UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Programa de Mestrado Profissional em

Matemática em Rede Nacional

UMA SUGESTÃO DE MODELAGEM NO ENSINO BÁSICO PARA A COVID-19 EM GOIÁS

Claudio Prado Pereira Valle

Goiânia/Goiás

2021

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR ELETRONICAMENTE OS TRABALHOS DE CONCLUSÃO DE CURSO NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: **Trabalho de Conclusão de Curso de Mestrado Profissional**

2. Identificação do Trabalho

Autor (a):	Claudio Prado Pereira Valle				
E-mail:	claudiopradovale @hotmail.com				
Seu e-mail pode ser disponibilizado na página? [x]Sim [ ] Não					
Vínculo empregatício do autor					
Agência de fomento:				Sigla:	
País:		UF:		CNPJ:	
Título:	Uma sugestão de modelagem no ensino básico para a COVID-19 em Goiás				
Palavras-chave:	Modelagem matemática				
Título em outra língua:					
Palavras-chave em outra língua:					
Área de concentração:	Matemática da educação básica				
Data defesa: (dd/mm/aaaa)	30/08/2021				
Programa de Pós-Graduação:	PROFMAT				
Orientador (a):	Kélem Gomes Lourenço				
E-mail:	Kelem.gomes@ufg.br				
Co-orientador(a):*					
E-mail:					

*Necessita do CPF quando não constar no SisPG

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento [x] SIM [ ] NÃO[1]

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF ou DOC do trabalho de conclusão de curso.

O sistema da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações garante aos autores, que os arquivos contendo eletronicamente as teses, dissertações ou trabalhos de conclusão de curso, antes de sua disponibilização, receberão procedimentos de segurança, criptografia (para não permitir cópia e extração de conteúdo, permitindo apenas impressão fraca) usando o padrão do Acrobat.

Assinatura do(a) autor(a) Data: 03/11/2021

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

CLAUDIO PRADO PEREIRA VALLE

UMA SUGESTÃO DE MODELAGEM NO ENSINO BÁSICO PARA A COVID-19 EM GOIÁS

Trabalho de Conclusão decurso apresentado à Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.
Área de concentração: Matemática da Educação Básica
Orientadora: Prof. Dra. Kélem Gomes Lourenço

Goiânia/Goiás

2021

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do
Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Valle, Claudio Prado Pereira
Uma sugestão de modelagem no ensino básico para a COVID 19 em Goiás [manuscrito] / Claudio Prado Pereira Valle. - 2021.
62 f.

Orientador: Profa. Dra. Kélem Gomes Lourenço.
Trabalho de Conclusão de Curso Stricto Sensu (Stricto Sensu) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística (IME), PROFMAT - Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional - Sociedade Brasileira de Matemática (RG), Goiânia, 2021.
Bibliografia. Apêndice.
Inclui gráfico, tabelas, lista de figuras, lista de tabelas.

1. Educação Matemática. 2. Modelagem matemática. 3. Problematização. 4. Investigação matemática. I. Lourenço, Kélem Gomes, orient. II. Título.

CDU 517

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO

Ata nº 31 da sessão de Defesa de Dissertação de **Claudio Prado Pereira Valle,** que confere o título de Mestre em Matemática, **na área de concentração em Matemática do Ensino Básico.**

Ao trigésimo primeiro dia do mês de agosto do ano de dois mil e vinte um, a partir das quatorze horas e zero minutos, através de web-vídeo-conferência, realizou-se a sessão pública de Defesa de Dissertação intitulada **"UMA SUGESTÃO DE MODELAGEM PARA O COVID-19 EM GOIÁS".** Os trabalhos foram instalados pela Orientadora, Professora Doutora **Kélem GomesLourenço IME/UFG** com a participação dos demais membros da Banca Examinadora:Professor Doutor **Max Valério Lemes - IME/UFG** membro titular interno e a ProfessoraDoutora **Sunamita Souza Silva - ICEN/UFR** membro titular externo. Durante a arguição os membrosda banca **fizeram** sugestão de alteração do título do trabalho. A Banca Examinadora reuniu-se em sessão secreta a fim de concluir o julgamento da Dissertação, tendo sido o candidato **aprovado** pelos seus membros. Proclamados os resultados pela Professora Doutora Kélem Gomes Lourenço IME/UFG,a Presidente da Banca Examinadora, foram encerrados os trabalhos e, para constar, lavrou-se a presenteata que é assinada pelos Membros da Banca Examinadora, ao trigésimo primeiro dia do mês de agostodo ano de dois mil e vinte um.

TÍTULO SUGERIDO PELA BANCA

UMA SUGESTÃO DE MODELAGEM NO ENSINO BÁSICO PARA A COVID-19 EM GOIÁS

---

sei! assinatura eletrônica

Documento assinado eletronicamente por **Kelem Gomes Lourenco**, **Professora do MagistérioSuperior**, em 31/08/2021, às 15:50, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

---

sei! assinatura eletrônica

Documento assinado eletronicamente por **Max Valerio Lemes**, **Professor do Magistério Superior**, em 31/08/2021, às 15:51, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento noart. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015

---

sei! assinatura eletrônica

Documento assinado eletronicamente por **Sunamita Souza Silva**, **Usuário Externo**, em 31/08/2021, às 15:53, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, doDecreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador**2260565** e o código CRC **717425E0.**

Referência: Processo nº 23070.041583/2021-33 SEI nº 2260565

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer a minha orientadora Professora Dra. Kélem Gomes Lourenço que, com muita paciência e disponibilidade, muito me auxiliou na elaboração e conclusão desse trabalho.

Agradeço também às professoras Rosilônia Pereira Dias e Lidiane Rezendes Nunes pela amizade e grande apoio nas revisões e pelos incessantes incentivos para sua conclusão.

Por último agradeço aos colegas de mestrado sempre disponíveis no decorrer dessa etapa.

RESUMO

O objetivo central desse trabalho era usar a modelagem matemática para interpretar a propagação do COVID-19 no estado de Goiás, como um recurso para o processo de ensino aprendizagem. O trabalho iniciou-se com uma intensa pesquisa sobre o tema tanto no seu aspecto biológico (epidemiologia) quanto no aspecto da modelagem matemática. Como o trabalho é uma sugestão para a aplicação da modelagem matemática em sala de aula toda a sequência de ações descritas a seguir deve ser compartilhada entre aluno e professor. Em seguida foi feito um levantamento, junto à Secretaria Estadual de Saúde do estado de Goiás, dos dados de propagação dos casos diários de contaminação pelo COVID-19. Estes dados, depois de tabelados, se obteve a média móvel de casos. Com esses números, após a seleção objetiva de alguns dados, obteve-se o gráfico de dispersão. Com o vislumbre da dispersão, são propostos três modelos matemáticos (linear, polinomial e exponencial) para verificar, qual desses, melhor se adapta. Nessa jornada espera-se que o aluno adquira conhecimentos sólidos sobre funções matemáticas e seus gráficos, porcentagens e epidemiologia. Além disso leva o aluno a conhecer o software “GeoGebra” e por fim discutir uma pandemia, em particular o COVID-19, descobrindo suas causas, sua evolução e, também, sua prevenção.

Palavras-chave: Educação Matemática; Modelagem Matemática; Problematização; Investigação Matemática.

ABSTRACT

The central objective of that quest was to use mathematical modeling to interpret the propagation of COVID-19 in the state of Goiás, as a resource for the learning teaching process. The inquiry began with intense research on the theme both in its biological aspect (epidemiology) and in the aspect of mathematical modeling. As the search is a suggestion for the application of mathematical modeling in the classroom the entire sequence of actions described below should be shared between student and teacher. Next, a survey was made, with the State Department of Health of the state of Goiás, of the data of propagation of daily cases of contamination by COVID-19. These data, after being presented, obtained the moving average of the cases. With these numbers, after the objective selection of some data, the dispersion plot was obtained. With the glimpse of dispersion, three mathematical models (linear, polynomial and exponential) are proposed to verify, which one, best adapts. In this journey, the student is expected to acquire solid knowledge about mathematical functions and their graphs, percentages and epidemiology. It also leads the student to know the software "GeoGebra" and finally discuss a pandemic, in particular COVID-19, discovering its causes, its evolution and also its prevention.

Keywords: Mathematics Education; Mathematical Modeling; Problematization; Mathematical Research.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE GRÁFICOS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O surgimento da Pandemia, no final do ano de 2019, levou toda população mundial a um estado de perplexidade diante das graves consequências inerentes à área médica, econômica e social a que o mundo se sujeitou. Pois a transmissão de um novo Coronavírus (SARS-CoV-2), identificado na província de Wuhan na China, provocando a Covid-19, logo se espalhou por todos os continentes.

No Brasil, o primeiro caso notificado ocorreu em São Paulo, no dia 26 de fevereiro, enquanto que no estado de Goiás o primeiro registro ocorreu em 12 de março de 2020.

Este introito é necessário para ressaltar o fato que foi em meio a esta turbulenta propagação da doença, que surgiu a ideia de encontrar uma função que se aproximasse da representação da curva do gráfico do número de contaminados provocados pela COVID-19, o que nos reporta ao uso da Modelagem Matemática.

Segundo BASSANEZI, apud SANTOS (1987, 1997):

> O estudo de problemas e situações reais, usando a matemática como linguagem para sua compreensão, simplificação e resolução, para uma possível previsão ou modificação da situação real estudada, faz parte do processo que se convencionou chamar Modelagem Matemática.

Por isso, este trabalho busca evidenciar a viabilidade de uso da modelagem matemática para ensino da matemática no Ensino Médio, em primeiro lugar para se dispor de um exemplo relevante de aplicação do conteúdo (a Covid-19) e depois realçar a interdisciplinaridade, já que é possível envolver conceitos da Biologia.

A partir dessa premissa, o trabalho organiza-se em três capítulos nos quais busca-se refletir sobre a Educação Matemática como um todo e o uso da modelagem matemática como forma de contribuir com o processo de ensinoaprendizagem, apresentando, assim, uma proposta de modelagem utilizando a Covid-19.

No primeiro capítulo abordar-se-á, especificamente, a modelagem, perpassando por sua concepção até sua adoção como estratégia de ensino. Ainda nesse capítulo haverá a explanação das postulações teóricas de estudiosos como Bassanezi e Biembengut, autores que obtiveram sucesso ao aplicar sugerir a Modelagem Matemática em sala de aula.

No segundo capítulo, que se intitula A modelagem epidemiológica, analisar-se-á a maneira correta de se abordar a propagação de uma doença epidemiológica com o uso de modelos compartimentados e que, necessariamente, recai em um sistema de equações diferenciais. Nesse capítulo também se recorrerá ao histórico da modelagem epidemiológica, contexto em que serão apresentados alguns conceitos da epidemiologia imprescindíveis para o entendimento da concepção dos modelos.

No terceiro e último capítulo apresentar-se-á uma sugestão do uso da modelagem matemática para o estudo da matemática no ensino médio. E isto partindo dos dados de propagação da Covid-19 no estado de Goiás, com o intuito de levar os alunos a entender essa doença contagiosa em todas as suas facetas. Pois nessa busca o aluno terá contato com algumas funções matemáticas e seus gráficos, conhecerá, também, o software GeoGebra e será confrontado, ainda, com o estudo de porcentagem dentre outros assuntos.

2 MODELAGEM

2.1 –PREÂMBULO

Ao longo de sua história o homem tem sempre buscado compreender os fenômenos da natureza e suas leis no intuito de prever suas implicações e alcançar soluções capazes de favorecer sua vida.

Neste contexto, a Matemática surgiu como um poderoso instrumento para a compreensão desses fenômenos permitindo a elaboração de modelos para representar situações concretas que de outra forma seria impossível analisar na sua forma real. Por isso D'Ambrosio (2002, p13) enfatiza que “(...) a Modelagem Matemática é Matemática por excelência”.

Ora, um dos objetivos da matemática aplicada, uma área da matemática que consiste no uso prático de conhecimentos matemáticos, é discorrer acerca de situações do cotidiano construindo modelos que permitam sua análise. Segundo Bertone et al(2014, p. 20),

> (...) a matemática pode ser vista como um instrumento intelectual capaz de sintetizar ideias concebidas em situações empíricas que estão quase sempre camufladas num emaranhado de variáveis de menor importância

Devido ao uso sistemático de conceitos matemáticos nas atividades de modelagem, esta estratégia também tem sido utilizada como uma alternativa pedagógica para o ensino e aprendizagem da Matemática.

2.2 – MODELO MATEMÁTICO

Para melhor entender e analisar os fenômenos que estuda, o homem utiliza representações, que devem ser entendidas como modelos da coisa real. Um dos conceitos de modelo, segundo o Dicionário Aurélio (2001), é aquilo que serve de referência ou que é dado para ser representado. Bassanezi (2009, p. 19) define “O modelo matemático é um sistema artificial que formaliza argumentos ou parâmetros de uma determinada porção da realidade”. Por isso, construir o modelo torna-se fundamental para o entendimento e resolução da situação estudada. O que justifica o fato de que a matemática como linguagem simbólica conduz a uma representação da situação problema em termos matemático.

Desse modo, um modelo matemático, pode ser entendido como um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representa uma situação, um fenômeno ou um objeto real a ser estudado.

De acordo com Bertone et al (2014, p. 21) existem dois tipos de modelos: o Modelo Objeto e o Modelo Teórico. O primeiro é a representação de um objeto ou fato concreto. Tal representação pode ser – pictórica – um desenho, um esquema compartimental ou um mapa. Um modelo epidemiológico, ainda nesse trabalho será detalhado, é um exemplo de Modelo Objeto. Já o Modelo Teórico é aquele vinculado a uma teoria geral existente e será sempre construído em torno de um modelo objeto com um código de interpretação, devendo representar as mesmas variáveis essenciais existentes no fenômeno e suas relações obtidas através de hipóteses (abstratas) ou de experimentos (reais).

