Universidade Federal do Recôncavo da Bahia
Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas
Programa de Mestrado em Matemática em Rede Nacional
Dissertação de Mestrado

Método Geométrico para Resolução de Problemas de Otimização em 3D e o Uso do Geogebra

Adagilson Silva Sena

Cruz das Almas-Bahia
Agosto de 2021

Método Geométrico para Resolução de Problemas de Otimização em 3D e o Uso do Geogebra

Adagilson Silva Sena

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Recôncavo da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Adson Mota Rocha

Cruz das Almas-Bahia
Agosto de 2021

FICHA CATALOGRÁFICA

S474m Sena, Adagilson Silva.

Método geométrico para resolução de problemas de otimização em 3d e o uso do geogebra / Adagilson Silva Sena._ Cruz das Almas, Bahia, 2021.

66f.; il.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas, Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT.

Orientador: Prof. Dr. Adson Mota Rocha.

1.Matemática – Geometria – Estudo e ensino. 2.Matemática – Geogebra (Programa de computador). 3.Modelos matemáticos – Análise. I.Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas. II.Título.

CDD: 516

Ficha elaborada pela Biblioteca Central de Cruz das Almas - UFRB.
Responsável pela Elaboração - Antonio Marcos Sarmento das Chagas (Bibliotecário - CRB5 / 1615).
(os *dados para catalogação foram enviados pelo usuário via formulário eletrônico*).

Método Geométrico para Resolução de Problemas de Otimização em 3D e o Uso do Geogebra

Adagilson Silva Sena

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Recôncavo da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, Aprovada em 30 de agosto de 2021.

Banca examinadora:

Adson Mota Rocha

Prof. Dr. Adson Mota Rocha (Orientador)
UFRB

Katia Silene F. Lima Rocha

Profa. Dra. Katia Silene Ferreira Lima Rocha
UFRB

Cícero A. da S. Filho

Prof. Dr. Cicero Alfredo da Silva Filho
UESC

Dedico este trabalho a toda minha família, em especial ao meu pai e mãe, irmãs, esposa, a meus amigos e colegas de turma.

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus pela vida, saúde e força concedida para a realização do curso.

Aos meus pais que sempre apostaram tudo na educação de seus filhos, e são os verdadeiros merecedores de toda vitória.

Aos meus amigos pelo apoio de sempre e paciência de quando não pude estar com eles durante o curso.

A todos colegas de turma pela grande amizade e parceria nos estudos, nos almoços, cafés e lanches. Todos sempre por todos. Agradecido demais a cada um de vocês: Aline, André, Ângela, Antônia, Ivana, Leandro, Luciana e Osvanil, em especial a Neto e Misael pela força e incentivo de sempre, e Conceição pelo incentivo e parceria nas viagens de toda quinta-feira.

A todos os professores do PROFMAT da Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, Cruz das Almas, que souberam conduzir o curso de maneira excelente, em especial ao Coordenador Professor Anderson por sempre estar aberto as discussões e atento as nossas demandas, e ao orientador Professor Adson por oferecer o desafio, acompanhar, ensinar, ser paciente e compreensivo a todo momento de dificuldade, discutir e elaborar conjuntamente o trabalho.

Também, não poderei nunca esquecer dos grandes incentivadores do início dessa trajetória, aqueles pra quem eu devo enorme agradecimento por terem mostrado que a matemática seria um caminho a ser seguido. Um grande abraço e obrigado especial aos meus professores do ensino fundamental e médio, muitíssimo obrigado aos Professores Tarcízio, Romeu, Bolinha e João Pedro.

Aos colegas de trabalho que colaboraram e foram pacientes com as ausências nos AC's.

A todos e todas que de alguma forma contribuíram, direta ou indiretamente, para a construção deste trabalho.

"A razão principal de se estudar Matemática é para aprender como se resolvem problemas."

Lester Jr.

Resumo

Nesta dissertação é apresentada uma proposta de resolução de problemas de otimização linear através do método geométrico com a utilização do geogebra. Buscamos fazer uma fundamentação teórica inicialmente para disseminar a importância do tema, apresentando tópicos de otimização linear e mostrando características da formulação matemática e teoremas que fundamentam o método geométrico, procurando soluções em regiões factíveis. O software geogebra vem facilitar a visualização geométrica e ser aliado no propósito de despertar o caráter investigativo e desafiador através da resolução de problemas. Por fim, é feita uma sequência de resolução e discussão passo a passo de problemas propostos.

Palavras-chave: Resolução de problemas; Ensino de Matemática; Ensino Médio; Programação Linear.

Abstract

This dissertation presents a proposal for solving linear optimization problems with three variables through the geometric method and with the using of the geogebra. Initially, we seek to make a theoretical foundation to disseminate the importance of the theme, presenting topics of linear optimization and showing characteristics of the mathematical formulation and theorems that support the geometric method, looking for solutions in feasible regions. The geogebra software facilitates geometric visualization and is an ally in order to awaken an investigative and challenging character through problem solving. Finally, there is a sequence of step-by-step resolution and discussion of proposed problems.

Keywords: Problem solving; Geometric Method; Linear Optimization.

Sumário

Introdução

Nos últimos anos, muito se tem pautado sobre a atratividade no ensino da matemática, através da inserção de novas tecnologias e resolução de problemas.

Resolver problemas é intrínseco do ser humano. A vida nos apresenta diversos desafios diariamente nas mais variadas áreas de profissões, que vão desde o ato de lecionar, a construção de casas e pontes, a busca pela cura de doenças, a melhoria do tráfego urbano, etc.

É um papel da resolução de problemas aproximar os conteúdos escolares de problemas (questões) do cotidiano, uma vez que o ensino de matemática por meio da Resolução de Problemas apresenta-se como uma proposta metodológica interessante para favorecer o desenvolvimento do pensamento produtivo do aluno, contribuindo para a compreensão, formulação de conjecturas, elaboração de hipóteses e reflexões (SOUTO; GUERIOS, 2020). A partir de situações-problemas práticas e contextualizadas, podemos tornar mais relevante e agradável o ensino da matemática e também oferecer aos alunos uma visão dos problemas de uma forma mais geral. Segundo (BRASIL, 1998), nos PCN's de Matemática, a resolução de problemas busca superar a aprendizagem centrada em procedimentos mecânicos, que permita ao aluno compreender a realidade em que está inserido e desenvolver suas capacidades cognitivas. Nos tempos atuais o ensino básico em matemática tem como competências: compreender; utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica; significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar; acessar e disseminar informações; produzir conhecimentos; resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva (BRASIL, 2016).

Uma importante ferramenta para a resolução de problemas é a técnica de modelagem matemática, que fundamenta o pensamento estratégico, desde a análise de dados passando pelas ações de resolução e comprovação dos resultados.

Alguns dos problemas vistos no ensino médio, como determinar a maior área possível de um terreno retangular em um terreno triangular, determinar a melhor forma de se guardar objetos numa caixa ou galpão a fim de se obter o aproveitamento máximo do espaço, planejar o melhor percurso para uma viagem ou sistema de transporte diminuindo os custos e o tempo, obter o lucro máximo de uma determinada indústria através da minimização dos custos e tempo de produção, e gerar um novo produto a partir de combinações diversas com características convenientes, isto se trata de situações que podem ser formulados como um problema de otimização. Dentro de um conjunto de variáveis e possíveis restrições, a otimização busca encontrar uma melhor solução máxima ou mínima, para as mais variadas áreas do conhecimento.

Tornar o ensino da matemática atraente e desafiador é difícil na atual realidade, o aluno possui uma grande quantidade de informações praticamente a todo momento. Assim (BRANDT; THADEU, 2016) apontam que são vários os caminhos que um professor de matemática pode utilizar em seu planejamento, sendo um desafio, nos diferentes níveis de ensino, a utilização dessas contribuições como elementos que possam viabilizar a elaboração e o desenvolvimento de propostas que possibilitem a aprendizagem. Assim, uma das formas de interferir positivamente nesse espaço de processamento da informação é a inserção das novas tecnologias nas atividades, usando ferramentas que possam dinamizar o processo ensino-aprendizagem. A exemplo disso, temos a ferramenta tecnológica na prática de ensino de matemática: o software Geogebra, criado por Markus Hohenwarter para ser utilizado em ambiente de sala de aula e foi implementado em 2001.

O Geogebra é software livre de fácil instalação e utilização, com vantagem de ser bastante conhecido na área de matemática. O programa oferece uma vasta aplicação para os conteúdos de geometria, álgebra e cálculo, sendo principalmente mais utilizado para o ensino de geometria e funções. A visualização e dinâmica oferecidas favorecem a compreensão e o aprendizado dos alunos.

Conforme (OLIVEIRA, 2016), problemas de otimização de até duas variáveis podem ser usados como suporte para temas transversais no ensino de matemática utilizando o geogebra como ferramenta de visualização e realização de cálculos. Com isso, Silva (2019) ressalta a importância da abordagem geométrica na resolução de problemas de programação linear no espaço 3D, voltado para aplicação a sua região. Neves (2019) sugere a inserção da programação linear, através da otimização no ensino de matemática do ensino médio, utilizando também o geogebra e o microsoft excel (solver) para visualização e resolução dos problemas.

Este trabalho visa complementar e aumentar a base bibliográfica sobre o referido tema, mais especificamente problemas com três variáveis inteiras, abordando a resolução através do método geométrico, utilizando como ferramenta de análise e visualização o geogebra. Para isso, são apresentadas e analisadas aplicações de problemas formulados a partir de aplicações e modelagens matemáticas tratadas pela otimização linear, como os problemas clássicos de otimização: problema de transporte, mistura, corte e empacotamento, planejamento de produção e meio ambiente.

Dividimos nosso trabalho em três capítulos. No Capítulo 1, fizemos uma breve introdução aos problemas de Otimização linear, apresentando algumas definições e principalmente a modelagem matemática. No Capítulo 2, fizemos a fundamentação geométrica associando equações e inequações lineares às regiões geométricas e abordando a resolução do problema do ponto de vista geométrico. Por fim, no Capítulo 3, apresentamos a retomada de problemas e uma sequência de resolução sendo auxiliado pelo software geogebra na visualização gráfica e determinação da solução. Ao final do trabalho, acrescentamos algumas considerações sobre a temática no ensino da matemática.

Capítulo 1

Problemas de Otimização

De acordo com (MUNDIM; DELAVY, 2008), a otimização de processos é de extrema importância nas mais diversas áreas do conhecimento humano, consciente ou inconscientemente, e independente da classe social e cultural, uma parte considerável da nossa vida é usada na busca da melhor escolha e tomada de decisão, na minimização dos custos de um dado produto, no menor gasto de energia e a realização de atividades no menor tempo. Seja na física, em que pode ser usada para determinar a configuração mais estável ou conveniente de uma molécula; na química, em que procuram-se as condições ideais para a realização de um experimento (quimioterapia); na engenharia, em que se deseja relacionar elementos externos como o fluxo de produção, o gasto de energia; na economia, em que se procura o lucro máximo ou o custo mínimo; na geologia, para o estudo da prospecção do solo; e, em muitas outras áreas como a estatística, psicologia e biologia.

É característica da otimização apresentar a matemática de maneira contextualizada e mais aplicada, elemento importante por ser um dos fatores para tornar os alunos mais atraídos e participativos. (MACêDO; LOPES; GUSMãO, 2018), afirmam que a utilização da resolução de problemas por meio da otimização, nos diversos níveis de ensino, pode aumentar o grau de motivação dos alunos no aprendizado da Matemática. Os problemas de otimização, além de serem interessantes para os alunos, é relevante e instigante para os docentes. Este capítulo é dedicado ao estudo de otimização, em seus aspectos teóricos, sua relação com a modelagem matemática, e ideias de problemas de várias áreas que podem ser tratados pela otimização.

Também por ser uma técnica aplicável em diversas áreas do conhecimento, a otimização linear cria oportunidade dos docentes construírem problemas contextualizados e próximos da realidade do ensino médio, e assim oferecer alguns problemas de aplicação prática, como exemplifica (MACêDO; LOPES; GUSMãO, 2018) estes processos de otimização são aplicados frequentemente nas indústrias, quando se quer maximizar a produção, com redução de custos, por exemplo, quando se quer produzir um veículo com maior espaço, utilizando-se uma quantidade menor de material e entre outras aplicações.

A partir do propósito do problema, é possível maximizar ou minimizar uma função linear, obedecendo restrições de um sistema linear de equações ou inequações, daí a relação com a linearidade. Essa característica torna os problemas mais compreensíveis e aplicáveis e, em geral, de fácil resolução.

Neste trabalho, serão tratados problemas de otimização linear, com restrições aos números inteiros. A otimização linear ou programação linear é a técnica mais conhecida e utilizada na área de estudos da Pesquisa Operacional e tem como finalidade descobrir maneiras de tornar mais eficiente a utilização de recursos com intuito de se chegar a um certo objetivo.

1.1 Formulação Geral

O modelo matemático para os problemas de otimização tem um padrão que é ajustado para todos os casos e é constituído por meio da *formulação do problema*, onde são sistematizadas as informações coletadas no problema: a função objetivo, a definição das variáveis de decisão, as relações de igualdade e desigualdade entre as restrições.

A formulação do problema está dentro do escopo da modelagem matemática, segundo (BARBOSA, 2003) a modelagem matemática é um ambiente de aprendizado no qual os alunos são convidados a problematizar e investigar, por meio da matemática, situações com referência na realidade.

Os problemas de otimização são apresentados quase sempre de forma textual discursiva e através de leitura e análise atenciosa determina-se o objetivo proposto pelo problema, verificando as restrições e coletando ao máximo informações precisas. As informações coletadas são transcritas para a linguagem matemática, traduzindo-as em equações ou inequações, destacando a função objetivo das restrições, na construção do modelo linear a ser utilizado como padrão.

Nos modelos de otimização linear, os valores das grandezas envolvidas obedecem algumas hipóteses de linearidade, são elas:

1. *Hipótese de Aditividade* - Estabelece que o todo é igual à soma das partes. Se a produção de um determinado produto custa um valor k e a produção de outro produto custa j, então a produção total dos dois produtos custa $k + j$;

2. *Hipótese de Proporcionalidade* - Na modelagem linear, se o lucro de uma unidade de determinado produto é igual a j, então o lucro da venda de x produtos é igual a $j.x$;

3. *Hipótese de Fracionamento* - Estabelece que as variáveis de decisão podem assumir qualquer valor real, podendo assumir valores fracionários. Vale ressaltar que neste trabalho, buscamos soluções com restrições de integralidade, ou seja, são válidas apenas as soluções para valores inteiros.

De maneira geral, na modelagem matemática dos problemas de otimização encontramos as seguintes características:

- Uma função linear f, chamada de função objetivo, deve ser minimizada ou maximizada, envolvendo duas ou mais variáveis;
- As restrições do problema envolvendo as variáveis e compõem um sistema linear de equações ou inequações;
- Condição de não-negatividade para as possíveis soluções do sistema linear, denominadas variáveis de decisão.

e tem como objetivo achar uma solução que maximize ou minimize f. Para melhor formulação do problema apresentamos as seguintes definições:

Definição 1.1.1. *As restrições do problema que são modelados por equações e inequações envolvendo as variáveis, que formam sistema linear.*

Definição 1.1.2. *As variáveis de decisão são os valores possíveis que satisfazem as restrições do problema.*

Definição 1.1.3. *Função objetivo é a função matemática que se deseja obter o valor máximo ou mínimo, em detrimento dos valores das variáveis de decisão.*

Desta forma, considerando um problema de otimização envolvendo as n variáveis $x_1, x_2, ..., x_n$, obedecendo a condição de não negatividade, e com função objetivo f, temos que um problema de otimização linear na forma padrão consiste em minimizar ou maximizar a função objetivo restrito as condições sobre as variáveis de decisão. Em termos matemáticos consiste em:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar ou maximizar} & f(x_1, x_2, ..., x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \\ & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \ = b_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \ = b_2 \\ \text{sujeito a} & \vdots \\ & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \ = b_m \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0. \end{array} \tag{1.1}$$

onde $a_{i,j} \in \mathbb{R}$, $b_i \in \mathbb{R}$ e $c_j \in \mathbb{R}$ com $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Observe que a função objetivo f é linear com coeficientes $c_1, c_2, \ldots, c_n$ e as restrições do problema são dadas no sistema linear com matriz A e vetor fonte b,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{m1} \end{pmatrix}$$

adicionadas as condições de não negatividade $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0$.

Evidentemente, $m \geq n$ para que as restrições possuam pelo menos uma solução real para que o problema seja bem posto, ou seja, tenha solução.

1.2 Alguns Problemas de Otimização e sua Modelagem

Neste capítulo serão apresentadas algumas modelagens de problemas de otimização linear com intuito de demonstrar a interpretação da linguagem matemática do problema por meio de uma formulação matemática e construção do modelo do modelo padrão.

1.2.1 Problema de Transporte

Este problema consiste em obter o menor custo ou maior lucro ao transportar diversas espécies de produtos (petróleo, energia elétrica, produção agrícola, equipamentos, máquinas) de várias origens para vários destinos. Como por exemplo transportar produtos de uma fábrica para locais de estoque ou distribuição, e em seguida para lojas. No problema de transporte, em geral, são conhecidas as quantidades ofertadas de cada origem e as quantidades também demandadas nos destinos. Isso sempre observando a limitação das quantidades de oferta e demanda. Observamos também um número maior de variáveis (acima de três), neste momento a fim de fazermos a formulação do problema e construção do modelo padrão. Segue um exemplo a seguir.

Exemplo 1.2.1. *Um dado produto é produzido em diferentes fábricas no país com capacidades de produção limitadas e deve ser levado a centros de distribuições (depósitos) onde há demandas a serem satisfeitas. O custo de transporte de cada fábrica a cada depósito é proporcional à quantidade transportada e devem-se achar estas quantidades que minimizem o custo total de transporte do produto em questão.*

Consideremos um produto cujos custos unitários de transporte de cada fábrica para cada depósito, bem como as demandas em cada um dos depósitos e as produções de cada fábrica são apresentado na Tabela 1.2.1.

Tabela 1.1: Dados para o problema de transporte do Exemplo 1.2.1.

