Universidade Estadual do Maranhão – UEMA
Pró-Reitoria de Pós-Graduação – PPG
Programa de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT

Ivao Yutaka Otsuka

Algumas Aplicações de Matrizes e Sistemas Lineares com o Uso do Maxima

São Luís - MA

2021

Ivao Yutaka Otsuka

Algumas Aplicações de Matrizes e Sistemas Lineares Com o Uso do Maxima

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Rede Nacional (PROFMAT) como parte dos requisitos para obtenção do grau de mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Felix Silva Costa

São Luís - MA

2021

Otsuka, Ivao Yutaka.
Algumas aplicações de matrizes e sistemas lineares com o uso do maxima. / Ivao Yutaka Otsuka. – São Luís, 2021.
47 f.

Dissertação (Mestrado) – Curso de Matemática em Rede Nacional, Universidade Estadual do Maranhão,2021.

Orientador: Prof. Dr. Felix Silva Costa.

1. Software. 2.Matrizes. 3.Sistemas Lineares.4.Método de Gauss Jordan. I.Título.

CDU: 004.4:512.64

Elaborado por Giselle Frazão Tavares - CRB 13/665

Ivao Yutaka Otsuka

Algumas Aplicações de Matrizes e Sistemas Lineares Com o Uso do Maxima

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Rede Nacional (PROFMAT) como parte dos requisitos para obtenção do grau de mestre em Matemática.

Prof. Dr. Felix Silva Costa-UEMA
Orientador

Profª. Dra. Elen Viviani Pereira Spreafico-UFMS
Examinador Externo

Prof. Dr. Raimundo José Barbosa Brandão-UEMA
Examinador Interno

São Luís - MA
2021

Agradecimentos

A Deus, por permitir que esse objetivo fosse alcançado.

A minha esposa, Maria Claudia, pelo incentivo, companheirismo e apoio.

A minha família, pelo apoio e incentivo.

Ao meu orientador Prof. Dr. Felix Silva Costa, pela disponibilidade, competência e suas contribuições na realização deste trabalho.

A todos os professores que fazem parte do Programa PROFMAT, pelos seus ensinamentos e contribuições.

A Universidade Estadual do Maranhão, por ter proporcionado o curso de mestrado.

Aos meus colegas de curso pela força, união e companheirismo.

A CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

O presente trabalho mostra a utilização do *software Maxima* como ferramenta para efetuar operações matriciais e resolver sistemas lineares. Para tanto, antes de utilizar o *software*, apresenta-se uma breve abordagem sobre as operações matriciais, bem como a determinação da inversa de uma matriz, cálculo de determinante de matrizes de ordem 2 e 3 e resolução de sistemas lineares através do escalonamento e do método de *Gauss-Jordan*. Em seguida, mostra-se algumas funções do *Maxima* que são necessárias para efetuar essas operações. A partir daí utiliza-se o *software* para realizar as operações com matrizes, determinar a transposta e a inversa de uma matriz de ordem 3, calcular os determinantes de matrizes de ordem 3 e 4 e ainda resolver sistemas possíveis e determinados. Por fim, faz-se as representações gráficas de sistemas lineares de duas e três equações e apresenta-se algumas aplicações envolvendo matrizes e sistemas lineares.

Palavras-chave: *Software*. Matrizes. Sistemas Lineares. Método de Gauss-Jordan.

Abstract

This work shows the use of Maxima software as a tool to perform matrix operations and solve linear systems. Therefore, before using the software, a brief approach on matrix operations is presented, as well as the inverse determination of a matrix, calculation of determinant of 2 and 3 order matrices and resolution of linear systems through scaling and the Gauss-method Jordan. Then, it shows some Maxima functions that are necessary to perform these operations. Then, the software is used to perform the operations with matrices, to establish the transpose and inverse of a matrix of order 3, calculate the determinants of matrices of order 3 and 4 and still solve possible and determined systems. Finally, graphical representations of linear systems of two and three equations are made and some applications involving matrices and linear systems are presented.

Keywords: Software. Matrices. Linear Sistems. Gauss-Jordan method.

Lista de ilustrações

Lista de tabelas

Sumário

1 INTRODUÇÃO

Compreender os conceitos matemáticos, bem como suas aplicações é fundamental para o exercício de várias atividades cotidiana do ser humano. O ensino da Matemática, nas escolas de nível básico, tem como um dos objetivos facilitar as tarefas do indivíduo na sua vida cotidiana buscando, sempre que possível, estabelecer uma relação entre a teoria e a prática. O uso de tecnologias surge como uma alternativa para auxiliar nesse processo. Nas últimas décadas, graças aos avanços tecnológicos vários *softwares* direcionados ao ensino e estudo de matemática foram criados e aperfeiçoados de acordo com as experiências obtidas através da utilização dos mesmos. Através do uso de tecnologias é possível proporcionar aos estudantes uma participação ativa no processo de resolução de problemas. (BRASIL, 2018)

Neste sentido, pretende-se, com esse trabalho, discutir as possíveis vantagens em utilizar o *software Maxima* como recurso didático para auxiliar nos estudos envolvendo matrizes e sistemas lineares. Optou-se pelo uso do *Maxima* por ele ser um sistema de computação algébrica livre, que nos permite manipular expressões simbólicas e numéricas. Podemos inserir as fórmulas ou comandos através dos botões disponíveis na barra de menu ou digitando diretamente no console de comando. O *Maxima* nos fornece os resultados das operações inseridas que podem ser manipuladas posteriormente, caso seja necessário. Uma outra característica deste *software*, é a possibilidade de exibir soluções, por exemplo, de sistemas lineares com duas e três equações graficamente.

O referido trabalho está dividido em quatro seções. Considerando a introdução como a primeira seção, a segunda apresenta uma breve abordagem sobre as operações matriciais, bem como a determinação da inversa de uma matriz, cálculo de determinante de ordem 2 e 3 e resolução de sistemas lineares através do escalonamento e do método de *Gauss-Jordan*; na terceira, mostra-se algumas funções do *Maxima*, que são necessárias para efetuar essas operações. A partir daí, utiliza-se o *Maxima* para realizar as operações com matrizes e resolver sistemas lineares possíveis e determinandos. Por fim, faz-se as representações gráficas de sistemas lineares de duas e três equações e apresenta-se algumas aplicações envolvendo matrizes e sistemas lineares.

2 Matrizes e Sistemas Lineares

Apresentamos uma breve abordagem de matrizes e sistemas lineares utilizando as referências (SANTOS, 2013), (BOLDRINI et al., 1980), (ANTON; RORRES, 2012) e (CALIOLLI; DOMINGUES; COSTA, 1990).

2.1 Matriz

Sejam $m \geqslant 1$ e $n \geqslant 1$ dois números inteiros. Uma matriz $m \times n$ real é uma dupla sequência de números reais, distribuídos em m linhas e n colunas, formando uma tabela que se indica do seguinte modo:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

A i-ésima linha de A é

$$\begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{bmatrix},$$

para $i = 1, \dots, m$ e a j-ésima coluna de A é

$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$$

para $j = 1, \dots, n$. Usamos também a notação $A = (a_{ij})_{m \times n}$. Dizemos que a_{ij} ou $[A]_{ij}$ é o elemento ou a entrada de posição i, j da matriz A.

Se $m = n$, dizemos que A é uma matriz quadrada de ordem n e os elementos $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ formam a diagonal principal de A.

Exemplo 1. *Considere as seguintes matrizes:*

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 5 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 8 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ -9 \end{bmatrix}, \text{ e } F = \begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix}.$$

As matrizes A e B são de ordem 2×2. A matriz C é de ordem 2×3, D é de ordem 1×3, E é de ordem 3×1 e F é de ordem 1×1. De acordo com a notação que introduzimos, exemplos de elementos de algumas das matrizes dadas acima são $a_{11} = -5$, $b_{21} = 6$, $e_{31} = -9$, $[A]_{21} = 0$ e $[D]_{12} = 2$.

Uma matriz que só possui uma linha é chamada matriz linha, e uma matriz que só possui uma coluna é chamada matriz coluna. No exemplo 1, a matriz D é uma matriz linha e a matriz E é uma matriz coluna.

Dizemos que duas matrizes são iguais se elas têm a mesma ordem e os elementos correspondentes são iguais. Ou ainda, as matrizes $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{p \times q}$ são iguais se, e somente se, $m = p$, $n = q$ e $a_{ij} = b_{ij}$ para $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$.

2.2 Operações com Matrizes

2.2.1 Adição ou Soma Entre Duas Matrizes

A adição de duas matrizes de mesma ordem $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$ é definida como sendo a matriz $m \times n$

$$C = A + B$$

obtida obtida através da soma dos elementos correspondentes de A e B, ou seja, se $C = (c_{ij})_{m \times n}$, então

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij},$$

para $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$. Escrevemos também $[A + B]_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Exemplo 2. *Considere as matrizes*

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 8 \\ 6 & 9 & 4 \end{bmatrix}.$$

Se chamamos de C a soma das duas matrizes A e B, então

$$C = A + B = \begin{bmatrix} -5 + (-1) & 1 + 2 & 3 + 8 \\ 0 + 6 & 7 + 9 & 1 + 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 3 & 11 \\ 6 & 16 & 5 \end{bmatrix}.$$

2.2.2 Multiplicação

A multiplicação de um número α por uma matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$ é definida pela matriz de ordem $m \times n$

$$B = \alpha A,$$

obtida multiplicando-se o número α por cada elemento da matriz A, ou seja, se $B = (b_{ij})_{m \times n}$,

$$b_{ij} = \alpha a_{ij},$$

para $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$. Escrevemos também $[\alpha A] = \alpha a_{ij}$. Dizemos que a matriz B é um múltiplo escalar da matriz A.

Exemplo 3. *O produto da matriz*

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 7 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

pelo escalar -4 é dado por

$$-4A = \begin{bmatrix} (-4)(-5) & (-4)\,3 \\ (-4)\,7 & (-4)\,1 \\ (-4)\,2 & (-4)(-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & -12 \\ -28 & -4 \\ -8 & 12 \end{bmatrix}$$

O produto das matrizes $A = (a_{ij})_{m \times p}$ e $B = (b_{ij})_{p \times n}$ é definido pela matriz de ordem $m \times n$

$$C = AB,$$

cujos elemento são obtidos da seguinte maneira:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ip}b_{pj}, \tag{2.1}$$

para $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$. Escrevemos também $[AB]_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ip}b_{pj}$.

