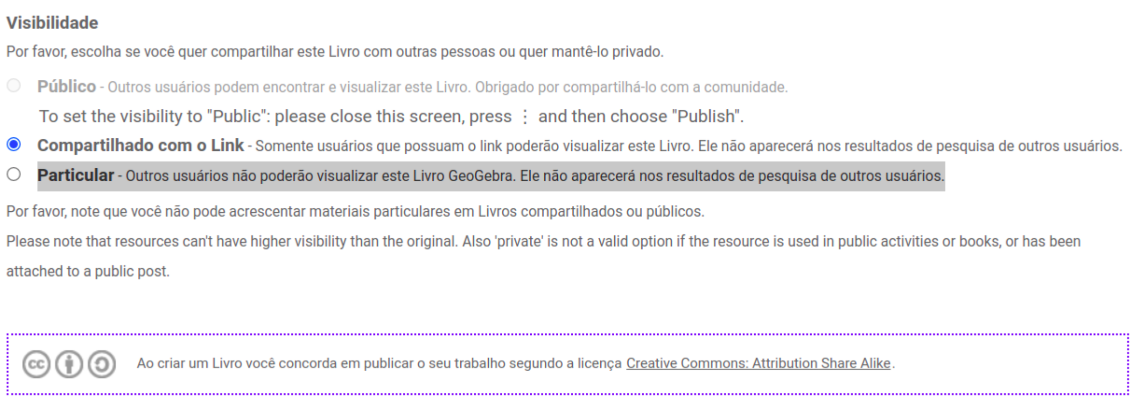
O Geogebra é um programa computacional que podemos classificar como software de matemática dinâmica (mais completo que geometria dinâmica). Este software pode ser utilizado em dispositivos como computadores, notebooks ou smartphones em ambientes virtuais ou não, nos quais é possível escrever, ver e ministrar aulas como no quadro-negro, introduzir planilhas eletrônicas e calcular, como nas calculadoras.

Nesse trabalho, apresentamos como produto educacional um livro em formato digital (GeogebraBook) produzido na plataforma geogebra.org envolvendo alguns subconstrutos dos números racionais - conteúdo específico que compõe o Currículo de Matemática da Educação Básica no Brasil, conforme a BNCC. E esperamos que o mesmo possa impactar positivamente na prática didática em sala de aula.

O GeogebraBook é uma ferramenta disponível na plataforma geogebra.org, que permite criar um livro online interativo, sendo possível aos usuários acessá-lo diretamente na plataforma online do Geogebra ou baixá-lo e utilizar os materiais no modo offline. Na primeira opção não há necessidade do usuário instalar qualquer aplicativo/software. Já optando por fazer download das atividades ou do livro os usuários precisam instalar o software do Geogebra (alguma das versões disponíveis na página do geogebra.org) no seu dispositivo: seja ele computador, notebook, tablet, etc.

A criação do GeogebraBook, implica no aceite em publicá-lo segundo a licença Creative Commons: Attribution ShareAlike, que significa que é possível a qualquer pessoa remixar, copiar, transformar o material que você publicou, mas precisa distribuí-lo sob a mesma licença do original (vide http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0). Além disso, no momento da criação de um GeogebraBook é preciso escolher como o material será compartilhado com outras pessoas, informando se o acesso ao material será **Público** - Outros usuários podem encontrar e visualizar este Livro, **Compartilhado com o Link** - Somente usuários que possuam o link poderão visualizar este Livro e ele não aparecerá nos resultados de pesquisa de outros usuários ou **Particular** - Outros usuários não poderão visualizar este Livro GeoGebra. Ele não aparecerá nos resultados de pesquisa de outros usuário (Figura 5.4).

Figura 5.4: Compartilhamento do GeogebraBook



Fonte: Elaborada pelo autor

A Ferramenta do GeogebraBook permite que o livro seja organizado em Capítulos e Seções permitindo ao proprietário a inclusão de aplicativos desenvolvidos no Geogebra

(Applets), arquivos em pdf, imagens, links, questões abertas e de múltipla escolha (com possibilidade de feedback), textos e vídeos. A Figura 5.5 ilustra como esses elementos aparecem para o usuário/proprietário inseri-los no seu livro.

Figura 5.5: Tipos de atividades do GeogebraBook

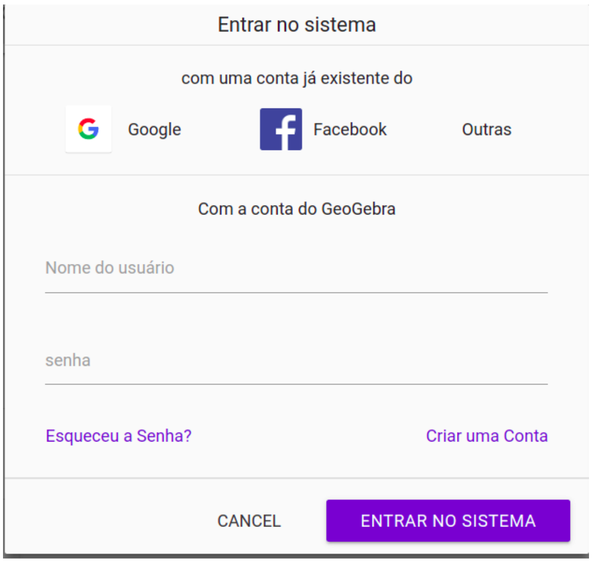
Fonte: Elaborada pelo autor

Para acesso às funcionalidades da plataforma online do Geogebra é necessário a criação de uma conta no geogebra.org, a qual é gratuita. Para isso o usuário pode criar um novo perfil com usuário e senha ou utilizar uma conta já existente do Google, Facebook, etc (Figura 5.6). Ao acessar a conta no geogebra.org é possível criar materiais entrando no menu Materiais/Seus Materiais e clicando na opção Criar (Figura 5.7).

Desta forma, é possível pesquisar uma grande quantidade de recursos e materiais clicando na opção Explore (5.7). Encerramos aqui essa breve introdução ao Geogebra e aos recursos que o mesmo apresenta e indicamos o site: https://www.geogebra.org/, caso o leitor queira aprofundar seus conhecimentos sobre o tema.

No próximo capítulo apresentamos a criação de um GeogebraBook como produto educacional oriundo deste trabalho e destinado ao ensino e aprendizagem de números racionais na perspectiva dos construtos Parte-todo, Quociente, Razão, Classes de Equivalência, Medida e Operador.

Figura 5.6: Tela de acesso do geogebra.org



Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 5.7: Tela de criação geogebra.org

Fonte: Elaborada pelo autor

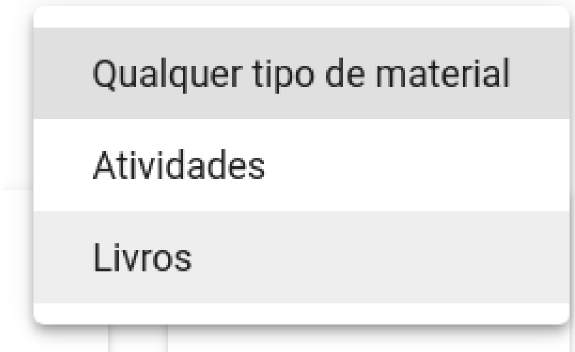
6 GEOGEBRABOOK - NÚMERO RACIONAIS: UMA PROPOSTA DE ENSINO

Neste capítulo, descrevemos como o GeogebraBook intutulado **Números Racionais: uma proposta de ensino** pode ser acessado e como este está estruturado, além de apresentar a descrição e possibilidades de utilização das atividades desenvolvidas.

6.1 Formas de acesso ao nosso GeogebraBook

Inicialmente, optamos por deixar o acesso ao nosso GeogebraBook na forma de **Compartilhamento com link**, na qual somente usuários que possuem o link de acesso poderão visualizar o livro e o mesmo não aparece nos resultados de pesquisa de outros usuários dentro da plataforma Geogebra.org. O acesso pode ser realizado pelo link: https://www.geogebra.org/m/hytye6qt. Posteriormente, pretendemos liberar o acesso na modalidade **Público** e dessa forma o usuário poderá encontrá-lo através da ferramenta de busca de material da plataforma, utilizando palavras chave como ”números racionais”, ou pelo título do livro e o filtro ”livros”, conforme indicado na Figura 6.1.

Figura 6.1: Filtro de busca da Plataforma Geogebra.org



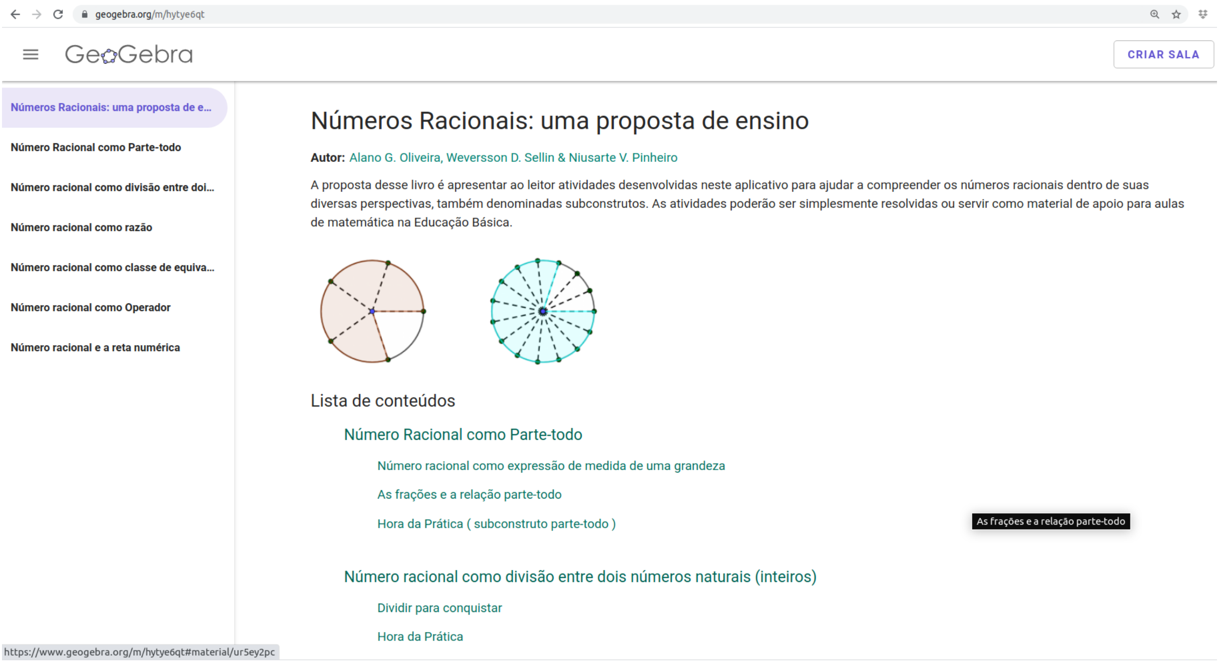
Fonte: https://www.geogebra.org/search/

Embora o acesso ao livro seja compatível com smartphones, indicamos que seu acesso seja realizado em um computador/notebook ou tablet por questões ligadas ao dimensionamento da tela.

Ao clicar no link https://www.geogebra.org/m/hytye6qt para abrir nosso GeogebraBook será apresentada a tela inicial, conforme Figura 6.2.

O acesso à cada Capítulo e/ou Seção pode ser realizado clicando sobre o nome dos

Figura 6.2: Tela Inicial do GeogebraBook - Números racionais: uma proposta de ensino



Fonte: https://www.geogebra.org/m/hytye6qt

mesmos e não precisa ser feito de forma sequencial, embora as atividades foram pensadas em uma certa sequência lógica.

Optamos por não disponibilizar os protocolos de construção de cada atividade, pois com o link disponibilizado para acessar o livro é possível que o usuário possa efetuar a cópia de cada atividade e verificar os comandos na janela de álgebra do Geogebra. Para copiar uma atividade especifica do livro, caso seja de interesse do usuário, basta clicar sobre os três pontos no canto superior direito e escolher a opção Copiar Atividade conforme indicado na Figura 6.3.

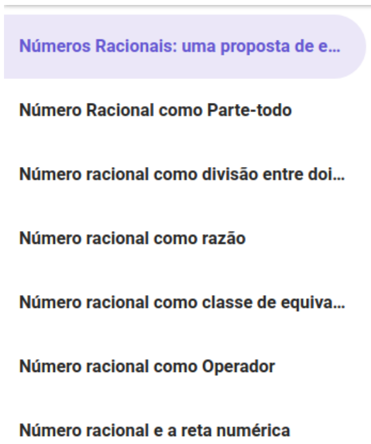
6.2 A estrutura do nosso GeogebraBook

O nosso livro está dividido em seis capítulos direcionados para cada um dos construtos sobre números racionais que iremos abordar: Parte-todo, Quociente, Razão, Classes de Equivalência, Medida e Operador, conforme ilustra a Figura 6.4

Figura 6.3: Opção Copiar Atividade

Fonte: https://www.geogebra.org/m/hytye6qt

Figura 6.4: Capítulos do GeogebraBook - Números racionais: uma proposta de ensino



Fonte: https://www.geogebra.org/m/hytye6qt

Na sequência é apresentado uma descrição detalhada de cada capítulo que compõe o livro, bem como as possibilidades de utilização das atividades desenvolvidas.

6.2.1 Capítulo 1: Número Racional como Parte-todo

Neste capítulo desenvolvemos algumas atividades com o objetivo de :

- ampliar o conjunto dos números naturais para o conjunto dos números racionais como consequência de situações envolvendo medidas e contagens;

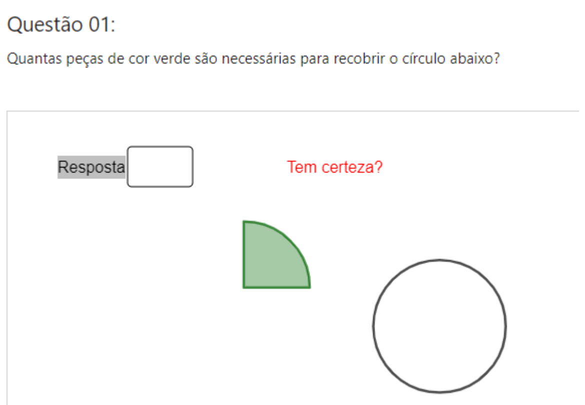
- construir o conceito de número racional como uma parte do todo.

6.2.1.1 Número Racional como expressão de medida de uma grandeza

Nessa atividade apresentamos um inteiro (um círculo) em que são dadas algumas peças (partes do todo) nas cores verde e vermelha e o leitor deve indicar quantas peças dessas figuras (partes do todo) são necessárias para recobrir o círculo todo. Se o participante acertar a quantidade, aparecerá o estímulo positivo “correto” e se errar, serão dadas outras oportunidades para que, através de quantas tentativas forem necessárias, o aluno chegue a um resultado satisfatório. Para ter acesso direto à atividade basta clicar no link: https://www.geogebra.org/m/veyqj8xn, ou com o livro aberto clicar na seção correspondente à atividade.

