Universidade Federal do Recôncavo da Bahia
Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas
Mestrado Profissional em Matemática

Situações desencadeadoras de aprendizagem para o ensino de trigonometria

Ivana de Carvalho Rocha

Cruz das Almas BA
2021

Ivana de Carvalho Rocha

Situações desencadeadoras de aprendizagem para o ensino de trigonometria

Dissertação de Mestrado apresentada ao Curso de Colegiado do Programa de Mestrado Profissional em Matematica em Rede Nacional da Universidade Federal do Recôncavo da Bahia como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau em Mestre em Matemática.

Orientador: Profª. Drª. Katia Silene Ferreira Lima Rocha

Cruz das Almas - BA
05 de agosto de 2021

FICHA CATALOGRÁFICA

R672s Rocha, Ivana de Carvalho.

Situações desencadeadoras de aprendizagem para o ensino de trigonometria / Ivana de Carvalho Rocha._ Cruz das Almas, Bahia, 2021.

75f.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, Centro de Ciências Exatas e Tecnológias, Mestrado Profissional em Matemática.

Orientadora: Prof. Dra. Katia Silene Ferreira Lima Rocha.

1.Matemática – Estudo e ensino – Aprendizagem. 2.Matemática – Trigonometria – Análise. I.Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, Centro de Ciências Exatas e Tecnologias. II.Título.

CDD: 513.4076

Ficha elaborada pela Biblioteca Central de Cruz das Almas - UFRB.
Responsável pela Elaboração - Antonio Marcos Sarmento das Chagas (Bibliotecário - CRB5 / 1615).
(os *dados para catalogação foram enviados pela usuária via formulário eletrônico*).

Ivana de Carvalho Rocha

Situações desencadeadoras de aprendizagem para o ensino de trigonometria

Dissertação de Mestrado defendida e aprovada em Cruz das Almas, 05 de agosto de 2021 , pela banca examinadora constituída pelos professores:

Katia Silene F. Lima Rocha

Prof.ª Dr.ª Katia Silene Ferreira Lima Rocha
Universidade Federal do Recôncavo da Bahia - UFRB
Orientadora

Andrêssa Lima de Souza

Profª. Dr.ª Andrêssa Lima de Souza
Universidade Federal do Recôncavo da Bahia - UFRB
Examinadora

Elias Santiago de Assis

Prof. Dr. Elias Santiago de Assis
Universidade Federal do Recôncavo da Bahia - UFRB
Examinador

Este trabalho é dedicado aos meus pais, pois com todas as divergências sempre me colocaram em primeiro lugar.

Agradecimentos

Nesse momento tão especial e importante de minha vida (mesmo com a pandemia), venho prestar meus agradecimentos a todos que tiveram participação durante essa jornada.

Agradeço a Deus por me ajudar a ultrapassar todos os obstáculos e realizar mais um sonho, aos meus familiares: pai, mãe, filhos, esposo, sogros pelo apoio incondicional e compreensão.

A minha familia Profmat 2018 (turma incrível), Luciana em especial, agradeço a todo apoio, principalmente nesse final de curso, onde por diversas vezes pensei em deisitir e vocês me dando o maior incentivo.

A minha orientadora Katia Silene pela paciência.

Aos professores do Progrmama Profmat: Antonio Andrande, que no inicio deu uma motivação muito gande para turma, Danilo, Anderson (coordenador exemplar) Juliana, Luis, Maria Amélia, Genilson, Adson, enfim todos os professores.

"Não podemos ensinar a outra pessoa diretamente;
só podemos facilitar sua aprendizagem."
Carl Rogers

Resumo

Este trabalho foi desenvolvido com intuito de reduzir as dificuldades dos estudantes do 2º ano do ensino médio com o assunto trigonometria, tem como objetivo principal propor situações desencadeadoras de aprendizagem (SDA), que foram planejadas segundo da teoria histórico cultural de Vigotski, o qual enfatiza que o desenvolvimento cognitivo do estudante se dá por meio da interação social, ou seja, de sua interação com outros indivíduos e com o meio. As SDA foram elaboradas com a intenção de que os estudantes resolvendo as situações propostas possam com a mediação do professor para desenvolver o pensamento teórico, construir e formalizar os conceitos trigonométricos, além de abordar um pouco dá história da trigonometria, onde os estudantes possam entender a necessidade do seu surgimento. O trabalho é de caráter qualitativo, pois investigará de que forma se dará a aprendizagem através das situações desencadeadoras. Não foi possível a aplicação das atividades por conta da pandemia do Coronavírus.

Palavras-chave: Teoria Histórico-Cultural, Situações desencadeadoras de aprendizagem; Ensino de Trigonometria.

Abstract

This work was developed in order to reduce the difficulties of 2nd year high school students with the subject of trigonometry, its main objective is to propose learning triggering situations (SDA), which were planned according to Vigotski's cultural historical theory, which emphasizes that the student's cognitive development takes place through social interaction, that is, through their interaction with other individuals and with the environment. The SDA were prepared with the intention that students, solving the proposed situations, can, with the mediation of the teacher, develop theoretical thinking, build and formalize the trigonometric concepts, in addition to addressing a little history of trigonometry, where students can understand the necessity of its emergence. The work is qualitative in nature, as it will investigate how learning will take place through triggering situations. It was not possible to implement the activities due to the Coronavirus pandemic.

Keywords: Historical-Cultural Theory, Situation triggering learning; Teaching Trigonometry.

Lista de figuras

Lista de tabelas

Lista de abreviaturas e siglas

ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
AOE	Atividade Orientada de Ensino
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
OCEM	Orientações Curriculares para o Ensino Médio
PCN	Parâmetro Curricular Nacional
PCN+	Orientações Educacionais Complementares aos PCN's
PCNEM	Parâmetro Curricular Nacional Ensino Médio
PROFMAT	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
SDA	Situação Desencadeadora de Aprendizagem
UFRB	Universidade Federal do Recôncavo da Bahia
ZDP	Zona de desenvolvimento proximal.
TIC	Tecnologias da Informação e da Comunicação
TSD	Teoria das Situações Didáticas
FPS	Funções psicológicas superiores

Lista de símbolos

α	letra grega alfa
β	letra grega beta
θ	letra grega teta
π	letra grega pi
$\cos$	cosseno
sen	seno
tg	tangente

Sumário

Introdução

Antes de começar a desenvolver esse trabalho de mestrado, seria conveniente fazer algumas perguntas: Como se pode fazer com que os estudantes vejam uma disciplina como a matemática útil e interessante? A matemática pode ser ensinada de outra maneira? A resposta a estas questões contém a chave no ensino desta disciplina que pode servir de base para aumentar a motivação dos estudantes para uma área tão importante como a já mencionada.

A matemática está presente em muitas facetas do cotidiano das pessoas, mas também deve-se destacar que é uma ciência que desenvolve o pensamento analítico e o raciocínio dos indivíduos e é aí que reside a sua importância.

Dentro do estudo da matematica, vemos a grande importância da trigonometria, apesar dela ainda ser exibida desconectada das aplicações, investindo-se muito tempo no cálculo algébrico das identidades e equações em detrimento dos aspectos importantes das funções trigonométricas e da análise de seus gráficos. Os professores devem apresentar os objetivos, competências do currículo aos estudantes de uma forma que desperte o seu interesse para que estimule suas habilidades, e eles vejam o seu valor e sejam ativos na sua aprendizagem. Logicamente, isso exige que o professor implemente estratégias, avalie-as, reflita sobre elas, altere-as se necessário e esteja muito atento ao aprendizado de seus estudantes.

A matemática é a porta e a chave para a ciência e tanto é que hoje ciências como a Física, a Química, a Economia e muitas outras usam a matemática para se desenvolverem. Também na vida cotidiana, ela desempenha um papel crucial na vida das pessoas, pelo que deve ser feito um esforço para transmitir aos estudantes para que a vejam como algo útil e interessante no seu desenvolvimento futuro.

A motivação que tive para escrever sobre esse tema foi por conta da dificuldade dos estudantes durante o processo de ensino aprendizagem do conteúdo trigonometria,na tentativa de contribuir e minimizar esse problema que busco pesquisar um método para facilitar o ensino e a aprendizagem de trigonometria. Daí surgiu o tema "Situações Desencadeadoras de Aprendizagem (SDA) para o ensino da trigonometria". Muitos estudantes consideram a matemática como uma disciplina díficil, provavelmente isso acontece por causa da maneira que esses conteúdos estão sendo abordados,por esse motivo, a presente pesquisa promove o desenvolvimento de situações desencadeadoras de aprendizagem para o ensino da matemática como base fundamental para o ensino e a aprendizagem da trigonometria.

As metodologias orientadas para a aprendizagem centram-se principalmente no processo de aprendizagem do estudante como indivíduo, com o intuito de que este se torne o agente fundamental da sua aprendizagem, cabendo ao professor a função de mediar neste processo.

Analisando alguns trabalhos na plataforma do PROFMAT [1], a utilização dessas metodologias como a aprendizagem personalizada, a aprendizagem colaborativa, a aprendizagem baseada em problemas, o uso de meios tecnológicos na aprendizagem, a avaliação com foco na aprendizagem, tem sido verificada em diversas investigações e em diferentes ambientes educacionais como mais eficazes e positivos para a aprendizagem dos estudantes.

Mas, para isso, a educação deve ser pessoal, todos nós primeiro temos que saber para onde nos leva a aprendizagem, que aplicação prática essa educação vai ter, quais as vantagens que ela significa para o nosso aprimoramento pessoal e nosso futuro e, assim, sermos capazes de nos envolver ativamente nesse processo.

A partir do momento em que nos envolvemos, a educação é nossa responsabilidade para chegar onde queremos, somos agentes da nossa educação e por isso aprender já não é algo imposto para constituir mais uma componente da nossa vida e esta é a base fundamental para a melhoria: fazermos esse aprendizado se tornar parte de nós.

Com as SDA os estudantes terão que ir a busca da resolução desses problemas e com isso a obtenção do conhecimento científico. Este trabalho tem como objetivo geral propor situações desencadeadoras de aprendizagem para os alunos adquirir os conceitos trigonométricos. Para alcançar o objetivo geral deste trabalho, adotam-se os seguintes objetivos específicos:

- Possibilitar aos estudantes resolver problemas envolvendo as relações trigonométricas;
- Possibilitar a interação e a cooperação dos estudantes em atividades investigativas;
- Apresentar as contribuições da história da matemática referentes à trigonometria.

Este trabalho está organizado da seguinte forma: No Capitulo 1 será abordado a metodologia da pesquisa, todo o percurso percorrido para elaboração do mesmo, o capítulo 2 tratará da fundamentação teorica; os construtos teóricos da teoria histórico-cultural, a teoria de Atividade de Leontiev, Atividade Orientada de Ensino (AOE), a Teoria do Ensino Desenvolvimental de Davydov. No capítulo 3 será abordado sobre o desenvolvimento histórico da trigonometria que teve início para auxiliar a Agrimensura e a Astronomia, tornando-se primeiramente autônoma e por fim transformou-se em uma parte da Análise Matemática, expressando relações entre números complexos, sem necessidade de recorrer a arcos ou ângulos, a trigonometria do triângulo retângulo, as extensões das funções trigonométricas, lei dos senos e cossenos e abordará o que alguns docmentos do Ministério da Educação traz sobre a trigonometria. O capítulo 4 trará as prospostas das situações desencadeadoras de aprendizagem para alcançar o objetivo geral da pesquisa. No capitulo 5 as considerações finais.

Para o desenvolvimento desta pesquisa, será desenhado um conjunto de atividades no capítulo 4, que constituem uma unidade didática baseada em situações desencadeadoras de

[1] https://www.profmat-sbm.org.br/dissertacoes/

atividade; aplicada aos conteúdos temáticos da trigonometria. Com a concepção destas atividades, pretende-se que o processo educativo seja eficaz e conciso, despertando o interesse dos estudantes no estudo da trigonometria, com o objetivo de atingir níveis elevados das competências da BNCC (saber, fazer e ser), partindo de uma metodologia e estratégia inovadora que permite ao estudante aprofundar os seus conhecimentos de trigonometria, e através das situações desencadeadoras de aprendizagem o estudante será conduzido a melhorar as suas competências, algumas que já possuíam e outras que carecem, abrindo um quadro de possibilidades de aplicação deste conhecimento em vários contextos.

1 METODOLOGIA DA PESQUISA

Nesta seção será abordada a metodologia que possibilitou conduzir o percurso desta pesquisa. Em seguida, trará o levantamento de trabalhos analisados, a seleção de estudos de vários autores sobre a Teoria Histórico Cultural, Atividade Orientadora de Ensino e a Teoria da Atividade.

1.1 Caracterização da pesquisa

O modelo de pesquisa utilizado para este estudo é qualitativo, uma vez que a coleta de informações será baseada na observação dos comportamentos naturais da temática em estudo, essa abordagem é favorável em situações de natureza educacional, permite que o professor analise sobre sua didática. Essa abordagem é favorável em situações de natureza educacional, permite que o professor analise sobre sua didática.

Conforme afirma Minayo (2017, p.22), “a pesquisa qualitativa descreve e analisa o coletivo e comportamentos sociais individuais, opiniões, pensamentos e percepções”, este tipo de pesquisa tenta fazer com que as pesquisas realizadas sirvam para criar teorias, desenvolver novas práticas, contemplar questões sociais que auxiliem o crescimento do ser humano.

Trata-se de um estudo de revisão de literatura, também conhecida como pesquisa bibliográfica. É uma pesquisa de caráter descritivo e com abordagem qualitativa, isto é, a partir do material levantado, busca-se um melhor entendimento do objeto estudado. A pesquisa está baseada na análise de publicações existentes acerca do ensino da trigonometria e a importância de abordar o tema a partir da ótica docente. A prospecção de contribuições teóricas que auxiliam na análise temática e suas conclusões. Neste aspecto as dissertações têm papel fundamental em razão de tratar do objeto aqui pesquisado. (LAKATOS; MARCONI, 2017).

Em relação ao desenvolvimento deste trabalho de mestrado, a abordagem qualitativa resgata o objetivo principal da experiência de sala de aula ao mostrar o que se espera que os alunos façam, quando se deparam com ideias astronómicas, conceitos matemáticos e ferramentas históricas para a construção de um conceito.

Para o desenvolvimento deste trabalho, foram elaboradas algumas atividades, de forma sequencial, levando em conta as colaborações da Teoria Histórico Cultural de Vigostski e a Teoria da Atividade de Leontiev, assim com a Atividade Orientadora de Moura.

Nas pesquisas qualitativas, é frequente que o pesquisador procure entender os fenômenos, segundo a perspectiva dos participantes da situação estudada e, a partir daí situe as suas interpretações dos fenômenos estudados. SegundoBogden e Biklen (1994), a pesquisa qualitativa possui algumas características básicas: o ambiente natural como fonte direta de dados (escola) e o pesquisador (professor) como seu principal instrumento; o material obtido nessas pesquisas é rico em descrições de pessoas, situações, acontecimentos; a preocupação com o processo é muito maior do que com o produto, ou seja, o maior interesse é o processo do desenvolvimento do estudante; O "significado" que as pessoas dão às coisas e à sua vida é foco de atenção especial pelo pesquisador. Nesses estudos há sempre uma tentativa de capturar a "perspectiva dos participantes", isto é, a maneira como os estudantes encaram as questões que estão sendo enfatizadas; A análise dos dados tende a seguir um processo indutivo.

A pesquisa que tem como objetivo geral propor situações desencadeadoras de aprendizagem para o desenvolvimento dos conceitos trigonométricos, que partiu de uma inquietação da pesquisadora em perceber a dificuldade com a aprendizagem no estudo de trigonometria. Essa pesquisa era para ser aplicada no Colégio Estadual de Barra de Pojuca na turma do 2° ano do Ensino Médio, mas com a pandemia fiquei impossibilitada de aplicar as atividades.

Por esse motivo, busca-se com este trabalho adaptar e formular situações-problema que permitam colocar em prática conceitos trigonométricos, com o intuito de verificar e também de analisar as teorias didáticas em torno da aprendizagem da trigonometria.

1.2 Trabalhos analisados

Durante a pesquisa foi feita uma busca no banco de dissertações do PROFMAT com o título "ensino de trigonometria" e foram encontrados vinte e três dissertações, das quais foram analisadas seis delas. Esse recorte foi feito levando em consideração o público-alvo, algumas possuem a mesma perspectiva (utilização do software Geogebra, Usando o método de resolução de problemas de George Polya).

Segue abaixo a tabela dos trabalhos analisados classificados por : título, autor, objetivo e ano.

Tabela 1 – Dissertações Analisadas

TÍTULO	AUTOR	OBJETIVO	ANO
Modelagem matemática no ensino de trigonometria	Leila Bernardes Borges	Desenvolver um ensino de Matemática, em particular de Trigonometria, de forma significativa e motivadora, agregando novos conceitos a partir da apresentação de situações problemas, formalizando-o mediante a percepção do aluno de que ele é aplicável e útil.	2020

continua...

TÍTULO	AUTOR	OBJETIVO	ANO
Uma porposta para o ensino de trigonometria por meio do software geogebra	Alexandre Sousa Palmerim	Analisar a relevância do software Geogebra no ensino da trigonometria para alunos da educação básica.	2019
O ensino de trigonometria no triângulo retângulo mediado pela atividade orientadora de ensino: um estudo sobre o processo de aprendizagem dos alunos da educação básica	Luan da Silva Santos	Investigar quais os principais indícios de aprendizagem, que são identificados nos alunos do 2º ano do ensino médio do curso técnico integrado em informática do IFPI/Campus São Raimundo Nonato-PI, com a implementação do ensino da trigonometria no triângulo retângulo mediado pela Atividade Orientadora de Ensino.	2019
Uma proposta de sequencia didática para o ensino de trigonometria no ensino médio	Aline Oliveira Calasans	Propor uma sequência didática que contempla conceitos trigonométricos, relacionando-os entre si e a outros conteúdos matemáticos, assim, possibilitando aos alunos visualizarem, reconhecerem e dialogarem com o objeto de estudo.	2019
O ensino de trigonometria no ensino médio: uma abordagem com a resolução de problemas	Gilmar Steigleder Paschoal	Apresentar um estudo sobre o ensino da trigonometria, no qual é utilizado o método da resolução de problemas contextualizados na determinação de distâncias que apresentem difícil acesso para serem medidas	2018
Trigonometria racional: uma nova abordagem para o ensino da trigonometria	Luiz José da Silva	Fazer uma análise critica de uma nova abordagem para o ensino de trigonometria, chamada trigonometria racional, visto que esse é um tópico muito importante no ensino médio	2013

Fonte: Autora

Observando a tabela acima, vemos que os trabalhos analisados o conceito de razão está presente em todo o processo educacional da trigonometria e, portanto, é mais adequado ver o estudo trigonométrico como um conjunto de conhecimentos que satisfaz contextos, problemas e circunstâncias particulares e não apenas a estruturas matemáticas que dão coerência à sua apresentação como um objeto matemático formal.

Observando a tabela acima, temos que os trabalhos analisados refere-se a: Borges (2020), Palmerim (2008), Santos (2019), Calasans (2019), Paschoal (2018), Silva (2013).