A Equação (2.1) significa que o elemento i, j do produto é igual à soma dos produtos dos elementos da i-ésima linha da matriz A pelos elementos correspondentes da j-ésima coluna da matriz B.

$$\begin{bmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1n} \\ \vdots & c_{ij} & \vdots \\ c_{m1} & \ldots & c_{mn} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1p} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \hline a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ip} \\ \hline \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mp} \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc|c|cc} b_{11} & \ldots & b_{1j} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & \ldots & b_{2j} & \ldots & b_{2n} \\ \vdots & \ldots & \vdots & \ldots & \vdots \\ b_{p1} & \ldots & b_{pj} & \ldots & b_{pm} \end{array}\right]$$

Podemos representar a Equação (2.1) usando a notação de somatório

$$[AB]_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj},$$

e lemos: somatório de k variando de 1 a p de $a_{ik}b_{kj}$. O símbolo $\sum\limits_{k=1}^{p}$ significa que estamos fazendo uma soma em que o índice k está variando de $k = 1$ até $k = p$.

Exemplo 4. *Considere as matrizes:*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & -1 \\ 2 & 7 & -3 \end{bmatrix}.$$

Se C é igual ao produto das matrizes A e B, então

$$C = AB =$$

$$= \begin{bmatrix} (-1)\cdot 1 + 3\cdot 3 + 1\cdot 2 & (-1)\cdot(-2) + 3\cdot 5 + 1\cdot 7 & (-1)\cdot 0 + 3\cdot(-1) + 1\cdot(-3) \\ 2\cdot 1 + 0\cdot 3 + 5\cdot 2 & 2\cdot(-2) + 0\cdot 5 + 5\cdot 7 & 2\cdot 0 + 0\cdot(-1) + 5\cdot(-3) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 10 & 24 & -6 \\ 12 & 31 & -15 \end{bmatrix}.$$

Observação: O produto de matrizes não é comutativo, ou seja, AB pode não ser igual a BA. Vejamos um exemplo:

Exemplo 5. *Sejam* $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ *e* $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$. *Então,*

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -6 \end{bmatrix} \quad e \quad BA = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 1 & -7 \end{bmatrix}, \text{ com } BA \neq AB.$$

Vejamos agora um exemplo utilizando a multiplicação de matrizes.

Exemplo 6. *Suponha que a seguinte matriz forneça as quantidades das vitaminas A, B e C obtidas em cada unidade dos alimentos I e II.*

$$\begin{array}{r c} & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{array}{r} Alimento I \\ Alimento II \end{array} & \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Se o consumo for de 3 unidades do alimento I e 2 unidades do alimento II, qual será a quantidade consumida de vitamina?

A quantidade dos alimentos I e II pode ser representada pela matriz:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Podemos obter a quantidade de vitamina consumida efetuando a seguinte multiplicação:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3\cdot 4 + 2\cdot 5 & 3\cdot 3 + 2\cdot 0 & 3\cdot 0 + 2\cdot 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 22 & 9 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ou seja, o consumo será de 22 unidades de vitamina A, 9 de B e 2 de C.

2.3 Matriz Transposta

A transposta de uma matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$ é definida pela matriz de ordem $n \times m$

$$B = A^t$$

obtida trocando-se as linhas com as colunas, ou seja, se $B = (b_{ij})_{n\times m}$, então

$$b_{ij} = a_{ji}$$

para $i = 1, \ldots, n$ e $j = 1, \ldots, m$. Podemos também escrever $[A^t]_{ij} = a_{ji}$.

Exemplo 7. *Considere as matrizes*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \quad e \quad C = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 9 \\ -3 & 6 & -8 \end{bmatrix}.$$

Então, as matrizes transpostas são

$$A^t = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}, \quad B^t = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} \quad e \quad C^t = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 7 & 6 \\ 9 & -8 \end{bmatrix}$$

2.4 Propriedades das Operações Matriciais

Teorema 1. *Sejam A, B e C matrizes de ordem $m \times n$, α e β escalares. As seguintes propriedades são válidas para as operações matriciais:*

***a**. (comutatividade) $A + B = B + A$;*

***b**. (associatividade) $A + (B + C) = (A + B) + C$;*

***c**. (elemento neutro) Sendo 0 uma matriz $m \times n$, cujos elementos são todos iguais a zero, temos que*

$$A + 0 = A$$

para toda matriz A. A matriz 0 é denominada matriz nula de ordem $m \times n$.

***d**. (elemento simétrico) Para cada matriz A, existe uma única matriz $-A$, definida por $[-A]_{ij} = -a_{ij}$ tal que*

$$A + (-A) = 0.$$

***e**. (associatividade) $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$;*

***f**. (distributividade) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$;*

***g**. (distributividade) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$.*

***h**. $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$;*

***i**. $(A^t)^t = A$;*

j. $(A+B)^t = A^t + B^t$;
k. $(\alpha A)^t = \alpha A^t$
l. $(AB)^t = B^t A^t$

Se A, B e C são matrizes quadradas de ordem n, então

m. *(distributividade)* $A(B+C) = AB + AC$ *e* $(B+C)A = BA + CA$;
n. *(associatividade)* $A(BC) = (AB)C$;
o. *(elemento neutro) Para cada inteiro positivo n, a matriz de ordem $n \times n$,*

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix},$$

denominada matriz identidade é tal que

$$AI_n = I_n A = A,$$

para toda matriz $A = (a_{ij})_{n \times n}$.

Demonstração. Para as demonstrações das igualdades do teorema, foi mostrado que os elementos da matriz do lado esquerdo são iguais aos elementos correspondentes da matriz do lado direito, sempre considerando as propriedades dos números.
a. $[A+B]_{ij} = a_{ij} + b_{ij} = b_{ij} + a_{ij} = [B+A]_{ij}$.
b. $[A+(B+C)]_{ij} = a_{ij} + [B+C]_{ij} = a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij} = [A+B]_{ij} + c_{ij} = [(A+B)+C]_{ij}$.
c. Considere Y uma matriz $m \times n$ tal que

$$A + Y = A \tag{2.2}$$

para toda matriz A, de ordem $m \times n$. Assim,

$$a_{ij} + y_{ij} = a_{ij}$$

Pela lei do cancelamento, significa que todos os elementos y_{ij} da matriz Y são iguais a zero, para $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$, ou seja, $Y = 0$.
d. Dada uma matriz A, $m \times n$, seja X uma matriz $m \times n$, tal que

$$A + X = 0 \tag{2.3}$$

Comparando os elementos correspondentes, temos que

$$a_{ij} + x_{ij} = 0,$$

ou seja, $x_{ij} = -a_{ij}$, para $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$. Logo, a única matriz que satisfaz (2.3) é a matriz em que todos os seus elementos são iguais aos simétricos dos elementos de A. Denotamos a matriz X por $-A$, dada por $-A_{ij} = -a_{ij}$

e. $[\alpha(\beta A)]_{ij} = \alpha[\beta A]_{ij} = \alpha(\beta a_{ij}) = (\alpha\beta)a_{ij} = [(\alpha\beta)A]_{ij}$.

f. $[(\alpha+\beta)A]_{ij} = (\alpha+\beta)a_{ij} = (\alpha a_{ij}) + (\beta a_{ij}) = [\alpha A]_{ij} + [\beta A]_{ij} = [\alpha A + \beta A]_{ij}$.

g. $[\alpha(A+B)]_{ij} = \alpha[A+B]_{ij} = \alpha(a_{ij} + b_{ij}) = \alpha a_{ij} + \alpha b_{ij} = [\alpha A]_{ij} + [\alpha B]_{ij} = [\alpha A + \alpha B]_{ij}$.

h.

$$[\alpha(AB)]_{ij} = \alpha \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=1}^{p}(\alpha a_{ik})b_{kj} = [(\alpha A)B]_{ij} \text{ e}$$

$$[\alpha(AB)]_{ij} = \alpha \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}(\alpha b_{kj}) = [A(\alpha B)]_{ij}.$$

i. $[(A^t)^t]_{ij} = [A^t]_{ji} = a_{ij}$

j.$[(A+B)^t]_{ij} = [A+B]_{ji} = a_{ji} + b_{ji} = [A^t]_{ij} + [B^t]_{ij}$

k. $[(\alpha A)^t]_{ij} = [\alpha A]_{ji} = \alpha a_{ji} = \alpha[A^t]_{ij} = [\alpha A^t]_{ij}$

l.

$$[(AB)^t]_{ij} = [AB]_{ji} = \sum_{k=1}^{p} a_{jk}b_{ki} = \sum_{k=1}^{p}[A^t]_{kj}[B^t]_{ik} = \sum_{k=1}^{p}[B^t]_{ik}[A^t]_{kj} = [B^tA^t]_{ij}.$$

m.

$$[A(B+C)]_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}[B+C]_{kj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}(b_{kj} + c_{kj}) = \sum_{k=1}^{p}(a_{ik}b_{kj} + a_{ik}c_{kj}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=1}^{p} a_{ik}c_{kj} = [AB]_{ij} + [AC]_{ij} = [AB+AC]_{ij}.$$

A outra igualdade é inteiramente análoga a anterior.

n. Sejam A, B e C matrizes $m \times p$, $p \times q$ e $q \times n$, respectivamente. Utilizando a notação de somatório, temos que:

$$[A(BC)] = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}[BC]_{kj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}(\sum_{l=1}^{q} b_{kl}c_{lj}) = \sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{q} a_{ik}(b_{kl}c_{lj}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{q}(a_{ik}b_{kl})c_{lj} = \sum_{l=1}^{q}\sum_{k=1}^{p}(a_{ik}b_{kl})c_{lj} = \sum_{l=1}^{q}(\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kl})c_{lj} =$$

$$= \sum_{l=1}^{q}[AB]_{il}c_{lj} = [(AB)C]_{ij}.$$

o. Podemos escrever a matriz identidade em termos do delta de Kronecker que é definido por

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & se\ i = j \\ 0, & se\ i \neq j \end{cases}$$

como $[I_n]_{ij} = \delta_{ij}$, segue-se que

$$[AI_n]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}[I_n]_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\delta_{kj} = a_{ij}.$$

Analogamente teremos a outra igualdade.

2.5 Matriz Identidade

Denomina-se matriz identidade, toda matriz quadrada de ordem $n \times n$, em que $a_{ij} = 1$ se $i = j$ e $a_{ij} = 0$ se $i \neq j$, ou seja, se I_n é uma matriz identidade de ordem $n \times n$, então

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 8. *Sejam*

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\ e\ I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

As matrizes I_2, I_3 e I_4 são matrizes identidades de ordem 2, 3 e 4.

2.6 Matriz Inversa

Uma matriz quadrada A de ordem n é invertível, se existe uma matriz B, também de ordem n, tal que

$$AB = BA = I_n$$

em que I_n é a matriz identidade de ordem n. A matriz B é denominada matriz inversa de A.

Se uma matriz não possui inversa, dizemos que ela é não invertível. Se considerarmos o conjunto dos números reais, sabemos que todo número real não nulo possui um inverso. Porém, nem toda matriz possui inversa. Uma das condições para que uma matriz possua a sua inversa é que ela seja uma matriz quadrada. Além disso, se B é a matriz inversa de A, então $AB = BA = I_n$. O fato de uma matriz ser quadrada não garante que ela possua inversa.