Na primeira questão da atividade perguntamos quantas peças são necessárias para recobrir o círculo com pedaços(figuras) de $\frac{1}{4}$ do círculo, como podemos observar na Figura 6.5.

Figura 6.5: Figura da atividade 1.1

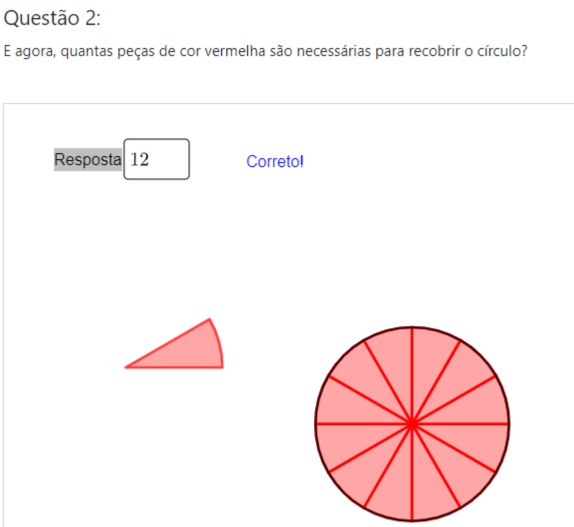


Fonte: Elaborada pelo autor

No botão Resposta, o aluno deve indicar quantas partes verdes são necessárias para cobrir todo o círculo(que representa o todo).

Na sequência, apresentamos outra atividade, agora com peças de $\frac{1}{12}$ do círculo em que fazemos a mesma pergunta: Quantas peças são necessárias para cobrir o círculo? Na Figura 6.6, apresentamos uma resposta correta da atividade.

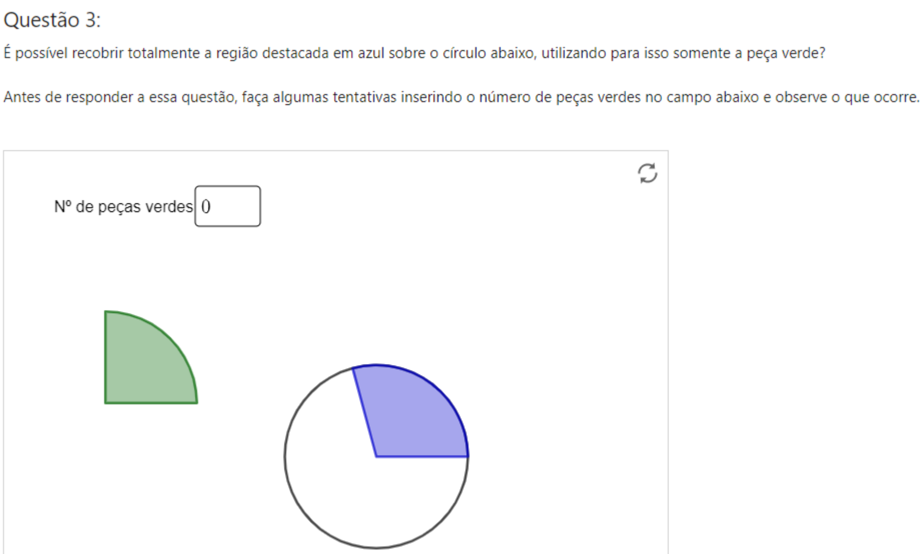
Figura 6.6: Figura da atividade 1.2



Fonte: Elaborada pelo autor

Dando continuidade na atividade apresentamos uma terceira questão em que o aluno deve responder se é possível cobrir toda a região destacada em azul usando somente a peça verde e no botão “Nº de peças verdes” deve apresentar essa quantidade, como podemos verificar na Figura 6.7.

Figura 6.7: Figura da atividade 1.3

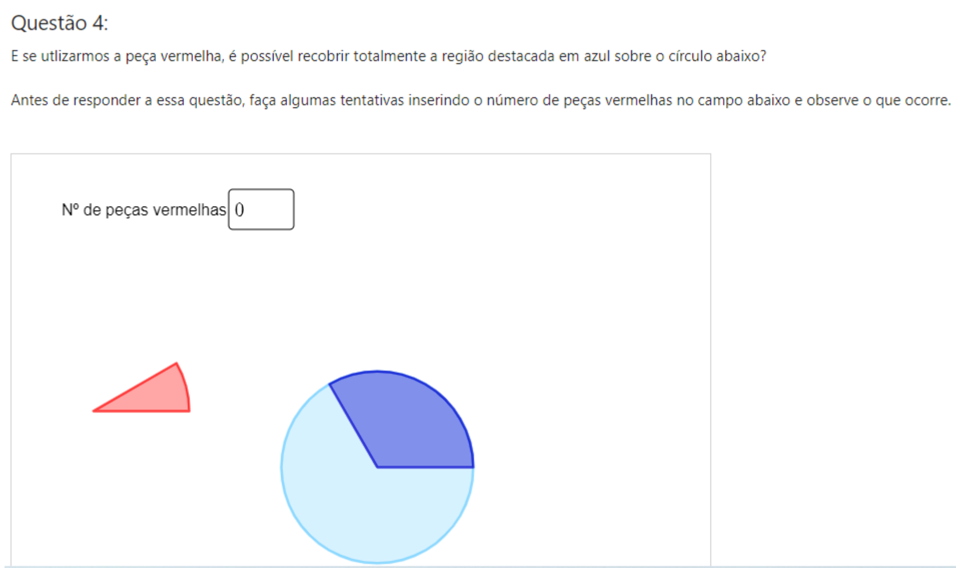


Fonte: Elaborada pelo autor

Após algumas tentativas, o aluno deve responder “sim” ou “não” para a pergunta referente à Figura 6.7.

Num quarto item desta atividade apresentamos em duas figuras, frações do círculo, uma em vermelho, $\frac{1}{12}$ do círculo e outra em azul, $\frac{1}{3}$ do mesmo círculo. E após algumas tentativas o aluno é levado a pensar se é possível ou não cobrir a região azul com esses pedaços (setores circulares em vermelho), como podemos verificar na Figura 6.8.

Figura 6.8: Figura da atividade 1.4

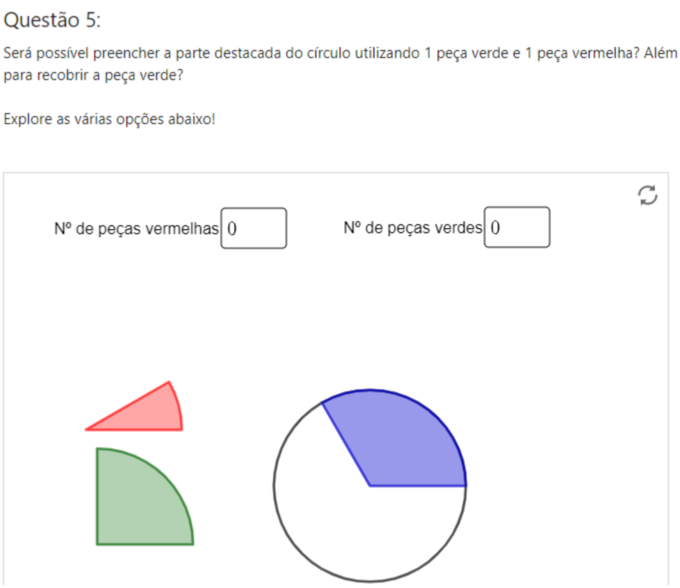


Fonte: Elaborada pelo autor

Mais uma vez são dadas as opções de respostas : "sim" ou "não" e imediatamente o aluno percebe se acertou ou não.

Para finalizar, misturamos as figuras acima perguntando ao participante se é possível cobrir a parte em azul (que representa $\frac{1}{3}$ do círculo) como uma figura vermelha (que representa $\frac{1}{12}$ do círculo) e uma verde (que representa $\frac{1}{4}$ do círculo), como podemos verificar na Figura 6.9.

Figura 6.9: Figura da atividade 5



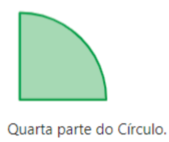
Fonte: Elaborada pelo autor

Notamos que é possível estabelecer relações entre :

- cada "unidade de medida" (as peças verde e vermelha) e o círculo todo (quando respondeu às Questões 1 e 2);
- cada "unidade de medida" (as peças verde e vermelha) e a parte destacada do círculo (quando respondeu às Questões 3 e 4);
- a "unidade" verde e vermelha (quando respondeu a Questão 5);

Em alguns casos, a "unidade de medida" considerada coube um número inteiro de vezes na região indicada. Por exemplo: Usando 4 unidades da Figura 6.10 é possível recobrir o círculo. Ou ainda, podemos dizer que a figura abaixo representa a quarta parte do círculo.

Figura 6.10: Figura da atividade 6



Fonte: Elaborada pelo autor

Esse tipo de atividade tem o objetivo de levar os alunos a perceberem que o resultado de uma medição (a medida) pode não ser um número natural. Daí a necessidade de ampliar o conceito de número, justificando assim a importância do estudo dos Números Racionais.

6.2.1.2 As frações e a relação parte-todo

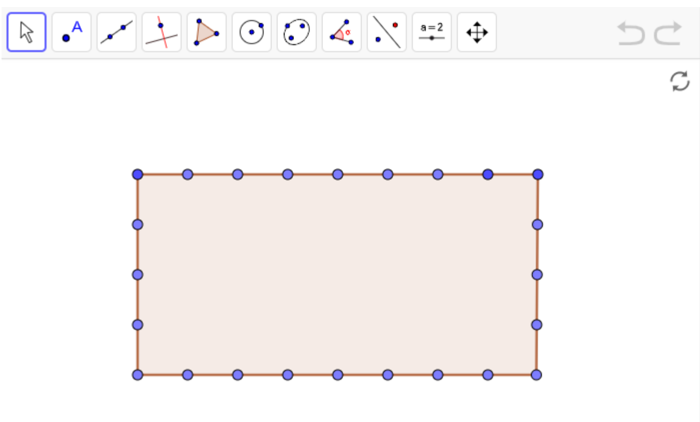
Nessa seção, apresentamos atividades com o objetivo de ajudar o usuário na compreensão das frações como subconstruto parte-todo. Para acessar a atividade no Geogebrabook basta clicar no link: https://www.geogebra.org/m/ur5ey2pc, ou ir direto na seção correspondente do livro.

Atividade 1- Quando a parte é menor do que o todo

Nessa atividade, apresentamos como situação problema um jardim na forma retangular onde desejamos dividí-lo em quatro partes iguais, numa das partes plantar flores e no restante, grama. Para realizar a divisão, o usuário deve usar a ferramenta "segmento de reta" e clicar em dois pontos sobre os lados do retângulo para realizar a divisão, podendo reiniciar a construção quantas vezes quiser.

A Figura 6.11 é apresentada ao usuário para auxiliar na resolução do problema.

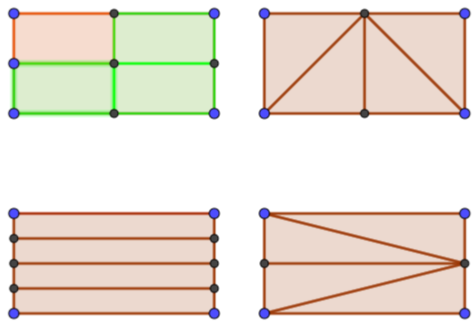
Figura 6.11: Figura da atividade 1



Fonte: Elaborada pelo autor

Na Figura 6.12, temos algumas opções de divisão do jardim. Ao clicar sobre cada parte, encontramos algumas possibilidades que indicam a área do jardim plantada com grama (na cor verde). clicando nas setinhas , podemos reiniciar a construção quantas vezes for necessário. Observe que clicamos nas regiões do primeiro retângulo da figura.

Figura 6.12: Figura da atividade 1

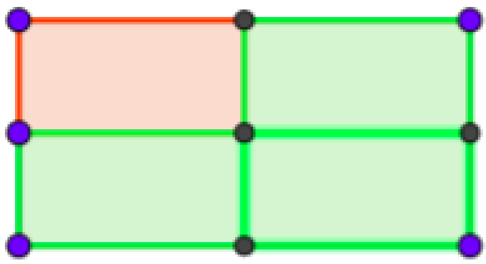


Fonte: Elaborada pelo autor

Após explorar algumas possibilidades, é apresentada uma pergunta sobre a área destinada ao plantio de grama(a parte) em relação ao jardim inteiro(o todo), se essa área(a parte) é menor ou maior que o jardim inteiro(o todo) ? Ao clicar no botão "Verifique sua resposta" o usuário tem imediatamente a correção da atividade na plataforma Geogebra.

Para expressar a área do jardim destinada ao plantio de gramas, o usuário utilizou uma subunidade do lote do jardim dividindo-o em 4 partes iguais (1 quarto) e verificando quantas dessas partes coube na área destinada ao plantio de grama (3 vezes). Por exemplo: A área em verde na Figura 6.13 representa 3 quartos do jardim.

Figura 6.13: Figura da atividade 1



Fonte: Elaborada pelo autor

Abaixo temos o retorno do Geogebrabook ao usuário nesta atividade:

Essa área do jardim destinada ao plantio de grama (3 quartos do jardim) pode ser escrita da seguinte forma: $\frac{3}{4}$ (lê-se três quartos).

O símbolo $\frac{3}{4}$ tem o nome de fração. Ele está associado ao número 3 (medida da área do jardim destinada ao plantio de grama) quando se tomou a unidade de medida "1 quarto do jardim" (ou seja, quando dividimos a área do jardim em quatro partes iguais).

O número representado por essa fração é chamado de número fracionário (ou racional) e indica, nesse exemplo, que o jardim foi dividido em 4 partes iguais e em 3 delas foram plantadas grama.

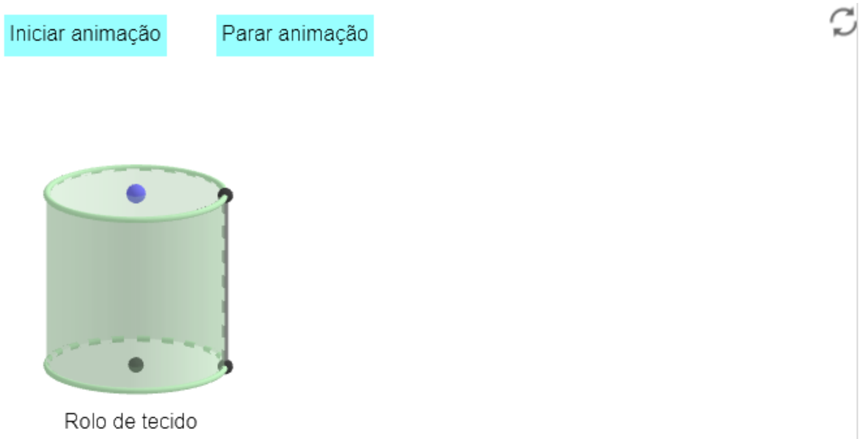
Na fração $\frac{3}{4}$ o número (acima do traço) recebe o nome de numerador e, no exemplo em questão, indica quantas partes estão sendo consideradas e a quantidade de vezes que "1 quarto" cabe na área de grama. Já o número 4 recebe o nome de denominador e indica em quantas partes o inteiro (o jardim) foi dividido e que tipo de parte estamos tomando como unidade de medida (1 quarto).