Ainda segundo Bertone et al (2014, p. 22) os modelos matemáticos podem ser formulados de acordo com a natureza dos fenômenos ou situações analisadas e classificados conforme o tipo de matemática utilizada: Linear ou não linear, conforme suas equações básicas tenham essas características; Estático, quando representam a forma do objeto, por exemplo, a forma geométrica de um alvéolo; Dinâmico, quando simula variações de estágios do fenômeno como, por exemplo, o crescimento populacional de uma colmeia; Estocástico ou Determinístico, de acordo com o uso ou não de fatores aleatórios nas equações. Educacional, quando é baseado em um número pequeno ou simples de suposições, tendo, quase sempre, soluções analíticas.

O modelo torna-se então uma das principais ferramentas na construção de uma atividade de Modelagem matemática, o qual é responsável pelas etapas significativas que compõe esse processo. Em função da relevância da Modelagem Matemática e do significado que o modelo estabelece para o desenvolvimento do problema nas atividades de aprendizagem, esse método traz características positivas para o processo de ensinoaprendizagem dos saberes matemáticos, que serão abordados a seguir.

2.3 – MODELAGEM MATEMÁTICA

De acordo com Ferruzi et al (2015, p.378), “a Modelagem Matemática é a busca por uma representação matemática para um objeto ou fenômeno que pode ser matemático ou não. Nesse sentido trata-se de um procedimento criativo e interpretativo que estabelece uma estrutura matemática que deve incorporar as características essenciais do objeto ou fenômeno que pretende representar”.

Existem diversas definições sobre o que é Modelagem Matemática, dentre as quais, destaca-se a de Bassanezi (2013, p. 24):

> Modelagem Matemática é um processo dinâmico utilizado para a obtenção e validação de modelos matemáticos. É uma forma de abstração e generalização com a finalidade de previsão de tendências. A modelagem consiste essencialmente, na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual.

Assim, pode-se perceber que o objetivo primordial da Modelagem Matemática é solucionar ou representar, por meio de um modelo, um problema extra matemático.

Dessa forma, ela possibilita a aproximação de situações do cotidiano com a Matemática, a interpretação e a análise de vários fenômenos naturais e sociais. O que faz com que seja entendida como uma atividade de construção, validação e aplicação de modelos de uma situação problemática, utilizando-se para isso conceitos matemáticos.

Como salienta Bassanezi (2002), a modelagem permite a realização de previsões e tendências tornando-se eficiente a partir do momento que tomamos consciência de que estamos trabalhando sobre representações de um sistema ou parte dele. Isto é, não estamos lidando com a situação real e sim com uma representação dessa situação.

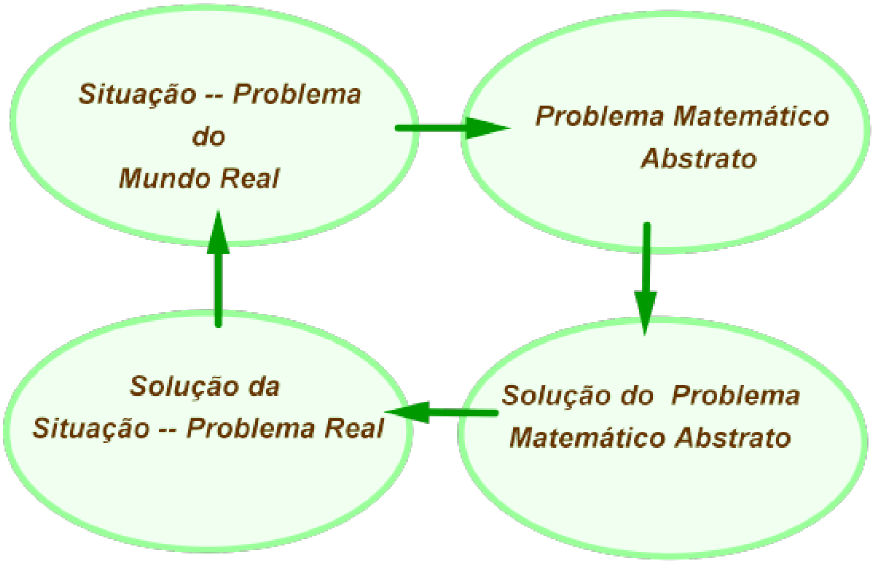


Figura 1 – Diagrama simplificado do processo de modelagem
Fonte: Bertone et al (2013)

Em função das diversas possibilidades que se abrem com a Modelagem Matemática, nada mais natural que levá-la ao processo de ensinoaprendizagem. Dessa maneira, ela torna-se uma ferramenta alternativa para o ensino da matemática, contribuindo para que seja vista como um processo dinâmico de educação, ocasionando sua utilização como estratégia de intervenção no ensino tradicional. Uma vez que sua proposta gira em torno de trazer o cotidiano para a sala de aula através da construção de modelos podendo, então, ser vista como um sistema de aprendizagem.

De acordo com Bassanezi (2002, p.16) em relação ao uso da Modelagem Matemática como recurso educacional:

> A aprendizagem realizada por meio da modelagem facilita a combinação dos aspectos lúdicos da matemática com seu potencial de aplicações. E, mais, com esse material, o estudante vislumbra alternativas no direcionamento de suas aptidões ou formação acadêmicas.

O autor ressalta que a Modelagem Matemática não deve servir apenas como motivo para aplicação de um conteúdo, mas sim para revelar como ele surgiu, justificando o porquê de aprendê-lo e qual seu verdadeiro significado na vida do estudante. Com esse enfoque chega-se a última parte desse capítulo que vai explorar como a modelagem pode auxiliar no processo de ensino da matemática.

2.4 – A MODELAGEM MATEMÁTICA COMO PROCESSO DE ENSINO

O ensino da matemática no Brasil passa por enormes desafios já a alguns anos. Os pífios resultados em alguns exames nacionais e internacionais, tais como o *Program for International Student Assessment* (Pisa), apontou que o Brasil tem baixa proficiência em matemática se comparado a outros 78 países que participaram da avaliação.

Segundo o INEP – Instituto Nacional de Estudos e Pesquisa, em seu portal de notícias (portal.inep.gov.br) a edição do Pisa de 2018, divulgada em 3 de dezembro de 2019, “revela que 68,1% dos estudantes brasileiros, com 15 anos de idade, não possuem nível básico de matemática, o mínimo para o exercício da plena cidadania”.

A partir deste contexto pode-se dizer que vários fatores podem ser considerados causadores de resultado tão deficiente, tais como a falta de atração entre a disciplina e o aluno, ocasionada provavelmente por uma aula enfadonha e metódica, e o desestímulo do professor, que pode ser oriundo de deficiências em sua formação, alta carga de trabalho e do baixo salário.

Segundo Vitti (1999, p. 32/33):

> É muito comum observarmos nos estudantes o desinteresse pela matemática, o medo da avaliação, pode ser contribuído, em alguns casos, por professores e pais para que esse preconceito se acentue. Os professores na maioria dos casos se preocupam muito mais em cumprir um determinado programa de ensino do que em levantar as ideias prévias dos alunos sobre um determinado assunto. Os pais revelam aos filhos a dificuldade que também tinham em aprender matemática, ou até mesmo escolheram uma área para sua formação profissional que não utilizasse matemática.

Assim, a modelagem matemática faz parte do que se chama metodologias ativas, onde o aluno é o personagem principal e o maior responsável pelo processo de aprendizado. Dessa maneira o objetivo desse modelo é incentivar o desenvolvimento da capacidade de absorção de conteúdos de maneira autônoma e participativa. Além disso, ao se incorporar a modelagem matemática ao processo de ensinoaprendizagem pode-se proporcionar novas experiências aos alunos, oportunizando um ensino crítico, criativo e reflexivo.

Nesse sentido, o uso da Modelagem Matemática, atende às orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (2002) ao recomendar que dentre as competências esperadas no ensino da matemática, no quesito de relações entre conhecimentos disciplinares, interdisciplinares e interáreas, espera-se que o aluno tenha condições de compreender o quanto a matemática perpassa as diferentes áreas, solucionando problemas e fenômenos através de seus modelos e representações.

O uso da modelagem no ensino da matemática pode trazer vários benefícios ao processo. Segundo Bertone et al (2014, p. 9):

> A utilização da modelagem na educação matemática valoriza o “saber fazer” do aluno, desenvolvendo sua capacidade de avaliar o processo de construção de modelos matemáticos nos diferentes contextos de aplicação, a partir da realidade de seu ambiente.

Bassanezzi (2002) propõe cinco etapas consecutivas no processo de modelagem. A primeira é a experimentação onde se reúnem as informações necessárias e referentes ao experimento proposto. A segunda etapa é a abstração, que tem como propósito modelar o problema em questão através da obtenção de modelos matemáticos. Nesta fase também ocorre a problematização da situação. Na terceira etapa realiza-se a resolução do modelo matemático, que na maioria das vezes requer recursos computacionais que tornam os resultados aproximados. A quarta etapa é a validação, ocasião em que se averigua a aceitação ou não do modelo abordado. A última etapa é a modificação, onde o modelo será reformulado se necessário.

Referências nacionais como Bassanezi, Biembengute Caldeira, sugerem que a Modelagem Matemática seja trabalhada, como metodologia de ensino, nos Cursos de formação de professores, o que contribuirá para que se capacitem para explorar os problemas encontrados na comunidade escolar, associando os trabalhos em sala aula com possíveis soluções.

De uma maneira geral existem várias razões e vantagens na adoção da modelagem no ensino da matemática. Segundo Silva et al, (2015, p. 5/6):

> (...) pode-se destacar outros pontos positivos ao se trabalhar com modelagem:
> i) Maior interesse no grupo: Os estudantes, ao escolher aquilo que gostaria de estudar, tendem a apresentar um maior interesse pelas aulas, favorecendo o processo de ensino aprendizagem.
> ii) Maior interação no processo de ensino aprendizagem: A modelagem quando trabalhada a partir do interesse do grupo, resulta em uma aprendizagem significativa, tornando o aluno o sujeito corresponsável pelo seu aprendizado.

> iii) Demonstração de uma forma diferenciada de conceber a educação, o ensino e a aprendizagem de uma nova postura do professor como mediador onde o aprendizado é compartilhado.
> iv) Ruptura com o currículo vigente: Ao utilizar a Modelagem Matemática, o conteúdo a ser trabalhado é consequência das pesquisas de campo contrariando o ensino tradicional onde o conteúdo da grade curricular é aplicado o que determina o problema a ser trabalhado.
> v) As diretrizes curriculares e a Modelagem Matemática: De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais, a interdisciplinaridade tem por objetivos utilizar o conhecimento de várias disciplinas para resolver um único problema concreto ou compreender um determinado fenômeno sob diferentes pontos de vistas. Sendo assim, a Modelagem aplicada ao ensino favorece o enfoque interdisciplinar e transdisciplinar no desenvolvimento de um tema.
> vi) A indissociabilidade entre o ensino e a pesquisa na Modelagem Matemática: Por se trabalhar temas diversos, a Modelagem possibilita a ação investigativa como forma de conhecer, compreender e atuar naquela realidade.
> vii) A Modelagem e a contextualização: Por trabalhar de forma contextualizada, retirando o aluno da condição de espectador passivo, a Modelagem Matemática encontra respaldo nas Diretrizes Curriculares.

Corroborando esta abordagem, Bassanezi (2002, p. 33-34) destaca outros pontos positivos ao se trabalhar com modelagem matemática:

> Estimular novas ideias e técnicas experimentais; Dar informações em diferentes aspectos dos inicialmente previstos; ser um método para se fazer interpolações, extrapolações e previsões; sugerir prioridades de aplicações de recursos e pesquisas e eventuais tomadas de decisões; preencher lacunas onde não há dados experimentais; Servir como recurso para melhor entendimento da realidade.

Aproveita-se então das vantagens do uso da Modelagem Matemática para tentar ampliar os conhecimentos sobre um dos fatos de maior impacto na humanidade nesse século, que é o surgimento da Pandemia da Covid-19.

Dessa forma, será proposto uma aplicação de modelagem onde, através de pesquisas de campo e bibliográficas e de determinação de formulas e gráficos, o aluno poderá entender as implicações dessa doença, estudar sua evolução, comparar situações de propagação e fazer prognósticos sobre sua evolução.

2.5 – O USO DO GEOGEBRA NO ESTUDO DE FUNÇÕES

As funções tem um papel importante nos temas abordados no Ensino Médio, pois são capazes de propiciar uma ligação com várias situações do nosso cotidiano. Com isso, são imprescindíveis na abordagem e resolução de vários problemas que permeiam nosso contexto, merecendo, então, um destaque em nossa prática pedagógica.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) afirmam que:

> Cabe, portanto, ao ensino da Matemática garantir que o aluno adquira certa flexibilidade para lidar com o conceito de função em situações diversas e, nesse sentido, através de uma variedade de situações problemas de Matemática e de outras áreas, o aluno pode ser incentivado a buscar a solução, ajustando seus conhecimentos sobre funções para construir um modelo para a interpretação e investigação em Matemática (Brasil, 1998, p. 44)

Com o uso da criatividade e de novas tecnologias o professor pode aumentar a participação dos alunos nas aulas, permitindo que seja construída efetivamente as abstrações matemáticas em substituição do uso sistemático de algoritmos e fórmulas que prejudicam o aprendizado.

De acordo com Girafa (2008, p.40) o aluno de hoje está mergulhado em um mundo digital e a tecnologia faz parte de seu cotidiano.

> Um software pode trabalhar a educação matemática respeitando as diferenças individuais, mas aproveitando as características comuns ao grupo para contextualizar os conteúdos e estimular os alunos a pensar, criar, raciocinar, resolver os problemas propostos, expandir seus conhecimentos e novas situações. Enfim, aprender matemática aplicando-a ao mundo em que vive será um grande avanço a educação. (GIRAFA, 2008, p. 40).

Para facilitar a aplicação da nossa modelagem vamos utilizar o *software* livre GeoGebra. Ele foi desenvolvido por Markus Hoennwarter da Universidade de Salzburg para educação matemática nas escolas e é uma das ferramentas utilizadas no ensino de funções. O GeoGebra (junção das palavras **Geo**metria e Ál**gebra**) é um *software* matemático que reúne geometria, álgebra e cálculo.