2.6.1 Procedimento para Determinar a Inversa de Uma Matriz de ordem 2

Utilizando como exemplo, a partir de uma matriz quadrada de ordem 2, iremos mostrar uma forma de descobrir a matriz inversa.

Exemplo 9. *Considere a matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Se a matriz A *for invertível, então a sua inversa é uma matriz do tipo* $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, *tal que* $A \cdot X = I_2$, *ou seja:*

$$A \cdot X = I_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a+2c & b+2d \\ -a+5c & -b+5d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Considerando a igualdade de matrizes, obtemos os seguintes sistemas:

$$\begin{cases} a+2c &= 1 \\ -a+5c &= 0 \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} b+2d &= 0 \\ -b+5d &= 1 \end{cases}.$$

Resolvendo os sistemas, obtemos: $a = \frac{5}{7}$, $b = -\frac{2}{7}$, $c = \frac{1}{7}$ *e* $d = \frac{1}{7}$.
Agora, basta verificarmos se $X \cdot A = I_2$. *De fato,*

$$X \cdot A = \begin{bmatrix} \frac{5}{7} & -\frac{2}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{7} + (-\frac{2}{7}) \cdot (-1) & \frac{5}{7} \cdot 2 + (-\frac{2}{7}) \cdot 5 \\ \frac{1}{7} + (-\frac{1}{7}) & \frac{2}{7} + \frac{1}{7} \cdot 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2.$$

Logo,

$$A^{-1} = X = \begin{bmatrix} \frac{5}{7} & -\frac{2}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \end{bmatrix}.$$

2.7 Determinante

Para o desenvolvimento desta seção, iremos utilizar como referência (IEZZI; HAZZAN, 2013)

O determinante de uma matriz quadrada é uma função que associa a essa matriz um número real. Indicamos o determinante de uma matriz A por $det(A)$.

Como o objetivo desse trabalho não é fazer um estudo detalhado de determinante, iremos nos limitar em calcular somente os determinantes de matrizes de ordem 1, 2 e 3. **Determinante de uma matriz quadrada de ordem 1:**

Por definição, o determinante de uma matriz quadrada de ordem 1 (possui um único elemento) é o próprio elemento, ou seja, se $A = [a_{ij}]$, então $det(A) = a_{ij}$.

Exemplo 10. *Dada a matriz* $A = [-3]$, *temos:*

$$det(A) = -3$$

Determinante de uma matriz quadrada de ordem 2:

O determinante de uma matriz de ordem 2 é obtido através da diferença entre os produtos dos elementos da diagonal principal os elementos da diagonal secundária, ou seja, sendo a matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$

então o $det(A) = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$.

Exemplo 11. *Dada a matriz* $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$, *então,* $det(A) = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 6 = 15 - 12 = 3$.

Determinante de uma matriz de ordem 3:

Para o cálculo do determinante de uma matriz quadrada de ordem 3, utilizamos um dispositivo denominado **regra de Sarrus**. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Pela regra de *Sarrus*, devemos repetir as duas primeiras colunas à direita da matriz dada. Em seguida, multiplicamos os elementos de acordo com as indicações, mantendo os sinais das multiplicações no sentido da diagonal principal e mudando os sinais no sentido da diagonal secundária, como segue no diagrama

$$\begin{tikzcd}
a_{11} \arrow[dr] & a_{12} \arrow[dr] & a_{13} \arrow[dl] \arrow[dr] & a_{11} \arrow[dl] & a_{12} \arrow[dl] \\
a_{21} & a_{22} \arrow[dl] \arrow[dr] & a_{23} \arrow[dl] \arrow[dr] & a_{21} \arrow[dl] \arrow[dr] & a_{22} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32}
\end{tikzcd}$$

Assim, temos: $det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$.

Exemplo 12. *Dada a matriz A de ordem 3, aplicaremos a regra de Sarrus para obter o seu determinante.*

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 5 \\ 7 & 1 & -2 \\ -4 & 2 & 7 \end{bmatrix},$$

$$\begin{tikzcd}
-3 \arrow[dr] & -1 \arrow[dr] & 5 \arrow[dl] \arrow[dr] & -3 \arrow[dl] & -1 \arrow[dl] \\
7 & 1 \arrow[dl] \arrow[dr] & -2 \arrow[dl] \arrow[dr] & 7 \arrow[dl] \arrow[dr] & 1 \\
-4 & 2 & 7 & -4 & 2
\end{tikzcd}$$

$\Rightarrow det(A) = -3 \cdot 1 \cdot 7 + (-1) \cdot (-2) \cdot (-4) + 5 \cdot 7 \cdot 2 - 5 \cdot 1 \cdot (-4) - (-3) \cdot (-2) \cdot 2 - (-1) \cdot 7 \cdot 7 = 98.$

2.8 Sistemas lineares

Uma equação linear com n variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$ é uma equação da forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b,$$

em que $a_1, a_2, \ldots, a_n$ e b são constantes reais.

Um sistema linear é um conjunto de equações lineares, ou seja, é um conjunto de equações da forma

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & & & & & \vdots & = & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right.$$

em que a_{ij} e b_k são constantes reais, para $i, k = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$.

Um sistema linear pode ser representado na forma de uma equação matricial

$$AX = B,$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & \ldots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Uma matriz

$$S = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

será solução do sistema linear se todas as equações do sistema são satisfeitas quando substituímos $x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \cdots, x_n = \alpha_n$. Alguns sistemas lineares não possuem soluções e outros, embora sejam possíveis de serem resolvidos, as soluções são indeterminadas. Para o presente trabalho iremos utilizar apenas aqueles sistemas que possuem soluções determinadas.

Exemplo 13. *O sistema*

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} 3x & + & y & = & 1 \\ 2x & - & 3y & = & 8 \end{array} \right.$$

pode ser escrito na forma

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \end{bmatrix},$$

cuja solução é $x = 1$ e $y = -2$, ou seja, a matriz

$$S = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

é solução do sistema.

Podemos resolver um sistema linear substituindo o sistema inicial por outro que seja equivalente, ou seja, que possua o mesmo conjunto solução. Além disso, o sistema equivalente deve ser de fácil resolução. Para determinarmos o sistema equivalente podemos aplicar as seguintes operações:

- trocar a posição de duas equações;
- multiplicar uma equação por um escalar diferente de zero;
- somar a uma equação outra equação multiplicada por um escalar.

Essas operações são ditas **operações elementares** se forem aplicadas sobre as linhas de uma matriz. Podemos aplicar estas operações sobre a matriz dos coeficientes do sistema, denominada matriz aumentada, dada na forma

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

2.9 Método de *Gauss-Jordan*

Uma matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$ está na forma escalonada reduzida quando satisfaz as seguintes condições:

a. Todas as linhas nulas devem estar abaixo das linhas não nulas;

b. O pivô (1º elemento não nulo de uma linha) de cada linha não nula é igual a 1;

c. O pivô de cada linha não nula ocorre à direita do pivô anterior;

d. Se uma coluna contém um pivô, então todos os seus outros elementos são iguais a zero.

Dizemos que uma matriz está na forma escalonada se ela satisfaz as propriedades (a) e (c).

Exemplo 14. *As matrizes*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad e \quad \begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

são escalonadas reduzidas. Já as matrizes

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 9 & 8 \\ 0 & -2 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad e \quad \begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 0 & -7 & 16 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

são apenas escalonadas.

Para resolver sistemas, podemos utilizar o método de *Gauss-Jordan*, que consiste em aplicar as operações elementares às linhas da matriz aumentada associada ao sistema até que ela esteja na forma escalonada reduzida.

Exemplo 15. *Seja o sistema*

$$\begin{cases} x & + & y & + & 2z & = & -2 \\ -6x & - & 2y & + & 2z & = & 4 \\ 4x & + & 2y & - & z & = & 0 \end{cases}$$

A matriz aumentada associada a este sistema é

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -2 \\ -6 & -2 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Como o primeiro elemento da primeira coluna é igual a 1, ele será o pivô. Temos que zerar os demais elementos da primeira coluna. Assim, iremos adicionar à segunda linha a primeira linha multiplicada por 6 e, em seguida, substituiremos a terceira linha pela soma dela com a primeira multiplicada por -4,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 14 & -8 \\ 0 & -2 & -9 & 8 \end{bmatrix}.$$

A partir da matriz obtida, se adicionarmos a segunda linha à terceira multiplicada por 2, teremos uma matriz apenas escalonada. Ou seja,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 14 & -8 \\ 0 & 0 & -4 & 8 \end{bmatrix}.$$

Agora devemos obter os pivôs da segunda e terceira linhas. Para isto, iremos multiplicar a segunda linha por $\frac{1}{4}$ e a terceira por $-\frac{1}{4}$,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & \frac{7}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Pela condição do item (d), do método de Gauss-Jordan, temos que se uma coluna contém um pivô, então todos os seus outros elementos devem ser iguais a zero. Para zerar o primeiro elemento da segunda coluna, adicionamos à primeira linha a segunda linha multiplicada por -1,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{7}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Agora, note que devemos zerar o primeiro e o segundo elemento da terceira coluna. Eliminamos o primeiro adicionando à primeira linha a terceira linha multiplicada por $\frac{3}{2}$*. E, para zerar o segundo, basta somar à segunda linha a terceira multiplicada por* $-\frac{7}{2}$*. Assim, obtemos como resultado a matriz escalonada reduzida*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Portanto, podemos concluir que o sistema inicial é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} x & & & = & -3 \\ & y & & = & 5 \\ & & z & = & -2 \end{cases}.$$

Por meio de operações elementares, é possível, a partir da matriz aumentada do sistema, determinar um sistema equivalente na forma escalonada e, por conseguinte, podemos encontrar a solução desse sistema.

Exemplo 16. *Considere o sistema*

$$\begin{cases} 2x - 3y - z = 0 \\ -2x + y + 2z = -9 \\ 4x + 2y + z = 1 \end{cases}$$

A matriz aumentada desse sistema é

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & -9 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

Inicialmente, iremos substituir a segunda linha pela soma dela com a primeira e, em seguida, trocamos a terceira pela soma dela com a primeira multiplicada por -2,

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -9 \\ 0 & 8 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Agora, podemos substituir a terceira linha pela soma dela com a segunda multiplicada por 4.