Borges (2020) tem uma proposta de buscar desenvolver um ensino do o conceito de seno e cosseno, enfatizando a transição do triângulo retângulo à circunferência trigonométrica, de forma significativa, através da Modelagem Matemática como estratégia de ensino, já Palmerim (2008), traz uma proposta de inserir o software Geogebra como um suporte para o professor no ensino de trigonometria, Santos (2019) trabalhou os conceitos básicos da trigonometria no triângulo retângulo levando em consideração a necessidade humana de resolver problemas que envolvem cálculos de distâncias que são impossíveis de serem calculadas diretamente. Calasans (2019)resolveu fazer essa sequência após perceber que os estudantes apresentavam bastantes dificuldades quando os conteúdos eram mediados em aulas tradicionais. Após a aplicação da sequência didática a professora percebeu a participação dos estudantes com mais motivação, engajando-se com a aprendizagem de Matemática.

O professor Paschoal (2018) tem como objetivo apresentar um estudo sobre o ensino da trigonometria, usando o método de resolução de problemas de George Polya. E os resultados obtidos evidenciaram que o ensino de trigonometria, tendo como base aplicações de problemas pertinentes à realidade do contexto social do estudante, pode torna-se um aliado de grande valia para a aprendizagem, vislumbra os conceitos, facilitando a absorção do conhecimento. O professor pesquisador Silva (2013) traz uma proposta para trabalhar com trigonometria racional, pois essa nova prática minimiza a necessidade de extração de raízes quadradas e outras operações transcendentais, substituindo-as apenas para operações racionais.

Em todos os trabalhos aplicados os professores perceberam que houve um aumento no interesse, uma maior participação dos discentes, melhor desempenho dos estudantes no processo de ensino-aprendizagem, pois permite o desenvolvimento do conhecimento cientificamente elaborado de forma lúdica e atrativa.

As situações desencadeadoras que serão apresentadas no capítulo 4 foram elaboradas com a intenção de que os estudantes resolvendo as situações propostas possam com a mediação do professor desenvolver o pensamento teórico, construir e formalizar os conceitos trigonométricos, além de abordar um pouca da história da trigonometria, onde os estudantes possam entender a necessidade do seu surgimento.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

O trabalho tem como objetivo propor situações desencadeadoras de aprendizagem para o ensino da trigonometria no ensino médio, portanto será fundamentado pelos documentos normativos da educação e pela Teoria Histórico-cultural. Pois, para poder ensinar Matemática, o professor deve ter sólidos conhecimentos matemáticos da disciplina que leciona, conhecimentos que lhe permitam ajudar o estudante a compreender a matéria para além do suporte didático disponível. Um professor que não tem um bom conhecimento da matéria que leciona terá menos probabilidade de ajudar os estudantes a aprender um determinado conceito. Ora, o fato de o professor ter alto conhecimento da matéria influencia positivamente no ensino de Matemática, mas não basta ensinar, por isso é muito importante que o professor tenha um conhecimento adequado não só do conteúdo matemático, mas também dos procedimentos, das representações de ditos conteúdos e da relação entre conhecimentos, procedimentos e representações.

Para estabelecer o referencial teórico em que se baseia este trabalho, é necessário partir da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) , uma vez que estabelece os componentes básicos para articular o sistema educacional em nosso país. Em primeiro lugar, vale destacar o currículo e os elementos básicos que constituem a educação. A BNCC (BRASIL, 2018) diz que a Matemática constitui uma área do conhecimento que para alguns é complexa, mas quando é trabalhada de forma contextualizada e interdisciplinar apresenta-se como um fascinante campo curricular, pensar em democratizar sua aprendizagem no ensino fundamental.

Uma situação de aprendizagem implica a realização de um conjunto de atividades articuladas que os alunos irão realizar para atingir determinados fins ou objetivos educacionais em um determinado período e em um determinado contexto, que envolve diferentes tipos de interações:

- Com os membros do grupo e pessoas externas.
- Com informações obtidas em várias fontes: bibliografia, entrevistas, observações, vídeos, etc.
- Em vários tipos de espaços ou ambientes: sala de aula, laboratório, oficina, empresas, instituições, agências, canteiros de obras, etc.

A concepção moderna de ensino pede ao professor que provoque nos estudantes as adaptações desejadas por meio da escolha correta dos problemas que propõe. A situação desencadeadora de aprendizagem (SDA) parte de um sistema elaborado para que os estudantes, por meio de suas atuações e operações, se apropriem de conceitos fundamentais. Situação desencadeadora de aprendizagem tem por objetivo propiciar a necessidade de apropriação do conceito pelo estudante, de modo que suas ações sejam realizadas em busca da solução de um problema que o mobilize para a atividade de aprendizagem - a apropriação dos conhecimentos (MOURA, 2010).

Partindo do pressuposto de que os processos de desenvolvimento humano e de construção do conhecimento são mais complexos, diversos e específicos para cada sujeito ao nível da realidade; No entanto, as teorias fornecem ângulos de observação que é permitido estudar detalhadamente alguns aspectos do fenômeno. Para isso, deve-se considerar também os ambientes familiares e sociais que desempenham um papel preponderante e diversificado no desenvolvimento dos sujeitos; de forma que a partir dessas considerações o professor intervenha nos processos de ensino-aprendizagem mais adequados para seus estudantes, que o professor compreenda a relação entre o desenvolvimento do estudante e a aprendizagem escolar, de acordo com o contexto em que se desenvolve, para analisar a partir desses processos os fundamentos de sua prática docente, bem como a aplicação dessas teorias, no mesmo, com a tendência à sua inovação.

A pesquisa desenvolvida utilizou-se de referenciais teóricos propostos por Vigotski (1984) e alguns de seus seguidores, entre eles pode-se destacar: Leontiev (1978) e Luria (1986) na teoria da atividade, Davydov (1988) na teoria do Ensino Desenvolvimental, bem como obras sobre Educação Matemática, onde se destaca Moura (2010) com a Atividade Orientadora de Ensino.

Ao longo do texto, apresentam-se alguns conceitos da Teoria Histórica-Cultural, onde o estudante é considerada como um processo dialético complexo caracterizado por inúmeras transformações qualitativas, metamorfoses, embricamento de fatores internos e externos, e processos adaptativos que superam os impedimentos que o indivíduo encontra, e destaca a importância de uma fundamentação teórica para a prática pedagógica do professor que ensina Matemática e apresenta como contribuições propostas de atividades em sala de aula.

2.1 Teoria Histórico Cultural

De várias posições, diferentes autores reconheceram a história como um meio de compreender as origens e a evolução do conhecimento matemático. O contexto de aprendizagem da matemática é o local não apenas físico, mas acima de tudo sociocultural; onde sentido e significado são construídos para as atividades com os respectivos conteúdos e conceitos matemáticos. Assim, estabelecem-se conexões com o cotidiano dos estudantes e seus familiares, com as demais atividades da instituição de ensino e, em particular, com as demais ciências e com as próprias demais áreas da matemática.

São de grande importância às contribuições feitas por Lev Semenovich Vigotski e outros autores que se apoiam e acreditam na teoria do desenvolvimento da inteligência e abrem espaço para ampliação da mesma para, assim, podermos compreender e intervir no processo para não só transferir conhecimentos aos educandos, mas criar possibilidades para que os mesmos construam por si sós. (ROLKOUSHI, 2018)

A postura ponderada frente às diferenças individuais faz-se necessária do ponto de vista de compreender que o sujeito que aprende responde de forma diferenciada e em tempos diferenciados a cada situação de aprendizagem. Sendo assim, a relação afetiva nesta proposta de educação é fator essencial na busca de aprender a aprender. Pois o afeto é considerado como questão básica para o crescimento do potencial cognitivo.(SANTOS, 2018)

Toda esta pesquisa se baseia em teóricos que mostra como a qualidade da relação do professor com o estudante pode ser determinante para o êxito ou fracasso do seu aprendizado. Portanto, o que é proposto é que o professor busque, cada vez mais, ampliar seus conhecimentos sobre a maneira como se dá a aprendizagem no sujeito e possa torná-la significativa para o estudante. Isto o deixará mais envolvido com o seu próprio desenvolvimento intelectual. Ele perceberá que esta nova maneira de aprender o favorecerá na obtenção de sucesso no trabalho, nas relações e no contato em que vive.

A teoria histórico-cultural tem suas origens com o pesquisador e psicólogo russo Lev Semenovich Vigotski (1896-1934). Para a construção dessa teoria Vigotski teve importantes seguidores, dos quais destacaram-se Alexei N. Leontiev (1903-1979) e Alexander Romanovich Luria (1902-1977). Após o falecimento de Vigotski, Leontiev deu prosseguimento à teoria histórico cultural com a teoria da Atividade, na psicologia em específico, já na área didática, evidencia o psicólogo russo Vasili Vasilievich Davidov (1930-1998) com a teoria do Ensino Desenvolvimental.

O legado de Vigotski afirma que, nos processos humanos, seu desenvolvimento e a maneira como são realizados devem ser estudados analiticamente. Da mesma forma, é essencial compreender os fenômenos que os influenciaram, as mudanças qualitativas e os vínculos de mediação. Essa abordagem tem como ênfase o desenvolvimento da pessoa em si e com as outras pessoas, no contexto da atividade social.

Segundo Vigotski, a Teoria Histórico-Cultural tem como objetivo: "...caracterizar os aspectos tipicamente humanos do comportamento e elaborar hipóteses de como essas características se formaram ao longo da história humana e de como se desenvolvem durante a vida de um indivíduo." (VIGOTSKI, 1998, p.25).

Vigotski destacou a estreita relação entre pensamento e linguagem, entre atividade mental e palavra. A principal função dos signos é a comunicação; permitem a mediação interpessoal e o relacionamento social. A fala e o pensamento verbal, como produtos históricos do homem, têm uma função essencial na estruturação da mente e da consciência.

Para isso, o estudo de Vigotski foi dedicado à origem social das funções psicológicas superiores (FPS), que são as funções que qualificam e simbolizam o consciente do indivíduo, essas funções não são congênitas, de origem biológica, elas são produzidas nas relações do sujeito em seu contexto sócio histórico e se expandem através de internalização das formas culturais e comportamentais. Para Vigotsky, na internalização

> um processo interpessoal é transformado em num processo intrapessoal. Todas as

> funções no desenvolvimento da criança aparecem duas vezes: primeiro, no nível social, e, depois, no nível individual; primeiro entre as pessoas (interpsicológica), e, depois, no interior da criança (intrapsicológica). (VIGOTSKI, 1998, p.75)

Ou seja, o indivíduo é formado por tudo que já viveu e já experimentou, por experiência, compreende-se tudo o que o sujeito fez e que lhe provocou alguma modificação em seu comportamento com o meio social, o significado de cada experiência passada é individual e é estabelecido pela cultura ao qual se insere, para isso é sempre necessário uma mediação, que é a base da Teoria Histórico Cultural. Segundo Vigotski(2009) a mediação é um método de interferência de um elemento intermediário numa relação, ou seja, é o método que descreve a relação do indivíduo com o mundo e com outros indivíduos, essa mediação precisa de dois elementos para ser realizada são eles: o instrumento e o signo (também chamado de instrumento psicológico), o instrumento é um componente externo de ação entre o individuo e o objeto de trabalho, que sofrem modificações da natureza e modifica o individuo.

O outro elemento de mediação que Vigotski (2009) traz como tendo um papel considerável no movimento de desenvolvimento do pensamento são os signos, o uso dos signos separa os seres humanos dos animais, já que apenas com o uso desses signos é possível compartilhar e agregar conhecimentos. Verifique a relação presente entre signos e instrumentos que Vigotski destaca:

> a invenção e o uso de signos auxiliares para solucionar um dado problema psicológico (lembrar, comparar as coisas, relatar, escolher, etc.) é análoga à invenção e uso de instrumentos, só que agora no campo psicológico. O signo age como um instrumento de atividade psicológica de maneira análoga ao papel do um instrumento no trabalho. (VIGOTSKI, 2009, p. 59-60)

Diante disso, o autor realiza uma analise da ligação entre instrumento e signo, apresentando como função básica a mediação das atividades psicológicas, o signo realiza uma função singular nesse processo, visto que é por meio dele que o individuo pode conter sua atividade psicológica e traduzir as linguagens existentes ao seu redor, posteriormente, internalizá-las.

A abordagem histórico-cultural se propõe a superar aquelas tendências psicológicas tradicionais que direcionaram seu interesse, sobretudo, para a esfera cognitiva do homem, e o traduz para o desenvolvimento integral da personalidade. Conforme acontece o processo de desenvolvimento do pensamento, as relações mediadas prevalecem em comparação as relações diretas. Vigotski explica que:

> ...) o uso de meios artificiais – a transição para a atividade mediada – muda, fundamentalmente, todas as operações psicológicas, assim como o uso de instrumentos amplia de forma ilimitada a gama de atividades em cujo interior as novas funções psicológicas podem operar. Nesse contexto, podemos usar o termo função psicológica superior, ou comportamento superior com referência à combinação entre o instrumento e o signo na atividade psicológica. (VIGOTSKI, 2009, p. 73)

Dessa forma, as ações de medição através de instrumentos e sujeitos, listadas de intencionalidade e planejamento, são essenciais para a evolução das funções psicológicas, e transpassa a a evolução biológica.

Leontiev (1978) ressalta que o método de formação psicológica, a partir das atividades, são mediadas através de instrumentos. É um processo interno de mudança nas representações mentais dos conteúdos tratados. Assim, a chave para a aprendizagem escolar está na atividade mental construtiva (intrapsicológica) do conhecimento dos estudantes. Mas esta dinâmica está inserida na atividade conjunta desenvolvida por professores e estudantes no contexto da sala de aula em que interagem e nos processos intrapsicológicos (comunicativos e linguísticos) associados ao apoio à atividade mental do mesmo. O autor complementa que

> O instrumento mediatiza a atividade que liga ao homem não somente com o mundo das coisas, mas também com outros homens. Graças a ele, sua atividade absorve a experiência da humanidade. Daqui deriva que os processos psíquicos do homem (suas 'funções psíquicas superiores') adquirem uma estrutura que tem como ligação inevitável, meios e procedimentos que se há formado no plano histórico-social, que lhe são transmitidos pelos homens que o rodeiam no processo de colaboração, de comunicação com estes. Mas é impossível transmitir os meios, o procedimento para cumprir um ou outro processo, mais que em forma exterior, em forma de ação ou de linguagem externa. Em outras palavras, os processos psicológicos superiores específicos do homem podem nascer unicamente na interação do homem com o homem, isto é, como interpsicológico, e só depois começam a ser efetuados independentemente pelo indivíduo; ademais, alguns destes processos perdem logo sua forma exterior inicial e se transformam em processos intrapsicológicos. (LEONTIEV, 1978, p. 78)

Dessa forma compreende que o desenvolvimento das FPS são processos externos que fortalecem a formação interna do sujeito. Esse movimento dialético de inter-relações entre o homem e o mundo causa transformações que redefinem a subjetividade humana. Para Vigotski (2009), tanto o comando do comportamento como o da natureza ocasionam mudanças nas FPS, ou seja, o sujeito altera a natureza e essa alteração muda a sua própria natureza cognitiva. É esse movimento dialético intencional, entre o homem e o instrumento, que proporciona uma transformação, levando os estudantes a executarem a atividade e, assim, formarem seu pensamento matemático a partir do uso de instrumentos.

Para Vigotski, a aprendizagem é uma atividade social e não apenas um processo de realização individual, como até então se argumentava: uma atividade de produção e reprodução do conhecimento, por meio da qual a criança assimila os modos sociais de ação e interação.

Este potencial de aprendizagem (inteligência potencial) está presente nos estudantes que, com a ajuda de seus professores e de algumas ferramentas externas, como as novas tecnologias, terão a possibilidade de construir ferramentas internas para aprender, assim, a Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP) define funções que ainda são eles. não amadureceram, mas estão em processo.

Como o conhecimento e a experiência de outras pessoas possibilitam a aprendizagem do indivíduo; então, devemos garantir que as interações com eles sejam ricas e extensas. A zona de desenvolvimento proximal, portanto, é determinada socialmente. Aprendemos com a ajuda de outras pessoas, aprendemos no campo da interação social e essa interação social como possibilidade de aprendizagem é o ZDP.

A zona de desenvolvimento proximal, segundo Vigotski (1998 p.98), "define aquelas funções que ainda não amadureceram, mas que estão em processo de maturação, funções que amadurecerão, mas que estão presentes em estado embrionário". Constituindo a condição de desenvolvimento mental do estudante que só poderá ser verificado se forem declarados dois níveis de desenvolvimento, o real e o potencial, este último também chamado de desenvolvimento proximal, motiva o professor a agir sempre em função de ações em parceria, pela assistência de outra pessoa mais experiente, capaz de propor desafios, questionar, apresentar modelos, fornecer pistas e indicar soluções possíveis (VIGOTSKI, 1991).

Não se trata de o professor diminuir sua ação à instrução de zona de desenvolvimento proximal. O aspecto teórico em alteração faz investir diante de nós cobranças para o exercício da ação pedagógica, tendo a ZDP como meio e funcionando como começo educativo, o que para (VIGOTSKI, 2001), o bom aprendizado é aquele que se antecipa ao desenvolvimento.

A partir destes modelos de ensino integrados, é possível ver o professor a tomar decisões, ao mesmo tempo que reflete na ação, sobre como abordar as várias interações que tem de gerir, organizando-se por saber motivar os seus estudantes, tendo em conta não só os recursos informáticos de que dispõe mas as suas diferenças individuais, sem que isso signifique transformar a sua tarefa educativa numa atividade meramente operacional ou que os recursos tecnológicos assumam o papel que lhe corresponde, sobretudo se não tiver o apoio total das Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC).

Por isso, não é apenas de competência da escola a tarefa de desprender esforços para que os estudantes desenvolvam as funções psicológicas superiores, dentre outras o pensamento conceitual. Entretanto, não se pode perder de vista que a escola pode fazer parte de um projeto mais amplo da sociedade que atende determinados interesses políticos e éticos que não são aqueles concebidos pelos professores preocupados com a aprendizagem matemática como uma das conquistas sociais para a formação humana. O meio constitui-se assim num elemento fundamental dentro da noção de situação didática, visto que é constituído por todos aqueles objetos com os quais o estudante está familiarizado e que podem ser utilizados com segurança e sem questionamentos, bem como por todos aqueles apoios que lhes são fornecidos para você, a fim de atingir seu objetivo desejado. É muito importante observar que o professor está em tal ambiente. Este fato será de grande importância ao se analisar seu papel na atividade de reprodução de situações didáticas. Muitas são as definições de aprendizagem, uma análise dessas muitas definições de diversos autores poderá levar a seguinte conclusão: "a aprendizagem é uma modificação sistemática do comportamento ou da conduta, pelo exercício ou repetição, em função de condições ambientais e condições orgânicas". (CAMPOS, 1986, p.33)

Partindo do pressuposto que ZDP é a zona que está entre o desenvolvimento real, ou seja, o que o estudante já sabe e o desenvolvimento potencial, o que se pretende que o estudante aprenda e a SDA são atividades elaboradas de forma que os estudantes, por meio de suas ações se apropriem de conceitos. Percebe-se que a SDA desempenhará o papel de ZDP, já que será elaborada de forma intencional para que o estudante aumente a sua habilidade de aprendizagem. A origem da ZDP acompanha um processo, e tem uma importância em sua completude no seguimento processual, não no final.