O uso deste recurso torna mais significativo o estudo de funções conectado à realidade dos alunos, com vistas a dar condições para que eles adquiram habilidades no trabalho com gráficos de funções usando o referido software. Com isso, pode-se ter como consequência o fato desses estudantes passarem a entender o que é uma função e as múltiplas formas de representá-las e interpretá-las com clareza por meio dos seus gráficos.

3– A MODELAGEM EPIDEMIOLÓGICA

3.1 - PREÂMBULO

Os Coronavírus são uma grande família de vírus comuns em muitas espécies diferentes de animais, incluindo camelos, gado, gatos e morcegos. Raramente, os Coronavírus, que infectam animais, podem infectar pessoas, como exemplo do MERS-CoV e SARS-CoV. Recentemente, em dezembro de 2019, houve a transmissão de um novo Coronavírus (SARS-CoV-2), identificado em Wuhan na China e responsável por causar a Covid-19 (Coronavirus Disease 2019).

De acordo com o site da Faculdade de Medicina da USP, a Covid-19 é uma doença causada pelo Coronavírus, denominado SARS-CoV-2 (Severe Acute Respiratory Syndrome Coronavirus 2 of the Genus Betacoronavirus), apresentando um espectro clínico variando de infecções assintomáticas a quadros graves. De acordo com a Organização Mundial de Saúde, a maioria (cerca de 80%) dos pacientes com Covid-19 podem ser assintomáticos ou oligossintomáticos (poucos sintomas), e aproximadamente 20% dos casos detectados requer atendimento hospitalar por apresentarem dificuldade respiratória, dos quais aproximadamente 5% podem necessitar de suporte ventilatório.

Segundo a Organização Pan-Americana de Saúde (OPAS), em sua página eletrônica, a Organização Mundial da Saúde (OMS) declarou, em 30 de janeiro de 2020, que o surto da doença causada pelo novo Coronavírus (Covid-19) constitui uma Emergência de Saúde Pública de Importância Internacional – o mais alto nível de alerta da Organização, conforme previsto no Regulamento Sanitário Internacional. E em 11 de março de 2020, a Covid-19 foi caracterizada pela OMS como uma Pandemia.

Conforme a epidemia foi se desenvolvendo no mundo as autoridades médicas mundiais perceberam a rápida disseminação da doença e o seu potencial perigo para o colapso dos Sistemas de Saúde dos países afetados. Via de regra, as decisões tomadas, tais como isolamentos, restrições de abertura de comércio e indústrias e até o “lockdown” (versão mais rígida do distanciamento social imposto pelo estado tornando-o obrigatório) pelas autoridades, tiveram forte impacto nas sociedades afetadas, principalmente nos setores produtivos, causando efeitos nocivos, além da doença propriamente dita.

3.2 – CONCEITOS BÁSICOS DA EPIMIOLOGIA MATEMÁTICA

Conforme Alvarenga (2008, p.5), a epidemiologia matemática fundamenta-se em hipóteses matemáticas que quantificam alguns aspectos biológicos da propagação de epidemias. Para isso, será apresentado o processo de desenvolvimento de modelagem matemática, especificamente para descrever as infecções de transmissão direta. Este tipo de transmissão é baseado em infecções viróticas ou bacterianas, cuja disseminação ocorre diretamente, através do meio físico, quando se dá um contato apropriado entre os indivíduos suscetíveis (aqueles que não tiveram contato com o vírus) e os indivíduos infectantes, isto é, os que apresentam em seus organismos concentrações razoáveis de vírus e, assim, estejam eliminando para o ambiente.

Sob esta perspectiva, a modelagem matemática epidemiológica é uma ferramenta muito poderosa e eficiente para tomadas de decisões de autoridades e de técnicos médicos. Os modelos resultantes no acompanhamento e previsões do desenvolvimento da pandemia permitem análise equilibrada do impacto do avanço da doença e suas consequências na saúde da população, na economia dos seres administrativos (cidades, estados, países...) e em outros aspectos e áreas da sociedade.

Ainda, segundo afirma Bassanezi (2002, p. 325/326):

> [...] pode-se dizer que o emprego de ferramentas matemáticas na ilustração de fenômenos e na formulação de leis em Biologia está apenas em sua fase inicial —muito distante do desenvolvimento da Matemática e seu uso na Física — e que não pode ser descartado, pois pode vir a ser indispensável no futuro das ciências biológicas.

As doenças contagiosas são, entre todos os tipos de doenças infecciosas, aquelas que são transmitidas de indivíduo para indivíduo de forma indireta ou diretamente. A transmissão de doenças infecciosas pode ocorrer por diversas vias. De acordo com a Prof. Claudia de C. Falci Bezerra, Bióloga, mestre em Pesquisa Clínica, no portal Infoescola, a transmissão pode ser de dois tipos: Horizontal e Vertical.

> “Na transmissão horizontal, quando a transmissão se dá de um indivíduo para outro e ela pode ser:
> - Contato direto: é a transmissão que ocorre com o contato da superfície corporal de uma pessoa infectada. Ela acontece de pessoa a pessoa e não

> envolve nenhum objeto intermediário. O contato pode ser, portanto, por toque, beijo ou relação sexual;
> - Contato indireto: essa transmissão consiste na transferência do micro-organismo causador da doença via algum objeto, animado ou inanimado, que foi contaminado pelo doente. Por exemplo a influenza;
> - Vias aéreas: São transmitidas pela inalação de gotículas contaminadas presentes no ar. Podemos citar como exemplo, a varíola, sarampo, catapora e caxumba.
> - Por vetores: como o nome indica, são transmitidas por vetores, tais como mosquitos e carrapatos. Como exemplos podemos citar a malária e a dengue;
> - Águas e alimentos contaminados: são aquelas doenças transmitidas pela ingestão de alimentos e águas contaminadas. Por exemplo, a cólera.
> A transmissão vertical se dá quando ela ocorre através da mãe para o filho e ocorre na placenta, no nascimento ou através do leite materno.

Antes de discutirmos a epidemiologia matemática alguns conceitos básicos são bastantes importantes para essa modelagem. De acordo com Pereira (2007, p. 5 a 14):

> - Período de incubação: é o período de tempo entre a infecção do ser humano e o início dos sintomas da doença. No caso do COVID-19 esse intervalo varia, de acordo com a OMS, de 1 a 14 dias, geralmente ficando em torno de 5 dias;
> - Período de Latência: é o período de tempo entre a infecção e a capacidade de infectar alguém e não deve ser confundido com a incubação;
> - Incidência: são valores percentuais resultante do quociente entre o número de indivíduos que adoecem durante um intervalo de tempo pelo total da população. Em geral, a incidência é determinada pelo número de casos já confirmados de infecção, subestimando a verdadeira incidência, pois ignora os casos suspeitos;
> - Proporção de casos fatais: definida pela taxa de pessoas que vem a óbito em relação aos que contraíram a doença;
> - Mortalidade induzida pela doença: é a proporção do número de óbitos causados pela doença, em uma unidade de tempo, pelo total da população;
> - Taxa de contato: medida de frequência de encontro entre indivíduos suscetíveis e infectados. Em outras palavras, é taxa per-capita e por unidade de tempo que mede a capacidade de que cada indivíduo contata com outros n indivíduos, escolhidos aleatoriamente. Essa taxa é constante quando se considera a população homogênea;
> - Vacinação: caracterizado pela preparação de uma droga, que contém microrganismos vivos, mortos ou fração deles, aplicadas nos indivíduos suscetíveis com o objetivo de imuniza-los contra a doença.

Entender estes conceitos é imprescindível para este estudo, uma vez que os mesmos nortearam toda a modelagem adotada.

3.3 – HISTÓRICO DA EPIDEMIOLOGIA MATEMÁTICA

Ao matemático holandês Daniel Bernoulli (1700 – 1782) é atribuída a primeira abordagem matemática sobre propagação de doenças infecciosas, pois o estudioso realizou um estudo sobre a transmissão da varíola por volta de 1766. Bernoulli foi o primeiro a compartimentar a população dividindo-os em duas classes: os suscetíveis e os imunes.

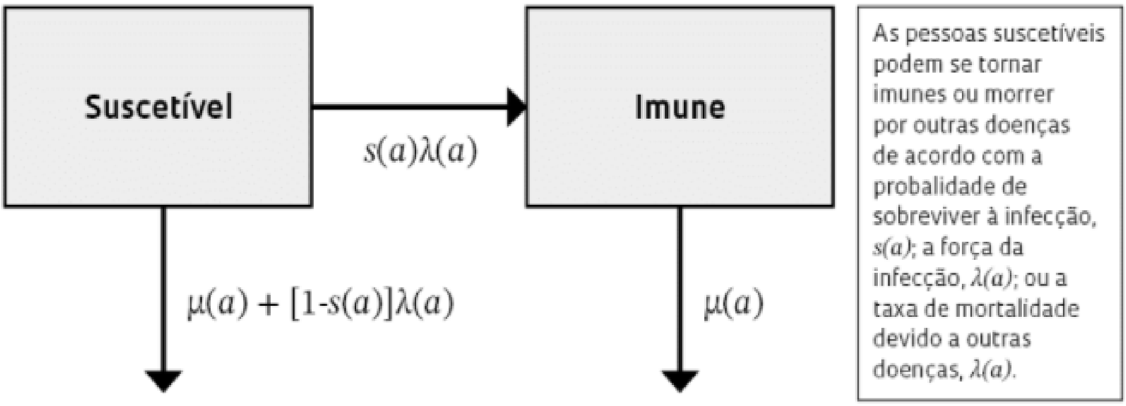


Figura 2 – Modelo de Bernoulli

Fonte: Revista Pesquisa Fapesp

Como se verá adiante, os compartimentos ou classes da população, serão a base da maior parte dos modelos epidemiológicos para acompanhamento da evolução de uma doença contagiosa. “Nunca antes a modelagem foi tão necessária quanto agora, diante de uma epidemia que avança tão rapidamente”, reitera o sanitarista e epidemiologista Hélio Neves, da Faculdade de Ciências Médicas da Santa Casa de São Paulo (FCM-SC-SP) e coordenador do comitê técnico-científico Covid-19 da Secretaria Municipal da Saúde de São Paulo, na Revista Pesquisa Fapesp.

Porém o estudo da propagação de doenças transmissíveis teve um desenvolvimento bastante lento até o início do século XX. Foi, contudo, com o trabalho de W.O. Kermack e A. G. McKendrick, cientistas britânicos, no ano de 1927, quando estudavam um surto de Peste Bubônica na Índia, que a Modelagem Epidemiológica se firmou como um poderoso instrumento para os estudos desse fenômeno. Antes disso, Hamer, em 1906, analisou casos nos quais a taxa de transmissão da doença ocorria por meio de contato entre indivíduos suscetíveis e indivíduos infectados, conhecido como Lei de Ação das Massas. Na mesma época, Ronald Ross fez um estudo sobre a malária, com o intuito de evidenciar que sua transmissão se dava pela picada de um mosquito contaminado, e mais adiante, em 1908, elaborou um modelo matemático mais detalhado para o estudo de tal doença.

Os modelos matemáticos formulados por Kermack e McKendrick consideram que uma epidemia com microparasitas (vírus ou bactéria) ocorre em uma comunidade fechada através do contato entre pessoas infecciosas e pessoas sadias.

Foi também com os artigos de Kermack e McKendrick onde foram introduzidas matematicamente os conceitos de imunidade e vacinação, além da demonstração de que não é preciso uma vacinação total da população para que a doença seja totalmente erradicada. Nesses trabalhos também são apresentados os primeiros sistemas de equações diferenciais para a abordagem da epidemiologia matemática.

3.4 – O MODELO SIR

Segundo Ribeiro Luis (2012, p.29) a epidemiologia matemática se apoia nos chamados modelos compartimentados. Recebem esse nome devido ao fato de a população ser dividida em compartimentos (ou classes), que indicam em qual estado se encontra o indivíduo. Como exemplo, podem ser citadas as classes:

• Imunidade Passiva (M): indivíduos que nascem imunes, pois receberam anticorpos pela mãe;

• Suscetíveis (S): indivíduos sadios que estão suscetíveis a contrair a doença;

• Infectados (I): indivíduos que contraíram a doença e podem transmiti-la aos indivíduos suscetíveis por transmissão direta;

• Portadores (P): indivíduos portadores da doença que estão em período latente, isto é, foram infectados, mas ainda não transmite a doença;

• Recuperados (R): Aqui tem de se tomar cuidado com a nomenclatura.

Ao se usar a palavra recuperados dá-se a entender que, as pessoas desse grupo, se recuperaram da infecção. No entanto, o modelo na versão apresentada aqui visa estudar o comportamento da infecção e, neste sentido, o grupo é formado por indivíduos que foram infectados, mas não são mais portadores da doença, por motivo de isolamento, cura (adquirindo ou não imunidade) ou morte.

A rigor, existem vários modelos epidemiológicos que podem ser aplicados, dependendo apenas da dinâmica de propagação, da imunidade e da variação da população. Para exemplificar temos o modelo SIS (com ou sem dinâmica vital), utilizado para descrever doenças nas quais os indivíduos suscetíveis a adquirem, tornando-se infectados e, após a recuperação, não adquirem imunidade, tornando-se suscetíveis novamente.

No caso da Covid-19 o Modelo Epidemiológico que melhor se adequa ao comportamento da doença é o Modelo SIR. Nesse modelo há indivíduos suscetíveis que adquirem a doença, tornando-se infectados e, após a recuperação, adquirem imunidade. Nesse caso não são considerados período latente nem isolamentos.