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & 7 & -35 \end{bmatrix}.$$

Note que a matriz obtida está na forma escalonada e o sistema associado a ela é equivalente ao sistema linear dado inicialmente. E, portanto, ao resolver esse sistema escalonado, iremos obter, de fato, uma solução que também é solução do sistema dado.

$$\begin{cases} 2x - 3y - z = 0 \\ \quad\; - 2y + z = -9 \\ \qquad\quad 7z = -35 \end{cases}$$

$7z = -35 \Rightarrow z = -5$
$-2y + z = -9 \Rightarrow -2y + (-5) = -9 \Rightarrow y = 2$
$2x - 3y - z = 0 \Rightarrow 2x - 3 \cdot 2 - (-5) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$
Portanto, a solução do sistema dado é a terna $(\frac{1}{2}, 2, -5)$

3 *Maxima*

Maxima é um sistema para manipulação de expressões numéricas e simbólicas, incluindo sistema lineares e matrizes. Ele é compatível com vários sistemas operacionais como *Windows, Linux e MacOS X*. *Maxima* é descendente de *Macsyma*, o lendário sistema de álgebra computacional desenvolvido no final dos anos 1960 no MIT (Instituto de Tecnologia de Massachusetts). O *Macsyma* foi revolucionário em sua época, e muitos sistemas que surgiram posteriormente, como *Maple* e *Mathematica*, foram inspirados por ele. O ramo *Maxima* da *Macsyma* foi mantido por William Schelter de 1982 até seu falecimento em 2001. Em 1998, ele obteve permissão para liberar o código-fonte sob a licença de software livre GPL (General Public License). Foram seus esforços e habilidade que tornaram possível a sobrevivência do *Maxima*. Desde sua morte, um grupo de usuários e desenvolvedores se formou para levar o *Maxima* a um público mais amplo. Assim, O *Maxima* é atualizado com muita frequência, para corrigir *bugs* (falhas) e melhorar o código e a documentação.

3.1 Instalação

Através do *link* https://maxima.sourceforge.io/pt/index.html é possível fazer o *download* do *Maxima* selecionando a versão de acordo com sistema operacional desejado. Para fins desse estudo, iremos instalar a versão voltada para o sistema operacional *Windows*. Após baixar o arquivo, basta clicar no ícone de instalação. Ao inicializar o *Maxima*, irá aparecer o console conforme a Figura 1.

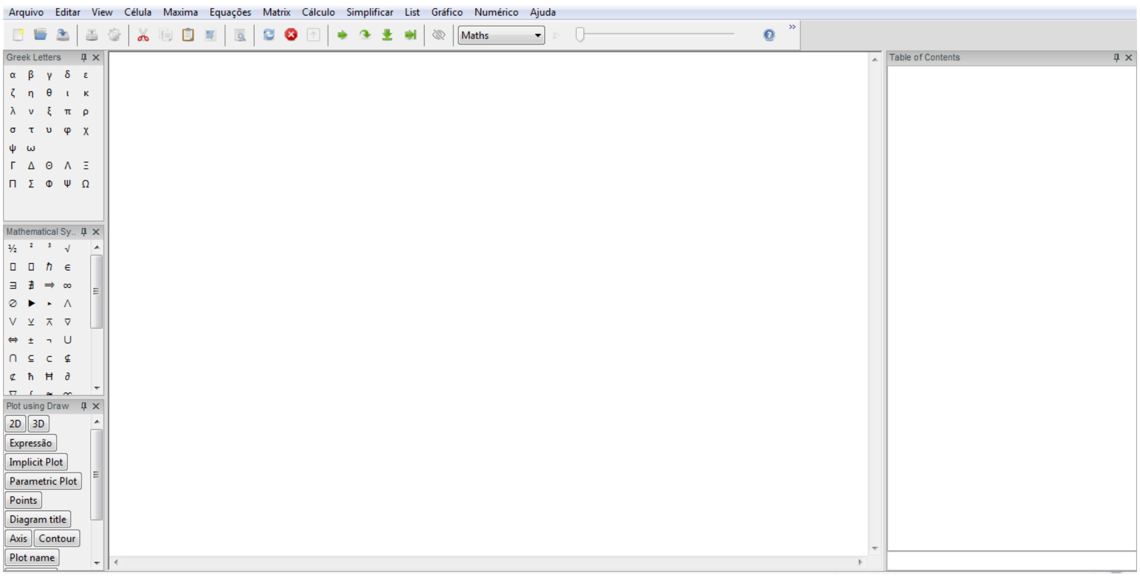


Figura 1 – Console do *Maxima*.

3.2 Utilizando o *Maxima*

Posto que o objetivo deste trabalho não é fazer um estudo aprofundado sobre o *Maxima*, mas mostrar como algumas funções desse *software* pode contribuir na resolução de problemas envolvendo sistemas lineares, matrizes e determinante, iremos nos limitar em mostrar apenas as funcionalidades que se farão necessárias para tais conteúdos utilizando como referência (VAZ, 2016; MAXIMA, 2021).

O *Maxima* possui duas formas para realizarmos as entradas: a partir dos menus da Figura 1 ou digitando no console de comandos.
Algumas instruções preliminares.

- Cada linha de entrada (*input*) é designada por (% in), em que n indica a linha de entrada e cada linha de saída (*output*) é designada por (% on), n indica o número da linha de saída.
- Ao final de cada comando, devemos digitar a tecla ponto e vírgula para que o resultado seja exibido.
- Após digitar cada comando digite as teclas *Shift*+*Enter* ou *Ctrl*+*Enter* para que a operação seja efetuada.

3.3 Segue uma Tabela com Algumas Operações Básicas

Tabela 1 – Operações básicas: *Software Maxima*

+	adição
-	subtração
*	multiplicação
/	divisão
^	potenciação

Fonte: O autor, 2021

3.4 Operações Matriciais Utilizando o *Maxima*

Para efetuarmos as operações com matrizes no *Maxima*, é necessário inicialmente criar as matrizes inserindo alguns comandos.
Criando uma matriz genérica A, 3×3.

No console do *Maxima*, digitamos A:genmatrix(a,3,3);

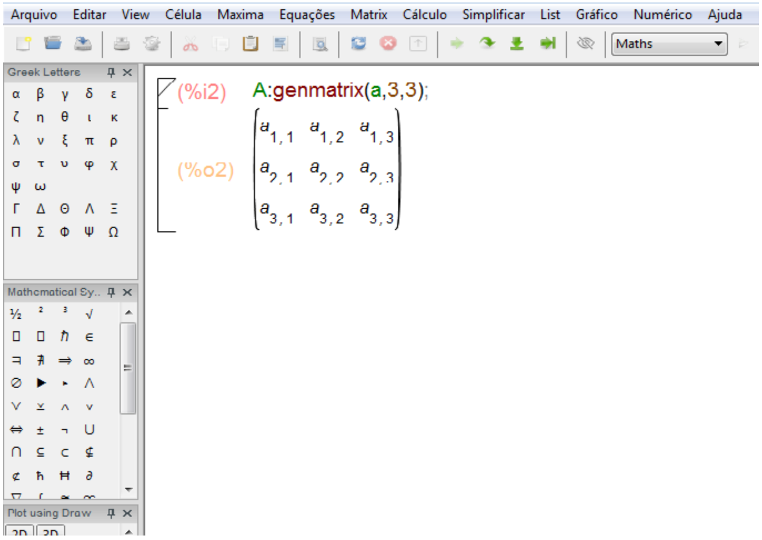


Figura 2 – Matriz genérica A no *Maxima*.

Para criarmos a matriz A, digitamos A:matrix([1,0,2],[-1,5,3],[4,7,-2]); e, em seguida, digita-se *Shift* + *Enter*. A seguinte tela será mostrada:

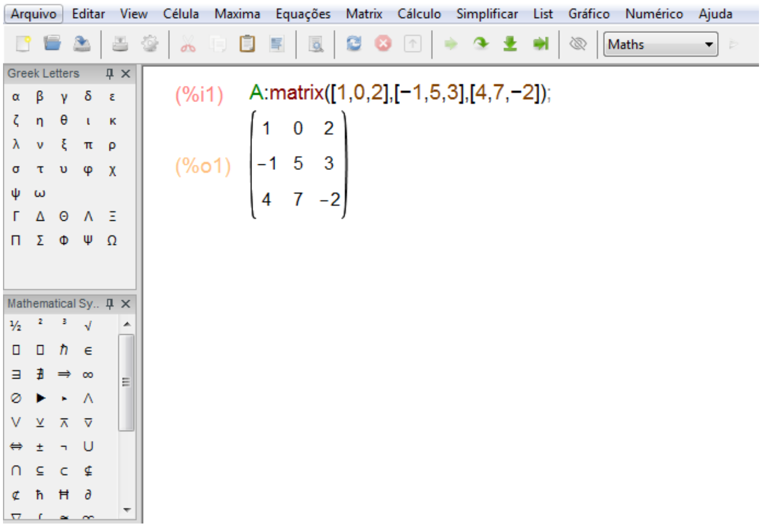


Figura 3 – Matriz A.

E, para a matriz B, digitamos B:matrix([3,-1,9],[8,2,0],[5,1,4]); e, em seguida, digita-se *Shift* + *Enter*. Assim, iremos obter o seguinte resultado:

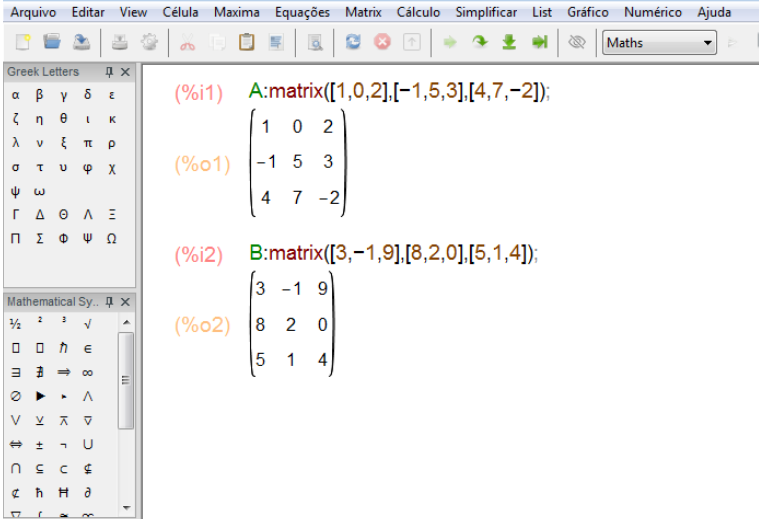


Figura 4 – Matrizes A e B.

Também é possível criar as duas matrizes A e B de uma única vez, bastando para isso digitar os comandos na mesma linha.

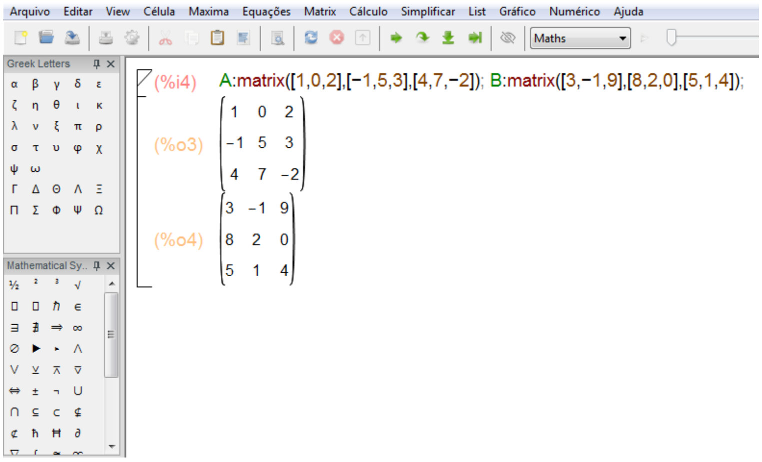


Figura 5 – Matrizes A e B utilizando uma única linha de comando.