2.1.1 Teoria da atividade e Teoria do Ensino Desenvolvimental

Esta é apenas uma das variáveis que afetam o processo de ensino-aprendizagem, que iremos rever no seio das teorias das várias escolas de psicologia, com esta análise pretendemos iniciar um caminho rumo a modelos integrativos capazes de harmonizar o maior número de princípios em cada um deles evitando turbulências produzidas por sua aplicação separadamente.

Ao revisar as teorias das várias escolas de psicologia, encontramos muitas diferenças entre elas, para a abordagem técnica seguimos a teoria do ensino desenvolvimental, onde o estudante é ativo em relação aos arranjos contingentes do professor-programador e a atividade é condicionada pelas características definidas pelo programa de estudos.

Na abordagem heurística, destacam-se Vigotski e Leontiev, para os quais são importantes o desenvolvimento de habilidades de aprendizagem, a atuação do professor como facilitador de ambientes de organização de esquemas e aprendizagem significativa, e o estudante como processador ativo de informações.

As reformulações contemporâneas da Teoria da Atividade têm sido adotadas em diferentes investigações psicoeducacionais, tanto para a compreensão das práticas de intervenção na aprendizagem na escola, quanto para a construção do conhecimento e competência profissional dos agentes socioeducativos.

A atividade, segundo Leontiev, citado por Nuñez (2009, p.64), é "o modo, especificamente humano, pelo qual o homem se relaciona com o mundo. É um processo no qual se reproduz e se transforma, de modo criativo, a natureza, a sociedade e o próprio sujeito". Esse conceito de aprendizagem coloca o sujeito ativo no centro das atenções em sua interação com outros sujeitos, com suas crenças e com o objeto, elementos que por sua vez permitem as transformações dentro dele, ou seja, suas modificações psíquicas e físicas. Moretti enfatiza que:

> o professor, a partir da necessidade de ensinar a seus alunos um determinado conceito, planejará um conjunto específico de ações, que permitam a ele direcionar a sua atividade – cujo sentido é dado pelo motivo de propiciar condições de aprendizagem a seus alunos – ao produto no qual o motivo se objetiva, e escolherá, dentro de suas condições objetivas de trabalho, quais os instrumentos que utilizará. Poderá lançar mão de instrumentos como a lousa, situações-problema, livros, filmes, etc. Escolhido o instrumento, o professor definirá as operações necessárias para a utilização (MORETTI, 2007, p. 87).

Daí a causa que estimula uma atividade, pois esta associa uma necessidade a um objeto. Desse ponto de vista o método de formação como uma atividade incentiva entender que cada indivíduo dá sentidos diferentes – sentidos pessoais. O professor, em sua atividade de ensino, precisa apropriar-se dos movimentos histórico-sociais que constituem sua profissão. Por meio da relação com o outro vai apreendendo o significado cultural de seu trabalho, dando sentido a sua atividade. Vendo as definições anteriores, pode-se dizer que por meio da motivação, é possível mudar a inação de uma determinada parte dos estudantes, que estão em uma aula, para o estudo da matemática, estimulando e despertando o interesse por ela.

Para atingir o sentido da atividade do professor é preciso entender que o sentido está ligado ao motivo, assim, para investigar um sentido pessoal é necessário analisar seu motivo. (ASBAHR, 2005).

A atividade, aqui destacada, pode ser definida a partir da Teoria da Atividade de Leontiev (1987), quando enuncia:

> por atividade, designamos os processos psicologicamente caracterizados por aquilo a que o processo, como um todo, se dirige (seu objeto), coincidindo sempre com o objeto que estimula o sujeito a executar esta atividade, isto é, o motivo. (LEONTIEV, 1987, p. 68)

De forma particular, a perspectiva associada à orientação como serviço educativo, permanece ligada ao assessoramento, aconselhamento, avaliação que visa desenvolver nos estudantes as competências para a tomada de decisões relacionadas com a utilização dos recursos necessários à gestão da aprendizagem, seleção profissional, base social relacionamentos para a vida. A Atividade Orientadora de Ensino é um método que envolve o professor e o estudante, não o objeto, e se constitui como unidade de ensino (professor), e a aprendizagem (estudante). O professor na atividade de ensino é o mediador entre o estudante e os conhecimentos de um conteúdo. Tem como função organizar, orientar o trajeto dos assuntos, objetivando à aquisição constante pelos estudantes e o desenvolvimento de suas capacidades e habilidades. É um processo em que o professor faz a investigação e o estudante através de suas açoes responde o proposto adquirido assim conhecimento. A função do professor é estimular o estudante ao desenvolvimento de seu pensamento. A figura 1 apresenta uma ilustração desse processo.(MOURA et al., 2010)

Segundo Moura (2010) a AOE, está fundamentada na Teoria Histórico Cultural e na Teoria da Atividade, são indicadores de um modo de ordenação de ensino para o qual a escola cumpra o seu papel principal que é proporcionar apropriação dos conhecimentos teóricos pelos alunos.

A atividade deve ser movida por uma intencionalidade na busca por satisfazer uma necessidade. Para entender melhor, tem-se aqui um exemplo clássico de Leontiev (1989): um estudante descobre que o livro que deveria ler é desnecessário, assim “o estudante poderá imediatamente pôr o livro de lado, poderá continuar sua leitura ou talvez desistir da leitura com relutância, com pena” (Leontiev 1989 p. 68).

Figura 1 – Relação entre Atividade de Ensino e atividade de aprendizagem

Fonte:(MOURA et al., 2010, p.98)

Para Libâneo (2004) a "atividade chega para completar uma necessidade, que leva um motivo orientado a um objeto". O processo vai de necessidades a objetos e finaliza quando a necessidade é realizada. Já (ASBAHR, 2005, p.110) complementa observando que "necessidade, objeto e motivo são componentes estruturais da atividade". Além desses, não pode realizar atividade senão pelas ações. Da mesma maneira que a atividade associa-se com o motivo as ações associam-se com os objetivos.

É dessa forma que as situações desencadeadoras serão abordadas com a intencionalidade que os estudantes, através de suas ações (tentar resolver as situações propostas) cheguem a um objeto (desenvolvimento dos conceitos trigonométricos). A ação é realizada por um conjunto de operações, estabelecido pelas circunstâncias presentes para tal. As operações formam os procedimentos, métodos, técnicas, estratégias para realizar a ação e para a transformação do objeto em produto. As circunstâncias para se executar uma operação podem alterar, sem o dano de se transformar o objetivo da ação. Por exemplo, ao estudar o tema trigonometria há a possibilidade de fazê-lo por meio da leitura, ou por atividade prática, ou em discussões em grupo. As operações vão depender das situações do momento e dos materiais que estão a disposição. Os instrumentos são mediadores entre o sujeito da atividade e o objeto.

Em um plano escolar, a atividade do professor é ensinar. O conteúdo é o seu objeto e o motivo da atividade, a sua intencionalidade é a aprendizagem do estudante e para que a aprendizagem aconteça é necessário que o estudante tenha a relevância de assimilação do conteúdo que dê origem a atividade de estudos. A atividade é concebida como estruturas e sistemas que produzem eventos a partir de mediações. A ação, por sua vez, é a unidade de análise para construir um objeto específico por meio de operações mentais. A atividade relaciona o sujeito com um objeto, um objetivo e as ferramentas do pensamento.

As ações do professor devem ser orientadas pela importância de ensinar, provocando as finalidades que conduzem a satisfação das necessidades. Com a intenção (motivo-fim) de tornar o aprendizado pelos estudantes do conteúdo a ser ensinado. As ações tanto do professor e principalmente dos estudantes é alcançar este motivo-fim. No plano, as finalidades são intituladas de objetivos. Os objetivos são as finalidades que orientam as ações, mas não pode esquecer o objeto e o produto que se deseja. O objeto aqui é o assunto e o produto da aprendizagem. O assunto nunca será o mesmo após da atividade, ele será melhorado e modificado dentro da consciência do estudante. É necessário levar em conta os aspectos que se relacionam com a atividade como categoria psicológica, a partir da qual o homem é considerado dentro de um sistema permanente de relações com o mundo e com os outros indivíduos, cuja base é sua própria atividade dentro dele sistema, com o qual interage constantemente.

Davidov (1986) inclui o desejo como um outro elemento a lista de Leontiev para que um individuo possa entrar em atividade. O autor não concorda que as ações são interligadas apenas a necessidades e motivos. As ações, como formações integrais, podem ser interligadas apenas com necessidades baseadas em desejos "e as ações ajudam na realização de certas tarefas a partir dos motivos"(DAVIDOV, 1986 apud LIBÂNEO, 2004).

Libâneo (2004) indica a importância da elevação do pensamento empírico para o pensamento teórico e isso deve ser ascendido pela escola, pelos professores para a formação dos estudantes. O autor ressalta a mudança que deve existir sobre a maneira tradicional de um ensino reduzido apenas a repetição de métodos ou na passagem de estratégias que favorece a memorização. Para corrigir a falha do processo ensino-aprendizagem tradicional é recomendado, para a formação do estudante, o desenvolvimento do pensamento teórico. Segundo Libâneo ,

> as pesquisas de Davydov tiveram origem na análise crítica da organização do ensino assentada na concepção tradicional de aprendizagem, que leva à formação do pensamento empírico, descritivo e classificatório. Segundo ele [Davydov], conhecimento que se adquire por métodos transmissivos e de memorização não se converte em ferramenta para lidar com a diversidade de fenômenos e situações que ocorrem na vida prática. Um ensino mais vivo e eficaz para a formação da personalidade deve basear-se no desenvolvimento do pensamento teórico. Trata-se de um processo pelo qual se revela a essência e o desenvolvimento dos objetos de conhecimento e, com isso, a aquisição de métodos e estratégias cognitivas gerais de cada ciência, em função de analisar e resolver problemas e situações concretas da vida prática. O pensamento teórico se forma pelo domínio dos procedimentos lógicos do pensamento, que, pelo seu caráter generalizador,

> permite sua aplicação em vários âmbitos da aprendizagem. Libâneo (2004, p. 16),

Leontiev, com a Teoria da Atividade apresenta de forma estrutural como na atividade o objeto se torna consciente, porém a atividade tem particularidades funcionais e psicológicas gerais, atuando como modelo de processo em qualquer atividade humana. Para o Ensino, Davidov é mais específico com o seu Ensino Desenvolvimental, nele as atividades e ações em benefício do processo Ensino-aprendizagem, exibindo a direção a ser seguido para um ensino intencional e uma aprendizagem consciente e completa.

O ensino de Matemática precisa ser repensado, com a preparação de novas e múltiplas soluções que permitam a melhor assimilação e incremento do conhecimento científico plausível a partir da disciplina escolar, tendo como alvo básico o desenvolvimento de uma educação humanizadora e o exercício pleno da cidadania. Além de indicar ao professor uma sugestão de metodologia em seus aspectos, aperfeiçoando o seu conhecimento. Pautando-se, também, das suposições da Atividade Orientadora de Ensino (AOE) proposta por (MOURA, 1996) seguindo da Teoria da Atividade, em que o professor e estudante têm papéis determinados, com o professor fica nas mãos a organização e o estudante a finalidade de conhecer, a cultura histórica da humanidade na forma de conteúdos escolares.Na perspectiva Histórico-Cultural, os indivíduos são produtos da história e sua relação com mundo.

Na concepção de um ensino desenvolvimentista a partir da abordagem histórico-cultural, pode-se compreender o papel de cada um dos sujeitos que participam da sala de aula, considerando que o psiquismo humano tem um caráter ativo na regulação do desempenho, sendo determinado historicamente e socialmente em sua origem e desenvolvimento na medida em que se forma no processo de atividade e comunicação que o sujeito estabelece com o meio histórico-social em que vive. Este processo adquire a condição de ser uma atividade que contribui para a concretização dos objetivos e melhoria da educação e do desenvolvimento humano, uma vez que deve ser desenvolvido, tanto no contexto educacional, como na comunidade e nos meios produtivos. Porém, nos últimos anos, as possibilidades de orientação educacional são valorizadas, para promover a inclusão, a equidade social, a igualdade social, entre os sexos, promover a cidadania ativa, estimular e apoiar a participação das pessoas na educação e na sua formação de forma realista e significativa.

Desse modo, em relação ao diálogo, eles estabelecem mudanças sociais que transformam, fazendo com que se apropriem de novos conceitos. Ao mesmo tempo, na educação, há uma relação de diálogo entre professor e estudante, na qual a síntese é fazer com que os estudantes desenvolvam seu pensamento teórico. Através do desenvolvimento do pensamento teórico, os estudantes adquirem a percepção do objeto em sua totalidade, possibilitando a formação de conceitos e significados em atividades laborais coletivas (SANTOS, 2018). Desse modo, para alcançar esse objetivo, o professor pode utilizar-se de uma metodologia que correlacione o lógico e o histórico. Segundo Kopnin (1978, p. 69), o lógico relacionado à "evolução do pensamento no sentido da verdade". Quanto ao histórico, é "o processo de mudança do objeto, as etapas de seu surgimento e desenvolvimento"(KOPNIN, 1978, p. 183).

Assim, com o objetivo de incrementar ao aluno o pensamento teórico, foi necessário principiar um método de investigação no qual fosse declarada a origem da Trigonometria e em qual totalidade se deu o seu nascimento. Mostrando, dessa forma, a necessidade que a fez levar para que esse campo de conceitos fosse estabelecido. Assim identificando sua origem, torna-se necessário a compreensão na lógica desse desenvolvimento.

Por outro lado, admitir que o processo de desenvolvimento social e humano se constitui pela atividade produtiva e transformadora da cultura a partir da linguagem, possibilita espaços de reflexão sobre as implicações que a discussão, o diálogo e a força da palavra que têm na aprendizagem e desenvolvimento dos estudantes. Desse modo, o estudante poderá tecer análises mais coerentes e completas, visto que poderá pensar no todo, de maneira profunda e concreta. Nessa situação a escola estará atendendo as sugestões trazidas nos documentos curriculares oficiais, (BRASIL, 2018) fazendo com que estejam mais preparados para pensar de maneira teórica.

2.1.2 Situação desencadeadora de aprendizagem

Segundo Moura a situação desencandeadora de aprendizagem deve contemplar:

> A gênese do conceito, ou seja, a sua essência; ela deve explicitar a necessidade que levou a humanidade à construção do referido conceito, como foram aparecendo os problemas e as necessidades humanas em determinada atividade e como os homens foram elaborando as soluções ou sínteses no seu movimento lógico- histórico. (MOURA et al., 2010, p. 104).

As situações desencadeadoras podem ser realizadas por meio de diferentes mecanismos metodológicos. Dentre esses mecanismos, Moura e Lanner de Moura (1998) apontaram em seus estudos o jogo, as situações emergentes do cotidiano e o que chamam de história virtual do conceito. Os autores defendem que tal organização do ensino cria condições para que os estudantes entrem em atividade. Segundo eles,

> O jogo com propósito pedagógico pode ser um importante aliado no ensino, já que preserva o caráter de problema. [...] O que devemos considerar é a possibilidade do jogo colocar a criança diante de uma situação-problema semelhante à vivenciada pelo homem ao lidar com conceitos matemáticos. [...] A problematização de situações emergentes do cotidiano possibilita à prática educativa oportunidade de colocar a criança diante da necessidade de vivenciar solução de problemas significativos para ela. [...] É a história virtual do conceito porque coloca a criança diante de uma situação problema semelhante àquela vivida pelo o homem (no sentido genérico) (MOURA, 1996, p.12-14).

Por este motivo, considera-se importante procurar ferramentas que possibilitem este dinamismo, permitindo ao estudante interpretar bem os conceitos associados à trigonometria e podendo focar-se na reflexão e na aquisição dos mesmos, desta forma nos centraríamos nos problemas relacionados com a as questões teóricas e práticas da disciplina.

Na escolha dos conteúdos este estudo faz uma inter-junção do ensino da Trigonometria como sendo um avanço no estudo de funções, levando a encarar o conteúdo das funções trigonométricas com mais destaque, uma vez que apresenta:

> ... estudo das funções trigonométricas, destaca-se um trabalho com a trigonometria, o qual deve anteceder a abordagem das funções seno, cosseno e tangente, priorizando as relações métricas no triângulo retângulo e as leis do seno e do cosseno. (BRASIL, 2006, p.73)

Identificar as dificuldades na aprendizagem da matemática é uma questão fundamental na busca de estratégias e propostas didáticas que melhorem o processo de aprendizagem dos estudantes.

De uma forma geral, as atividades desenvolvidas foram concebidas para analisar três áreas no trabalho das funções trigonométricas, porém, fica evidente que os estudantes apresentam deficiências relacionadas a preconceitos como localização de pontos no plano cartesiano, definição de função e em relação ao gerenciamento de artefatos, como o transportador. Em relação às razões trigonométricas no triângulo retângulo tem-se a seguinte orientação da (BRASIL, 2006a):

> Na introdução das razões trigonométricas seno e cosseno, inicialmente para ângulos com medida entre $0°$ e $90°$, deve-se ressaltar que são as propriedades de semelhança de triângulos que dão sentido a essas definições; segue-se, então, com a definição das razões para ângulos de medida entre $90°$ e $180°$. A partir das definições e de propriedades básicas de triângulos, devem ser justificados os valores de seno e cosseno relativos aos ângulos de medida $30°$, $45°$ e $60°$. (BRASIL, 2006, p.73)

Dado que as referidas competências estipuladas pela lei em torno do desenvolvimento das funções trigonométricas devem ser desenvolvidas, encontramos alguns autores que realizaram pesquisas sobre os erros e dificuldades que surgem quando os alunos trabalham nas funções trigonométricas. Da mesma forma, Asbahr (2005) em sua unidade didática Trigonometria destaca alguns deles, estes estão no campo algébrico, geométrico e aritmético. Por outro lado, Borges (2020) em sua dissertação de mestrado Modelagem matemática no ensino de trigonometria, menciona diferentes dificuldades no aprendizado de funções trigonométricas.

Uma outra importante abordagem trigonométrica que é orientada para o currículo do ensino médio, seja ela: "leis dos senos e dos cossenos pode ser motivada com questões relativas à determinação das medidas de elementos de um triângulo.

Uma vez expostos os problemas mais gerais do processo de ensino-aprendizagem da Matemática, o trabalho focará em problemas da mesma natureza, mas atendendo e aprofundando em trigonometria. Uma forma de trabalhar os conteúdos que as OCEM sugere é utilizar a história da matemática em classe, que também pode ser vista como um elemento importante no processo de atribuição de significados aos conceitos matemáticos. É importante, porém, que esse recurso não fique limitado à descrição de fatos ocorridos no passado ou à apresentação de biografias de matemáticos famosos.