Atividade 2 - Quando a parte é "mais" do que o todo

Para trabalhar essa situação apresentamos uma outra situação problema em que duas amigas (Ana e Júlia) desejam produzir toalhas de rosto, utilizando um mesmo tipo de tecido. Ana deseja fazer 8 toalhas e Júlia, 2. Porém, o Armarinho onde compraram a matéria prima oferece peças(rolo) de algodão que já vêm demarcados nos tamanhos das toalhas num total de 5 toalhas por rolo.

Criamos no Geogebra uma animação onde é possível perceber a planificação dos rolos de algodão. Ao clicar no botão " Iniciar animação" da Figura 6.14, observamos a planificação do rolo de algodão.

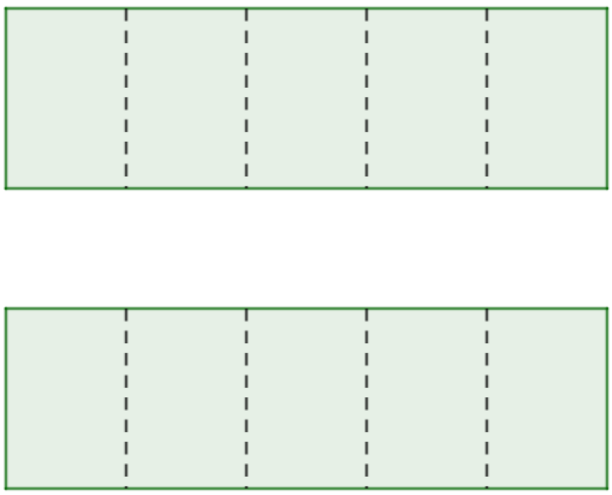
Figura 6.14: Figura da atividade 2



Fonte: Elaborada pelo autor

Na Figura 6.15, temos representadas as peças de tecido que Ana e Júlia compraram, depois de abertas. Observe que as duas compraram juntas, duas peças inteiras de tecido, quantidade suficiente para a confecção da quantidade de toalhas que cada uma queria.

Figura 6.15: Figura da atividade 2

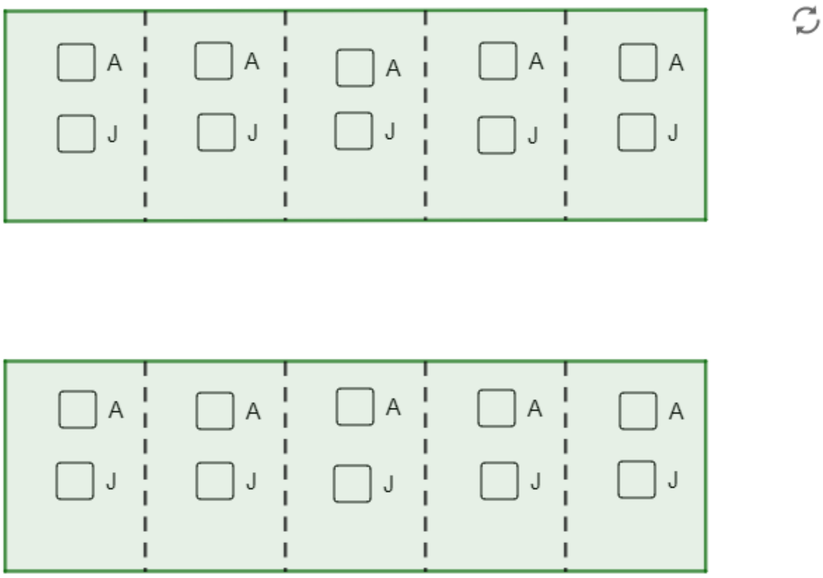


Fonte: Elaborada pelo autor

Mais adiante, na atividade, é apresentada uma figura semelhante à Figura 6.15, onde o usuário pode representar possibilidades de corte, clicando sobre os traços pontilhados e assim separando a parte de tecido que cabe a Ana e também a Júlia.

Numa tela posterior, é apresentada uma opção em que o usuário pode clicar na caixa de seleção com as iniciais dos nomes de cada uma das amigas, para indicar a quem cabe aquela parte da figura, como podemos verificar na Figura 6.16.

Figura 6.16: Figura da atividade 2



Fonte: Elaborada pelo autor

Algumas questões de múltipla escolha são propostas após essa marcação onde também é possível verificar se as escolhas estão certas ou erradas através do botão "Verifique sua resposta":

a) Cada marcação efetuada acima é uma parte da peça (rolo) de tecido. Que fração essa parte representa? Para este item temos as opções: $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{4}$ e NDA

b) Qual parte (fração) da peça foi comprada por Júlia? Para este item temos as opções: $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{8}{5}$ e NDA.

c) Qual parte (fração) da peça foi comprada por Ana? Para este item temos as seguintes opções: $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{8}{5}$ e NDA

d) Ana ou Júlia comprou mais de 1 peça (rolo) de tecido? Por quê?

Ao final da atividade apresentamos as seguintes observações :

- A quantidade de tecido comprado por Ana é constituída de 1 peça inteira e mais uma parte da peça que pode ser representada por $1\frac{3}{5}$;

- A quantidade de tecido comprado por Júlia equivale a outra parte de 1 peça e que pode ser representado por $\frac{2}{5}$;
- É possível que você tenha respondido ao item (c) dessa questão como sendo a fração $\frac{8}{5}$. Dessa forma, podemos concluir que $\frac{8}{5}$ e $1\frac{3}{5}$ representam a mesma quantidade de tecido comprada por Ana.

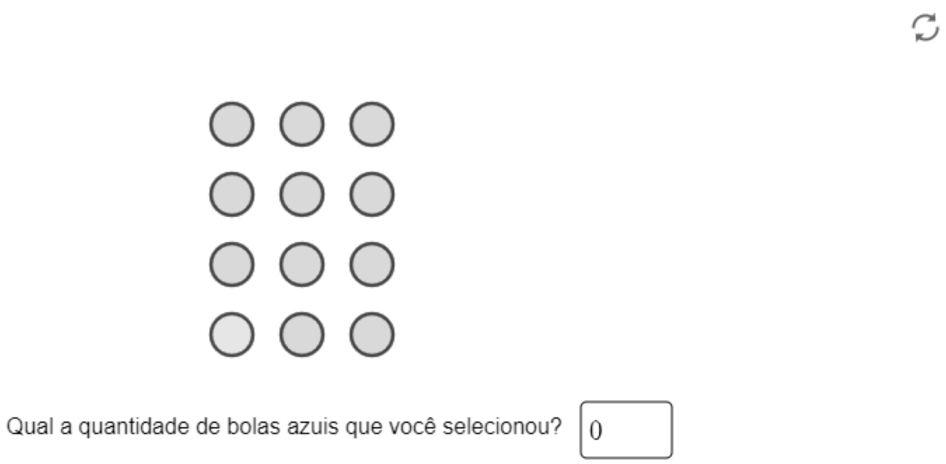
Atividade 3 - quando a parte é de uma grandeza enumerável (coleção contável)

Para finalizar a seção “As frações e a relação parte-todo”, apresentamos uma situação problema que representa um número fracionário como indicativo de uma relação entre a parte de uma coleção de objetos(contável) e a coleção toda.

No problema, apresentamos a situação hipotética em que um recipiente tem 12 bolinhas de gude e que $\frac{2}{3}$ das mesmas são azuis. E queremos saber quantas são as bolinhas de gude de cor azul.

Para isso , é apresentada uma tela com 12 bolinhas onde o usuário deve marcar a quantidade de bolinhas azuis e responder quantas bolinhas foram marcadas. Observamos a interface da atividade na Figura 6.17.

Figura 6.17: Figura da atividade 2



Fonte: Elaborada pelo autor

Ao clicar nas setinhas (botão de reiniciar a construção) podemos reiniciar as marcações. O objetivo desta atividade é ajudar o aluno na percepção do número racional como subconstruto parte-todo numa situação problema em que a parte é uma grandeza enumerável, ou seja, que se pode contar.

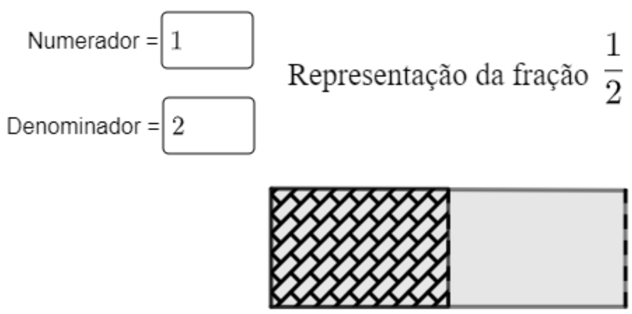
6.2.1.3 Hora da Prática

Nesta seção do livro digital, são apresentadas três atividades para o usuário praticar os conceitos de fração dentro do conceito parte-todo. Para acessar as atividades no Geogebrabook basta clicar no link: https://www.geogebra.org/m/qywcrext ou diretamente do livro, clicando na seção correspondente.

Atividade 1

Na interface desta atividade são apresentadas duas caixas de entrada: "Numerador" e "Denominador". O usuário deve indicar valores para cada uma dessas caixas, um para o numerador e outro para o denominador da fração e ao fazer isso lhe será apresentada uma representação na forma $\frac{p}{q}$, com q$\neq$0, onde p representa o numerador(a parte) e q o denominador(o inteiro ou o todo). Além disso a atividade mostrará uma representação pictórica da fração indicada pela parte ladrilhada da figura.

Figura 6.18: Tela da Atividade 1



Fonte: Elaborada pelo autor

Na Figura 6.18, foram indicados os números 1 para o numerador e 2 para o denominador. Ao fazer isso, foi apresentada a "representação da fração $\frac{1}{2}$" e a representação pictórica da mesma.

A ideia é que o usuário indique vários números nas caixas indicadas, observe as representações e responda às questões apresentadas para esta atividade, listadas abaixo (as respostas apresentadas dependem de um conhecimento prévio acerca dos conceitos de fração própria, imprópria e aparente):

1) O que acontece quando o denominador é maior que o numerador ?

   Para esta pergunta são apresentadas 3 opções de resposta :

   a) Será apresentado um único inteiro

   b) Será apresentado mais de um inteiro

   c) Outra opção

2) Qual o nome dado quando o numerador for maior que o denominador ?

   Outra vez, temos três respostas possíveis:

   a) Fração própria

   b) Fração imprópria

   c) Fração aparente

3) Qual o nome dado quando o denominador for maior que o numerador ?

   Seguimos com as mesmas opções de respostas :

   a) Fração própria

   b) Fração imprópria

   c) Fração aparente

4) Qual a denominação especial dada quando o denominador for divisível pelo numerador(ou seja, quando o numerador for múltiplo do denominador)?

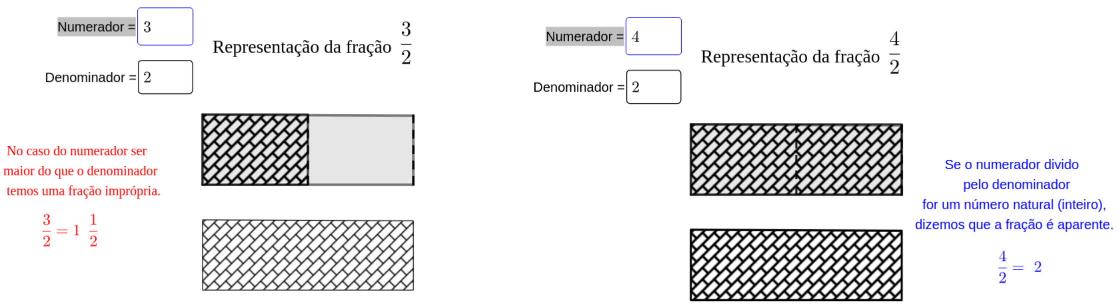
   a) Fração própria

   b) Fração imprópria

   c) Fração aparente

É claro que para saber o que significa frações próprias, impróprias e aparentes o usuário deve ter um conhecimento prévio acerca do assunto, ou simplesmente revisar os conhecimentos apresentados no 5º e 6º ano da Educação Básica. Outra alternativa, caso o usuário digite um numerador maior do que o denominador aparece uma mensagem na tela informando que se trata de uma fração imprópria e da mesma forma, se para o numerador for indicado um múltiplo do denominador então aparece um mensagem informando que se trata de uma fração aparente, conforme indicado na Figura 6.19 . E caso a atividade esteja ocorrendo em uma aula monitorada por um professor, este pode dar o esclarecimento necessário sobre os conceitos acima, pois a atividade também tem como objetivo servir de material didático a ser usado por professores para ajudar no desenvolvimento dos conceitos de números racionais.

Figura 6.19: Frações impróprias e aparentes



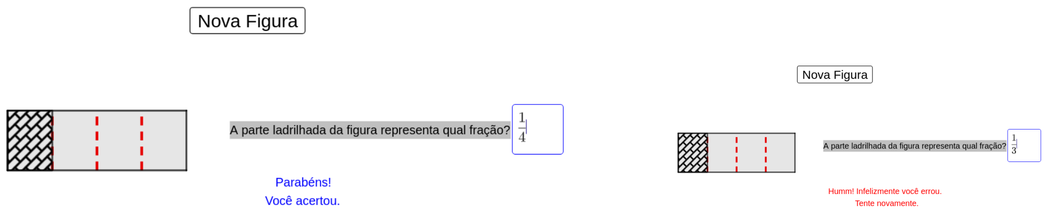
(a) Fração Imprópria (b) Fração Aparente

Fonte: Elaborada pelo autor

Atividade 2

Nesta atividade temos um *modus operandi* contrário à Atividade 1. Desta vez é dada uma representação pictórica, fracionada em subpartes iguais e o usuário deve indicar a fração correspondente à parte ladrilhada da figura. Vale lembrar que para a indicação da fração devemos indicar um número na forma $\frac{p}{q}$ com q$\neq$0, onde p representa o numerador da fração(ou quantas foram as partes ladrilhadas da figura) e q, o denominador(ou seja: em quantas vezes o inteiro foi dividido). Se acertar, o usuário receberá uma mensagem celebrando o seu sucesso. Caso contrário, também será avisado(a) e poderá realizar novas tentativas quantas vezes quiser ou for necessário.

Figura 6.20: Mensagem de erro e acerto da Atividade 2



(a) Mensagem de acerto (b) Mensagem de erro

Fonte: Elaborada pelo autor

Na Figura 6.20, observamos uma figura que representa a fração $\frac{1}{4}$. Na situação da Figura 6.20(a), como o usuário respondeu corretamente é exibido a mensagem "Parabéns! Você acertou.". Já na Figura 6.20(b), como o usuário errou ao indicar a fração $\frac{1}{3}$ como resposta, recebeu uma mensagem indicando que errou e ainda um incentivo para que tente novamente: "Humm! Infelizmente você errou. Tente novamente".