A matriz identidade de ordem 3, por exemplo, é obtida inserindo o comando ident(3).

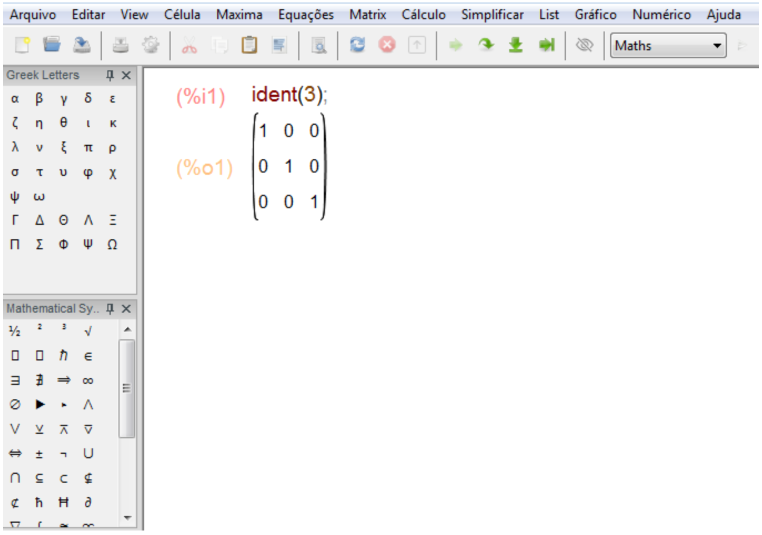


Figura 6 – Matriz identidade de ordem 3.

3.4.1 Adição, Subtração e Multiplicação de Matrizes

Agora que as matrizes A e B foram criadas, podemos efetuar as operações.

- $A + B$; (soma das matrizes A e B);
- $A - B$;(diferença das matrizes A e B);
- 7*A; (matriz A multiplicada por 7);
- A.B; (matriz A multiplicada pela matriz B).

Obtém-se o seguinte resultado:

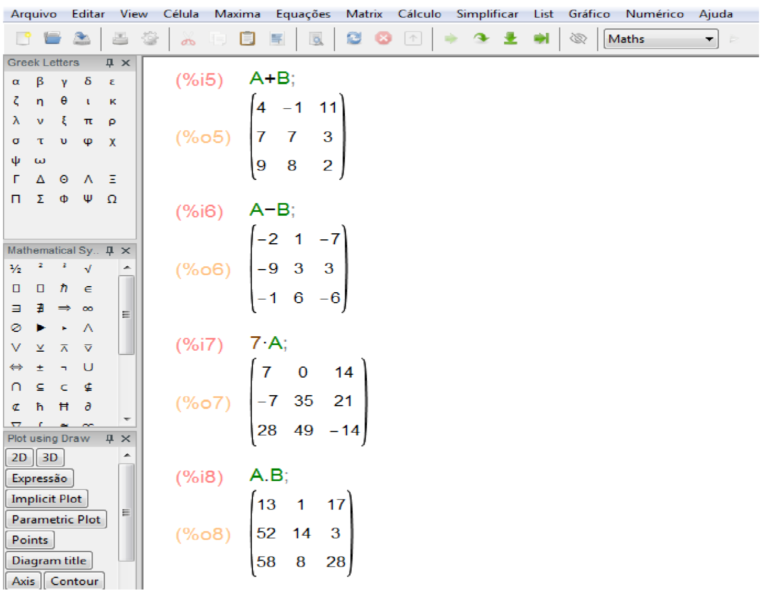


Figura 7 – operações com as matrizes A e B.

3.4.2 Transposta de Uma Matriz

Obtemos a transposta da matriz A digitando o comando transpose(A);

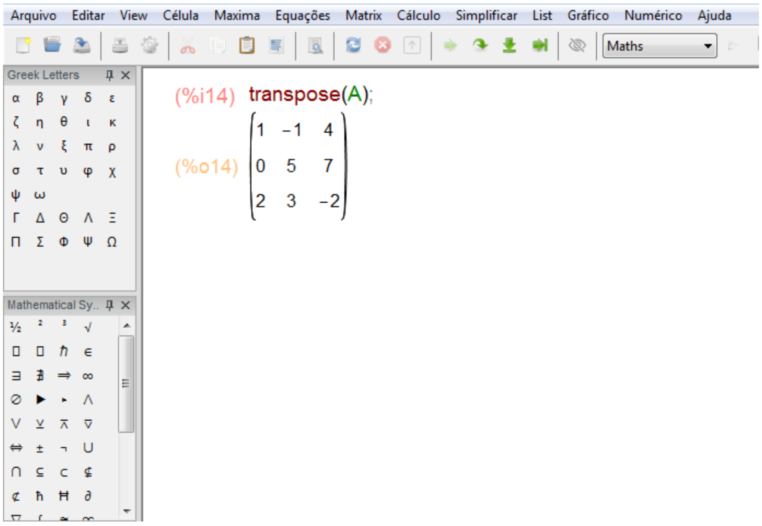


Figura 8 – transposta da matriz A.

3.4.3 Inversa de Uma Matriz

Para determinarmos as inversas das matrizes A e B, digitamos os seguintes comandos: invert(A); e invert(B);, respectivamente.

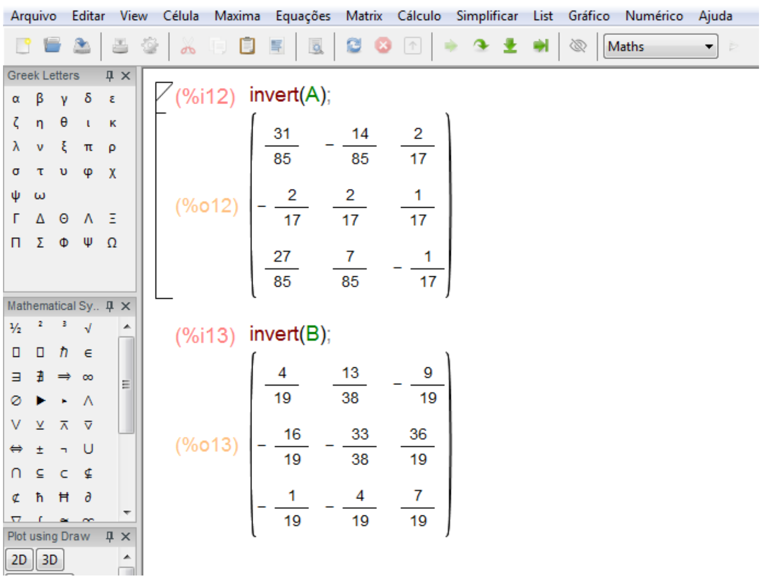


Figura 9 – Inversas das matrizes A e B.

3.4.4 Determinante de Uma Matriz

Se digitarmos o comando determinant(A) na linha de comando, o resultado será o valor do determinante da matriz A. Para o cálculo de determinante, utilizaremos a matriz do Exemplo 12, onde fez-se uso da *Regra de Sarrus*.

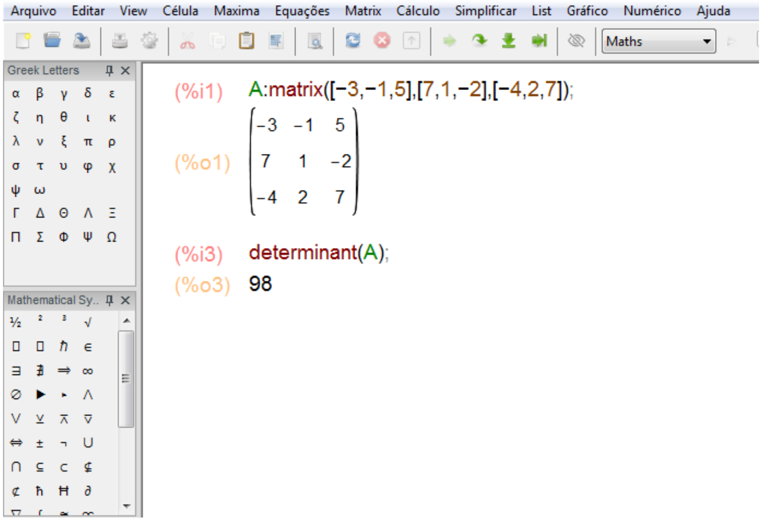


Figura 10 – Determinante da matriz A de ordem 3.

Vejamos como se torna bastante simples o cálculo de determinante de uma matriz de ordem 4.

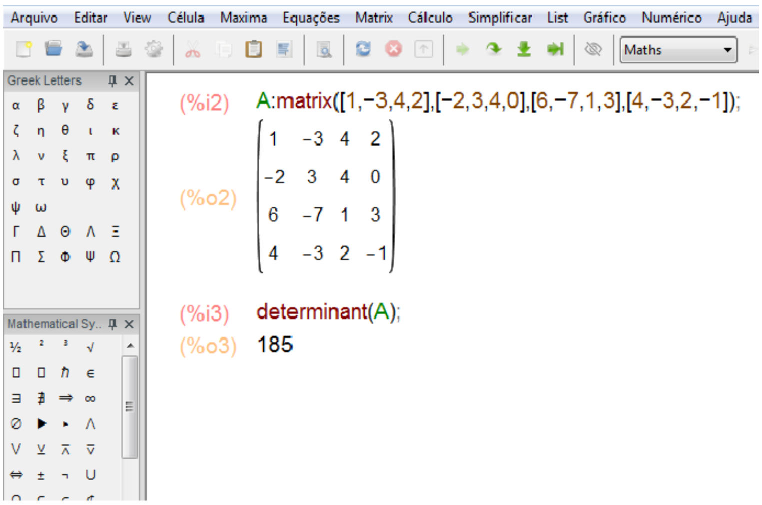


Figura 11 – Determinante da matriz A de ordem 4.

3.5 Utilizando o *Maxima* para Resolver Sistemas Lineares

No *Maxima*, ao contrário do acontece no método manual, resolver um sistema linear é uma tarefa bastante simples e fácil, . Iremos resolver o sistema linear dado no exemplo 16, onde foi aplicado o método de escalonamento. Basta utilizar o comando *linsolve* como dado na Figura 12.