Figura 3 – Os três grupos populacionais do modelo SIR
Fonte: ABREU (2020, p.28)

Segundo Bassanezi (2002, p. 159) nesse modelo:

> (...) a população de hospedeiros é subdividida em classes distintas (compartimentos) de acordo com a sanidade ou infecciosidade de seus elementos: $S = S(t)$ – pessoas sadias, mas suscetíveis à doença, podendo ser infectadas quando em contato com pessoas doentes;$I = I(t)$ – pessoas portadoras da doença (infecciosos); $R = R(t)$ – Indivíduos imunes que já contraíram a doença e se recuperaram, ou estão isolados ou morreram.

Assim a população total estudada é a soma de todos os compartimentos acima, que se encaixem nas suas definições. Entender que a comunidade seja fechada implica que, de acordo com Bastos (2020 p.3) total *N* da população se mantem constante, isto é, não varia com o tempo. Este fato é característico das doenças cujo período de incubação é relativamente pequeno.

$$N = S(t) + I(t) + R(t)$$

Segundo ABREU (2020 p.29) o modelo exige certas simplificações:

> O tamanho da população é constante – não será considerado taxa de nascimento nem de mortalidade. Considerando uma população grande, em geral, nascimentos e mortes em curto período não modificarão significantemente o tamanho da população; a interação entre as populações dos compartimentos se dá de forma homogênea; após se recuperar, o indivíduo se torna imune e não é capaz de infectar outras pessoas; o contágio se dá através do contato entre suscetíveis e infectados.

As infecções vão ocorrendo como resultado do contato entre infectados e suscetíveis. Chama-se taxa de transmissão (β) à velocidade na qual novas infecções ocorrem. Ainda segundo ABREU (2020 p.20), quando uma nova infecção ocorre, o indivíduo infectado passa do grupo das pessoas suscetíveis para o grupo dos infectados. Como supomos que não há outra maneira dos indivíduos entrarem ou saírem do grupo dos suscetíveis tem-se a primeira equação diferencial:

$$\frac{dS}{dt} = -\beta . S . I$$

Onde:

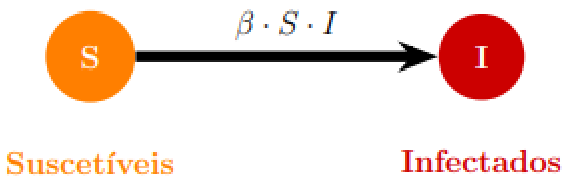
- $\frac{dS}{dt}$ é a taxa de variação *S* em função do tempo;
- β é a taxa de propagação da infecção;
- S quantidade de pessoas suscetíveis;
- Quantidade de pessoas do grupo infectadas.

A taxa de propagação da infecção (β)é obtida pelo produto da taxa de contato entre pessoas pela probabilidade de uma pessoa suscetível ser contaminada ao ter contato com uma pessoa do grupo de infectados.

Observa-se que o produto no segundo membro da equação mede quão rápido a população do compartimento *S* aumenta ou diminui. Como simulamos um processo de propagação de uma infecção essa taxa deve ser negativa, pois essa população diminui.

Ainda de acordo com ABREU (2020 p.30), essa equação descreve matematicamente a seguinte dinâmica populacional: pessoas passam do grupo suscetíveis para o grupo infectados.

Figura 4 – Pessoas suscetíveis passam para o grupo de infectados segundo a taxa $\frac{dS}{dt}$



Fonte: ABREU (2020 p.30)

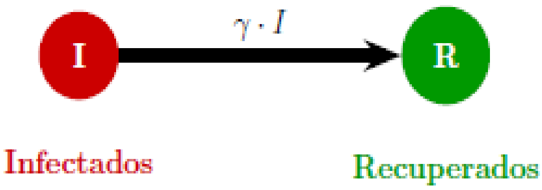
A próxima equação diferencial do modelo SIR surge de uma nova dinâmica populacional: os indivíduos infectados passam para o compartimento R (recuperados) ou por cura ou por óbito. Ainda de acordo com ABREU (2020 p.30) essa dinâmica pode ser descrita por:

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I$$

Nessa equação γ é chamada de taxa de recuperação. Essa taxa se relaciona com o tempo médio de recuperação de uma pessoa infectada. Ela pode ser calculada pela expressão $\gamma = \frac{1}{t_r}$, onde t_r é o tempo médio de recuperação de uma pessoa infectada.

Desse modo a equação simboliza a dinâmica populacional descrita na figura abaixo.

Fig.5 – Infectados passam para recuperados segundo a taxa $\frac{dR}{dt}$



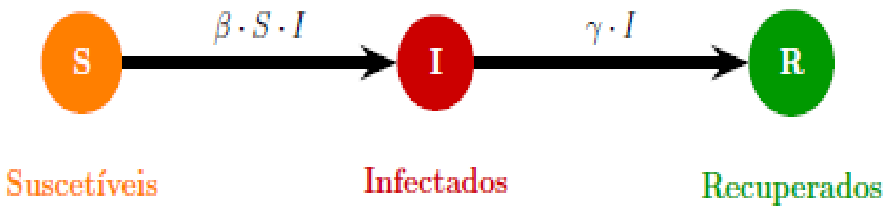
Fonte: ABREU (2020 p.31)

A última equação diferencial do nosso sistema surge da descrição do grupo de infectados. Essa variação surge da subtração entre o número de pessoas que entram no grupo (pessoas suscetíveis que adquirem a doença) pelo número de pessoas que saem do grupo (pessoas doentes que o grupo de Recuperados).

Dessa forma, podemos descrever esse processo, pela equação e figura abaixo:

$$\frac{dI}{dt} = \beta.S.I - \gamma.I$$

Fig. 6 – Dinâmica populacional do compartimento infectados.



Fonte: ABREU (2020 p.31)

E dessa forma, considerando as condições de contorno em um tempo inicial $t = t_0$como as populações iniciais de cada grupo $S_0, I_0 \; e \; R_0$ conseguimos montar o sistema de equações diferenciais que regem o modelo SIR.

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dt} = -\beta.S.I \\ \dfrac{dI}{dt} = \beta.S.I - \gamma.I \\ \dfrac{dR}{dt} = \gamma I \\ S(t_0) = S_0, \;\; I(t_0) = I_0, \;\; R(t_0) = R_0 \end{cases}$$

Uma solução do sistema de equações diferenciais acima, em um intervalo $I \in t_0$, são constituídas por funções $S(t), I(t) \; e \; R(t)$ diferenciáveis em *I* e que satisfazem todas as equações simultaneamente para todo $t \in I$. Estudos sobre soluções exatas para o sistema acima pode ser encontrado em [9].

Para levarmos à sala de aula de uma turma do Ensino Médio uma abordagem matemática da propagação da Covid-19 mais acessível, usaremos ainda a modelagem matemática, porém os modelos propostos serão de concepção mais simples e acessíveis aos alunos. No próximo capítulo abordaremos essa proposta, considerando modelos lineares, polinomiais e exponenciais.

3.5 – MEDIDAS DE COMBATE À PROPAGAÇÃO DO COVID-19

Uma das armas mais eficazes contra o Coronavírus é a informação. Por mais que esse assunto tenha sido explorado por diversos meios de comunicação é muito importante que todas as pessoas conheçam as reais implicações dessa Pandemia e recebam orientações corretas e constantes sobre a prevenção ao vírus.

Nessa seção iremos analisar cada uma das variáveis do modelo SIR para descobrirmos, assim, quais as medidas que podem ser tomadas para mitigar a pandemia do Covid-19.

De acordo com ABREU (2020, p.36)

> Qualquer política de combate à pandemia deve olhar não somente para o número de casos ou a velocidade de propagação da doença. É necessário analisar qual o impacto que esse número de casos fará na sociedade tais como taxa de hospitalização e de mortalidade. Além disso, é necessário se atentar ao impacto econômico das medidas a serem tomadas.

Conforme visto nas seções anteriores, os parâmetros advindos do modelo SIR são: S, I, R, β e γ. Para tanto analisaremos cada um destes deles procurando entender como influem na propagação da doença.

3.5.1 – SUSCETÍVEIS S

Extrai-se da análise da primeira equação do sistema oriundo do modelo SIR, que quanto maior for a população de suscetíveis, maior será a taxa de infecção pela doença. Assim uma maneira de diminuir essa taxa é minorar a quantidade de pessoas suscetíveis.

De uma maneira geral temos duas maneiras de enfrentarmos essa situação: a primeira seria vacinar parte ou totalmente essa população. Nesse contexto essas pessoas vacinadas seriam remanejadas para o grupo de recuperados (R). A segunda medida a ser tomada para minorar o grupo de suscetíveis seria a quarentena. Se uma pessoa fica em isolamento pode-se dizer que ela não faz mais parte do conjunto das pessoas suscetíveis.

3.5.2 – INFECTADOS I

Com relação aos infectados tem-se como única medida sanitária possível: o isolamento, uma vez que esse é o grupo que propaga a doença. Nesse caso a medida é de difícil aplicação pois muitas pessoas desse grupo são assintomáticas. Esse fato reforça a necessidade de quarentena geral (para todos os grupos).

3.5.3 – RECUPERADOS R

Para o aumento do número de pessoas recuperadas existem também duas medidas a serem tomadas: a primeira seria, também, a vacinação. Uma segunda medida seria o desenvolvimento de tratamentos específicos para a doença, propiciando uma maior e mais rápida recuperação dos infectados.

3.5.4 – TAXA DE PROPAGAÇÃO β

Ainda de Acordo com ABREU (2020, p.37) a taxa de propagação β depende diretamente da taxa de contato entre as pessoas e da probabilidade de uma pessoa suscetível se infectar ao entrar em contado com uma pessoa infectada. Temos que nos ater ao fato de que quanto menor a taxa de propagação menor será os efeitos da Pandemia. Existem algumas medidas para diminuir essa taxa.

Uma primeira medida é o isolamento social. O isolamento diminui o contato entre as pessoas implicando na minoração da taxa de propagação. Outra medida muito eficaz é evitar aglomeração. A recomendação ocorre porque a transmissão pelo vírus costuma ocorrer pelo ar ou por contato pessoal com secreções contaminadas tais como espirro, tosse, gotículas de saliva, contato físico e toque em objetos ou superfície contaminada. Essa medida diminui o contato entre pessoas e, consequentemente, a taxa de propagação.

Uma outra medida que pode ser tomada é a higienização. Segundo a Sociedade Paulista de Infectologia, a higienização das mãos é a medida individual mais simples e menos dispendiosa para prevenir a propagação das infecções. As pessoas também devem tomar medidas para higienizar o ambiente onde se encontra. Essas medidas reduzem a probabilidade de contágio de uma pessoa suscetível ao ter contato com uma pessoa infectada.

O uso de máscaras e outros EPI’s funcionam como uma barreira física para a liberação de gotículas contaminadas no ar quando a tosses, espirros ou até mesmo durante conversas. Da mesma forma que a higienização, essa medida diminui a probabilidade de infecção ao ter contato com uma pessoa infectada.

3.5.5 – TAXA DE RECUPERAÇÂO γ

Reduzir o tempo médio para uma pessoa se recuperar da infecção aumenta a taxa de recuperação. Poucos avanços, nessa área, são anunciados pela medicina, pois inda não existem tratamentos que comprovadamente reduzam o tempo de infecção.

4–UM MODELO MATEMÁTICO PARA O COVID-19 EM GOIÁS

4.1 – PREÂMBULO

A principal motivação desse trabalho é propor uma possibilidade de estudo da Matemática no Ensino Médio a partir da modelagem referente à Covid-19. A ideia primordial se alicerça na discussão da curva de propagação da epidemia usando funções básicas acessíveis aos alunos.

MATOS (2017 p.24) informa que a primeira fase da modelagem é a pesquisa. Nesse primeiro momento deve-se levar os alunos a estudar o assunto Covid-19, o que pode ocorrer através de sugestões de leitura e da apresentação de vídeos ou ainda por meio de palestras com profissionais envolvidos no assunto.

Os alunos devem descobrir o que é a doença infecciosa, suas implicações na saúde das pessoas, bem como entender o tratamento médico e sua prevenção. Esta é a parte interdisciplinar do estudo, onde os envolvidos estarão trabalhando conceitos da Biologia, em particular, da Epidemiologia. Este conhecimento pode contribuir para que se torne uma pessoa ativa na ajuda do combate da Epidemia.

É importante que, nessa fase, o mediador direcione o assunto até atingir a propagação da doença, que será o objeto de nosso trabalho. Neste ponto, é necessário que se demonstre que o número de casos, tanto de infectados quanto o de óbito, sobe a cada dia, se não houver o combate à sua transmissão.

O mediador deve tratar o assunto apresentando gráficos de jornais e revistas, levando o aluno a pensar se é possível estabelecer uma função que mostre essa evolução, e isso de tal modo que possa ser possível antever, com alguma precisão, os casos futuros.

De posse da curva de propagação da Covid-19 no estado de Goiás em um determinado intervalo de tempo, levaremos o aluno a refletir sobre o comportamento das funções matemáticas, em particular, a função linear, a função polinomial e a função exponencial.

Como se extrai de MATOS (2020 p.5)

> Essa é a proposta da Modelagem Matemática, partir de um problema para, por meio dele e da trajetória em busca de resolvê-lo, aprender a matemática e seus procedimentos de resolução de problemas.

Nesta etapa também deve-se levar os alunos a revisar seus conhecimentos das funções a serem aplicadas em nossa modelagem. O que nos remete ao fato de que há a necessidade de se revisar os conceitos da função afim (1º grau), da função quadrática e da função exponencial. Essa revisão deve focar, principalmente, suas representações gráficas e propriedades.

Na seção seguinte mostraremos como se deu o levantamento de dados sobre o Covid-19 em Goiás e o trato desses dados para tabulação e extração de pontos para a construção do gráfico de dispersão.

4.2 - COLETA DE DADOS

Os dados, para a análise do avanço da epidemia da Covid-19 no estado de Goiás, foram levantados, considerando o período de 12 de março e 26 de agosto do ano de 2020, sendo retirados no site da Secretária do Estado da Saúde – GO, extraído de seus boletins diários. Em anexo está uma tabela com todos os dados levantados.