A ideia da atividade é exatamente essa: ajudar o usuário na percepção do conceito de fração dentro do subconstruto parte-todo. Ao clicar em Nova Figura é gerada uma nova imagem, o próprio programa sorteia e gera uma imagem de um novo número fracionário, e essa possibilidade em um contexto de sala julgamos ser enriquecedora por permitir uma gama de variações de uma mesma atividade (a princípio uma para cada aluno) e rompendo com atividades padronizadas de resposta única dos livros didáticos.

Atividade 3

Essa terceira atividade traz como objetivo que os alunos possam construir o todo (o inteiro ou a unidade) a partir do conhecimento de uma das partes. Ao entrar na tela de interface da atividade o usuário recebe as seguintes instruções:

1. Para copiar/girar a imagem original, basta clicar nos botões correspondentes de Copiar/Girar;
2. Arraste as cópias para a área destinada à representação do "todo" para montar sua representação;
3. Fique à vontade para explorar os vários padrões de soluções possíveis;

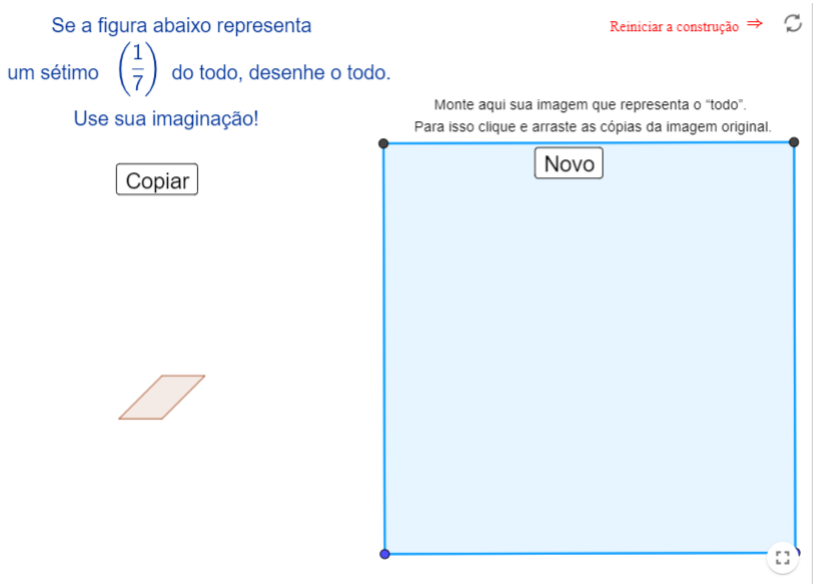
4. Clique no botão Reiniciar a Construção para retornar à atividade inicial;

5. Pode-se apagar uma cópia da imagem original clicando com o botão direito do Mouse sobre a mesma e depois em Apagar;

6. Para gerar uma nova imagem como parte de um todo, clique antes em Reiniciar Construção e depois no botão Novo;

7. O professor deverá indicar se a figura construída está correta ou não, sendo a figura indispensável na realização da atividade.

Figura 6.21: Tela da Atividade 3



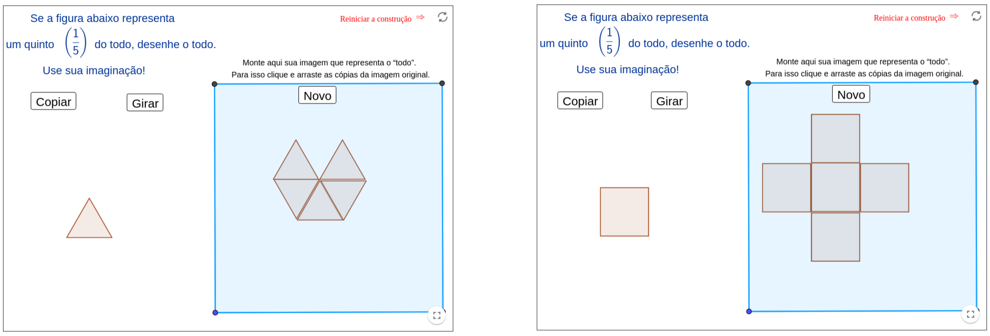
Fonte: Elaborada pelo autor

Na Figura 6.21 temos uma das interfaces geradas pelo programa quando um usuário iniciar a atividade. Neste exemplo, foi dada uma figura em forma de paralelogramo e para executar a atividade o usuário deve fazer cópias(quantas forem necessárias) e arrastar para o quadrado a fim de montar o inteiro (o todo).

Ao clicar o botão "Copiar" são geradas cópias da figura dada. Clicando no botão "Novo" uma nova figura junto a um novo desafio é apresentada. Ao clicar nas setinhas ao lado do botão "Reiniciar construção", inciamos todas as atividades, desde a primeira.

Novamente, essa atividade apresenta possibilidades interessantes de exploração em sala de aula, pois permite uma gama de variações de respostas dos alunos incentivando a criatividade dos mesmos nas possíveis representações das frações indicadas e com base nas partes sorteadas. Por exemplo, mesmo que seja sorteada pelo aplicativo uma mesma fração para os alunos A e B, pode ocorrer que a figura que representa a parte do todo não seja a mesma e dessa forma as representações pictóricas serão diferentes, embora a fração que representa a parte do todo seja a mesma. Veja a Figura 6.22 (a) e (b) ilustrando a situação colocada acima.

Figura 6.22: Representações diferentes para uma mesma fração



(a) Triângulo como parte (b) Quadrado como parte

Fonte: Elaborada pelo autor

6.2.2 Capítulo 2: Número racional como divisão entre dois números naturais (inteiros)

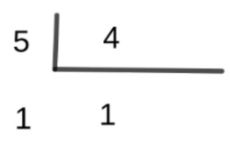
O objetivo deste capítulo é identificar o número racional a partir da noção de quociente(divisão entre dois números naturais).

6.2.2.1 Atividade: Dividir para Conquistar

Através do link: https://www.geogebra.org/m/tqnbybuf o leitor pode ter acesso a essa atividade ou diretamente pelo sumário do livro, caso esteja aberto. A atividade começa com a seguinte situação problema:

Queremos dividir igualmente 5 folhas de papel A4 para 4 pessoas. Como proceder para resolvermos este problema ? Como solução do problema pensamos inicialmente em distribuir 1 folha inteira para cada pessoa(4 ao todo) e sobraria 1 folha, o que podemos registrar com a divisão de números naturais:

Figura 6.23: Registro da divisão $5 \div 4$

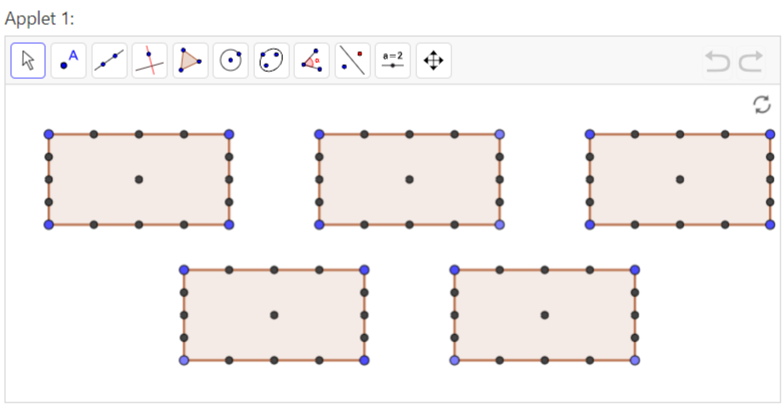


Fonte: Elaborada pelo autor

Como podemos notar na Figura 6.23, 5 não é divisível por 4. Então chegamos a um impasse. Desejamos que todas as folhas sejam distribuídas igualmente, ou seja, cada pessoa deve receber a mesma quantidade de papel (área).

No $Applet_1$, que mostramos na Figura 6.24, temos ilustrado as 5 folhas de papel com algumas marcações. O usuário deve usar a ferramenta "Segmento de Reta" para construir divisões nas folhas de papel, de forma a atender ao proposto do problema.

Figura 6.24: $Applet_1$ - Representação das folhas de papel



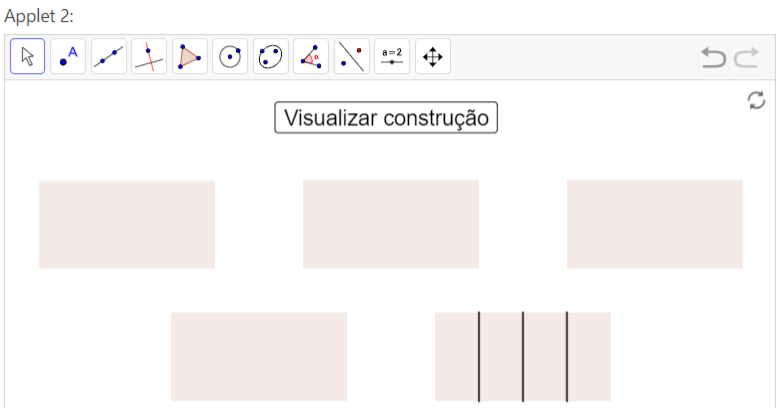
Fonte: Elaborada pelo autor

O usuário deve usar a imaginação, pois a forma de dividir a folha não é única, mas a quantidade de papel que cada pessoa deve receber é única.

Nos applets 2 e 3, são exploradas possíveis construções a serem realizadas. Na Figura 6.25, ao clicar no botão "visualizar construção", são apresentados num dos retângulos (folha A4), 3 segmentos verticais, indicando a divisão de uma das folhas em 4 partes iguais.

Desta forma, a ideia é distribuir uma folha inteira a cada pessoa, dividir a folha restante em 4 partes e distribuir uma dessas partes ($\frac{1}{4}$) para cada pessoa.

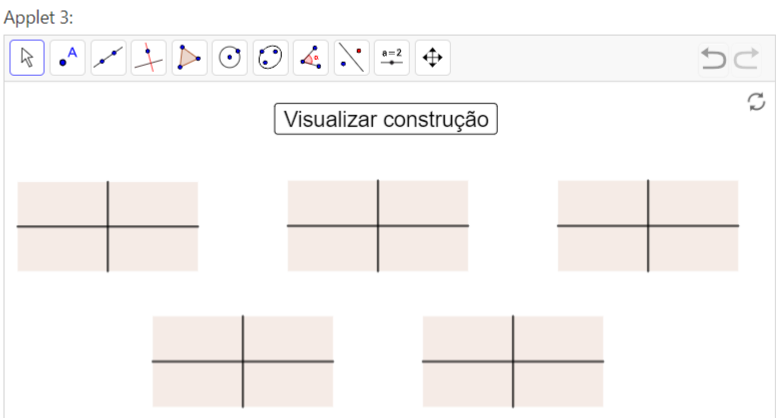
Figura 6.25: $Applet_2$



Fonte: Elaborada pelo autor

Já na Figura 6.26, $applet_3$, ao clicar no botão "visualizar construção", são apresentados em todos os retângulos dois segmentos perpendiculares, passando pelo centro do retângulo(folha A4).

Figura 6.26: $Applet_3$



Fonte: Elaborada pelo autor

Aqui optamos por dividir cada uma das folhas em quatro partes iguais e neste caso, cada pessoa receberá uma dessas partes ($\frac{1}{4}$ de cada folha).

São apresentadas algumas sugestões ao professor:

1. Após a ação concreta de repartir as folhas de papel ($Applet_1$), é importante estimular os alunos a registrarem a quantia de papel que coube a cada pessoa através da indicação da "conta" que corresponde à resolução apresentada por eles;
2. O importante é que seja identificado por parte dos alunos que a divisão de 5 por 4 é

a operação que permite determinar a solução do problema proposto;

3. É importante que o registro $\frac{1}{4}$ que representa a parte da folha de papel que cada pessoa recebeu, além da folha inteira, deve ser informado pelo professor, recorrendo para isso à ação proposta pelo aluno.

Por exemplo, em relação à resolução apresentada no $Applet_2$, o professor pode apresentar a seguinte argumentação:

Você dividiu a folha que sobrou em 4 partes iguais e a maneira de representar cada uma dessas partes é $\frac{1}{4}$. Ou ainda, pode-se dizer que o resultado de $1 \div 4 = \frac{1}{4}$.

Da mesma forma, na resolução do $Applet_3$ é possível argumentar que cada pessoa recebeu 5 pedaços de 1 quarto, isto é, 5 quartos. Uma forma de efetuar esse registro é escrever que cada pessoa recebeu ao todo $\frac{5}{4}$ de folha de papel. O que significa que ao dividir 5 folhas em 4 partes iguais, obtemos $\frac{5}{4}$ de folha para cada pessoa, ou seja:

O resultado de $5 \div 4 = \frac{5}{4}$.

Observações:

Com essa atividade, esperamos ter explorado dois significados de um número fracionário:

1. O número fracionário como o quociente de uma divisão, o qual não pode ser indicado por um número natural.

   $5 \div 4 = \frac{5}{4}$.

2. O número fracionário como indicador de uma relação parte-todo: cada folha foi repartida em 4 partes iguais e cada uma dessas partes é indicada por $\frac{1}{4}$ (um quarto). No problema que discutimos, cada pessoa recebeu 5 dessas partes (5 quartos), quantidade indicada pelo número fracionário representado por $\frac{5}{4}$.

6.2.2.2 Hora da Prática

Após explorar as atividades na seção "Dividir para conquistar", são propostas a seguintes atividades, que podem ser acessadas através do link https://www.geogebra.org/m/

mebqhnss, acerca do subconstruto quociente:

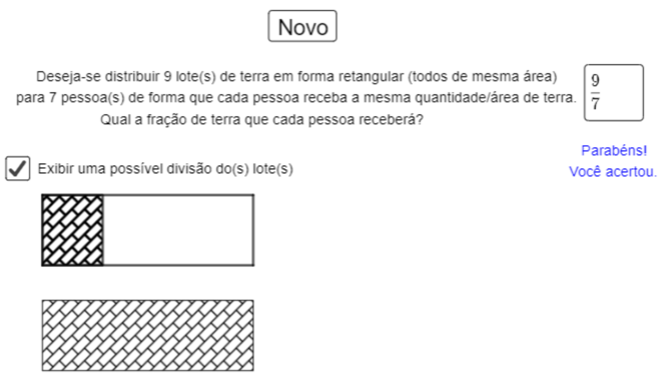
Agora que você já sabe que um número racional (fracionário) também pode indicar uma divisão (quociente entre dois números naturais) é hora de colocar esse conhecimento em prática e resolver os seguintes problemas.

Atividade 1

Será proposto um problema com quantidades aleatórias de lotes e pessoas.

- Ao clicar no botão "Novo" um novo problema é apresentado com quantidades de lotes e pessoas sorteadas aleatoriamente;
- A resposta deve ser inserida no campo indicado (caixa de entrada);
- Para exibir uma imagem com uma possível solução basta marcar a caixa de seleção em "Exibir uma possível divisão do(s) lote(s)".