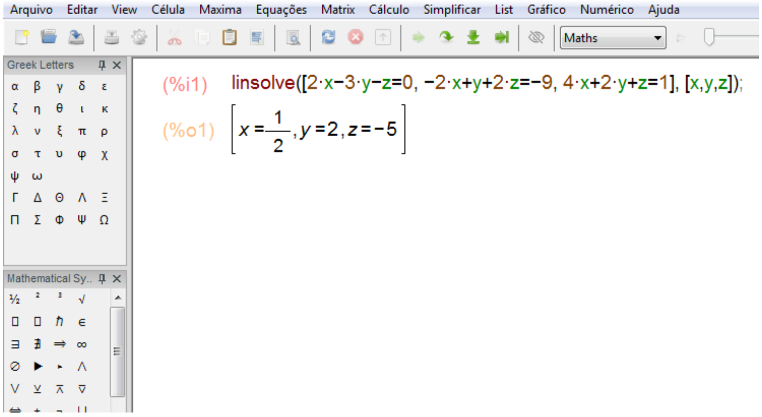


Figura 12 – Resolução de sistema linear.

3.6 Representação Gráfica de Sistemas Lineares

Para representar graficamente a solução de um sistema linear com duas equações e duas incógnitas no *Maxima*, iremos utilizar o comando plot2d(). E, neste caso, vamos inserir as equações do sistema linear do Exemplo 13 na linha de comando.

$$\begin{cases} 3x & + & y & = & 1 \\ 2x & - & 3y & = & 8 \end{cases}$$

Aqui, é importante observar que faz-se necessário escrever todas as equações como uma função $y = f(x)$, ou seja,

$$\begin{cases} y & = & -3x & + & 1 \\ y & = & \frac{2x}{3} & - & \frac{8}{3} \end{cases}$$

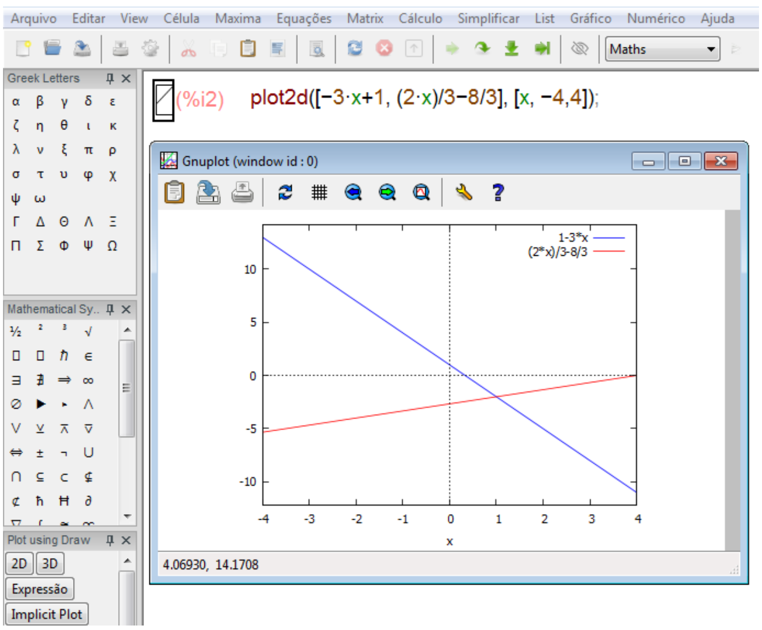


Figura 13 – Representação gráfica do sistema linear com duas equações e duas incógnitas.

Note que, na de linha comando, inseriu-se as funções e, em seguida, o intervalo das abscissas.

Da mesma forma, podemos representar graficamente a solução de um sistema linear com três equações e três incógnitas. No Exemplo 16, temos um sistema com essas características, em que obteve-se a solução através do método de escalonamento.

$$\begin{cases} 2x & - & 3y & - & z & = & 0 \\ -2x & + & y & + & 2z & = & -9 \\ 4x & + & 2y & + & z & = & 1 \end{cases}$$

Inicialmente, iremos escrever cada equação como uma função $z = f(x, y)$.

$$\begin{cases} z & = & 2x & - & 3y & & \\ z & = & x & - & \frac{y}{2} & - & \frac{9}{2} \\ z & = & -4x & -2y & + & 1 & \end{cases}$$

utilizando o comando plot3d no *Maxima*, obtemos a representação gráfica do sistema.

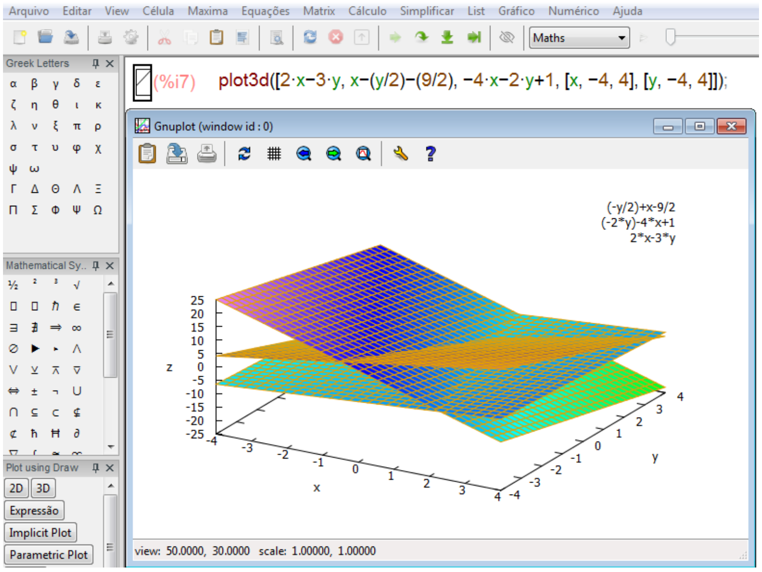


Figura 14 – Representação gráfica do sistema linear com três equações e três incógnitas.

4 Aplicações de Matrizes e Sistemas Lineares

Veremos algumas aplicações de matrizes e sistemas lineares com o uso do *Maxima* utilizando como referências (ANTON; RORRES, 2012), (BOLDRINI et al., 1980) e (LAY; LAY; MCDONALD, 2018).

Aplicação 1. *Um construtor tem contratos para construir 3 estilos de casa: moderno, mediterrâneo e colonial. A quantidade de material empregada em cada tipo de casa é dada pela matriz:*

$$\begin{array}{l} \\ Moderno \\ Mediterrâneo \\ Colonial \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} Ferro & Madeira & Vidro & Tinta & Tijolo \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc} 5 & 20 & 16 & 7 & 17 \\ 7 & 18 & 12 & 9 & 21 \\ 6 & 25 & 8 & 5 & 13 \end{array}\right] \end{array}.$$

Se ele vai construir 5, 7 e 12 casas dos tipos moderno, mediterrâneo e colonial, respectivamente, quantas unidades de cada material serão empregados?

Para resolver este problema, podemos utilizar o produto das matrizes A e B, tais que

$$A = \left[\begin{array}{ccc} 5 & 7 & 12 \end{array}\right] \quad e \quad B = \left[\begin{array}{ccccc} 5 & 20 & 16 & 7 & 17 \\ 7 & 18 & 12 & 9 & 21 \\ 6 & 25 & 8 & 5 & 13 \end{array}\right],$$

sendo A a matriz que representa o total de casas de cada tipo. Assim,

$$A \cdot B = \left[\begin{array}{ccc} 5 & 7 & 12 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{ccccc} 5 & 20 & 16 & 7 & 17 \\ 7 & 18 & 12 & 9 & 21 \\ 6 & 25 & 8 & 5 & 13 \end{array}\right].$$

No Maxima, inserimos as matrizes A e B e efetuamos a multiplicação.

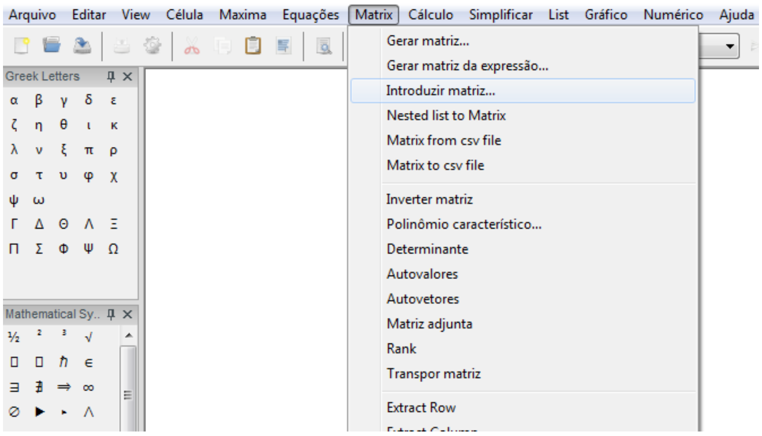


Figura 15 – Introduzindo uma matriz A através do botão Matrix.

Em seguida, atribuímos o nome e definimos a ordem da matriz.

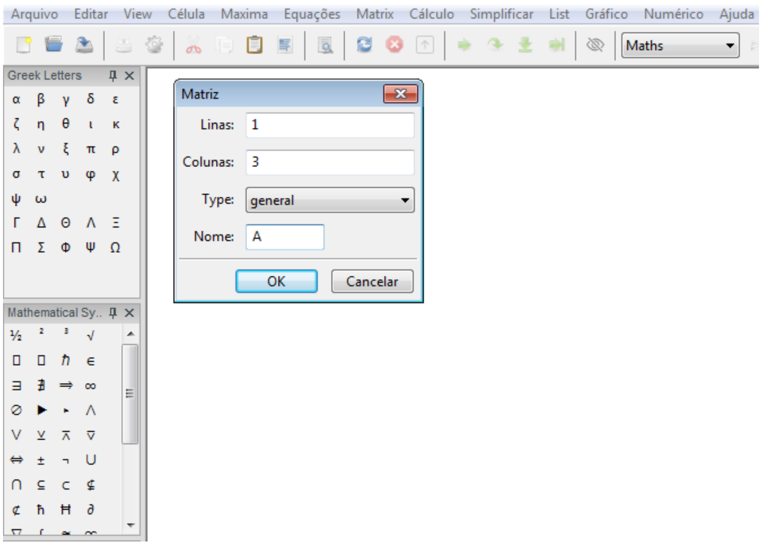


Figura 16 – Atribuindo nome e definindo a ordem da matriz.

Por fim, inserimos os elementos da matriz A.

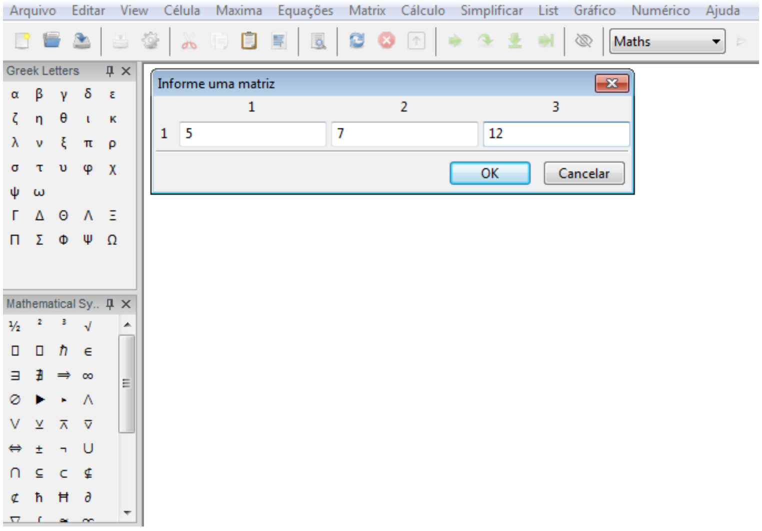


Figura 17 – Elementos da matriz A.