Os que estão vinculados à didática da matemática consideram que os alunos devem adquirir diversas formas de conhecimento matemático em diferentes situações, tanto para sua posterior aplicação, quanto para fortalecer estratégias didáticas no processo de aprendizagem e ensino. Obviamente, isso requer um estudo aprofundado dos métodos de aprendizagem correspondentes e, muito particularmente, de técnicas adequadas para o desenvolvimento do ensino. Esses métodos e técnicas podem ser categorizados em grandes grupos, o que será um dos objetivos deste trabalho.

Segundo os OCEM, as ideias sócio construtivistas da aprendizagem partem do princípio de que a aprendizagem se realiza pela construção dos conceitos pelo próprio estudante, quando ele é colocado em situação de resolução de problemas. Essa ideia tem como argumento que a aprendizagem se realiza quando o estudante, ao confrontar suas concepções, constrói os conceitos pretendidos pelo professor. Dessa forma, caberia a este o papel de mediador, ou seja, de elemento gerador de situações que propiciem esse confronto de concepções, cabendo ao aluno o papel de construtor de seu próprio conhecimento matemático (BRASIL, 2006a).

O ensino da matemática realiza-se de diversas formas e com o auxílio de diversos meios, cada um com as respectivas funções; um deles, o mais utilizado e imediato, é a linguagem natural. Esses meios ajudam os professores a ter um bom desempenho no desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem. O ensino pode ser caracterizado como um processo ativo, que requer não só o domínio da disciplina, no nosso caso os conhecimentos matemáticos básicos a serem trabalhados com os alunos e aqueles que fundamentam ou explicam conceitos mais finos e rigorosos necessários à compreensão. Do mundo da matemática, mas do domínio adequado de um conjunto de aptidões e aptidões necessárias ao bom desempenho do nosso trabalho como professores de matemática.

3 TRIGONOMETRIA

Esta seção tem o objetivo de esclarecer o desenvolvimento lógico-histórico da Trigonometria, destacando os nexos conceituais e os componentes pedagógicos tensionadores que impulsionaram a formação de sentidos e significados no campo da matéria. Nesse sentido, para que possamos refletir sobre os nexos conceituais que transpassam o pensamento trigonométrico, faz-se necessário trazer componentes que concretizarão a pesquisa. Dessa forma, raciocinar historicamente, levando em consideração, as necessidades dos indivíduos, para que, em seguida, possa utilizar desse componente como orientador da proposta de uma SDA, gerando como produto uma atividade orientadora de ensino. Assim como a trigonometria no triângulo retângulo, alguns conceitos e proposições trigonometricas.

Muitas vezes os estudantes são desmotivados pela grande quantidade de conteúdos que a eles são apresentados sem mesmo mostrar o que motivou tudo aquilo, sem mostrar sua importância, suas aplicações. Os PCNEM (BRASIL, 2017) sugerem que esses estudos sejam:

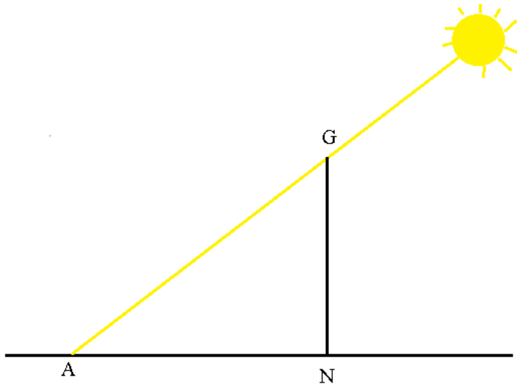
> Apesar de sua importância, tradicionalmente a trigonometria é apresentada desconectada das aplicações, investindo-se muito tempo no cálculo algébrico das identidades e equações em detrimento dos aspectos importantes das funções trigonométricas e da análise de seus gráficos.

Na Educação Matemática atual existem diversos recursos e/ou ferramentas didáticas que favorecem os alunos para a compreensão de conceitos matemáticos, entre eles estão às vivências em sala de aula, que se caracterizam por conterem uma série ordenada de atividades relacionadas entre si, em torno de um propósito comum para a construção de um conceito específico neste caso matemático. As situações desencadeadoras são, simplesmente, conjuntos articulados de atividades de aprendizagem e avaliação que, com a mediação de um professor, buscam o alcance de determinados objetivos educacionais, considerando uma série de recursos. Na prática, isso implica em melhorias substanciais nos processos de formação dos alunos, à medida que a educação se torna menos fragmentada e focada em metas.

3.1 Desenvolvimento Lógico Histórico da Trigonometria

O desenvolvimento lógico-histórico é inseparável, pois atua simultaneamente e de maneira interdependente em um método dialético. Dessa forma, o objetivo desta seção é entender o método histórico do avanço de um conceito, para que, posteriormente, se entenda o lógico. Para tal, serão mostradas categorias que baseiam na construção de um conceito, que são os conceitos trigonométricos, e de que forma esses métodos surgiram diante das necessidades do homem. Infelizmente, há uma grande lacuna nesse processo, uma vez que vários conceitos foram formulados em períodos primitivos, o que pode ter causado uma dispersão dos registros originais. Kennedy (1992) garante que os primórdios da evolução da trigonometria são observados nas relações entre o comprimento da sombra com as horas do dia. Nessa técnica primordial, a sombra do gnômon (vara vertical perpendicular ao chão) é longa pela manhã, vai diminuindo até chegar ao mínimo ao meio dia e vai aumentando conforme a tarde avança, observe a figura 2.

Figura 2 – Gnômon



Fonte: Elaborada pela autora

É fácil verificar que os sábios daquela época já tentavam estabelecer relações de medida entre a posição do Sol e a sua sombra, possivelmente tratava de uma tecnologia de considerável valor social, mesmo com algumas falhas, era bastante útil. Se não houvesse a incidência do Sol em algum dia, poderia se perder a noção do tempo.

Eles não estavam interessados em descobrir explicitamente as relações tangente e cotangente como tais, mas em usar o gnômon como um controlador de tempo, graças à medição da variação diária do comprimento da sombra ao meio-dia, ela poderia ser usada para determinar as horas do dia. Essa ideia fornece o princípio de operação do relógio de sol. A contribuição disso para a trigonometria se dá em conceitos geométricos como uma primeira ideia de razões, proporções e semelhanças de triângulos, o que deu origem ao que hoje conhecemos como razões trigonométricas que se desenvolveram em tempos posteriores.

Segundo Kennedy (1992) existe pelo menos quatro tábuas (egípcia, iraniana, indiana e grega) com documentos determinados indicando essas investigações em relação ao uso do gnômon, que é a parte do relógio solar que possibilita a projeção da sombra. Considerado, provavelmente, o primeiro instrumento utilizado para indicar a hora do dia. Segundo Kennedy (1992) as datas e locais de origem das tábuas são incertas. A tábua egípcia resgistrada no Ato do Egito no século XIII a.C. e a tábua grega, provavalemente vem da Grécia do século V a.C. A confecção de tabelas que faz relação com a hora do dia e a sombra do gnômon, a sombra é a variável dependente e varia de acordo o movimento do Sol.

Esses esquemas, segundo Keneddy (1992) são ingênuos, pois os intervalos de ‘horas’

Tabela 2 – Tábua Egípcia

Fim de hora	Sombra
-	-
2	30
3	19
4	9
5	3
Meio dia	0

Fonte: (KENNEDY, 1992)

que eles marcam são desiguais e as sombras variam conforme a latitude geográfica do gnomom e a estação do ano. A tabela grega tenta compensar de outras formas, mais completa, as variações durante as estações.

Tabela 3 – Tábua Grega

Fim de hora	Sombra durante mês equinocial
1	25
2	15
3	11
4	8
5	6
Meio dia	5

Fonte: (KENNEDY, 1992)

A partir da analise de esquemas como esse, Junqueira (2011) acredita que a divisão do dia em 24 horas se deu por volta de 5000 a. C, e que essa divisão foi determinada a partir do gnômon. Junqueira admite ainda que os babilônios teriam dividido o roteiro da sombra projetada em doze partes, seis partes antes do meio dia e seis partes após o meio dia; e o número doze foi indicado por ser um submúltiplo de sessenta, que era a base usada pelos matemáticos babilônicos, base sexagesimal. Dessa forma, o dia foi dividido em vinte e quatro horas, sendo doze durante o dia e doze durante a noite. Entre esses marcos primitivos e o próximo período percebível que leva à trigonometria, existe um grande intervalo.

O papiro de Rhid (1650 a.C.), documento importante sobre a matemática egípcia, cita por quatro vezes o seqt de um ângulo, observe a figura 3.

Na construção de pirâmides os egípcios tinham como preocupação principal manter uma inclinação constante das faces. Assim, surgiu a palavra seqt que segundo Boyer significava “o afastamento horizontal de uma reta oblíqua em relação ao eixo vertical para cada variação de unidade na altura (p.36). O seqt condizia assim ao termo usado atualmente pelos arquitetos para indicar a inclinação de uma parede”. (BOYER, 2012)

Além das construções das pirâmides, os egípcios relacionavam as horas do dia com a

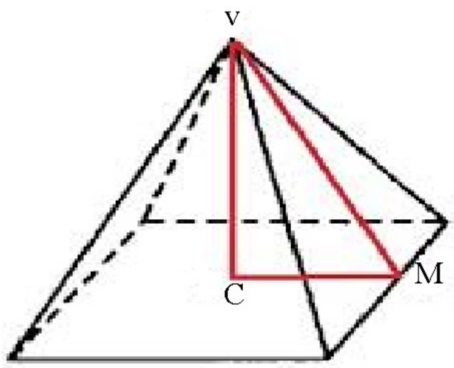


Figura 3 – Seqt egípcio, $seqt = \frac{CM}{CV}$

sombra de um gnômon (vara que se espetava no chão, na perpendicular a este, e o comprimento de sua sobra era notado a uma determinada hora do dia).

Como a altura do gnômon era constante, provavelmente usariam sempre a mesma vara, na mesma posição, o comprimento de NA ao meio dia variava com o ângulo Â, ou seja $\frac{AN}{GN}$ seria a “função” do ângulo. (COSTA, 1997)

O desenvolvimento da trigonometria está profundamente ligado ao da geometria. Neste ramo, a Grécia produziu grandes sábios, Thales (625-546 a.C) e seu discípulo Pitágoras (570-495 a.C), o primeiro com seus estudos em semelhanças que fundamentam a trigonometria e o segundo pressupõe-se que tenha feito a primeira demonstração do teorema que tem o seu nome. “Que o quadrado sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma dos quadrados sobre os catetos.” (Eves,p.103, 2011). Deste teorema origina a relação fundamental da trigonometria.

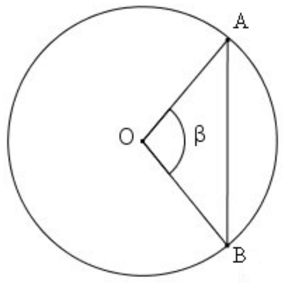
A primeira amostra documentada de contribuição grega para o estudo da trigonometria apareceu por volta de 180 a.C. quando Hipsícles, influenciado pela cultura babilônica dividiu o zodíaco em 360 partes. Essa ideia foi posteriormente generalizada por Hiparco para qualquer círculo.(EVES, 2011)

Foram com os gregos que pela primeira foi encontrado um estudo sistemático de relações entres ângulos (ou arcos) num círculo e os comprimentos das cordas que os subentendem. As propriedades das cordas, como medidas de ângulos centrais ou inscritas em círculos, eram conhecidas dos gregos do tempo de Hipócrates, e é previsível que Eudoxo tenha usado razões e medidads de ângulos para determinar o tamanho da Terra e as distâncias relativas do Sol e da Lua.

Citando Boyer (2012 p.124), “Durante cerca de dois séculos e meio, de Hipócrates a Eratóstenes, os matemáticos gregos estudaram as relações entre retas e círculos e as aplicaram a uma variedade de problemas de astronomia, mas disso não resultou uma trigonometria sistemática”.

Na segunda metade do segundo século II a.C., surgiu um marco da história da trigonometria, Hiparco de Niceia. Fortemente influenciado pela matemática babilônica, ele usava o sistema sexagesimal (base 60) para contagem e dividiu a circunferência em 360 partes. A cada parte da circunferência deu-lhe o nome de arco de um grau. E em cada arco dividiu em 60 partes dando o nome de minuto. Os estudos de Hiparco levaram-no à relação entre o comprimento de um arco e o ângulo ao centro correspondente de um círculo arbitrário. Presume-se que Hiparco tenha sido o primeiro a construir uma tabela trigonométrica, que assumiu o direito de ser chamado "o pai da trigonometria".

Figura 4 – Corda de β



Fonte: Autora.

Anos mais tarde surgiu Cláudio Ptolomeu, autor da obra mais influente e significativa obra trigonométrica da antiguidade *"Syntaxis Matemática"*, composta por treze livros, que ficou conhecida como o Almagesto ("o maior"), onde relacionou o comprimento da corda com o arco. No Almagesto de Ptolomeu as tabelas são mais completas que as de Hiparco, com ângulos de meio em meio grau, de $0°a180$ e o Teorema de Ptolomeu (se ABCD é um quadrilátero convexo inscrito em um círculo, então a soma dos produtos de lados opostos de um quadrilátero inscritível é igual ao produto das diagonas, ou seja, $AB.CD + BC.DA = AC.BD$) que foi de muito importante para o cálculo das cordas de Ptolomeu. A partir deste resultado, chegou, ao que chamamos hoje de fórmulas do cosseno e do seno da soma e da diferença de dois ângulos. "Foi a fórmula para seno da diferença ou, mais precisamente, corda da diferença que Ptolomeu achou especialmente útil ao construir suas tabelas." (BOYER, 2012)

Os povos antigos desde cedo utilizam as razões trigonométricas, contudo apenas no século XVII é que surge o termo cosseno como sendo o seno do complemento de um ângulo. Johann Muller (1436-1476), mais conhecido como Regiomontanus, no seu trabalho original "De triangulis omnimodis, uma exposição sistemática dos métodos para resolver triângulos que marcou o renascimento da trigonometria". (Boyer, 2012 p. 194)

O conceito de tangente surge em 1583, com Thomas Finke, este conceito desempenhou um papel importante no relógio de sol, o qual permitia calcular o comprimento da sombra produzido por um objeto.

Segundo Boyer (2012), Leonhard Euler (1707-1783), aparentemenete tinha em mente primariamente as funções algébricas e as funções transcedentes elementares; o tratamente estritamente analítico das funções trigonométricas foi na verdade, em larga medida estabelecido pela Introductio. O seno já não era um segmento de reta; era um número ou uma razão ordenada de um ponto sobre um círculo unitário, ou o número definido pela série $z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - ...$ para um valor de z. Das séries infinitas para e^x, $senx$ e $cosx$ passava-se facilmente às "identidades de Euler"

$$senx = \frac{e^{\sqrt{-1}x} - e^{-\sqrt{-1}}x}{2\sqrt{-1}}$$

$$cosx = \frac{e^{\sqrt{-1}x} + e^{-\sqrt{-1}}x}{2}$$

e

$$e^{\sqrt{-1}x} = cosx + \sqrt{-1}senx,$$

relações que em essência eram conhecidas por Cotes e De Moivre mas que nas mãos de Euler tornaram-se instrumentos familiares da análise.

Euler usara exponentes imaginários em 1740 numa carta a Jean Bernoulli em que escreveu $e^{\sqrt{-1}x} + e^{-x\sqrt{-1}} = 2.cosx$: as familiares identidades de Euler apareceram na influente *Introductio* de 1748.As funções transcedentes elementares eram escritas e pensadas praticamente na forma em que são tratadas hoje.

A compreensão do avanço da trigonometria possibilita o processo do ensino aprendizagem porque permite aos estudantes fazer a relação dos conceitos e encontrar a aplicação no cotidiano.

A trigonometria continuou e continua sendo uma ferramenta fundamental na análise moderna. Os novos matemáticos dos últimos séculos viram-se obrigados a familiarizar-se com as funções trigonométricas, que aparecem em ambientes muito diferentes: como coeficientes dos desenvolvimentos em série de funções contínuas, ou como componentes de funções de solução de equações diferenciais ou em derivadas parciais, envolvidas em uma infinidade de problemas relacionados ao estudo dos fenômenos físicos, eles também tomam a forma de componentes de matrizes correspondentes a rotações no plano e no espaço, etc.

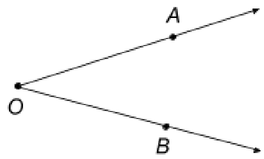
3.2 A trigonometria do Triângulo Retângulo

Essa seçao foi redigida com as seguintes referências: Lima, Carvalho e and (2006); Iezzi (2013) e Carmo, Morgado e Wagner (2005). Nesse sentido, há um problema em torno de algumas experiências de sala de aula que desenvolvem elementos históricos e matemáticos da trigonometria; Dois destes trabalhos são os realizados por Lima, et al (2006), Iezzi (2013) e Carmo e Morgado (2005) onde realizam um conjunto de atividades que evidenciam a articulação entre História e Matemática, mas cada conceito é desenvolvido separadamente; Por isso, a História só é vista trabalhada pelo aluno em busca de biografias dos personagens mais representativos da história das razões trigonométricas.

Com as situações desencadeadoras de atividades, os seguintes objetivos são perseguidos: Identificar as relações trigonométricas do triângulo retângulo. Reconhecer que o valor das razões trigonométricas de um triângulo depende da amplitude dos ângulos do triângulo, mas não depende dos comprimentos dos lados. Incentivar a reflexão e a discussão sobre os conceitos básicos de relações trigonométricas. Promover o desenvolvimento dos processos de descrição, definição e demonstração. Esta atividade tem como objetivo apresentar aos estudantes as proporções trigonométricas, explorando as medidas dos lados e ângulos de um triângulo retângulo. Espera-se que eles identifiquem a dependência das relações angulares e os valores de variação das relações.

Definição: Chamamos de ângulo a figura formada por duas semirretas que possuem a mesma origem, as semirretas são os lados do ângulo e a origem comum é chamada de vértice. O ângulo pode ser representado de diversas maneiras. Se O é o vertice e se A e B são pontos quaisquer, não colineares, este ângulo será representado por AÔB ou BÔA (Figura 5).

Figura 5 – Ângulo AÔB ou BÔA



Fonte: Autora

Se essa for a notação utilizada, a letra que denomina o vértice deve aparecer entre outras duas. Quando nenhum outro ângulo tem o mesmo vértice, podemos utilizar apenas a letra que denomina este vértice e representá-lo apenas por Ô. Um ângulo formado por duas semirretas distintas de uma mesma reta é chamado de ângulo raso.

Para medir um ângulo, será utilizado o transferidor, que nada mais é que um círculo graduado em uma unidade qualquer.

A figura 6 mostra um transferidor graduado em graus. O grau é a fração $\frac{1}{360}$ do círculo.

O transferidor tem uma dupla escala pois pode ser percorrido em dois sentidos, sentido horário ou sentido anti-horário. Os matemáticos têm preferência pelo sentido anti-horário, mas, em outras atividades, como por exemplo navegação aérea, o sentido adotado é o oposto.