Figura 6.27: $Applet_1$ da seção Hora da Prática



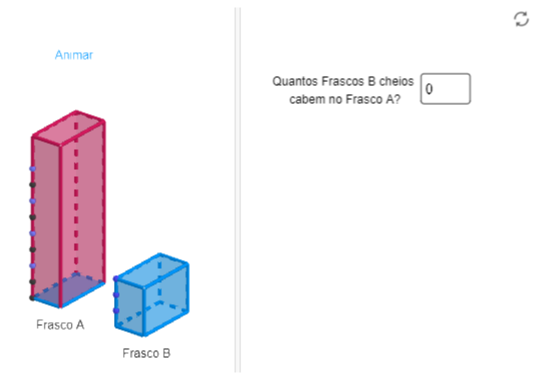
Fonte: Elaborada pelo autor

Na Figura 6.27 temos um dos problemas propostos na atividade em que deseja-se distribuir 9 lotes de terra em forma retangular(todos de mesma área) para 7 pessoas de forma que cada pessoa receba a mesma quantidade (área) de terra. A pergunta a ser respondida é: Qual a fração de terra que cada pessoa receberá? Neste exemplo foi inserida no campo ao lado do problema a resposta correta: $\frac{9}{7}$ e o usuário recebeu um estímulo positivo: "Parabéns! Você acertou". Ao selecionar a caixa Exibir uma possível divisão do(s) lote(s) será apresentado uma imagem com uma possível representação da área dos lotes a ser recebida por cada pessoa. Caso o usuário erre sua responta é exibido a mensagem “Humm! Infelizmente você errou. Tente novamente.” e cabe destacar que o usuário poderá realizar quantas tentativas quiser ou forem necessárias para o sucesso na resolução do problema.

Atividade 2

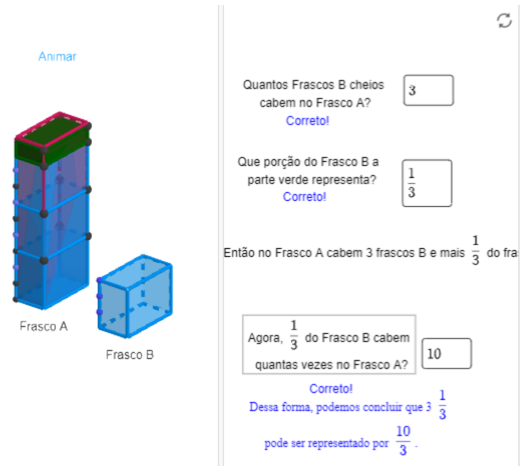
Nesta atividade, o usuário da plataforma encontra na tela uma interface com dois frascos e uma pergunta sobre quantos frascos B cheios cabem no frasco A, como percebemos na Figura 6.28. Ao clicar em animar o programa mostra a quantidade de frascos B que cabem no frasco A.

Figura 6.28: Tela da atividade 2



Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 6.29: Tela da Atividade 2 final



Fonte: Elaborada pelo autor

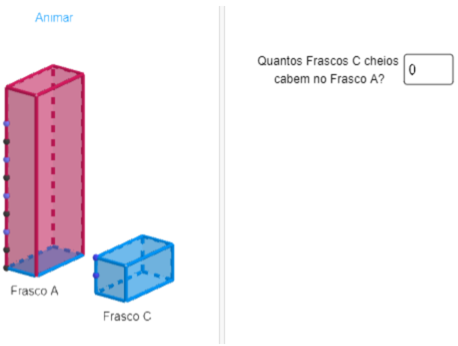
Após responder a primeira pergunta aparece a segunda pergunta, e após responder a segunda, aparece a terceira, com mensagens de incentivos positivos para quem acertar e alguns comentários acerca da atividade.

Na Figura 6.29 podemos perceber a quantidade de frascos B que cabem no frasco A, da mesma forma que podemos perceber visualmente as soluções das demais perguntas. Ao final da atividade temos uma mensagem em que concluímos que $3\frac{1}{3}$ pode ser representado por $\frac{10}{3}$, apresentando duas representações satisfatórias para o subconstruto quociente.

Atividade 3

A atividade 3 é análoga à atividade 2, porém com os frascos com capacidades diferentes em relação à Atividade 2 e a comparação é realizada entre os frascos A e frascos C.

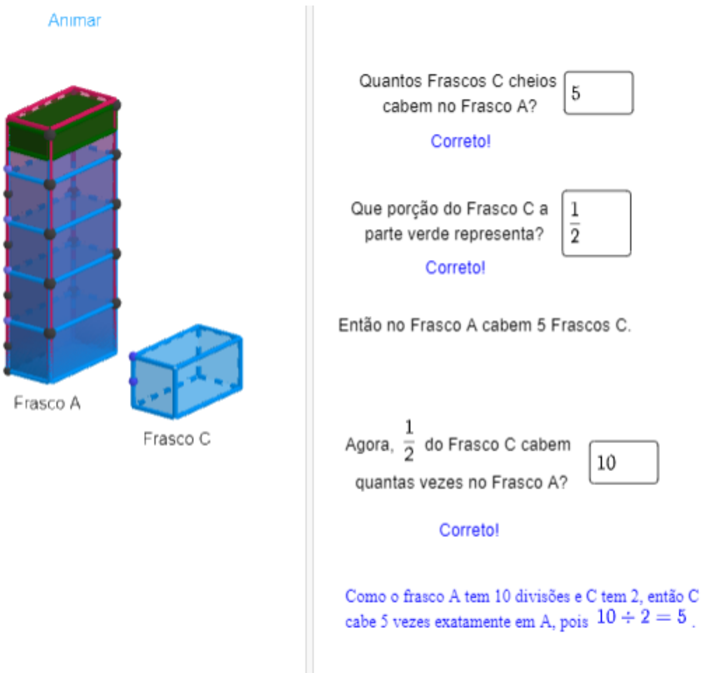
Figura 6.30: Tela da atividade 3



Fonte: Elaborada pelo autor

A princípio devemos indicar quantos frascos C cabem no frasco A, como percebemos na Figura 6.30. Após clicar em animar, a resposta da atividade fica mais evidente, como podemos observar na Figura 6.31.

Figura 6.31: Tela da Atividade 3 após animação e respostas



Fonte: Elaborada pelo autor

Ao final da primeira resposta é apresentada uma segunda pergunta sobre que porção do frasco C a parte verde representa. E após essa resposta temos mais uma pergunta sobre quantas metades do frasco C cabem no frasco A. Após a resposta correta aparece um comentário indicando que o frasco A tem 10 divisões e C, duas. Então o frasco C cabe exatamente 5 vezes no frasco A, pois $10 \div 2 = 5$.

Terminando as atividades são apresentadas algumas observações que podem ajudar na consolidação do conceito de número racional como divisão entre dois números naturais(com divisor não nulo):

- Nas atividades acima, você deve ter notado que tanto o 5 quanto $3\frac{1}{3}$ foram representados, respectivamente, pelas frações $\frac{10}{2}$ e $\frac{10}{3}$;
- Em geral, todos os números naturais (inteiros) e todos os números fracionários podem ser representados por frações;
- Os números que podem ser representados por frações são chamados de números racionais.

6.2.3 Capítulo 3: Número racional como razão

Neste capítulo do Geogebrabook vamos apresentar atividades cujo objetivo é ajudar o usuário na compreensão dos números racionais como índices comparativos, ou simplesmente razão.

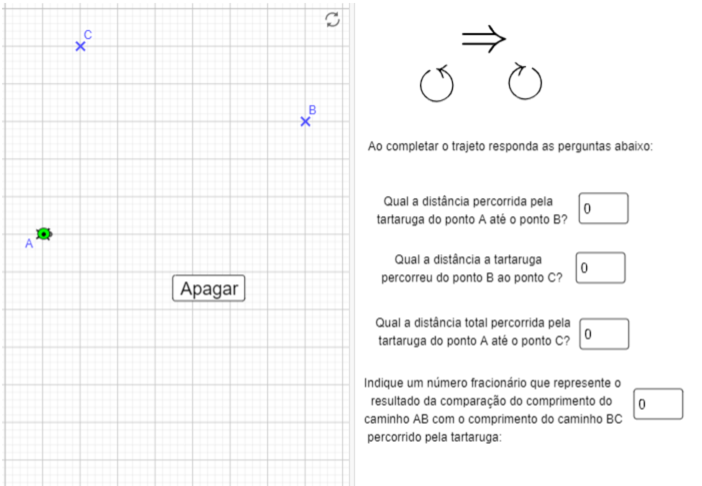
6.2.3.1 Índice comparativo/razão

Atividade 1: Passos de tartaruga

Nessa atividade deve-se movimentar a tartaruga do Ponto A até o ponto B e depois até o ponto C, nessa ordem. Para ter acesso à atividade no Geogebrabook, basta acessar através do endereço https://www.geogebra.org/m/nzsabrcx.

Na interface da atividade no Geogebrabook é apresentada uma figura de uma tartaruga que pode se mover para frente, para a direita e para a esquerda, quando clicamos

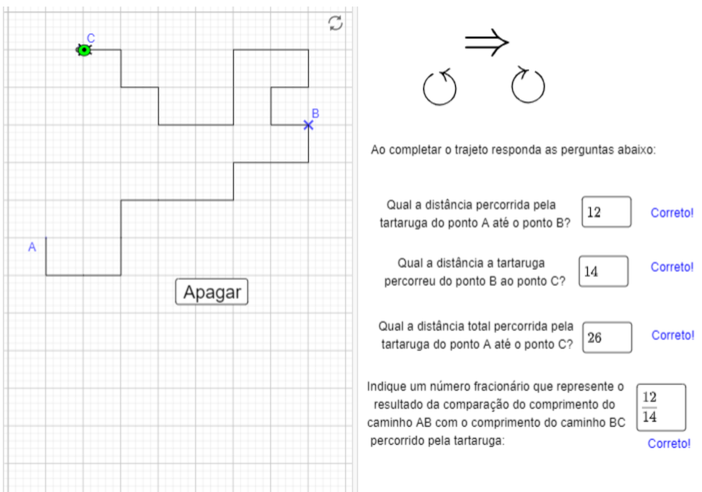
Figura 6.32: Tela da Atividade 1: Passos de tartaruga



Fonte: Elaborada pelo autor

nos botões de controle da atividade, observados na Figura 6.32.O comando $\Longrightarrow$ faz mover 1 unidade na direção que a tartaruga está caminhando; o comando ⥀ gira a tartaruga para e esquerda e o comando ⥁ gira a tartaruga para a direita. A utilização destes comandos implica em várias possibilidades de caminhos com distâncias diferentes entre os pontos A e B e entre os pontos B e C. A tartaruga se movimenta uma unidade a cada clique na seta indicadora.

Figura 6.33: Passos de tartaruga: um possível caminho



Fonte: Elaborada pelo autor

Uma solução possível é mostrada na Figura 6.33. Na resposta das perguntas a respeito das distâncias percorridas pela tartaruga chegamos a uma distância de 12 unidades entre os pontos A e B , 14 unidades entre os pontos B e C e 26 unidades entre os pontos A e C passando por B. No último item da questão apresentamos um número fracionário que indica o resultado de uma comparação entre os caminhos entre os pontos A e B e entre os pontos B e C, chegando à resposta correta $\frac{12}{14}$. Importante destacar que esse número fracionário não representa uma parte do caminho em relação ao todo e sim uma comparação entre caminhos distintos.

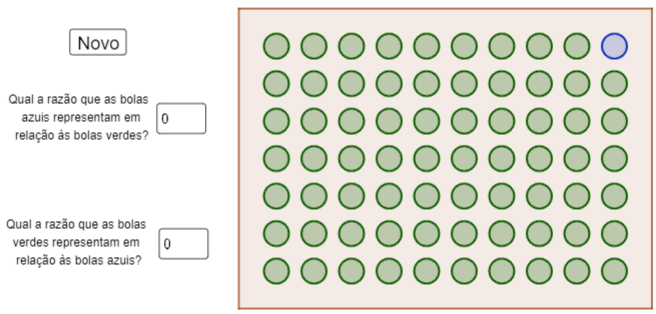
Observação: Quando uma fração representa um índice comparativo (nesse caso, entre os comprimentos dos caminhos percorridos pela tartaruga) ela é denominada de razão.

Essa atividade permite diversas configurações de caminhos possíveis e, consequentemente de respostas distintas por parte dos alunos, o que no nosso entendimento só tem a enriquecer a exploração destas características da atividade em um contexto de sala de aula.

Atividade 2: Comparando quantidades de bolinhas

Nesta atividade exploramos a noção de razão entre quantidades discretas (contáveis). Ao acessar a atividade, o usuário encontra uma interface com um retângulo com várias bolinhas nas cores azul e verde. Sempre que clicamos no botão "Novo" uma nova quantidade de bolinhas azuis e verdes são apresentadas. Na Figura 6.34, observamos uma dessas interfaces.

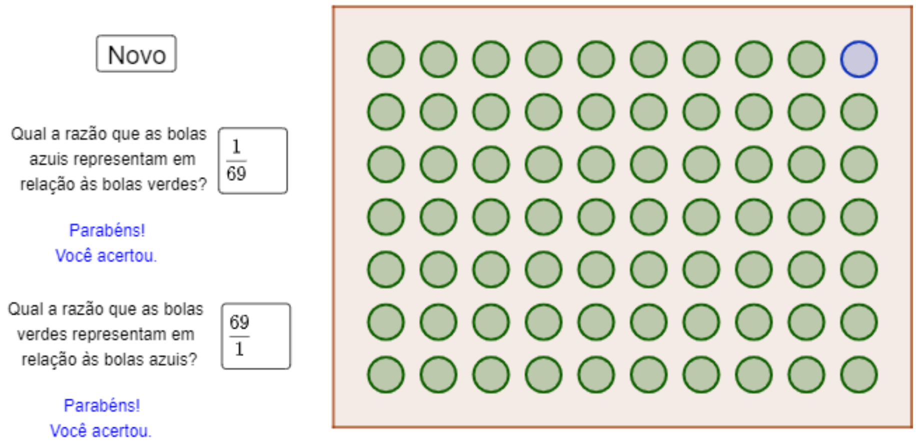
Figura 6.34: Tela da Atividade 2



Fonte: Elaborada pelo autor

Devemos indicar duas frações: uma indicando a razão entre as quantidades de bolas azuis e verdes e outra indicando o contrário, a razão entre a quantidades de bolas verdes e bolas azuis. Na Figura 6.35, temos uma representação correta dessas frações, em que são apresentados estímulos positivos em forma de mensagem quando o usuário acerta a questão. Se errar poderá refazer quantas vezes quiser.

Figura 6.35: Figura da atividade 2



Fonte: Elaborada pelo autor

Mais uma vez, temos uma atividade onde não apresentamos uma comparação entre uma quantidade em relação ao todo, e sim uma comparação entre quantidades contáveis, neste caso, de bolinhas.

Novamente, o carácter dinâmico da atividade no que diz respeito à aleatoriedade das configurações apresentadas e, consequentemente, de respostas variadas por parte dos alunos, em nosso entendimento pode ser explorado de forma positiva pelo professor em sala de aula.