Depósitos Fábricas	Florianópolis	Rio de Janeiro	Salvador	Produções
Curitiba	1	0,8	3	470
São Paulo	1,5	0,6	2,5	400
Aracaju	6	5	1,2	400
Demanda	350	300	300	

O objetivo do problema é minimizar o custo total de transporte, cumprindo os limites de produção das fábricas e de demanda dos depósitos. Seja a variável de decisão x_{ij} a quantidade enviada da fábrica i ao depósito j, sendo $i =$ Curitiba, São Paulo, Aracaju e $j =$ Florianópolis, Rio de Janeiro, Salvador. Assim, a função custo total será definida por:

$$\begin{gathered} f(x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{31}, x_{32}, x_{33}) = \\ 1x_{11} + 0,8x_{12} + 3x_{13} + 1,5x_{21} + 0,6x_{22} + 2,5x_{23} + 6x_{31} + 5x_{32} + 1,2x_{33} \end{gathered}$$

as restrições de produção dadas por:

$$\begin{array}{ll} \text{Curitiba} & x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 470 \\ \text{São Paulo} & x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 400 \\ \text{Aracaju} & x_{31} + x_{32} + x_{33} \leq 400 \end{array}$$

e as restrições de demanda dadas por:

$$\begin{array}{ll} \text{Florianópolis} & x_{11} + x_{21} + x_{31} \leq 350 \\ \text{Rio de Janeiro} & x_{12} + x_{22} + x_{32} \leq 300 \\ \text{Salvador} & x_{13} + x_{23} + x_{33} \leq 300 \end{array}$$

A função custo total e os sistemas de desigualdades nas restrições foram construídos a partir de análise das informações contidas na tabela fornecida pelo problema. Como as quantidades a serem distribuídas não assumem valores negativos, para as variáveis de decisão temos ainda a restrição de não-negatividade: $x_{ij} \geq 0$, com $i = 1, 2, 3$ e $j = 1, 2, 3$. Feitas todas considerações para construção do modelo, temos a formulação do prolema:

$$
\begin{array}{ll}
\text{Minimizar} & f(x_{11},x_{12},x_{13},x_{21},x_{22},x_{23},x_{31},x_{32},x_{33}) = 1x_{11}+0,8x_{12}+3x_{13}+ \\
& +1,5x_{21}+0,6x_{22}+2,5x_{23}+6x_{31}+5x_{32}+1,2x_{33} \\
\text{sujeito a} & x_{11}+x_{12}+x_{13} \leq 470 \\
& x_{21}+x_{22}+x_{23} \leq 400 \\
& x_{31}+x_{32}+x_{33} \leq 400 \\
& x_{11}+x_{21}+x_{31} \leq 350 \\
& x_{12}+x_{22}+x_{32} \leq 300 \\
& x_{13}+x_{23}+x_{33} \leq 300 \\
& x_{ij} \geq 0.
\end{array}
\tag{1.2}
$$

onde $x_{ij} \in \mathbb{R}$, com $i = 1,2,3$ e $j = 1,2,3$ são os valores ótimos a serem obtidos.

1.2.2 Problema de Corte e Empacotamento

Indústrias de papel, vidro, plástico, moveleira e metalúrgica, geralmente produzem objetos grande com medidas padronizadas e posteriormente realizam o processo de corte de acordo com as solicitações de demanda, que não possuem padrão (pedidos de vários tamanhos) gerando assim perdas do material. O problema de corte consiste em aproveitar ao máximo o material utilizado, tornando mínima a perda indesejada. Ou ainda de forma paralela, alocar materiais em locais de maneira a minimizar o espaço vazio define o problema de empacotamento.

Exemplo 1.2.2. *Um atacadista trabalha com dois produtos: o produto A e o produto B. Cada caixa do produto A custa* $R\$10,00$ *e ocupa* $0,1$ *metro cúbico e cada caixa do produto B custa* $R\$30,00$ *e ocupa* $0,4$ *metro cúbico. O armazém possui capacidade para armazenar* 40 *metros cúbicos de mercadorias. O fornecedor entrará em férias coletivas e o atacadista pretende encher o estoque, adquirindo a maior quantidade de caixas gastando no máximo* $R\$3500,00$.

O objetivo é estocar o maior número de caixas dos produtos A e B, condicionado ao espaço e ao recurso financeiro disponíveis.

Definimos então x_j como variável de decisão da quantidade de caixas dos produtos A e B, onde $j = A, B$. Assim, a quantidade de caixas estocadas é dada por:

$$f(x_A, x_B) = x_A + x_B$$

as restrições do problema nos oferecem as seguintes desigualdades:

$$
\begin{array}{rcl}
10x_A + 30x_B & \leq & 3500 \\
0,1x_A + 0,4x_B & \leq & 40.
\end{array}
$$

A primeira desigualdade relaciona o valor de cada caixa e o valor disponível pelo atacadista que é de $R\$3500,00$. A segunda desigualdade diz respeito ao volume de cada caixa e o espaço disponível de 40 metros cúbicos pelo atacadista para o estoque. Como a quantidade de caixas a serem estocadas não assumem valores negativos, para as variáveis de decisão temos ainda a restrição de não-negatividade: $x_A \geq 0, x_B \geq 0$.

Assim, temos o seguinte modelo matemático:

$$\begin{array}{rl} \text{Maximizar} & f(x_A, x_B) = x_A + x_B \\ \text{sujeito a} & 10x_A + 30x_B \leq 3500 \\ & 0,1x_A + 0,4x_B \leq 40 \\ & x_A \geq 0, x_B \geq 0. \end{array} \tag{1.3}$$

onde $x_j \in \mathbb{R}$, com $j = A, B$.

1.2.3 Misturas

O problema de mistura, em geral, consiste em realizar combinações de materiais para se obter novos materiais ou produtos que tenha características apropriadas ao modo que se queira. Utilizando-se as proporções adequadas de cada componente e atendendo as especificações de cada produto relacionando os custos também de cada componente, o resultado é um produto com a composição especificada e com menor custo possível.A composição nutricional dos alimentos, a produção de ligas metálicas, a composição de areias para filtros de Estações de Tratamento de Água, são alguns exemplos de aplicações desse tipo de problema.

Segue um problema para ilustração da construção do modelo matemático.

Exemplo 1.2.3. *Uma fábrica produz três tipos de produtos: o produto A, o produto B e o produto C. O produto A utiliza* 100 *g de aço e* 100 *g de plástico. O produto B utiliza* 150 *g de aço e* 200 *g de plástico. O produto C utiliza* 200 *g de aço e* 300 *g de plástico. A quantidade total de aço disponível é de* 20 *kg e a quantidade de plástico disponível é de* 30 *kg. O objetivo é produzir a maior quantidade de produtos.*

O objetivo do problema é produzir a maior quantidade de produtos, ou seja, em quais quantidades os produtos A, B e C se consegue produzir satisfazendo a quantidade de material disponível. Definimos a variável de decisão x_j como a quantidade do produto j, em que $j = A, B, C$. Com isso, a quantidade total produzida é dada por:

$$f(x_A, x_B, x_C) \;=\; x_A \;+\; x_B \;+\; x_C$$

e as restrições de composição são dadas por:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 100x_A & + & 150x_B & + & 200x_C & \leq & 20000 \\ 100x_A & + & 200x_B & + & 300x_C & \leq & 30000. \end{array}$$

Observe que a primeira desigualdade resulta da quantidade de aço necessária para a composição de cada produto e a quantidade disponível do referido material com mudança da unidade de medida, ocorrendo da mesma forma para a segunda desigualdade em relação ao material plástico.

Temos também que pode ocorrer ou não a fabricação dos referidos produtos, isto é,

$$x_A \;\geq\; 0,\; x_B \;\geq\; 0,\; x_C \;\geq\; 0.$$

O modelo matemático completo fica, então:

$$\begin{array}{rl} \text{Maximizar} & f(x_A, x_B, x_C) = x_A + x_B + x_C \\ \text{sujeito a} & 100x_A + 150x_B + 200x_C \leq 20000 \\ & 100x_A + 200x_B + 300x_C \leq 30000 \\ & x_A \geq 0, x_B \geq 0, x_C \geq 0. \end{array} \tag{1.4}$$

onde $x_j \in \mathbb{R}$, com $j = A, B, C$.

1.2.4 Planejamento da Produção

Em diversas situações reais aparecem os problemas de mix de produção, nesses casos são relacionadas as decisões de quantidade de produtos e quais produtos escolhidos para que sejam fabricados num determinado período. Acrescentando-se ao problema as restrições da capacidade de fabricação e vendas, a fim de se obter uma maximização de lucros para a empresa. Vejamos a construção do modelo a seguir.

Exemplo 1.2.4. *Uma empresa deseja programar a produção de um utensílio de cozinha que requer o uso de dois tipos de recursos: mão-de-obra e material. Ela está considerando a fabricação de três modelos A, B e C, e o seu departamento de engenharia forneceu os dados na Tabela 1.2. O suprimento de material é de* 200 *quilos por dia. A disponibilidade*

Tabela 1.2: Dados para o problema de mix de produção

	A	B	C
mão-de-obra (horas por unidade)	7	3	6
material (quilos por unidade)	4	5	10
lucro (R$ por unidade)	4	6	3

diária de mão-de-obra é de 150 *horas. A empresa deseja determinar a produção diária de cada um dos modelos de modo a maximizar o lucro total da empresa.*

O objetivo do problema é maximizar o lucro da empresa, ou seja, qual a quantidade diária de cada modelo A, B ou C satisfaz o maior lucro para a empresa. Denotando as variáveis de decisão por x_j a quantidade a produzir de cada modelo, onde $j = A, B, C$. Com isso, observando na tabela o lucro dado de cada modelo, o lucro total será dado por:

$$f(x_A, x_B, x_C) \;=\; 4x_A \;+\; 6x_B \;+\; 3x_C$$

as restrições em relação aos recursos são dadas por:

$$\begin{aligned} 7x_A \;+\; 3x_B \;+\; 6x_C \;&\leq\; 150 \\ 4x_A \;+\; 5x_B \;+\; 10x_C \;&\leq\; 200. \end{aligned}$$

A primeira desigualdade relaciona a quantidade de horas de mão-de-obra necessária para a produção de cada modelo restrito a quantidade total diária de 150 horas disponíveis para a produção. A segunda desigualdade relaciona o suprimento necessário para a produção de cada modelo também restrito a quantidade total de 150 quilos disponíveis diariamente.

Observa-se que o problema não condiciona uma quantidade mínima para a produção de cada modelo, podendo ocorrer ou não, sendo assim, temos:

$$x_A \;\geq\; 0,\; x_B \;\geq\; 0,\; x_C \;\geq\; 0.$$

O modelo matemático completo fica, então:

$$\begin{array}{rl} \text{Maximizar} & f(x_A, x_B, x_C) = 4x_A + 6x_B + 3x_C \\ \text{sujeito a} & 7x_A + 3x_B + 6x_C \leq 150 \\ & 4x_A + 5x_B + 10x_C \leq 200 \\ & x_A \geq 0, x_B \geq 0, x_C \geq 0. \end{array} \tag{1.5}$$

onde $x_j \in \mathbb{R}$, com $j = A, B, C$.

Capítulo 2

Método Geométrico para Resolução de Problemas de Otimização

A resolução é uma das etapas que procede a aplicação do modelo matemático já formulado. Embora os problemas de otimização possam envolver várias variáveis, este trabalho faz-se uma apresentação teórica de forma geral, mas atenta-se a resolução através de método geométrico ou gráfico para exemplos com somente duas ou três variáveis. Evidentemente por utilizar recursos gráficos este método é aconselhável para problemas de duas ou três variáveis.

O método gráfico escolhido como estratégia de resolução visa facilitar ainda mais a compreensão e resolução do problema perfeitamente adequado ao ensino médio com uma abordagem da geometria analítica. Além disso, a introdução do programa ou aplicativo Geogebra, com as visualizações da geometria dinâmica, buscamos implementar uma maior interação dos estudantes com a teria do método gráfico e o uso de ferramentas tecnológicas.

2.1 Definição e Teoremas

Resolver um problema de otimização linear é encontrar a melhor solução da função objetivo respeitando-se as restrições. O método gráfico busca determinar pelas restrições a região geométrica onde estão as possíveis soluções do problema e usando a função objetivo para determinar o ponto desta região que a função é otimizada. Para melhor entender o método geométrico, inicialmente apresentamos uma série de definições e Teoremas que o fundamentam.

Consideremos o problema (1.1) com a quantidade de equações ou inequações lineares das restrições do problema maior ou igual que a quantidade de variáveis, $m \geq n$. A princípio os conceitos são n variáveis, mas posteriormente restringirmos a nosso foco para três variáveis (ou seja, com 3 dimensões).

Definição 2.1.1. *O conjunto $\mathcal{R}$ das n-uplas, $(x_1, x_2, ..., x_n)$ que formam as variáveis de decisão, satisfazendo todas as restrições do problema, incluindo a condição de não-negatividade, determinam uma região $N-$dimensional denominada por Região Viável ou Factível. Qualquer ponto desta região é dito solução factível do problema de otimização.*

Pela definição de região factível, temos que a solução do problema está entre uma das soluções factíveis.

Definição 2.1.2. *Dizemos que a solução factível é ótima para um problema de otimização* (1.1) *quando apresenta o menor (ou maior) valor para a função objetivo f.*

Em termos algébricos, uma solução factível $(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ é ótima se

$$f(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*) \ \leq (\text{ou } \ \geq) \ f(x_1, x_2, ..., x_n),$$

para todo $(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathcal{R}$.

No caso que temos problemas de otimização com duas variáveis, isto é, problemas da forma:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar ou maximizar} & f(x_1, x_2) = c_1x_1 + c_2x_2 \\ & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \ = b_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \ = b_2 \\ \text{sujeito a} & \vdots \\ & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \ = b_m \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \end{array} \tag{2.1}$$

as regiões factíveis estão no plano $\mathbb{R}^2$ e contidas no primeiro quadrante do plano devido a condição de não-negatividade de suas variáveis. Como cada restrição do problema, $a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 \leq (ou \ \geq)(ou \ =)b_j$, $j = 1, 2, \ldots, m$ determina em $\mathbb{R}^2$ um semiplano ou uma reta, temos que a região factível é a intersecção destes semiplanos ou retas e contidas no primeiro quadrante.

Já nos problemas com três variáveis,

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar ou maximizar} & f(x_1, x_2) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 \\ & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \leq (ou \ \geq)(ou \ =)b_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \leq (ou \ \geq)(ou \ =)b_2 \\ \text{sujeito a} & \vdots \\ & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 \leq (ou \ \geq)(ou \ =)b_m \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, \end{array} \tag{2.2}$$

as regiões factíveis estão no espaço $\mathbb{R}^3$ e contidas no primeiro octante do espaço devido a condição de não-negatividade de suas variáveis. Agora cada restrição do problema,

$a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + a_{j3}x_3 \leq (ou\ \geq)(ou\ =)b_j$, $j = 1, 2, \ldots, m$ determina em $\mathbb{R}^3$ um semiespaço ou um plano. Pela Definição 2.1.1, a região factível é determinada pela interseção dos semiespaços ou planos, que podem como regiões limitadas no octante (conforme figura 2.1) ou ilimitadas (conforme figura 2.2). Tratamos aqui apenas a abordagem com as regiões limitadas.

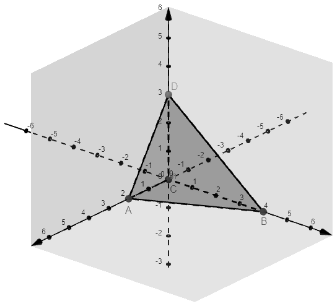

Figura 2.1: Região factível limitada no $\mathbb{R}^3$.

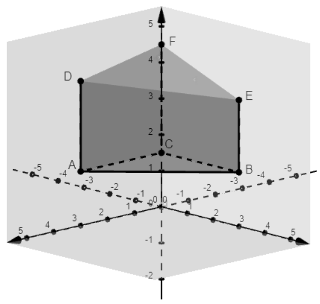

Figura 2.2: Região factível ilimitada no $\mathbb{R}^3$.

Restringimos aqui a visualização ao plano ou espaço mas pode ser estendido o conteúdo aos conceitos de regiões no $\mathbb{R}^n$. De forma geral, temos hiperplanos e a região factível obtida pela intersecção de semi-hiperplanos obedecendo a condição de não negatividade. E ainda podem ser da forma limitadas ou ilimitadas.

Definição 2.1.3. *Quando a região factível é limitada, temos uma região poligonal dita região poligonal factível.*

Antes de apresentar os resultados, vejamos mais um conceito de curvas de níveis e gradiente da função f.

Definição 2.1.4. *Considerando $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ uma função de várias variáveis, as curvas de níveis de f são os locais geométricos que satisfazem a equação $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = d$, para algum $c \in \mathbb{R}$.*

Pela definição, o conjunto de pontos que atribui o mesmo valor à função objetivo é uma curva de nível. Por exemplo, em $\mathbb{R}^3$ e a função objetivo $f(x_1, x_2, x_3) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3$ tem que curvas de níveis determinam planos no espaço.

Proposição 2.1.5. *O vetor $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ é um vetor normal (perpendicular) a qualquer curva de nível S da função objetivo f.*

Demonstração: Dado uma curva de nível $S : c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 = d$, tomemos dois pontos quaisquer $x' = (x'_1, x'_2, x'_3)$ e $x'' = (x''_1, x''_2, x''_3)$ de S e o vetor $\vec{y} = x'' - x' =$

$(x_1''-x_1', x_2''-x_2'', x_3''-x_3')$ que está sobre a curva de nível S. Provemos que $\vec{c}$ é perpendicular a $\vec{y}$, ou seja, $\vec{c}\cdot\vec{y}=0$. De fato,

$$\vec{c}\cdot\vec{y}=c_1(x_1''-x_1')+c_2(x_2''-x_2')+c_3(x_3''-x_3')=(c_1x_1''+c_2x_2''+c_3x_3'')-(c_1x_1'+c_2x_2'+c_3x_3'),$$

e como $x', x''\in S$, tem-se $c_1x_1''+c_2x_2''+c_3x_3''=c_1x_1'+c_2x_2'+c_3x_3'=d$, logo $\vec{c}\cdot\vec{y}=0$.