O autor desse trabalho tabulou as notificações de novos casos e de óbitos diários e pretendia utilizar esses dados para elaborar as modelagens das curvas, porém verifica-se que existem diferenças enormes entre as notificações em dias da semana diversos, em particular nos finais de semanas, quando muito das confirmações não são enviadas em tempo hábil para a divulgação do boletim pela Secretaria de Saúde de Goiás. A queda do número de registros nos finais de semana está relacionada com a redução de pessoal ou fechamento de unidades de saúde, responsáveis por informar os dados à Secretaria Estadual.

Para evitar essas oscilações nas curvas de propagação, adota-se o conceito de “média móvel de casos”. Essa forma de tabulação, em vez de contabilizar apenas os casos registrados nas últimas 24 horas, soma os dados mais recentes com os dos seis dias anteriores, dividindo o resultado por sete. Segundo o professor Américo Cunha, do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade do Estado do Rio de Janeiro, em um artigo publicado pela Agência Brasil em agosto de 2020,

> (...) a média móvel vem para suavizar isso e remover essa tendência de oscilação que atrapalha na análise. É uma ferramenta que consegue filtrar os dados para dar uma melhor visão do comportamento da tendência.

Com o objetivo de tornar o trabalho de obtenção das curvas e permitir uma maior clareza dos gráficos, é necessário restringir a quantidade de dados. Se fosse considerado todo o período de tempo no qual obtivemos as informações sobre infectados e óbitos, teríamos cerca de 200 pontos, o que tornaria o processo de inserção desses dados muito demorado e, em função do que se deseja, até inútil.

Assim, vamos escolher apenas dois grupos de pontos: no primeiro teremos 10 pontos e no segundo, 15. Um dos objetivos deste trabalho é demonstrar que quanto maior o número de dados, melhores serão os resultados das extrapolações. Tem-se uma infinita possibilidade de escolha para esses pontos.

Iremos escolher os dados considerando a data do início da coleta (12de março de 2020), uma quinta feira, e depois dados a cada 7 dias. Dessa maneira teremos duas tabelas, uma com os dez primeiros pontos e a outra com os quinze primeiros pontos:

Data	t_i	**Nº de casos confirmados (**y_i) **(média móvel)**
12/março/2020	0	3
19/março/2020	1	2
26/março/2020	2	3
02/abril/2020	3	5
09/abril/2020	4	15
16/abril/2020	5	20
23/abril/2020	6	19
30/abril/2020	7	47
07/maio/2020	8	31
14/maio/2020	9	57

Tabela 1 – Conjunto de pontos do grupo 1

Data	t_i	Nº de casos confirmados (y_i) (média móvel)
12/março/2020	0	3
19/março/2020	1	2
26/março/2020	2	3
02/abril/2020	3	5
09/abril/2020	4	15
16/abril/2020	5	20
23/abril/2020	6	19
30/abril/2020	7	47
07/maio/2020	8	31
14/maio/2020	9	57
21/maio/2020	10	105
28/maio/2020	11	136
04/junho/2020	12	275
11/junho/2020	13	382
18/junho/2020	14	810

Tabela 2 – Conjuntos de pontos do grupo 2

Deve-se considerar, ainda, como fase de pesquisa da modelagem matemática, a aquisição dos dados. Nessa sugestão foram escolhidos os dados da Covid-19 no estado de Goiás, no período especificado. O mediador pode levar essa etapa para qualquer doença infecciosa, qualquer lugar geográfico a qualquer tempo.

Quando se inicia o trabalho de ajuste dos dados também começa a segunda fase da modelagem: a Abstração. Então, determinar a média móvel e escolher os grupos de pontos tarefas a serem discutidas e decididas na sala de aula. A necessidade de ajustes nos dados escolhidos, o número de grupos de pontos e a quantidade de pontos em cada um depende sobretudo do direcionamento que o mediador considera ideal.

4.3 – GRÁFICO DE DISPERSÃO

Segundo a professora PEREIRA (2015, p,2) o digrama de dispersão é uma ferramenta simples que permite a visualização gráfica do tipo de relacionamento existente entre duas variáveis. Este tipo de diagrama traz números simultâneos das duas variáveis, deixando visível se o que acontece com uma variável causou interferência na outra.

Ao estudar a correlação, você tem uma variável dependente y (efeito), que se relaciona à variável independente x (causa). O modelo hipotético é, portanto, uma função $y = f(x)$.

No nosso caso teremos a variável dependente como o número de casos da média diária móvel dos casos de infecção pelo COVID 19 no estado de goiás e, a variável independente é o tempo, aqui representada pelos pontos escolhidos nas datas especificadas.

Abaixo são apresentados os gráficos de dispersão das duas tabelas apresentadas acima:

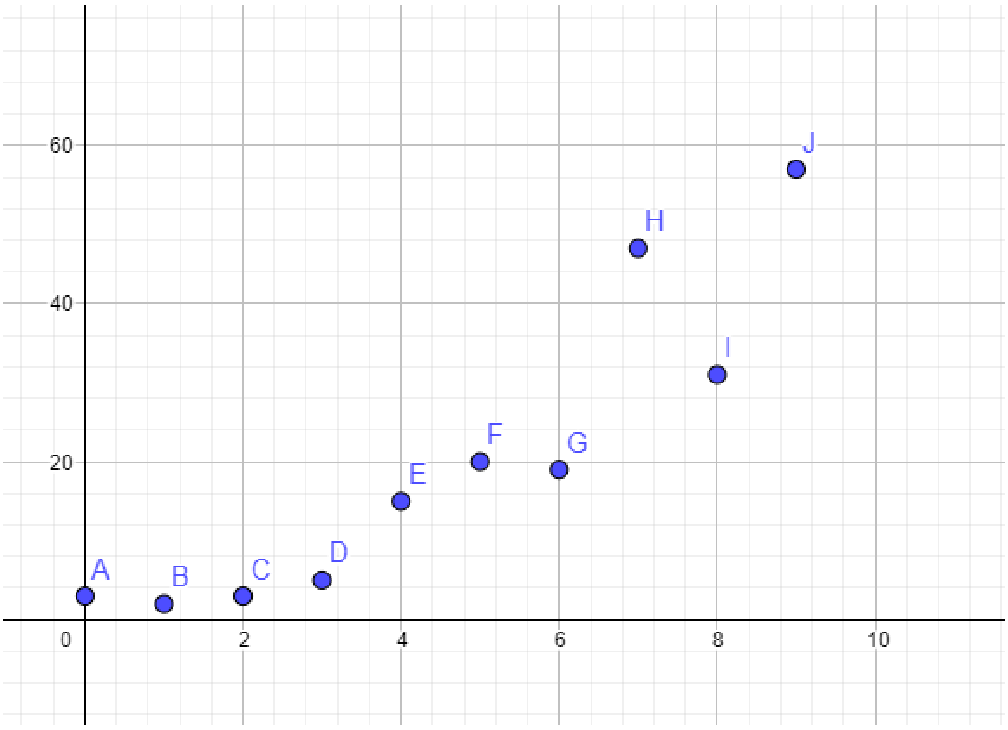


Gráfico 1 – Diagrama de dispersão do grupo 1

Fonte: o autor usando GeoGebra

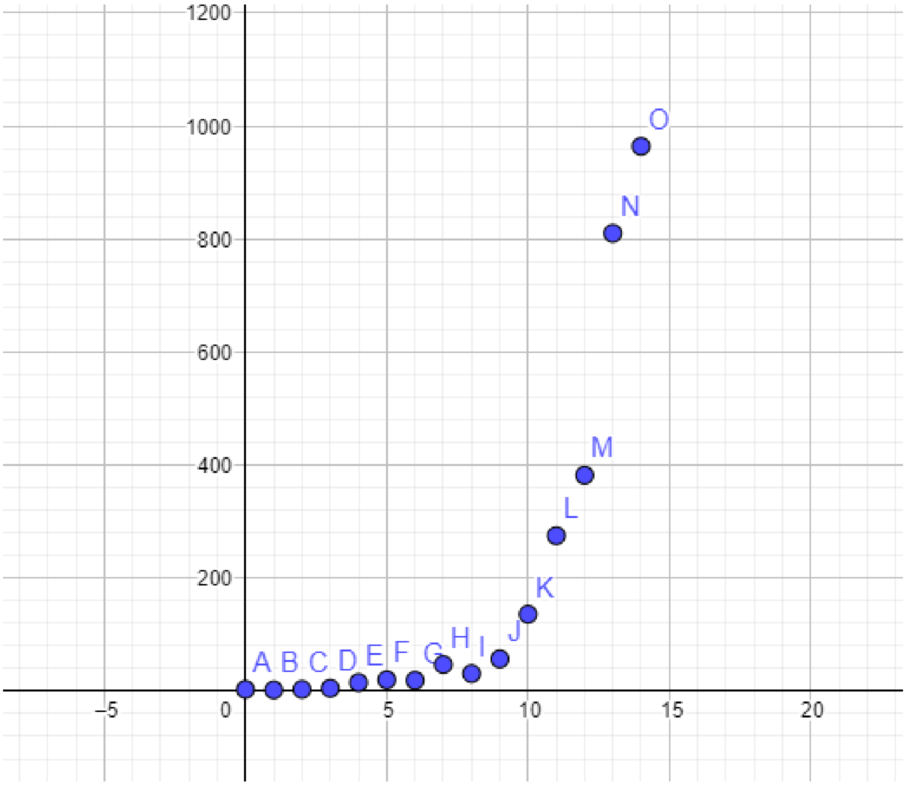


Gráfico 2 – Diagrama de dispersão do grupo 2

Fonte: o autor usando GeoGebra

De posse dos diagramas de dispersão o mediador deve levar os alunos a discutir, com base neles, que tipo de função melhor se adaptaria a esses pontos dispersos.

A partir daí passaremos, então, a considerar como obter uma curva que melhor se adapta aos pontos obtidos. Esse processo é chamado ajuste de curvas.

Entende-se por um ajuste de curvas a obtenção dos coeficientes de uma função f de modo que esta função se aproxime dos dados estatísticos, pelo menos no intervalo de valores considerados.

Segundo BERTONE et al (2014 p.49)

> Uma regressão ou ajuste de curvas é um recurso matemático para expressar alguma relação entre uma variável dependente y_i e outra independente x_i, fornecendo uma relação do tipo $y_i = f(x_i)$, quando se tem uma relação estatística.

É imperioso o estudo do gráfico de dispersão (gráfico dos dados estatísticos) para “enxergar” o tipo de função que melhor se adapta a eles. Assim, se o gráfico de dispersão se aproxima de uma reta, usa-se uma aproximação linear; caso ele se aproxime de um crescimento ou decrescimento exponencial, utiliza-se, portanto, uma função exponencial. Neste trabalho a análise da dispersão será negligenciada para que os alunos percebam, ao analisar os resultados finais, que alguns modelos são mais indicados que outros, à medida que esses modelos se adequam, ou não, à curva de dispersão.

Um dos métodos utilizados para o ajuste de curvas é o conhecido Método dos Mínimos Quadrados, que teve origem com o matemático Johann Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855), que trataremos nas seções seguintes, pois é necessário para se obter as funções desejadas.

4.4 – AJUSTE LINEAR

A reta que melhor se ajusta a um conjunto de pontos de acordo com o Método dos Mínimos Quadrados é chamada de Reta dos Mínimos quadrados. (ou Reta de Regressão).

Supondo essa reta com sua fórmula básica $y = ax + b$ pode-se obter expressões para a e b para um conjunto de n pontos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$. As expressões envolvem somatórios das coordenadas dos pontos. Para simplificar o entendimento, na notação das fórmulas, os índices são omitidos.

Assim $\sum x = \sum_{j=1}^{n} x_j$.

De acordo com BERTONE et al (2020 p. 52 a 55), podemos encontrar os valores *a* e *b*, coeficiente angular e coeficiente independente, da reta $y = ax + b$ de tal forma que a distância vertical

$$[x_1, y_1 - (ax_1 + b)], \dots, [x_n, y_n - (ax_n + b)]$$

seja a menor possível. Essa distância é mostrada na figura abaixo:

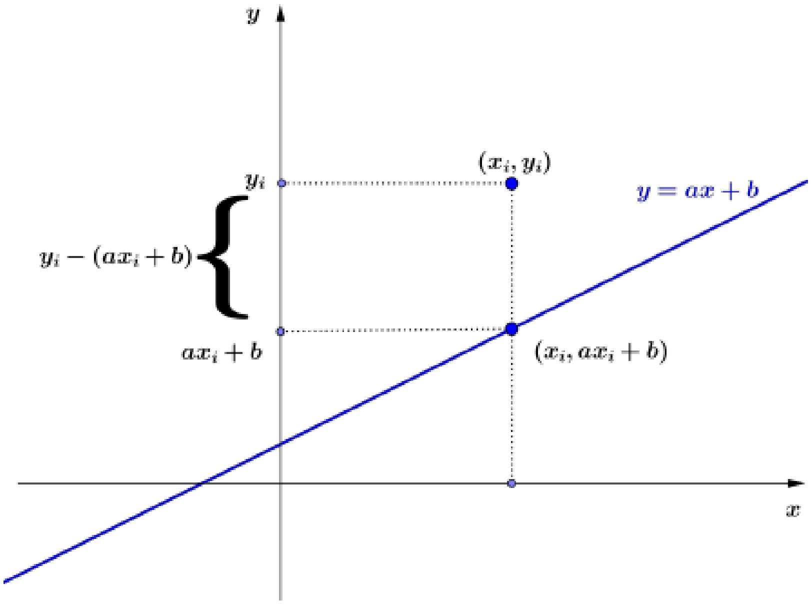


Figura7 – Apresentação geométrica da distância de ponto (x_i, y_i)ao ponto da reta com mesma abcissa

Fonte: BERTONE et al (2014 p.53)

Portanto, temos que encontrar os valores de *a* e b para os quais a distância acima seja a menor possível em todos os pontos. Para tal usaremos o critério dos mínimos quadrado que consiste em um estimador que garante que o melhor ajuste é alcançado quando encontramos o mínimo da soma dos quadrados destas distâncias, dadas por:

$$\delta(a, b) = \frac{1}{n}\sum[y_i - (ax_i + b)]^2$$

O uso de derivadas parciais levará ao encontro dos valores de *a* e *b* que minimizam essa distância. A demonstração desse fato pode ser encontrada em Bertone et al (2014, p. 52-55). O valor encontrado tem as seguintes fórmulas:

$$a = \frac{n.\sum x.y - \sum x\,.\sum y}{n.\sum x^2 - (\sum x)^2}$$

e

$$b = \frac{\sum x^2.\sum y - \sum x\,.\sum x.y}{n.\sum x^2 - (\sum x)^2}$$

Para esta abordagem, nossa sugestão é utilizar o GeoGebra para determinação dessa reta e das outras curvas a seguir. O *software* utilizado por nós nesse trabalho é o GeoGebra Classic 6, encontrado gratuitamente no site www.geogebra.org. Nesse caso ele deve seguir os seguintes passos:

a) Digite no campo de entrada o comando "*RegressãoLinear*" ou apenas "*regr*";

b) Selecione o comando "*RegressãoLinear(<lista de Pontos>)*" clicando sobre ele na lista de comandos;

c)Digite a lista de pontos. No nosso caso a lista já estava digitada no mapa de dispersão. Basta copiá-la;

Ao apertar "enter" no seu teclado, irá aparecer a reta procurada sobre o diagrama de dispersão e, na área de álgebra do GeoGebra, aparecerá a função determinada.