Na figura 8, o Maxima nos mostra que a matriz A foi inserida.

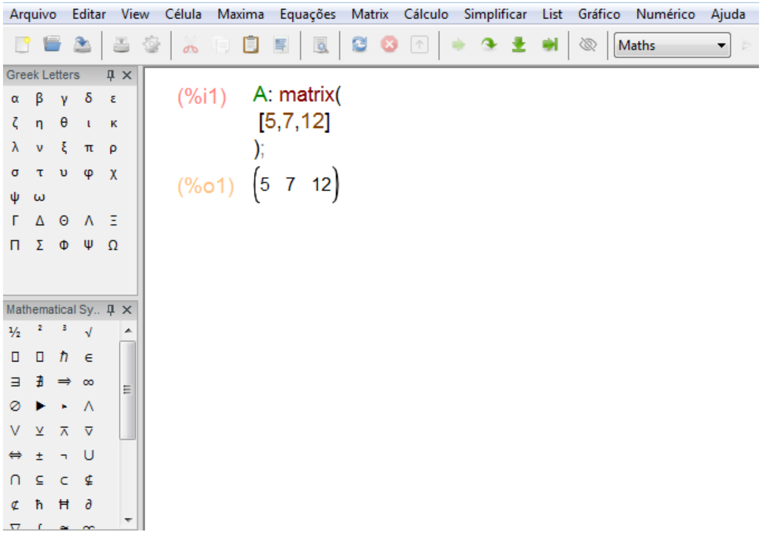


Figura 18 – Matriz A no Maxima.

Para introduzir a matriz B, basta adotar o mesmo procedimento.

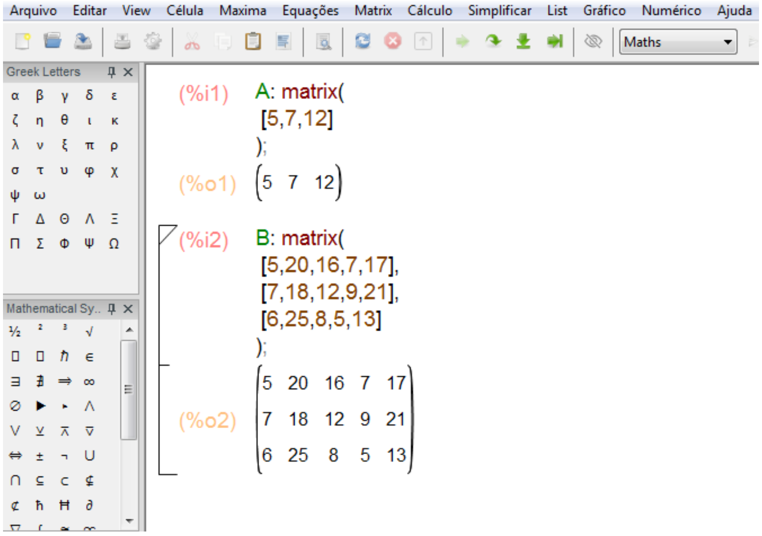


Figura 19 – Matrizes A e B no *Maxima*.

Com o comando A.B, podemos chegar facilmente ao resultado, como mostra a Figura 20.

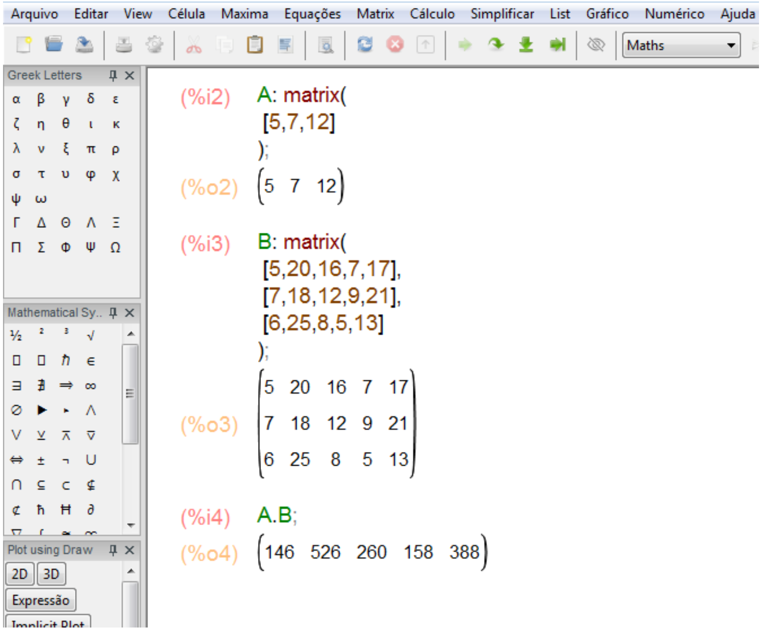


Figura 20 – Matriz A multiplicada pela matriz B no *Maxima*.

Assim, serão necessárias 146 unidades de ferro, 526 de vidro, 260 de tinta e 388 de tijolos.

Aplicação 2. *Esta aplicação é baseada no modelo econômico desenvolvido por Wassily Leontief, vencedor do prêmio Nobel de economia em 1973. Através dos seus esforços, criou os modernos métodos para analisar economias de mercado abertas. Nos modelos econômicos de Leontief, os setores que consomem sem produzir nenhum produto são denominados* *setores abertos. Economias que não possuem setores abertos são chamadas de economias fechadas, e economias com um ou mais setores abertos são denominadas economias abertas.*

Consideremos uma economia aberta simples com um setor aberto e três setores produtivos: manufatura, agricultura e serviços. Suponhamos que insumos e produtos sejam medidos em unidades monetárias ($) e que os insumos requeridos pelos setores produtivos para produzir uma unidade monetária de valor de produto estão de acordo com a Tabela 2.

Tabela 2 – *Insumo requerido para produzir $ 1*

	Manuratura	Agricultura	Serviços
Manufatura	$ 0,50	$ 0,10	$ 0,10
Agricultura	$ 0,20	$ 0,50	$ 0,30
Serviços	$ 0,10	$ 0,30	$ 0,40

Fonte: ANTON; RORRES, 2012.

A partir da Tabela 2, podemos determinar a matriz

$$C = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,5 & 0,3 \\ 0,1 & 0,3 & 0,4 \end{bmatrix},$$

denominada ***matriz de consumo*** *da economia (ou, às vezes, a* ***matriz tecnológica****).*

Suponhamos que o setor aberto tenha uma demanda no valor de $ 7.900 de produtos manufaturados, $ 3.950 de produtos agrícolas e $ 1.975 de serviços. Encontre um vetor x que atenda exatamente essa demanda.

Solução: A matriz consumo, o vetor de produção e o vetor demanda externa são:

$$C = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,5 & 0,3 \\ 0,1 & 0,3 & 0,4 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad d = \begin{bmatrix} 7.900 \\ 3.950 \\ 1.975 \end{bmatrix}.$$

Para atender essa demanda, o vetor x deve satisfazer a equação de Leontief

$$(I - C) \cdot x = d, \tag{4.1}$$

em que x, Cx e d representam quantidade produzida, demanda intermediária e demanda externa, respectivamente. Assim, o problema se reduz a resolver o sistema linear

$$\begin{bmatrix} 0,5 & -0,1 & -0,1 \\ -0,2 & 0,5 & -0,3 \\ -0,1 & -0,3 & 0,6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.900 \\ 3.950 \\ 1.975 \end{bmatrix}.$$

Vamos utilizar o comando linsolve no Maxima para resolver o sistema.

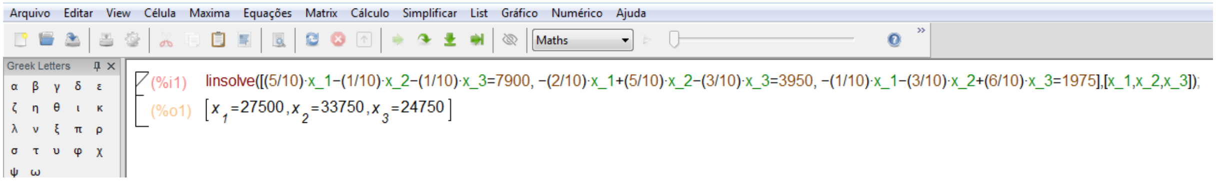


Figura 21 – Solução do sistema linear da Aplicação 2 no *Maxima*.

Isto significa que a economia consegue atender exatamente a demanda do setor aberto, produzindo um valor total de $ 27.500 de produtos manufaturados, $ 33.750 de produtos agrícolas e $ 24.750 de serviços.

Aplicação 3. *Na tabela a seguir, estão três ingredientes da dieta, junto com as quantidades de determinados nutrientes obtidos a partir de 100 gramas de cada ingrediente. Se possível, encontre uma combinação de leite desnatado, farinha de soja e soro de leite de modo a obter as quantidades diárias exatas de proteínas, carboidratos e gordura para a dieta em um dia.*

Tabela 3 – Quantidade (g) para cada 100 g de ingrediente.

Nutriente	Leite desnatado	Farinha de soja	soro de leite	Quantidades (g) da Dieta de Cambridge em Um Dia
Proteína	36	51	13	33
Carboidrato	52	34	74	45
Gordura	0	7	1,1	3

Fonte: LAY D.; LAY S.; MCDONALD, 2018.

Solução: Sejam x, y e z, as quantidades de unidades (100 gramas) de leite desnatado, farinha de soja e soro de leite, respectivamente. Um método para resolver o problema, consiste em considerar um vetor de nutrientes para cada tipo alimentar e montar o sistema.

$$\begin{cases} 36x & + & 51y & + & 13z & = & 33 \\ 52x & + & 34y & + & 74z & = & 45 \\ 0x & + & 7y & + & 1,1z & = & 3 \end{cases}$$

Usando o Maxima, obtemos o seguinte resultado:

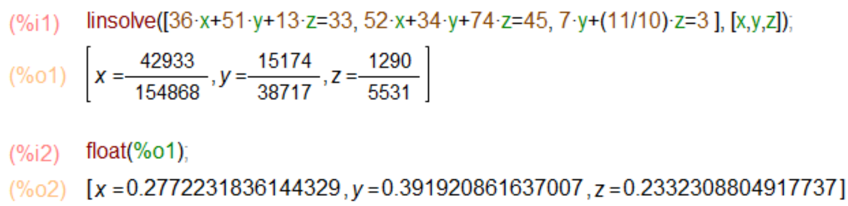
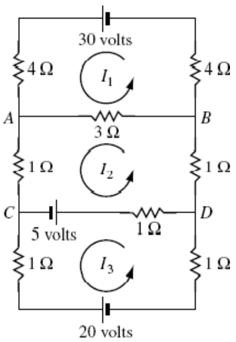


Figura 22 – Solução do sistema linear da aplicação 3 no *Maxima*.