Proposição 2.1.6. *Nas mesmas condições da Proposição 2.1.5, o vetor gradiente $\vec{c}$ aponta para onde a função objetivo cresce.*

Demonstração: Fixamos um valor para a função objetivo, $f(x_1,x_2,x_3)=d$, isto determina um plano S (uma curva de nível). Devemos provar que o vetor $\vec{c}$ aponta para semiespaço cujo pontos x satisfazem $f(x)>d$. De fato, podemos escrever este ponto do semiespaço como ponto sobre a curva de nível adicionado a um múltiplo positivo de $\vec{c}$, ou seja, $x=x'+\delta\vec{c}$, com $\delta>0$ e $x'\in S$. Consequentemente, denotando $x'=(x_1',x_2',x_3')$ temos

$$\begin{aligned} f(x) &= c_1(x_1'+\delta c_1)+c_2(x_2'+\delta c_2)+c_3(x_3'+\delta c_3) \\ &= c_1x_1'+c_2x_2'+c_3x_3'+\delta(c_1^2+c_2^2+c_3^2) \\ &= d+\delta(c_1^2+c_2^2+c_3^2)>d, \end{aligned}$$

visto que $\delta>0$ e $c_1^2+c_2^2+c_3^2>0$.

Apesar das Proposições 2.1.5 e 2.1.6 serem formuladas e demonstradas no $\mathbb{R}^3$ elas podem serem estendidas para o $\mathbb{R}^n$, onde as curvas de níveis são hiperplanos e $c=(c_1,c_2,\ldots,c_n)$.

O próximo teorema apesar de ser bem simples, apresenta a existência de solução ótima em regiões poligonal factíveis.

Teorema 2.1.7. *Um problema de otimização linear sempre possui pelo menos uma solução ótima $x*$ num problema com uma região poligonal factível $\mathcal{R}$.*

Demonstração: Consideremos que desejamos maximar a função objetivo f. Escolhemos uma solução factível qualquer, digamos $x'\in\mathcal{R}$, e seja $f(x')=d$, determinando uma curva de nível S de f que intersecciona $\mathcal{R}$. A translação da curva de nível S no sentido do vetor gradiente $\vec{c}$ determina novos pontos factíveis x tais que $f(x)>d=f(x')$. Como $\mathcal{R}$ é limitada e fechada, as curvas de níveis transladadas chegam ao limite da região poligonal factível, quando todos os pontos do lado do gradiente $\vec{c}$ são infactíveis, ou seja, os pontos factíveis estão do lado oposto de $\vec{c}$ e, portanto, atribuem valores menores à função objetivo f. Neste limite temos a solução ótima ou soluções ótimas.

De certa forma, a demonstração deste teorema apresenta um método geométrico para buscar a solução ótima, utilizando curvas de níveis e o vetor gradiente. Vejamos a seguir que esta busca pode ficar mais simplificada. Lembramos que a região poligonal factível é determinada pela interseção dos semi hiperespaços caracterizados nas restrições do problema. Considerando os hiperplanos que limitam estes semi hiperespaços (retas em $\mathbb{R}^2$ e planos em $\mathbb{R}^3$), tem-se a definição:

Definição 2.1.8. *Pontos Extremos são os pontos determinados pelas intersecções dos hiperplanos que limitam os semiplanos determinados pelas restrições do problema. Intuitivamente, os vértices são soluções de sistemas de equações lineares.*

Em $\mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{R}^2$ os pontos extremos são os vértices da região factível, limitada ou não. No caso de região poligonal factível, os pontos extremos são justamente os vértices do polígono (em $\mathbb{R}^2$) ou do poliedro (em $\mathbb{R}^3$).

O teorema a seguir evidencia a importância dos pontos extremos.

Teorema 2.1.9. *Suponha que um problema de programação linear tem a região poligonal factível não-vazia. Então a função objetivo atinge tanto um valor máximo quanto um valor mínimo em pelo menos um ponto extremo.*

Demonstração: A demonstração deste teorema pode ser constituído diretamente pela demonstração do Teorema 2.1.7. Vejamos o caso em $\mathbb{R}^3$. A região poligonal factível é um poliedro. E quando traçamos curvas de níveis (planos) de f transladando no sentido do gradiente $\vec{c}$ temos que o limite das interseções com o poliedro ocorre ou numa face, ou numa aresta ou num vértice do poliedro. Em qualquer caso temos que contém um ponto extremo (vértices do poliedro).

O Teorema 2.1.9 nos indica que uma solução ótima é procurada dentre o conjunto dos pontos extremos do problema.

2.2 Método Geométrico e Uso do Geogebra

A visualização gráfica de soluções de um problema matemático, quando possível, pode ser bastante útil na compreensão do problema. O método geométrico aqui apresentado consiste em uma sequência de operações gráficas permitindo chegar a uma solução ótima. Ressaltamos que restringiremos o estudo de caso aos problemas envolvendo duas ou três variáveis. Para o auxílio destas construções gráficas faremos o uso do software Geogebra.

O uso do Geogebra torna-se de grande valor pedagógico proporcionando a realização de inúmeras construções geométricas como ponto, retas, semiplanos, polígonos e poliedros, como também a inserção de funções e manipulação de forma interativa de todos esses objetos. E ainda recursos possibilitando a representação gráfica dos sólidos 3D de forma dinâmica e em perspectivas diferentes, isso posto diante da dificuldade da representação dessas figuras geométricas num espaço 3D.

Por simplicidade, considere o problema de otimização linear (maximização):

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & f(x_1, x_2, ..., x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \\ & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \text{sujeito a} & \vdots \\ & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0. \end{array} \tag{2.3}$$

Para determinar uma solução ótima para o problema (2.3), vamos seguir as seguintes etapas:

Etapa 1: Determinar a Região Factível.

Desenhar os conjuntos de pontos $\mathcal{S}_j$ tais que $a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \ldots + a_{jn}x_n \leq b_j$, traçando, inicialmente, o hiperplano $\mathcal{H}_j$: $a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \ldots + a_{jn}x_n = b_j$ que divide o espaço $\mathbb{R}^n$ em três partes.

Utilizar o gradiente $\vec{a}_j = (a_{j1}, a_{j2}x_2, \ldots, a_{jn}x_n)$ (coeficientes da equação do hiperplano) que é perpendicular ao hiperplano $\mathcal{H}_j$ e aponta para os valores tais que $a_{j1}x_1, a_{j2}x_2, \ldots, a_{jn}x_n > b_j$ e, claro, determinar os semi hiperplanos $\mathcal{S}_j$ no sentido contrário.

Desenhar a região factível obtida pela intersecção de todas as regiões $\mathcal{S}_j$, considerando as variáveis somente positivas (condição de não-negatividade).

Etapa 2: Determinar os pontos extremos da região factível

Obter todos os pontos que são intersecção dos hiperplanos $\mathcal{H}_j$ juntamente com as intersecções dos hiperplanos determinados pelas condições de não negatividade, $x_j \geq 0$.

Etapa 3: Determinar dentre os pontos extremos um solução ótima.

Escolher um ponto extremo $x' = (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$ e traçar uma curva de nível $S : c_1x'_1 + c_2x'_2 + \ldots + c_nx'_n = d'$.

Analisar o crescimento da função objetivo pela construção do vetor gradiente $\vec{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$.

Transladar a curva de nível ao longo da região factível passando pelos pontos extremos e analisar ao qual tem solução ótima.

Para implementar as Etapas 1,2 e 3 do método geométrico apresentamos a seguir exemplos para duas e três variáveis usando o Geogebra nas construções geométricas.

2.2.1 Caso 2D

Usaremos o modelo do Exemplo 1.2.2 do problema de corte e empacotamento visto no Capítulo 1, para apresentar a resolução pelo método geométrico. Vimos que a modelagem do problema é dada por:

$$\begin{array}{rl} \text{Maximizar} & f(x_A, x_B) = x_A + x_B \\ \text{sujeito a} & 10x_A + 30x_B \leq 3500 \\ & 0,1x_A + 0,4x_B \leq 40 \\ & x_A \geq 0, x_B \geq 0. \end{array}$$

Inicialmente vamos analisar as restrições representando graficamente as inequações. No Geogebra é necessário realizar o comando de entrada da inequação como equação, dessa maneira teremos a representação de uma reta que divide o plano em dois semiplanos. Logo em seguida é preciso analisar qual semiplano condiz com a inequação que estará sendo representada graficamente. Uma outra alternativa, além da descrita na Etapa 1, basta tomarmos algum ponto do plano e substituir na inequação, por exemplo $(0,0)$ em $10.0 + 30.0 \leq 3500$, assim constatada a veracidade da expressão, a região que representa graficamente a inequação será aquele semiplano que contém o ponto $(0,0)$, caso contrário, será o outro semiplano.

A inequação $10x_A + 30x_B \leq 3500$ é referente aos valores de cada caixa e recurso financeiro disponível.

A região em destaque na figura 2.3 é a representação gráfica do semiplano fechado determinado pela inequação e já restrita ao primeiro quadrante devido a condição de não-negatividade: $x_A \geq 0$ e $x_B \geq 0$. Por isso apenas o primeiro quadrante é utilizado na imagem.

Construindo a região determinada pela inequação $0,1x_A + 0,4x_B \leq 40$ referente aos volumes de cada caixa e espaço disponível, obtemos a figura 2.4:

Na figura 2.5 são apresentadas simultaneamente as representações gráficas das inequações do problema, inclusive as condições de não-negatividade.

A intersecção formada pelas regiões das inequações do problema representadas graficamente, juntamente com condição de não-negatividade, determina a região poligonal factível do problema. Na figura 2.6 tem a representação gráfica apenas da região de solução viável.

Note que a região que determina a solução viável é um polígono, mais pontualmente um quadrilátero com vértices de coordenadas os pontos $(0,0)$, $(0,100)$, $(200,50)$

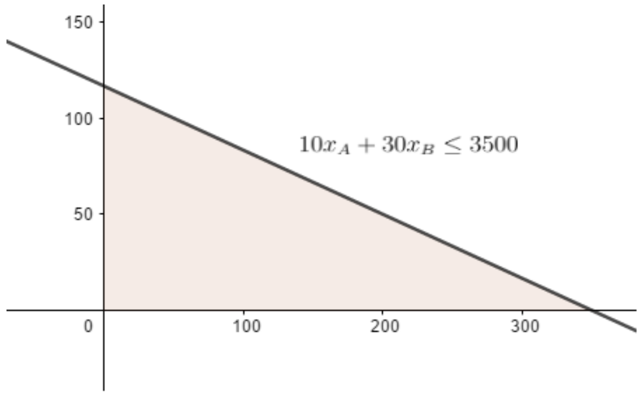

Figura 2.3: Representação gráfica da inequação $10x_A + 30x_B \leq 3500$

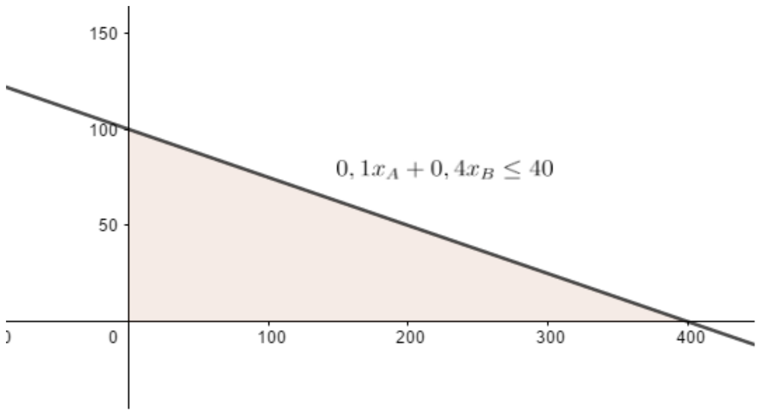

Figura 2.4: Representação gráfica da inequação $0,1x_A + 0,4x_B \leq 40$

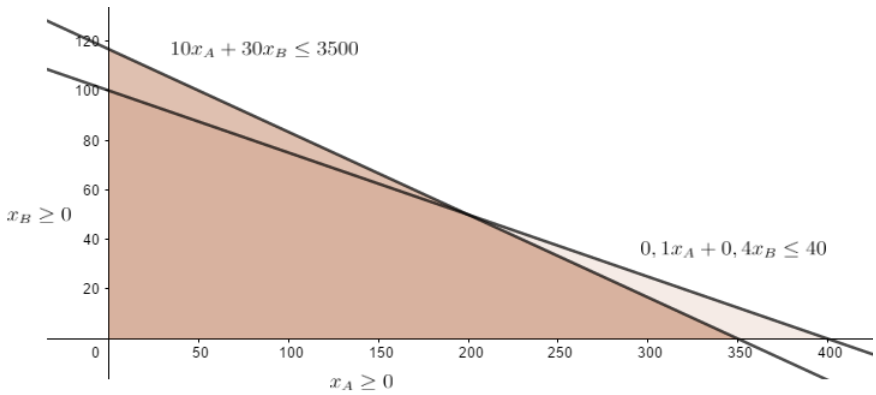

Figura 2.5: Representação gráfica das restrições do problema

e $(350, 0)$ que são os pontos extremos. Os nomeamos respectivamente por A, B, C e D. Esses pontos, caso não estejam tão visíveis, podem ser facilmente encontrados utilizando recursos do Geogebra, através do comando de intersecção ou com o próprio comando ponto clicando onde se queira obter a informação. Na figura (**??**) incluímos os pontos extremos.

Assim, a região limitada pelo quadrilátero $ABCD$ é o conjunto de todos os pontos

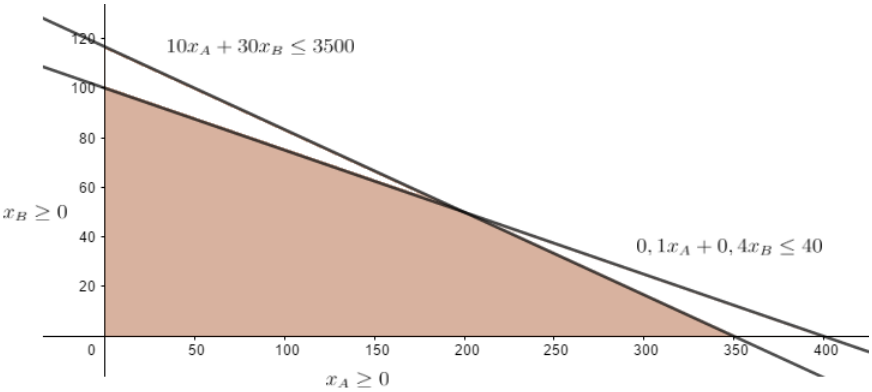

Figura 2.6: Região Viável

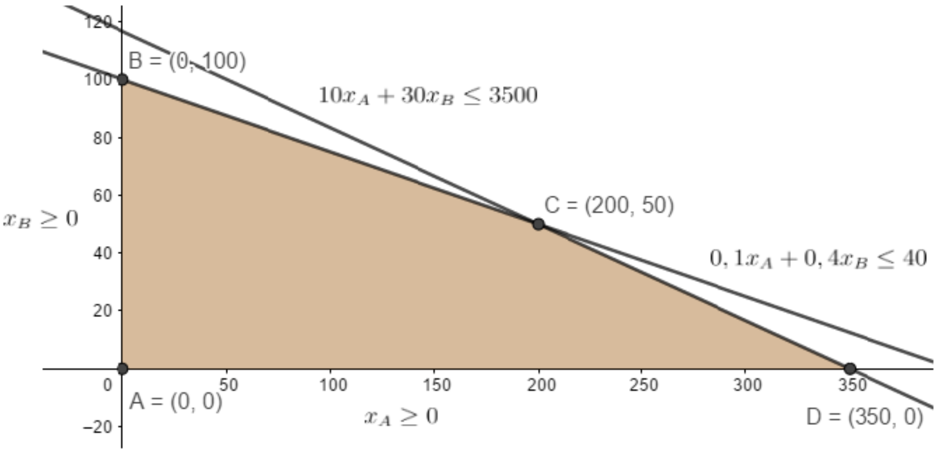

Figura 2.7: Vértices da solução viável

$X = (x_A, x_B)$ que satisfazem simultaneamente todas as restrições do problema. Dessa forma, todo par ordenado possível de x_A correspondente a quantidade de caixas A e de x_B correspondente a quantidade de caixas B será um ponto da região limitada pelo polígono $ABCD$, do seu interior ou então será ponto de fronteira.

Agora iremos analisar a representação gráfica das curvas de nível (Etapa 3). A função objetivo $f(x_A, x_B) = x_A + x_B$, definida no conjunto X de pontos da região limitada pelo polígono $ABCD$, pode assumir infinitos valores. Na solução factível $\mathbf{x}' = (x'_A, x'_B) = (0, 0)$, a função objetivo $f' = f(\mathbf{x}') = 0$ e curva de nível é representada na Figura 2.8 pela reta tracejada $f' = 0$.

O gradiente de f é dado por $\vec{c} = (1, 1)$ e como aponta no sentido em que a função f cresce, podemos visualizar que qualquer ponto da região factível x atribui valor maior à função f. Como o objetivo é maximizar f, podemos concluir que o ponto extremo $\mathbf{x}' = (0, 0)$, não é uma solução ótima.