6.2.3.2 Hora da Prática

Nessa seção é proposta uma atividade em que é sorteada uma razão entre o comprimento de um possível caminho do Ponto A até o Ponto B e um possível caminho do Ponto B até o Ponto C, percorrido pela tartaruga. Podemos acessar a atividade no Geogebrabook através do link https://www.geogebra.org/m/hbha5vdr. A proposta é você construir esses dois possíveis caminhos.

Instruções iniciais da atividade

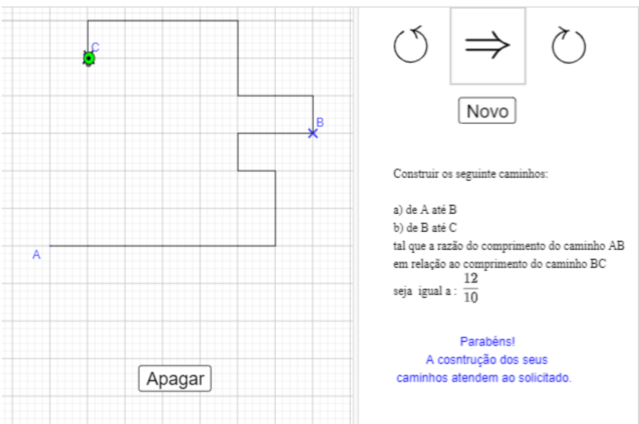
Use sua imaginação, pois em geral os caminhos não são únicos!

Para movimentar a tartaruga clique nas setas na janela da direita:

- $\Longrightarrow$ Mover 1 unidade na direção em que a tartaruga está caminhando;
- ⥀ Gira a tartaruga para a esquerda;
- ⥁ Gira a tartaruga para a direita;
- Para reiniciar a construção e escolher novos caminhos, clique no botão "Apagar";
- Para gerar uma nova razão, clique no botão "Novo".

A figura da interface desta atividade é igual à da Figura 6.32. Porém, nesta atividade temos uma diferença: No caso anterior construímos o caminho e indicamos a razão. Nesta atividade, a razão é dada e daí construímos um caminho possível, como podemos notar na Figura 6.36.

Figura 6.36: Interface com uma possível solução



Fonte: Elaborada pelo autor

Observamos que várias são as possibilidades de caminhos corretos para a resolução da atividade. Mas o importante mesmo é que o usuário perceba o significado de número racional como fração que representa índices comparativos, ou seja, pelos comprimentos dos caminhos percorridos pela tartaruga, índices estes que também chamamos de razão.

O interessante nessa atividade é que em um contexto de sala de aula, é possível, devido ao seu carácter dinâmico, o professor explorar as várias soluções apresentadas pelos alunos analisando, por exemplo, os caminhos distintos para uma mesma fração.

6.2.4 Capítulo 4: Número racional como classe de equivalência

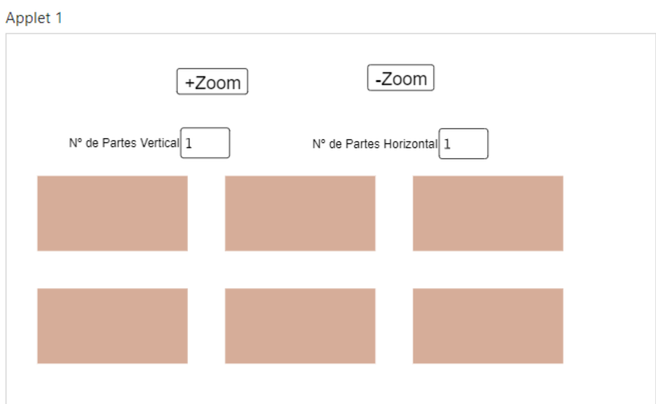
Neste capítulo do Geogebrabook vamos apresentar atividades cujo objetivo é ajudar o usuário na compreensão dos números racionais como classes de equivalência.

6.2.4.1 Construindo o conceito de Fração Equivalente

Nesta seção, retomamos uma situação análoga à discutida no segundo capítulo do GeogebraBook na seção “Dividir para Conquistar”. O problema é o seguinte: queremos dividir igualmente 6 folhas de papel entre 5 pessoas. Para ter acesso à atividade no Geogebrabook, basta clicar no link https://www.geogebra.org/m/jnqesfjj.

Ao acessar a atividade é apresentado como interface o $Applet_1$, como exibido na Figura 6.37 abaixo, onde os retângulos representam as folhas de papel.

Figura 6.37: $Applet_1$: representação das folhas de papel

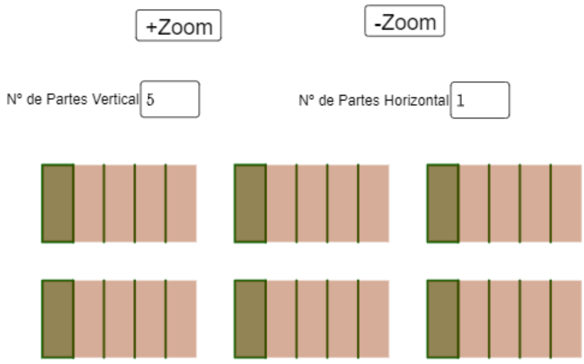


Fonte: Elaborada pelo autor

Ao entrarmos com o valor 5 na caixa de entrada (Nº de divisões verticais) e o valor 1 na caixa de entrada (Nº de divisões horizontais) obtemos uma possível solução para esse problema.

A parte de papel que coube a cada pessoa foi colorida de verde.

Figura 6.38: $Applet_1$ - Uma possível solução



Fonte: Elaborada pelo autor

Na situação ilustrada na Figura 6.38, cada pessoa recebeu:

- 6 quintos de folha;
- ou $\frac{6}{5}$de folha;
- ou ainda 1 folha e $\frac{1}{5}$ de folha;
- ou $1\frac{1}{5}$ de folha.

Uma outra maneira de fazer essa distribuição seria, por exemplo, inserir o valor 5 na caixa de entrada (Nº de divisões verticais) e o valor 2 na caixa de entrada (Nº de divisões horizontais), como podemos visualizar no $Applet_2$, Figura 6.39, o que equivale dividir cada folha de papel em 10 partes iguais.

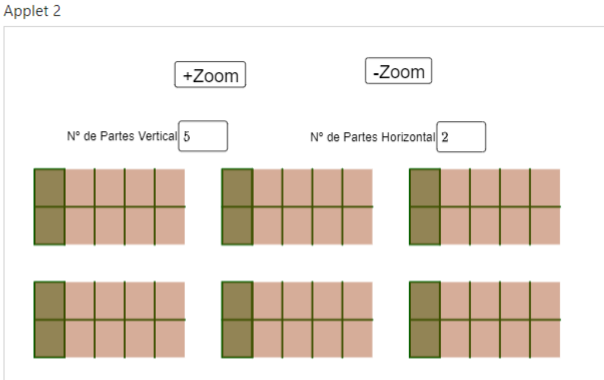
A parte de papel que coube a cada pessoa é a região colorida de verde.

Na proposta do $Applet_2$, cada folha de papel foi dividida em 10 partes iguais($\frac{1}{10}$ de folha) e cada pessoa recebeu 12 dessas partes, ou seja $\frac{12}{10}$ de folha.

Ao comparar as regiões coloridas de verde na Figura 6.38 e na Figura 6.39 podemos afirmar que as quantidades representadas por $\frac{12}{10}$ e $\frac{6}{5}$ são iguais. Neste caso, dizemos que as frações $\frac{12}{10}$ e $\frac{6}{5}$ são Frações Equivalentes, pois representam a mesma quantidade de papel.

Após estes exemplos o usuário é convidado a construir frações distintas das anteriores que sejam equivalentes a $\frac{6}{5}$. Para tanto, basta digitar "números adequados" nas

Figura 6.39: $Applet_2$ - Uma possível solução



Fonte: Elaborada pelo autor

caixas de entrada (Nº de Partes Vertical/Nº de Partes Horizontal) numa interface como apresentada na Figura 6.37.

A atividade apresenta mensagens de incentivo positivo, caso o usuário faça uma construção satisfatória para o problema. E traz a seguinte observação:

É bem provável que você, explorando a atividade acima, tenha chegado a conclusão que as seguintes frações são equivalentes: $\frac{6}{5}, \frac{12}{10}, \frac{18}{15}, \cdots$.

Após a observação apresenta a seguinte pergunta:

Qual a relação que você percebe entre os numeradores de cada uma dessas frações e também a relação entre os denominadores?

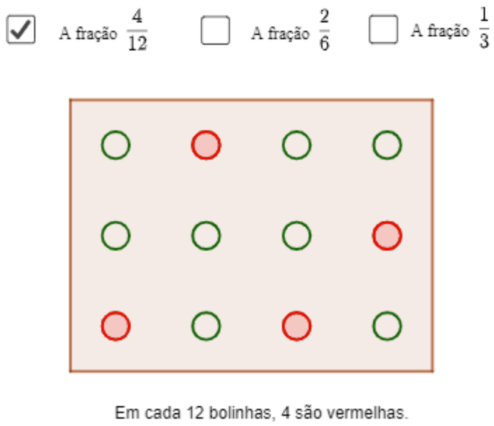
Após a resposta do usuário, a atividade apresenta uma opção de resposta correta, sendo possível refletir acerca da resposta dada.

6.2.4.2 Classe de Equivalência de uma Fração

Nesta seção do nosso GeogebraBook, para o desenvolvimento do tema, são exibidas 3 situações distintas indicando a fração que representa a quantidade de bolas vermelhas em relação ao total de bolas. As atividades dessa seção podem ser acessadas através do link: https://www.geogebra.org/m/gujvh3qv.

Ao marcar a caixa de seleção referente a cada fração apresentada, o usuário tem uma representação pictórica para exibir cada situação. Na Figura 6.40 aparece a representação quando o usuário marca a caixa de seleção da fração $\frac{4}{12}$. Observe que para cada 12 bolinhas, 4 são vermelhas.

Figura 6.40: Representação da fração $\frac{4}{12}$

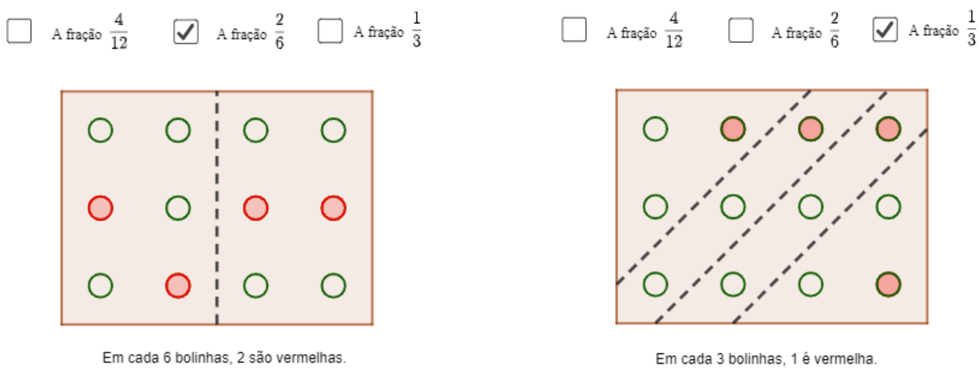


Fonte: Elaborada pelo autor

Na Figura 6.41(a), está representada a situação quando o usuário marcar a caixa de seleção da fração $\frac{2}{6}$. Observe que as bolinhas foram divididas em dois grupos de 6 e a cada 6 bolinhas, duas são vermelhas.

Já na Figura 6.41(b), temos uma representação apresentada, caso o usuário marque a caixa de seleção referente à fração $\frac{1}{3}$. Neste caso observamos que, a cada 3 bolinhas, 1 é vermelha.

Figura 6.41: Representações para frações equivalentes



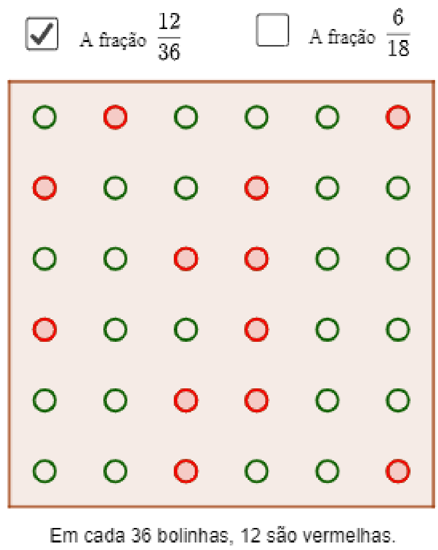
(a) Representação da fração $\frac{2}{6}$

(b) Representação da fração $\frac{1}{3}$

Fonte: Elaborada pelo autor

Num applet posterior, temos uma situação análoga, com o triplo das bolinhas apresentadas no applet das Figuras 6.40, 6.41(a) e 6.41(b). Neste caso, tomando o triplo das bolinhas (36), outras frações podem representar a mesma relação entre a quantidade de bolinhas vermelhas e o total de bolinhas, como podemos verificar na Figura 6.42, onde a cada 36 bolinhas, 12 são vermelhas.

Figura 6.42: Representações das frações $\frac{12}{36}$ e $\frac{6}{18}$



Fonte: Elaborada pelo autor

Numa situação de docência, o professor pode salientar a partir das observações das situações acima que temos uma sequência de frações equivalentes: $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{6}$, $\frac{4}{12}$, $\frac{6}{18}$, $\frac{12}{36}$ e apresentamos a seguinte pergunta: Como obter os numeradores e denominadores a partir da 1ª fração acima? Mais uma vez, apresenta uma sugestão de resposta correta para que o usuário possa refletir sobre a sua resposta para a pergunta.

Ao final da atividade, apresentamos a seguinte definição:

Denominamos de Classe de Equivalência de uma fração o conjunto (coleção) de todas as frações equivalentes a ela.

E observamos:

Qualquer fração de uma classe de equivalência pode representar a classe. Assim, podemos dizer, por exemplo, que o conjunto das frações $\{\frac{1}{3}, \frac{2}{6}, \frac{4}{12}, \cdots\}$, é a classe de equivalência de $\frac{1}{3}$ ou de $\frac{4}{12}$ etc.

6.2.4.3 Hora da Prática

Nesta seção do GeogebraBook, que podemos acessar através do seguinte link: https://www.geogebra.org/m/zgxrfx2m, vamos explorar um pouco mais o conceito de fração equivalente.

Instruções iniciais da atividade

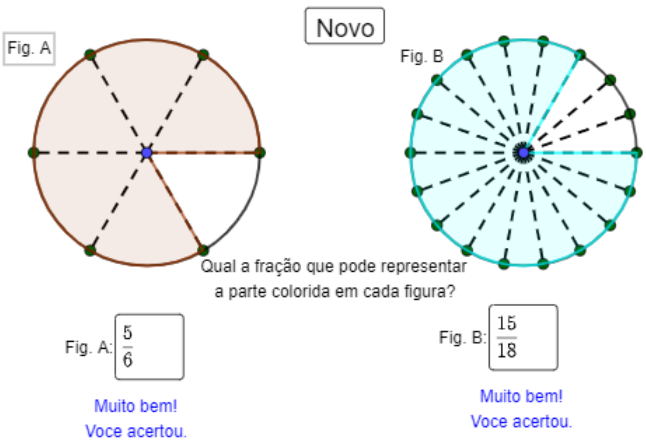
- Toda vez que clicar em Novo é gerado aleatoriamente áreas coloridas na Fig.A e Fig.B.
- Nos campos de entrada o usuário deve informar a fração correspondente à área colorida de cada figura.