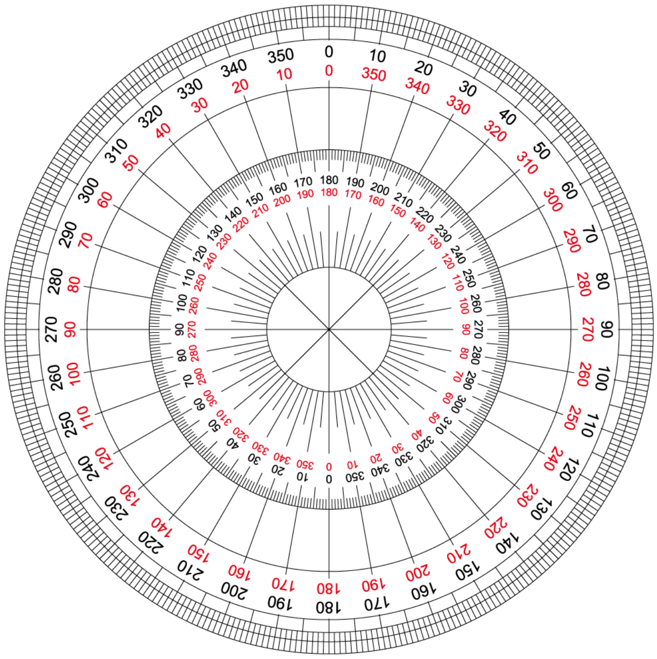
Definição: Dois ângulos são ditos suplementares se a soma de suas medidas é igual a $180°$.

Definição: Um ângulo cuja medida é igual a $90°$ é chamado de ângulo reto, agudo se mede mais que $0°$ menos que $90°$ e obtuso se mede mais que $90°$ e menos que $180°$.

Como a medida de um ângulo reto é $90°$, é claro que a medida do seu suplemento é $90°$. Quando duas retas se instersectam, se um dos quatro ângulos formados por ela for reto, então, todos os outros serão. Neste caso, diremos que as retas são perpendiculares.

Sejam A, O, B, pontos não colineares tais que $A\hat{O}B = \theta$ seja agudo, ou seja, 0°<θ<90°. Na semirreta OA escolha uma sequencia de pontos $A_1, A_2, A_3, ...$ e trace à partir deles segmentos

Figura 6 – Transferidor

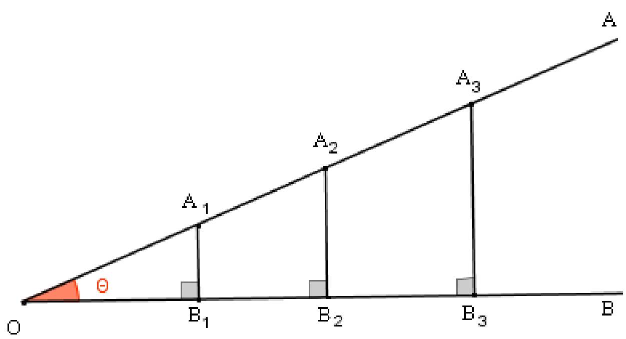


Fonte: https://acidadebranca.tumblr.com/post/11526382896/transferidor-escolar-de-360-pequenas-via

perpendiculares. Os triângulos OA_1B_1, OA_2B_2, OA_3B_3 etc. são semelhantes por terem os mesmos ângulos. Isto é,

$$\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OA_1}} = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{OA_2}} = \frac{\overline{A_3B_3}}{\overline{OA_3}} = \ldots$$

Figura 7 – Triângulos Semelhantes



Fonte: Carmo, Morgado e Wagner (2005)

Note que esta relação depende apenas do ângulo θ e não dos comprimentos envolvidos. Portanto, fica bem definidada a função seno, dada por:

$$\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OA_1}} = sen\theta,$$

que se lê seno de θ.

Ainda sobre o triângulo semelhante da figura 7 têm as seguintes relações:

$$\frac{\overline{OB_1}}{\overline{OA_1}} = \frac{\overline{OB_2}}{\overline{OA_2}} = \frac{\overline{OB_3}}{\overline{OA_3}} = ...$$

$$\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OB_1}} = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{OB_2}} = \frac{\overline{A_3B_3}}{\overline{OB_3}} = ...$$

que também dependem apenas do ângulo θ. Definidas então as funcões, para 0°<θ<90°,

$$cos\theta \ = \frac{\overline{OB_1}}{\overline{OA_1}}, tg\theta \ = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OA_1}}$$

que se chamam cosseno de θ e tangente de θ, respectivamente.

Estas funções são chamadas funções trigonométricas e vamos estudar algumas de suas propriedades. A primeira dela é chamada relação fundamental da trigonometria e a segunda é que a tangente de um ângulo qualquer, no intervalo em que é válida, é igual à razão entre seno e cosseno desse mesmo ângulo.

$$sen^2\theta + cos^2\theta = 1 \text{[1]} \tag{3.1}$$

e

$$tg\theta = \frac{sen\theta}{cos\theta} \tag{3.2}$$

A demonstração das duas relações são feitas da seguinte forma: Seja o triângulo OAB retângulo em B, com $\overline{OA} = a$, $\overline{OB} = b$ e $\overline{AB} = c$ e lembrando do Teorema de Pitágoras , $a^2 = b^2 + c^2$, temos:

$$sen^2\theta + cos^2\theta = \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 = \frac{b^2+c^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1$$

e

$$\frac{sen\theta}{cos\theta} = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{b}{c} = tg\theta$$

Como $sen\theta$, $cos\theta$ e $tg\theta$ são números positivos, pois, 0°<θ<90°, vemos ainda que se uma dessas funções de θ, podemos calcular as outras duas. E mais, se um triângulo retângulo tem um ângulo θ e hipotenusa de comprimento *a*, então os catetos desse triângulo medem *a.sen*θ (o cateto oposto a θ) e *a.cos*θ (o cateto adjacente a θ).

[1] $sen^2\theta$ significa $(sen\theta)^2$. A fórmula (3.1) é chamada de relação fundamental da trigonometria.

Não temos ainda uma forma de calcular $sen\theta$ para um dado ângulo agudo θ. As proposições que seguem preparam o terreno para que se possa organizar uma primeira tabela de senos.

Proposição 1. Se dois ângulos α e β são complementares ($\alpha + \beta = 90°$), então $sen\alpha$ = $cos\beta$ (o cosseno de um ângulo é o seno do ângulo complementar) e $tg\alpha$=$\frac{1}{tg\beta}$.

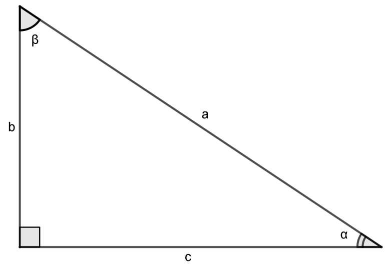
Aplicando as definições no triângulo da figura 8, temos:

$$sen\alpha = \frac{b}{a} = cos\beta$$

e

$$tg\alpha = \frac{b}{c} = \frac{1}{\frac{c}{b}} = \frac{1}{tg\beta}.$$

Figura 8 – Triângulo retângulo



Fonte: Carmo, Morgado e Wagner (2005)

Proposição 2. Se $\alpha \in (0°, 45°)$ então $sen2\alpha = 2sen\alpha cos\alpha$.

Demosntração: Observando a figura 9, formada por dois triângulos retângulos em A; OAB e OAC, tais que $\overline{OB} = \overline{OC} = 1$ e $A\hat{O}B = A\hat{O}C = \alpha$, daí temos que $\overline{AB} = \overline{AC} = sen\alpha$ e $\overline{OA} = cos\alpha$. Trançando BD perpendicular a OC temos que $\overline{BD} = sen2\alpha$. Ora, o dobro da área do triângulo OBC é igual a $\overline{BD}.\overline{OA}$ e é igual a $\overline{OC}.\overline{BD}$. Portanto,

$$2sen\alpha cos\alpha = 1sen2\alpha,$$

o que demonstra a proposição.

Proposição 3. Se $\alpha \in (0°, 45°)$ então $sen\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-cos\alpha}{2}}$.

Demonstração: Na figura 9 temos que $\overline{OD} + \overline{DC} = 1$, do triângulo ODB tem-se que $\overline{OD} = cos2\alpha$ e do triângulo BDC, $\overline{DC} = \overline{BC}.cos\beta$, substituíndo temos: $cos2\alpha + \overline{BC}.cos\beta = 1$. Como $\overline{BC} = 2.sen\alpha$ e $cos\beta = sen\alpha$ (α e β são complementares), temos $cos2\alpha + 2sen\alpha.sen\alpha$,

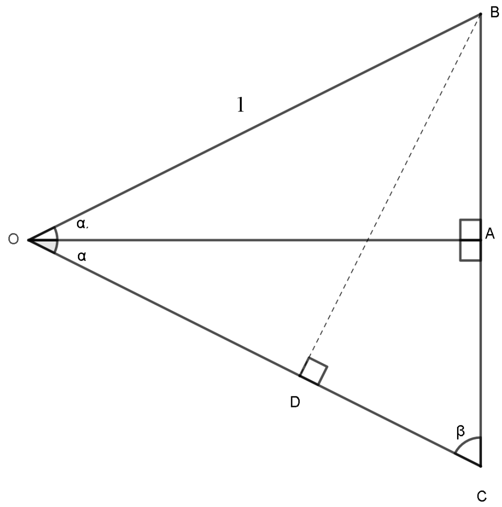
$$cos2\alpha + 2sen^2\alpha = 1$$

Substituindo 2α por e consequentemente α por $\frac{\alpha}{2}$, obtemos:

$$sen\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - cos\alpha}{2}},$$

o que demonstra a proposição.

Figura 9 – Triângulo OBC



Fonte: Carmo, Morgado e Wagner (2005)

3.2.1 Valores para alguns ângulos

(a) 30° e 60°

No triângulo da figura 10 de lado 1 traçamos a altura AD (que também é mediana). Obtemos $\overline{DC} = 1/2$ e, pelo Teorema de Pitágoras, $\overline{AD} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Como $A\hat{C}D = 60°$ e $D\hat{A}C = 30°$, temos que

$$sen30° = \frac{1}{2}, cos30° = \frac{\sqrt{3}}{2} e tg30° = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

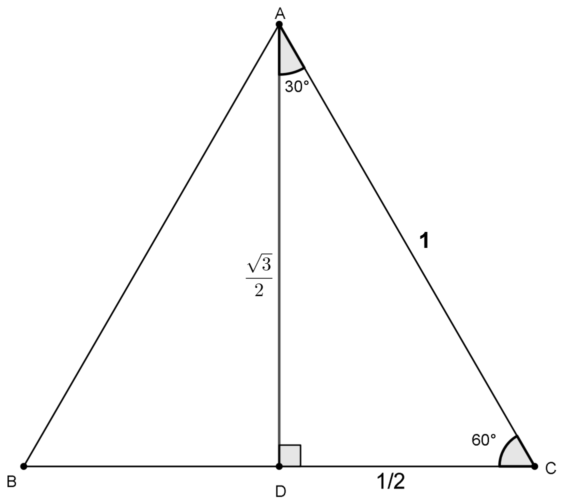
$$sen60° = \frac{\sqrt{3}}{2}, cos60° = \frac{1}{2} e tg60° = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}.$$

(b) 45°

O triângulo ABC da figura 11 tem catetos iguais a 1 e ângulos agudos de 45°. Como $\overline{BC} = \sqrt{2}$ (Pitágoras), temos que

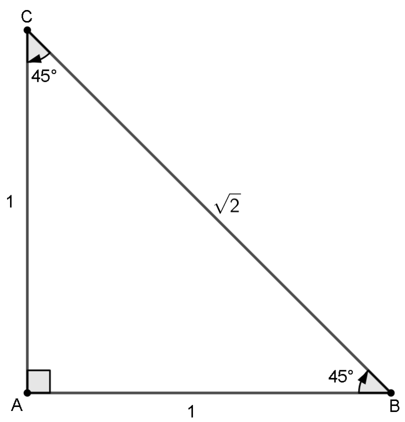
$$sen45° = cos45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} e tg45° = 1.$$

Figura 10 – Triângulo equilátero ABC



Fonte: Carmo, Morgado e Wagner (2005)

Figura 11 – Triângulo isósceles ABC

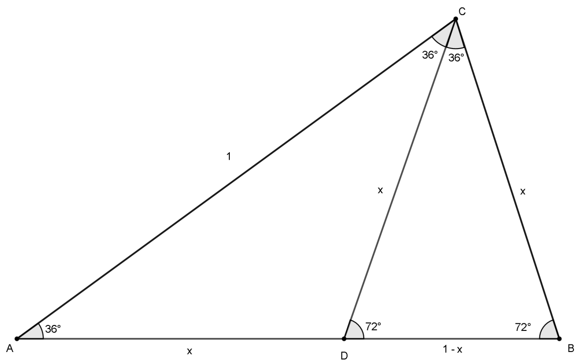


Fonte: Carmo, Morgado e Wagner (2005)

(c) 18°

Nesse caso terá um pouco mais de trabalho. A figura 12 mostra um triângulo ABC com $\overline{AB} = \overline{AC} = 1$ e $B\hat{A}C = 36°$. Traçando a bissetriz CD de $A\hat{C}B$, podemos calcular todos os ângulos da figura. Como os triâgulos BCD e CDA são isósceles, fazemos $\overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA} = x$ e, como os triângulos CDB e ABC são semelhantes, temos

Figura 12 – Triângulo isósceles ABC



Fonte: Carmo, Morgado e Wagner (2005)

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}},$$

ou

$$\frac{x}{1-x} = \frac{1}{x},$$

o que dá

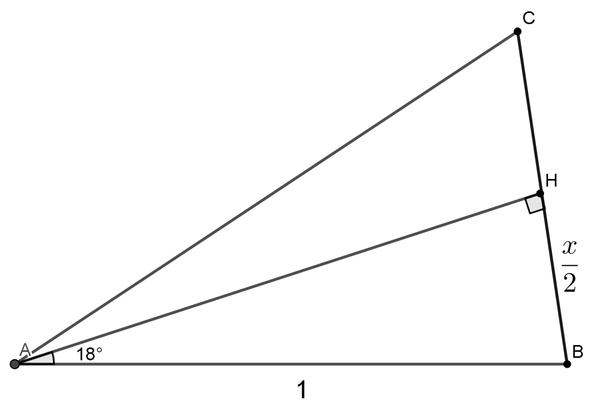
$$x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Traçando a altura AH do triângulo ABC (figura 13), temos $sen 18° = \frac{\overline{HB}}{\overline{AB}} = \frac{x}{2}$, ou seja,

$$sen 18° = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

Outro problema que se atribui aos recursos utilizados em sala de aula é quando o professor tem apenas o livro didático como referência e não percebe que os conceitos trabalhados têm um desenvolvimento histórico, que não é obrigatório para que o estudante aprenda, mas servem ao professor como um suporte para o desenvolvimento de suas competências, pois são deixados de lado trechos de grande importância que podem ser divulgados e, dessa forma, levar o estudante a refletir sobre os conhecimentos adquiridos. Em relação ao exposto, o livro didático deve ser uma ferramenta de apoio.

Figura 13 – Altura do triângulo ABC



Fonte: Carmo, Morgado e Wagner (2005)

3.3 Extensões das Funções Trigonométricas

3.3.1 Círculo

O comprimento de um segmento está bem definido nos livros de Geometria, porém, o comprimento de uma curva não tem definição fácil. Ajustar sobre uma curva um arame e depois esticá-lo dá uma noção intuitiva do que seja o comprimento dessa curva, mas, naturalmente não serve como definição. Para o círculo, em particular, dizemos que seu comprimento C é o número real cuja as aproximações por falta são os perímetros dos polígonos convexos neles inscritos, onde todo o círculo tem comprimento C, e admitiremos que "o número π é o comprimento de um semicírculo de raio 1".

Dessa forma, no círculo de raio 1, C=2π e, consequentemente, no círculo de raio R, C=2πR, porque dois círculos quaisquer são semelhantes.

Escrevendo C/2R=π, vemos que π é a razão entre o comprimento de qualquer círculo e seu diâmetro, sendo aproximadamente igual a 3,14159265.

Definição: Seja A um ponto do plano e r um número real positivo. O círculo de centro A e raio r é o conjunto constituído por todos os pontos B do plano, tais que $\overline{AB} = r$. O segmento que liga dois pontos de um círculo será denominado de corda. Toda corda que passa pelo centro do círculo é um diâmetro. Também chamaremos de diâmetro a distância 2r.

Proposição Um raio é perpendicular a uma corda (que não é um diâmetro) se e somente se a divide em dois segmentos congruentes.

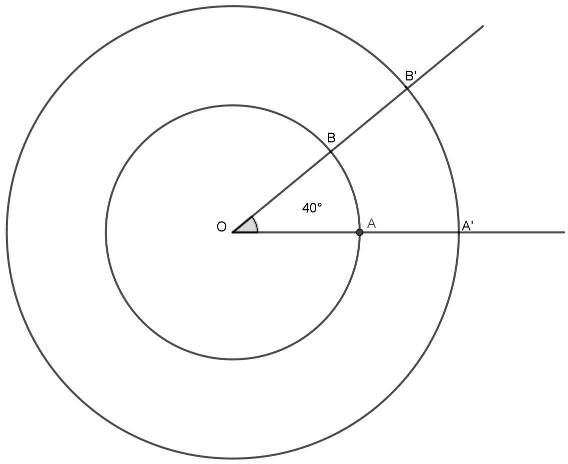
Prova Seja O o centro do círculo e OC o raio que é perpendicular a corda AB. Seja M o ponto de interseção da corda com o raio. Como OA=OB (raios), então, o triângulo OAB é isósceles com base AB.

Logo $\hat{A} = \hat{B}$. Se a corda é perpendicular ao raio, então, os ângulos $O\hat{M}A$ e $O\hat{M}B$ são retos. Como consequência, $A\hat{O}M = B\hat{O}M$. Segue-se, então, pelo caso de congruência de triângulos que $AOM = BOM$.Como consequência, $AM = MB$. Inversamente, se $AM = MB$, então pela congruência de triângulos, deduz-se que: $AOM = BOM$. Como consequência, $O\hat{M}A = O\hat{M}B$. Mas como a soma destes dois ângulos é um ângulo raso, conclui-se que cada um deles medem $90°$. Portanto, a corda é perpendicular ao raio passando por M. Isto completa a prova da proposição.

3.3.2 Medidas de arcos e o radiano

Para fazer referência a determinado arco de um círculo, costuma-se usar a expressão do tipo "arco de 40°". Devemos entender esta expressão como *arco que subtende um ângulo central de 40*°. Assim, podemos nos referir aos arcos $\widehat{AB}$ e $\widehat{A'B'}$ da figura 14 como arcos de 40°.