Analisando outra ponto qualquer $\mathbf{x}'' = (x''_A, x''_B) = (50, 0)$, em que a função objetivo vale $f'' = f(\mathbf{x}'') = 50$ e a curva de nível $x_A + x_B = 50$ esta representada na figura 2.8, por $f'' = 50$. Como o gradiente não se altera, essa reta é paralela à reta anterior,

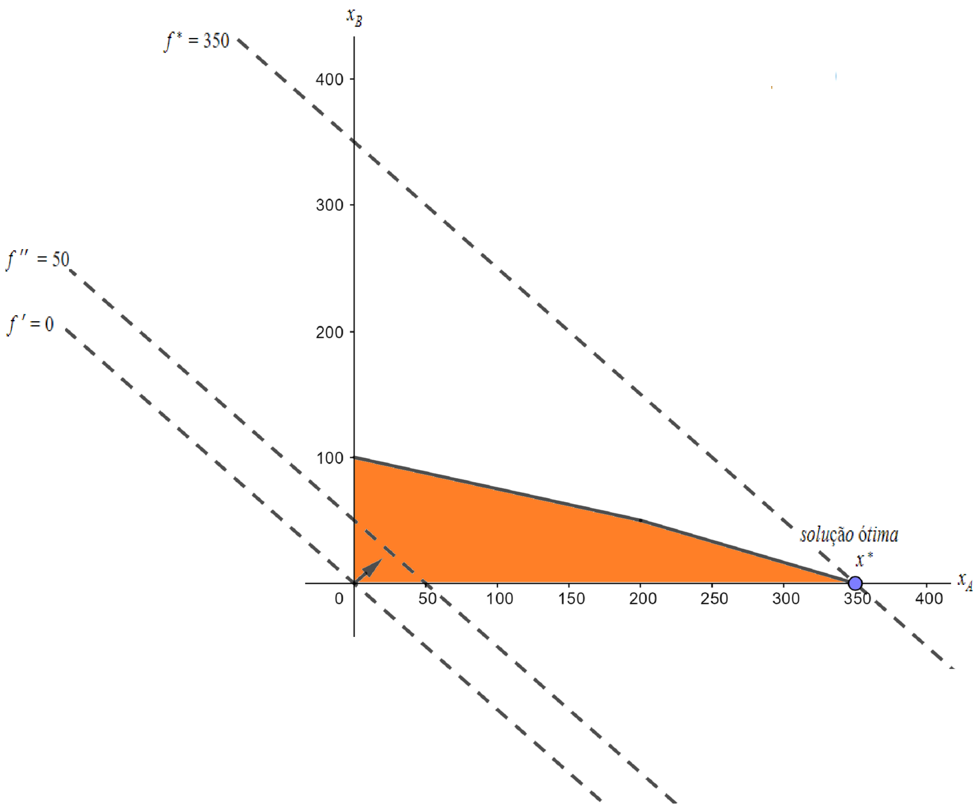

Figura 2.8: Determinando a solução ótima

$f' = 0$. Novamente, o gradiente aponta no sentido em que f cresce e visualmente podemos identificar no gráfico outros pontos que atribuem valores maiores à função objetivo. Assim, $x'' = 50$ também não é uma função ótima. Observe que neste caso, nem pegamos um ponto extremos para fazer a análise da curva de nível.

Seguindo com o procedimento de identificar pontos que atribuem valores maiores à função objetivo, chegamos ao extremo $\mathbf{x}^* = ({x^*}_A, {x^*}_B) = (350, 0)$, para o qual $f(\mathbf{x}^*) = 350$. A curva de nível $x_A + x_B = 350$ nos permite observar nesse momento que todos os pontos da região factível atribuem valores menores à função objetivo, uma vez que o gradiente aponta no sentido do crescimento de f. De outra forma, temos para todo $x \in X, f(x) \leq 350 = f(\mathbf{x}^*)$, o que significa que $\mathbf{x}^*$ é uma solução ótima.

Portanto, a solução $\mathbf{x}^*$ que satisfaz todas as restrições simultaneamente e maximiza $f(x)$ existe e é única: $\mathbf{x}^* = (x_A, x_B) = (350, 0)$.

2.2.2 Caso 3D

Usaremos a formulação do Exemplo 1.2.4 referente ao problema de planejamento da produção apresentado no Capítulo 1, para apresentar uma resolução pelo método geométrico. Lembramos que a formulação matemática do problema é:

$$
\begin{aligned}
\text{Maximizar} \quad & f(x_A, x_B, x_C) = 4x_A + 6x_B + 3x_C \\
\text{sujeito a} \quad & 7x_A + 3x_B + 6x_C \leq 150 \\
& 4x_A + 5x_B + 10x_C \leq 200 \\
& x_A \geq 0, x_B \geq 0, x_C \geq 0.
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

onde $x_j \in \mathbb{R}$, com $j = A, B, C$.

Analogamente ao caso 2D, realizamos as Etapas 1,2 e 3. Inicialmente, consideremos a primeira restrição $7x_A + 3x_B + 6x_C \leq 150$. A equação $7x_A + 3x_B + 6x_C = 150$ determina um plano que facilmente vemos que passa pelos pontos $A(21.43, 0, 0)$, $B(0, 0, 25$ e $C(0, 50, 0)$, representada pela Figura 2.9.

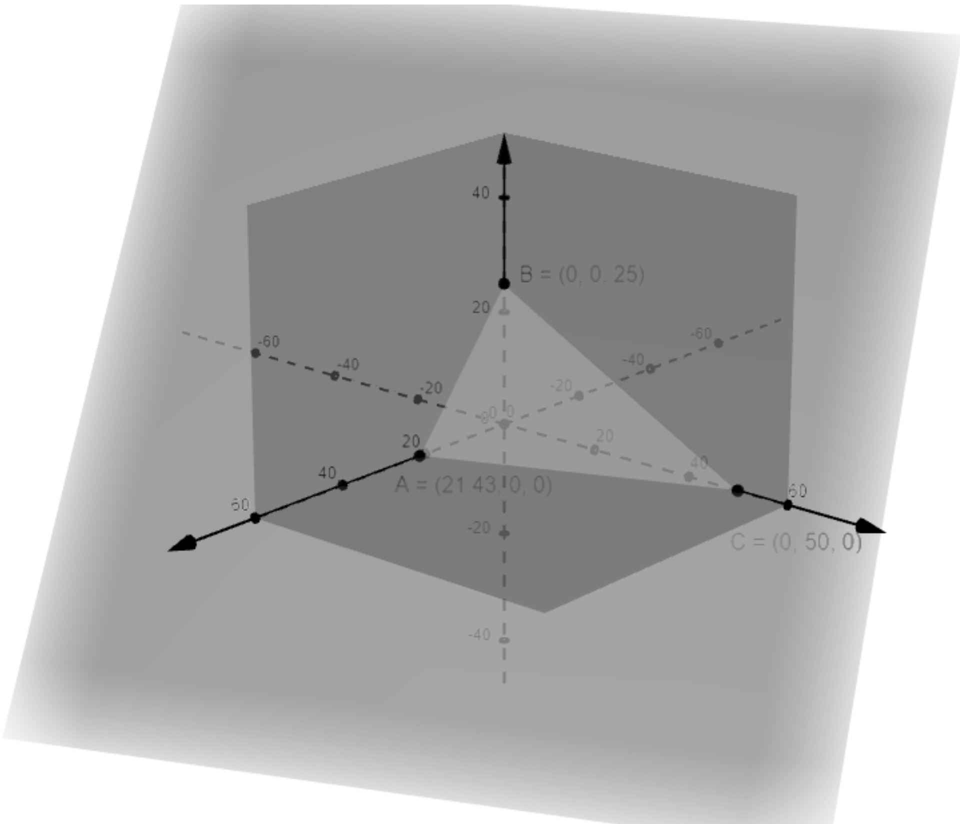

Figura 2.9: Equação do plano $7x_A + 3x_B + 6x_C = 150$

Para definir a região do semiespaço $\mathcal{S}_1$, definido pela primeira restrição, basta escolher aleatoriamente qualquer ponto do espaço $\mathbb{R}^3$, por exemplo o ponto $D(0, 0, 0)$, e verificamos que $7.(0) + 3.(0) + 6.(0) = 0 \leq 150$. Sendo assim, a região $\mathcal{S}_1$ está localizada abaixo do plano $\mathcal{H}_1$, e é representada pelo poliedro $ABCD$ como mostra a figura 2.10.

Considerando a segunda restrição $4x_A + 5x_B + 10x_C \leq 200$. A equação do plano $\mathcal{H}_2 : 4x_A + 5x_B + 10x_C = 200$ passa pelos pontos $E(50, 0, 0)$, $F(0, 40, 0)$ e $C(0, 0, 20)$. Representada pela figura 2.11.

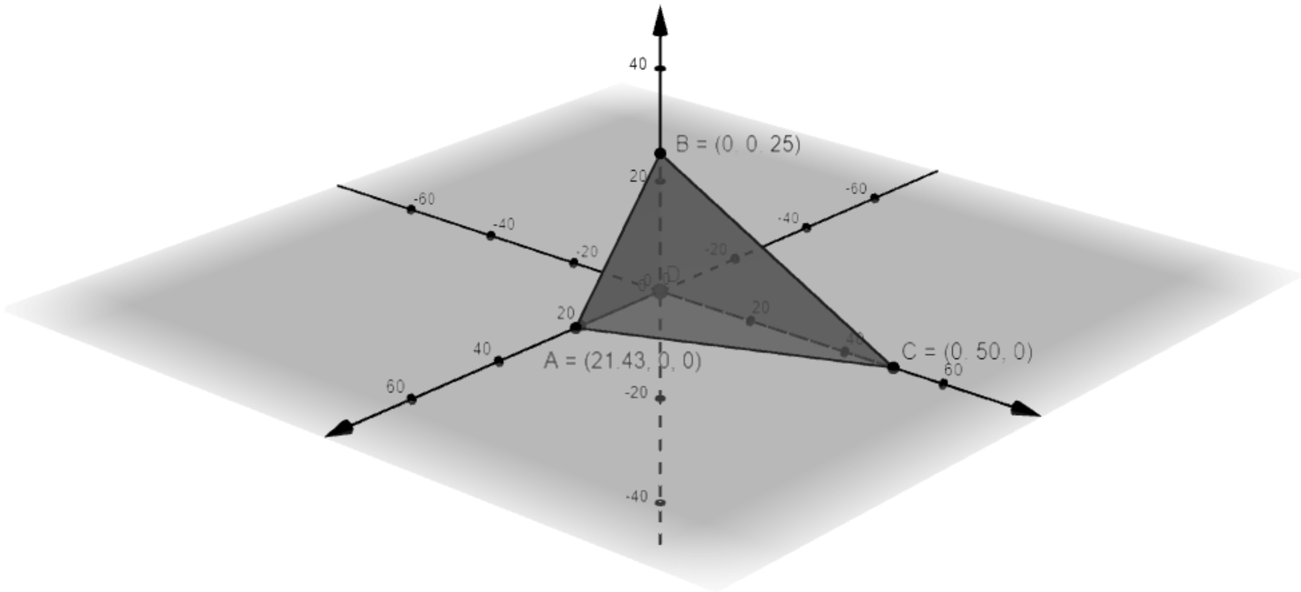

Figura 2.10: Região que satisfaz a desigualdade $7x_A + 3x_B + 6x_C \leq 150$

Utilizando o mesmo procedimento anterior, verificamos $4.(0) + 5.(0) + 10.(0) \leq 200$, e portanto, a região que satisfaz essa segunda desigualdade está localizada abaixo do plano, e está representada pelo poliedro $DEFG$ como mostra a figura 2.12.

Em busca da região factível, basta obter a interseção das duas regiões $\mathcal{R} = \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$, como mostra 2.13.

Analisando o gráfico percebemos que essa região é representada pelo poliedro $HGFIAD$, representado na figura 2.14, que é justamente a região poligonal factível.

Vamos a Etapa 3, escolhendo o ponto extremo $A = (0, 0, 0)$, associamos a curva de nível a este ponto determinado pelos pontos $(x_A, x_B, x_C) \in \mathbb{R}^3$ tal que $S_A:\ 4x_A + 6x_B + 3_Z = f(A) = 0$. Como o vetor gradiente $\vec{c} = (4, 6, 3)$ a S_1 aponta para o crescimento de f, podemos observar que qualquer ponto do conjunto factível $x \in \mathcal{R}$ atribui valor maior que zero à função f e portanto $A(0, 0, 0)$ não é uma solução ótima.

Transladando a curva de nível S_1 na direção do vetor gradiente $\vec{c}$, chegamos a interseção limite com o poliedro $HGFIAD$ sendo o ponto extremo $\mathbf{x}^* = F = (0, 40, 0)$ e, pela construção, é a solução ótima do problema, cujo o valor máximo é $f(\mathbf{x}^*) = 240$, concluímos que esta é a solução ótima para o problema, pois a curva de nível $4x_A + 6x_B + 3_Z = 240$ nos permite observar nesse momento que todos os pontos da região factível atribuem valores menores que 240 à função objetivo, uma vez que o gradiente aponta no

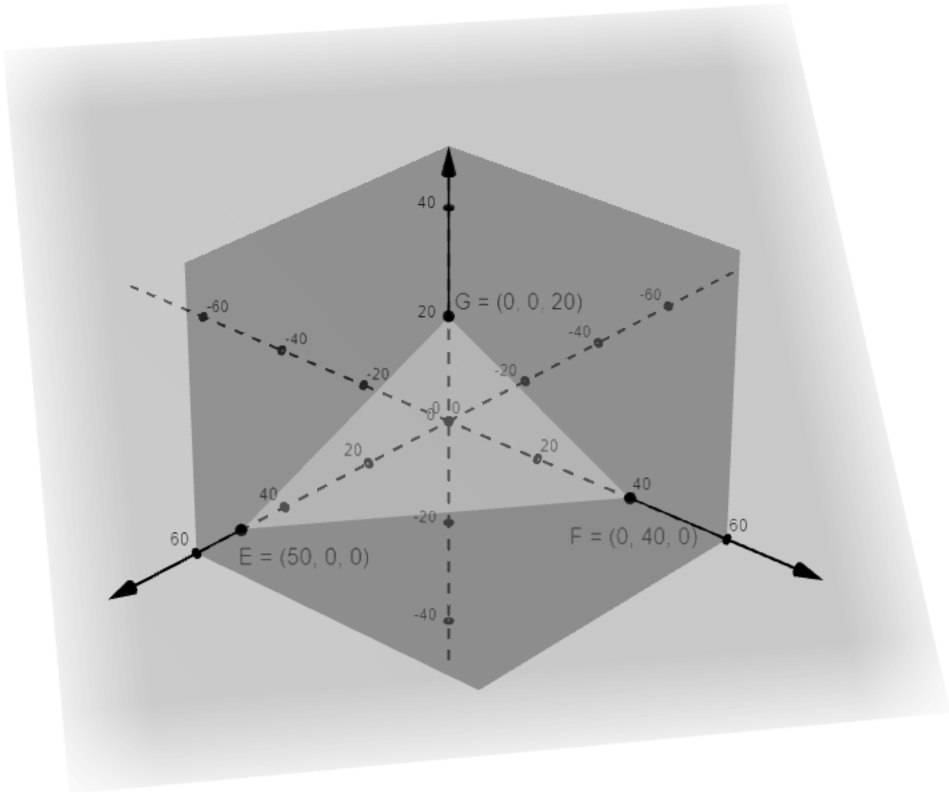

Figura 2.11: Equação do plano $4x_A + 5x_B + 10x_C = 200$

sentido do crescimento de f.