Na Figura 6.43 temos dois círculos divididos em 6 e 18 partes iguais, respectivamente. No círculo referente à Fig A temos 5 partes coloridas e no círculo da Fig B temos 15 partes coloridas. Foram apresentadas corretamente as frações $\frac{5}{6}$ e $\frac{15}{18}$ como respostas.

Ao final da atividade é apresentada uma pergunta: O que se pode concluir sobre as duas frações que representam, respectivamente, as áreas coloridas de cada figura?

O importante é o usuário perceber que nas duas figuras, a parte colorida representa a mesma parte do todo, ou seja, as frações $\frac{5}{6}$ e $\frac{15}{18}$ são equivalentes.

Figura 6.43: Frações Equivalentes



Fonte: Elaborada pelo autor

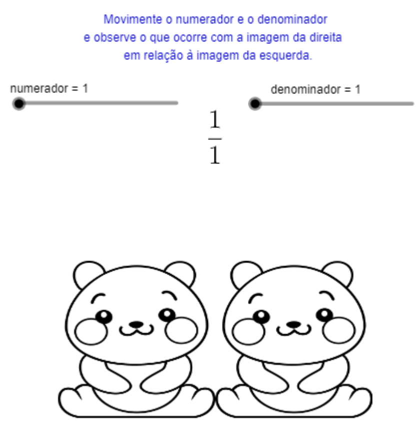
6.2.5 Capítulo 5: Número racional como Operador

Neste capítulo do GeogebraBook apresentamos uma atividade cujo objetivo é ajudar o usuário na construção do conceito de número racional como um operador.

6.2.5.1 Fração como operador

Podemos acessar a seção no Geogebrabook através do link a seguir, ou estando conectado ao livro, clicar sobre a seção correspondente: https://www.geogebra.org/m/jtpcujgt.

Figura 6.44: Tela inicial do subconstruto Operador



Fonte: Elaborada pelo autor

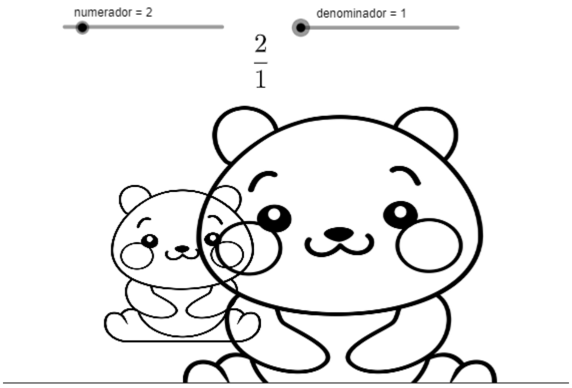
Ao inciar a atividade temos na Figura 6.44 a interface apresentada, com duas figuras de mesmo tamanho.

O usuário deve movimentar os controles deslizantes Numerador e Denominador e observar o que ocorre com a imagem da direita em relação à imagem da esquerda.

Na Figura 6.45 temos representado o que acontece quando movimentamos o numerador para 2. A figura da direita ficou 2 vezes maior, ou seja, o tamanho da figura da direita foi ampliado para o dobro da dimensão inicial.

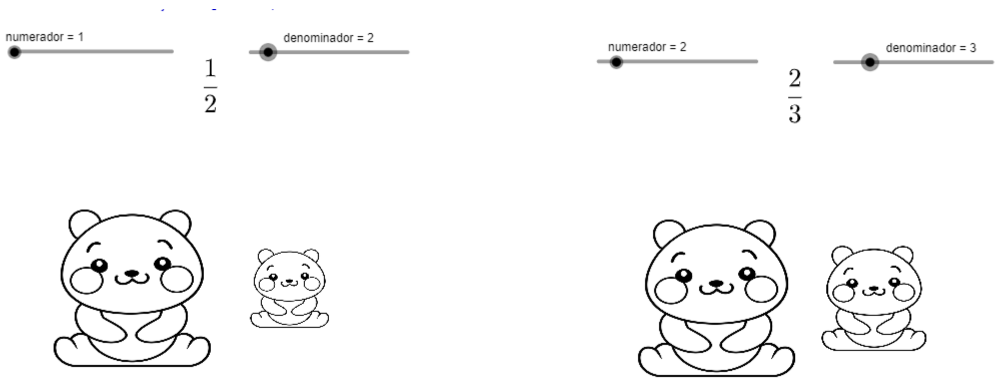
Na Figura 6.46, o desenho representa o que acontece quando movimentamos o denominador. Neste caso movimentamos para o valor 2 e a figura da esquerda foi reduzida à metade do tamanho inicial, apresentado na Figura 6.46(a).

Figura 6.45: Imagem ampliada



Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 6.46: Imagem ampliada/reduzida



(a) Redução de $\frac{1}{2}$ (b) Redução/ampliação $\frac{2}{3}$

Fonte: Elaborada pelo autor

Já na Figura 6.46(b), o numerador foi movimentado para o número 2 e o denominador para o número 3, ou seja a figura inicial foi ampliada para o dobro da dimensão inicial e reduzida à terça parte. Como isso aconteceu simultaneamente, podemos dizer que a imagem representa $\frac{2}{3}$ da dimensão inicial.

Na sequência são apresentadas duas questões abertas:

1. Descreva com suas palavras o que você percebeu que ocorre com a imagem da direita quando aumentamos/diminuímos o valor do numerador.

2. Descreva com suas palavras o que você percebeu que ocorre com a imagem da direita quando aumentamos/diminuímos o valor do denominador.

São apresentadas como sugestão, respostas corretas para cada questão, que o usuário pode visualizar clicando em VERIFIQUE SUA RESPOSTA.

O objetivo é que o usuário entenda que a imagem, quantidade, ou conjunto é multiplicada pelo valor destinado ao numerador e dividida pelo valor destinado ao denominador, ou seja, podemos dizer que a fração $\frac{p}{q}$, com q$\neq$ 0 é pensado como uma função que transforma figuras geométricas em figuras geométricas semelhantes, $\frac{p}{q}$ vezes maiores ou como uma função que transforma um conjunto em outro conjunto com $\frac{p}{q}$ mais elementos.

6.2.6 Capítulo 6: Número racional e a reta numérica

Neste capítulo apresentamos atividades cujo objetivo é ajudar o usuário na construção do conceito de número racional como um medida.

6.2.6.1 Vamos medir?

Nesta seção são apresentadas três atividades com o intuito de explorar o conceito de número racional dentro da interpretação como medida. As atividades poderão ser acessadas através do link: https://www.geogebra.org/m/nvazn2q2.

Atividade 1

Ao iniciar esta atividade é apresentado o desenho de uma régua comum, como na Figura 6.47.

Figura 6.47: Régua escolar

Fonte: Elaborada pelo autor

Algumas questões são exibidas com base neste desenho:

1. Observe que aparecem alguns números registrados na régua. Que tipo de números são esses?

2. Além de números, o que mais está registrado na régua? (O autor deixa como observação que os números naturais estão registrados abaixo dos traços maiores).

3. Explique o significado que você atribui:

   a) aos tracinhos de comprimento médio entre os traços maiores. Por exemplo, o traço médio entre o 1 e o 2, entre o 2 e o 3, etc.

   b) Aos tracinhos mais curtos entre o zero e 1, por exemplo.

4. Nomeie de "intervalo" o espaço entre dois tracinhos vizinhos. Indique quantos intervalos há entre:

   a) o zero e o 1.

   b) o 1 e o 3.

   c) o 2 e o traço médio entre 2 e 3.

Para cada questão ou item da questão é apresentada uma resposta ou comentário do autor.

Assim levamos o usuário a entender os espaços entre dois números ou pontos da régua como partes iguais de um todo, ou um fração no conceito medida.

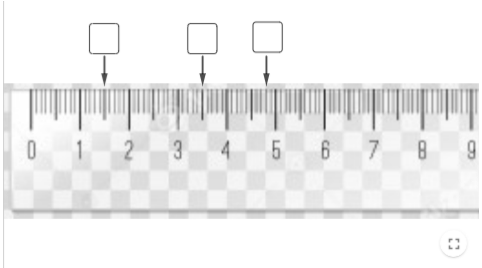
Atividade 2

Nesta atividade, temos uma interface como na Figura 6.48 e o usuário deve associar a cada tracinho indicado um número racional. Esses números (na forma fracionária ou decimal) devem ser indicados nas caixas de entrada sobre os tracinhos. A unidade utilizada na figura é o espaço entre dois números naturais consecutivos, contando a partir do zero.

Ao final da atividade temos a seguinte observação:

Tomando como modelo de reta numérica a régua da figura acima, você não terá dificuldades em representar os números $1\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, $3\frac{5}{10} = \frac{35}{10}$. No entanto, já não é tão simples se você pretende localizar nessa régua o número $\frac{2}{3}$, isso porque a nossa régua

Figura 6.48: Tela inicial da Atividade 2 - Subconstructo medida



Fonte: Elaborada pelo autor

(modelo de reta numérica) apresenta somente 10 intervalos iguais entre dois números naturais consecutivos.

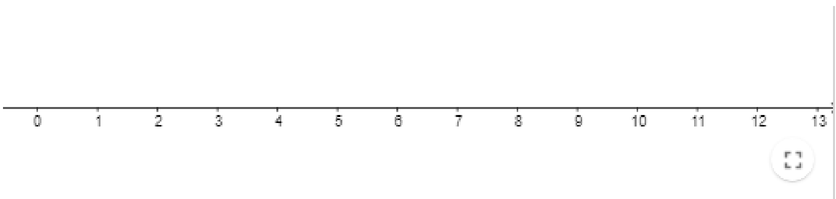
Atividade 3

Nesta atividade, apresentaremos uma ideia de como "construir" uma reta numérica que possa comportar todos os números fracionários (racionais).

- Sobre uma reta qualquer, marque um ponto O, o qual irá representar o zero;
- Escolhendo-se uma unidade de medida, marcam-se a partir do zero pontos igualmente espaçados e que irão representar os números 1, 2, 3, $\cdots$ da esquerda para a direita.

Teremos assim uma reta como a da Figura 6.49.

Figura 6.49: Reta numérica



Fonte: Elaborada pelo autor

A seguir são apontadas algumas observações que estão postas na atividade:

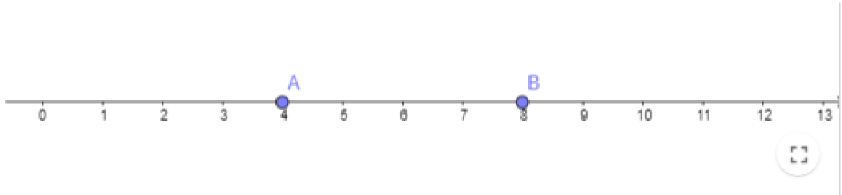
1. Cada um dos segmentos entre dois números naturais consecutivos representa uma unidade de medida (um inteiro);

2. Dessa forma, o ponto que representa o 3 encontra-se a uma distância de 3 unidades de medida (inteiros), a partir do zero, para a direita;

3. Com essa convenção, um ponto B que se encontra à direita do ponto A representa um número maior que o representado pelo ponto A.

Por exemplo, na Figura 6.50, o ponto B (que representa o número 8) está à direita do ponto A (que representa o número 4), pois 8 é maior do que 4.

Figura 6.50: Representação na reta numérica



Fonte: Elaborada pelo autor

A seguir, temos a seguinte pergunta: Como representar um número racional/fracionário $\frac{a}{b}$ na reta numérica?

Para tanto, temos as seguintes instruções:

- Divide-se cada intervalo entre os números inteiros em b partes iguais (indicado pelo denominador);

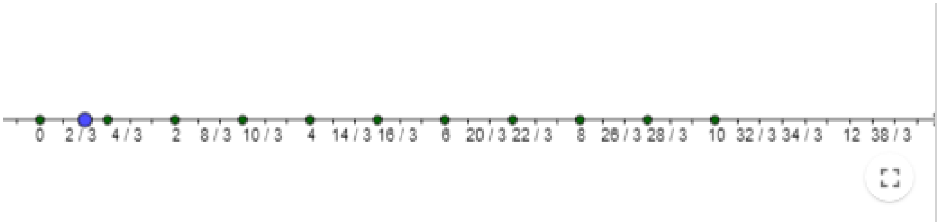
- Toma-se a (indicando o numerador) dessas partes a partir do zero e marque o ponto correspondente na reta;

- O ponto obtido no passo anterior representará a fração $\frac{a}{b}$.

No exemplo abaixo, Figura 6.51, estão representadas na reta algumas frações de denominador igual a 3

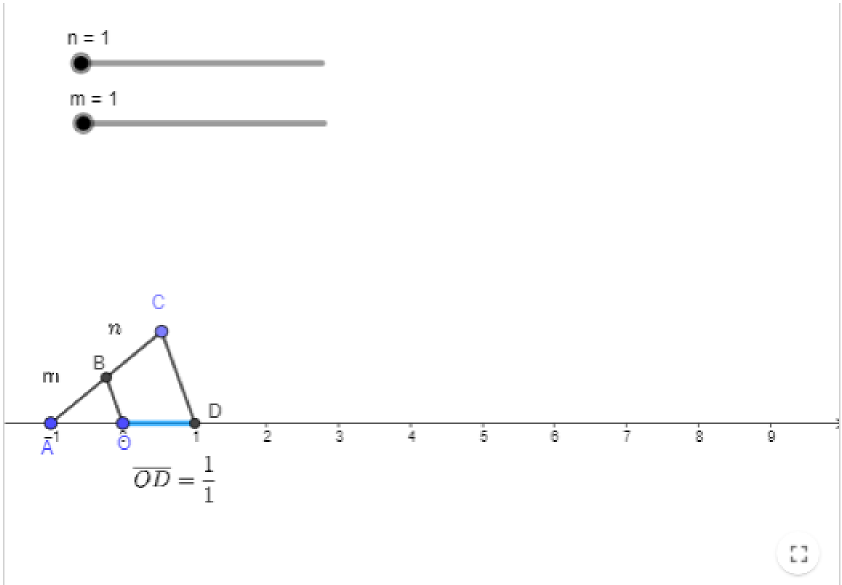
Na sequência da atividade é apresentado um Applet, Figura 6.52, no qual o usuário deve movimentar os controles deslizantes n e m(n indicando o numerador e m indicando o denominador da fração $\frac{n}{m}$) e assim, deve notar que o ponto D representa a fração cujo numerador é n e o denominador é m.