Figura 14 – Arco de 40°



Fonte: Adaptação Carmo, Morgado e Wagner (2005)

Vamos agora introduzir outra medida de ângulos. Sabemos que arcos de círculo que subtendem o mesmo ângulo central são semelhantes e que a razão de semelhanca é a razão entre os raios. Assim, na figura 15 se S e S' são respectivamente os comprimentos dos arcos $\widehat{AB}$ e $\widehat{A'B'}$ dos círculos de centro O e raios R e R', temos

$$\frac{S'}{R'} = \frac{S}{R}.$$

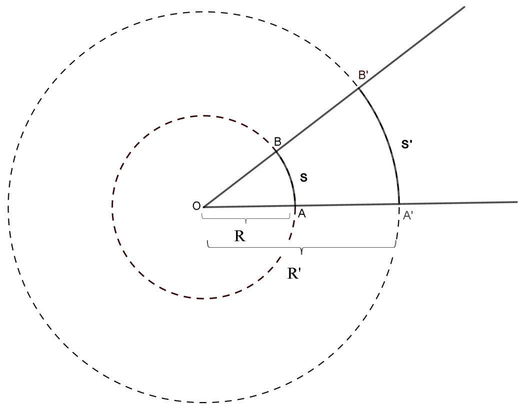
Em suma, dado o ângulo central, é constante a razão entre o comprimento do ardo determinado e o raio. Isso permite-se definir:

A medida de um ângulo em radianos é a razão entre o comprimento de arco determinado pelo ângulo em um círculo cujo centro é o vértice do ângulo e o comprimento do raio do círculo.

Assim, na figura 15, $A\hat{O}B = \frac{S}{R}$ radianos. Em particular, decorre da definição que S é o comprimento do arco determinado por um ângulo central de α radianos em um círculo de raio R, então

$$\alpha = \frac{S}{R}\text{,ou seja,}$$
$$S = \alpha.R.$$

Figura 15 – $A\hat{O}B = \frac{S}{R}$ radianos



Fonte: Carmo, Morgado e Wagner (2005)

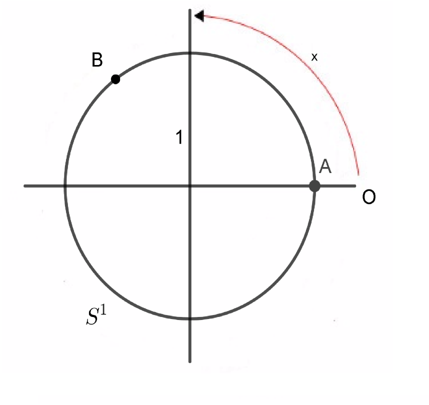
Como o comprimento de um semicírculo (que é um arco de 180°) é $\pi.R$, temos que $180° = \frac{\pi.R}{R} = \pi$ radianos. Assim, 1 radiano = $\left(\frac{180°}{\pi}\right) \simeq 57°$.

A medida de um ângulo em radianos não depende portanto da unidade de comprimento considerada. Qaundo R = 1, a medida do ângulo coincide com o comprimento do arco, mas, desejamos enfatizar, esta última depende de uma medida de comprimento, enquanto a primeira não. Mantendo em mente esta distinção conceitual, identificaremos, em um círculo de raio 1, arcos e ângulos correspondentes.

3.3.3 Círculo orientado

Um círculo pode ser percorrido em dois sentidos. Quando um deles é escolhido e denominado positivo, dizemos que o círculo está *orientado*. Tradicionalmente, escolhemos o sentido anti-horário e fixamos no círculo unitário (de raio igual a 1) orientado um ponto A, chamado origem dos arcos (figura 16). Este círculo unitário, orientado e com origem será representado por S^1.

Figura 16 – Arco orientado



Fonte: Carmo, Morgado e Wagner (2005)

Definiremos a medida algébrica de um arco AB deste círculo como sendo o comprimento deste arco, associado a um sinal positivo se o sentido de A para B for anti-horário e nagativo em caso contrário. Esta medida será representada por m$\widehat{AB}$.

3.3.4 As funções trigonométricas

Por enquanto as funções trigonométricas estão definidas para ângulos do intervalo (0°,90°). Como esses ângulos podem ser medidos em radianos, estão naturalmente definidos o seno, o cosseno e a tangente de números do intervalo (0,$\frac{\pi}{2}$). O próximo passo é estender estas funções de modo que elas possam ser definidas para todos (ou quase todos) os números reais e que sejam mantidas as relações básicas

$$sen^2x + cos^2x = 1$$

e

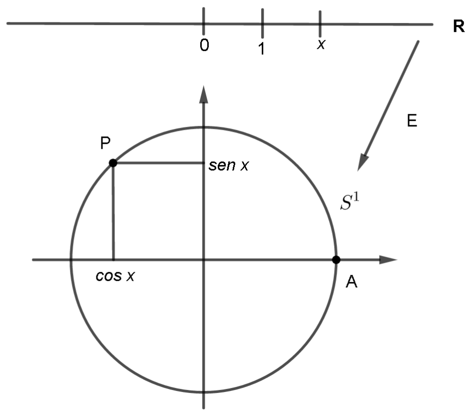
$$tgx = \frac{senx}{cosx}.$$

Para isto, consideremos a função E:$\mathbb{R} \rightarrow S^1$ definida do seguinte modo. Fixada uma origem A em S^1 e dado um número real x, percorremos sobre S^1, no sentido positivo, x > 0 e no sentido negativo x < 0, um comprimento igual a x: por definição, E(x) é o ponto de S^1 assim atingido (figura 17).

Observe que se x > 0 e x > 2π, será necessário dar mais de uma volta em S^1, no sentido positivo, para atingir E(x); uma observação análoga vale para o caso de ser x < 0. Seja como for, E(x) é um ponto bem definido de S^1. Por outro lado, dado um ponto P de S^1, ele é a imagem pela função E de uma infinidade de números reais , todos da forma

$$x + 2k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, ..., 0 \leq x < 2\pi.$$

Figura 17 – *E(x)*=P, m$\widehat{AP} = x$



Fonte: Carmo, Morgado e Wagner (2005)

Às vezes, costuma-se exprimir este fato dizendo que $x + 2k\pi$ são as "várias determinações"do ângulo $\widehat{AP}$ (querendo dizer com isto que $x + 2k\pi$ são os vários pontos da imagem inversa de P) ou que x e $x + 2k\pi$ são côngruos (querendo dizer com isto que a diferença entre eles é um múltiplo inteiro de 2π).

No sistema de coordenadas cuja origem é o centro de S^1 e sendo A = (1,0) definimos

$$cosx = \text{abscissa de P,}$$

$$senx = \text{ordenada de P,}$$

$$tgx = \frac{senx}{cosx}, \text{ se } cosx \neq 0.$$

Esta definição coincide com a anterior quando $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Além disso, permite escrever cos 0 = 1 e sen 0 = 0 (quando P = A), $cos\frac{\pi}{2} = 0$ e $sen\frac{\pi}{2} = 1$ (quando AÔP é reto). Ainda, como todo ponto P = (*cos x, sen x*) de S^1 está a uma distância 1 da origem, temos $sen^2x + cos^2x = 1$.

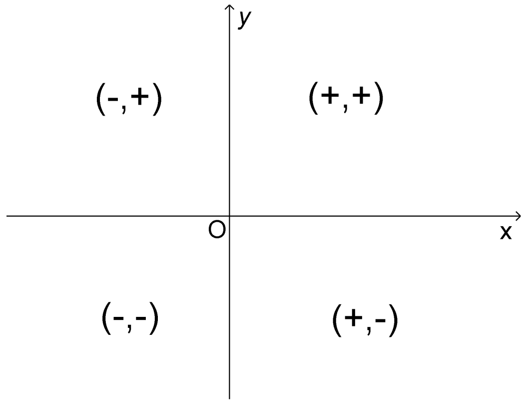
A nova definição, portanto, estende a primeira e mantém as relações básicas. Observe que tg x não é definida para $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ (*k* inteiro), porque para esses valores cos *x* = 0.

Naturalmente, para todo *k* inteiro, e para todo *x* real, $sen(x + 2k\pi) = senx$ e $cos(x + 2k\pi) = cosx$, porque $E(x + 2k\pi) = E(x) = P$. Este fato significa que as funções seno e cosseno são periódicas com período 2π, isto é, se conhecemos o comportamento dessas funções no intervalo [0,2π], passamos a conhecer imediatamente como estas funções se comportam em todos os intervalos seguintes (ou anteriores) de comprimento 2π. Em outras palavras, o gráfico da função *y=sen x* no intervalo [0,2π] é exatamente o mesmo em qualquer intervalo da forma $[2k\pi, 2(k + 1)\pi]$. Podemos então restringir o estudo destas funções ao intervalo [0,2π] que corresponde ao estudo das coordenadas de um ponto que dá exatamente uma volta em S^1.

Diz-se ainda que a função E:$\mathbb{R} \to S^1$ é par quando se tem E(-x)= E(x) para todo **x** real. Quando se tem E(-x)=-E(x) para todo **x** real, a função f chama-se ímpar.

As funções cosseno e seno, como coordenadas de um ponto, têm sinais que dependem do quadrante que se encontram (figura 18).

Figura 18 – Sinais nos quadrantes



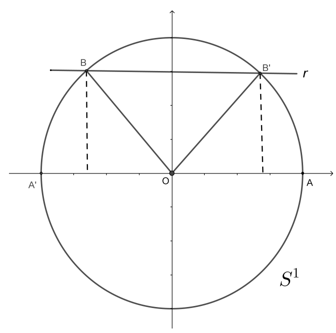
Fonte: Carmo, Morgado e Wagner (2005)

Iremos verificar como é possível determinar a função seno e a função cosseno em qualquer quadrante, conhecidos seus valores no 1º quadrante.

Consideremos separadamente os casos em que a extremidade B do arco AB está no segundo, terceiro ou quarto quadrante.

(a) *x está no segundo quadrante , isto é,* $\frac{\pi}{2} < x < \pi$. Traçamos por B uma reta *r* paralela ao eixo das abscissas que intersecta novamente S^1 em B' (figura 19). É claro que $m\widehat{AB'} = m\widehat{BA'} = \pi - xe, portanto, senx = sen(\pi - x)$ e $\cos x = -\cos{(\pi - x)}$.

Figura 19 – x $\in$ 2° quadrante

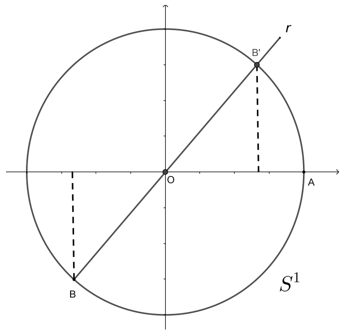


Fonte: Carmo, Morgado e Wagner (2005)

(b) *x está no terceiro quadrante, isto é,* $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$.

Tomando como *r* a reta que liga O a B (figura 20), obteremos $senx = -sen(x - \pi)$ e $\cos x = -\cos{(x - \pi)}$.

Figura 20 – $x \in 3°$ quadrante



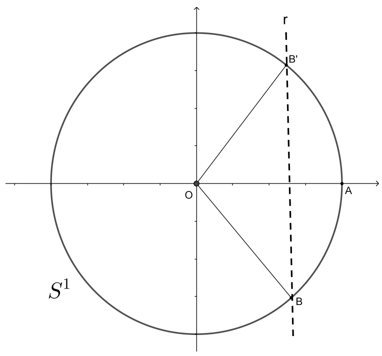
Fonte: Carmo, Morgado e Wagner (2005)

(c) *x está no quarto quadrante, isto é,* $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$.

Tomando como r uma reta paralela ao eixo das ordenadas passando por B, obteremos $m\widehat{AB'} = 2\pi - x$ e $senx = -sen(2\pi - x)$ e $\cos x = \cos(2\pi - x)$(figura 21) .

A conclusão do que acabamos de fazer é que os valores absolutos das funções trigonométricas estão determinadas pelos valores destas funções no primeiro quadrante.

Figura 21 – $m\widehat{AB'} = (2\pi - x)$



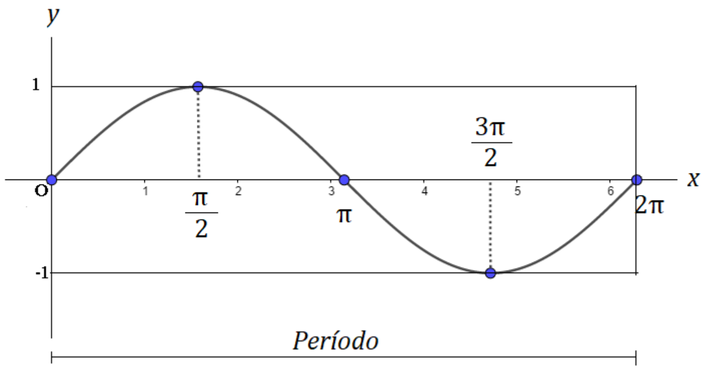
Fonte: Carmo, Morgado e Wagner (2005)

Para se ter uma ideia de comportamento global de uma função trigonométrica é conveniente traçar o seu gráfico. Por exemplo, *o gráfico da função seno*, isto é, o *o conjunto dos pontos do plano de coordenadas (x,sen x), reúne em uma figura todas as informações que obtivemos sobre a função seno.* A princípio, seria necessário conhecer todos todos os pontos (x, sen x) para poder traçar o gráfico. Entretanto, o conjunto de pontos de que já dispomos permite traçar uma figura bastante aproximada do gráfico que está reprsentada na figura (22).

Da mesma maneira, obteríamos o *o gráfico do cosseno*, isto é, o conjunto dos pontos do plano de coordenadas (x, cos x) (figura 23).

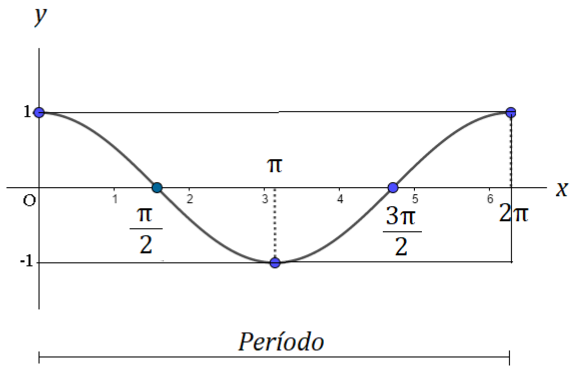
Observe que o seno e cosseno variam de -1 e 1. Para obetrmos os gráficos completos dessas funções, repetiremos os gráficos anteriores uma infinidade de vezes como se pode ver nas figuras (24 e 25).

Figura 22 – $y = senx$ *(um período)*



Fonte: Carmo, Morgado e Wagner (2005)

Figura 23 – $y = cosx$ *(um período)*



Fonte: Carmo, Morgado e Wagner (2005)

Observando as figuras 24 e 25, percebemos uma grande semelhança entre as duas curvas. Na realidade elas são idênticas. Esta curva, chamada senoide, é a mesma em ambos casos. O gráfico da função cosseno é apenas o resultado de uma translação de $\frac{\pi}{2}$ para a esquerda no gráfico da função seno.

A função tangente foi definida por $tgx = \frac{senx}{cosx}$ para $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$. Vamos mostrar que tgx pode ser medida algébrica de um segmento. Consideremos uma reta orientada tangente em A a S^1 como na figura 26 e seja AB um arco de medida x. A reta r que contém O e B determina B' em S^1 e T no novo eixo. Mostremos que tg x = mAT, ou seja, tg x é a medida algébrica do segmento AT.

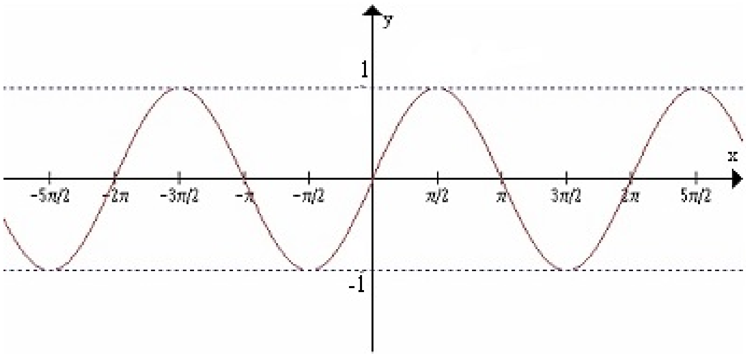
(a) *B está no primeiro ou terceiro quadrante.* Os triângulos *OCB, OSB,OC'B e OS'B'* da figura 26 são congruentes e semelhantes ao triângulo OAT. Portanto,

$$tgx = \frac{senx}{cosx} = \frac{\overline{OS}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{AT}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{AT}}{1} = mAT$$

e

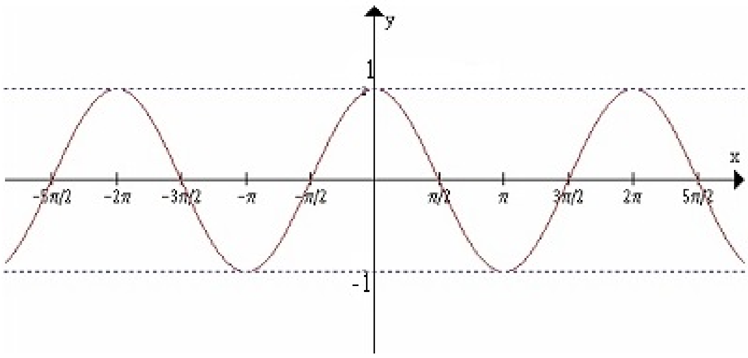
$$tg(x+\pi) = \frac{sen(x+\pi)}{cos(x+\pi)} = \frac{\overline{-OS'}}{\overline{-OC'}} = \frac{\overline{C'B'}}{\overline{OC'}} = \frac{\overline{AT}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{AT}}{1} = mAT$$

Figura 24 – $y = senx$



Fonte: Carmo, Morgado e Wagner (2005)

Figura 25 – $y = cosx$



Fonte: Carmo, Morgado e Wagner (2005)

(b) *B está no segundo ou quarto quadrante.*

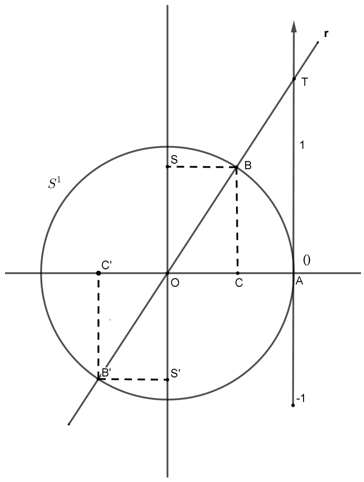
As relações de semelhanças entre os triângulos da figura 27 são análogas. Obteremos, nesse caso,

$$tgx = tg(x + \pi) = -\overline{AT} = mAT.$$

Observe que, em qualquer caso, $tgx = tg(x + \pi)$, o que mostra que a tangente é uma função periódica com período π. Para valores próximos e menores que $\frac{\pi}{2}$, a tangente torna-se maior que qualquer número positivo dado, e para valores próximos e maiores que $\frac{\pi}{2}$, a tangente torna-se menor que qualquer número dado. Podemos então esboçar o gráfico da função tangente no intevalo[0,π] e repeti-lo em todos os intervalos da forma [kπ,((k+1)π] (figura 28).