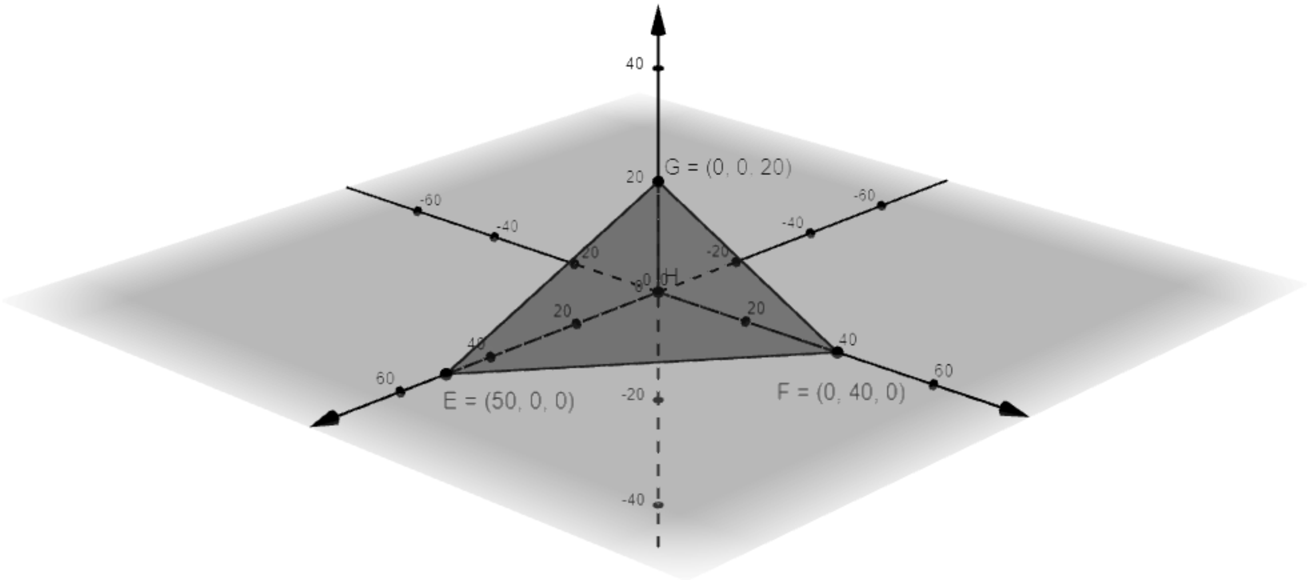

Figura 2.12: Região que satisfaz a desigualdade $4x_A + 5x_B + 10x_C \leq 200$

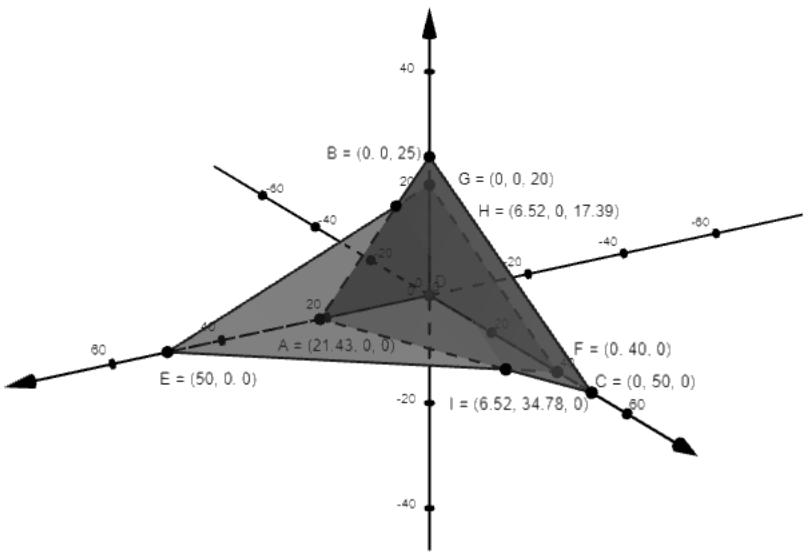

Figura 2.13: Região que satisfaz as duas desigualdades

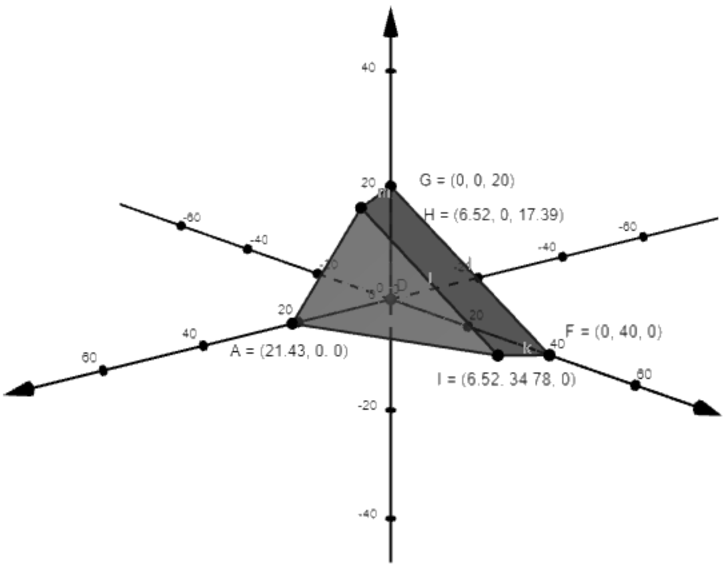

Figura 2.14: Poliedro $HGFIAD$

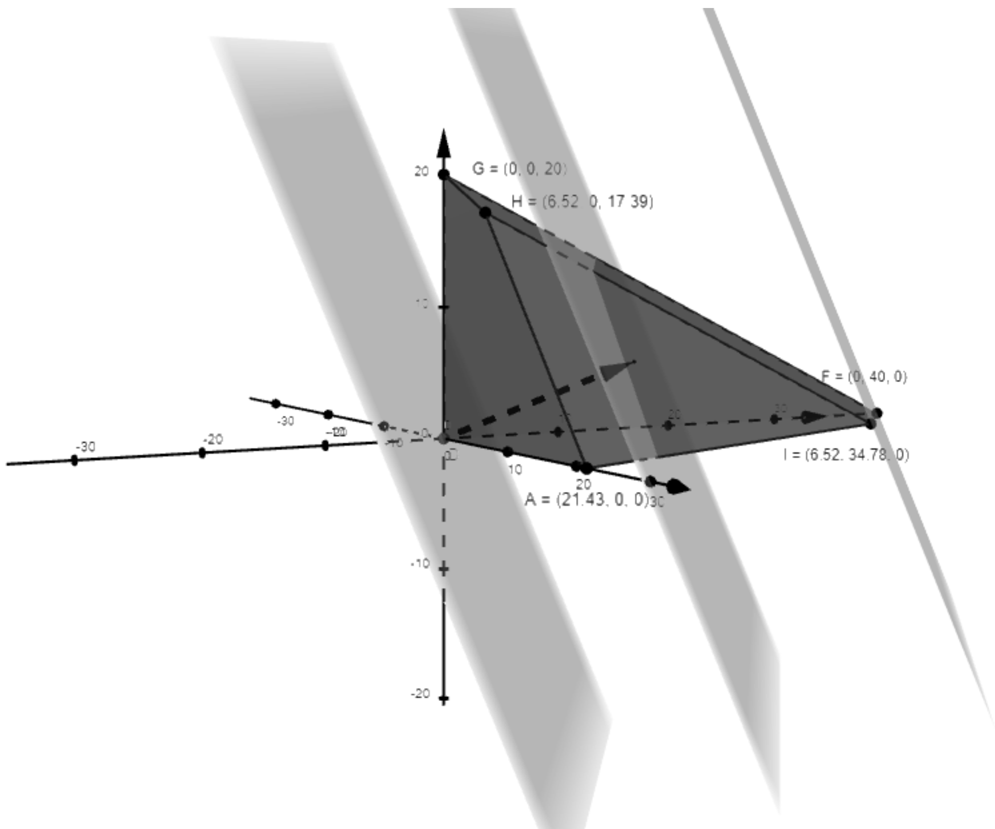

Figura 2.15: Determinando a solução ótima

Capítulo 3

Mais Problemas de Otimização 3D

Utilizar o tema de Problemas de Otimização com transversalidade no Ensino Médio pode ser mais uma justificativa para implementar este conteúdo de forma natural aos alunos. Interessante que apresentação seja realizada num laboratório de informática para buscar o inserção do software Geogebra para melhor visualização gráfica, considerando claro as adaptações de cada estrutura escolar e planejamento do professor. Vale ressaltar que o geogebra é de fácil instalação e encontra-se na forma de aplicativos para celulares, podendo adaptar-se a uma sala de aula.

Sugerimos também uma atividade investigativa, com o objetivo de resgatar o conhecimento prévio dos alunos sobre resolução e construção de equações e inequações lineares.

A observação e análise da evolução dos alunos com o processo investigativo do problema e a utilização do software é importante durante todo o processo podendo considerar um tempo maior do planejado, mas acreditamos de grande valia para os objetivos do ensino da matemática: mostrar mais interatividade com o cotidiano e problemas reais. Visto isto, apresentamos aqui mais alguns problemas de otimização envolvendo três variáveis, dando outras características do método geométrico.

3.1 Exemplos

Seguem três problemas com situações envolvendo três variáveis, para o desenvolvimento do processo de resolução, sendo discutidos passo a passo as etapas desde a leitura e interpretação dos dados para construção do modelo de PL até a resolução gráfica através do geogebra.

Problema 1

Problema de Transporte Uma empresa faz transportes de equipamentos e obtêm o lucro de acordo com a distância da entrega. Quando tem solicitação para uma distância longa fazem uma entrega de dois equipamentos em duas horas com lucro de 100 reais, para distâncias médias fazem uma entrega de três equipamentos em uma hora e lucram 60 reais, e finalmente para entregar numa curta distância, levam um equipamento em uma hora lucrando 30 reais. A empresa diariamente possui um estoque de 12 equipamentos, dispondo de no máximo oito horas do serviço entrega. Qual lucro máximo diário que essa empresa pode atingir?

Etapa 1 - Formulação Matemática:

Passo 1 - Variáveis de decisão:

Para a construção do modelo, inicialmente precisamos interpretar e identificar as variáveis de decisão, essas determinam a solicitação do problema. Nesse caso, são três:

- x: número de entregas numa distância longa;
- y: número de entregas numa distância média;
- z: número de entregas numa distância curta.

Passo 2 - Objetivo do problema:

Após identificação das variáveis de decisão, é preciso analisar e reconhecer o objetivo do problema, traduzindo-o numa função matemática linear envolvendo as variáveis de decisão. Assim, o objetivo do problema é maximizar o lucro com os três tipos de entregas oferecidas.

Seguindo, o lucro para uma distância longa é de 100 reais, ao realizar x viagens, teremos o lucro de $100x$. O lucro para um percurso de distância média é de 60 reais, ao realizar y viagens, teremos o lucro de $60y$. E por fim, o lucro de distância curta é 30 reais, que ao realizar z viagens, lucro de $30z$.

Portanto, a função que teremos para maximizar o lucro será da forma:

$$f(x, y, z) = 100x + 60y + 30z \text{ (função Objetivo)}$$

Passo 3 - Restrições:

O problema não será solucionado apenas com a função objetivo, precisamos também analisar e reconhecer as restrições, que nesse caso temos a limitação diária do estoque e horas de serviço.

Observa-se que cada viagem de longa distância são transportados dois equipamentos. A viagem de média distância são transportados três equipamentos, e que a viagem de curta distância, apenas um equipamento. Diariamente a entrega não ultrapassa a quantidade 12 equipamentos, pois é o limite que se tem no estoque. Portanto,

$$2x + 3y + z, \text{ (quantidade de equipamentos por entrega)}$$

e que não pode ultrapassar o limite diário, então:

$$2x + 3y + z \leq 12 \text{ (restrição 1)}$$

Observa-se que cada viagem utiliza um tempo determinado de serviço. O transporte de longa distância gasta 2 horas, e para o transporte de média e curta distância, gasta-se 1 hora. Diariamente o limite de tempo do serviço é de 8 horas. Portanto,

$$2x + y + z, \text{ (quantidade de horas por entrega)}$$

e que não pode ultrapassar o limite diário, então:

$$2x + y + z \leq 8 \text{ (restrição 2)}$$

Além dessas restrições observadas no problema, algumas outras fazem parte de uma interpretação mais apurada. De fato, não há como a empresa realizar uma quantidade negativa de viagens, ou seja, não existe - 3 viagens de longa, média ou curta distância. São chamadas as variáveis de não negatividade, portanto matematicamente temos:

$$x, \, y \text{ e } z \; \geq \; 0.$$

Passo 4 - Modelo:
Agora, de posse de todas as informações traduzidas matematicamente, criamos o modelo de programação linear:

$$\begin{array}{rcl} f(x, y, z) & = & 100x + 60y + 30z, \\ \text{sujeito a :} & & \\ & & 2x + 3y + z \leq 12, \\ & & 2x + y + z \leq 8, \\ & & x, y \text{ e z} \geq 0. \end{array}$$

Com o modelo de programação definido, utilizaremos o método geométrico para buscar a solução ótima do problema. Para obter as visualizações gráficas utilizaremos como ferramenta computacional o Geogebra.

Etapa 2 - Região Factível

Passo 1 - Entrada de dados:
Cada inequação do modelo devemos utilizar como entrada no Geogebra a sua equação relacionada, pois o programa não apresenta graficamente a inequação.

Na restrição 1, a inequação $2x + 3y + z \leq 12$ teremos a sua equação relacionada $2x + 3y + z = 12$. Na Figura 3.1 temos a representação da região que é uma plano em $\mathbb{R}^3$.

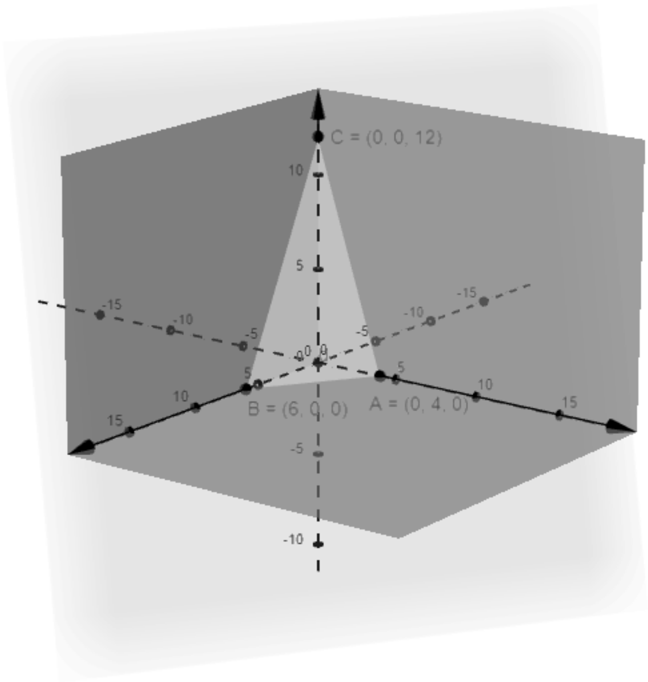

Figura 3.1: Representação geométrica da equação $2x + 3y + z = 12$

Observa-se que por se tratar de problemas com três variáveis positivas, devemos limitar a representação gráfica apenas ao primeiro octante. Para tal, incluímos as entradas dos planos $(x, y, 0)$, $(x, 0, z)$ e $(0, y, z)$, atribuindo-lhes intervalos necessários de acordo a visualização da intersecção de cada equação com os eixos coordenados.

Para a restrição 2, a inequação $2x + y + z \leq 8$ teremos a sua equação relacionada $2x + y + z = 8$. Na Figura 3.2 remos a representação da região que é uma plano em $\mathbb{R}^3$.

Passo 2 - Semiespaços:

Observamos que a equação relacionada a restrição 1 é um plano que intersecta os eixos em $A(0, 4, 0)$, $B(6, 0, 0)$ e $C(0, 0, 12)$ dividindo o octante em duas regiões: uma acima do plano, e outra abaixo do plano. Iremos definir qual dessas regiões representa a inequação analisada, para tanto, basta tomarmos um ponto qualquer do espaço R^3, por exemplo o ponto $(0, 0, 0)$ para analisarmos em qual região estará. Como $2.(0) + 3.(0) + 0 \leq 12$, temos que a região abaixo do plano representa a inequação, região formada pelo poliedro $ABCD$.

Observamos que a equação relacionada a restrição 2 é um plano que intersecta os eixos em $E(0, 0, 8)$, $F(4, 0, 0)$ e $G(0, 8, 0)$ dividindo o octante em duas regiões, e como feito anteriormente, definiremos qual dessas regiões representa a inequação analisada.

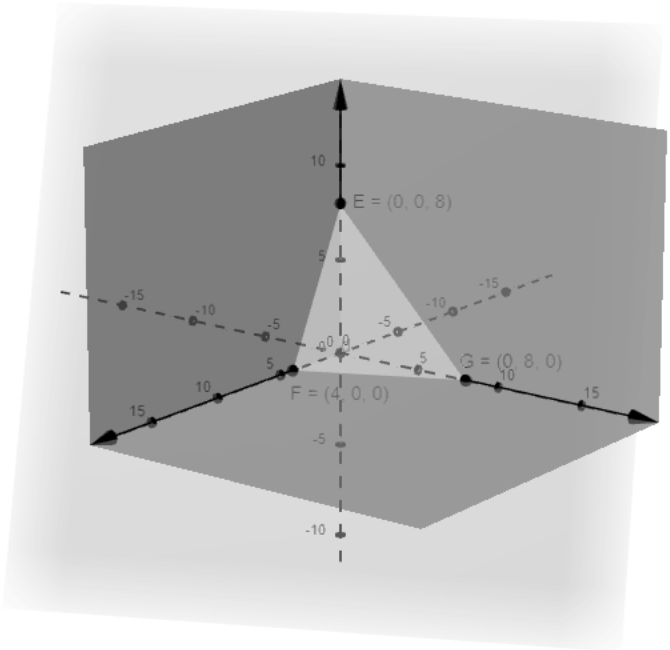

Figura 3.2: Representação geométrica da equação $2x + y + z = 8$

Tomando um ponto qualquer do espaço R^3, mais uma vez o ponto $(0, 0, 0)$ verificamos que $2.0 + 0 + 0 \leq 8$, logo temos que a região abaixo do plano representa a inequação, região que forma o poliedro $FGED$.
Passo 3 - Intersecção:
Analisando simultaneamente as duas regiões que representam as inequações do problema, ver Figura 3.3, e fazendo a intersecção entre elas para se obter a região que satisfaz ao mesmo tempo as duas desigualdades. Obtém-se o poliedro $BDFJKE$, conforme Firuga 3.4.

O poliedro $BDFJKE$ é a região factível, apresentados todos os pontos que obedecem as restrições do problema e dentre estes a ser analisado e escolhido, o ponto ótimo.

Etapa 3 - Solução ótima.

A solução ótima do problema será o ponto que maximiza a função objetivo $Z = 100x + 60y + 30z$. De posse dos pontos extremos encontrados a partir do poliedro $BDFJKE$: $A(0, 4, 0)$, $D(0, 0, 0)$, $E(0, 0, 8)$, $F(4, 0, 0)$,$J(3, 2, 0)$ e $K(0, 2, 6)$ e aplicando o teorema 2.1.9, construímos a tabela com o valor da função para todos os pontos extremos.

Dessa forma, será de $R\$420,00$ o lucro máximo diário que essa empresa pode atingir através de 3 entregas de longa distância, 2 entregas de média distância e nenhuma

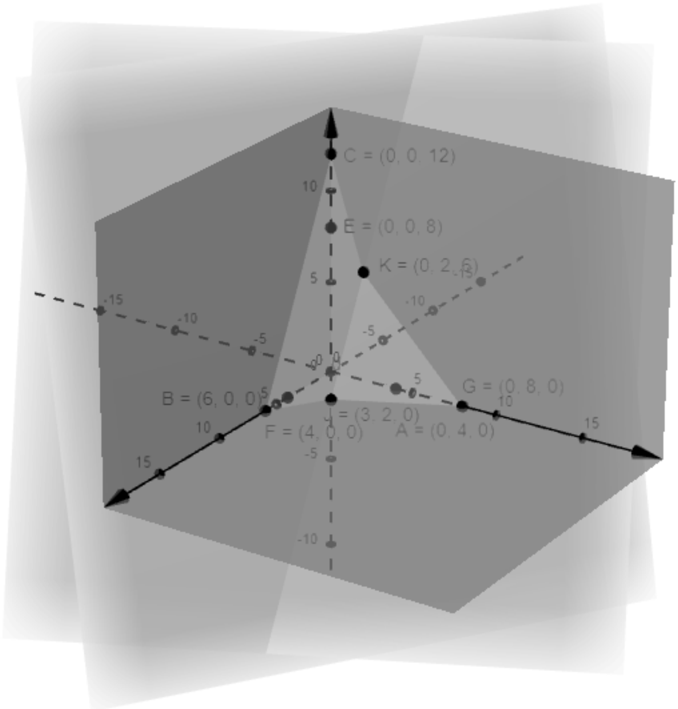

Figura 3.3: Apresentação simultânea das regiões de restrições

Extremo	Valor da função	Investigação
$A(0,4,0)$	$f(0,4,0) = 100.0 + 60.4 + 30.0 = 240$	
$D(0,0,0)$	$f(0,0,0) = 100.0 + 60.4 + 30.0 = 0$	valor mínimo
$E(0,0,8)$	$f(0,0,8) = 100.0 + 60.0 + 30.8 = 240$	
$F(4,0,0)$	$f(4,0,0) = 100.4 + 60.0 + 30.0 = 400$	
$J(3,2,0)$	$f(3,2,0) = 100.3 + 60.2 + 30.0 = 420$	valor máximo
$K(0,2,6)$	$f(0,2,6) = 100.0 + 60.2 + 30.6 = 300$	

de curta distância.

Vejam que não usamos a técnica de traçar as curvas de níveis da função objetivo e partir em direção do gradiente. Aparentemente os cálculos feitos para determinação do valor máximo e mínimo traduzem mais facilidade aos alunos do ensino médio, no entanto, se a região poligonal factível possuir um número grande de pontos extremos está técnica de investigação dos valores pode ser exaustivo e a utilização das curvas de níveis e o gradiente podem facilitar a obtenção mais rápida da solução ótima.