De acordo com o resultado obtido, é necessário uma dieta de 0,277 unidade de leite desnatado, 0,392 unidade de farinha de soja e 0,233 unidade de soro de leite, com precisão de três casas decimais. Desse modo, é possível adquirir as quantidades desejadas de proteínas, carboidrato e gordura em um dia.

Aplicação 4. *Determine a corrente nos ciclos do circuito da Figura 23.*

Figura 23 – Circuito elétrico.



Fonte: LAY D.; LAY S.; MCDONALD, 2018. p. 94.

Solução: Para o ciclo 1, a corrente I_1 atravessa três resistores, e a soma das quedas de voltagem, RI, é

$$4I_1 + 4I_1 + 3I_1 = (4 + 4 + 3)I_1 = 11I_1.$$

A corrente do ciclo 2 também atravessa parte do ciclo 1 pelo ramo entre A e B. A queda RI correspondente é de $3I_2$ volts. Entretanto, o sentido da corrente para o ramo AB, no ciclo 1, é oposta à direção escolhida para a corrente no ciclo 2, de modo que a soma algébrica de todas as quedas RI para o ciclo 1 é $11I_1 - 3I_2$. Como a voltagem do ciclo 1 é de +30 volts, a lei Kirchhoff para a voltagem implica que

$$11I_1 - 3I_2 = 30.$$

A equação para o ciclo 2 é

$$-3I_1 + 6I_2 - I_3 = 5.$$

O termo $-3I_1$ aparece devido à corrente do ciclo 1 pelo ramo AB (com a queda de voltagem negativa porque o fluxo da corrente é oposto ao fluxo do ciclo 2). O termo $6I_2$ é a soma de *todas as resistências do ciclo 2, multiplicado pela corrente do ciclo. O termo* $-I_3$ *aparece devido à corrente do ciclo 3 atravessar o resistor de 1 ohm no ramo CD, no sentido oposto ao da corrente do ciclo 2. A equação do ciclo 3 é*

$$-I_2 + 3I_3 = -25.$$

Note que a bateria de 5 volts no ramo CD é contada como parte do ciclo 2 e do ciclo 3, mas é -5 *volts para o ciclo 3 por causa do sentido escolhido para a corrente nesse ciclo. A bateria de 20 volts também é negativa pelo mesmo motivo.*

As correntes dos ciclos são determinados resolvendo-se o sistema

$$\begin{cases} 11I_1 & - & 3I_2 & & & = & 30 \\ -3I_1 & + & 6I_2 & - & I_3 & = & 5 \\ & - & I_2 & + & 3I_3 & = & -25 \end{cases}$$

Para resolver esta aplicação, vamos utilizar uma outra maneira de inserir o sistema no Maxima. Na aba "equações", selecione a opção "Resolver sistema linear", conforme

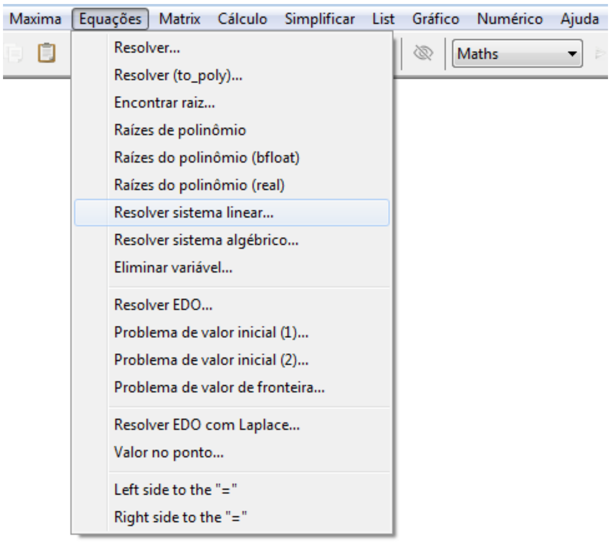


Figura 24 – Aba equações.

a Figura 24. Em seguida, aparecerá a barra de inserção das quantidades de equações do sistema, conforme a Figura 25.

Como o sistema dessa aplicação possui três equações, inserimos o valor igual a 3.

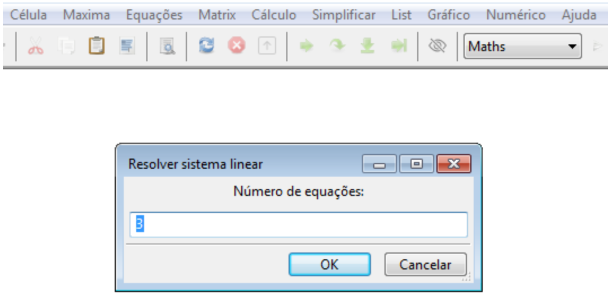


Figura 25 – Aba equações.

Após clicar no botão OK, o Maxima irá mostrar tela dada na Figura 26.

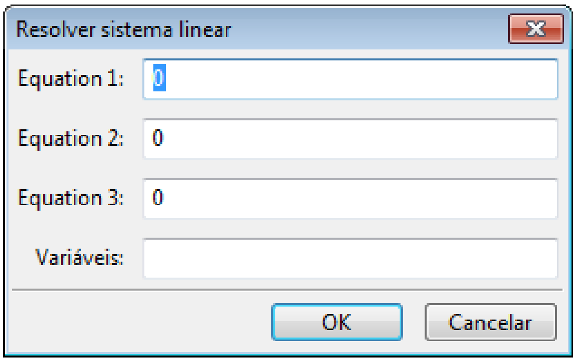


Figura 26 – Tela do *Maxima* para inserir as equações.

Nessa tela, basta inserir as equações do sistema e as variáveis correspondentes, como mostra a Figura 27.

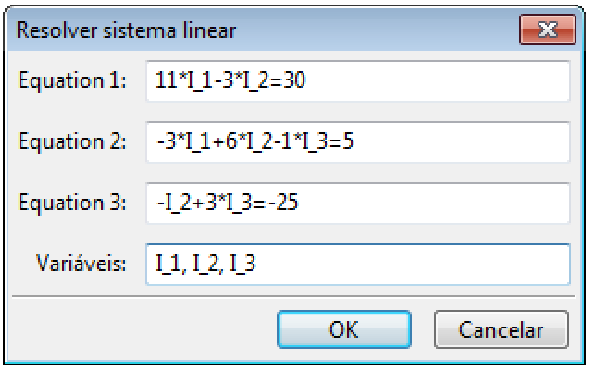


Figura 27 – Tela do *Maxima* com as equações e as variáveis do sistema.

Ao clicarmos no botão OK, a solução do sistema será exibida, conforme a Figura 28.

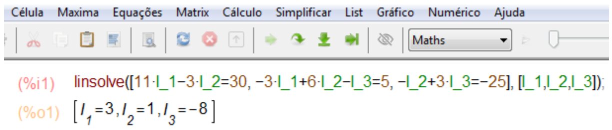


Figura 28 – Tela do *Maxima* com a solução do sistema.

A solução do sistema mostra que: $I_1 = 3$ *amps,* $I_2 = 1$ *amp e* $I_3 = -8$ *amps. A corrente* I_3 *possui valor negativo. Isto significa que o sentido real da corrente é oposto ao indicado na Figura 23.*

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A partir desse estudo foi possível perceber as inúmeras vantagens em utilizar o *Maxima* tanto nas operações matriciais, quanto na resolução de sistemas lineares. Sabe-se que, quando se trata de matrizes de ordens extremamente grandes, as operações feitas manualmente entre essas matrizes torna-se uma tarefa bastante desmotivante, tendo em vista a enorme quantidade de cálculos a serem efetuados. Além disso, é bem provável a chance de cometermos erros em alguma dessas etapas. Isto ocorre também nos cálculos de determinantes, bem como na determinação da inversa dessas matrizes. Com o *Maxima*, isso pode ser feito quase que instantaneamente e com menor chance de erro.

Em relação aos sistemas lineares, além da possibilidade de resolvê-los, podemos também representar as soluções através dos gráficos 2D e 3D na tela do *Maxima*. Estas formas de exibir as soluções, permitem compreender de forma significativa como as equações de um mesmo sistema estão correlacionadas. Por outro lado, no ensino básico, nós professores ensinamos a encontrar as soluções através dos procedimentos manuais como, por exemplo, o escalonamento. Nos casos em que verificar a consistência das soluções é algo imprescindível, podemos sugerir aos alunos que isto seja feito utilizando o *Maxima*.

Assim, através da utilização deste *software*, acredita-se na possibilidade de potencializar a qualidade do ensino, do estudo e da pesquisa, tornando a aula mais atrativa e interessante. Explorar as tecnologias para ensinar os conteúdos matemáticos, visando atenuar as dificuldades apresentadas pelos alunos, surge como uma opção favorável, pois além de proporcionar uma melhor compreensão dos conteúdos ensinados, permite aos professores apresentar os resultados de forma mais interativa.

Referências

ANTON, H.; RORRES, C. Álgebra linear com aplicações. 10. ed. Porto Alegre: Bookman, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 35.

BOLDRINI, J. L. et al. Álgebra linear, 3. ed. São paulo: Harper Row do Brasil, 1980. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 35.

BRASIL. *Base Nacional Comum curricular: homologada em 14 de Dezembro de 2018*. 2018. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/conselho-nacional-de-educacao/base-nacional-comum-curricular-bncc-etapa-ensino-medio>. Acesso em: 10 abr. 2020. Citado na página 10.

CALIOLLI, C. A.; DOMINGUES, H. H.; COSTA, R. C. Álgebra linear e aplicações. 6. ed. Atual editora, 1990. Citado na página 11.

IEZZI, G.; HAZZAN, S. Fundamentos de matemática elementar, 4: sequências, matrizes, determinantes e sistemas. 8. ed. São Paulo: Atual, 2013. Citado na página 19.

LAY, D. C.; LAY, S. R.; MCDONALD, J. J. Álgebra linear e suas aplicações, 5. ed. *Tradução de Valéria de Magalhães Iório*, Rio de Janeiro: LTC, 2018. Citado na página 35.

MAXIMA. *Maxima, um sistema de álgebra computacional. Versão 5.45.1*. 2021. Disponível em: <https://maxima.sourceforge.io/pt/index.html>. Acesso em: 15 mar. 2020. Citado na página 27.

SANTOS, R. J. Introdução à álgebra linear, 3. ed. Belo Horizonte: Imprensa universitária da UFMG, 2013. Citado na página 11.

VAZ, C. L. D. O software maxima e aplicações. Belém, PA: EditAedi, 2016. Citado na página 27.