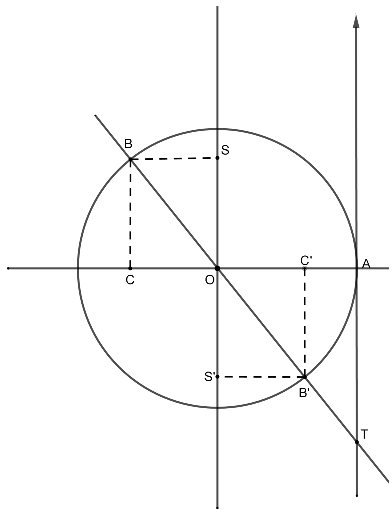
Além da função tangente, existe outras funções trigonométricas que derivam da função seno e função cosseno, a saber $cotgx = \frac{cosx}{senx}$, $secx = \frac{1}{cosx}$ e$cossecx = \frac{1}{senx}$, que são chamadas respectivamentes de cotangente, secante e cossecante. O que se pode observar dessas funções é que sendo definidas por meio de quocientes, têm seus domínios restritos aos números reais para os quais o denominador é diferente de zero.

Figura 26 – A unidade do novo eixo é o raio do círculo



Fonte: Carmo, Morgado e Wagner (2005)

Figura 27 – 2º ou 4º quadrante



Fonte: Carmo, Morgado e Wagner (2005)

3.3.5 A lei do cosseno

Seja *ABC* um triângulo qualquer com os lados a, b e c. Vamos demonstrar que $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.cos\hat{A}$. Tracemos então a altura BH e consideremos os dois seguintes casos:

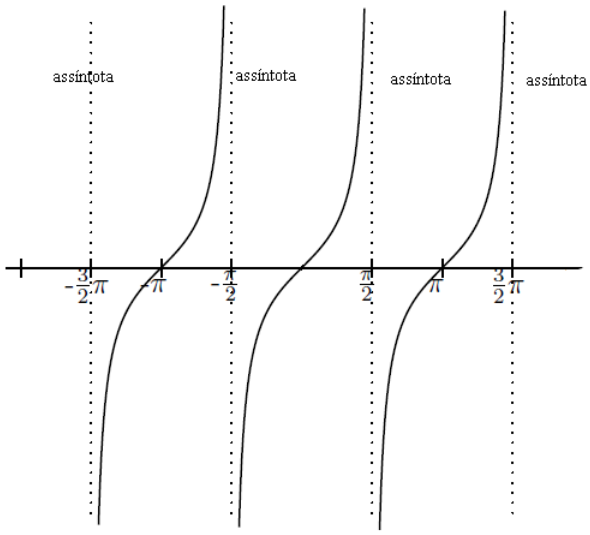
a) Â é agudo. Fazendo $\overline{BH} = h$ e $\overline{AH} = x$ como na figura 29, temos no triângulo BHC

$$a^2 = h^2 + (b - x)^2$$

ou

$$a^2 = c^2 - x^2 + b^2 - 2bx + x^2$$

Figura 28 – $y = tgx$

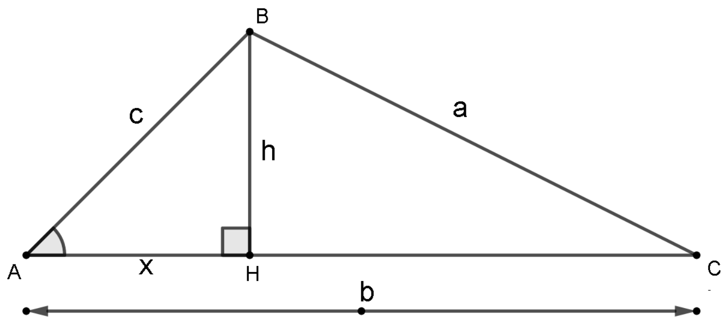


Fonte: Carmo, Morgado e Wagner (2005)

ou

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bx.$$

Figura 29 – Triângulo com três ângulos agudo



Fonte: Carmo, Morgado e Wagner (2005)

Sendo $x = c.cos\hat{A}$, segue-se que $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.cos\hat{A}$, como queríamos

b) Â é obtuso.

Fazendo $\overline{BH} = h$ e $\overline{AH} = x$ na figura 30, temos no triângulo BHC

$$a^2 = h^2 + (b - x)^2$$

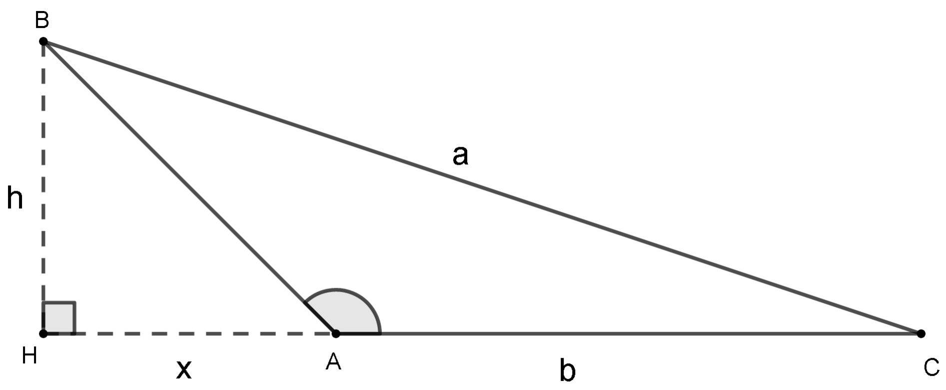
ou

$$a^2 = c^2 - x^2 + b^2 + 2bx + x^2$$

ou

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2bx.$$

Figura 30 – Triângulo com um ângulo obtuso.



Fonte: Carmo, Morgado e Wagner (2005)

Como $x = c.cosB\hat{A}H = c.(-cos\hat{A})$, segue-se que

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.cos\hat{A},$$

como havíamos afirmado. A expressão

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.cos\hat{A}$$

é chamada a *lei do cosseno*. Observe que , se Â é reto, o resultado acima é o teorema de Pitágoras.

A lei do cosseno é uma relação trigonométrica que será utilizada em qualquer triângulo, relaciona seus lados e ângulos, essa lei é utilizada quando se tem dados dois de seus lados e um ângulo oposto a um desses lados, podendo obter o seu terceiro lado.

3.3.6 A lei dos senos

Nesta seção será demonstrado que os comprimentos dos lados são proporcionais aos senos dos ângulos opostos. Para a demostração que será feita, é necessário lembrar que a área de um triângulo ABC é dada por

$$S = \frac{1}{2}.b.c.sen\hat{A}, \tag{3.3}$$

onde *b* e *c* são os comprimentos dos lados que formam o ângulo Â. De fato, traçando a altura BH do triângulo ABC, temos:

a) Se Â é agudo, observando a figura 29, temos

$$S = \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}bcsen\hat{A};$$

b) Se $\hat{A}$ é obtuso, observando a figura 30, temos

$$S = \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}sen(\pi - \hat{A}) = \frac{1}{2}bcsen\hat{A};$$

c) Se $\hat{A}$ é reto,

$$S = \frac{1}{2}bc = \frac{1}{2}bc.1 = \frac{1}{2}bcsen\hat{A},$$

ficando provada em qualquer caso a afirmação (3.3).

Para demonstrar agora a lei dos senos, começamos por multiplicar por *a* (comprimento do lado BC do triângulo) a relação (3.3) para obter

$$aS = \tfrac{1}{2}abcsen\hat{A} \text{ ou } \tfrac{a}{sen\hat{A}} = \tfrac{abc}{2S}.$$

Por raciocínio inteiramente análogo, temos ainda para a área do triângulo ABC as expressões

$$S = \frac{1}{2}acsen\hat{B} \tag{3.4}$$

$$S = \frac{1}{2}absen\hat{C}, \tag{3.5}$$

o que nos permite escrever

$$\tfrac{b}{sen\hat{B}} = \tfrac{abc}{2S} \text{ e } \tfrac{c}{sen\hat{C}} = \tfrac{abc}{2S}.$$

Temos então que em qualquer triângulo ABC vale a relação

$$\frac{a}{sen\hat{A}} = \frac{b}{sen\hat{B}} = \frac{c}{sen\hat{C}},$$

conhecida como a *lei do seno.*

É importante notar que esta relação nos informa que o triângulo ABC é semelhante ao triângulo cujos lados medem $sen\hat{A}$, $sen\hat{B}$ e $sen\hat{C}$. Diversas relações entre ângulos de um triângulo podem ser obtidas daí.

A lei do seno é uma relação trigonométrica que será utilizada em qualquer triângulo e relaciona seus lados e ângulos, essa lei é utilizada quando se tem dados dois de seus ângulos e um lado, podendo obter os outros lados.

4 PROPOSTA DAS SITUAÇÕES DESENCADEADORA DE APRENDIZAGEM

Este capítulo trará as situações desencadeadoras de aprendizagem, as quais foram elaboradoras com uma intencionalidade de que os estudantes obtenham os conhecimentos científicos e essas situações buscam adquirir as habilidades encontradas na BNCC.

Segundo Moura et al. (2010) na Atividade Orientadora de Ensino as necessidades, motivos, objetivos, ações e operações do professor e dos estudantes se mobilizam inicialmente por meio da situação desencadeadora de aprendizagem. Esta é organizada pelo professor a partir dos seus objetivos de ensino que, como dissemos, se traduzem em conteúdos a serem apropriados pelos estudantes no espaço de aprendizagem. As ações do professor serão organizadas inicialmente visando colocar em movimento a construção da solução da situação desencadeadora de aprendizagem. Essas ações, por sua vez, ao serem desencadeadas, considerarão as condições objetivas para o desenvolvimento da atividade: as condições materiais que permitem a escolha dos recursos metodológicos, os sujeitos cognoscentes, a complexidade do conteúdo em estudo e o contexto cultural que emoldura os sujeitos e permite as interações sócio-afetivas no desenvolvimento das ações que visam o objetivo da atividade - a apropriação de certo conteúdo e do modo geral de ação de aprendizagem.

As propostas desencadeadoras, as quais foram elaboradas buscando produzir uma ZDP que possibilite a alteração do pensamento empírico (experiências adquiridas pela observação dos estudantes ao longo da sua história), para o pensamento teórico (significação do processo de relação do ser humano e o mundo, enquanto necessidades, regularidades e, posteriormente, criação de conceitos). Para tal, consideramos a hipótese de que a percepção do movimento do histórico pelo lógico, a reprodução do substancial, da transformação do vir a ser do objeto, da história de sua geração e evolução se realiza nas diversas formas de movimento do pensamento (KOPNIN, 1978). Para este trabalho, foram estruturadas quatro SDA, planejadas com a intencionalidade de mobilizar os conceitos da Trigonometria.

As prospostas desencadeadoras de aprendizagem foram elaboradas com intuito de atingir as habilidades recomendadas pela BNCC, onde cada situação abordará um assunto, metodologia, duração e de que forma a teoria histórico cultural está sendo abordada.

1ª SITUAÇÃO DESENCADEADORA DE APRENDIZAGEM

Habilidade Brasil (2018)(EM13MAT308): Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.

Assunto: Semelhança de triângulos.

Metodologia: A turma será dividida em cinco grupos para a realização dessa situação, tem que acontecer em um dia que tenha sol para que se obtenha a sombra originada da luz solar, uma dupla de cada grupo irá até pátio e irá se posicionar para obter a sombra, as duplas irão anotar as medidas das sombras e das alturas utilizando uma casa decimal.

Materiais utilizados: Trena, lápis, caneta, caderno.

Duração: 2 aulas de 50 minutos.

Pré requisito: Tipos de triângulos, perpendicularismo.

Um pouco de história

Os antigos babilônios e egípcios conheciam e usavam alguns teormas sobre razões entre os lados de triângulos semelhantes, mas não dominaram teoricamente o assunto, já os gregos, iniciaram um processo de sistematização desse conhecimento, iniciando a elaboração da trigonometria.

Não se sabe quando penetrou na matemática o uso sistemático do círculo de 360°, mas parece dever-se em grande parte a Hiparco através de sua tabela de cordas e cuja influência originou-se da astronomia babilônica construída a partir do sistema de numeração sexagesimal.

Os termos seno e cosseno surgiram a partir das necessidades de resoluções de certos problemas inseridos no contexto da astronomia, através da função corda - segmento de reta que une os dois pontos extremos de um arco de circunferência - estudado por alguns gregos

Onde está a sua sombra?

Adaptação (MONTEIRO, 2016). Inicialmente, como proposto na metodologia, os estudantes deverão registrar os valores medidos na tabela 4, o professor acompanhará todo o processo da atividade para auxiliar os estudantes quando for necessário para que não tenha erros nas medidas.

Tabela 4 – Medidas

	Altura (cm)	Sombra(cm)
Estudante 1		
Estudante 2		

Após os grupos preencherem a tabela, o professor fará alguns questionamentos.

1º Qual a figura pode ser formada entre o raio do sol, a altura e a sombra?

2º É possível calcular esse lado (raio do sol)? De que forma?

3º É possível calcular o ângulo entre o raio do sol e a sombra?

Após esses questinamentos os estudantes terão que preencher uma nova tabela com as seguintes razões:

Tabela 5 – Razões

	$\frac{sombra}{altura}(cm)$	$\frac{altura}{raiodosol}(cm)$	$\frac{altura}{raiodosol}(cm)$
Grupo 1			
Grupo 2			
Grupo 3			
Grupo 4			
Grupo 5			

Espera-se que os estudantes identifiquem a figura geométrica, que nomeie os lados desse triângulo retângulo e sejam capazes de relacionar essas razões encontradas como seno, cosseno e tangente.

Após socializar os valores o professor questionará o por quê das razões serem iguais ou com valores tão próximos já que as medidads das alturas e das sombras são diferentes.

Para o desenvolvimento de um bom processo na atividade matemática em sala de aula intervêm alguns fatores determinantes que se desenvolvem através da definição, elaboração e planejamento de uma unidade didática. À medida que esta unidade é realizada, o estudante avança na obtenção de seus conhecimentos e habilidades matemáticas.

A Atividade Orientadora de Ensino é uma forma de planejar o processo de ensino-aprendizagem em torno de um elemento de conteúdo que passa a ser o eixo integrador do processo, conferindo consistência e significado. Esta forma de organizar conhecimentos e experiências deve considerar a diversidade de elementos que contextualizam o processo (nível de desenvolvimento do aluno, ambiente sociocultural e familiar, Projeto Curricular, recursos disponíveis) para regular a prática dos conteúdos, selecionar os objetivos básicos que ela pretende alcançar, nas diretrizes metodológicas com as quais irá trabalhar as experiências de ensino-aprendizagem necessárias ao aperfeiçoamento desse processo.

Ao envolver a história com as atividades de sala de aula, o estudante pode ver refletida a importância dos diferentes processos de construção pelos quais um objeto matemático passou, mas também mostra os diferentes cenários onde surgiu a necessidade de resolver as questões colocadas pelo estudante dando sentido às abordagens teóricas observadas no âmbito escolar.

Esta classe de estudos oferece contribuições significativas para a Educação Matemática, uma vez que o conhecimento dos diversos aspectos e conceitos que influenciaram a construção de uma teoria permite uma ideia mais completa do discurso matemático a ser formado em que outros elementos constituintes da teoria matemática e sua atividade, que geralmente se escondem sob uma apresentação acabada e claramente formal.

2ª Situação Desencadeadora de Aprendizagem

Assunto: Círculo trigonométrico

Metodologia: A sala será dividida em três grupo e deverão marcar os valores dos ângulos no círculo trigonométrico, encontrar o valor do seno , cosseno e tangente do ângulo no 1º quadrante e depois nos demais quadrantes, utilizando um triângulo móvel. Cada grupo receberá um círculo trigonométrico unitário e um grupo receberá um triângulo retângulo com o ângulo de 30º e hipotenusa igual a um, o segundo grupo um triângulo retângulo com ângulo de 45ºe hipotenusa igual a 1 e o terceiro grupo o triângulo retângulo de 60º e hipotenusa igual a 1.

Objetivo: induzir os estudantes a explorar construtivamente o ciclo trigonométrico, com o intuito de obter valores para o seno, cosseno e tangente de um ângulo. Espera-se também que os estudantes relacionem os valores trigonométricos no 1º quadrante com os demais quadrantes do círculo trigonométrico e que interpretem os valores encontrados no círculo trigonométrico com suas variações para cada quadrante.

Materiais utilizados: Triângulo, círculo trigonométrico, lápis, caneta, borracha.

Duração: 2 aulas de 50 minutos.

Um pouco de História

A divisão do círculo em 360° deve-se ao fato de que para os babilônios era muito fácil dividir o círculo em seis partes iguais e cada uma delas equivalia ao 60 na base deles. Desse modo, o círculo passava a a ter 360 °, sem contar que esse valor sofria também da influência de ano ter 360 dias segundo as concepções babilônicas da época. Esses dados foram se difundindo através das relações de comércio entre os gregos, árabes, hindus e posteriormente por toda a Europa até tomar a forma conhecida atualmente. Após algum tempo, introduziu-se também a medida dos arcos em radianos, onde o ciclo completo apresenta a medida de 2π (360°) e os outros arcos são representados por frações dessa medida e que se referem a partes da circunferência.

Uma volta pelo círculo.

Preenche a tabela abaixo.

Tabela 6 – SDA 2

Graus	0°	30°	45°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°	360°
Radianos	0							π						2π

Após preencher a tabela, os grupos deverão explicar o procedimento utilizado para encontrar os valores obtidos.Caso algum estudante tenha dificuldade em fazer essa conversão de grau para radiano o professor ajudará.

Tabela 7 – 1º Quadrante

	θ	$sen\theta$	$cos\theta$	$tg\theta$
Grupo 1	30º			
Grupo 2	45º			
Grupo 3	60º			

Tabela 8 – 2º Quadrante

	θ	$sen\theta$	$cos\theta$	$tg\theta$
Grupo 1	150º			
Grupo 2	135º			
Grupo 3	120º			

Tabela 9 – 3º Quadrante

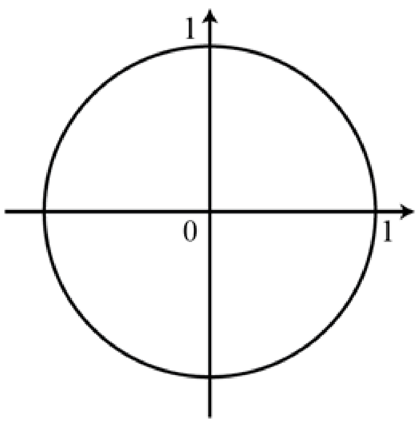
	θ	$sen\theta$	$cos\theta$	$tg\theta$
Grupo 1	210º			
Grupo 2	225º			
Grupo 3	240º			

Tabela 10 – 4º Quadrante

	θ	$sen\theta$	$cos\theta$	$tg\theta$
Grupo 1	330º			
Grupo 2	315º			
Grupo 3	300º			

Após encontrar os valores de seno e cosseno nos quatros quadrantes o professor espera que os estudantes percebam: quandos os ângulos são complementares ($\alpha + \theta = 90°$), $sen\alpha = cos\theta$; $sen(\pi - \alpha) = sen\alpha$ e $cos(\pi - \alpha) = -cos\alpha$; dentre outras reduções ao primeiro quadrante.