Para o primeiro grupo de 10 (dez) pontos, chegamos à seguinte reta:

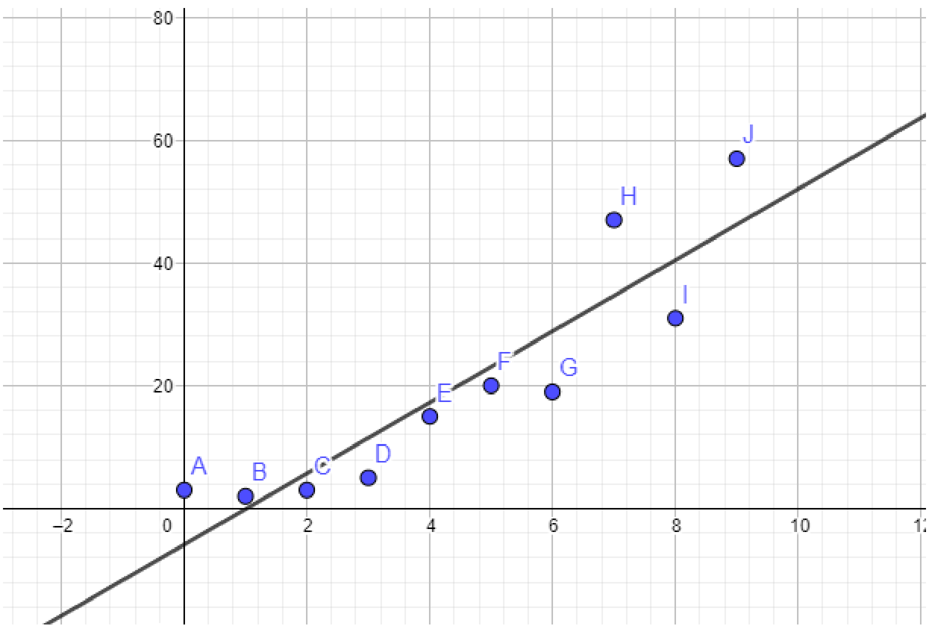


Gráfico 3 -Reta de regressão do grupo 1 de pontos

Fonte: o autor usando GeoGebra

que possui a função:

$$y = 5{,}79x - 5{,}78$$

No segundo caso, utilizando 15 (quinze) pontos, encontraríamos:

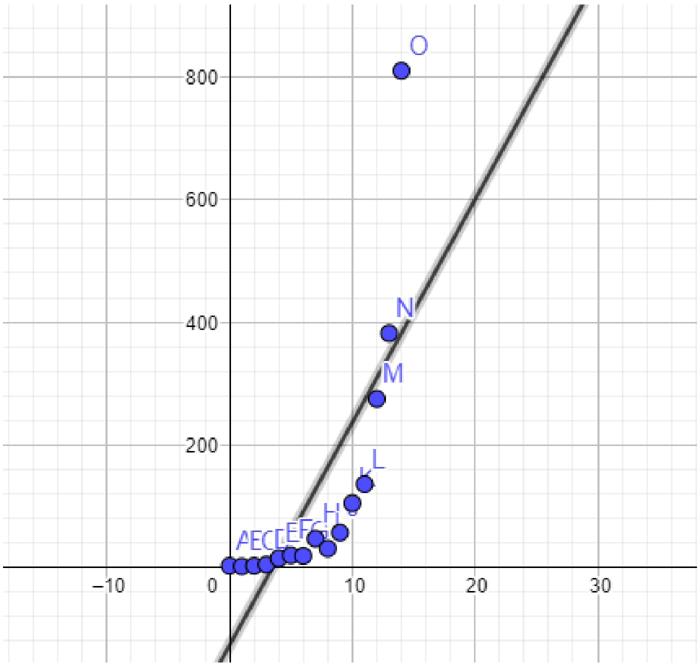


Gráfico 4 – Reta de regressão do grupo 2 de pontos

Fonte: o autor usando GeoGebra

correspondendo à seguinte função:

$$y = 36{,}32x - 126{,}89$$

4.5 – AJUSTE POLINOMIAL

Chama-se ajuste polinomial quando a função utilizada para a aproximação for um polinômio. Neste caso deseja-se encontrar os coeficientes $a_0,\ a_1,\ a_2, \dots, a_n$, de tal forma que os dados levantados sejam ajustados por uma função do tipo

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

utilizando-se a mesma metodologia do caso de ajuste linear, isto é, o critério dos mínimos quadrados, obtêm-se para uma lista de par ordenado (x_i, y_i) de dados, um sistema linear da forma:

$$\begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \dots & \sum_{i=1}^{n} x_i^n \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i^3 & \dots & \sum_{i=1}^{n} x_i^{n+1} \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i^3 & \sum_{i=1}^{n} x_i^4 & \dots & \sum_{i=1}^{n} x_i^{n+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^n & \sum_{i=1}^{n} x_i^{n+1} & \sum_{i=1}^{n} x_i^{n+2} & \dots & \sum_{i=1}^{n} x_i^{2n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} y_i x_i \\ \sum_{i=1}^{n} y_i x_i^2 \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} y_i x_i^n \end{pmatrix}$$

Figura 8 – Sistema linear obtido do critério dos mínimos quadrados aplicados em polinômios

Fonte: BERTONE et al (2014 p.63)

Resta apenas a escolha do grau do polinômio. Segundo BERTONE et al (2014 p.64), “essa escolha não tem uma resposta certa na teoria”. A determinação do grau do polinômio que melhor se adequa aos pontos está ligado ao que se chama coeficiente de correlação. Para o nosso propósito uma escolha aleatória do grau não interferirá em nossos resultados. Como a função quadrática é muito estudada no Ensino Médio, torna óbvia sua escolha.

Ainda utilizando o GeoGebra consegue-se encontrar o polinômio de segundo grau que melhor se adapta aos dados levantados, de acordo com os seguintes passos:

d) Digite no campo de entrada o comando “RegressãoPolinomial” ou apenas “regr”;

e) Selecione o comando “RegressãoPolinomial({lista de Pontos}, Grau)” clicando sobre ele na lista de comandos;

f) Digite a lista de pontos. No nosso caso a lista já estava digitada no mapa de dispersão. Basta copiá-la;

g) Por fim, digite o grau do polinômio que se deseja ajustar. No nosso caso, digita-se 2, pois o polinômio escolhido é do segundo grau.

Ao apertar “*enter*” no seu teclado, irá aparecer a curva do polinômio encontrado sobre o diagrama de dispersão e na área de álgebra do GeoGebra aparecerá a função determinada.

No nosso primeiro grupo de pontos a função encontrada tem a seguinte fórmula

$$f(x) = 0{,}62x^2 + 0{,}2x + 1{,}58$$

e seu gráfico

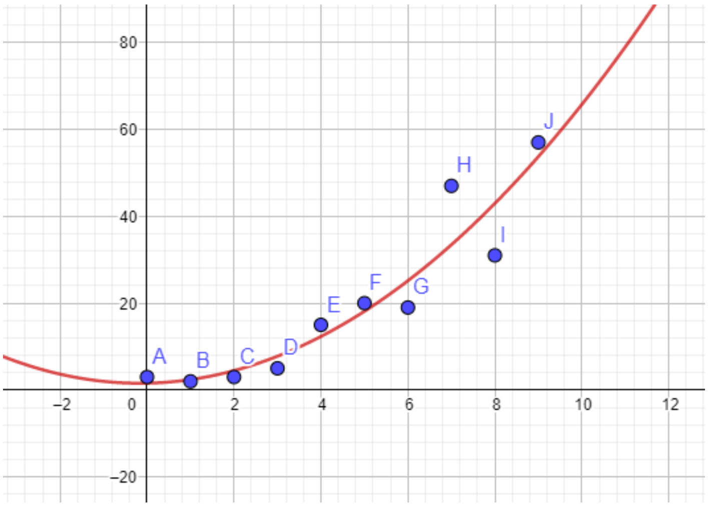


Gráfico 5 – Regressão polinomial de grau 2 do grupo 1 de pontos

Fonte: o autor usando GeoGebra

O segundo grupo de pontos determinou a função

$$f(x) = 6{,}95x^2 - 60{,}92x + 83{,}78$$

e o seu gráfico é mostrado a seguir

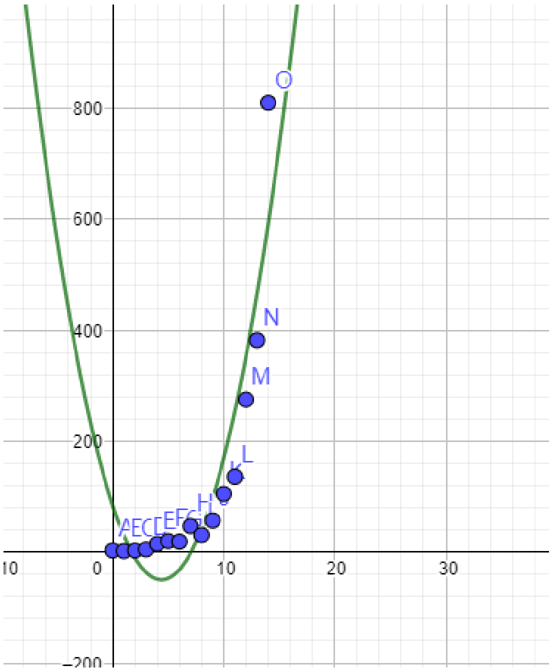


Gráfico 6 – Regressão polinomial de grau 2 do grupo 2 de pontos
Fonte: o autor usando GeoGebra

4.6 – AJUSTE EXPONENCIAL

As funções exponenciais são do tipo $f(x) = b.e^{ax}, com\ b > 0$ e seu gráfico característico tem a forma abaixo quando a é positivo.

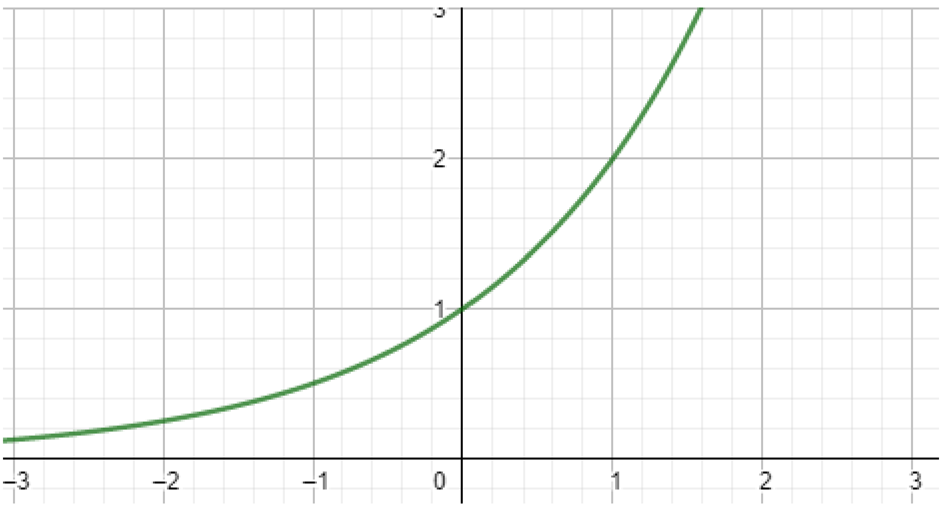


Gráfico 7 – Gráfico característico de crescimento exponencial
Fonte: o autor usando GeoGebra

O ajuste exponencial se dá por um artifício muito simples. Tomando o logaritmo neperiano a ambos os membros da função típica, obtemos:

$$y = be^{ax}$$

$$lny = \ln(be^{ax}) = lnb + lne^{ax}$$

e, portanto:

$$lny = lnb + ax$$

Usando a mudança de variável $z = lny$, obtemos um modelo linear dado por

$$z = lnb + ax$$

e daí a análise da dispersão de um conjunto de dados torna-se igual ao ajuste linear visto na seção 3.4.

Para encontrarmos o ajuste exponencial, mais uma vez, usaremos o GeoGebra. Os passos para a obtenção da curva e da função, no software, são os seguintes:

a) Digite no campo de entrada o comando "RegressãoExponencial" ou apenas "regr";

b) Selecione o comando "RegressãoExponencial({lista de Pontos})" clicando sobre ele na lista de comandos;

c)Digite a lista de pontos. No nosso caso a lista já estava digitada no mapa de dispersão. Basta copiá-la;

Ao apertar "enter" no seu teclado, irá aparecer a curva exponencial encontrada sobre o diagrama de dispersão e na área de álgebra do GeoGebra aparecerá a função determinada.