Problema 2

Problema de Produção: Uma fábrica de móveis produz três tipos de produtos: cadeiras, mesas e baús. No processo de fabricação, esses produtos passam por dois depar-

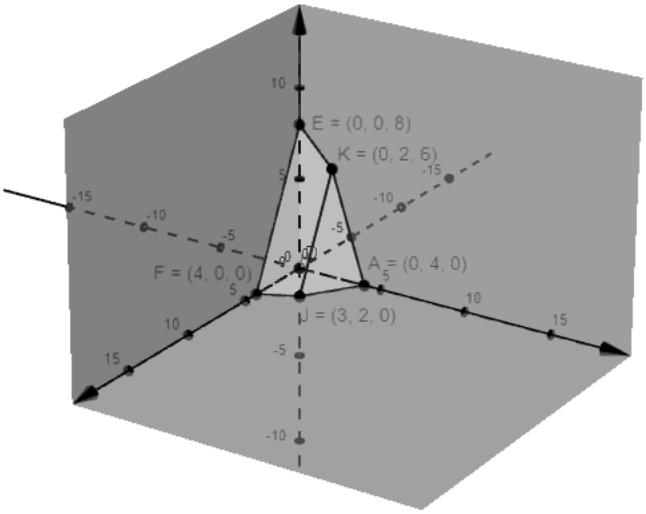

Figura 3.4: Poliedro $BDFJKE$ - Região que satisfaz as duas inequações

Departamento	Mesa	Cadeira	Baú	Capacidade Total
Montagem	3	3	2	30
Acabamento	6	4	$1,5$	36

tamentos: o departamento de montagem e o departamento de acabamento. A tabela a seguir mostra o tempo de cada produto em cada departamento e a capacidade total de cada departamento num período de uma semana. Deseja-se saber qual a melhor forma de produção para obter a maior receita para a empresa. Não é considerado aqui o material gasto para a produção dos móveis.

Além disso, os preços de venda de cada produto são:

- Cadeira: $R\$10,00$.
- Mesa: $R\$8,00$.
- Baú: $R\$1,00$.

Etapa 1 - Formulação Matemática

Passo 1 - Variáveis de decisão:

Observe que neste problema pode-se explorar a receita máxima obtida como foi solicitado e também estudar a quantidade máxima de produtos a serem fabricados. Porém, nessa última opção não seria aproveitado ao máximo as informações do problema.

Definimos as variáveis de decisão:

- x: quantidade de cadeiras produzidas
- y: quantidade de mesas produzidas
- z: quantidade de baús produzidos

Passo 2 - Objetivo do problema:
Como o objetivo será maximizar a receita com a venda dos produtos, de acordo com os preços apresentados, detalhadamente teremos: $10x$ para o valor de venda de cadeiras produzidas, $8y$ para a venda de mesas e $1z$ para baús. Assim, a função que teremos para maximizar a receita será da seguinte forma:

$$f(x, y, z) = 10x + 8y + 1z \text{ (função Objetivo)}$$

Passo 3 - Restrições:
As restrições encontradas no problema ficam por conta das capacidades de cada Departamento:

- $3x + 3y + 2z \leq 30$ (capacidade de montagem)
- $6x + 4y + 1,5z \leq 36$ (capacidade de acabamento)

E ainda a restrição de não-negatividade das variáveis de decisão: x, y e $z \geq 0$. De fato, não há como a fábrica produzir uma quantidade negativa de seus produtos.
Passo 4 - Modelo:
Conhecendo a função objetivo e restrições, definimos o modelo de programação:

$$\begin{aligned} Z(max) &= 10x + 8y + 1z, \\ \text{sujeito a :} & \\ & 3x + 3y + 2z \leq 30, \\ & 6x + 4y + 1,5z \leq 36, \\ & x, y \text{ e z} \geq 0. \end{aligned}$$

Etapa 2 - Região factível
Passo 1 - Entrada de dados:
Na restrição 1, a inequação $3x + 3y + 2z \leq 30$ teremos como entrada a sua equação relacionada $3x + 3y + 2z = 30$.

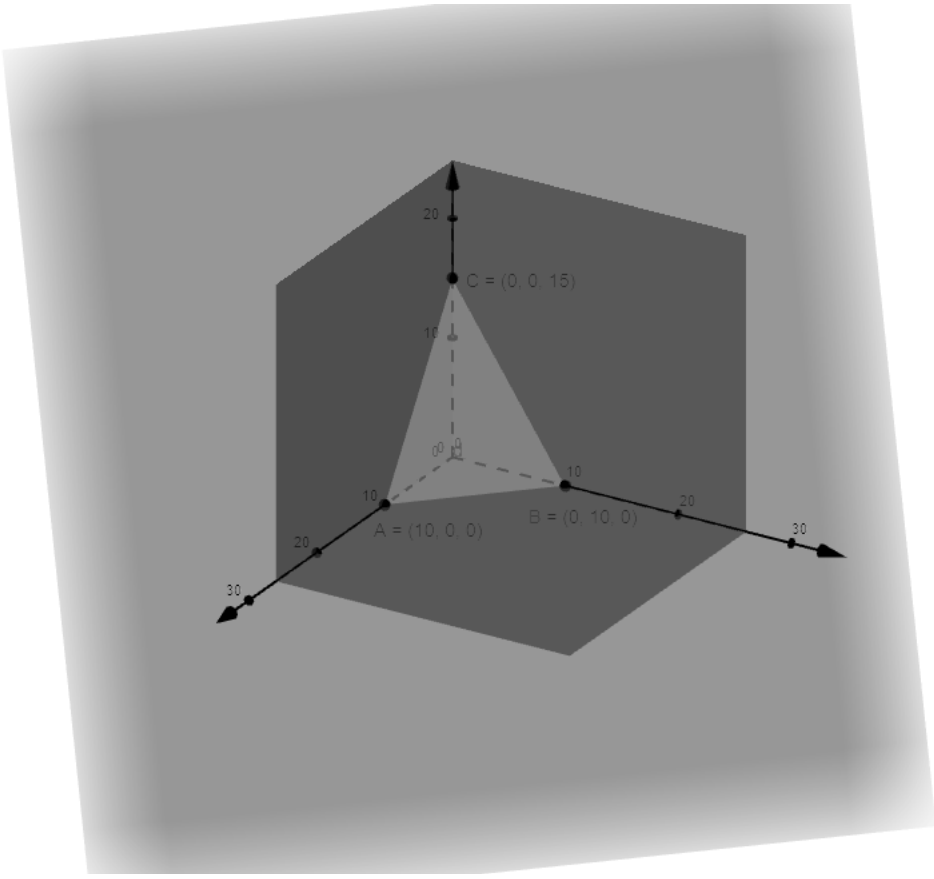

Figura 3.5: Representação geométrica da equação $3x + 3y + 2z = 30$

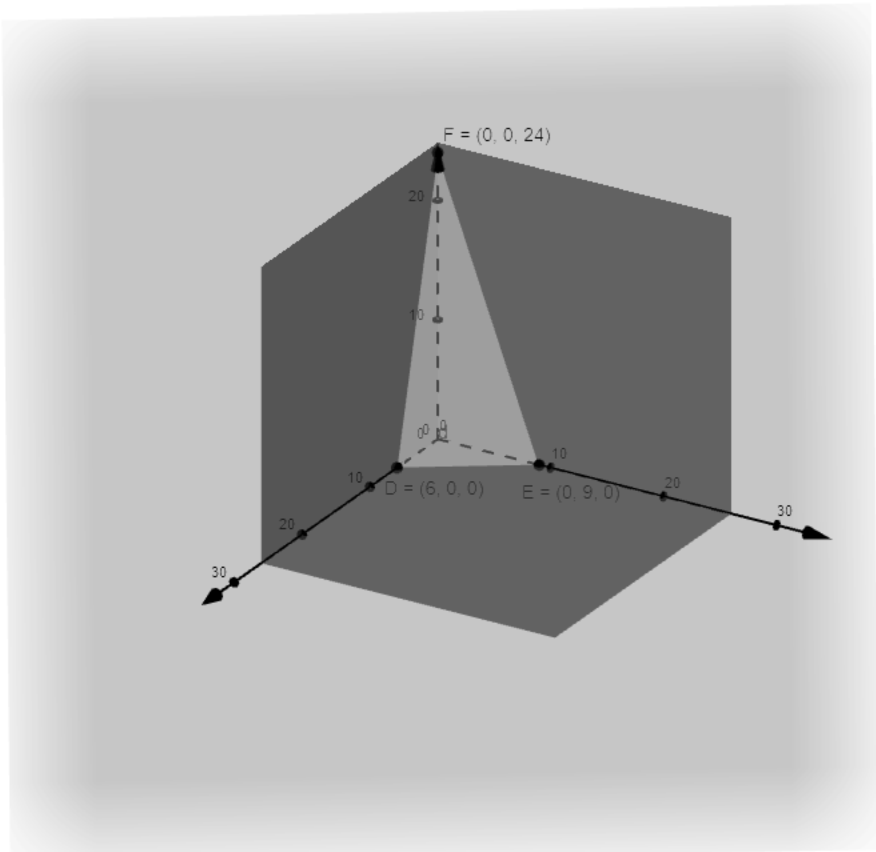

Figura 3.6: Representação geométrica da equação $6x + 4y + 1,5z = 48$

Passo 2 - Semiespaços:

Observamos que a equação relacionada a restrição 1 é um plano que intersecta os eixos em A (10,0,0), B (0,10,0) e C (0,15,0) dividindo o octante em duas regiões: uma acima do plano, e outra abaixo do plano. Iremos definir qual dessas regiões representa a inequação analisada, para tanto, basta tomarmos um ponto qualquer do espaço R^3, por exemplo o ponto (0,0,0) para analisarmos em qual região estará. Como $3.(0) + 3.(0) + 2.(0) \leq 30$, temos que a região abaixo do plano representa a inequação, região formada pelo poliedro $ABCD$.

Observamos que a equação relacionada a restrição 2 é um plano que intersecta os eixos em E (6,0,0), F (0,9,0) e G (0,0,24) dividindo o octante em duas regiões, e como feito anteriormente, definiremos qual dessas regiões representa a inequação analisada. Tomando um ponto qualquer do espaço R^3, mais uma vez o ponto (0,0,0) verificamos que $6.(0) + 4.(0) + 1,5.(0) \leq 36$, logo temos que a região abaixo do plano representa a inequação, região que forma o poliedro $FGED$.

Passo 3 - Intersecção:

Analisando simultaneamente as duas regiões que representam as inequações do problema, fazendo a intersecção entre elas para se obter a região que satisfaz ao mesmo tempo as duas desigualdades. Obtém-se o poliedro $DEFIHC$.

Passo 3 - Solução Ótima:

A solução ótima do problema será o ponto que maximiza a função objetivo $Z = 10x+8y+1z$. De posse dos pontos extremos encontrados a partir do poliedro $DEFIHC$: $D(0,0,0)$, $E(6,0,0)$, $F(0,9,0)$, $I(0,7.71,3.43)$,$H(3.6,0,9.6)$ e $C(0,0,15)$ e aplicando o teorema 2.1.9, construímos a tabela com o valor da função para todos os pontos extremos.

Extremo	Valor da função	Investigação
D(0,0,0)	f(0,0,0) = 10.0 + 8.0 + 1.0 = 0	valor mínimo
E(6,0,0)	f(6,0,0) = 10.6 + 8.0 + 1.0 = 60	
F(0,9,0)	f(0,9,0) = 10.0 + 8.9 + 1.0 = 72	valor máximo
I(0,7.71,3.43)	f(0,7.71,3.43) = 10.0 + 8.7,71 + 1.3,43 = 65,11	
H(3.6,0,9.6)	f(3.6,0,9.6) = 10.3,6 + 8.0 + 1.9,6 = 45,6	
C(0,0,15)	f(0,0,15) = 10.0 + 8.0 + 1.15 = 15	

Sendo assim, a receita máxima da fábrica será $R\$72,00$ com a produção de 9 mesas, dentro das restrições estabelecidas para montagem e acabamento.

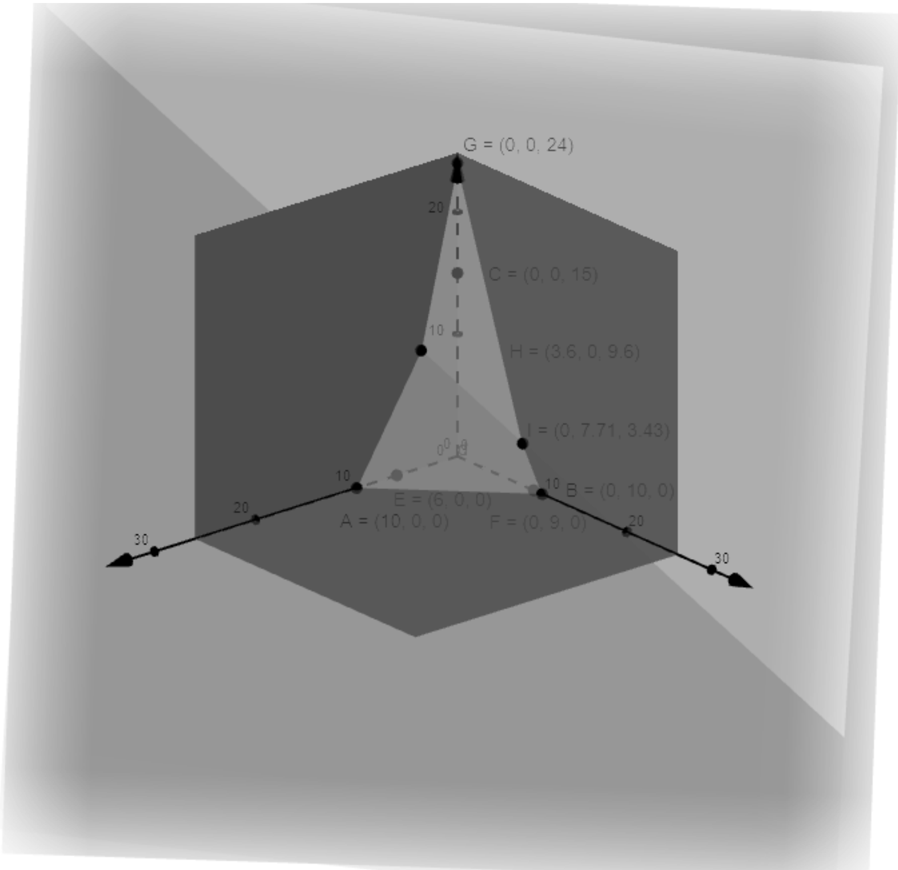

Figura 3.7: Apresentação simultânea das duas regiões: Intersecção das restrições

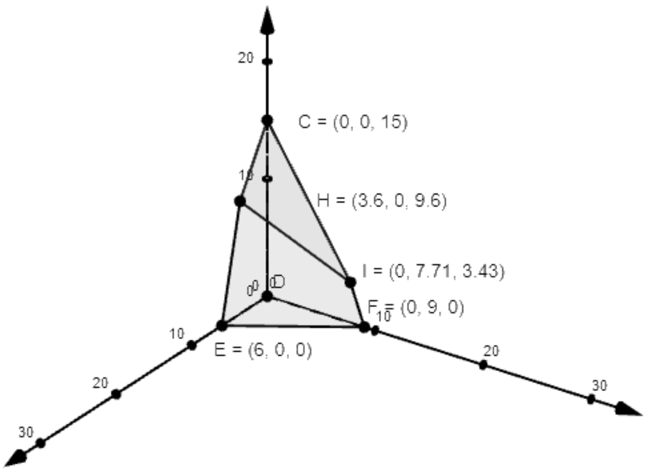

Figura 3.8: Poliedro DEFIHC - Região que satisfaz as duas inequações

Problema 3

Problema de Mistura: Três tipos de alimentos estão disponíveis na elaboração da merenda escolar de um grupo de crianças: biscoito, iogurte e pão. A composição desses alimentos e seus preços estão na tabela abaixo:

Alimento (porção)	Calorias	Lactose (g)	Açucar (g)	Gordura (g)	Preço (R$) (porção)
biscoito	400	3	2	2	0,5
iogurte	200	2	2	5	0,2
pão	500	0	4	5	0,8

As crianças devem ingerir pelo menos 500 calorias, $3g$ de lactose, $8g$ de gordura, e no máximo, $10g$ de açúcar. Formule o problema de modo que o custo seja minimizado.

Etapa 1 - Formulação Matemática

Passo 1 - Variáveis de decisão:

Para iniciar a construção do modelo, fazemos a análise textual e identificamos as variáveis de decisão através do que é solicitado no problema.

Definimos as variáveis de decisão:

- x: quantidade de porção de biscoito
- y: quantidade de porção de iogurte
- z: quantidade de porção de pão

Passo 2 - Objetivo do problema:

Como o objetivo será minimizar o custo da elaboração da merenda, de acordo com os valores apresentados, detalhadamente teremos: $0,2x$ para o custo por porção de biscoito, $0,2y$ para o custo por porção de iogurte e $0,8z$ para porção de pão. Assim, a função que teremos para minimizar esse custo será da seguinte forma:

$$f(x, y, z) = 0,5x + 0,2y + 0,8z \text{ (função Objetivo)}$$

Passo 3 - Restrições:

As restrições encontradas no problema ficam por conta das quantidades de ingestão de calorias e cada componente alimentar apresentado:

- $400x + 200y + 500z \geq 500$ (pelo menos 500 calorias)
- $2x + 5y + 5z \geq 8$ (pelo menos 8 g de gordura)
- $3x + 2y \geq 3$ (pelo menos 3 g de lactose)

- $2x + 2y + 4z \leq 10$ (no máximo 10 g de açucar)

E ainda a restrição de não-negatividade das variáveis de decisão: x, y e $z \geq 0$. De fato, não há como ingerir uma quantidade negativa de alimentos.