Figura 31 – Círculo Trigonométrico



Fonte: Autora

3ª Situação Desencadeadora de Aprendizagem

Habilidade BNCC:(EM13MAT306) Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria.

Assunto: Fenômeno periódico.

Objetivo: Trabalhar o conceito de função periódica.

Materiais utilizados: Uma folha de papel milimetrado, lápis, borracha.

Metodologia: Essa atividade será feita em dupla, os estudantes deverão resolver o problema com um colega.

Duração: 1 aula de 50 minutos.

Abra a boca e abra os olhos!

Adaptação (NERY; MIRANDA, 2014) Uma pessoa leva um tempo t = 4 segundos para abrir (em câmera lenta), a sua boca ao máximo. Durante este movimento, suas arcadas dentárias (superior e inferior) se afastarão a uma distância d. Em seguida, fecha-se a boca, conforme as mesmas condições de abertura."

Esboce um gráfico, modelo deste fenômeno, considerando o início do primeiro movimento com fechada, seguida de sucessivos outros movimentos, durante 40 segundos, adote d = 5cm.

Qual a variável dependente, e qual a váriável independente?

Há um ciclo que se repete ao se observar a sequência de movimentos?

Quantos ciclos completos você visualiza no gráfico ?

Com base no que foi referenciado neste trabalho não se pretende que os estudantes reproduzam o que aconteceu na história, mas sim que realizem uma reconstrução de condições como: a interação matemática da experiência proposta; o conceito de razão deve surgir naturalmente da necessidade do seu uso, para isso é necessário confrontar os alunos com atividades onde, a partir do uso da geometria, proporção, relação e medição, se alcance a compreensão do objeto trigonométrico. O que foi dito acima pretende contribuir para o desenvolvimento do pensamento trigonométrico; e para isso, são utilizadas atividades em sala de aula, onde incorporam um sentido histórico como facilitador da aprendizagem da trigonometria, pois devido às diferentes possibilidades de exploração que oferece, pode contribuir para a compreensão e desenvolvimento de conceitos e habilidades típicas de a matemática.

Os processos gerais e estão relacionados à aprendizagem, como raciocinar, resolver e propor problemas; a comunicação; modelagem e elaboração; comparação e exercício de procedimentos. Conhecimento básico, que se relaciona com os conceitos específicos da matemática e que são organizados em cinco níveis de pensamento: pensamento numérico e sistemas numéricos, pensamento espacial e sistemas geométricos, pensamento métrico e sistemas métricos, pensamento aleatório e sistemas de dados e pensamento variacional e algébrico e sistemas analíticos.

De acordo com a tendência histórico-cultural transmitida neste trabalho, o aluno precisa saber manipular os conceitos de trigonometria para garantir uma boa aprendizagem da matemática do plano de estudos, esses tópicos são a base da matemática, portanto, se um livro os inclui e também seu conteúdo em cada página é uma profusão de símbolos e fórmulas com os quais o estudante deve se familiarizar, então é apropriado e significativo para as estratégias que facilitam o planejamento e desenvolvimento do ensino de professores.

4ª Situação Desencadeadora de Aprendizagem

Habilidade BNCC:Identificar as características fundamentais das funções seno e cosseno (periodicidade, domínio, imagem), por meio da comparação das representações em ciclos trigonométricos e em planos cartesianos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

Assunto: Função seno , função cosseno e função tangente.

Objetivo: Transportar os valores da tabela para o gráfico, encontrando o período, a amplitude, domínio, imagem.

Metodologia: Será apresentado aos estudantes um pequeno texto com as características da roda gigante de FG Big Wheel. Na situação os estudantes se imaginarão embarcando na roda e dando 3 voltas completas no sentido anti-horário. Em seguida preencheram uma tabela com a altura em função do tempo em minutos e desenharam o gráfico da função.

Materiais utilizados: Papel milimetrado, lápis, borracha.

Duração: 4 aulas de 50 minutos.

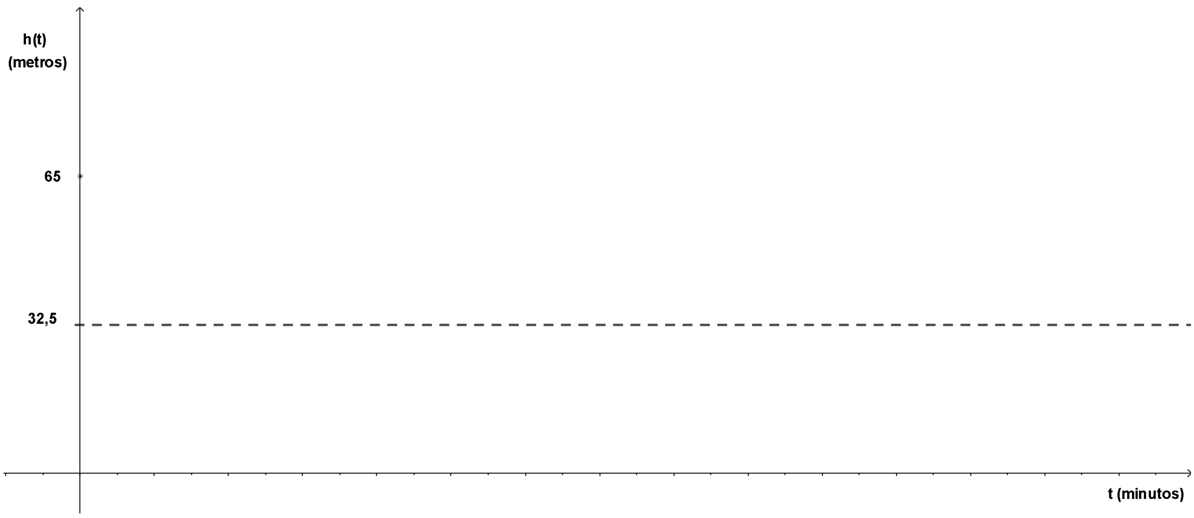
Roda gigante

Adaptação (BATISTA, 2015). Considerada a maior roda gigante estaiada da América Latina, a FG Big Wheel Balneário Camboriú (SC). A atração tem 65 metros de diâmetro e seu ponto mais alto fica a 82 metros acima do nível do mar. Localizada em frente à praia Pontal Norte, as cabines são 360° e permitem vista panorâmica da orla da cidade e da Mata Atlântica. Possui 36 cabines com espaço para seis pessoas. O passeio tem duração de aproximadamente 20 minutos, que é o tempo de uma volta completa.

Suponha que você embarcou nessa roda-gigante no instante t=0, e deu três voltas completas. Seja h=h(t) a sua altura acima do solo (não levando em conta a altura do seu assento), como uma função do número t de minutos. Supondo que a roda gire no sentido anti-horário, vamos calcular alguns valores de h(t).

t(minutos)	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
h(t) (metros)													

Desenhar o gráfico da função roda gigante



É possível que os estudantes liguem os pontos por segmentos de retas, daí o professor deverá solcitar que diminua o intervalo de tempo até que se chegue no objetivo.

Depois de feita essa relação da função roda gigante os estudantes deverão transportar os valores encontrado na atividade 2 para o plano cartesiano.

Será questionado qual a altura máxima e a altura mínima que a roda gigante pode alcançar.

Qual o tempo que esse gráfico se repete?

Com essas informações pode-se fazer uma relação com as funções trigonométricas, domínio, imagem, período.

Os estudantes não conseguirão encontrar a solução para os problemas levantados se não conhecerem o conceito de comprimento e diâmetro, ou se apesar de os conhecerem não souberem utilizá-los. A necessidade de encontrar uma solução para os problemas levantados os levará a buscar relações que lhes permitam propor respostas, neste caso, estas podem ser dadas pela razão entre o comprimento de uma circunferência e seu diâmetro.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A busca por melhoria na educação brasileira é muito grande, pois vários pesquisadores e professores buscam novas metodologias para tornar suas aulas mais eficientes e dinâmicas para despertar o interesse dos estudantes. A sugestão de metodologia desse trabalho busca atender as competências e habilidades da BNCC, fundamentada pela Teoria Histórico Cultural de Vigotski, onde não se pode descartar os conhecimentos que os estudantes já obtiveram e a partir daí obter novos conhecimentos.

A seleção de atividades que estimulem a participação e reação dos estudantes é um aspecto crucial no processo de ensino-aprendizagem, uma vez que eles tenham se envolvido no processo de ensino-aprendizagem por meio do uso de atividades criativas, os mesmos estarão mais abertos para internalizar e aplicar os conceitos, ideias e temas que são facilitados na sala de aula. As atividades não são o fim, mas são importantes. A implementação de atividades bem selecionadas pode leva-lo a percepções e reflexões profundas. As atividades que o professor realiza em suas aulas são ferramentas essenciais para o bom desenvolvimento de uma aula.

Em relação a proposta de desenvolvimento das situações desencadeadoras de aprendizagem para os estudantes adquirirem os conceitos trigonométricos foi visto um universo de possibilidades e restrições que, através das investigações realizadas, sustentam a ideia de que as atividades orientadoras como trabalho experimental são relevantes, quando é necessário quebrar a tendência comum do ensino de trigonometria e deseja-se destacar a aprendizagem por exploração ou experimentação, onde se revelam condições que envolvem a participação ativa de todos os estudantes na busca de uma abordagem das razões trigonométricas.

Este trabalho foi planejado com o intuito de ser aplicado na turma do 2° do ensino médio da Escola Estadual de Barra de Pojuca, porém não foi possível a aplicação , pois conforme Decreto nº 19.529 de 16 de março de 2020, publicado no Diário Oficial do Estado em 17 de março de 2020, as aulas foram suspensas a partir desta data, devido a pandemia de Coronavírus, com isso não foi possível obter dados reais sobre a validade das situações propostas.

Uma perspectiva futura é apresentar esse trabalho a Coordenação da escola e aplica-lo para se obter os dados reais e verificar se com as situações propostas será obtido os objetivos esperados.

Referências

ASBAHR, F. da S. F. *A pesquisa sobre a atividade pedagógica: contribuições da teoria da atividade*. [S.l.]: Revista Brasileira de Educação, nº 29,maio/jun/jul/ago,p.108– 118, 2005. 16

BATISTA, V. N. *Uma proposta metodológica para o ensino das funções trigonométricas*. Dissertação (Mestrado) — UFSCar, 2015. 56

BOGDEN, R. C.; BIKLEN, S. K. *Investigação qualitativa em Educação*. Portugal: Porto Editora, 1994. 4

BORGES, L. B. *Modelagem matemática no ensino de trigonometria*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Goiás, 2020. 7

BOYER, C. B. *História da Matemática*. São Paulo: Editora Blucher, 2012. 24, 26

BRASIL. *Orientaçoes Curriculares para o ensino médio; volume 2*. Brasília, DF: Ministério da educação, 2006. 20

BRASIL. *Parâmetros curriculares nacionais: Matemática/Secretaria de Educação Fundamental - Ciências da Natureza,Matemática e suas Tecnologias*. Brasília, DF: Ministério da educação, 2017. 22

BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, DF: Ministério da educação, 2018. 8, 49

CALASANS, A. O. *Uma proposta de sequencia didática para o ensino de trigonometria no ensino médio*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Santa Cruz, 2019. 7

CAMPOS, D. M. de S. *Psicologia da Aprendizagem*. Petrópolis - RJ: Editora Vozes, 1986. 14

CARMO, M. P. do; MORGADO, A. C.; WAGNER, E. *Trigonometria /Números Complexos*. 5. ed. Rio de Janeiro: [s.n.], 2005. 27, 29, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46

COSTA, N. M. L. da. *História da Trigonometria*. PUCSP, 1997. 1-18 p. 25

EVES, H. *Introdução à História da Matemática*. 5^a. Campinas - São Paulo: Editora da Unicamp - Tradução Hygino H. Domingues, 2011. 25

IEZZI, G. *Fundamentos de Matemática Elementar, 3 - Trigonometria*. 9^a. São Paulo: Atual, 2013. 27

JUNQUEIRA, R. F. *Quando inventaram o relógio, como sabiam que horas eram?* [S.l.]: Mundo estranho. Por Fernando Badô. Disponível em: < https://mundoestranho.abril.com.br/geografia/quando-inventaram-o-relogio-como-sabiamque-horas-eram/>Publicado em 18 abr. 2011. Acesso em 14 de abril de 2021, 2011. 24

KENNEDY, E. S. *História da Trigonometria*. São Paulo: Atual - Tradução Hygino H. Domingues, 1992. 23, 24

LAKATOS, E. M.; MARCONI, M. de A. *Fundamentos de Metodologia Científica*. 8^a. São Paulo: Atlas, 2017. 4

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; AND, A. C. M. E. W. *A matemática do Ensino Médio - Volume 1*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática - SBM, 2006. 27

MINAYO, M. C. de S. *Amostragem e Saturação em Pesquisa Qualitativa: consensos e controvérsias.* Rio de Janeiro: Revista Qualitativa, v.5, n.7, 2017. 4

MONTEIRO, K. G. *Uma proposta para o ensino de trigonometria e semelhança de triângulos no Ensino Fundamental*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio Grande, 2016. 49

MOURA, M. O. de et al. *A atividade orientadora de ensino como unidade entre ensino e aprendizagem. In: MOURA, Manoel O. (Coord.). A atividade pedagógica na teoria histórico-cultural*. Brasília, 2010. 81-110 p. 15, 16, 48

NERY, L. P. R.; MIRANDA, D. F. de. *Explorando a trigonometria do modelo harmônico simples: uma aplicação ao estudo de sinais*. Dissertação (Mestrado) — PUC Minas, 2014. 54

PALMERIM, A. S. *Uma proposta para o ensino de trigonometria por meio do software geogebra*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal DO Pará, 2008. 7

PASCHOAL, G. S. *O ensino de trigonometria no ensino médio: uma abordagem com a resolução de problemas*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Santa Maria, 2018. 7

ROLKOUSHI, E. *Dos Direitos de Aprendizagem e do Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa à Base Nacional Comum Curricular: o caso da alfabetização matemática*. Revista Horizontes, 2018. 119-131 p. 9

SANTOS, L. da S. *O ensino de trigonometria no triângulo retângulo mediado pela atividade orientadora de ensino: um estudo sobre processo de aprendizagem dos alunos na educação básica*. Dissertação (Mestrado) — Instituto Federal dO Piauí, 2019. 7

SANTOS, R. de S. *Desenvolvimento do Pensamento Teórico no Ensino da Termodinâmica em Situações Desencadeadoras de Aprendizagem. Dissertação (Mestrado)*. Dissertação (Mestrado) — UFLA, 2018. 10

SILVA, L. J. da. *Trigonometria racional: uma nova abordagem para o ensino de trigonometria*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal da Bahia, 2013. 7

VIGOTSKI, L. S. *A formação social da mente*. São Paulo: Martins Fontes, 1998. 10

Anexos

ANEXO A – Tabela Trigonométrica

	Tabela Trigonométrica		
	Seno	Cosseno	Tangente
1°	0,0175	0,9998	0,0175
2°	0,0349	0,9994	0,0349
3°	0,0523	0,9986	0,0524
4°	0,0698	0,9976	0,0699
5°	0,0872	0,9962	0,0875
6°	0,1045	0,9945	0,1051
7°	0,1219	0,9925	0,1228
8°	0,1392	0,9903	0,1405
9°	0,1564	0,9848	0,1584
10°	0,1736	0,9848	0,1763
11°	0,1908	0,9816	0,1944
12°	0,2079	0,9781	0,2126
13°	0,225	0,9744	0,2309
14°	0,2419	0,9703	0,2493
15°	0,2588	0,9659	0,2679
16°	0,2756	0,9613	0,2867
17°	0,2924	0,9563	0,3057
18°	0,3090	0,9511	0,3249
19°	0,3256	09455	0,3443
20°	0,3420	0,9397	0,3640
21°	0,3584	0,9336	0,3839
22°	0,3746	0,9272	0,4040
23°	0,3907	0,9205	0,4245
24°	0,4067	0,9135	0,4452
25°	0,4226	0,9063	0,4663
26°	0,4384	0,8988	0,4877
27°	0,4540	0,8910	0,5095
28°	0,4695	0,8829	0,5317
29°	0,4848	0,8746	0,5543
30°	0,5000	0,8660	0,5774
31°	0,5150	0,8572	0,6009
32°	0,5299	0,8480	0,6249
33°	0,5446	0,8387	0,6494
34°	0,5592	0,8290	0,6745
35°	0,5736	0,8192	0,7002
36°	0,5878	0,8090	0,7265
37°	0,6018	0,7986	0,7536
38°	0,6157	0,7880	0,7813
39°	0,6293	0,7771	0,8098
40°	0,6428	0,7660	0,8391
41°	0,6561	0,7547	0,8693
42°	0,6691	0,7431	0,9004
43°	0,6820	0,7314	0,9325
44°	0,6947	0,7193	0,9657
45°	0,7071	0,7071	1

	Tabela Trigonométrica		
	Seno	Cosseno	Tangente
46°	0,7193	0,6947	1,0355
47°	0,7314	0,6820	1,0724
48°	0,7431	0,6691	1,1106
49°	0,7547	0,6561	1,1504
50°	0,7660	0,6428	1,1918
51°	0,7771	0,6293	1,2349
52°	0,7880	0,6157	1,2799
53°	0,7986	0,6018	1,3270
54°	0,8090	0,5878	1,3764
55°	0,8192	0,5736	1,4281
56°	0,8290	0,5592	1,4826
57°	0,8387	0,5446	1,5399
58°	0,8480	0,5299	1,6003
59°	0,8572	0,5150	1,6643
60°	0,8660	0,5000	1,7321
61°	0,8746	0,4848	1,8040
62°	0,8829	0,4695	1,8807
63°	0,8910	0,4540	1,9626
64°	0,8988	0,4384	2,0503
65°	0,9063	0,4226	2,1445
66°	0,9135	0,4067	2,2460
67°	0,9205	0,3907	2,3559
68°	0,9272	0,3746	2,4751
69°	0,9336	0,3584	2,6051
70°	0,9397	0,3420	2,7475
71°	0,9455	0,3256	2,9042
72°	0,9511	0,3090	3,0777
73°	0,9563	0,2924	3,2709
74°	0,9613	0,2756	3,4874
75°	0,9659	0,2588	3,7321
76°	0,9703	0,2419	4,0108
77°	0,9744	0,2250	4,3315
78°	0,9781	0,2079	4,7046
79°	0,9816	0,1908	5,1446
80°	0,9848	0,1736	5,6713
81°	0,9877	0,1564	6,3138
82°	0,9903	0,1392	7,1154
83°	0,9925	0,1219	8,1443
84°	0,9945	0,1045	9,5144
85°	0,9962	0,0872	11,4301
86°	0,9976	0,0698	14,3007
87°	0,9986	0,0523	19,0811
88°	0,9994	0,0349	28,6363
89°	0,9998	0,0175	57,2900
90°	1	0	------

Figura 32 – Tabela Trigonométrica.