Figura 6.51: Representação de um número racional na reta numérica



Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 6.52: Applet - Representação de números racionais na reta numérica



Fonte: Elaborada pelo autor

6.2.6.2 Hora da Prática

O objetivo desta seção é explorar a comparação de frações utilizando para isso sua representação na reta numérica. Podemos acessar a atividade no Geogebrabook através do link: https://www.geogebra.org/m/knt5uppz.

Instruções iniciais

- Toda vez que se clica no botão NOVO! é gerado um novo par de frações;
- Na caixa de entrada você deve responder à pergunta utilizando um dos símbolos $>$(maior), $<$(menor) ou $=$(igual) e apertar a tecla Enter.

Ao teclar "Enter" uma mensagem positiva será exibida, caso o usuário acerte a questão. Caso contrário, poderá realizar outras tentativas a fim de conseguir o sucesso.

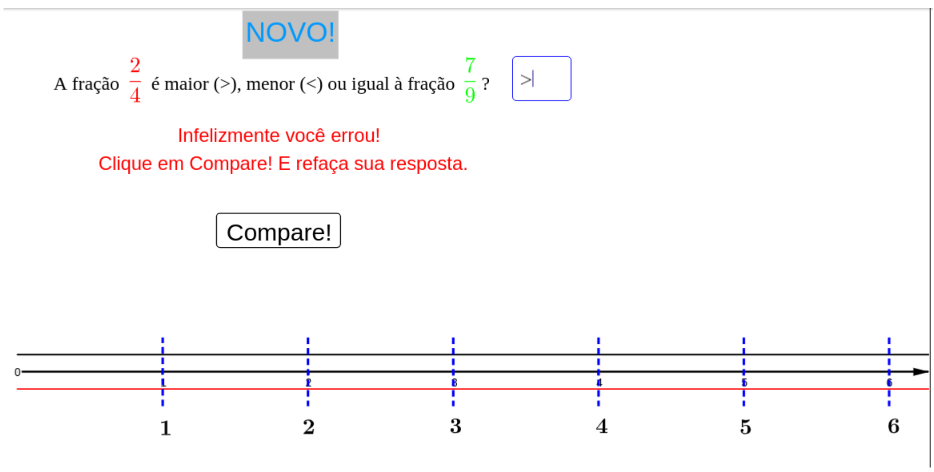
Na Figura 6.53 temos a interface da atividade numa comparação entre as frações $\frac{1}{2}$ e $\frac{8}{9}$. Foi digitada como resposta $<$ que significa menor e o usuário recebeu uma mensagem de incentivo positivo: Correto !

Figura 6.53: Comparação de frações

Fonte: Elaborada pelo autor

Caso o usuário informe um valor equivocado para a comparação da duas frações sorteadas é apresentada a mensagem "Infelizmente você errou! Clique em Compare! E refaça sua resposta", conforme podemos ver na Figura 6.54.

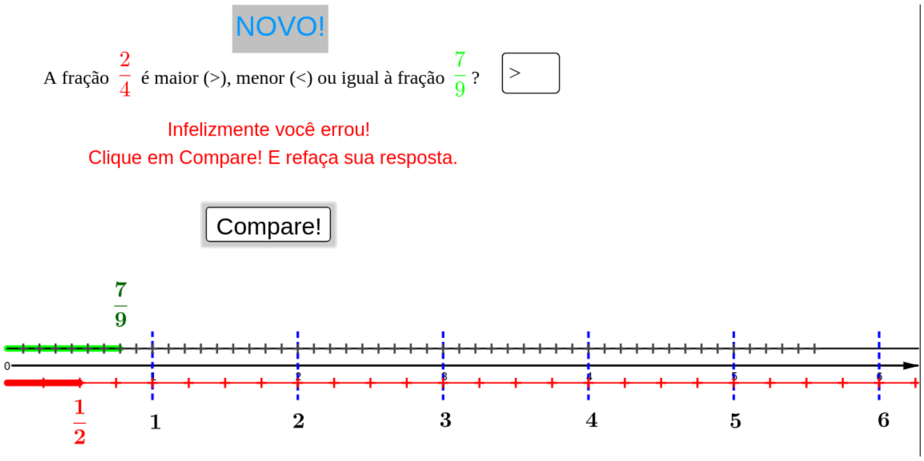
Figura 6.54: Comparação de frações - Caso erro



Fonte: Elaborada pelo autor

Ao clicar no botão "Compare!" é apresentada uma representação simultânea das duas frações sobre as retas numéricas e isto facilita ao usuário dar a resposta correta para a atividade, conforme podemos perceber na Figura 6.55.

Figura 6.55: Comparação de frações - Caso erro/Compare



Fonte: Elaborada pelo autor

Note que esta atividade, assim como outras apresentadas no GeogebraBook, apresenta um carácter dinâmico, visto que permite ao clicar em NOVO a criação de frações aleatórias e que dessa forma pode contribuir para um maior dinamismo em um ambiente de sala de aula.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

É sempre bom estar atento com a atualidade, pois “o universo não foi sempre como observamos agora”(DOBZHANSKY, 1956) e a sociedade está em constante evolução. Na educação, esta evolução está intimamente ligada ao uso das tecnologias. “Falar em tecnologia educativa significa, essencialmente, tornar o processo educativo mais eficaz e falar em eficácia significa melhorar a aprendizagem ”.(KLEIN et al., 2020).

Neste trabalho buscamos refletir sobre a importância das tecnologias na educação, começando pelo quadro-negro, no qual mostramos a sua importância para melhorar a dinâmica das aulas, as calculadoras, que permitiram agilizar o cálculo e as tecnologias digitais de informação e comunicação, as TDIC, nas quais destacamos o computador, uma máquina usada como dispositivo para trabalhar, se relacionar com outras pessoas, realizar pesquisas e acessar softwares, a internet, um importante ambiente de pesquisa, relacionamentos e trabalho, as planilhas eletrônicas, que apresentam funcionalidades superiores às calculadoras comuns (GIRALDO; CAETANO; MATTOS, 2012). Destacamos, também, a importância dos softwares educativos livres, que permitem ao usuário utilizar, copiar, distribuir, modificar e estudar (MAIA, 2011), com destaque para os softwares de geometria dinâmica, recursos computacionais de grande valia para o ensino e aprendizagem da matemática e, em especial, o Geogebra, um software de matemática dinâmica que se tornou uma plataforma digital (SOUZA, 2020). Este software combina geometria, álgebra, planilha de cálculo, gráficos, probabilidade, estatística e cálculos simbólicos num pacote fácil de usar (HOHENWARTER et al., 2018).

Discutimos as expectivas pedagógicas referente ao estudo dos números racionais conforme previsão da BNCC/CRMG. Com base na BNCC, argumentamos que os diversos campos que compõem a Matemática aglutinam um conjunto de ideias fundamentais que se articulam entre os quais: “equivalência, ordem, proporcionalidade, interdependência, representação, variação e aproximação” (BRASIL, 2017) e que o conhecimento acerca de números racionais tanto na representação decimal quanto na fracionária é importante para o indivíduo realizar tarefas que envolvem medições nas quais os números naturais não são suficientes para resolvê-las.

Analisamos, para cada ano do Ensino Fundamental, os objetos de conhecimento previstos na BNCC que tratam de números racionais desde o 4º ano até o 9º ano do Ensino Fundamental e observamos que o Currículo Referência do Estado de Minas Gerais(CRMG) foi criado em consonância com a BNCC, apresentando os mesmos objetos de conhecimento e habilidades em relação ao estudo dos números racionais.

Na busca por dilucidar os conceitos dos números racionais em expectativas previstas nos documentos oficiais BNCC e CRMG, buscamos e elencamos alguns autores que trabalharam no sentido de elucidar as diversas ramificações sobre a compreensão de números racionais e defendem que a compreensão do conceito de números racionais depende da formulação de um elo entre essas ramificações. (ROMANATTO et al., 1997). Ramificações de números racionais são chamadas de construtos ou subconstrutos (KIEREN, 1976), interpretações(BEHR et al., 1983) ou campo semântico (OHLSSON, 1988).

Apresentamos as considerações desses pesquisadores, bem como os conceitos de números racionais dentro das análises dos subconstrutos parte-todo, medida, razão, quociente, classes de equivalência, operador e decimal.

Elaboramos uma proposta de atividade no software geogebra para o estudo dos subconstrutos dos números racionais: a construção de um Geogebrabook com atividades contemplando o estudo dos subconstrutos dos números racionais sob diversas perspectivas de aprendizagem. Neste livro virtual, temos capítulos de atividades para o desenvolvimento do conhecimento acerca dos subconstrutos parte-todo, medida, quociente, razão, classes de equivalência e operador. As atividades poderão ser acessadas pelos links disponibilizados em cada capítulo do Geogebrabook, que constituem um material didático dinâmico e moderno, acerca do estudo dos números racionais, conteúdo pertinente ao Currículo de Matemática da Educação Básica.

Como já foi abordado o Geogebra é um software livre, ou seja, qualquer pessoa pode utilizar, copiar, distribuir, modificar estudar e este livro não contempla todos os subconstrutos dos números racionais. Por isso mesmo, pretendemos futuramente complementar este trabalho com novas atividades nos capítulos dos subconstrutos já contemplados e criar novos capítulos com atividades dos subconstrutos que ainda não foram contemplados.

E do fato dos usuários terem a liberdade de copiar, utilizar e modificar as atividades disponibilizadas na Plataforma Geogebra.org com o indicativo Público e/ou Compartilhado por link qualquer cidadão pode fazer cópias deste livro, criar novas atividades ou até mesmo modificar as que já estão prontas, construindo um novo material. Temos a expectativa de que professores e alunos possam acessar o Geogebrabook e utilizar as atividades tanto para estudar números racionais quanto para servir de material didático nas aulas de matemática o que pode tornar o processo de ensino e aprendizagem mais eficaz e assim apresentamos este trabalho como produto educacional na plataforma Geogebra.org capaz de potencializar o processo de ensino e aprendizagem dos números racionais.

REFERÊNCIAS

ARAÚJO, D. A. D.; SOARES, E. S. Calculadoras e outras geringonças na escola. **Presença Pedagógica**, v. 8, n. 47, 2002.

BARROS, A. J. S.; LEHFELD, N. A. S. **Fundamentos de Metodologia Cientifica**. São Paulo: Pearson, 2000.

BEHR, M. J. et al. Rational number concepts. **Acquisition of mathematics concepts and processes**, v. 91, p. 91–125, 1983.

BIANCHINI, E. **Matemática: Bianchini 6º ano**. São Paulo: Moderna, 2018.

BRASIL. **Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2017.

CARVALHO, M. A trajetória da internet no brasil: do surgimento das redes de computadores à instituição dos mecanismos de governança. **Unpublished Estudos de Ciência e Tecnologia no Brasil, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro**, 2006.

CELINA, A. A. et al. **Sobre o Geogebra**. São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2010. ⟨http://www.pucsp.br/geogebrasp/geogebra.html⟩.

CERVO, A. L.; BERVIAN, P. A.; SILVA, R. **Metodologia cientifica**. São Paulo: Pearson, 2007.

DOBZHANSKY, T. A evolução humana. **Revista de antropologia**, JSTOR, p. 97–102, 1956.

FREUDENTHAL, H. **Didactical Phenomenology of Mathematical Structures**. Dordrech: Kluwer, 1983. 133–177 p.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. São Paulo: Atlas, 2007.

GIRALDO, V.; CAETANO, P.; MATTOS, F. Recursos computacionais no ensino de matemática. **Rio de Janeiro: SBM**, 2012.

GRAVINA, M. A. Geometria dinâmica: uma nova abordagem para o aprendizado da geometria. **Anais do VII Simpósio Brasileiro de Informática na Educação**, v. 1, p. 1–13, 1996.

HOHENWARTER, M. et al. **GeoGebra 5.0.507.0**. 2018. ⟨http://www.geogebra.org⟩.

KIEREN, T. E. On the mathematical, cognitive and instructional. In: CITESEER. **Number and measurement. Papers from a research workshop**. Gergia, 1976. p. 101–144.

KIEREN, T. E. The rational number construct: Its elements and mechanisms. **Recent research on number learning**, p. 125–149, 1980.

KIEREN, T. E. Rational and fractional numbers: From quotient fields to recursive understanding. **Rational numbers: An integration of research**, p. 49–84, 1993.

KLEIN, D. R. et al. Tecnologia na educação: evolução histórica e aplicação nos diferentes níveis de ensino. **Educere-Revista da Educação da UNIPAR**, v. 20, n. 2, 2020.

MAIA, C. C. V. As diferenças entre softwares livres e gratuitos. In: **Anais do Congresso Nacional Universidade, EAD e Software Livre**. Belo Horizonte: [s.n.], 2011. v. 2, n. 2.

MINAS GERAIS, E. Currículo referência de minas gerais. **Minas Gerais**, 2018.

NESHER, P. An outline for a tutorial on rational numbers. Unpublished manuscript. 1985.

NEVES, V. F. A. Tensões contemporâneas no processo de passagem da educação infantil para o ensino fundamental: um estudo de caso. Universidade Federal de Minas Gerais, 2010.

OHLSSON, S. Mathematical meaning and applicational meaning in the semantics of fractions and related concepts. **Number concepts and operations in the middle grades**, v. 2, p. 53–92, 1988.

R7.COM. **Segredosdomundo**. 2021. ⟨http://www.segredosdomundo.r7.com/quadronegro⟩.

ROMANATTO, M. C. et al. Número racional: relações necessárias à sua compreensão. [sn], 1997.

SBM. **PROFMAT-Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Disponível em:¡ https://www.profmat-sbm.org.br¿**. 2011.

SILVEIRA, Ê.; MARQUES, C. **Matemática: compreensão e prática**. São Paulo: Moderna, 2018.

SOUZA, J. B. de. **Sequências didáticas com Realidade Aumentada como auxílio para desenvolver a habilidade de visualização espacial**. Dissertação (Mestrado) — Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional(PROFMAT)/UFVJM, Teófilo Otoni, MG, 2020.

STRAUSS, A. **Pesquisa qualitativa: técnicas e procedimentos para o desenvolvimento de teoria fundamentada**. Porto Alegre: Artmed, 2008.

VERGNAUD, G. Multiplicative structures. In: LESH, R. AND LANDAU, M. **Acquisition of mathematics concepts and processes**. New York: Academic Press New York, 1983. p. 127–174.

WERTHEIM, M. **História do Espaço de Dante à Internet**. Rio de Janeiro: Zahar, 2001.

WIKIPéDIA. **BibTeX — Wikipédia, a enciclopédia livre**. 2007. [Online; accessed 09-setembro-2021]. Disponível em: ⟨http://pt.wikipedia.org/w/index.php?title=BibTeX&oldid=4879810⟩.

AUTORIZAÇÃO

Autorizo a reprodução e/ou divulgação total ou parcial do presente trabalho, por qualquer meio convencional ou eletrônico, desde que citada a fonte.

Teófilo Otoni, ____ / ____ / ________.

____

Alano Gomes de Oliveira

alano.oliveira@ufvjm.edu.br

Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri

Campus do Mucuri - Rua do Cruzeiro, n. 01 - Jardim São Paulo - CEP 39803-371.

UFVJM