Passo 4 - Modelo:

Conhecendo a função objetivo e restrições, definimos o modelo de programação:

$$\begin{aligned} minimizar f &= 0,5x + 0,2y + 0,8z, \\ \text{sujeito a :} & \\ & 400x + 200y + 500z \geq 500, \\ & 2x + 5y + 5z \geq 8, \\ & 3x + 2y \geq 3, \\ & 2x + 2y + 4z \leq 10, \\ & x, y \text{ e z} \geq 0. \end{aligned}$$

Etapa 2 - Região factível

Passo 1 - Entrada de dados:

Na restrição 1, a inequação $400x+200y+500z \geq 500$ teremos como entrada a sua equação relacionada $400x + 200y + 500z = 500$.

Na restrição 2, a inequação $2x + 5y + 5z \geq 8$ teremos como entrada a sua equação relacionada $2x + 5y + 5z = 8$.

Na terceira restrição, a inequação $3x+2y \geq 3$ teremos como entrada a sua equação relacionada $3x + 2y = 3$.

Na quarta restrição, a inequação $2x + 2y + 4z \leq 10$ terá como entrada a sua equação relacionada $2x + 2y + 4z = 10$.

Passo 2 - Semiespaços:

Observamos que a equação relacionada a restrição 1 é um plano que intersecta os eixos em A (1.25,0,0), B (0,2.5,0) e C (0,0,1) dividindo o octante em duas regiões: uma acima do plano, e outra abaixo do plano. Iremos definir qual dessas regiões representa a inequação analisada, para tanto, basta tomarmos um ponto qualquer do espaço R^3, por exemplo o

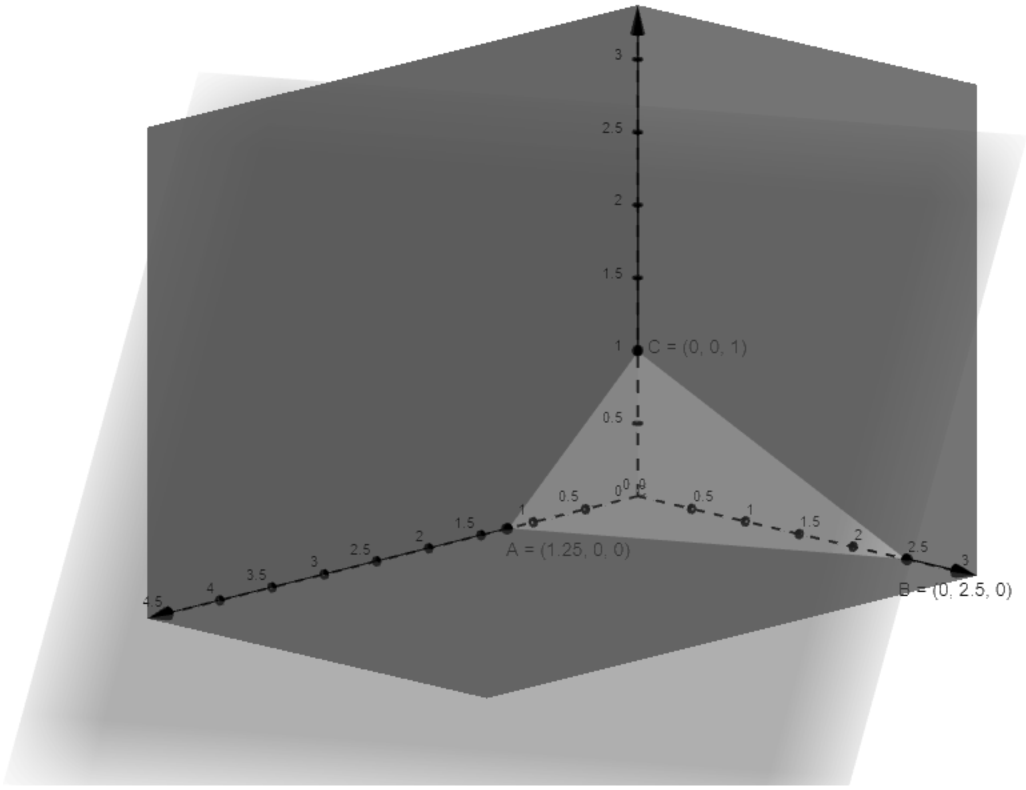

Figura 3.9: Representação geométrica da equação $400x + 200y + 500z = 500$

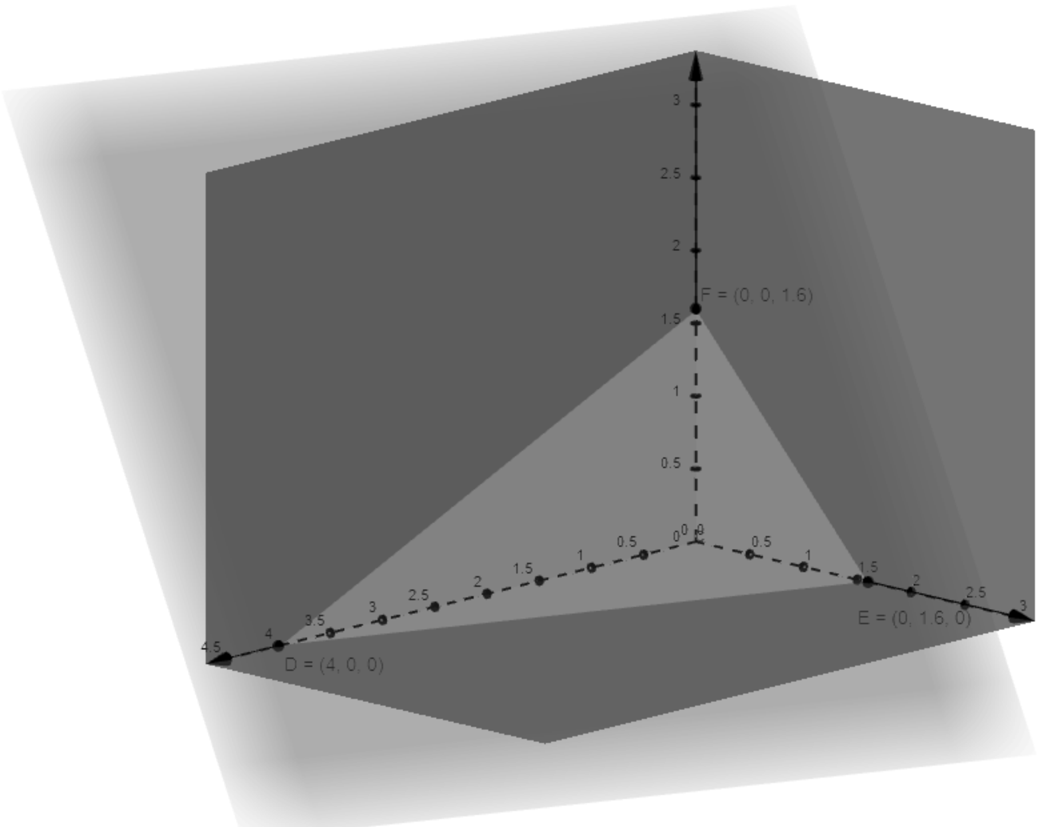

Figura 3.10: Representação geométrica da equação $2x + 5y + 5z = 8$

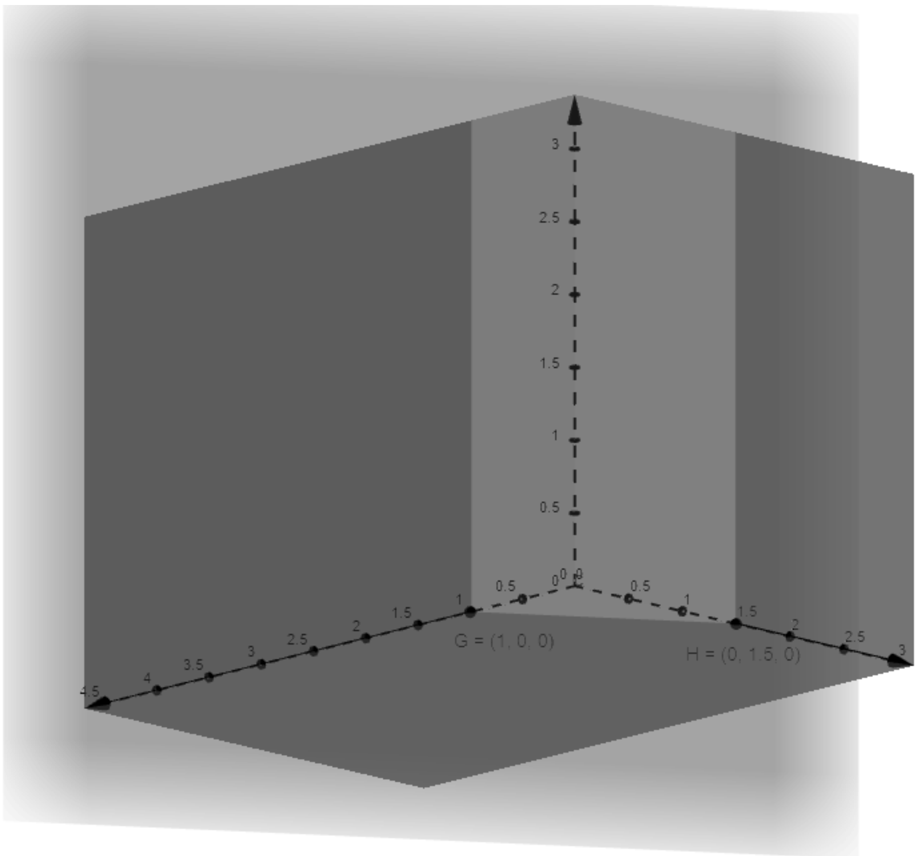

Figura 3.11: Representação geométrica da equação $3x + 2y = 3$

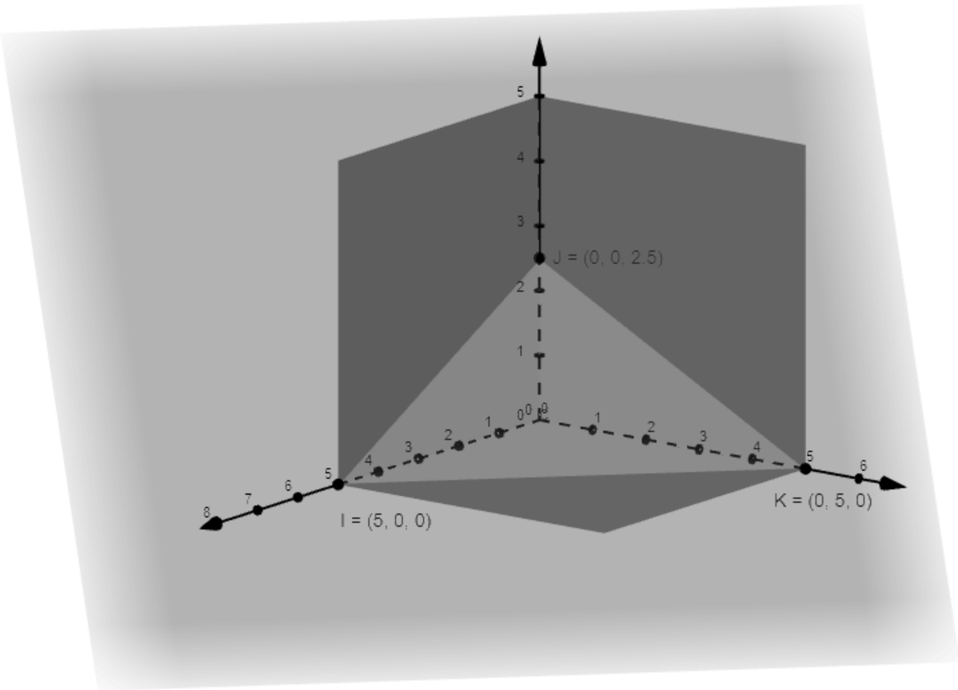

Figura 3.12: Representação geométrica da equação $2x + 2y + 4z = 10$

ponto (0,0,0) para analisarmos em qual região estará. Como $400.(0)+200.(0)+500.(0) \leq 500$, temos que a região acima do plano representa a inequação, região formada pelo poliedro $ABCO$.

Observamos que a equação relacionada a restrição 2 é um plano que intersecta os eixos em D (4,0,0), E (0,1.6,0) e F (0,0,1.6) dividindo o octante em duas regiões, e como feito anteriormente, definiremos qual dessas regiões representa a inequação analisada. Tomando um ponto qualquer do espaço R^3, ponto (0,0,0), verificamos que $2.(0)+5.(0)+8.(0) \leq 8$, logo temos que a região acima do plano representa a inequação, região que forma o poliedro $DEFO$.

Na terceira restrição, temos um plano vertical que intersecta os eixos em G (1,0,0) e H (0, 1.5, 0). Verificamos em $3.(0)+2.(0) \leq 3$ que o semiespaço que representa a inequação encontra-se no lado oposto ao ponto (0,0,0).

Na quarta restrição, verificamos em $2.(0)+2.(0)+4.(0) \leq 10$, temos que a região abaixo no plano representa a inequação, região formada pelo poliedro $IJKO$.

Passo 3 - Intersecção:

Inicialmente, analisando simultaneamente as regiões que representam as inequações $400x+200y+500z \geq 500$ (restrição 1) e $2x+5y+5z \geq 8$ (restrição 2), observa-se a existência de intersecção dos planos descritos pelas equações relativas a essas inequações e os planos OXY e OYZ (lembrando que devido as condições de não negatividade das variáveis de decisão, o problema fica restrito ao primeiro octante). Identificaremos esses pontos de intersecção. Primeiramente, usando o comando de construção de segmento de reta, selecionamos os pontos B e C para construir o segmento de reta BC, selecionamos os pontos F e H para construir o segmento de reta FH. Em seguida, utilizando o comando de intersecção de dois objetos selecionamos os segmentos de reta BC e FH obtendo o ponto $L(0, 0.9, 0.64)$. De maneira análoga, construímos os segmentos de reta AB e DH, obtendo o ponto $M(0.615, 1.269, 0)$. O segmento de reta LM é a intersecção entre os planos das equações $400x+200y+500z = 500$ e $2x+5y+5z = 8$. Determinando o poliedro $DFLBMECO$ da figura.

Usaremos o comando no geogebra de intersecção de dois objetos para auxiliar na construção da intersecção com a adição da equação $3x+2y = 3$. Definido o comando, selecionamos o plano da equação e o segmento de reta BC obtendo o ponto de intersecção $N(0, 1.5, 0.4)$; selecionando o plano da equação e o segmento de reta LM obtendo o ponto de intersecção $P(0.256, 1.116, 0.349)$. Construindo o segmento de reta DF, verificamos o ponto $Q(1, 0, 1.2)$ como a intersecção com o plano. Os segmentos de reta PQ e PN são as intersecções entre os planos $2x+5y+5z = 8$ e $3x+2y = 3$, $400x+200y+500z = 510$

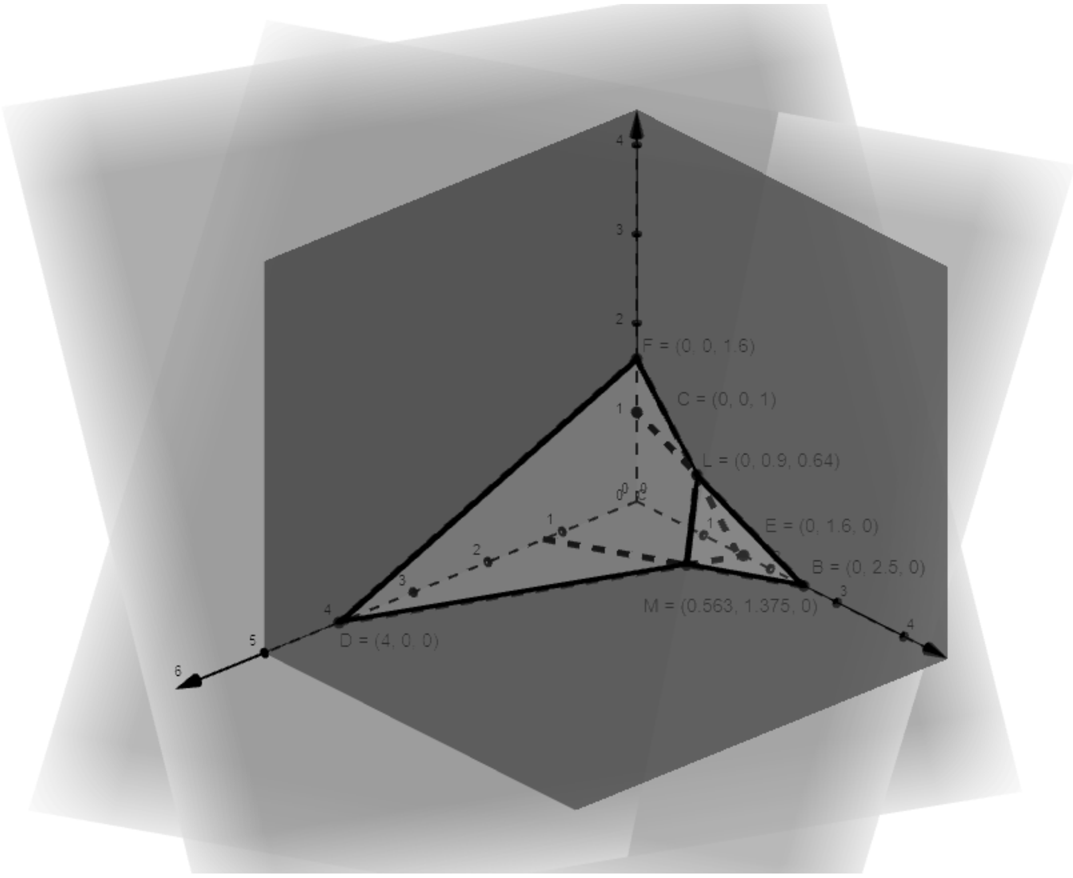

Figura 3.13: Construção geométrica da intersecção entre as equações $400x+200y+500z = 510$ e $2x + 5y + 5z = 8$