No primeiro grupo de pontos foi encontrada a função

$$y = 2{,}03.\,e^{0{,}39x}$$

e o gráfico determinado tem a forma

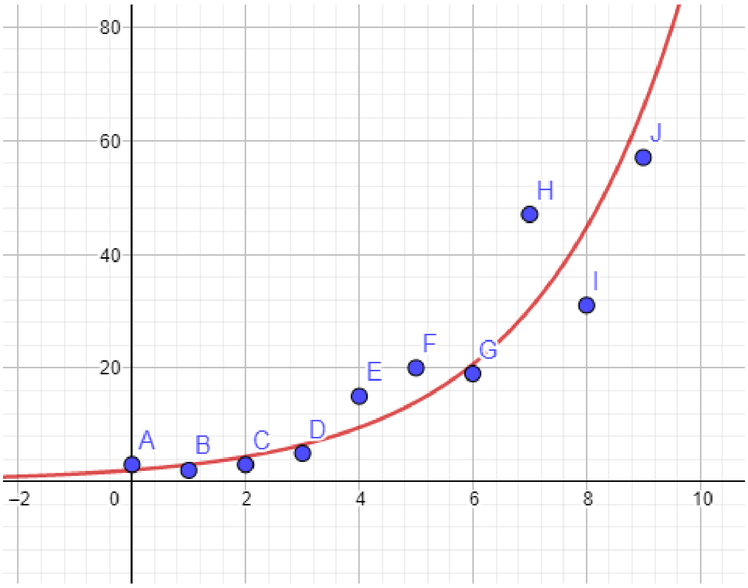


Gráfico 8 – Ajuste exponencial do grupo 1 de pontos
Fonte: o autor usando GeoGebra

No segundo grupo de pontos a equação encontrada foi

$$f(x) = 1{,}85.\, e^{0{,}41x}$$

e seu gráfico

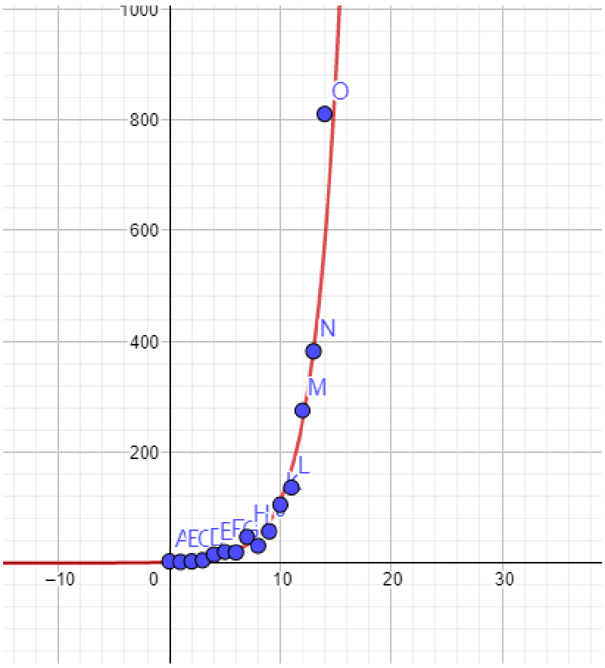


Gráfico 9 – Ajuste polinomial do segundo grupo de pontos
Fonte: o autor usando GeoGebra

Com a obtenção dos últimos gráficos e funções passaremos para a fase de análise e questionamentos dos dados coletados. Nesta etapa o mediador deve levar os alunos a obter uma visão mais clara sobre a propagação do Covid-19 em Goiás, determinando, em último caso, qual função melhor se adequa a esses dados.

4.7 – ANÁLISE DOS DADOS

A análise dos resultados é a terceira fase da modelagem matemática, chamada de Resolução. Nessa fase, conforme afirma MATOS (2017 p.25), "ocorre a busca dos resultados dos problemas com a socialização desses resultados entre os alunos".

Para a tarefa de expiar os resultados obtidos tem-se diversas abordagens. Em primeiro lugar sugerimos uma análise dos gráficos obtidos dos dois grupos de pontos em relação ao diagrama de dispersão.

Dessa análise extrai-se naturalmente:

a) Aparentemente a função linear não é indicada para esse ajuste. O gráfico 5, em especial, mostra como é divergente os pontos da dispersão em relação a reta;

b) A função polinomial do 2º grau se mostra mais ajustada aos pontos do que a função linear. Porém apresenta alguns indícios que a tornam inadequadas, entre eles o fato de que a curva do gráfico 7 apresenta um trecho com valores negativos para y e também que o número de infectados no instante inicial ($x = 0$) é muito diverso dos dados obtidos.

c) Dessa análise visual dos gráficos deve-se levar os alunos a concluir que o modelo exponencial é o mais adequado e se ajusta razoavelmente bem aos dados coletados.

A rigor, deveríamos utilizar nesse ponto, técnicas de *correlação* para a análise da adaptabilidade de uma reta aos dados coletados. Como o uso destes coeficientes de correlação demandaria um aumento das horas de aulas, foi propositadamente negligenciado. Para melhor entender o que é o coeficiente de correlação, o apêndice 3 apresenta um resumo da teoria.

A análise pode continuar solicitando que os alunos utilizem as fórmulas obtidas para encontrar o número de infectados em alguns instantes aleatórios.

Entre as infinitas possibilidades de escolhas, adotamos seis pontos: os três primeiros entre aqueles levantados nas tabelas. Pode-se utilizar, por exemplo, os pontos $t = 0, t = 5\ \ e\ t = 9$.e também, $t = 15, t = 20\ e\ t = 24$. Escolhemos outros três pontos $(t = 15, t = 20\ e\ t = 25)$, esses fora do intervalo estudado. Os três primeiros pontos são conhecidos como interpolação pois os valores escolhidos estão contidos no intervalo de tempo considerado para a determinação da curva. Já os três últimos pontos são chamados de extrapolação já que suas coordenados estão fora do intervalo de tempo considerado.

De uma maneira geral os dados de interpolação tendem a ser mais precisos que o da extrapolação. Extrapolar, em outras palavras, é predizer. Os dados obtidos pela extrapolação, para serem mais coerentes, exigem que os fatores que determinaram a obtenção da curva, permaneçam os mesmos. Isso raramente ocorre. Medidas como isolamento social, vacinação, variantes novas da doença e outros, influem no comportamento da propagação da doença, fazendo com que os dados obtidos com a extrapolação sejam diversos dos dados reais.

Espera-se que os resultados encontrados nessa etapa, ajude o aluno a decidir pela melhor adequação comparando as diferenças, percentualmente, dos valores obtidos, com os valores da tabela levantada dos boletins da Secretaria de Saúde do Estado de Goiás abaixo mostrada.

T	**Data**	**Número de infectados (média móvel)**
$t = 0$	12/03/2020	3
$t = 5$	16/04/2020	20
$t = 9$	14/05/2020	57
$t = 15$	25/06/2020	964
$t = 20$	30/07/2020	2.163
$t = 24$	27/08/2020	2.276

Tabela 3 – Número de casos reais notificados escolhidos para interpolação e extrapolação

Vamos agora comparar os resultados obtidos com a aplicação das funções lineares encontradas na seção 3.4 ($y = 5{,}79x - 5{,}78$ para o conjunto A e $y = 36{,}32x - 126{,}89$ para o conjunto B de pontos). Os valores encontrados são arredondados. A diferença percentual DP é calculada pela fórmula

$$DP = \left(\frac{VC}{VR} - 1\right).100$$

onde VC é o valor calculado e VR o valor real obtido nos boletins da Secretaria de Saúde de Goiás.

T	Casos reais	Conjunto A de pontos	Diferença percentual	Conjunto B de pontos	Diferença percentual
0	3	- 6	300%	-127	4.333%
5	20	23	15%	55	175%
9	57	46	19%	200	251%
15	964	81	92%	418	57%
20	2.163	110	95%	600	72%
24	2.276	133	94%	745	67%

Tabela 4 – Comparativo entre os resultados dos ajustes lineares com o número de casos reais notificados.

Da mesma forma faz-se a comparação dos dados levantados com os resultados encontrados, utilizando as fórmulas obtidas com o ajuste polinomial, $f(x) = 0{,}62x^2 + 0{,}2x + 1{,}58$ para o grupo A e $f(x) = 6{,}95x^2 - 60{,}92x + 83{,}78$ para o grupo B como é apresentado na seção 3.5. As variações percentuais obtidas estão na tabela a seguir:

t	Casos reais	Conjunto A de pontos	Diferença percentual	Conjunto B de pontos	Diferença percentual
0	3	2	33%	84	2.700%
5	20	18	10%	-50	350%
9	57	54	5%	98	72%
15	964	144	85%	734	24%
20	2.163	270	88%	1.645	24%
24	2.276	364	84%	2.625	15%

Tabela 5 – Comparativo entre os resultados dos ajustes quadráticos com o número de casos reais notificados.

Finalmente, faremos o mesmo comparativo com os dados a serem calculados utilizando as fórmulas encontradas com o ajuste exponencial, $y = 2{,}03.e^{0{,}39x}$ para o grupo A de pontos e $f(x) = 1{,}85.e^{0{,}41x}$ para o grupo B como visto na seção 3.6.

t	Casos reais	Conjunto A de pontos	Diferença percentual	Conjunto B de pontos	Diferença percentual
0	3	2	33%	2	33%
5	20	14	30%	14	30%
9	57	67	18%	74	30%
15	964	705	27%	867	10%
20	2.163	4.954	129%	6.736	211%
24	2.276	23.577	936%	34.724	1.425%

Tabela 6 – Comparativo entre os resultados dos ajustes exponenciais com o número de casos reais notificados.

Na análise dos percentuais obtidos nos quadros acima, o mediador deve levar os alunos a observar que os dados obtidos com as curvas exponenciais no intervalo de $t = 0 \ e \ t = 9$, têm variação percentual menores que os demais e confirma a melhor adequação de curvas, observadas na análise dos gráficos.

Outras constatações podem ser obtidas desses dados, cabendo ao mediador direcionar a análise:

- Os dados extrapolados apresentam valores bastantes discrepantes, excetuando a curva do segundo grau obtida com o uso de 15 pontos. Isso é uma indicação de que, talvez, exista modelos mais adequados a essa propagação;
- Os dados levantados estão sujeitos a medidas de controle social aplicados pelo poder público. Observa-se que os dados encontrados no $t = 20\ (2163)\ e\ t = 24\ (2276)$ mostram uma elevação pequena na média diária. Isso pode ter ocorrido em função da implantação de planos estaduais de contingência para o enfrentamento da doença pelo Coronavírus (Covid-19). Estes planos implementam medidas de restrição de circulação de pessoas, fechamento de comércios, suspensão de aulas, entre outros, que desaceleram

os números de infecção e esses efeitos não são captados pelas fórmulas matemáticas;

- Análises ponto a ponto pode levar os alunos a entenderem o comportamento de cada função. Nesta etapa o aluno também pode melhorar a compreensão dos cálculos de percentuais, aumentando a abrangência da integração dos conteúdos.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesse trabalho apresentamos uma sugestão de modelagem matemática para a curva de propagação do Covid-19 no Estado de Goiás. Como demonstrado, é possível que o professor do Ensino Médio se aproprie de um tema importante da atualidade, a Pandemia do Coronavírus, e leve seus alunos a discutirem o estudo de funções nas suas várias formas (tabelas, gráficos e fórmulas).

Várias competências dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) são abordados nessa sugestão de atividades como a interdisciplinaridade (matemática e biologia) bem como a integração de conteúdo (funções e porcentagens). Além disso o trabalho utiliza o GeoGebra, que é um *software* de matemática dinâmica gratuito e multiplataforma para todos os níveis de ensino, que combina geometria, álgebra, tabelas, gráficos, estatística e cálculo.

No campo da epidemiologia, destacamos e discutimos o Modelo SIR, ocasião em que evidenciamos como se obtém o sistema de equações diferencias, pretendendo confirmar que esse modelo seria a maneira adequada de se abordar a propagação do Covid-19. Dessas equações, relacionamos os parâmetros do modelo e as medidas de mitigação do avanço da pandemia.

É possível enxergar também que a Modelagem além de relacionar a matemática com o cotidiano, leva o aluno a ser o protagonista da construção de seu próprio conhecimento

Para trabalhos futuros, sugerimos que a utilização de outras curvas polinomiais para modelagem, como a função cúbica ou ainda, coletar dados mais atualizados do COVID-19 em Goiás. O mesmo trabalho pode ser levado a outras regiões do País, utilizando dados coletados localmente. Uma abordagem interessante é a resolução e aplicação do sistema de equações do Modelo SIR, exposto no item 3.4 aos dados obtidos.

Assim, é possível afirmar que este trabalho pode contribuir para a divulgação da Modelagem Matemática como ferramenta imprescindível para a melhoria da qualidade do processo de ensino aprendizagem da matemática.

6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] ABREU, Osmar rodrigues; **Modelagem Matemática da COVID-19 usando SIR.**http://www.dma.uem.br/kit/jeepema-1/art3-n1-2020.pdf

[2] AGÊNCIA BRASIL EBC.https://agenciabrasil.ebc.com.br/saude/noticia/2020-08/agencia-brasil-explica-media-movel-de-casos-de-covid-19Acesso em 25/03/2021

[3]ALVARENGA, Lucymara de R. **Modelagens de epidemias através de modelos baseados em indivíduos.** Programa de pós graduação em Engenharia Elétrica. Universidade Federal de Minas Gerais. 2088

[4] BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática.** 3ª ed. São Paulo: Contexto, 2002.

[5] BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática.** 3ª ed. São Paulo: Contexto, 2004.

[6] BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia.** 3ª ed. 4ª reimpressão. São Paulo: Editora Contexto, 2013.

[7] BASTOS, Saulo B; CAJUEIRO, Daniel O. **Modeling and forescating the COVID-19 pandemic in Brazil.** Universidade de Brasilia. 2020

[8] BERTONE, A. M. A.; BASSANEZI, R. C.; JAFELICE, R. S. da M. **Modelagem matemática**. Uberlândia, MG. UFU, 2014

[9] BIEMBENGUT, M. S. & Hein.N. **Modelagem Matemática no ensino.**São Paulo: Contexto, 2003.

[10] BOHNER, Martin; STREIPERT, Sabrina; TORRES, Delfim FM. **Exact solucion to a dynamic SIR model.** Elsevier. Artigo retirado do site "web.mst.edu/~bohner/papers/estadsm.pdf".

[11] BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais:** Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1988.

[12] D'AMBROSIO, U. **Educação Matemática da teoria à prática.** Campinas, SP: Papirus, 2002.

[13] DIAS, Gabriela Moutinho de Souza; Araújo, Luiz H. da Costa. **Modelagem Matemática para epidemia do COVID-19 e estimativas de casos no Brasil no curto prazo**. Instituto Militar de Engenharia. http://covid19cientifico.ime.eb.br/artigo1.pdf

[14] FERRUZZI, Elaine Cristina; ALMEIDA, Maria W. de. **Diálogos em Modelagem Matemática.** Ciência & Educação. Edu. Bauru, V 21 n.2 Pag 377 a 394, 2051

[15] Faculdade de Medicina da USP. **Especial COVID.**fm.usp.br@fmusp/home/especial-covid-19 Acesso 05/08/2021(14:41hs)

[16] GIRAFFA, L. M. M. **Uma odisséia no ciberespaço:** o software educacional dos tutoriais aos mundos virtuais. Revista Brasileira de Informática na Educação, v. 2, 2008.

[17] MATOS, Gislaine M. F; SANTOS, Mirley L. dos; **Proposta de Modelagem Matemática para o Ensino Médio.**2020.

[18] MATOS, Gislaine M. F. M. **Modelagem matemática como estratégia de ensino aprendizagem em aulas de matemática no ensino médio.**Anápolis 2017

[19] Organização Pan-Americana de Saúde. **Paho.org/pt/news/30-1-2020-who-declares-public-health-emergency-novel-coronavirus.** Acesso 05/08/2021 (14:52hs)

[20] PEREIRA, Sheila D. **Conceitos e definições da saúde e epidemiologia usados na vigilância sanitária.** São Paulo. 2007. Acesso em http://www.cvs.saude.sp.gov.br/pdf/epid_visa em 17/06/2021

[21] PEREIRA, Eveline. **Diagrama de dispersão.**static.sapucaia.ifsul.edu.br@professres/eveline. 2015. Acessado 05/08/2021 (15:33hs)

[22] REVISTA FABESP. https://revistapesquisa.fapesp.br/modelagem-epidemiologica-ganha-visibilidade. Acesso em 25/03/2021

[23] RIBEIRO LUIS, Mônica H. **Modelos Matemáticos em epidemiologia.** Programa de Pós Graduação em matemática. Universidade Estadual Paulista “Julio de Mesquita Filho”. 2012

[24] SANTOS, Maciel G. A **Modelagem Matemática Como Método de Aprendizagem e Ensino Uma Nova Proposta de Trabalho**. Trabalho de Pós Graduação (Ciência, Ar (Ciênciaica Pedagógica), Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP. 1997.

[25] Secretaria de Estado da Saúde; https://www.saude.go.gov.br/coronavirus/atualização-dos-casos Vários acessos.

[26] SILVA, Leonardo Brito da. FERREIRA, Luanne Lima. MOREIRA, Francis Miller Barbosa; **Modelagem Matemática: Reflexões teóricas e aplicações.** https://www.ufjf.br/emem/files/2015/10/MODELAGEM-MATEMATICA-REFLEXÕES-TEÓRICAS-E-APLICAÇÕES.pdf

[27] VITTI, C. M. **Matemática com prazer, a partir da história e da geometria**. 2ª Ed. Piracicaba – São Paulo. Editora UNIMEP. 1999. 103p.

7 APÊNDICES

APÊNDICE 1

Exemplo de boletim da Secretaria Estadual da Saúde de Goiás

(local de extração dos dados do COVID 19 para esse trabalho)

Goiás tem 733 mortes e 32.981 casos confirmados de coronavírus

Agora são 77.796 casos suspeitos em investigação

Publicado: 08 Julho 2020
Última Atualização: 08 Julho 2020

A Secretaria da Saúde de Goiás (SES-GO) informa que há **32.981** casos de doença pelo coronavírus 2019 (Covid-19) no território goiano. Destes, há **733** mortes confirmadas. No Estado, há 77.796 casos suspeitos em investigação. Outros 36.809 já foram descartados.

Há 52 óbitos suspeitos que estão em investigação. Já foram descartadas 513 mortes suspeitas nos municípios goianos.

Painel Covid-19

O boletim com as notificações da SES-GO foi informatizado e realiza o processamento dos dados a partir dos sistemas do Ministério da Saúde (e-SUS VE e Sivep Gripe). Eventuais diferenças são justificadas por ajustes nas fichas de notificação pelos municípios, como por exemplo, a atualização do local de residência da pessoa.

Para conferir os detalhes dos casos e óbitos confirmados, suspeitos e descartados, acesse o painel Covid-19 do Governo de Goiás por meio do link http://covid19.saude.go.gov.br/.

Os dados deste boletim foram divulgados às 15h de quarta-feira, 08 de julho de 2020.

APÊNDICE 2

Tabela com os dados de casos confirmados de COVID 19 no estado de Goiás no período de 12 de março até 29 de agosto de 2020

Tabela com o cálculo da média diária de casos de COVID 19 calculada pelo autor

Data	Casos confirmados	Média diária		Data	Casos confirmados	Média diária
	Março				Abril	
01/03	**0**	**0**		01/04	**8**	**5**
02/03	**0**	**0**		02/04	**0**	**5**
03/03	**0**	**0**		03/04	**15**	**6**
04/03	**0**	**0**		04/04	**15**	**7**
05/03	**0**	**0**		05/04	**12**	**8**
06/03	**0**	**0**		06/04	**4**	**8**
07/03	**0**	**0**		07/04	**14**	**10**
08/03	**0**	**0**		08/04	**26**	**12**
09/03	**0**	**0**		09/04	**20**	**15**
10/03	**0**	**0**		10/04	**12**	**15**
11/03	**0**	**0**		11/04	**18**	**15**
12/03	**3**	**1**		12/04	**18**	**16**
13/03	**1**	**1**		13/04	**6**	**16**
14/03	**0**	**1**		14/04	**51**	**22**
15/03	**0**	**1**		15/04	**20**	**21**
16/03	**3**	**1**		16/04	**14**	**20**
17/03	**2**	**2**		17/04	**17**	**21**
18/03	**3**	**2**		18/04	**43**	**24**
19/03	**3**	**2**		19/04	**15**	**24**
20/03	**3**	**2**		20/04	**10**	**24**
21/03	**1**	**2**		21/04	**18**	**20**
22/03	**2**	**2**		22/04	**17**	**19**

23/03	**2**	**2**		23/04	**15**	**19**
24/03	**6**	**3**		24/04	**33**	**22**
25/03	**6**	**3**		25/04	**20**	**18**
26/03	**3**	**3**		26/06	**67**	**26**
27/03	**11**	**4**		27/04	**43**	**30**
28/03	**7**	**5**		28/04	**45**	**34**
29/03	**0**	**5**		29/04	**44**	**38**
30/03	**4**	**5**		30/04	**76**	**47**
31/03	**5**	**5**				

Data	**Casos confirmados**	**Média diária**		**Data**	**Casos confirmados**	**Média diária**
	Maio				**Junho**	
01/05	**27**	**46**		01/06	**172**	**195**
02/05	**17**	**46**		02/06	**419**	**229**
03/05	**25**	**38**		03/06	**296**	**246**
04/05	**11**	**34**		04/06	**434**	**275**
05/05	**61**	**31**		05/06	**350**	**290**
06/05	**102**	**35**		06/06	**347**	**305**
07/05	**3**	**31**		07/06	**93**	**302**
08/05	**26**	**35**		08/06	**336**	**325**
09/05	**16**	**35**		09/06	**501**	**338**
10/05	**24**	**35**		10/06	**571**	**376**
11/05	**7**	**34**		11/06	**475**	**382**
12/05	**15**	**28**		12/06	**150**	**353**
13/05	**110**	**29**		13/06	**94**	**317**
14/05	**198**	**57**		14/06	**4**	**304**
15/05	**104**	**68**		15/06	**2350**	**592**
16/05	**120**	**83**		16/06	**1259**	**700**
17/05	**45**	**86**		17/06	**960**	**756**
18/05	**46**	**91**		18/06	**853**	**810**
19/05	**108**	**104**		19/06	**824**	**906**

20/05	**203**	**118**		20/06	**859**	**1016**
21/05	**106**	**105**		21/06	**696**	**1114**
22/05	**178**	**115**		22/06	**967**	**917**
23/05	**50**	**105**		23/06	**917**	**868**
24/05	**60**	**107**		24/06	**1297**	**916**
25/05	**69**	**111**		25/06	**1190**	**964**
26/05	**179**	**121**		26/06	**832**	**965**
27/05	**173**	**116**		27/06	**785**	**955**
28/05	**233**	**136**		28/06	**279**	**895**
29/05	**245**	**144**		29/06	**1180**	**926**
30/05	**243**	**172**		30/06	**1474**	**1005**
31/05	**117**	**180**				

Data	**Casos confirmados**	**Média diária**		**Data**	**Casos confirmados**	**Média diária**
	Julho				**Agosto**	
01/07	**1142**	**983**		01/08	**1321**	**2114**
02/07	**455**	**878**		02/08	**378**	**2010**
03/07	**1293**	**936**		03/08	**105**	**1715**
04/07	**1009**	**968**		04/08	**3433**	**1728**
05/07	**15**	**931**		05/08	**3337**	**1948**
06/07	**1101**	**919**		06/08	**3393**	**2051**
07/07	**1918**	**983**		07/08	**2859**	**2118**
08/07	**1436**	**1025**		08/08	**1438**	**2135**
09/07	**1235**	**1136**		09/08	**367**	**2133**
10/07	**975**	**1098**		10/08	**2121**	**2421**
11/07	**848**	**1075**		11/08	**3510**	**2432**
12/07	**502**	**1145**		12/08	**3255**	**2420**
13/07	**395**	**1044**		13/08	**3460**	**2430**
14/07	**1072**	**923**		14/08	**2500**	**2379**
15/07	**1064**	**870**		15/08	**1118**	**2393**
16/07	**1155**	**859**		16/08	**682**	**2378**

17/07	**498**	**791**		17/08	**1715**	**2320**
18/07	**57**	**678**		18/08	**4218**	**2421**
19/07	**17**	**603**		19/08	**1902**	**2228**
20/07	**126**	**565**		20/08	**2278**	**2059**
21/07	**3098**	**854**		21/08	**1650**	**1938**
22/07	**3526**	**1206**		22/08	**2120**	**2081**
23/07	**3400**	**1527**		23/08	**1147**	**2147**
24/07	**2051**	**1749**		24/08	**2198**	**2216**
25/07	**2008**	**2027**		25/08	**3693**	**2146**
26/07	**1104**	**2188**		26/08	**2550**	**2234**
27/07	**2171**	**2480**		27/08	**2573**	**2276**
28/07	**3341**	**2514**		28/08	**1517**	**2257**
29/07	**1795**	**2267**		29/08	**1071**	**2107**
30/07	**2674**	**2163**		30/08		
31/07	**2389**	**2212**		31/08		

APÊNDICE 3

COEFICIENTE DE CORRELAÇÃO LINEAR

Quando se faz um ajuste linear para relacionar duas variáveis, não se sabe a priori, se a reta encontrada é de fato o melhor modelo de ajuste. A verificação da existência e do grau de relação entre variáveis é objeto do estudo da correlação.

Os coeficientes de correlação são métodos estatísticos para se medir as relações entre variáveis e o que elas representam.

O que a correlação procura entender é como uma variável se comporta em um cenário onde outra está variando, visando identificar se existe alguma relação entre a variabilidade de ambas. Embora não implique em casualidade, o coeficiente de correlação exprime em número essa relação, ou seja, quantifica a relação entre as variáveis.

Define-se **coeficiente de correlação linear(*r*)** entre os dados experimentais x_i e y_io número

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sqrt{(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2)(\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - n\bar{y}^2)}}$$

Onde:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Uma fórmula mais simples de determinação do coeficiente de Pearson é

$$r = \frac{\sum z_x z_y}{n}$$

Onde z_x é o desvio padrão da variável *x*, z_y é o desvio padrão da variável *y* e n é o número de dados.

Esse número é conhecido como *coeficiente de correlação de Pearson* devido ao matemático inglês Karl Pearson (1857-1936). O coeficiente de Pearson mede mais precisamente a correlação linear das variáveis dos dados experimentais. A teoria da correlação linear de Pearson está baseada na hipótese que enuncia que, se o coeficiente de correlação não é nulo então há correlação linear e não há no caso contrário.

Existem outros coeficientes de correlação entre variáveis de dados experimentais, como o também conhecido coeficiente de Spearman, devido ao psicólogo inglês Charles Spearman (1863-1945) que trabalhou na área de estatística.

Observa-se que a correlação das variáveis é melhor quando *r* está próximo de 1. Caso contrário, pela hipótese em que se baseia o trabalho de Pearson, a correlação é mais fraca quando *r* está mais próximo de 0 (zero). Teoricamente foi provado que $|r| \leq 1$.

De um modo geral diz-se que os dados seguem um modelo fortemente linear se $r > 0{,}8$. Neste caso, o ajuste linear é um bom ajuste aos dados do problema. De outro modo, se $r < 0{,}8$, diz-se que a relação entre os dados não é bem explicada por um modelo linear.

A maioria das calculadoras científicas já tem o programa de ajustes incorporados para o cálculo dos coeficientes de correlação, assim como outros softwares simples de manipular. Um deles é o software GeoGebra.