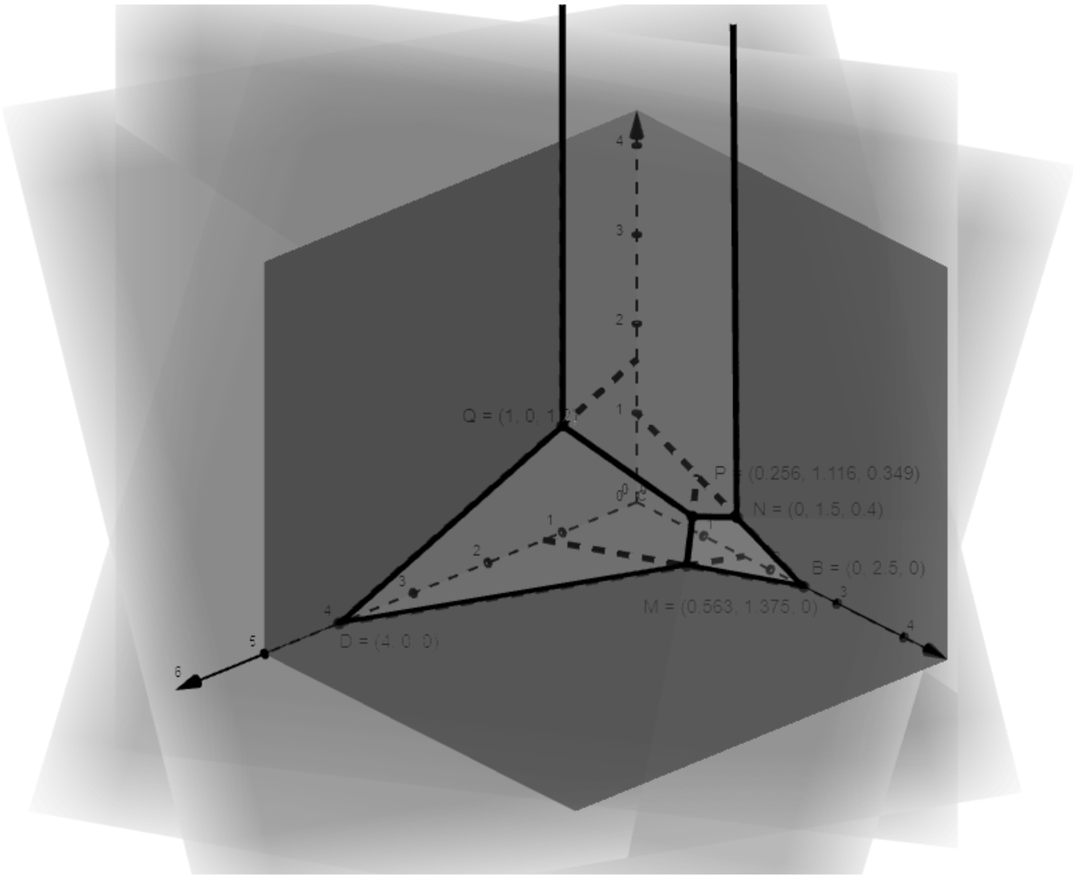

Figura 3.14: Construção geométrica da intersecção entre as equações $400x+200y+500z = 510$, $2x + 5y + 5z = 8$ e $3x + 2y = 3$

e $3x + 2y = 3$, respectivamente. Também teremos as intersecções do plano da equação com os planos OXZ e OYZ a partir dos pontos Q e N, respectivamente. Verificamos que essas referidas intersecções são semirretas verticais a partir dos pontos Q e N com sentido positivo.

Inserindo a última restrição, região determinada pela inequação $2x+2y+4z \leq 10$, identificamos a intersecção com o plano $3x+2y = 3$ através do comando de intersecção de dois objetos entre o próprio plano e as semirretas verticais, obtendo o segmento de reta ST. Identificamos as intersecções com os planos OXY, OYZ e OXZ, obtendo as semirretas SI, TK e KI, respectivamente.

Concluído o processo simultâneo das intersecções com as restrições, chegamos ao poliedro $STKIDQPNBM$, na Figura, que representa a região factível do problema.

Passo 3 - Solução Ótima:

A solução ótima do problema será o ponto que minimiza a função objetivo $Z = 0,5x +$

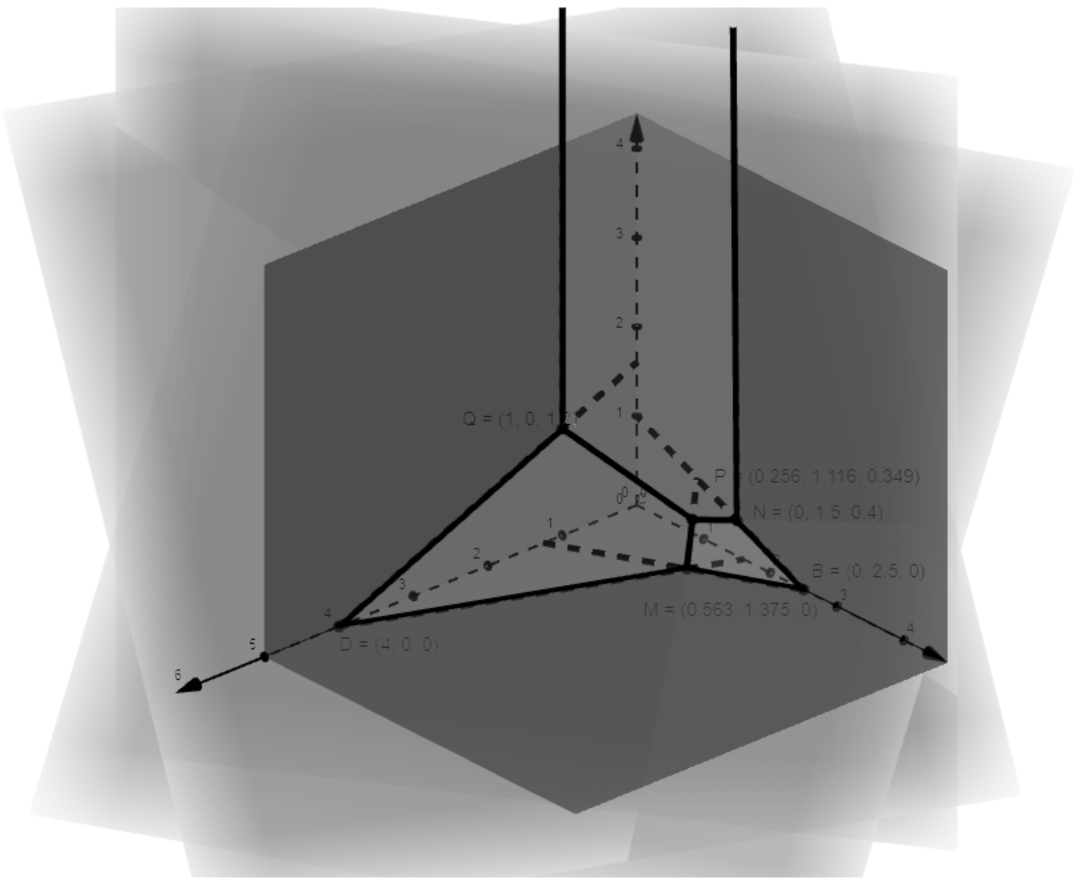

Figura 3.15: Poliedro $STKIDQPNBM$

$0,2y+0,8z$. Os pontos extremos encontrados a partir do poliedro $STKIDQPNBM$ são: $S(1,0,2)$, $T(0,1.5,1.75)$, $K(0,5,0)$, $I(5,0,0)$, $D(4,0,0)$, $Q(1,0,1.2)$, $P(0.256,1.116,0.349)$, $N(0,1.5,0.4)$, $B(0,2.5,0)$ e $M(0.563,1.375,0)$. Aplicando o teorema 2.1.9, construímos a tabela com o valor da função para todos os pontos extremos.

Extremo	Valor da função	Investigação
S(1,0,2)	f(1,0,2) = 0,5.1 + 0,2.0 + 0,8.2 = 2,1	
T(0,1.5,1.75)	f(0,1.5,1.75) = 0,5.0 + 0,2.1,5 + 0,8.1,75 = 1,7	
K(0,5,0)	f(0,5,0) = 0,5.0 + 0,2.5 + 0,8.0 = 1	
I(5,0,0)	f(5,0,0) = 0,5.5 + 0,2.0 + 0,8.0 = 2,5	valor máximo
D(4,0,0)	f(4,0,0) = 0,5.4 + 0,2.0 + 0,8.0 = 2	
Q(1,0,1.2)	f(1,0,1.2) = 0,5.1 + 0,2.0 + 0,8.1,2 = 1,46	
P(0.256,1.116,0.349)	f(0.256,1.116,0.349) = = 0,5.0,256 + 0,2.1,116 + 0,8.0,349 = 0,63	
N(0,1.5,0.4)	f(0,1.5,0.4) = 0,5.0 + 0,2.1,5 + 0,8.0,4 = 0,62	
B(0,2.5,0)	f(0,2.5,0) = 0,5.0 + 0,2.2,5 + 0,8.0 = 0,5	valor mínimo
M(0.563,1.375,0)	f(0.563,1.375,0) = 0,5.0,563 + 0,2.1,375 + 0,8.0 = 0,556	

Observa-se que o ponto ótimo encontrado $B(0,2.5,0)$ não contempla a restrição de integralidade, onde as variáveis de decisão devem ser apenas valores inteiros, objeto de estudo desse trabalho.

Seguindo a análise, em busca do ponto ótimo para solução do problema,temos que o vetor gradiente $\vec{v} = (0.5, 0.2, 0.8)$ aponta para onde a função objetivo cresce segundo as Proposições 2.1.5 e 2.1.6. Na figura a representação do Gradiente junto com a região factível.

Como pretendemos encontrar o custo mínimo, e já sabendo que em $B(0,2.5,0)$ o ponto ótimo não contempla solução do problema, passando por tal ponto temos a curva de nível $S : 0,5x + 0,2y + 0,8z = 0,5$. Logo, construindo curvas de nível $S' : 0,5x + 0,2y + 0,8z < 0,5$ não contemplam valores na região factível encontrada. Assim, vamos construir curvas de nível $S' : 0,5x + 0,2y + 0,8z > 0,5$ de forma a transladar adicionando valores suficientes que façam as curvas se aproximarem de pontos de coordenadas inteiras da região factível para que tenhamos uma solução. Isso acontece com a curva de nível $S : 0,5x + 0,2y + 0,8z = 0,6$, observa-se que o ponto de coordenadas inteiras mais próximo da solução ótima é ponto $(0,3,0)$, veja Figura .

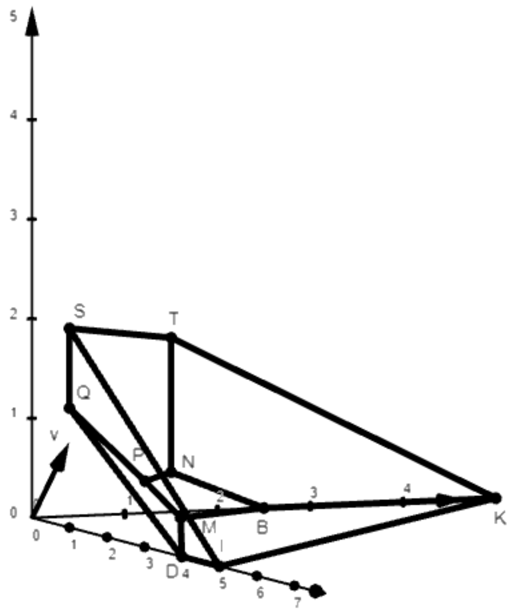

Figura 3.16: Vetor Gradiente $\vec{v} = (0.5, 0.2, 0.8)$

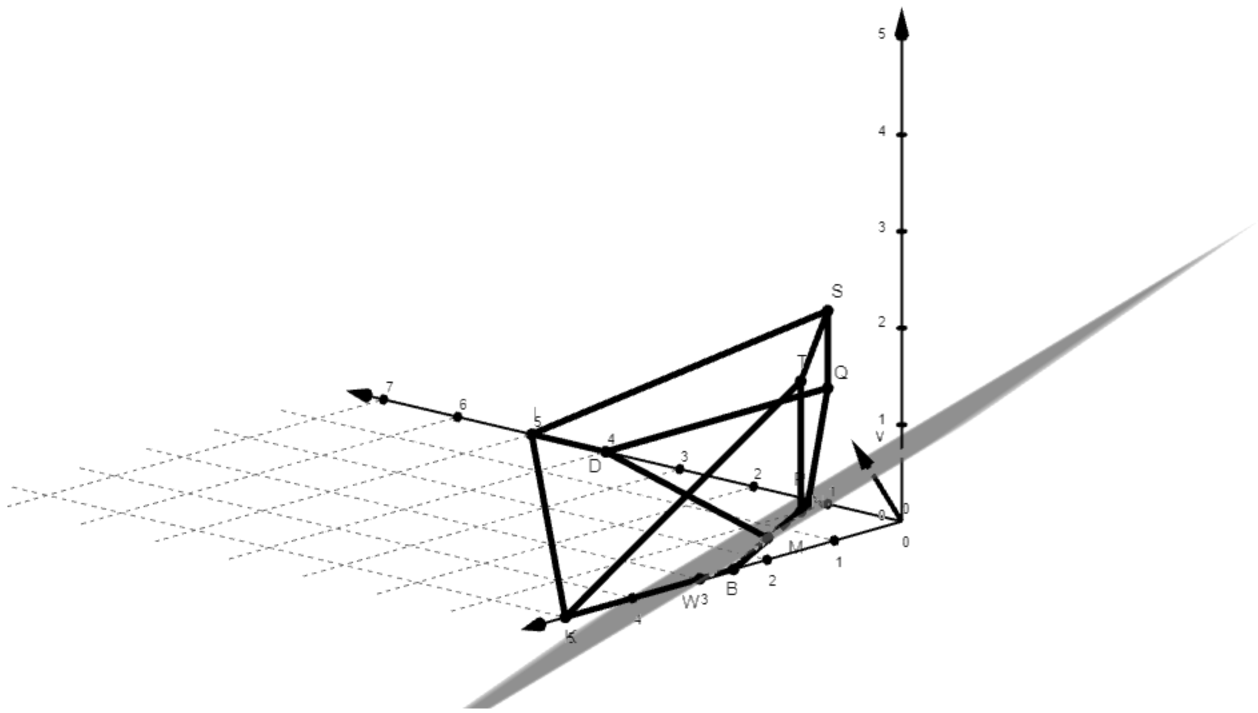

Figura 3.17: Solução inteira $W(0, 3, 0)$

Sendo assim, o custo mínimo para elaboração da merenda será de $0,5.0+0,2.3+0,8.0=0,6$. Ou seja, o custo mínimo de $R\$0,60$ obedecendo as restrições da dieta é atingido com três porções de iogurte.

3.2 Comentários

Ações como planejar, organizar, avaliar e tomar decisões são apenas alguns itens comuns ao nosso cotidiano, a resolução dos problemas acima só nos faz crer todas essas ações estão contidas no ensino da matemática. O mundo abstrato da matemática no que diz respeito a visualização geométrica, as vezes é carregado de dificuldades e incompreensão no processo ensino-aprendizagem, a ferramenta tecnológica traz a vantagem de manipular os dados e concretamente visualizar respostas simultaneamente. O estudo do método geométrico e a utilização do geogebra foram efetivamente a essência para compreensão e resoluções dos problemas. Além de tudo, reafirmar a ideia de que diversos conteúdos permitem ao professor trabalhar de forma integrada a álgebra e geometria aliado às tecnologias, pouco trabalhadas no ensino médio.

Considerações Finais

Neste trabalho propomos colaborar com o desenvolvimento de ensino e aprendizagem da Matemática no Ensino Médio, reportando alguns tópicos de Programação Linear como referência inicial, interligando área da geometria analítica, geometria plana, sistemas lineares à problemas práticos.

O desafio de reinventar e contribuir de forma significativa para o ensino da matemática formaram o ponto inicial desse trabalho. Uma elaboração de subsídios para professores realizada com a resolução desses problemas através do método geométrico, podemos pontuar e aplicar diversos conteúdos explorados ao longo do ensino médio.

Contemplar a resolução de problemas com modelos de otimização através da resolução geométrica provoca o caráter formativo e o status como ciência que a Matemática possui.

O uso de ferramentas tecnológicas já não é mais uma novidade, é cada vez mais natural nas escolas, incentivam o uso da criatividade, aprimoram o processamento de informações. O auxílio do Geogebra é de fundamental importância neste trabalho. Com o modo de representação em três dimensões (focamos em problemas com três variáveis) foi possível manipular e construir as representações geométricas relacionadas as inequações lineares, facilitando a interpretação e visualização das soluções.

De modo geral, através das discussões acreditamos ter, em certa medida, alcançado o objetivo geral de nossa pesquisa: Realizar o trabalho a respeito de um estudo de forma diferenciada para a resolução de problemas de otimização linear sob perspectiva geométrica.

Referências Bibliográficas

BARBOSA, J. C. *Modelagem Matemática na Sala de Aula.* [S.l.]: Perspectiva, Erechin (RS), 2003.

BRANDT, C. F.; THADEU, M. M. *Ensinar e aprender matemática: possibilidades para a prática educativa.* [S.l.]: Celia Finck Brandt, Méricles Thadeu Moretti (Org.). Ponta Grossa : Ed. UEPG, 2016.

BRASIL, B. Base nacional curricular comum (proposta). *Ministério da Educação, Brasília*, 2016.

BRASIL, M. da Educação (MEC). Secretaria de Educação Média e T. S. *Parâmetros Curriculares Nacionais: terceiro e quarto ciclos: Matemática.* [S.l.]: Brasília, DF: MEC/SEMTEC, 1998.

MACêDO, J.; LOPES, L.; GUSMãO, L. *Resolução de problemas de otimização nas aulas de Matemática.* [S.l.]: Educação Matemática Debate, 2018.

MUNDIM, K. C.; DELAVY, V. C. *Otimização global de processos usando o método generalized simulated annealing.* [S.l.]: Revista Processos Químicos. SENAI, 2008.

OLIVEIRA, U. S. *Aplicando a programação linear e a programação linear inteira como suporte para temas transversais no ensino de matemática no Ensino Médio.* Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, 2016.

SOUTO, F. C. F.; GUERIOS, E. *Resolução de problemas contextualizados: análise de uma ação didática para o ensino de matemática nos anos iniciais do ensino fundamental.* [S.l.]: Revista de Educação Matemática, v. 17, 2020.

Universidade Federal do Recôncavo da Bahia - UFRB
Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas / Colegiado do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Rua Rui Barbosa, 710, Centro, Campus Universitário de Cruz das Almas, Cruz das Almas - BA
CEP: 44380-000
Telefone: (75) 3621-2350
<http://www.ufrb.edu.br/profmat/>